ОТДЕЛЬНЫЕ ТЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Р. Н. КАРАСЁВ

Версия обновляется по адресу rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf.

В первом разделе даётся определение действительного числа и проверяется свойство полноты, изучаются пределы последовательностей и топология на прямой, определяется экспонента и тригонометрические функции.

Второй раздел содержит стандартные сведения про функции одной переменной, непрерывность, пределы и производные, теоремы о среднем, правило Лопиталя и формулу Тейлора.

В третьем разделе материал про евклидово пространство, топологию его подмножеств и отображения между ними приведён с использованием понятия метрического пространства; утверждения по возможности формулируются для произвольного метрического пространства. Даётся понятие о длине кривой и внутренней метрике и изучается частный случай внутренней метрики сферы.

Четвёртый раздел содержит стандартный материал про комплексные числа и многочлены, суммирование числовых и функциональных рядов и интеграл Римана для функции одной переменной, это делается сравнительно стандартным образом, но также рассмотрены более сложные вопросы про приближение непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами вплоть до теоремы Стоуна–Вейерштрасса в почти полной общности.

В пятом разделе после быстрого знакомства с мерой элементарных множеств и мерой Жордана в евклидовом пространстве излагаются основы меры и интеграла Лебега вплоть до теоремы Фубини и линейной замены переменных в интеграле. Делаются вычисления некоторых полезных интегралов, изучаются гамма и бета-функции. Изучается вопрос о справедливости формулы Ньютона–Лейбница в общем виде, в частности дифференцирование интеграла Лебега функции одной переменной по пределу интегрирования и достаточные условия дифференцируемости функции одной переменной почти всюду.

В шестом разделе рассматриваются основы дифференциальной геометрии по сравнительно стандартным темам: дифференцирование функций нескольких переменных и гладкие отображения, экстремумы функций нескольких переменных, касательные векторы и дифференциальные формы, интегрирование дифференциальных форм и замена переменных в интеграле, понятие гладкого многообразия и формула Стокса. Также обзорно представлены более продвинутые сведения: первообразные дифференциальных форм, интегрирование векторных полей, производная Ли и скобка Ли, степень отображения, основы римановой геометрии и примеры пространств общей теории относительности. Последние разделы этой главы не претендуют на полноту и интересующийся читатель отсылается к учебникам по соответствующим разделам геометрии.

В седьмом разделе рассматриваются ряды и интегралы Фурье, функциональные пространства и распределения (обобщённые функции). Использование интеграла Лебега позволяет навести некоторую строгость по сравнению со стандартными учебниками, работать сразу с пространствами L_p, дифференцировать абсолютно непрерывные функции в обобщённом смысле, грамотно работать с интегралом Фурье. Также, где это уместно, используется понятие функции ограниченной вариации и «вторая теорема о среднем». Дельта-функция рассматривается с разных сторон как борелевская мера на прямой, функционал на непрерывных функциях и как сингулярное распределение. В конце изложение становится обзорным и интересующемуся читателя будет логично дополнить его изучением учебника по функциональному анализу.

В восьмом разделе приводятся базовые сведения по комплексному анализу, вплоть до доказательства теоремы Римана об отображении для областей на комплексной плоскости, обсуждения универсальных накрытий и общей теоремы Римана для односвязных многообразий. Более продвинутые вопросы, связанный с понятием субгармонических функций или оператором Лапласа на комплексных поверхностях в этом разделе не рассматриваются, и при необходимости читатель может продолжить их изучение по соответствующим учебникам.

1. Свойства действительных чисел

1.1. Натуральные, целые, рациональные числа и множества. Мы будем считать известными натуральные $\mathbb{N}$, целые $\mathbb{Z}$, и рациональные числа $\mathbb{Q}$. Уточним, что от рациональных чисел мы предполагаем возможность складывать и умножать их, а также делить в тех случаях, где мы делим не на нуль, со свойствами коммутативности, дистрибутивности, ассоциативности. Также мы предполагаем возможность сравнивать рациональные числа и оперировать с неравенствами стандартным образом, прибавлять одно и то же число к обеим частям неравенства, умножать неравенство на положительное число, либо умножать неравенство на отрицательное число, переворачивая его знак.

Следует отметить, что рациональные числа образуют *множество*, то есть некий объект X, такой что для любого другого объекта Y мы можем узнать, является ли Y элементом X ($Y \in X$) или не является ($Y \not\in X$). На самом деле работа с множествами достаточно очевидна интуитивно, но в некоторых ситуациях можно довольно быстро получить парадокс. Как например, следующий *парадокс Бертрана Рассела*: Рассмотрим множество Z таких множеств, которые не имеют самого себя как элемент, или в более формальной записи

$$Z = \{X : X \not\in X\}.$$

Можно ли тогда утверждать, что $Z \in Z$? На самом деле нет, так как по определению из этого следует $Z \not\in Z$. Можно ли утверждать, что $Z \not\in Z$? Тоже нет, так как тогда по определению $Z \in Z$. В общем, с множеством Z явно что-то не так. Мы пока не будем глубоко исследовать этот вопрос, отметим лишь, что выражения «множество всех множеств» или «множество всех множеств таких что …», похоже, использовать нельзя.

Множество у нас определено как способ понять, является ли объект его элементом. В общем случае понять это может быть непросто, но самый простой способ задать множество — задать его явным перечислением, например множество цифр

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

тогда не составит труда для всякого объекта определить, является ли он элементом этого множества. Хотя конечно могут остаться философские вопросы, например, является ли цифра, набранная другим шрифтом, 9, элементом множества D, или не является; но в целом уже ясно, о чём идёт речь.

Для множеств определены операции объединения, пересечения и разности по формулам

$$\begin{aligned} x \in X \cup Y \quad &\Leftrightarrow \quad x \in X \text{ или } x \in Y \\ x \in X \cap Y \quad &\Leftrightarrow \quad x \in X \text{ и } x \in Y \\ x \in X \setminus Y \quad &\Leftrightarrow \quad x \in X \text{ и } x \not\in Y. \end{aligned}$$

Здесь $\Leftrightarrow$ читается как «тогда и только тогда, когда» или «равносильно».

Множество Y называется *подмножеством* множества X, $Y \subseteq X$, если всякий элемент Y является элементом X. Мы считаем, что допустимо строить подмножество множества X с помощью выражений типа

$$Y = \{x : x \in X, P(x)\},$$

где $P(x)$ — некоторое логическое условие на элемент x, которое может выполняться или нет. Мы не конкретизируем, какие именно условия допустимы, а какие нет; будем полагаться в этом на интуицию.

Если у множества нет элементов, оно называется пустым, $\emptyset$, оно является подмножеством любого другого множества. Множество *состоит из одного элемента*, если оно не пусто и любые два его элемента совпадают. Множество *состоит из двух элементов*, если у него найдутся два несовпадающих элемента и любой другой его элемент совпадает с одним из этих двух. Мы будем считать, что для всякого множества X можно говорить о *множестве всех подмножеств* X.

Более интересная операция — декартово произведение двух множеств $X \times Y$. Это множество упорядоченных пар (x, y), таких что $x \in X$ и $y \in Y$. Иначе говоря, если X и Y не пересекаются, то это просто множество двухэлементных подмножеств $P \subseteq X \cup Y$, таких что $X \cap P$ и $Y \cap P$ состоят ровно из одного элемента. Если множества пересекаются, то может понадобиться конструкция похитрее, над которой читателю предлагается подумать самостоятельно. Пока мы считаем интуитивно ясным понятие *множество состоит из одного элемента* и *множество состоит из двух элементов*, хотя развитие этого понятия приводит к нетривиальной концепции «мощности множества».

Определение 1.1. *Отображением* между двумя множествами $f : X \to Y$ называется подмножество $X \times Y$, такое что для всякого $x \in X$ найдётся ровно один $y \in Y$ такой что $(x, y) \in f$. Последнюю формулу часто пишут в виде $y = f(x)$ и говорят, что y — образ x при отображении f. Мы говорим, что X — *область определения*, Y — *область значений*.

Определение 1.2. *Композиция* отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — это отображение $h : X \to Z$ такое что

$$z = h(x) \Leftrightarrow \exists y \in Y : f(x) = y \text{ и } g(y) = z.$$

Пишут $h = g \circ f$.

Здесь $\exists \ldots : \ldots$ читается как «существует ... такое что ...». Можно проверить, что построенное в этом определении $h \subseteq X \times Z$ действительно является отображением.

Определение 1.3. *Образ* X при отображении $f : X \to Y$ определяется как

$$f(X) = \{y : y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)\}.$$

Для всякого подмножества $Z \subseteq Y$ определим *прообраз*

$$f^{-1}(Z) = \{x : x \in X, f(x) \in Z\}.$$

Определение 1.4. *Тождественное отображение* $\mathrm{id}_X : X \to X$ состоит из всех пар вида (x, x), где $x \in X$, то есть всегда $\mathrm{id}_X(x) = x$.

Определение 1.5. Отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ *взаимно обратны*, если $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ и $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Эквивалентно, $f \subseteq X \times Y$ превращается в $g \subseteq Y \times X$ при перестановке первого и второго элемента в упорядоченных парах. Отображение, у которого существует обратное, называется *обратимым* или *биекцией*.

Задача 1.6. Выясните, что означает существование у отображения $f : X \to Y$ *правого обратного* g, для которого $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Аналогично для *левого обратного*, для которого $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Говоря о множестве X, мы также можем говорить о множестве подмножеств X. Множество подмножеств X находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всевозможных отображений $\chi : X \to \{0, 1\}$. Более подробно, для подмножества $Y \subseteq X$ мы можем определить отображение

$$\chi_Y : X \to \{0, 1\}, \quad \chi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Y \\ 0, & \text{если } x \notin Y. \end{cases}$$

Оно называется *характеристическая функция* множества Y. Обратно, зная характеристическую функцию $\chi : X \to \{0, 1\}$, мы можем восстановить подмножество как $Y =$

$\chi^{-1}(1)$. Для любых множеств A и B множество всевозможных отображений $A \to B$ часто обозначают B^A, а с учётом приведённого выше описания множество подмножеств X можно обозначить как $\{0,1\}^X$, или несколько неформально 2^X.

Работая с декартовым произведением множества на себя, аналогично отображениям мы можем определить отношение эквивалентности и отношение порядка.

Определение 1.7. *Отношением эквивалентности* на множестве X называется

$$\sim \subseteq X \times X,$$

удовлетворяющее следующим свойствам (вместо $(x,y) \in \sim$ мы будем писать $x \sim y$):
(рефлексивность) $\forall x \in X, x \sim x$ (для любого $x \in X$ имеем $x \sim x$);
(симметричность) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ ($x \sim y$ тогда и только тогда, когда $y \sim x$);
(транзитивность) $x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует $x \sim z$).

При наличии на X отношения эквивалентности, для любого $x \in X$ можно определить

$$C_x = \{y : y \in X, y \sim x\},$$

это *класс эквивалентности*. Тогда легко проверить, что $C_x = C_y \Leftrightarrow x \sim y$ и $C_x \cap C_y = \emptyset \Leftrightarrow x \not\sim y$. Таким образом всё множество X разбивается на непустые классы эквивалентности, множество которых обозначается $X/\sim$, это *фактормножество по отношению эквивалентности*. Отображение, сопоставляющее x его класс эквивалентности C_x ($x \mapsto C_x$) называется *проекцией на фактормножество* $X \to X/\sim$.

Можно заметить, что любое отображение $f : X \to Y$ даёт отношение эквивалентности $x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. таким образом отношение эквивалентности $\sim$ восстанавливается из его проекции $X \to X/\sim$.

В качестве простого примера отношения эквивалентности можно привести *сравнимость целых чисел по модулю натурального числа* m. По определению,

$$x \equiv y \mod m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = km.$$

Соответствующее отображение на фактормножество $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m)$ называется «взятие остатка по модулю m».

Более важный для нас пример — множество рациональных чисел. Оно определяется как фактормножество множества дробей

$$F = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

по отношению эквивалентности

$$\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = p'q.$$

Задача 1.8. Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$ и рассматривается проекция на фактормножество $P : X \to X/\sim$. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ представляется в виде $f = g \circ P$, для некоторого $g : X/\sim \to Y$ тогда и только тогда, когда для любых $x' \sim x''$ оказывается $f(x') = f(x'')$.

Помимо отношений эквивалентности нас также интересуют отношения порядка:

Определение 1.9. *Отношением порядка* на множестве X называется

$$\preccurlyeq \subseteq X \times X,$$

удовлетворяющее следующим свойствам (вместо $(x,y) \in \preccurlyeq$ мы будем писать $x \preccurlyeq y$):
(рефлексивность) $\forall x \in X, x \preccurlyeq x$;
(антисимметричность) $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$ влечёт $x = y$;
(транзитивность) $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$.

Определение 1.10. Отношение порядка $\preccurlyeq \subseteq X \times X$ называется *линейным порядком*, если для любых двух $x, y \in X$ выполняется $x \preccurlyeq y$ или $y \preccurlyeq x$. Иногда не обязательно линейный порядок называют *частичным порядком*.

В качестве примера отношения порядка можно рассмотреть стандартный порядок на множестве целых чисел:

$$n \leqslant m \Leftrightarrow m - n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

и на множестве рациональных чисел:

$$\frac{p}{q} \leqslant \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow q'p \leqslant p'q.$$

Читателю предлагается в качестве упражнения проверить выполнение свойств отношения порядка.

Задача 1.11. Проверьте, что отношение на парах целых чисел

$$(n, m) \preccurlyeq (n', m') \Leftrightarrow n \leqslant n' \text{ и } m \leqslant m'$$

является отношением порядка, но не является линейный порядком.

Определение 1.12. Если множество X имеет отношение порядка, то элемент $x \in X$ называется *минимальным*, если не существует элементов $y \in X$ таких, что $y \preccurlyeq x$ и $y \neq x$. Аналогично можно определить *максимальный* элемент.

В случае линейно упорядоченного множества, минимальность элемента $x \in X$ можно сформулировать проще, как выполнение неравенства $x \preccurlyeq y$ для любого $y \in X$.

Задача 1.13. Докажите, что в линейно упорядоченном множестве минимальный элемент единственный.

Задача 1.14. Приведите пример, когда в частично упорядоченном множестве минимальный элемент не единственный.

Определение 1.15. Подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$ называется *конечным*, если оно либо пустое, либо имеет максимальный элемент.

Более подробно понятия конечного и бесконечного будут рассматриваться в разделе 1.13. Пока же при работе с натуральными числами полезно иметь в виду характеристическое свойство натуральных чисел, *аксиому математической индукции*: Если подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$ содержит число 1 и из того, что $n \in X$ следует, что $n + 1 \in X$, тогда $X = \mathbb{N}$.

Задача 1.16. Выведите из аксиомы математической индукции свойство «полной индукции»: Если подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$ обладает свойством

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall m < n, m \in X) \Rightarrow n \in X,$$

то $X = \mathbb{N}$.

[[Рассмотрите множество $Y = \{n : \forall m < n, m \in X\}$.]]

Задача 1.17. Докажите, что любой линейный порядок на конечном множестве всегда имеет минимальный элемент. Приведите пример (частичного) порядка на конечном множестве, у которого нет минимального элемента.

[[Считайте, что конечное множество является подмножеством $\mathbb{N}$, рассмотрите максимальный элемент конечного множества и проведите математическую индукцию но нему.]]

Далее мы будем работать с понятием последовательности и предела, поэтому даём соответствующее определение:

Определение 1.18. *Последовательность элементов множества* X — это отображение $s : \mathbb{N} \to X$. Для последовательностей часто пишут s_n вместо $s(n)$.

Имея в виду всю последовательность, часто пишут (s_n). Говоря «элемент последовательности» мы будем иметь в виду пару (n, s_n) из номера $n \in \mathbb{N}$ и значения s_n. Таким образом, последовательность может иметь одно значение, но последовательность всегда имеет бесконечно много элементов. Указанное соглашение будет важно, когда мы будем употреблять фразы «конечное число элементов последовательности» или «бесконечное число элементов последовательности».

1.2. **Пределы и фундаментальные последовательности, определение действительных чисел.** Обсудив базовые свойства множеств, мы собираемся более детально изучить множество рациональных чисел и понять, почему его надо расширять до множества действительных чисел. Сделаем несколько определений:

Определение 1.19. Если $a < x < b \in \mathbb{Q}$, то мы будем говорить, что интервал (a, b) (от a до b не включая концы) является *окрестностью* числа x.

Определение 1.20. Число $a_0 \in \mathbb{Q}$ является *пределом последовательности* (a_n) рациональных чисел, если для любой окрестности $U(a_0)$ найдётся номер N, такой что при $n \geqslant N$ выполняется $a_n \in U(a_0)$. Тогда пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$$

или $a_n \to a_0$ при $n \to \infty$; и говорят, что a_n стремится к a_0 при n стремящемся к бесконечности.

Определение предела последовательности удобно понимать так, что в любой окрестности $U(a_0)$ лежат все члены последовательности кроме конечного их числа (заодно определим, что подмножество $\mathbb{N}$ называется *конечным*, если у него есть максимальный элемент). Например, по определению легко проверить, что $1/n \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, легко проверить, что последовательность $(-1)^n$ не имеет предела.

Определение 1.21. Последовательность (a_n) рациональных чисел называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon), |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

В этом определении логическая формула посложнее. Словами можно передать её так: при достаточно больших n и m разность $|a_n - a_m|$ будет меньше любого наперёд заданного ε. Примером нефундаментальной последовательности является последовательность $(-1)^n$, или даже последовательность с $a_n = n$.

Лемма 1.22. *Если последовательность имеет предел, то она фундаментальна.*

Доказательство. Возьмём в определении предела окрестность $U(a_0)$, длина которой $\leqslant \varepsilon$, например $(a_0 - \varepsilon/2, a_0 + \varepsilon/2)$. Тогда с некоторых пор a_n, a_m будут лежать в $U(a_0)$ и значит тогда будет выполняться $|a_n - a_m| < \varepsilon$. □

Неформально говоря, проблема с рациональными числами состоит в том, что в них «нет» некоторых чисел, например $\sqrt{2}$, то есть числа, дающего в квадрате 2. Однако нам нетрудно построить фундаментальную последовательность c_n по такому принципу (это на самом деле конечные десятичные дроби):

$$c_n = \max\{m10^{-n} : m \in \mathbb{Z}, (m10^{-n})^2 \leqslant 2\}.$$

У нас всегда будет выполняться неравенство $c_n^2 < 2 < (c_n + 10^{-n})^2$ и если бы у этой последовательности был предел $c_0 \in \mathbb{Q}$, то по его определению можно было бы установить (далее это будет исследовано в более общем виде как «существование обратной функции»), что $c_0^2 = 2$.

Таким образом мы заключаем, что отсутствие пределов некоторых фундаментальных последовательностей рациональных чисел в множестве рациональных чисел является практически важной проблемой, которую хочется решить. Существует несколько способов расширить множество рациональных чисел так, чтобы фундаментальные последовательности имели пределы и выполнялись другие полезные свойства. Мы воспользуемся самой прямолинейной процедурой — «пополнением», тем более, что она имеет развитие при пополнении метрических пространств, нормированных пространств и т.п.

Определение 1.23. На множестве фундаментальных последовательностей рациональных чисел $c(\mathbb{Q})$ введём отношение эквивалентности

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon), |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

Фактормножество по этому отношению эквивалентности обозначим $\mathbb{R} = c(\mathbb{Q})/\sim$.

Проверим транзитивность этого отношения эквивалентности (остальные свойства очевидны):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N'(\varepsilon) : \forall n \geqslant N'(\varepsilon), |a_n - b_n| < \varepsilon \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists N''(\varepsilon) : \forall n \geqslant N''(\varepsilon), |b_n - c_n| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = \max\{N'(\varepsilon/2), N''(\varepsilon/2)\} : \forall n \geqslant N(\varepsilon),$$
$$|a_n - c_n| \leqslant |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Значит действительно можно говорить о фактормножестве.

Заметим, что всякому рациональному числу $x \in \mathbb{Q}$ соответствует фундаментальная последовательность (x), в которой все члены равны x. Нетрудно убедиться по определению, что при разных $x \neq y \in \mathbb{Q}$ такие последовательности не эквивалентны. Это даёт вложение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то есть мы действительно расширили множество рациональных чисел.

1.3. **Арифметические операции и сравнение действительных чисел.** Теперь нам нужно определить понятия арифметических операций и работу с неравенствами для действительных чисел. Определим сумму действительных чисел.

Определение 1.24. *Суммой последовательностей* (a_n) и (b_n) называется последовательность с членами $c_n = a_n + b_n$.

Лемма 1.25. *Сумма фундаментальных последовательностей фундаментальна. При замене последовательностей эквивалентными класс эквивалентности суммы не меняется.*

Доказательство. Первое утверждение верно, потому что (для достаточно больших m и n)

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \text{ и } |b_n - b_m| < \varepsilon/2 \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \varepsilon.$$

Второе верно потому что если $(a_n) \sim (a'_n)$, то для достаточно больших n

$$|a_n - a'_n| < \varepsilon \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a'_n + b_n)| < \varepsilon.$$

Аналогично происходит при замене b_n на b'_n. ☐

Так как класс эквивалентности суммы последовательностей не меняется при замене любого из слагаемых на эквивалентное, то таким образом определена операция $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, аналогично можно определить операцию $- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Коммутативность и ассоциативность сложения, нейтральность нуля и существование противоположного элемента следуют из того, что это всё выполняется на уровне последовательностей. Перед изучением произведения действительных чисел нам понадобится лемма.

Лемма 1.26. *Фундаментальная последовательность (a_n) ограничена, то есть существует M такое что $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant M$.*

Доказательство. Положим $\varepsilon = 1$ в определении фундаментальной последовательности. Тогда с номера $N = N(1)$ последовательность ограничена числом $|a_N|+1$. До этого были ещё некоторые члены последовательности, но в целом она ограничена максимальным из конечного набора чисел

$$\max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}.$$

□

Определение 1.27. *Произведением последовательностей* (a_n) и (b_n) называется последовательность с членами $c_n = a_n b_n$.

Лемма 1.28. *Произведение фундаментальных последовательностей фундаментально. При замене последовательностей эквивалентными класс эквивалентности произведения не меняется.*

Доказательство. По предыдущей лемме выберем число M, которое ограничивает все фигурирующие в утверждениях последовательности.

Тогда первое утверждение верно, потому что (для достаточно больших m и n)

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ и } |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow$$
$$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| \leqslant M|b_n - b_m| + M|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Второе верно потому что если $(a_n) \sim (a'_n)$, то для достаточно больших n

$$|a_n - a'_n| < \varepsilon/M \Rightarrow |a_n b_n - a'_n b_n| \leqslant M|a_n - a'_n| < \varepsilon.$$

Аналогично происходит при замене b_n на b'_n. □

Таким образом определена операция умножения $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Свойства ассоциативности, дистрибутивности и нейтральности единицы проверяются на уровне последовательностей.

Определим теперь знак действительного числа и следующий из этого определения линейный порядок действительных чисел. Заметим, что если $(a_n) \sim 0$, то это просто означает, что последовательность (a_n) стремится к нулю.

Лемма 1.29. *Если действительное число представлено фундаментальной последовательностью $(a_n) \not\sim 0$, то для некоторого рационального $\varepsilon > 0$ найдётся $N(\varepsilon)$, удовлетворяющее одному из свойств:*

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется $a_n > \varepsilon$ (тогда (a_n) называется положительной*);*

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется $a_n < -\varepsilon$ (тогда (a_n) называется отрицательной*).*

Доказательство. Если предел (a_n) не равен нулю, то найдётся маленькая окрестность $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \ni 0$, такая что бесконечно много членов последовательности не попадает в неё. Без ограничения общности пусть бесконечно много раз $a_n \geqslant 2\varepsilon$ (случай когда бесконечно много раз $a_n \leqslant -2\varepsilon$ рассматривается также). Возьмём $\varepsilon > 0$ и $N(\varepsilon)$ в определении фундаментальности (a_n) и для любого $m \geqslant N(\varepsilon)$ возьмём какое-нибудь $n \geqslant N(\varepsilon)$ так, чтобы $a_n \geqslant 2\varepsilon$ (таких n бесконечное число и среди них есть не меньшие $N(\varepsilon)$). Тогда

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, a_n \geqslant 2\varepsilon \Rightarrow a_m > \varepsilon.$$

Это уже выполняется для всех $m \geqslant N(\varepsilon)$. □

Заметим, что определение положительности и отрицательности не зависит от класса эквивалентности, так как если начиная с некоторого момента $a_n > \varepsilon$ и начиная с некоторого момента $|a_n - b_n| < \varepsilon/2$, то начиная с некоторого (возможно более позднего) момента $b_n > \varepsilon/2$. Таким образом, знак ненулевого действительного числа определён корректно. Сумма положительных чисел тогда оказывается положительной, сумма отрицательных — отрицательной. Произведение чисел одного знака будет положительным, а произведение чисел разных знаков — отрицательным.

Сравнение действительных чисел происходит по правилу $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$. Транзитивность

$$a < b \text{ и } b < c \Rightarrow a < c$$

следует из того, что сумма положительных чисел положительна и $c-a = (c-b)+(b-a)$. Остальные свойства неравенств проверяются аналогично.

Теперь разберёмся с делением действительных чисел.

Лемма 1.30. *Если $(a_n) \not\to 0$ и фундаментальна, то последовательность b_n, заданная для достаточно больших n формулой $b_n = 1/a_n$, а для остальных заданная произвольно, тоже фундаментальна.*

Доказательство. По предыдущей лемме найдётся положительное δ, такое что $|a_n| > \delta$ для достаточно больших n. Тогда можно написать

$$|b_n - b_m| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n a_m|} \leqslant \frac{1}{\delta^2}|a_n - a_m|.$$

При достаточно больших n и m мы можем гарантировать $|a_n|, |a_m| > \delta$ и следовательно $|a_n - a_m| < \varepsilon\delta^2$. Тогда для достаточно больших n и m будет $|b_n - b_m| < \varepsilon$. ☐

Заметим, что работая с понятием предела последовательности и фундаментальной последовательности, мы всегда можем изменить последовательность в конечном числе позиций (для конечного числа индексов), не меняя предела, не меняя её фундаментальности и не меняя её класс эквивалентности в множестве фундаментальных последовательностей. Действительно, взяв какое-либо конкретное $M \in \mathbb{N}$ мы можем заменить все $N(\varepsilon)$ в определениях на $N'(\varepsilon) = \max\{N(\varepsilon), M\}$, тогда утверждение из определения продолжает быть верным и в нём перестают участвовать члены последовательности с индексами $n < M$. В частности, последовательность можно считать неопределённой для конечного числа индексов, если нас интересует только её предел или её фундаментальность.

Предыдущая лемма устанавливает существование обратного по умножению b для любого ненулевого действительного числа a. Обратное единственно, так как если есть другое обратное b', то

$$b = b(ab') = (ba)b' = b'.$$

Докажем следующее полезное свойство («архимедовость») действительных чисел:

Теорема 1.31. *Для всякого действительного числа α найдётся большее его целое и меньшее его целое.*

Доказательство. Представим α последовательностью (a_n). По лемме 1.26 эта последовательность ограничена по модулю некоторым рациональным числом $p/q > 0$, а значит она ограничена по модулю и целым числом p. Тогда последовательность $(p - a_n)$ состоит из неотрицательных чисел и представляет неотрицательное действительное число. Это означает, что $\alpha \leqslant p$ по определению. Аналогично доказывается, что $\alpha \geqslant -p$. ☐

Следствие 1.32. *Для всякого положительного действительного числа α найдётся натуральное n, такое что $\alpha > 1/n$.*

Доказательство. Найдётся целое $n > 1/\alpha$, которое очевидно должно быть натуральным. Домножив это неравенство на положительное α и поделив на положительное n, получим $\alpha > 1/n$. □

1.4. **Полнота множества действительных чисел.** Заметим теперь, что определение предела и фундаментальной последовательности действительных чисел такое же, как в случае рациональных. Однако нам удобно будет дать эквивалентное определение предела:

Определение 1.33. Число $a_0 \in \mathbb{R}$ является *пределом последовательности* (a_n) действительных чисел, если для любого действительного $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, такой что при $n \geqslant N$ выполняется $|a_n - a_0| < \varepsilon$. Тогда пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$$

или $a_n \to a_0$ и говорят, что a_n стремится к a_0 при $n \to \infty$.

Например, следствие 1.32 теперь может быть сформулировано так: «последовательность действительных чисел $(1/n)$ стремится к нулю». Это важно, так как вследствие этого предыдущее определение нам достаточно проверить для рациональных $\varepsilon > 0$. А именно, если нам дано положительное $\varepsilon \in \mathbb{R}$, то мы найдём k такое, что $0 < 1/k < \varepsilon$. Подставив $1/k$ вместо ε в определение и получив N, мы обнаружим, что это N годится и для исходного ε. Аналогичное верно для определения фундаментальности последовательности действительных чисел, ε в нём достаточно рассматривать только рациональные.

Лемма 1.34. *Если число $\alpha \in \mathbb{R}$ представлено фундаментальной последовательностью рациональных (a_n), то в смысле определения предела последовательности действительных чисел*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Доказательство. По определению предела мы должны доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ для достаточно больших n выполняется неравенство действительных чисел

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon,$$

причём по замечанию перед формулировкой леммы можно считать $\varepsilon > 0$ рациональным. Это неравенство равносильно выполнению двух неравенств действительных чисел

$$a_n - \alpha - \varepsilon < 0, \quad a_n - \alpha + \varepsilon > 0.$$

Лемма 1.29 определяет знак действительного числа и мы будем её использовать для интерпретации этих неравенств. Для установления первого неравенства мы должны проверить, что представляющая действительное число $a_n - \alpha - \varepsilon$ последовательность рациональных чисел $(a_n - a_m - \varepsilon)_m$ (n фиксировано, а последовательность индексируется $m \in \mathbb{N}$) при достаточно больших m состоит из рациональных чисел, меньших некоторого фиксированного отрицательного рационального числа. Во втором неравенстве нам надо проверить, что последовательность $(a_n - a_m + \varepsilon)_m$ при достаточно больших m состоит из рациональных чисел, больших некоторого фиксированного положительного рационального числа.

По определению фундаментальности (a_n) при достаточно большом n и всех $m \geqslant n$ будет выполняться неравенство для рациональных чисел $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Тогда при достаточно больших n и всех $m \geqslant n$ будут выполняться неравенства

$$a_n - a_m - \varepsilon < -\varepsilon/2, \quad a_n - a_m + \varepsilon > \varepsilon/2.$$

Это как раз означает, что при достаточно больших n оказывается

$$a_n - \alpha - \varepsilon < 0, \quad a_n - \alpha + \varepsilon > 0.$$

□

Лемма 1.35. *Между двумя разными действительными числами есть рациональное.*

Доказательство. Пусть $a < b \in \mathbb{R}$, а $c = (a+b)/2$ лежит между ними. Возьмём $\varepsilon = c - a = b - c > 0$, тогда

$$(a, b) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

Возьмём теперь фундаментальную последовательность рациональных чисел (c_n), представляющую c. Она стремится к c по предыдущей лемме, следовательно рациональные числа c_n для достаточно больших n попадают в $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) = (a, b)$. □

Теорема 1.36 (Полнота множества действительных чисел)**.** *Последовательность действительных чисел имеет предел в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Из сходимости последовательности к числу следует её фундаментальность, аналогично доказанному для рациональных чисел. Обратно, пусть у нас есть фундаментальная последовательность действительных чисел (a_n), представим каждое a_n как предел последовательности рациональных чисел $(a_{n,k})_k$ (последовательность индексируется числом k).

Так как

$$\lim_{k\to\infty} a_{n,k} = a_n,$$

то из элементов $a_{n,k}$ можно выбрать рациональное b_n, такое что $|a_n - b_n| < 1/n$. Тогда последовательность (b_n) является последовательностью рациональных чисел, эквивалентной (a_n) в смысле, аналогичном эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Фундаментальность (b_n) проверяется с помощью неравенства

$$|b_n - b_m| \leqslant |a_n - a_m| + \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

в котором при достаточно больших n и m будет выполняться $|a_n - a_m| < \varepsilon/3$, и будет выполняться $1/n, 1/m < \varepsilon/3$ по следствию 1.32.

Последовательность (b_n) представляет некоторое число $b \in \mathbb{R}$ и стремится к нему. Это значит, что для $\varepsilon > 0$ при $n \geqslant N(\varepsilon/2)$ будет $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Тогда будет выполняться и $|a_n - b| < \varepsilon/2 + 1/n$, что при достаточно большом n даст $|a_n - b| < \varepsilon$. То есть b — это предел (a_n). □

Дадим определения бесконечного предела последовательности:

Определение 1.37. Для последовательности действительных чисел (a_n)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists N(x) : \forall n \geqslant N(x), a_n > x;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists N(x) : \forall n \geqslant N(x), a_n < x.$$

Можно также переформулировать это определение в терминах окрестностей, считая всякий интервал $(x, +\infty)$ окрестностью $+\infty$, и всякий $(-\infty, x)$ — окрестностью $-\infty$.

Условимся говорить, что *последовательность имеет предел*, если она имеет конечный предел или предел равный $+\infty$ или $-\infty$, будем говорить, что *последовательность сходится*, если она имеет конечный предел в $\mathbb{R}$. Можно даже ввести обозначение для *расширенной числовой прямой*, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. При этом мы считаем, что $-\infty$ меньше любого числа, а $+\infty$ больше любого числа, то есть на расширенной числовой прямой имеется линейный порядок.

Определение 1.38. Последовательность действительных чисел (a_n)
ограничена сверху, если найдётся $M \in \mathbb{R}$, такое что $a_n \leqslant M$ для всех n;
ограничена снизу, если найдётся $M \in \mathbb{R}$, такое что $a_n \geqslant M$ для всех n;
ограничена, если найдётся $M \in \mathbb{R}$, такое что $|a_n| \leqslant M$ для всех n.

Определение 1.39. Последовательность действительных чисел (a_n)
монотонно возрастает, если для любого n выполняется $a_n \leqslant a_{n+1}$;
монотонно убывает, если для любого n выполняется $a_n \geqslant a_{n+1}$.

Если неравенства строгие, то говорят, что последовательность *строго возрастает* и *строго убывает* соответственно.

Теорема 1.40. *Монотонная последовательность действительных чисел имеет предел, если она ограничена, то этот предел конечен.*

Доказательство. Пусть последовательность (a_n) возрастает, без ограничения общности. Если она неограничена сверху, то запишем отрицание определения ограниченности: для любого $M \in \mathbb{R}$, найдётся $n = N(M)$, такое что $a_n > M$. Так как последовательность монотонно возрастает, то отсюда следует, что $a_n > M$ при $n \geqslant N(M)$. А это есть определение стремления к $+\infty$.

Так что остаётся показать, что возрастающая и ограниченная сверху (а значит и снизу) последовательность имеет конечный предел. Нам надо доказать, что последовательность фундаментальна и использовать теорему 1.36. Предположим противное и выпишем отрицание фундаментальности

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n, m \geqslant N : |a_n - a_m| \geqslant \varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать $n < m$ и $a_m - a_n \geqslant \varepsilon$. Найдём одну пару таких чисел a_{n_1}, a_{m_1}, чтобы $a_{m_1} \geqslant a_{n_1} + \varepsilon$. Положим в отрицании $N = m_1 + 1$ и найдём ещё одну пару a_{n_2}, a_{m_2}, чтобы $a_{m_2} \geqslant a_{n_2} + \varepsilon$ и $n_2 > m_1$. Продолжая так далее, будем находить пары a_{n_k}, a_{m_k}, чтобы $a_{m_k} \geqslant a_{n_k} + \varepsilon$ и $n_k > m_{k-1}$. Из монотонности последовательности также последует, что $a_{n_k} \geqslant a_{n_{k-1}} + \varepsilon$, то есть в итоге

$$a_{n_k} \geqslant a_{n_1} + (k-1)\varepsilon.$$

Отсюда очевидно, что последовательность неограничена сверху, противоречие. □

1.5. **Переход к пределу в неравенствах, единственность предела, вложенные отрезки.** Докажем утверждения, связанные с пределами и неравенствами.

Лемма 1.41. *Если последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, то для достаточно больших n будет выполняться $a_n < b_n$.*

Доказательство. Найдём число c между a и b. Для конечных a и b можно взять полусумму, а если, к примеру, $a \in \mathbb{R}, b = +\infty$, то можно положить $c = a + 1$. Тогда применим определение предела к окрестностям $U(a) = (-\infty, c)$ и $U(b) = (c, +\infty)$. Для достаточно больших n (в смысле обоих определений) мы будем иметь $a_n < c < b_n$. □

Взяв в предыдущей лемме одну и ту же последовательность, мы получим:

Следствие 1.42. *Всякая последовательность имеет единственный предел.*

А переформулировов лемму в обратную сторону, мы получим:

Теорема 1.43 (Предельный переход в неравенстве). *Если $a_n \leqslant b_n$ для достаточно больших n и последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Пример $a_n \equiv 0, b_n = 1/n$ показывает, что при переходе к пределу в строгом неравенстве итоговое неравенство всё равно может оказаться нестрогим.

Теорема 1.44 (Теорема о двух милиционерах). *Если $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ для достаточно больших n, и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = x$, то $\lim_{n\to\infty} b_n = x$.*

Доказательство. Возьмём окрестность $U(x) \ni x$. Для достаточно больших n оказывается $a_n, c_n \in U(x)$ по определению предела. Тогда и b_n тоже будет в $U(x)$. □

Определение 1.45. Последовательность отрезков $([a_n, b_n])_n$ называется *последовательностью вложенных отрезков*, если выполняются включения $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ для любого n.

Определение 1.46. Последовательность вложенных отрезков $([a_n, b_n])_n$ называется *стягивающейся*, если длины отрезков стремятся к нулю, $b_n - a_n \to 0$.

Теорема 1.47. *Последовательность вложенных отрезков имеет непустое пересечение. Если последовательность стягивающаяся, то пересечения состоит из одной точки.*

Доказательство. Последовательность (a_n) возрастает и ограничена сверху любым b_k. Последовательность (b_k) убывает и ограничена снизу любым a_n. Значит, обе последовательности имеют конечные пределы, a и b. Переходя два раза к пределу в неравенстве $a_n \leqslant b_k$, мы получим $a \leqslant b$. Переходя к пределу $k \to \infty$ в неравенстве $a_n \leqslant a_k$, мы получим $a_n \leqslant a$ для любого n. аналогично $b \leqslant b_k$. Выходит, что отрезок $[a, b]$ лежит в пересечении нашей системы отрезков. На самом деле он совпадает с пересечением, так как, к примеру, если $x < a$, то для достаточно больших n будет верно $a_n > x$, аналогично, если $x > b$, то для достаточно большого n будет верно $b_n < x$, то есть такие x выйдут из пересечения в некоторый момент.

Для стягивающейся последовательности очевидно, что $0 \leqslant b - a \leqslant b_n - a_n \to 0$, что неизбежно влечёт $b = a$. □

Задача 1.48. Приведите пример, когда последовательность вложенных интервалов не имеет общей точки. Сформулируйте достаточные условия того, чтобы последовательность вложенных интервалов всё же имела общую точку.

[[Следите за концами интервалов.]]

1.6. **Точные грани числовых множеств.** В конечном и непустом множестве действительных чисел всегда можно найти максимальный и минимальный элемент, для натуральных чисел это следует из задачи 1.17, а для действительных чисел надо ещё определить понятие «конечного множества действительных чисел», что будет строго сделано в разделе 1.13. Сейчас же мы несколько неформально будем говорить о конечном и бесконечном. В бесконечном множестве чисел может и не быть максимума или минимума, например, не существует минимального положительного числа. Но можно ввести понятия, заменяющие максимум и минимум в тех случаях, когда их нет.

Определение 1.49. Для непустого $X \subseteq \mathbb{R}$ будем говорить, что $M \in \overline{\mathbb{R}}$ является его *верхней гранью*, если для любого $x \in X$ выполняется $x \leqslant M$. В качестве верхней грани всегда сгодится $+\infty$, а если у X есть конечные верхние грани, то оно называется *ограниченным сверху*.

Определение 1.50. Для непустого $X \subseteq \mathbb{R}$ будем говорить, что $M \in \overline{\mathbb{R}}$ является его *нижней гранью*, если для любого $x \in X$ выполняется $x \geqslant M$. В качестве нижней грани всегда сгодится $-\infty$, а если у X есть конечные нижние грани, то оно называется *ограниченным снизу*.

Теорема 1.51. *Среди всех верхних граней непустого X есть минимальная, которую мы будем обозначать $\sup X$ и называть «точная верхняя грань». Среди всех нижних граней непустого X есть максимальная, которую мы будем обозначать $\inf X$ и называть «точная нижняя грань».*

Доказательство. Докажем для верхних граней, рассуждения для нижних граней аналогичны. Если множество X не ограничено сверху, то очевидно $\sup X = +\infty$. Иначе пусть $a \in X$, а b — какая-то конечная верхняя грань X. Пусть $[a, b]$ — первый отрезок в последовательности вложенных отрезков, которую мы будем строить следующим образом. Возьмём середину отрезка $c = 1/2(a + b)$ если середина является верхней гранью, то следующий отрезок в последовательности будет $[a, c]$, иначе — $[c, b]$.

Делая так произвольное число раз, переходя к левой или правой половине отрезка, мы получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, которая будет стягивающейся, так как длина $(b_n - a_n) \leqslant (b - a)2^{-n+1} \leqslant (b - a)/n \to 0$. Также каждый отрезок в последовательности пересекается с X по построению и не имеет элементов X справа от себя (то есть больших b_n), значит его правый конец b_n является верхней гранью X. Пусть c — точка пересечения всех таких отрезков, докажем, что она является верхней гранью X и меньших верхних граней нет.

Для любой $x \in X$ переходя к пределу в неравенстве $x \leqslant b_n$ мы получим $x \leqslant c$, то есть c является верхней гранью. Если была бы меньшая верхняя грань $c' < c$, то при достаточно больших n мы бы имели $c' < a_n$, из чего следует существование $x \in X$, такого что $c' < x$. ☐

Определение точной верхней грани можно расписать в кванторах так:

$$c = \sup X \Leftrightarrow (\forall x \in X, x \leqslant c) \text{ и } (\forall c' < c\ \exists x \in X : c' < x).$$

Задача 1.52. Запишите в кванторах как можно короче утверждение про два непустых множества $X, Y \subseteq \mathbb{R}$: $\sup X < \inf Y$.

1.7. **Другие определения действительных чисел.** Можно заметить, что всякое действительное число $x \in \mathbb{R}$ однозначно определяется множествами

$$L_x = \{r : r \in \mathbb{Q}, r < x\},\ R_x = \{r : r \in \mathbb{Q}, r \geqslant x\},$$

достаточно понять, что $x = \sup L_x$. Действительно, если мы берём $x' < x$, то между ними найдётся рациональное $r \in (x', x)$, а значит x — это точная верхняя грань L_x и точная нижняя грань R_x.

Альтернативный подход к определению действительного числа — это определение действительного числа как разбиения множества $\mathbb{Q}$ на два непустых подмножества L, R, так что $\forall \ell \in L, \forall r \in R, \ell < r$, причём множеству R разрешается иметь минимальный элемент, а множеству L не разрешается иметь максимальный элемент. Такое разбиение $\mathbb{Q} = L \cup R$ называется *сечением*. Для сечений можно определить сравнение $(L, R) \leqslant (L', R')$ как включения $L \subseteq L'$ и $R \supseteq R'$, всякие два сечения оказываются сравнимыми и

$$(L, R) \leqslant (L', R') \text{ и } (L, R) \geqslant (L', R') \Rightarrow (L, R) = (L', R').$$

Для сечений достаточно легко доказывается теорема о существовании предела возрастающей ограниченной последовательности действительных чисел (то есть сечений) (L_n, R_n). Ограниченность означает наличие непустого пересечения $R = \bigcap_n R_n$, монотонность означает монотонность по включению $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots$, и если положить $L = \bigcup_n L_n$, то пара (L, R) оказывается сечением, представляющим предел.

Также мы можем придумать канонический способ приближения действительных чисел снизу и сверху конечной десятичной дробью

$$\underline{d}_n(x) = \max\{m10^{-n} : m \in \mathbb{Z}, m10^{-n} \leqslant x\}, \quad \overline{d}_n(x) = \min\{m10^{-n} : m \in \mathbb{Z}, m10^{-n} \geqslant x\},$$

существование максимума и минимума гарантируется тем, есть целые числа как большие $10^n x$, так и меньшие его. Очевидно, что $\underline{d}_n(x) \leqslant x \leqslant \overline{d}_n(x)$ и последовательность отрезков $[\underline{d}_n(x), \overline{d}_n(x)]$ стягивается. При этом десятичные записи $\underline{d}_n(x)$ и $\overline{d}_n(x)$ стабилизируются в каждой цифре и в пределе $n \to \infty$ могут рассматриваться как *бесконечная десятичная дробь*, причём можно проверить, что из $\underline{d}_n(x)$ и $\overline{d}_n(x)$ получается одна и та же бесконечная десятичная дробь. Если два числа x, y различны, то при достаточно большом n между $10^n x$ и $10^n y$ поместятся два целых числа (докажите это в качестве упражнения), что доказывает однозначность представления числа десятичной записью.

Соответственно, ещё один подход к определению целых чисел — ввести бесконечные десятичные дроби, их сравнение и арифметические операции между ними. Теорема о существовании предела ограниченной возрастающей последовательности тогда выводится из рассмотрения конечных отрезков десятичных дробей (с фиксированным числом знаков после запятой) и сводится к теореме о существовании максимума в ограниченном множестве целых чисел.

Для увязывания других определений действительных чисел с определением через фундаментальные последовательности докажем:

Утверждение 1.53. *Свойство полноты $\mathbb{R}$ выводится из существования предела ограниченной монотонной последовательности.*

Доказательство. Из существования предела ограниченной монотонной последовательности выводится существование общей точки у последовательности вложенных отрезков. Пусть у нас есть фундаментальная последовательность (x_n). Она ограничена, следовательно все её члены лежат в некотором отрезке $[a_1, b_1]$. А частности верно, что на этом отрезке лежит бесконечно много членов последовательности.

Пусть мы имеем аналогичное на k-м шаге, с отрезком $[a_k, b_k]$. Разобьём отрезок $[a_k, b_k]$ в середине на два и выберем в качестве $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ тот из них, который содержит бесконечно много элементов последовательности (x_n) (см. замечание после определения 1.18). Такой найдётся, иначе и в $[a_k, b_k]$ было бы конечное число элементов последовательности. В итоге мы получим последовательность стягивающихся отрезков, которая имеет единственную общую точку c. Применим определение фундаментальности, возьмём $\varepsilon > 0$ и найдём соответствующее $N(\varepsilon)$. Рассмотрим также отрезок $[a_k, b_k] \ni c$ из нашей последовательности, который имеет длину меньше ε.

Среди членов последовательности с номерами $n \geqslant N(\varepsilon)$ найдётся какой-то, лежащий в $[a_k, b_k]$. Тогда $|x_n - c| < \varepsilon$. Так как при любом $m \geqslant N(\varepsilon)$ по определению фундаментальности $|x_n - x_m| < \varepsilon$, мы получаем

$$|x_m - c| < 2\varepsilon,$$

и это уже выполняется для любого $m \geqslant N(\varepsilon)$, то есть по определению $x_n \to c$. $\square$

Задача 1.54. * Докажите, что все способы построения действительных чисел приводят к одному и тому же результату. Точнее, что любое упорядоченное поле $\mathbb{K} \subset \mathbb{Q}$ (то есть поле, в котором арифметические операции связаны с неравенствами стандартным образом), обладающее «свойством Архимеда»

$$\mathbb{K} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n],$$

однозначно вкладывается в $\mathbb{R}$, если потребовать сохранение порядка при вложении и тождественность вложения на $\mathbb{Q}$.

[[Для элемента $x \in \mathbb{K}$ постройте стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, таких что $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ и $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. В качестве образа x в $\mathbb{R}$ возьмите пересечение соответствующей стягивающейся последовательности вложенных отрезков в $\mathbb{R}$. Проверьте совместимость такого вложения с арифметическими операциями.]]

1.8. **Арифметические операции с пределами.**

Теорема 1.55. *Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то их сумма и разность тоже сходятся к сумме или разности пределов,*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Доказательство. Пусть $a_n \to a, b_n \to b$. Утверждение следует из неравенства

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|.$$

□

Определение 1.56. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то последовательность (a_n) называется *бесконечно малой*.

Определение 1.57. Если $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, то последовательность (a_n) называется *бесконечно большой* и пишут $a_n \to \infty$.

Лемма 1.58. *Последовательность ненулевых чисел (a_n) бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $(1/a_n)$ бесконечно большая.*

Доказательство. Определение и того и другого сводится к неравенству $|a_n| < x \Leftrightarrow |1/a_n| > 1/x$ для достаточно больших n при любом фиксированном $x > 0$. □

Лемма 1.59. *Сумма и разность бесконечно малых последовательностей бесконечно малая, произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей является бесконечно малой.*

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что предел суммы равен сумме пределов. Для доказательства второго предположим $a_n \to 0$, $|b_n| \leqslant M$. Тогда выбрав ε/M в качестве ε в определении предела, мы будем иметь $|a_n| < \varepsilon/M$ для достаточно больших n. Но тогда $|a_n b_n| < \varepsilon$ для достаточно больших n, то есть $a_n b_n \to 0$. □

Теорема 1.60. *Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то их произведение тоже сходится к произведению пределов,*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Доказательство. Мы используем лемму 1.26 о том, что фундаментальная (т.е. сходящаяся) последовательность ограничена. Пусть $a_n \to a, b_n \to b$, тогда утверждение следует из неравенства

$$|a_n b_n - ab| = |a_b b_n - ab_n + ab_n - ab| \leqslant |a_n - a| \sup_n |b_n| + |b_n - b| \cdot |a|,$$

к правой части мы применяем утверждение о произведении бесконечно малой и ограниченной последовательностей. □

Лемма 1.61. *Если $b_n \to b \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0$, то последовательность $(1/b_n)$ определена для всех n кроме конечного числа и ограничена.*

Доказательство. Положим $\varepsilon = |b|/2$ в определении предела. Тогда

$$|b_n - b| < |b|/2 \Rightarrow |b_n| > |b|/2$$

для достаточно больших n. Следовательно, $|1/b_n| < 2/|b|$ для достаточно больших n, что означает ограниченность. □

Теорема 1.62. *Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся и $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Доказательство. Пусть $a_n \to a, b_n \to b$. По предыдущей лемме b_n не равно нулю для достаточно больших n и $1/b_n$ ограничено, поэтому можно говорить о пределе частного даже если оно не всегда определено. Запишем

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb_n}(a_n b - ab_n).$$

Последовательность $\left(\frac{1}{bb_n}\right)$ ограничена, а последовательность $(a_n b - ab_n)$ бесконечно малая по произведению пределов, так что разность оказывается бесконечно малой, что означает $a_n/b_n \to a/b$. □

Задача 1.63. Проверьте, что для бесконечных пределов выполняются символические тождества:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \infty \cdot \infty = \infty.$$

Приведите примеры, показывающие, что для $(+\infty) + (-\infty)$ и $\infty \cdot 0$ может получиться что угодно.

1.9. **Неравенство Бернулли, экспонента и логарифм.**

Теорема 1.64 (Неравенство Бернулли)**.** *Для $x \geqslant -1$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Доказательство. Для $n = 1$ неравенство обращается в равенство. Воспользуемся математической индукцией. Пусть верно для $n - 1$:

$$(1+x)^{n-1} \geqslant 1 + (n-1)x.$$

Домножим на $(1 + x)$:

$$(1+x)^n \geqslant (1 + (n-1)x)(1+x) = 1 + nx + (n-1)x^2 \geqslant 1 + nx,$$

то есть неравенство верно и для n. По принципу математической индукции это означает, что неравенство верно для всех натуральных n. □

Лемма 1.65. *Если последовательность (a_n) бесконечно малая, то*

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \to 1.$$

Выражение в скобках очевидно положительно для достаточно больших n.

Доказательство. Мы предполагаем, что выполняется $|a_n| < 1$, что действительно верно для достаточно больших n. Тогда по неравенству Бернулли

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \geqslant 1 + a_n.$$

Для отрицательного a_n эта оценка уже годится для доказательства стремления к 1. Запишем также неравенство

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{a_n}{n}\right) = 1 - \frac{a_n^2}{n^2} \leqslant 1,$$

из которого следует

$$1 + a_n \leqslant \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{1 - a_n}.$$

Теперь теорема о двух милиционерах доказывает требуемое. □

Лемма 1.66. *При фиксированном $x \in \mathbb{R}$ последовательность $e_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ положительна и возрастает при достаточно больших n.*

Доказательство. Ясно, что при достаточно больших n эта величина будет положительна. Тогда нам достаточно доказать, что при достаточно больших n

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \geqslant 1.$$

Запишем

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \geqslant \left(1 - \frac{\frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1,$$

используя неравенство Бернулли.

∎

Определение 1.67. Определим *экспоненту* действительного числа

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Определение корректно, так как по предыдущим леммам последовательность в определении при фиксированном x и достаточно больших n положительна и возрастает. Следовательно, $\exp x > 0$, но пока не исключено, что при некоторых положительных x окажется, что $\exp x = +\infty$.

Лемма 1.68. *Для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$\exp x \exp(-x) = 1.$$

В частности, значения экспоненты конечны.

Доказательство. Запишем

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \to 1,$$

по лемме 1.65, так как $\frac{x^2}{n} \to 0$. Переходя к пределу, получаем требуемое. Бесконечность $\exp x$ при положительной $\exp(-x)$ сделала бы это выражение бесконечным, что неверно. ∎

Лемма 1.69. *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$*

$$\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y.$$

Доказательство. Запишем, используя предыдущую лемму:

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp x \cdot \exp y} = \exp(x+y)\exp(-x)\exp(-y) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{(x+y)^2}{n^2} + \frac{xy}{n^2}\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)\right)^n \to 1,$$

по лемме 1.65, так как $-\frac{(x+y)^2}{n} + \frac{xy}{n}\left(1 + \frac{x+y}{n}\right) \to 0$. ∎

Лемма 1.70. *При любом* x

$$\exp x \geqslant 1 + x.$$

и при любом $x < 1$

$$\exp x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

Доказательство. Первое неравенство следует из неравенства Бернулли, второе следует из первого заменой $x \mapsto -x$. □

Лемма 1.71 (Монотонность экспоненты). *Если* $x < y$, *то* $\exp x < \exp y$.

Доказательство.

$$\exp y - \exp x = \exp x \cdot (\exp(y-x) - 1) \geqslant \exp x \cdot (y - x) > 0.$$

□

Лемма 1.72 (Непрерывность экспоненты). *Если* $x_n \to x_0$, *то* $\exp x_n \to \exp x_0$.

Доказательство. Используя уже установленные свойства экспоненты, запишем

$$\exp x_n - \exp x_0 = \exp x_0 \cdot (\exp(x_n - x_0) - 1).$$

Отбросив константу $\exp x_0$, можем оценить

$$x_n - x_0 \leqslant \exp(x_n - x_0) - 1 \leqslant \frac{x_n - x_0}{1 - x_n + x_0}.$$

В пределе слева и справа получается нуль, поэтому по теореме о двух милиционерах посередине в пределе тоже будет нуль. □

Теорема 1.73 (Замечательный предел с экспонентой). *Если* $x_n \to 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp x_n - 1}{x_n} = 1.$$

Доказательство. В доказательстве предыдущей леммы уже установлены неравенства для $x_n \in (0, 1)$

$$1 \leqslant \frac{\exp x_n - 1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1 - x_n},$$

и для $x_n \in (-1, 0)$

$$\frac{1}{1 - x_n} \leqslant \frac{\exp x_n - 1}{x_n} \leqslant 1,$$

из которых следует требуемое в пределе по теореме о двух милиционерах. □

Теперь мы определим обратную функцию к экспоненте. На самом деле она существует по общей теореме об обратной функции, однако можно привести и прямую конструкцию. Для положительных x мы знаем, что $\exp x \geqslant 1 + x$ и эта величина растёт неограниченно при росте x. Для отрицательных x мы знаем, что $\exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$ и эта величина может стать сколь угодно близкой к нулю при больших по модулю x. Тогда уравнение

$$\exp x = y$$

относительно x для положительного y можно решать *методом половинного деления*. Из предыдущих замечаний следует, что найдутся $a, b \in \mathbb{R}$, такие что $\exp a < y < \exp b$. Далее можно делить отрезок пополам и выбирать одну из половин так, чтобы всегда выполнялось неравенство

$$\exp a_n \leqslant y \leqslant \exp b_n.$$

В пределе $a_n, b_n \to x$ и используя свойство непрерывности экспоненты, мы получаем в пределе

$$\exp x \leqslant y \leqslant \exp x,$$

то есть $\exp x = y$. В дальнейшем это будет обобщено в виде «теоремы о промежуточном значении непрерывных функций», но мы привели это рассуждение на случай, если читателю хочется как можно быстрее начать работать с экспонентой и логарифмом.

Определение 1.74. Для положительного y единственное x, такое что $\exp x = y$ называется *натуральным логарифмом* y и обозначается $\ln y$.

Из свойств экспоненты следуют свойства натурального логарифма:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \ln \frac{1}{x} = -\ln x, \ln(1+x) \leqslant x$$

$$|x| < 1 \Rightarrow \ln(1+x) \geqslant \frac{x}{1+x}, 0 < x < y \Rightarrow \ln x < \ln y.$$

Лемма 1.75 (Непрерывность логарифма)**.** *Если* $x_n \to x_0 > 0$, *то* $\ln x_n \to \ln x_0$.

Доказательство. Используя уже установленные свойства логарифма, запишем

$$\ln x_n - \ln x_0 = \ln \frac{x_n}{x_0}.$$

Мы знаем, что $q_n = \frac{x_n}{x_0}$ стремится к 1, тогда для достаточно больших n будет $|q_n| < 2$ и по неравенствам для логарифма мы получим

$$\frac{q_n - 1}{q_n} \leqslant \ln q_n \leqslant q_n - 1.$$

В пределе слева и справа получается нуль, поэтому по теореме о двух милиционерах посередине в пределе тоже будет нуль. ☐

Определение 1.76. Определим для $a > 0$ и $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Можно проверить, что $a^1 = a$ и тогда из свойств экспоненты следует, что a^n в смысле нового определения равно a^n в смысле школьного определения. Число

$$\exp 1 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

обычно обозначается e (число Эйлера) и тогда можно написать покороче

$$\exp x = e^x.$$

Задача 1.77. Проверьте тождество $a^{xy} = (a^x)^y$.

1.10. **Тригонометрические функции.** Определение тригонометрических функций фактически сводится к определению понятия «угол поворота», которое мы будем определять через понятие «длина дуги окружности». Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, на которой расстояние между двумя точками определено формулой:

$$\rho((x', y'), (x'', y'')) = \left((x' - x'')^2 + (y' - y'')^2\right)^{1/2}.$$

Позже будет дано более общее определение евклидова пространства и расстояния в нём с доказательством его свойств, однако нужные в этом разделе свойства расстояния можно проверить напрямую.

На плоскости рассмотрим окружность

$$\mathbb{S} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Можно заметить исходя из свойств возведения в степень, что для всякого $x \in (-1, 1)$ найдётся два $y = \pm(1 - x^2)^{1/2}$, удовлетворяющих уравнению окружности, а для $x \in \{0, 1\}$ найдётся только один $y = 0$. Аналогично будет если мы поменяем местами x на y.

Можно убедиться, что при $a^2 + b^2 = 1$ линейное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= ax - by \\ y' &= bx + ay \end{aligned}$$

не меняет расстояние между точками на плоскости и переводит $\mathbb{S}$ в себя. Назовём это преобразование *вращением*. Выделив на окружности точку $E = (1, 0)$ мы можем заметить, что она переходит в точку (a, b), и таким образом вращение R может перевести любую точку окружности в любую другую и оно полностью определяется значением $R(E)$. Иначе говоря, множество всех вращений находится во взаимно однозначном соответствии с окружностью $\mathbb{S}$, что мы и будем далее подразумевать.

Для двух разных точек на окружности $A, B \in \mathbb{S}$ рассмотрим уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\Delta y \cdot x - \Delta x \cdot y = d,$$

где $\Delta x = x(B) - x(A), \Delta y = y(B) - y(A)$. Условия

$$\Delta y \cdot x - \Delta x \cdot y \geqslant d, x^2 + y^2 = 1$$

тогда будут определять *ориентированную дугу окружности* $\widehat{AB}$ с концами A и B. Неформально говоря, эта дуга идёт «против часовой стрелки» по окружности от A до B. Если $A = B$, то мы считаем дугу $\widehat{AB}$ *вырожденной* и состоящей из одной точки.

Мы хотим определить *длину дуги окружности*. Рассмотрим несколько точек

$$A = C_1, \dots, C_N = B \in \widehat{AB},$$

идущих «против часовой стрелки» в том смысле, что дуги $\widehat{C_1C_2}, \widehat{C_2C_3}, \dots, \widehat{C_{N-1}C_N}$ лежат в $\widehat{AB}$ и пересекаются только по своим концам. Тогда отрезки $C_1C_2, C_2C_3, \dots, C_{N-1}C_N$ составляют ломаную P, *вписанную в дугу*. Эта ломаная лежит (нестрого) с одной стороны от любой прямой C_iC_{i+1}, являющейся продолжением её отрезка, то есть является *выпуклой*. Действительно, эта прямая пересекает окружность в двух точках C_i и C_{i+1}, дуга $\widehat{C_iC_{i+1}}$ лежит по одну сторону от прямой, а другие вершины ломаные — по другую сторону от прямой.

Определение 1.78. Длина $\ell(P)$ для ломаной $P = C_1C_2 \dots C_N$ — это сумма расстояний $|C_1C_2| + |C_2C_3| + \dots + |C_{N-1}C_N|$.

Определение 1.79. Длина дуги $\widehat{AB}$ — это точная верхняя грань

$$\ell(\widehat{AB}) = \sup\{\ell(P) : P \text{ вписана в } \widehat{AB}\}.$$

Лемма 1.80 (Аддитивность длины дуги окружности). *Если дуги $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$ пересекаются только в точке B, то*

$$\ell(\widehat{AC}) = \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC}).$$

Доказательство. Рассматривая ломаные, вписанные в большую дугу $\widehat{AC}$, мы всегда можем добавить к их вершинам точку B в подходящем по порядку месте, длина ломаной при этом может только увеличиться по неравенству треугольника. Такие ломаные P разбиваются на две ломаные: P' вписанная в $\widehat{AB}$ и P'' вписанная в $\widehat{BC}$, причём

$$\ell(P) = \ell(P') + \ell(P'').$$

Предельный переход тогда даст неравенство

$$\ell(\widehat{AC}) \leqslant \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC}).$$

Наоборот из двух ломаных, вписанных в $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$, мы можем собрать в правильном порядке вершин одну, вписанную в $\widehat{AC}$ с выполнением того же равенства. Из этого равенства мы получим в пределе неравенство

$$\ell(\widehat{AC}) \geqslant \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC}).$$

□

Длина дуги у нас корректно определена, аддитивна, и по определению инвариантна относительно вращений. Но нам нужно установить её конечность, ведь точная верхняя грань могла оказаться равной $+\infty$.

Лемма 1.81. *Если выпуклая ломаная P содержится в треугольнике $\triangle ABC$ и идёт из вершины A в вершину B, то $\ell(P) \leqslant |AC| + |BC|$*

Доказательство. Пусть первый из отрезков ломаной — AC_2. Если он лежит на стороне AC, то замена A на C_2 уменьшает $\ell(P)$ и $|AC|$ на одну и ту же величину $|AC_2|$ и сводит задачу к рассмотрению ломаной с меньшим количеством отрезков, что мы можем считать верным по индукции.

Иначе пусть луч AC_2 пересекает сторону CB в точке C'. Для той же ломаной P и треугольника $AC'B$ мы находимся в условиях уже рассмотренной ситуации из предыдущего абзаца и можем уменьшить число отрезков ломаной, поэтому считаем

$$\ell(P) \leqslant |AC'| + |C'B| \leqslant |AC| + |CC'| + |C'B| = |AC| + |BC|,$$

где мы использовали неравенство треугольника и аддитивность длины отрезка. □

Лемма 1.82. *Если касательные к окружности в точках $A \neq B$ пересекаются в точке C, которая лежит с той же стороны от прямой AB, что и дуга $\widehat{AB}$, то*

$$|AB| < \ell(\widehat{AB}) < |AC| + |CB|.$$

Доказательство. Нестрогие неравенства получаются предельным переходом из предыдущей леммы. На самом деле они строгие, так как мы можем разбить дугу на две части, сделать такую же оценку для каждой части и итоговые оценки немного улучшатся. □

Теперь определим π как длину верхней полуокружности $\{(x, y) \in \mathbb{S} : y \geqslant 0\}$, длина нижней полуокружности $\{(x, y) \in \mathbb{S} : y \leqslant 0\}$ будет такой же, так как отображение $(x, y) \to (-x, -y)$ переводит одну половину в другую, не меняя расстояния. Вписывание в окружность правильного шестиугольника со сторонами 1 и описывание вокруг неё квадрата со стороной 2 позволяют заключить (с использованием аддитивности длины дуги и леммы 1.82), что $3 < \pi < 4$. Далее мы часто будем использовать обозначение для $x \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n : n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x\}.$$

Лемма 1.83. *Длины дуг на окружности принимают все значения $t \in [0, 2\pi)$.*

Доказательство. Ясно, что половина окружности имеет длину π. Далее всякую дугу мы можем поделить (срединным перпендикуляром к её концам) на две части, переводящиеся друг в друга движением и значит имеющим равные длины. Значит найдутся дуги длин $2^{-k}\pi$ для любого $k \in \mathbb{Z}^+$. Из таких дуг мы можем составить по аддитивности дугу любой длины вида $m2^{-k}\pi$.

Теперь зафиксируем число $t \in [0, 2\pi)$. Рассмотрим последовательность вложенных отрезков $[a_k, b_k] \ni t$, концы которых имеют вид $m2^{-k}\pi$, для этого достаточно для каждого k брать $m = \lfloor 2^k t/\pi \rfloor$ и $m = \lfloor 2^k t/\pi \rfloor + 1$ соответственно.

На окружности зафиксируем точку $E = (1, 0)$ и отложим от неё дуги $\widehat{EA_k}$ и $\widehat{EB_k}$ с длинами a_k и b_k соответственно. Мы знаем, что $\ell(\widehat{A_k B_k}) = 2^{-k}\pi \to 0$ при $k \to \infty$. Кроме того, при $n > k$ мы будем иметь неравенства

$$\ell(\widehat{A_k A_n}), \ell(\widehat{B_k B_n}) \leqslant 2^{-k}\pi.$$

Лемма 1.82 тогда даёт неравенства

$$|A_k B_k|, |A_k A_n|, |B_k B_n| < 2^{-k}\pi$$

при $n > k$. Тогда проекции точек A_k и B_k на ось x образуют фундаментальную последовательность, аналогично и с их проекциями на ось y. Беря соответствующие пределы координат, мы получим точку C, которая содержится во всех дугах $\widehat{A_k B_k}$. По аддитивности длина дуги $\widehat{EC}$ обязана быть равна t.

□

Предыдущая лемма оправдывает следующее определение.

Определение 1.84. Для всякого $t \in [0, 2\pi)$ определим R_t как вращение, переводящее E в точку $R_t(E)$, такую что $\ell(\widehat{ER_t(E)}) = t$. Для остальных t определим R_t как R_s при $s = t - 2\pi \left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor$.

R_t определено единственным образом, так как при наличии двух равных по длине дуг $\widehat{ER_t(E)}$ и $\widehat{ER'_t(E)}$ их концы $R_t(E)$ и $R'_t(E)$ обязаны совпасть, иначе это противоречило бы аддитивности длины дуги.

Из аддитивности и инвариантности относительно вращений длины дуги следуют равенства $R_t \circ R_{-t} = \mathrm{id}$, $R_{t+s} = R_t \circ R_s$.

Определение 1.85. Определим $\cos t$ и $\sin t$ как коэффициенты линейного преобразования R_t:

$$\begin{aligned} x' &= \cos t \cdot x - \sin t \cdot y \\ y' &= \sin t \cdot x + \cos t \cdot y. \end{aligned}$$

Из равенств $R_t \circ R_{-t} = \mathrm{id}$, $R_{t+s} = R_t \circ R_s$ соответственно выводятся формулы:

$$\begin{aligned} \cos(-t) &= \cos t, \\ \sin(-t) &= -\sin t, \\ \cos(t+s) &= \cos t \cdot \cos s - \sin t \cdot \sin s, \\ \sin(t+s) &= \sin t \cdot \cos s + \cos t \cdot \sin s. \end{aligned}$$

Определим стандартно $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ и $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

Лемма 1.86. *Для любого x выполняется*

$$|\sin x| \leqslant |x|$$

с равенством только при $x = 0$. Для любого $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ выполняется

$$|\operatorname{tg} x| \geqslant |x|$$

с равенством только при $x = 0$.

Доказательство. При $t \in (0, \pi/2)$ применим лемму 1.82 к точкам $A = (\cos t, -\sin t)$ и $B = (\cos t, \sin t)$ и получим неравенства между положительными числами

$$2 \sin x < 2x < 2 \operatorname{tg} x,$$

то есть

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

Из нечётности синуса и тангенса они продолжаются на $(-\pi/2, \pi/2)$ с равенством только в нуле. Неравенство для синуса за пределами интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ следует из того, что $\pi/2 > 1$. □

Задача 1.87. Докажите, что для всяких $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|, \quad |\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|.$$

Обратные тригонометрические функции определить ещё проще:

Определение 1.88. Для $x \in [-1, 1]$ рассмотрим точку окружности $C_x = (x, (1 - x^2)^{1/2})$. Положим $\arccos x = \ell(\widehat{EC_x})$.

Определение 1.89. Для $y \in [-1, 1]$ рассмотрим точку окружности $S_y = ((1 - y^2)^{1/2}, y)$. Положим $\arcsin y = \ell(\widehat{ES_y})$ при неотрицательном y и $\arcsin y = -\ell(\widehat{S_y E})$ для отрицательных y.

Определение 1.90. Для $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим точку окружности

$$T_t = \left(\frac{1}{(1 + t^2)^{1/2}}, \frac{t}{(1 + t^2)^{1/2}} \right)$$

Положим $\operatorname{arctg} t = \ell(\widehat{ET_t})$ при неотрицательном t и $\operatorname{arctg} t = -\ell(\widehat{T_t E})$ для отрицательных t.

Определение 1.91. Для $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим точку окружности

$$T_t = \left(\frac{t}{(1 + t^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1 + t^2)^{1/2}} \right)$$

Положим $\operatorname{arcctg} t = \ell(\widehat{ET_t})$.

По определению легко проверить, что при $t \in [0, \pi]$ выполняется

$$\arccos(\cos t) = t,$$

при $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ выполняется

$$\arcsin(\sin t) = t,$$

при $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ выполняется

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t$$

и при $t \in (0, \pi)$ выполняется

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t.$$

1.11. **Частичные пределы.** Сделаем некоторые определения.

Определение 1.92. Последовательность (b_k) называется *подпоследовательностью* числовой последовательности (a_n), если выполняется $b_k = a_{n_k}$ для некоторой строго возрастающей последовательности (n_k) натуральных чисел.

Определение 1.93. Значение $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *частичным пределом* числовой последовательности (a_n), если a является пределом некоторой подпоследовательности последовательности (a_n).

Лемма 1.94. *Значение $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является частичным пределом последовательности (a_n) тогда и только тогда, когда в любой окрестности a найдётся бесконечно много элементов последовательности (a_n).*

Напомним, что говоря «найдётся бесконечно много элементов» мы подразумеваем, что найдётся бесконечно много номеров $n \in \mathbb{N}$, таких что значение a_n попадает в данную окрестность (см. также замечание после определения 1.18).

Доказательство. Если a — частичный предел, то очевидно в любой окрестности a лежит бесконечно много членов соответствующей подпоследовательности a_{n_k}.

Докажем в обратную сторону. Взяв окрестность $U_{1/k}(a)$, можно найти в ней a_{n_k} из нашей последовательности так, что номер n_k будет больше ранее использованных номеров (у нас бесконечно много вариантов выбора). Так получится подпоследовательность $(a_{n_k})_k$, которая стремится к a по определению. □

Теорема 1.95 (Теорема Больцано–Вейерштрасса)**.** *У всякой числовой последовательности есть частичный предел.*

Доказательство. Если последовательность не ограничена сверху, то в любой окрестности $+\infty$, то есть в интервале вида $(m, +\infty)$, есть бесконечно много элементов последовательности, иначе максимальный из них ограничивал бы последовательность сверху или вся последовательность была бы ограничена сверху m. Значит в этом случае $+\infty$ является частичным пределом.

Аналогично, если последовательность не ограничена снизу, то $-\infty$ будет частичным пределом.

Пусть теперь последовательность (x_n) ограничена. Значит все её значения лежат на отрезке $[a, b]$. Поделим отрезок посередине точкой c на два отрезка. На одном из отрезков будет находится бесконечное число элементов последовательности, обозначим его $[a_2, b_2]$. Далее будем продолжать делить отрезок пополам и выберем стягивающуюся последовательность отрезков $([a_k, b_k])$, в каждом из которых лежит бесконечно много элементов последовательности (x_n).

Как мы знаем, существует единственная общая точка x_0 всех отрезков и $a_k, b_k \to x_0$ при $k \to \infty$. Ясно, что в любой окрестности x_0 оказывается некоторый отрезок $[a_k, b_k]$ целиком, и значит в ней оказывается бесконечно много элементов последовательности. □

Теорема 1.96. *В множестве частичных пределов любой числовой последовательности есть максимальный и минимальный элемент, они обозначаются*

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n,\ \varliminf_{n\to\infty} a_n.$$

Доказательство. Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — это точная верхняя грань множества частичных пределов. Если $a = -\infty$, то $-\infty$ должно быть частичным пределом, иначе бы частичных пределов вообще не было в противоречии с теоремой Больцано–Вейерштрасса. Если $a = +\infty$ и $+\infty$ является частичным пределом, то утверждение верно.

В оставшихся случаях в любой окрестности $U(a)$ найдётся частичный предел a', иначе a не было бы точной верхней гранью множества частичных пределов. Но $U(a)$ является и окрестностью a', следовательно в $U(a)$ есть бесконечно много точек последовательности. Значит, само a тоже является частичным пределом.

Для точной нижней грани доказательство аналогично. □

Теорема 1.97 (Теорема о единственном частичном пределе). *Если для числовой последовательности (a_n) выполняется*

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n = a,$$

то $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Доказательство. Предположим противное определению предела: тогда за пределами некоторой окрестности $U(a)$ лежит бесконечно много элементов последовательности a_n. Тогда из них мы составим подпоследовательность последовательности (a_n) и выберем её частичный предел b, он очевидно не равен a. Но тогда b будет частичным пределом и для исходной последовательности — противоречие. □

Задача 1.98. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что последовательности $(\cos \pi\alpha n)$ и $(\sin \pi\alpha n)$ имеют множеством частичных пределов весь отрезок $[-1, 1]$.

[[Рассмотрите точки $P_n = (\cos \pi\alpha n, \sin \pi\alpha n)$. Докажите, что какие-то две из них P_n и P_m могут оказаться на окружности сколь угодно близко друг от друга. Воспользуйтесь тем, что дуга $\widehat{P_nP_m}$ отличается от дуги $\widehat{P_{n-k}P_{m-k}}$ только вращением.]]

Задача 1.99. Докажите, что у всякой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

[[Можно рассуждать чисто комбинаторно, используя лишь порядок действительных чисел, а можно задействовать понятие частичного предела.]]

1.12. Топология на множестве действительных чисел.

Определение 1.100. Множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если у каждой точки $x \in U$ есть окрестность $(a, b) \ni x$, которая полностью содержится в U.

Без труда можно проверить, что всякий интервал (a, b) является открытым множеством.

Лемма 1.101 (Свойства открытых множеств). *Пустое множество открыто, всё $\mathbb{R}$ открыто. Пересечение конечного числа открытых множество открыто, объединение произвольного семейства открытых множеств открыто.*

Доказательство. Первые два свойства очевидны по определению. Рассмотрим конечное пересечение $\bigcap_{k=1}^n U_k$ открытых множеств. Если точка x содержится в пересечении, то есть содержится в каждом из множеств, то она содержится в U_k вместе со своей окрестностью вида $(x-\varepsilon_k, x+\varepsilon_k)$. Положим $\varepsilon = \min_{1\leqslant k\leqslant n} \varepsilon_k > 0$, тогда $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ содержится во всех U_k, а значит и содержится в их пересечении.

Для объединения доказательство проще: $x \in \bigcup_\alpha U_\alpha$ тогда и только тогда, когда x содержится хотя бы в одном из U_α. Но если x содержится в U_α, то $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U_\alpha$, а значит

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

□

Нетрудно привести пример бесконечной системы открытых множеств $\{(-1/n, 1/n) : n \in \mathbb{B}\}$, пересечение которых состоит из одной точки и не является открытым. В целом, введение на некотором множестве X системы «открытых множеств», удовлетворяющих свойствам из леммы, называется *топологией* на множестве X. Конечно, даже на множестве $\mathbb{R}$ можно ввести и другие топологии, например, *топология Зарисского* на $\mathbb{R}$ объявляет «открытыми» множества U, дополнения к которым $\mathbb{R} \setminus U$ конечны. Но мы такую топологию рассматривать не будем, хотя читатель может самостоятельно убедиться, что это тоже топология.

Определение 1.102. Множество $F \subseteq \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Иначе можно сказать, что F замкнуто, если любая точка $x \notin F$ имеет не пересекающуюся с F окрестность.

Лемма 1.103 (Свойства замкнутых множеств). *Пустое множество замкнуто, всё $\mathbb{R}$ замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множество замкнуто, пересечение произвольного семейства замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Сводится к свойствам открытых множеств с помощью формул

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_\alpha U_\alpha \right) = \bigcup_\alpha (\mathbb{R} \setminus U_\alpha), \quad \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_\alpha U_\alpha \right) = \bigcap_\alpha (\mathbb{R} \setminus U_\alpha).$$

□

Изучим более детально структуру произвольного множества действительных чисел.

Определение 1.104. Для всякого $X \subseteq \mathbb{R}$ и числа $y \in \mathbb{R}$ возможны три варианта:

Некоторая окрестность $U(y) \ni y$ полностью содержится в X, тогда y — *внутренняя точка* X.

Некоторая окрестность $U(y) \ni y$ не пересекается с X, тогда y — *внешняя точка* X.

Всякая окрестность $U(y) \ni y$ содержит точки как из X, так и не из X, тогда y — граничная точка X.

Определение 1.105. Множество внутренних точек X обозначается $\operatorname{int} X$, множество граничных точек X обозначается ∂X. Множество $X \cup \partial X$ называется *замыканием* X, $\operatorname{cl} X$.

Лемма 1.106. *Для любого $X \subseteq \mathbb{R}$ множество $\operatorname{int} X$ открыто, множества ∂X и $\operatorname{cl} X$ замкнуты.*

Доказательство. Если $U(y) \subseteq X$, то для всякой $y' \in U(y)$ её окрестность $U(y)$ тоже содержится в X. Это доказывает открытость $\operatorname{int} U$. Множество внешних точек можно описать как $\operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus X)$ и оно тоже открыто.

Замыкание $\operatorname{cl} X$ является дополнением к множеству внешних точек и поэтому оно замкнуто. Граница ∂X является дополнением к объединению двух открытых множеств, поэтому она замкнута. □

В качестве типичного примера можно рассмотреть полуинтервал $[a, b)$ при $a < b$. Его внутренность — это интервал (a, b), его замыкание — отрезок $[a, b]$, его граница — множество из двух точек a и b.

Задача 1.107. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ открыто тогда и только тогда, когда $\operatorname{int} X = X$.

Задача 1.108. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\operatorname{cl} X = X$.

Определим более сложное понятие:

Определение 1.109. Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ называется *компактным*, если из любого покрытия открытыми множествами

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha} U_\alpha$$

можно выбрать конечное подсемейство $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$, которое всё ещё покрывает X, $X \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$.

Неформально часто говорят «из любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие».

Теорема 1.110 (Критерий компактности). *Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Докажем сначала лёгкую часть — компактное множество ограничено и замкнуто. Семейство интервалов $(-n, n)$ покрывает всё $\mathbb{R}$ и множество X тоже. Если из него можно оставить конечную подсистему (то есть на самом деле один интервал), то X окажется ограниченным. Пусть теперь $x \in \partial X$, если $x \notin X$, то семейство открытых множеств

$$U_n = (-\infty, x - 1/n) \cup (x + 1/n, +\infty)$$

покроет всё X. Если его конечное подсемейство покроет X, то на самом деле будет выполняться

$$X \subset (-\infty, x - 1/n) \cup (x + 1/n, +\infty)$$

для некоторого натурального n. Но это будет значить, что X не пересекается с $(x - 1/n, x + 1/n)$, то есть x на самом деле внешняя точка X — противоречие.

В обратную сторону, фиксируем систему открытых множеств $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ и будем менять множество X. Так как оно ограничено, что оно содержится в отрезке $[a_1, b_1]$. Разобьём его на два равных отрезка и выберем тот из них в качестве $[a_2, b_2]$, для которого $X \cap [a_2, b_2]$ нельзя покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$. Так сделать можно, ибо если покрыть конечным подсемейством можно пересечение X с каждым из отрезков, то покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$ можно и пересечение X с исходным отрезком.

Повторяя эту конструкцию, мы получаем семейство стягивающихся отрезков $[a_n, b_n]$ с общей точкой x и свойством, что пересечение $X \cap [a_n, b_n]$ нельзя покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$. Но тогда в любой окрестности x есть точки из X. Следовательно x не является внешней точкой X, и из замкнутости получаем $x \in X$. Значит $x \in U$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$. Из того, что $a_n, b_n \to x$ следует, что $[a_n, b_n] \subseteq U$ для достаточно больших n, то есть пересечение $X \cap [a_n, b_n]$ можно покрыть одним элементом семейства $\mathcal{U}$. Противоречие. $\square$

Задача 1.111. Докажите, что $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность чисел из X имеет частичный предел в X.

[[Это нетрудно сделать, используя критерий компактности и теорему Больцано–Вейерштрасса.]]

Есть ещё один полезный пример компактности. Расширенная числовая прямая $\overline{\mathbb{R}}$ имеет топологию, в которой базовые окрестности $-\infty$ имеют вид $[-\infty, x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, а базовые окрестности $+\infty$ имеют вид $(x, +\infty]$. Далее можно говорить об открытых и замкнутых множествах на расширенной числовой прямой и т.п.

Теорема 1.112. *Расширенная числовая прямая компактна.*

Доказательство. Если $-\infty$ и $+\infty$ покрыты открытыми множествами, то они покрыты вместе с какими-то интервалами $[-\infty, a)$ и $(b, +\infty]$. После удаления открытых множеств, покрывающих $-\infty$ и $+\infty$, остаётся замкнутое подмножество $[a, b]$, из всякого покрытия которого можно оставить конечное подпокрытие. □

Задача 1.113. Постройте *гомеоморфизм* $\overline{\mathbb{R}}$ на отрезок $[-1, 1]$, то есть обратимое отображение, которое сохраняет систему открытых множеств (топологию).

При обсуждении непрерывности функции, определённой на некотором подмножестве действительных чисел будет важно следующее понятие:

Определение 1.114. Пусть X — фиксированное подмножество $\mathbb{R}$. Для всякого открытого $U \subseteq \mathbb{R}$ множество $U \cap X$ называется *открытым относительно* X. Открытые относительно X множества задают на X *индуцированную топологию*.

Например, множество $[0, 1)$ не открыто на прямой, но открыто относительно отрезка $[0, 2]$.

Задача 1.115. Докажите, что если множества $Z, Y \subseteq X$ открыты относительно X и не пересекаются, то найдутся непересекающиеся открытые $U, V \subseteq \mathbb{R}$, такие что $Z = X \cap U$ и $Y = X \cap V$.

[[У всякой $y \in Y$ найдите окрестность $U(y) = (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y)$, не пересекающуюся с Z, аналогично для $z \in Z$ найдите $U(z) = (z - \varepsilon_z, z + \varepsilon_z)$, не пересекающуюся с Y. Потом уменьшите размеры каждой из этих окрестностей в два раза и рассмотрите их объединения.]]

Определение 1.116. Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ называется всюду плотным, если $\operatorname{cl} X = \mathbb{R}$. Множество Y называется всюду неплотным, если его дополнение всюду плотно.

Всюду плотное множество можно иначе описать как множество, пересекающее любое непустое открытое множество. Всюду неплотное множество можно иначе описать, как множество, имеющее пустую внутренность. Например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является всюду плотным (мы уже доказали, что на всяком интервале есть рациональное число), а также является всюду неплотным (так как на всяком интервале есть числа вида $r\sqrt{2}$ с $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$).

Теорема 1.117 (Теорема Бэра на прямой)**.** *Последовательность всюду плотных открытых множеств в* $\mathbb{R}$ *имеет всюду плотное пересечение.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность открытых всюду плотных множеств (U_k). Чтобы доказать, что пересечение $\bigcap_k U_k$ всюду плотно по определению, мы должны доказать, что всякий интервал (a_1, b_1) имеет непустое пересечение с пересечением всей последовательности, $\bigcap_k U_k$. Множество U_1 имеет непустое пересечение с (a_1, b_1), к тому же $U_1 \cap (a_1, b_1)$ отрыто и в нём можно выбрать отрезок ненулевой длины $[a_2, b_2]$. Переходя к интервалу (a_2, b_2) и продолжая так же далее, мы в пересечении $U_k \cap (a_k, b_k)$ всегда будем выбирать отрезок ненулевой длины $[a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Получается последовательность вложенных отрезков, у которой есть общая точка x. По построению она принадлежит всем множествам U_k и начальному интервалу (a_1, b_1). □

Переходя к дополнениям, мы получим такую формулировку:

Теорема 1.118 (Теорема Бэра на прямой для замкнутых множеств)**.** *Последовательность всюду неплотных замкнутых множеств в* $\mathbb{R}$ *имеет всюду неплотное объединение.*

Заметим, что множество из одной точки является замкнутым и всюду неплотным. Значит мы доказали

Следствие 1.119 (Несчётность множества действительных чисел)**.** *Множество* $\mathbb{R}$ *не является множеством значений никакой последовательности действительных чисел.*

Более формальная работа с понятиями «счётное» и «несчётное» будет происходить в следующем разделе.

1.13. **Мощность множества, счётные и несчётные множества чисел.** В этом разделе мы порассуждаем о том, насколько велики бывают бесконечные множества.

Определение 1.120. Множества X и Y называются *равномощными*, если существует обратимое отображение $f : X \to Y$. Будем обозначать это как $|X| = |Y|$.

Можно проверить, что это «отношение эквивалентности». Мы ставим здесь кавычки, потому что отношения эквивалентности определяются на множествах, а «множество всех множеств» не является множеством. Тем не менее, если $f : X \to Y$ обратимо и $g : Y \to Z$ обратим, то $g \circ f$ обратимо и его обратное — это $f^{-1} \circ g^{-1}$, остальные два свойства отношений эквивалентности очевидны.

Напомним, что конечным множеством натуральных чисел мы называли множество натуральных чисел, либо пустое, либо имеющее минимальный элемент.

Задача 1.121. Докажите, что всякое непустое конечное множество натуральных чисел равномощно начальному отрезку натуральных чисел вида $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

[[Используйте полную индукцию по максимальному элементу множества.]]

Определение 1.122. Произвольное множество называется конечным, если оно пустое или равномощно некоторому множеству $[n]$, $n \in \mathbb{N}$. При этом n называется *мощностью конечного множества*, а мощностью пустого множества называется нуль. Мощность конечного множества X обозначается $|X|$ или $\#X$.

Задача 1.123. Докажите, что мощность конечного множества определена корректно, то есть множества $[n]$ и $[m]$ не могут быть равномощными при $n \neq m$.

[[Используйте математическую индукцию; предположив противное, постарайтесь уменьшить n и m на единицу.]]

Задача 1.124. Докажите, что для мощности конечных множеств выполняются свойства:

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|, \quad |X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

[[Используйте математическую индукцию.]]

Все бесконечные множества на первый взгляд выглядят одинаково, хотя мы уже доказали, что множество действительных чисел на самом деле больше, чем множество натуральных чисел.

Определение 1.125. Множество называется *счётным*, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

Лемма 1.126. *Подмножество счётного множества либо конечно, либо счётно.*

Доказательство. Можно считать, что мы рассматриваем непустое $X \subseteq \mathbb{N}$. Определим x_1 как минимальный элемент X, x_2 — как минимальный из оставшихся и так далее по индукции. При этом X будет поставлено в соответствие либо всему $\mathbb{N}$, либо его конечному отрезку, то есть окажется либо счётным, либо конечным. □

Теорема 1.127. *Множество* $\mathbb{Z}$ *счётно.*

Доказательство. Можно обратимо отобразить $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ как $f(0) = 1$, и для $n \in \mathbb{N}$ положить $f(n) = 2n$, $f(-n) = 2n + 1$. □

Операция декартова произведения делает конечные множества больше (если они состоят из более чем одного элемента). Однако у счётных множеств операция декартова произведения мощность не увеличивает:

Лемма 1.128. *Произведение* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *равномощно* $\mathbb{N}$.

Доказательство. Выпишем явные отображения: при $\frac{k(k-1)}{2} < n \leqslant \frac{k(k+1)}{2}$ ($k \in \mathbb{N}$) мы положим

$$f(n) = \left(x - \frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2} + 1 - x\right)$$

и в обратную сторону положим

$$f^{-1}(\ell, m) = \frac{(\ell + m - 1)(\ell + m - 2)}{2} + \ell.$$

□

Теорема 1.129. *Множество* $\mathbb{Q}$ *счётно.*

Доказательство. Всякий элемент $r \in \mathbb{Q}$ представляется в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$ с $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$. таким образом $\mathbb{Q}$ равномощно подмножеству $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, то есть по лемме 1.128 равномощно подмножеству $\mathbb{N}$. Так как $\mathbb{Q}$ не является конечным, то по лемме 1.126 оно должно оказаться счётным. □

Задача 1.130. Докажите, что множество всех подмножеств X, 2^X, не равномощно X.

[[Предположите наличие отображения $f : X \to 2^X$ и подумайте, может ли в его образе лежать множество $\{x : x \in X, x \notin f(x)\}$ (используйте парадокс Бертрана Рассела).]]

Определение 1.131. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если из $f(x) = f(x')$ следует $x = x'$.

Определение 1.132. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным*, если из $f(X) = Y$.

Обратите внимание, что инъективное и одновременно сюръективное отображение является биективным, то есть обратимым.

Определение 1.133. Будем говорить, что множество X *не мощнее* множества Y, если существует инъективное отображение $f : X \to Y$. Будем обозначать это как $|X| \leqslant |Y|$.

Можно определить отношение $|X| \leqslant |Y|$ через существование сюръективного отображения в обратную сторону, $g : Y \to X$. Перейти от f к g можно, отобразив всякий элемент $y \in Y$ вида $y = f(x)$ в x, а остальные элементы отобразив в X как-нибудь.

Перейти от g к f можно, выбрав по одному $f(x)$ во всяком прообразе $g^{-1}(x)$. Это кажется достаточно безобидным, но на самом деле в этом процессе используется *аксиома выбора*: имея семейство непустых множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (как отображение из индексирующего множество в множество подмножество некоторого множества U), можно выбрать по одному элементу $f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого α. Аксиому выбора также можно сформулировать как утверждение, что *бесконечное декартово произведение*

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha, \text{ таких что } \forall \alpha \in A, f(\alpha) \in X_\alpha\}$$

непустых множеств само не пусто.

Задача 1.134. * Докажите, что если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, то $|X| = |Y|$.

[[Возьмите существующие по определению инъективные $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$. Посмотрите на структуру образов отображений f, $f \circ g$, $f \circ g \circ f$ и т.д., а также g, $g \circ f$, $g \circ f \circ g$ и т.д.]]

Задача 1.135. * Докажите, что множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{R}$.

[[Поработайте с представлением действительного числа двоичной записью и используйте результат задачи 1.134.]]

Задача 1.136. * Докажите, что множество $\mathbb{R}$ равномощно $2^{\mathbb{N}}$.

[[Поработайте с представлением действительного числа двоичной записью и используйте результат задачи 1.134.]]

2. Непрерывность и дифференцируемость функций одной переменной

2.1. **Непрерывность функций.** В этом разделе функцией мы будем называть отображение из некоторого множества действительных чисел в действительные числа, более точно такие отображения называют «функции одной переменной». Далее мы считаем функции определёнными на некотором подмножестве $X \subset \mathbb{R}$.

Определение 2.1 (Определение непрерывности по Коши). Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *непрерывна* в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V \ni f(x_0)$ найдётся окрестность $U \ni x_0$, такая что
$$f(U \cap X) \subseteq V.$$

Определение 2.2 (Определение непрерывности по Гейне). Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *непрерывна* в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $(x_n) \subseteq X$ из $x_n \to x_0$ следует, что $f(x_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$.

Лемма 2.3. *Эти два определения предела эквиваленты.*

Доказательство. (Коши)⇒(Гейне): Пусть $x_n \to x_0$ в множестве X. Для всякой $V \ni f(x_0)$ мы возьмём соответствующую $U \ni x_0$. По определению предела последовательности найдётся N, такое что при любом $n \geqslant N$ будет выполняться $x_n \in U$, а значит $f(x_n) \in V$. Это означает по определению, что $f(x_n) \to f(x_0)$.

(Гейне)⇒(Коши): Пусть это не так, для некоторой $V \in f(x_0)$ не нашлось окрестности $U \in x_0$, у которой $U \cap X$ полностью переходит в V. Это значит, что для любого $n \in \mathbb{N}$ на интервале $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ есть точка $x_n \in X$, для которой $f(x_n) \notin V$. Но тогда $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, а $f(x_n) \not\to f(x_0)$ при $n \to \infty$, что противоречит определению по Гейне. ☐

Определение предела по Гейне очень удобно, так как позволяет сводить многие вопросы о непрерывности функции к свойствам пределов последовательностей. Неформально говоря, по Гейне функция непрерывна в x_0, если её можно переставить с операцией взятия предела:
$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$
если все x_n и их предел x_0 лежат в области определения f.

Задача 2.4. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает свойством $f(x) > x$ для любого x. Докажите, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ последовательность, определённая как
$$x_n = f(x_{n-1}),$$
стремится к $+\infty$.

[[Используйте монотонность последовательности и непрерывность f по Гейне.]]

Сформулируем нужные нам свойства непрерывных функций явно:

Теорема 2.5. *Если функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны в $x_0 \in X$, то непрерывны $f + g$, $f - g$ и $f \cdot g$. При условии $g(x_0) \neq 0$ непрерывна и f/g.*

Доказательство. Утверждение про сумму, разности и произведение очевидно следует из возможности переставить предел последовательности и арифметические операции. Про частное можно заметить, что если $|g(x_0)| = \varepsilon$ то из определения по Коши следует, что в некоторой окрестности $U \ni x_0$ выполняется $|g(x_0)| > \varepsilon/2$ и значит в этой окрестности на g можно делить и применять предел частного последовательностей. ☐

Определение 2.6. Будем говорить, что функция *непрерывна*, если она непрерывна в любой точке своей области определения.

Теорема 2.7. *Если функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывны, то их композиция $g \circ f$ непрерывна в любой точке своей естественной области определения $Z = X \cap f^{-1}(Y)$.*

Доказательство. Если $x_n \to x_0$ в Z, то $f(x_n) \to f(x_0)$ по непрерывности f и далее $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ по непрерывности g, что и означает непрерывность $g \circ f$ по Гейне. □

Для установления непрерывности обратных функций введём понятие *промежуток*: это отрезок $[a, b]$, интервал (a, b) с возможно бесконечными a или b, полуинтервал $[a, b)$ или $(a, b]$. Можно также указать характеристическое свойство промежутков:

Лемма 2.8. *Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ тогда и только тогда является промежутком, если для любых $x < y \in X$ отрезок $[x, y]$ полностью лежит в X.*

Доказательство. Очевидно все промежутки обладают этим свойством. Пусть теперь X обладает указанным свойством, положим

$$a = \inf X, \quad b = \sup X.$$

Если $a = b$, то X будет одной точкой, которую можно считать отрезком $[a, a]$. Для всякого числа $c \in (a, b)$ по определению точной грани найдётся элементы X как в (a, c), так и в (c, b). Следовательно и $c \in X$, то есть X содержит весь интервал (a, b). Далее X является отрезком, полуинтервалом или интервалом в зависимости от того, содержит ли оно свои точные верхние/нижние грани. □

Определение 2.9. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *возрастает*, если для любых $x < y \in X$ оказывается $f(x) \leqslant f(y)$. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *строго возрастает*, если для любых $x < y \in X$ оказывается $f(x) < f(y)$. Аналогично определение *убывания* и *строгого убывания* с неравенствами $f(x) \geqslant f(y)$ и $f(x) > f(y)$ соответственно.

Определение 2.10. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *монотонна*, если она возрастает на всём X или убывает на всём X. Функция *строго монотонна*, если она строго возрастает или строго убывает.

Теорема 2.11. *Если $f : X \to \mathbb{R}$ переводит промежуток X в промежуток $f(X)$ и монотонна, то она непрерывна.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности f возрастает. Если $f(X)$ пусто или состоит из одной точки, доказывать нечего.

Иначе используем определение по Коши. Если $f(x_0)$ не является концом промежутка $f(X)$, тогда для всякой окрестности $V \ni f(x_0)$ найдутся значения $A < f(x_0) < B$, лежащие в $f(X) \cap V$. Возьмём a и b такие, что $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогда из монотонности для всякого $x \in (a, b)$ будет выполняться

$$A \leqslant f(x) \leqslant B \Rightarrow f(x) \in V.$$

Если $f(x_0)$ является, к примеру, правым концом $f(X)$, то мы просто для всякой $V \ni f(x_0)$ найдём $A < f(x_0)$ в $f(X) \cap V$, возьмём a такое, что $f(a) = A$ и из монотонности заключим, что для любого $x \in (a, +\infty) \cap X$ будет выполняться

$$A \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) \Rightarrow f(x) \in V.$$

Аналогично рассматривается случай левого конца $f(X)$. □

Следствие 2.12. *Функции экспонента, логарифм, тригонометрические функции и обратные тригонометрические функции непрерывны на своих областях определения.*

Доказательство. Как мы установили, экспонента и логарифм строго монотонно отображают промежуток $(-\infty, +\infty)$ на $(0, +\infty)$ и обратно, следовательно они обе непрерывны (хотя мы ранее доказали это иначе).

Аналогично можно сказать про пары взаимно обратных монотонных отображений промежутков:

$$\begin{aligned} \cos : [0,\pi] \to [-1,1] \quad &\text{и} \quad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi];\\ \sin : [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1] \quad &\text{и} \quad \arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2];\\ \operatorname{tg} : (-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R} \quad &\text{и} \quad \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2,\pi/2);\\ \operatorname{ctg} : (0,\pi) \to \mathbb{R} \quad &\text{и} \quad \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (0,\pi). \end{aligned}$$

Непрерывность тригонометрических функций на всей области определения следует из формул типа $\sin(x+\pi/2) = \cos x$ и т.п., позволяющих распространять область непрерывности сдвигами на всю прямую с учётом непрерывности композиции. □

Часто функции, которые получаются из указанных в последней теореме арифметическими операциями и композициями, обычно называются *элементарными*. Это понятие весьма условно, так как за базу мы могли бы взять и какие-то другие функции. Как следствие из утверждений этого раздела мы получаем, что все элементарные функции непрерывны на своих естественных областях определения.

У теоремы 2.11 есть похожая теорема, действующая «в другую сторону»:

Теорема 2.13 (Теорема о промежуточном значении)**.** *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна и X — промежуток, то $f(X)$ — тоже промежуток.*

Доказательство. Надо доказать, что если $f(a) = A < B = f(b)$, то весь отрезок $[A,B]$ лежит в области значений f. Без ограничения общности будем считать $a < b$ и для всякого $C \in (A,B)$ найдём $c \in [a,b]$, для которого $f(c) = C$.

Если середина $m \in [a,b]$ не подходит в качестве c, то какой-то из отрезков $[a,m]$ или $[m,c]$ можно взять в качестве $[a_2,b_2]$, для которого $f(a_2) < C < f(b_2)$. Далее продолжаем так же делить отрезки пополам и либо найдём $f(c) = C$ где-то посередине, либо получим стягивающуюся к точке c последовательность отрезков $[a_k,b_k]$, для которых выполняется

$$f(a_k) < C < f(b_k) \Rightarrow f(c) \leqslant C \leqslant f(c) \Rightarrow f(c) = C.$$

□

Следствие 2.14. *Если $f : X \to \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна на промежутке X, то $f(X)$ — промежуток и обратная функция f^{-1} тоже непрерывна и строго монотонна на промежутке $f(X)$.*

Задача 2.15. Пусть непрерывная функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$. Докажите, что для всякого α вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, уравнение

$$f(x+\alpha) = f(x)$$

имеет решение.

[[Докажите, что выражение $f(x+\alpha) - f(x)$ не может иметь один и тот же знак на всём отрезке $[0, 1-\alpha]$.]]

Задача 2.16. Пусть $\alpha \in (0,1)$ не равно никакому $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Приведите пример непрерывной функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, которая имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$ и такой, что уравнение

$$f(x+\alpha) = f(x)$$

не имеет решений.

[[Начните с построения подходящей непрерывной функции g, такой что $g(x+\alpha) = g(x)$, но $g(0) \neq g(1)$, а потом модифицируйте её.]]

Мы изучили поведение непрерывных функций на промежутках, а для изучения поведения непрерывных на компактах функций нам понадобится третье определение непрерывности:

Определение 2.17 (Топологическое определение непрерывности)**.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна, если для всякого открытого V прообраз $f^{-1}(V)$ открыт относительно X.

Действительно, если выполняется топологическая непрерывность, то $f^{-1}(V) = U \cap X$, то есть в качестве U в определении по Коши можно брать $U \ni x_0$ или точнее какой-то интервал $U' \subseteq U$, содержащий x_0. Обратно, если выполняется определение по Коши, то для всякой $x_0 \in f^{-1}(V)$ мы имеем окрестность $U \ni x_0$, для которой $U \cap X \subseteq f^{-1}(V)$. Объединяя все такие окрестности всех $x_0 \in f^{-1}(V)$ мы получим открытое множество, пересечение которого с X очевидно совпадает с $f^{-1}(V)$.

Из топологического определения непрерывности удобно выводить такое свойство:

Теорема 2.18. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна и X — компакт, то $f(X)$ — тоже компакт.*

Доказательство. Для открытого покрытия $\{V_\alpha\}$ образа $f(X)$ можно подобрать открытые $\{U_\alpha\}$, такие что

$$U_\alpha \cap X = f^{-1}(V_\alpha).$$

Тогда $\{U_\alpha\}$ составляют открытое покрытие X, у которого есть конечное подпокрытие. Соответствующие $\{V_\alpha\}$ тогда дадут конечное покрытие $f(X)$. □

Следствие 2.19. *Непрерывная на непустом компакте функция $f : X \to \mathbb{R}$ принимает минимальное и максимальное значения.*

Доказательство. Множество $f(X)$ также является компактом, а значит оно ограничено и замкнуто. Следовательно его точные нижняя и верхняя грани конечны (из ограниченности) и лежат в нём (из замкнутости). □

Задача 2.20. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет период $T > 0$, то есть

$$f(x + T) = f(x)$$

для любого x. Докажите, что для любого α уравнение

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

имеет решение.

[[Докажите, что выражение $f(x + \alpha) - f(x)$ не может иметь один и тот же знак, рассмотрев минимальное значение f. Объясните, почему f принимает минимальное значение.]]

Множество одновременно является компактом и промежутком тогда и только тогда, когда оно является отрезком. Поэтому верно следующее:

Следствие 2.21. *Непрерывная $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ отображает отрезок в отрезок.*

Задача 2.22. Придумайте разрывную $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок.

[[Используйте главный источник контрпримеров, выражение $\sin \frac{1}{x}$.]]

2.2. **Пределы функций.** Некоторой модификацией определения непрерывности можно получить определение предела функции в $a \in \overline{\mathbb{R}}$:

Определение 2.23. $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *предельной точкой* множества X если для любой окрестности a, $U(a)$, пересечение $U(a) \cap (X \setminus \{a\})$ не пусто. Равносильно, в множестве $X \setminus \{a\}$ можно выбрать последовательность, стремящуюся к a.

Определение 2.24 (Определение предела функции по Коши)**.** Пусть точка a является предельной точкой X и $f : X \to \mathbb{R}$, тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}},$$

если для любой окрестности A, $V(A)$, найдётся окрестность a, $U(a)$, такая что

$$f\left(U(a) \cap (X \setminus \{a\})\right) \subseteq V(A).$$

Определение 2.25 (Определение предела функции по Гейне)**.** Пусть точка a является предельной точкой X и $f : X \to \mathbb{R}$, тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}},$$

если для любой последовательности $(x_n) \subseteq X \setminus \{a\}$ из $x_n \to a$ следует, что $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$.

Доказательство эквивалентности этих определений предела в точности повторяет доказательство эквивалентности определений непрерывности функции по Коши и по Гейне.

Задача 2.26. Проверьте с помощью определения по Гейне совместимость предела функции с арифметическими операциями (предел суммы, разности, произведения и частного), аналогично свойствам непрерывности. Проверьте утверждения о переходе к пределу в неравенствах, аналогичные таковым для последовательностей.

Задача 2.27. Сформулируйте правильный вариант утверждения о пределе композиции функций. Обратите внимание, что в определении предела в точке a в функцию нельзя подставлять само a.

Теорема 2.28 (Критерий Коши существования конечного предела функции)**.** *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет конечный предел в a тогда и только тогда, когда a является предельной точкой X и*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U(a) : \forall x', x'' \in U(a) \cap (X \setminus \{a\}), |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Из существования конечного предела легко следует утверждение. Докажем в обратную сторону по Гейне. Для всякой последовательности $x_n \to a$ из $X \setminus \{a\}$ мы видим, что начиная с некоторого момента она попадёт в $U(a)$ из утверждения и тогда будет выполняться $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Значит последовательность $(f(x_n))$ фундаментальна и имеет конечный предел.

Может ли оказаться, что для разных последовательностей эти пределы разные? Предположим, для $x'_n \to a$ и $x''_n \to a$ пределы $f(x'_n)$ и $f(x''_n)$ различны. Составим из них одну последовательность $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$ и обозначим её (x_n). Тогда $x_n \to a$, но $f(x_n)$ будет иметь два частичных предела — противоречие с уже доказанным. $\square$

Для функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $Y \subseteq X$ будем называть *сужением* f на Y, $f|_Y$, функцию $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$, принимающую на Y те же значения, что f. На самом деле выражения типа «функция непрерывна на Y», «функция монотонна на Y» и т.п. у нас будут означать, что сужение функции на множество Y непрерывно, монотонно и т.п. Эта терминология имеет тонкости. Например, *функция Дирихле*

$$D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке своей области определения (докажите это в качестве упражнения), но непрерывна на множестве $\mathbb{Q}$, так как постоянна на нём.

Определим односторонние пределы:

Определение 2.29. *Левый и правый пределы функции* $f : X \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}$ определим как

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a} f|_{X\cap(-\infty,a)}(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a} f|_{X\cap(a,+\infty)}(x).$$

Иногда их также неформально обозначают $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

Определение 2.30. Точка a называется *точкой устранимого разрыва* функции, если в ней существует конечный предел f, но $f(a)$ не определено или не равно этому пределу. Точка a называется *точкой разрыва первого рода* функции, если в ней существуют не равные друг другу пределы слева и справа. Иначе предельная точка области определения функции, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва второго рода*.

Теорема 2.31. *Если $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ монотонна, то все её разрывы первого рода и в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ выполняется*

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$

Доказательство. Без ограничения общности пусть f возрастает. Возьмём некоторую $x_0 \in (a, b)$ и положим $A = \sup_{x\in(a,x_0)} f(x)$, из возрастания очевидно следует $A \leqslant f(x_0)$. Докажем, что A является левым пределом f в точке x_0. Для всякой окрестности $V \ni A$ найдём $A' \in V$, $A' < A$. По определению точной верхней грани найдётся $\xi < x_0$, такое что

$$A' < f(\xi) \leqslant A.$$

Тогда из возрастания для всякого $x \in (\xi, x_0)$ будет выполняться

$$A' < f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant A \Rightarrow f(x) \in V.$$

Аналогично доказывается, что $B = \inf_{x\in(x_0,b)} f(x)$ является правым пределом в точке x_0. □

Задача 2.32. Докажите, что если функция монотонна на отрезке, то у неё не более чем счётное количество точек разрыва.

[[Используйте счётность множества рациональных чисел.]]

2.3. **Сравнение асимптотического поведения функций, символы O и o.** Предположим у нас есть две функции, определённые на одном и том же множестве X и мы рассматриваем их пределы в предельной точке a этого множества. Обе функции могут стремиться к нулю, то есть быть бесконечно малыми, но иногда полезно знать, какая из них существенно меньше, или как говорят, какая быстрее стремится к нулю. Аналогичный вопрос, «кто быстрее», может возникнуть в случае, когда обе функции стремятся к бесконечности.

Мы также будем считать, что последовательность и её предел — это частный случай функции на множестве $\mathbb{N}$ и её предела в точке $+\infty$. Поэтому далее мы рассуждаем о функциях, но к последовательностям всё применимо в полной мере.

Определение 2.33. Если для $f, g : X \to \mathbb{R}$ найдётся такая функция α, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x)$$

по крайней мере в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$ в пересечении с X, и $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то пишут

$$f(x) = o(g(x)).$$

Это определение — это более аккуратный способ сказать, что $f/g \to 0$ при $x \to a$, принимающий во внимание то, что g может обращаться в нуль. Если g не обращается в нуль в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$, то это значит в точности $f/g \to 0$. Обратим внимание, что данная запись достаточно условна и её надо применять с пониманием, например, написать $o(g(x)) = f(x)$ будет неправильно.

Определение 2.34. Если для $f, g : X \to \mathbb{R}$ найдётся такая константа C, что

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)|$$

по крайней мере в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$ в пересечении с X, то пишут

$$f(x) = O(g(x)).$$

Опять, это определение — это более аккуратный способ сказать, что f/g ограничена при $x \to a$, и в случае, когда g не обращается в нуль, ровно это и означающий.

Задача 2.35. Проверьте символические равенства

$$o(f) \pm o(f) = o(f), o(f)O(g) = o(fg), o(O(f)) = o(f), O(O(f)) = O(f).$$

Определение 2.36. Для функций $f, g : X \to \mathbb{R}$ и предельной точки a множества X будем говорить, что f и g *одного порядка*, $f \asymp g$, при $x \to a$, если

$$f(x) = O(g(x)), \text{ и } g(x) = O(f(x)).$$

Симметричность этого отношения ясна по определению, транзитивность следует из предыдущей задачи. Например, легко заметить, что всякий многочлен степени n одного порядка с x^n при $x \to \infty$. Действительно, из равенства

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{x^n} = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \to a_n \neq 0$$

следует, что отношение многочлена и x^n ограничено в некоторой окрестности ∞, и отношение в другую сторону тоже ограничено в некоторой окрестности ∞.

Более сильное отношение эквивалентности определяется так:

Определение 2.37. Для функций $f, g : X \to \mathbb{R}$ и предельной точки a множества X будем говорить, что f и g *асимптотически эквивалентны*, $f \sim g$, при $x \to a$, если

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) = g(x)(1 + o(1))$$

при $x \to a$.

Симметричность этого отношения нужно проверить. Выражение из определения означает, что

$$f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)),\ \alpha(x) \to 0,$$

то есть эквивалентно

$$f(x) = g(x)\beta(x),\ \beta(x) \to 1.$$

В такой формулировке получается

$$g(x) = f(x)\frac{1}{\beta(x)},\ \frac{1}{\beta(x)} \to 1$$

и симметричность уже очевидна.

Транзитивность проверяется так:

$$f(x) = g(x)\beta(x), g(x) = h(x)\gamma(x) \Rightarrow f(x) = h(x)\beta(x)\gamma(x),$$

и ясно, что $\beta(x)\gamma(x) \to 1$ при $x \to a$, если $\beta(x) \to 1$ и $\gamma(x) \to 1$.

В примере с многочленом степени n мы понимаем, что он асимптотически эквивалентен выражению $a_n x^n$ по уже выписанной формуле. Собственно, при $g(x)$, не равной нулю в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$, $f \sim g$ означает просто, что отношение f/g стремится к единице при $x \to a$.

Задача 2.38. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{Z}$

$$x^n = o(e^x) \text{ при } x \to +\infty \text{ и } e^x = o(x^n) \text{ при } x \to -\infty.$$

[[Вспомните, что экспонента определялась как предел возрастающей (по крайней мере при $x > 0$) последовательности многочленов.]]

Задача 2.39. Докажите, что для любого $\alpha > 0$

$$\ln x = o(x^\alpha) \text{ при } x \to +\infty.$$

[[Сделайте замену $x^\alpha = t$ и покажите, что верность утверждения не зависит от выбора $\alpha > 0$. Далее положите $\alpha = 2$ и оцените логарифм линейной функцией.]]

2.4. **Производная и дифференцируемость функции.**

Определение 2.40. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ и x_0 является предельной точкой X. Тогда *производная f в точке x_0* определяется как

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Это определение можно интерпретировать геометрически как проведение прямой (*секущей*) через две точки графика $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$, нахождение тангенса угла между осью x и этой прямой, и переход к пределу $x \to x_0$, предельную прямую естественно называть *касательной* к графику в точке $(x_0, f(x_0))$, а производная — это тангенс угла наклона касательной.

Производная по определению может оказаться бесконечной ($-\infty$, $+\infty$ или просто ∞), но мы по умолчанию всегда будем считать производную конечной, а о возможности рассматривать бесконечную производную в данном конкретном случае будем упоминать явно. Ещё один формальный момент — при работе с производной удобно наложить разумные требования на область определения, переходя к следующему:

Определение 2.41. Функция f *дифференцируема* в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности x_0 и имеет конечную $f'(x_0)$.

Определение 2.42. Если f определена в некоторой левой окрестности x_0, $(a, x_0]$, то

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

называется её *левой производной*, а если f определена в правой окрестности x_0, $[x_0, b)$, то

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

называется её *правой производной*.

По определению предела ясно, что умножение на константу, сложение и вычитание сохраняют дифференцируемость и имеет место линейность

$$(Af(x) + Bf(x))' = Af'(x) + Bg'(x).$$

Для установления других свойств производной нам удобно будет переформулировать дифференцируемость:

Лемма 2.43. *Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она определена в окрестности x_0 и*

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

при $x \to x_0$. Тогда $A = f'(x_0)$.

Доказательство. Из наличия такой формулы легко следует $f'(x_0) = A$. Наоборот, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A,$$

то иначе можно сказать

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x), \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to x_0$$

и искомая формула получается домножением на $x - x_0$. □

Обратите внимание, что в отличие от определения предела в точке, в эту формулу законно ставить $x = x_0$. Иногда даже полезно писать это определение в виде $f(x) = f(x_0) + (f'(x_0) + o(1))(x - x_0)$. Из такой записи дифференцируемости сразу следует:

Следствие 2.44. *Дифференцируемая в x_0 функция непрерывна в x_0.*

Теперь мы можем доказать теоремы о взаимодействии производной с умножением, делением и композицией функций:

Теорема 2.45. *Если f и g дифференцируемы в x_0, то их произведение дифференцируемо и*

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Доказательство. Воспользуемся формулами

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

и получим при перемножении

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))(x - x_0) + o(x - x_0),$$

так как из непрерывности f и g ограничены в окрестности x_0 и при домножении их на $o(x - x_0)$ опять получается $o(x - x_0)$. □

Теорема 2.46. *Если f и g дифференцируемы в x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то их частное дифференцируемо и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Доказательство. Запишем

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x)g(x_0)}(x - x_0) + o(x - x_0) =$$
$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}(x - x_0) + o(x - x_0)$$

так как $o(x-x_0)$ из определения дифференцируемости f и g домножаются на ограниченные величины и

$$\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x)g(x_0)}-\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}=o(1).$$

□

Теорема 2.47. *Если f дифференцируема в x_0, и g дифференцируема в $y_0=f(x_0)$, то композиция $g\circ f$ дифференцируема в x_0 и*

$$(g\circ f)'=g'(y_0)f'(x_0).$$

Доказательство. Во-первых заметим, что из непрерывности f следует, что некоторая окрестность $U\ni x_0$ при f переходит в $V\ni y_0$, на которой определена g. Следовательно, композиция $g\circ f$ определена в некоторой окрестности x_0. Запишем

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),\ g(y)=g(y_0)+g'(y_0)(y-y_0)+o(y-y_0)$$

и подставим одно в другое

$$\begin{aligned}g(f(x))=g(y_0)+g'(y_0)(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0))+o(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0))=\\=g(y_0)+g'(y_0)f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).\end{aligned}$$

□

Теорема 2.48. *Если f непрерывна и строго монотонна в окрестности x_0 и дифференцируема в x_0, то для обратной функции g в точке $y_0=f(x_0)$ имеет место*

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)},$$

в том числе в смысле $\frac{1}{0}=\infty$.

Доказательство. Заметим, что обратная функция в данной ситуации оказывается непрерывной и при $y\to y_0$ оказывается $g(y)\to g(y_0)$. Это позволяет записать

$$g'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Теперь у нас есть все инструменты для установления дифференцируемости элементарных функций во всех точках их естественных областей определения. Например для экспоненты из замечательного предела $\frac{e^t-1}{t}\to 1$ при $t\to 0$ следует

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=e^{x_0}\lim_{x-x_0\to 0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}=e^{x_0},$$

то есть $(e^x)'=e^x$. Для логарифма можно применить теорему о производной обратной функции

$$(\ln x)'=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

Для синуса можно записать

$$\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\cos\frac{x+x_0}{2}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0}\to\cos x_0,$$

из замечательного предела при $t\to 0$

$$\frac{1}{\cos t}\leqslant\frac{\sin t}{t}\leqslant 1\Rightarrow\frac{\sin t}{t}\to 1.$$

Аналогично для косинуса

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\sin\frac{x + x_0}{2}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} \to -\sin x_0.$$

Для тангенса и котангенса получим по производной частного

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Для обратных тригонометрических функций по производной обратной функции выйдет

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Задача 2.49. Найдите производные гиперболических функций $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и их обратных функций.

В целом мы будем говорить, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на открытом множестве* X, если она дифференцируема в любой точке $x_0 \in X$. Тогда f' на самом деле тоже является функцией $f : X \to \mathbb{R}$. Приведённые выше конкретные вычисления производных, с учётом правил вычисления производной от арифметических операций и производной композиции функций, дают следующее утверждение:

Следствие 2.50. *Всякая элементарная функция дифференцируема во внутренности своей естественной области определения и её производная – тоже элементарная функция (суженная на эту внутренность).*

Взятие внутренности в этом утверждении важно, так как функция $\sqrt{x}$, к примеру, определена в нуле, но имеет в нём бесконечную (правую) производную. В некоторых случаях мы будем интересоваться дифференцируемостью функции на не открытых промежутках, в таких случаях дифференцируемость будет пониматься как существование односторонней производной на концах промежутка.

2.5. **Теорема о среднем Лагранжа, исследование функции на монотонность, экстремум и выпуклость.** В этом разделе мы покажем, как знание производной функции позволяет исследовать функцию на экстремум, возрастание и убывание, и считать пределы.

Определение 2.51. Точка x_0 называется *локальным минимумом* функции f, если значение $f(x_0)$ минимально среди всех значений f в некоторой окрестности x_0. Аналогично определяется *локальный максимум*. Если нам не важно, максимум или минимум в точке, то мы говорим *локальный экстремум*. Если минимальное/максимальное значение принимается (из достаточно малой окрестности) только в точке x_0, то экстремум называется *строгим*.

Докажем простую, но очень полезную теорему:

Теорема 2.52 (Теорема Ферма — необходимое условие экстремума)**.** *Если f определена в окрестности x_0, имеет локальный экстремум в x_0 и имеет $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. По определению производной в точке минимума для односторонних производных окажется

$$f'_-(x_0) \leqslant 0, f'_+(x_0) \geqslant 0,$$

то есть при наличии производной с обеих сторон она должна быть равно нулю. Аналогично для максимума. □

Теорема 2.53 (Теорема Ролля). *Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), а также $f(a) = f(b)$, то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Непрерывная на отрезке функция достигает на нём максимума и минимума. Если она равна константе, то доказывать нечего, иначе из условия $f(a) = f(b)$ следует, что один из экстремумов находится строго внутри, в точке $\xi \in (a, b)$. Тогда $f'(\xi) = 0$ по предыдущей теореме. $\square$

Задача 2.54. Докажите, что если квазимногочлен $P(x)e^{ax}$ (где P — обычный многочлен и $a \neq 0$) имеет n различных корней, то его производная тоже имеет n различных корней.

[[Как минимум $n - 1$ корень производной легко найти по теореме Ролля, остаётся найти ещё один.]]

Теорема 2.55 (Теорема о среднем Лагранжа). *Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство. Положим $A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Тогда $g(x) = f(x) - Ax$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля (проверьте равенство $g(a) = g(b)$!) и мы находим $\xi \in (a, b)$, такое что

$$g'(\xi) = f'(\xi) - A = 0 \Rightarrow f'(\xi) = A.$$

$\square$

Иначе теорему Лагранжа можно записать как

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

в такой записи безопасно рассматривать и случай $b = a$, считая произведение неопределённого выражения на нуль равным нулю. Ещё более безопасный вариант, в котором допустимо и $b = a$, такой:

$$f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b - a))(b - a), \quad \vartheta \in (0, 1).$$

Теорема 2.56 (Связь монотонности с производной). *Пусть функция f определена и непрерывна на интервале (a, b) и возможно на его концах, а также дифференцируема на интервале (a, b). Тогда f возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ на всём (a, b). Если $f'(x) > 0$ на всём (a, b), то f строго возрастает. Для убывания верно то же со сменой знака производной на обратный.*

Доказательство. В одну сторону утверждение (доказательство возрастания и строгого возрастания) следует из равенства

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x')$$

для любых двух точек x'', x' в области определения и некоторой точки ξ между ними. В обратную сторону, если f возрастает, то в определении производной рассматривается предел неотрицательных выражений, который должен быть неотрицательным. $\square$

Пример $f(x) = x^3$ показывает, что функция может строго возрастать, но её производная при этом может обратиться в нуль, так что из строгого возрастания не следует строгая положительность производной.

Признак монотонности позволяет доказывать неравенства по следующей схеме:

Следствие 2.57 (Интегрирование неравенств). *Если две функции f и g непрерывны на $[a, b)$, дифференцируемы на интервале (a, b), их значения на левом конце совпадают, $f(a) = g(a)$, и на (a, b) выполняется $f'(x) \geqslant g'(x)$, то на интервале также выполняется $f(x) \geqslant g(x)$.*

Доказательство. Из условия следует, что разность $f(x) - g(x)$ возрастает на $[a, b)$, а так как она равна нулю на левом конце, то она неотрицательна на всём $[a, b)$. □

Задача 2.58. Докажите, что при натуральном n и $x \geqslant 0$ верно неравенство

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Какие неравенство будет верно при $x < 0$?

[[Используйте интегрирование неравенств по индукции.]]

Задача 2.59. Сравните, что больше, e^π или π^e.

[[Замените π на произвольное $x > e$, перенесите всё в левую часть и дифференцируйте.]]

Так как функция постоянна тогда и только тогда, когда она (не обязательно строго) возрастает и убывает одновременно, то мы получаем:

Следствие 2.60 (Критерий постоянства функции). *Пусть функция f определена и непрерывна на интервале (a, b) и возможно на его концах, а также дифференцируема на интервале (a, b). Тогда f постоянна тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ на всём (a, b).*

Помимо необходимого условия экстремума, который даёт теорема Ферма, можно сформулировать и практически полезное достаточное условие:

Теорема 2.61 (Достаточные условия экстремума через первую производную). *Если f непрерывна в x_0 и дифференцируема на некоторых (a, x_0), (x_0, b), причём $f'(x) < 0$ на (a, x_0) и $f'(x) > 0$ на (x_0, b), то f имеет строгий локальный минимум в x_0. Если неравенства на производную нестрогие, то f имеет не обязательно строгий минимум. Если неравенства (оба) в обратную сторону, то речь идёт о строгом или нестрогом максимуме.*

Доказательство. Из условий следует, что f (строго) убывает на $(a, x_0]$ и (строго) возрастает на $[x_0, b)$. □

Определение 2.62. Функция $f : X \to \mathbb{R}$, определённая на промежутке X, называется *выпуклой*, если для любых $x \neq y \in X$ и любого $t \in (0, 1)$

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Если все такие неравенства строгие, то функция называется *строго выпуклой*. Для неравенств в обратную сторону функция называется *вогнутой* или *строго вогнутой*.

Теорема 2.63 (Достаточное условие выпуклости). *Непрерывная на промежутке и дифференцируемая на его внутренности функция выпукла, если её производная возрастает. Она строго выпукла, если её производная строго возрастает. Для вогнутости утверждения аналогичны с заменой возрастания производной на убывание.*

Доказательство. Заметим, что вычитание из функции линейной функции не меняет ни её выпуклости, ни возрастания производной. Вычитая из f линейную функцию, принимающую те же значения в точках x и y, мы придём к случаю $f(x) = f(y) = 0$. Тогда нужно доказать, что для $z \in (x, y)$ выполняется $f(z) \leqslant 0$ (или $f(z) < 0$ для строгой выпуклости). Но если $f(z) > 0$, то по теореме о среднем Лагранжа найдутся $\xi \in (x, z)$ и $\eta \in (z, y)$, такие что

$$f'(\xi) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} > 0, \quad f'(\eta) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z} < 0.$$

Но при этом $\xi < \eta$, то есть производная не является возрастающей.

Для строгой выпуклости предположение $f(z) \geqslant 0$ также влечёт $f'(\xi) \geqslant 0 \geqslant f'(\eta)$, что даёт противоречие со строгим возрастанием производной. ☐

Используя критерий монотонности можно сказать, что выпуклость означает неотрицательность второй производной (при её наличии) $f''(x) = (f'(x))' \geqslant 0$, а вогнутость — неположительность второй производной.

Задача 2.64. Докажите, что если непрерывная на промежутке и дифференцируемая на его внутренности функция выпукла, то её производная возрастает. Докажите, что если функция строго выпукла, то её производная строго возрастает.

[[Предположите $f'(x) > f'(y)$ при $x < y$. Сведите к случаю $f(x) = f(y) = 0$ как в предыдущем доказательстве и обратите внимание, что по выпуклости функция должна быть неположительной на (x, y) (отрицательной при строгой выпуклости). Посмотрите, что происходит с функцией в окрестности точек x и y и найдите противоречие.]]

Задача 2.65. На каких промежутках функция $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ выпукла, а на каких — вогнута?

Задача 2.66. Докажите, что выпуклая на интервале функция непрерывна. Приведите пример функции на отрезке, которая разрывна, но выпукла.

[[Обратите внимание, что если через две точки графика выпуклой функции провести секущую, то между этими двумя точками она будет лежать (нестрого) над графиком, а слева и справа от этой пары точек — под графиком.]]

Задача 2.67. Докажите, что если f определена и непрерывна на интервале (a, b), и в каждой точке $x \in (a, b)$ выполняется

$$\varlimsup_{\delta \to +0} \frac{f(x+\delta) + f(x-\delta) - 2f(x)}{\delta^2} \geqslant 0,$$

то f выпукла.

[[Покажите, что выпуклость f следует из выпуклости $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x^2$ при любом положительном ε. Заметьте, что

$$\varlimsup_{\delta \to +0} \frac{f_\varepsilon(x+\delta) + f_\varepsilon(x-\delta) - 2f_\varepsilon(x)}{\delta^2} \geqslant 2\varepsilon,$$

и далее действуйте аналогично доказательству теоремы 2.63.]]

2.6. **Теорема о среднем Коши и правило Лопиталя.**

Теорема 2.68 (Теорема о среднем Коши)**.** *Если функции f и g непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b), а также g' не равно нулю ни в одной точке (a, b), то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказательство. По теореме Ролля $g(b) - g(a) \neq 0$, Положим

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

тогда

$$h(x) = f(x) - Ag(x) = \frac{f(x)g(b) - f(x)g(a) - g(x)f(b) + g(x)f(a)}{g(b) - g(a)}$$

принимает равные значения на концах отрезка. Применяя к ней теорему Ролля, получаем точку $\xi \in (a, b)$, такую что

$$h'(\xi) = f'(\xi) - Ag'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A.$$

□

Из этой теоремы выводятся очень полезные способы находить пределы отношения функций в тех случаях, когда теорема о пределе частного не работает.

Теорема 2.69 (Правило Лопиталя для неопределённости $\frac{0}{0}$). *Пусть f и g определены и дифференцируемы на интервале с левым или правым концом a, g' не обращается на этом интервале в нуль, $f(x), g(x) \to 0$ при $x \to a$ и существует предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

тогда существует и предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть точка a конечна. Тогда доопределим $f(a) = g(a) = 0$ до непрерывности в a и напишем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

для некоторой ξ между x и a по теореме о среднем Коши. При $x \to a$ мы будем иметь $\xi \to a$, значит выражение справа будем иметь предел, а значит и выражение слева тоже.

Если же a бесконечна, то замена $t = 1/x$ сводит задачу к $a = 0$, так как

$$\frac{(f(1/t))'_t}{(g(1/t))'_t} = \frac{f'(1/t)\frac{-1}{t^2}}{g'(1/t)\frac{-1}{t^2}} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}$$

тоже имеет предел при $t \to 0$ по условию, из чего следует существование предела отношения функций. □

Теорема 2.70 (Правило Лопиталя для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть f и g определены и дифференцируемы на интервале с левым или правым концом a, g' не обращается на этом интервале в нуль, $f(x), g(x) \to \infty$ при $x \to a$ и существует предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

тогда существует и предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Воспользуемся определением предела по Коши. Для всякой окрестности $A = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, V, мы найдём интервал с концом в a, U, такой что при $x \in U$ из области определения f и g выполняется

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in V.$$

Теперь в пределе отношения функций воспользуемся определением по Гейне. Последовательность $x_n \to a$ для достаточно больших $n \geqslant N$ окажется в U. Тогда по теореме о среднем Коши

$$\frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in V,$$

так как ξ тоже будет в U. Фиксируя N и рассматривая $n \to \infty$, мы получим из стремления $f(x_n), g(x_n) \to \infty$, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \in \operatorname{cl} V,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \in \operatorname{cl} V.$$

Из произвольности V и теоремы о единственном частичном пределе отсюда следует, что на самом деле

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = A.$$

□

Задача 2.71. Найдите пределы на бесконечности по правилу Лопиталя для выражений

$$\frac{x^n}{e^x} \text{ и } \frac{\ln^n x}{x^k}$$

с натуральными n, k и предел в нуле

$$x^n \ln^k x.$$

2.7. **Производные высших порядков, формула Тейлора.** Если функция f определена на некотором интервале (a, b) и имеет производную в каждой точке интервала, то возникает новая функция $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$. К этой функции можно также применить взятие производной, получая вторую, f'', третью, f''', и т.д. производные исходной функции. Обозначения для k-й производной такие:

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}.$$

Мы всегда будем считать, что существование производной $f^{(n)}$ в точке x_0 означает, что предыдущая производная $f^{(n-1)}$ определена в некоторой окрестности x_0.

Ясно, что из линейности одной производной следует линейность операции взятия k-й производной

$$(Af + Bg)^{(k)} = Af^{(k)} + Bg^{(k)}.$$

Получить формулу для k-й производной произведения уже посложнее. Вспомним определение биномиальных коэффициентов для $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Используя очевидное тождество

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}.$$

Отсюда следует формула

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

при $1 \leqslant k \leqslant n+1$. Если считать $\binom{n}{k}$ равным нулю для целых $n < 0$ и для целых $n \geqslant 0$ при $k < 0$ или $k > n$, то эта формула будет верна почти всегда, кроме случая $n+1 = k = 0$.

Теперь мы готовы разобраться с производной произведения:

Теорема 2.72 (Формула Лейбница)**.** *Если f и g имеют n-ю производную на некотором интервале, то выполняется*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Доказательство. Для $n = 1$ мы эту формулу $(fg)' = fg' + f'g$ уже установили. Теперь воспользуемся индукцией и покажем переход от n к $n+1$:

$$(fg)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

□

Для n-й производной частного общей формулы нет. Поэтому, например, мы можем выписать общую формулу

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

но не можем выписать общую формулу для n-й производной $\operatorname{tg} x$.

Следующий вопрос, который нас интересует — это приближение функции многочленом в некотором смысле. Заметим, что у многочлена $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ производные в нуле выражаются как

$$P^{(k)}(0) = k! a_k,$$

где $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$, $0! = 1$. Если теперь нам дана функция f, у которой есть n производных в точке x_0, то многочлен (считаем $f^{(0)} \equiv f$)

$$P_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

имеет в точке x_0 такие же значения производных до n-го порядка включительно, как и функция f. Обозначим *остаточный член формулы Тейлора*

$$r_{n,f,x_0}(x) = f(x) - P_{n,f,x_0}(x),$$

это будет функция, все производные которой до n-й включительно в точке x_0 равны нулю. Мы хотим показать, что этот остаточный член мал, или как-либо явно выражается.

Теорема 2.73 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)**.** *Если f имеет n производных в точке x_0, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Доказательство. Мы хотим показать, что $r_{n,f,x_0}(x) = o((x-x_0)^n)$. Обозначим для краткости $r(x) = r_{n,f,x_0}(x)$, мы знаем, что производные $r(x)$ до n-й включительно обращаются в нуль в x_0. Заметим, что из этого следует наличие производных до $(n-1)$-го порядка включительно в окрестности x_0. Применим правило Лопиталя (пока мы имеем дело с неопределённостями $0/0$)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)},$$

теперь вспомним, что $r^{(n-1)}(x_0) = 0$ и продолжим

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!} r^{(n)}(x_0) = 0,$$

так как предпоследнее равенство — это определение n-й производной в точке x_0. ☐

Задача 2.74. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 как минимум $n \geqslant 2$ раз, её производные порядков $k = 1, \dots, n-1$ равны нулю, а n-я производная не равна нулю. Докажите, что при чётном n функция имеет строгий экстремум в x_0, а при нечётном – не имеет.

[[Напишите $f(x) = f(x_0) + \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right)(x-x_0)^n$.]]

Теорема 2.75 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Если f имеет n производных в окрестности $U \ni x_0$, то при $x \in U$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

для некоторого ξ между x_0 и x.

Доказательство. Нам опять надо получить формулу для $r(x) = r_{n-1}(x)$ при условии, что производные $r(x)$ до $(n-1)$-й включительно обращаются в нуль в x_0 и производные до n-й включительно существуют в U. Применим теорему о среднем Коши

$$\frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{r(x)-r(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{r'(\xi_1)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}} = \frac{r'(\xi_1)-r'(x_0)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}} = \dots = \frac{r^{(n)}(\xi_n)}{n!}.$$

Положим $\xi = \xi_n$. Так как $r(x)$ отличается от $f(x)$ многочленом степени не более $n-1$, то их n-е производные совпадают, то есть

$$\frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \Rightarrow r(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

☐

Задача 2.76. Выпишите формулы Тейлора с разными остаточными членами при $x_0 = 0$ для функций
$$e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha, \ln(1+x), \operatorname{arctg} x.$$

Задача 2.77. Выпишите формулу Тейлора при $x_0 = 0$ для $\operatorname{tg} x$ до остаточного члена $o(x^6)$.

По аналогии с формулами Тейлора можно говорить об *асимптотических разложениях* функции f при $x \to x_0$ по степеням $(x - x_0)$, как о последовательностях коэффициентов $a_N, a_{N+1}, \ldots$, начиная с некоторого целого N, для которых при любом $n \geqslant N$ выполняется равенство
$$f(x) = a_N(x-x_0)^N + a_{N+1}(x-x_0)^{N+1} + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$
При $x \to \infty$ асимптотическое разложение по степеням начинается с некоторой x^N и идёт с убыванием, а не с возрастанием степеней. Свойства этого понятия устанавливаются в серии упражнений:

Задача 2.78. Докажите, что коэффициенты асимптотического разложения по степеням $(x - x_0)$ определены единственным образом.

Задача 2.79. Приведите пример функции, которая положительна при $x \neq 0$, но её асимптотическое разложение в нуле имеет все коэффициенты равными нулю.

[[Доопределите e^{-1/x^2} в нуле как 0 и считайте её производные в нуле по определению и правилу Лопиталя.]]

Задача 2.80. * Покажите, что для любого N и любого набора коэффициентов $a_N, a_{N+1}, \ldots$ найдётся бесконечно дифференцируемая f с заданными коэффициентами асимптотического разложения по степеням x в нуле.

[[При решении этой задачи может понадобиться аккуратная работа с функциональными рядами и бесконечно гладкими функциями, отличными от нуля в маленькой окрестности нуля.]]

3. Метрические пространства и их топология

3.1. **Определение и примеры.** В математике (и за её пределами) очень часто встречается концепция метрического пространства, как множества, в котором про любые два элемента можно количественно сказать, насколько далеко они находятся друг от друга. Более формально определение выглядит так ($\mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных действительных чисел):

Определение 3.1. *Метрическое пространство* состоит из множества M и функции расстояния $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$ со следующими свойствами
$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (невырожденность);
$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

В качестве очень простого примера можно рассмотреть множество действительных чисел с расстоянием $\rho(x, y) = |x-y|$. Менее тривиальный пример — *евклидово пространство* $\mathbb{R}^n$ с метрикой

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}.$$

Из свойств метрики сравнительно нетривиально установить неравенство треугольника, которое в таком определении сводится к

$$|v + w| \leqslant |v| + |w|.$$

Для начала надо ввести понятие скалярного произведения векторов

$$v \cdot w = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k$$

так что $|v| = \sqrt{v \cdot v}$ и установить следующее:

Теорема 3.2 (Неравенство Коши–Буняковского для векторов). *Для любых* $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$(v \cdot w)^2 \leqslant (v \cdot v) \cdot (w \cdot w) \Leftrightarrow |(v \cdot w)| \leqslant |v| \cdot |w|.$$

Доказательство. Если $|w| = 0$, то обе части неравенства равны нулю. Иначе рассмотрим квадратный трёхчлен

$$|v + tw|^2 = |v|^2 + 2t(v \cdot w) + t^2|w|^2 \geqslant 0$$

Из его неотрицательности следует, что его дискриминант не положителен. Это и означает первый вариант неравенства Коши–Буняковского. □

Теперь неравенство треугольника выводится так:

$$|v + w|^2 = |v|^2 + 2(v \cdot w) + |w|^2 \leqslant |v|^2 + 2|v| \cdot |w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2.$$

Отметим, что евклидово пространство является частным случаем декартова произведения метрических пространств. В общем случае для произведения $M \times M''$ можно аналогично евклидову случаю положить:

$$\rho_2\left((x', x''), (y', y'')\right) = \sqrt{\rho(x', y')^2 + \rho(x'', y'')^2}.$$

Неравенство треугольника в данном случае следует из того, что мы установили для евклидова пространства. Однако формула с квадратами и квадратным корнями несколько неудобна в работе, например, было бы гораздо проще положить

$$\rho_\infty\left((x', x''), (y', y'')\right) = \max\{\rho(x', y'), \rho(x'', y'')\}.$$

Свойства метрики в данном случае проверяются очень просто, невырожденность и симметричность очевидны, неравенство треугольника тоже не требует усилий. Такой вариант определения метрики в декартовом произведении отлично работает даже для произведения бесконечного числа евклидовых пространств, с заменой максимума на точную верхнюю грань. Конкретно в случае $\mathbb{R}^n$ мы получим расстояние

$$\rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

Задача 3.3. Пусть на множестве M есть *полурасстояние* $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$, имеющее все свойства метрики, кроме свойства невырожденности, заменённого на более слабое свойство $\rho(x, x) \equiv 0$. Докажите, что отношение, определённое как

$$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0,$$

является отношением эквивалентности, а на множестве $M/\sim$ функция ρ корректно задаёт невырожденную метрику.

[[Надо проверить транзитивность и равенство $\rho(x, y) = \rho(x', y)$ при $x \sim x'$.]]

3.2. **Пределы последовательностей, фундаментальные последовательности и полные метрические пространства.** На метрическое пространство переносится определение предела и фундаментальной последовательности:

Определение 3.4. Последовательность элементов (x_k) метрического пространства M *стремится к элементу* $x_0 \in M$, если $\rho(x_k, x_0) \to 0$ при $k \to \infty$.

Определение 3.5. Последовательность элементов (x_k) метрического пространства называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall k, m \geqslant N(\varepsilon), \rho(x_k, x_m) < \varepsilon.$$

Посмотрим, что это означает в случае $\mathbb{R}^n$. Используем очевидные неравенства для координат вектора $v = (v_1, \dots, v_n)$

$$\forall i, |v_i| \leqslant |v| \text{ и } |v| \leqslant |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|.$$

Первое определение легко декодировать так: для всякого номера координаты i, координаты $x_{k,i}$ стремятся к $x_{0,i}$ при $k \to \infty$. Второе определение декодируется так: для всякого номера координаты i, координаты $(x_{k,i})_k$ образуют фундаментальную последовательность. Сделаем определение:

Определение 3.6. Метрическое пространство *полное*, если всякая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

Из предыдущих наблюдений вытекает, что $\mathbb{R}^n$ — полное метрическое пространство. Действительно, если последовательность его точек (x_k) фундаментальна, то для всякого $i = 1, \dots, n$ последовательность координат $(x_{k,i})_k$ фундаментальна и сходится, то есть $x_{k,i} \to x_{0,i}$ при $k \to \infty$. Тогда вектор $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$ является пределом последовательности (x_k), так как

$$\rho(x_k, x_0) = |x_k - x_0| \leqslant |x_{k,1} - x_{0,1}| + \dots + |x_{k,n} - x_{0,n} \to 0.$$

Конечно, нетрудно придумать неполные метрические пространства, особенно в этом помогает понятие *индуцированной метрики*: для всякого подмножества $X \subseteq M$ метрического пространства M ограничение $\rho|_{X\times X}$ даёт метрику на X. В таком смысле индуцированная с $\mathbb{R}$ метрика на $\mathbb{Q}$ не полна. Аналогично метрика на $\mathbb{Q}^n$, индуцированная с $\mathbb{R}^n$, тоже не полна.

Аналогично процедуре пополнения $\mathbb{Q}$ можно сделать процедуру *пополнения* с произвольным метрическим пространством M. Сначала рассматривается множество $c(M)$

фундаментальных последовательностей точек M, определяется полурасстояние между последовательностями
$$\overline{\rho}((p_k),(q_k)) = \lim_{k\to\infty} \rho(p_k, q_k),$$
предел существует, так как по неравенству треугольника
$$|\rho(p_k, q_k) - \rho(p_m, q_m)| \leqslant \rho(p_k, p_m) + \rho(q_k, q_m).$$
Неравенство треугольника для полурасстояния является пределом неравенств треугольника в исходном пространстве. После этого вводится отношение эквивалентности
$$(p_k) \sim (q_k) \Leftrightarrow \overline{\rho}((p_k),(q_k)) = 0$$
и берётся фактормножество по нему, которое и будет пополнением $\overline{M}$, а $\overline{\rho}$ даст на нём уже невырожденную метрику по построению. Пространство M вложено в $\overline{M}$ с помощью отображения, которое сопоставляет точке $p \in M$ постоянную последовательность $p_k \equiv p$.

Лемма 3.7. *Пополнение метрического пространства является полным метрическим пространством.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность (x_k) в пополнении $\overline{M}$. Представим каждое x_k как класс эквивалентности некоторой фундаментальной последовательности $(x_{k,n})_n$ точек из M. Из определения фундаментальности $(x_{k,n})_n$ найдётся $N_k \in \mathbb{N}$, такой что для любых $n, m \geqslant N_k$ выполняется
$$\rho(x_{k,n}, x_{k,m}) \leqslant \frac{1}{k}.$$
Пусть $y_k = x_{k,N_k} \in M$. Рассматривая y_k как элемент $\overline{M}$, мы видим, что
$$\rho(x_k, y_k) \leqslant \frac{1}{k}.$$
Из определения фундаментальности (x_k) и неравенства
$$\rho(y_k, y_m) \leqslant \rho(x_k, x_m) + \frac{1}{k} + \frac{1}{m}$$
следует, что последовательность (y_k) фундаментальна в M. Следовательно, она по определению представляет некоторый элемент $y \in \overline{M}$, и как последовательность элементов $\overline{M}$ сходится к нему (подробности были даны в доказательстве леммы 1.34). Из неравенства
$$\rho(x_k, y) \leqslant \rho(y_k, y) + \frac{1}{k}$$
следует, что x_k тоже сходится к y. □

3.3. **Шары, ограниченность, радиус и диаметр.** Во всяком метрическом пространстве можно определить понятие метрического шара
$$B_x(r) = \{y : y \in M, \rho(x, y) \leqslant r\}.$$
Это замкнутый шар, а открытый шар мы определим как
$$D_x(r) = \{y : y \in M, \rho(x, y) < r\}.$$
В пространстве $\mathbb{R}^2$ это будут круги, в $\mathbb{R}^3$ — привычные нам шары. В других метрических пространствах шары могут выглядеть менее привычно. В следующем разделе будут даны определения, оправдывающие использование терминов «открытый» и «замкнутый» в этих определениях.

Сделаем также важное определение, обобщающее понятие ограниченности числового множества:

Определение 3.8. Множество $X \subseteq M$ в метрическом пространстве M называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре, $X \subseteq B_x(r)$.

Заметим, что если $X \subseteq B_x(r)$ и $y \in M$ — какая-то точка, то неравенство треугольника даёт включение $X \subseteq B_y(r+\rho(x,y))$. Таким образом ограниченность шаром с одним центром влечёт ограниченность возможно большим шаром с другим центром. В частности, в $\mathbb{R}^n$ ограниченность часто понимают как ограниченность множества $\{|x| : x \in X\}$.

Задача 3.9 (Обобщение леммы Кантора о вложенных отрезках). Докажите, что последовательность вложенных замкнутых шаров $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ полного метрического пространства со стремящимися к нулю радиусами имеет единственную общую точку.

[[Докажите, что последовательность центров шаров будет фундаментальной.]]

Задача 3.10 (Обобщение леммы Кантора о вложенных отрезках). Докажите, что последовательность вложенных замкнутых шаров $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ евклидова пространства имеет общую точку, даже если радиусы шаров не стремятся к нулю.

[[Докажите, что последовательность центров шаров будет фундаментальной.]]

Задача 3.11. * Приведите пример полного метрического пространства, в котором утверждение предыдущей задачи неверно.

[[Введите метрику на $\mathbb{N}$ так, чтобы всегда выполнялось $\rho(n,m) > 1$ для $n \neq m$, докажите, что это гарантирует полноту такого метрического пространства. При подходящем введении метрики, радиусов и центров шаров можно добиться того, чтобы шары в последовательности выглядели как $B_k = \{n : n \geqslant k\}$.]]

Для описания того, какое множество в метрическом пространстве маленькое, а какое большое, сделаем определение:

Определение 3.12. Для множества $X \subseteq M$ определим *диаметр* как

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x,y\in X} \rho(x,y).$$

Из неравенства треугольника следует, что диаметр шара не более двух его радиусов. В евклидовом пространстве диаметр шара в точности равен двум его радиусам.

Задача 3.13. Докажите, что подмножество метрического пространства ограничено тогда и только тогда, когда оно имеет конечный диаметр.

Задача 3.14. Докажите, что если два множества X и Y в метрическом пространстве M пересекаются, то

$$\operatorname{diam} X \cup Y \leqslant \operatorname{diam} X + \operatorname{diam} Y.$$

Приведите пример, когда неравенство нарушается для непересекающихся множеств.

3.4. **Топология в метрическом пространстве.** Определим ε-окрестность точки x в метрическом пространстве M как $D_x(\varepsilon)$ и будем обозначать тем же обозначением $U_\varepsilon(x)$, которое мы использовали на прямой.

Определение 3.15. Подмножество $U \subseteq M$ называется *открытым*, если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ε-окрестность этой точки.

Точно так же, как в случае $\mathbb{R}$, доказываются основные свойства: пустое множество и всё пространство M открыты, пересечение конечного числа открытых множеств открыто, объединения любого семейства открытых множеств открыто.

Определение 3.16. Подмножество $F \subseteq M$ называется *замкнутым*, если его дополнение $M \setminus F$ открыто.

Естественно получается, что пустое множество и всё пространство M замкнуты, объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто, пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

Проверим, что «открытый шар» $D_x(r)$ открыт. Действительно, если $y \in D_x(r)$, то $r > \rho(x, y)$ и по неравенству треугольника

$$D_y(r - \rho(x, y)) \subseteq D_x(r),$$

что доказывает открытость. Проверим, что «замкнутый шар» $B_x(r)$ замкнут. Действительно, если $y \notin B_x(r)$, то шар $B_y(\rho(x, y) - r)$ не пересекает $B_x(r)$ по неравенству треугольника.

Задача 3.17. Проверьте, что стандартная метрика евклидова пространства и метрика $\|x - y\|_\infty$ (максимум модуля разности координат) определяют одну и ту же топологию в $\mathbb{R}^n$.

[[Поместите куб в больший шар, а шар в больший куб.]]

Далее для всякого подмножества $X \subseteq M$ точки M разбиваются на внутренние точки X, граничные точки X, и внешние точки X. Определяется внутренность $\operatorname{int} X$, граница ∂X и замыкание $\operatorname{cl} X$, как делалось в случае $\mathbb{R}$. Так же проверяется, что внутренность является открытым множеством, а граница и замыкание — замкнутыми.

Для всякого множества X определяются множества, открытые относительно X, как пересечения $X \cap U$ с открытыми подмножествами $U \subseteq M$. Это определяет *индуцированную топологию* на X.

Задача 3.18. Проверьте, что индуцированная топология соответствует индуцированной метрике.

Введём определение, которое годится для любого топологического пространства (то есть использует только понятие открытости множества):

Определение 3.19. Множество X называется *связным*, если его нельзя разбить на два непустых открытых относительно X множества.

Теорема 3.20. *Связные множества на прямой $\mathbb{R}$ — это промежутки.*

Доказательство. Докажем, что если множество$X \subseteq \mathbb{R}$ не является промежутком, то оно несвязно. Если в X лежат точки a и b, но не лежит некоторая точка $c \in (a, b)$, то множества $X \cap (-\infty, c)$ и $X \cap (c, +\infty)$ дают разбиение X на два непустых и открытых относительно X множества. Это показывает несвязность X.

В обратную сторону, если $X \subseteq \mathbb{R}$ несвязно, то оно по определению оно разбито на две непустые открытые относительно X части Y и Z. Выберем $a \in Y$, $b \in Z$, без ограничения общности пусть $a < b$. Мы должны доказать, что X не является промежутком. Предположим противное — что X является промежутком и содержит весь отрезок $[a, b]$, тогда $Y' = Y \cap [a, b]$ и $Z' = Z \cap [a, b]$ открыты относительно отрезка $[a, b]$ и дают разбиение отрезка на две непустые части.

Далее работаем в отрезке $[a, b]$ и слово «окрестность» будет означать «окрестность точки в пересечении с отрезком $[a, b]$». Некоторая окрестность a лежит в Y' и не пересекается с Z', следовательно $c = \inf Z' > a$. Так как некоторая окрестность b содержится в Z', то $c < b$. Точка c не может лежать в Z', так как из открытости Z' тогда в Z' нашлось бы меньшее c число. Но она не может лежать в Y', так как тогда некоторая окрестность c полностью лежала бы в Y' и не пересекалась бы с Z', то есть c не могло бы быть точной нижней гранью Z'. Полученное противоречие доказывает утверждение. □

3.5. **Компактность в метрическом пространстве.** Напомним определение компактности:

Определение 3.21. Множество $X \subseteq M$ называется *компактным*, если из любого покрытия открытыми множествами

$$X \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$$

можно выбрать конечное подсемейство $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$, которое всё ещё покрывает X.

Лемма 3.22. *Если X компактно, а $Y \subset X$ — замкнуто, то Y тоже компактно.*

Доказательство. Так как Y замкнуто, то его дополнение V открыто. Ко всякому покрытию $Y \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$ добавим открытое множество V. Если из нового семейства можно выбрать конечное покрытие для X, то это конечное подсемейство без V будет покрывать Y. □

Обратите внимание, что для общего метрического пространства ограниченность и замкнутость не означает компактность. Одна из причин может заключаться в том, что метрическое пространство не полное. Например интервал $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ с индуцированной метрикой является ограниченным и замкнутым (в индуцированной топологии), но его покрытие интервалами

$$U_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$$

нельзя уменьшить до конечного подпокрытия. Но даже для полных метрических пространств ограниченность и замкнутость может не давать компактность, более детальное обсуждение этого мы откладываем до работы с бесконечномерными банаховыми пространствами. Приведённая выше лемма показывает, что компактность ограниченных множеств следует из компактности всех замкнутых шаров. Пока же докажем критерий компактности для евклидовых пространств, в них ситуация не отличается от ситуации на числовой прямой.

Теорема 3.23 (Критерий компактности в евклидовых пространствах)**.** *Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Докажем сначала лёгкую часть — компактное множество ограничено и замкнуто, это верно в любом метрическом пространстве. Семейство шаров $D_0(n)$ покрывает всё $\mathbb{R}^n$ и множество X тоже. Если из него можно оставить конечную подсистему (то есть на самом деле один шар), то X окажется ограниченным. Пусть теперь $x \notin X$, тогда семейство открытых множеств

$$U_n = \mathbb{R}^n \setminus B_x(1/n)$$

покроет всё X. Если его конечное подсемейство покроет X, то на самом деле будет выполняться

$$X \subset \mathbb{R}^n \setminus B_x(1/n)$$

для некоторого натурального n. Это будет значить, что X не пересекается с $D_x(1/n)$, то есть x на самом деле внешняя точка X. Следовательно, дополнение к X открыто, а само X — замкнуто.

В обратную сторону, фиксируем систему открытых множеств $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ и будем менять множество X. Так как оно ограничено, оно содержится в некотором кубе $Q_1 = [-m, m]^n$. Разобьём его на 2^n равных куба, разрезав его по середине вдоль каждой координаты. Выберем тот из них в качестве Q_2, для которого $X \cap Q_2$ нельзя покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$. Так сделать можно, ибо если покрыть конечным подсемейством можно пересечение X с каждым из меньших кубов, то покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$ можно и пересечение X с исходным кубом.

Повторяя эту конструкцию, мы получаем семейство стягивающихся кубов (Q_k), в том смысле, что семейство упорядочено по включению и диаметры Q_k стремятся к нулю. Взяв в каждом $Q_k \cap X$ точку x_k мы заметим, что стремление к нулю диаметров вложенных кубов означает фундаментальность последовательности (x_k). Значит $x_k \to x$ при $k \to \infty$. Замкнутость X означает, что $x \in X$. Значит $x \in U$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$. Из того, что $\operatorname{diam} Q_k \to 0$ следует, что $Q_k \subseteq U$ для достаточно больших k, то есть пересечение $X \cap Q_k$ можно покрыть одним элементом семейства $\mathcal{U}$. Противоречие. □

Установим также свойство *секвенциальной компактности* метрических компактов, здесь определение *частичного предела* последовательности $(x_n) \subseteq M$ такое же как для чисел: частичный предел последовательности (x_n) — это точка, в любой окрестности которой находится бесконечно много членов последовательности (x_n).

Теорема 3.24. *Если подмножество X метрического пространства компактно, то любая последовательность (x_k) элементов X имеет частичный предел в X.*

Доказательство. Предположим, что частичных пределов некоторой последовательности (x_k) нет. Тогда для всякой точки $x \in X$ есть окрестность $U(x)$, в которой последовательность бывает только конечное число раз. Эти окрестности покрывают X и выбрав конечное подпокрытие мы получаем, что в последовательности в целом было конечное число элементов, противоречие. □

Задача 3.25. * Докажите, что из секвенциальной компактности метрического пространства X следует его компактность.

[[Это можно вывести из свойства вполне ограниченности, см. теорему 7.126, но можно придумать и какое-нибудь другое рассуждение.]]

Заметим, что декартово произведение секвенциально компактных метрических пространств X и Y, $X \times Y$, является очевидно секвенциально компактным, так как каждую «координату» в последовательности пар $((x_k, y_k))_k$ можно заставить сходиться переходом к подпоследовательности. Из предыдущей задачи последует, что $X \times Y$ будет и просто компактным. Компактность произведения компактов (в топологическом смысле) в максимальной общности устанавливает теорема Тихонова (теорема 7.142), которую мы в полной мере будем использовать позже.

Задача 3.26 (Лемма Лебега). Докажите, что если компактное метрическое пространство X покрыто открытыми множествами $\{U_\alpha\}$, то найдётся $\delta > 0$, такое, что всякое подмножество $Y \subseteq X$ диаметра не более δ содержится в каком-то одном из множеств U_α полностью.

[[Предположите противное, взяв $\delta = 1/k$ и соответствующее Y_k с $\operatorname{diam} Y_k \leqslant 1/k$. Выберите $y_k \in Y_k$ и рассмотрите предельную точку последовательности (y_k) в X.]]

3.6. **Непрерывные отображения метрических пространств.** Для отображения между метрическими пространствами $f : M \to N$ можно ввести несколько эквивалентных определений непрерывности:

Определение 3.27 (Непрерывность по Коши в точке)**.** Для любой $U_\varepsilon(f(x_0))$ найдётся $U_\delta(x_0)$, такая что $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$.

Определение 3.28 (Непрерывность по Гейне в точке)**.** Если $x_k \to x_0$ в M, то $f(x_k) \to f(x_0)$ в N.

Определение 3.29 (Топологическое определение непрерывности)**.** Для всякого открытого $U \subseteq N$ прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в M.

Лемма 3.30. *Определения непрерывности в точки по Коши и Гейне эквивалентны. Выполнение непрерывности по Коши или Гейне во всех точках M эквивалентно топологическому определению непрерывности.*

Доказательство. (Коши)⇒(Гейне): Пусть $x_k \to x_0$. Возьмём $U_\varepsilon(f(x_0))$ и соответствующую $U_\delta(x_0)$. При достаточно большом k окажется $x_k \in U_\delta(x_0)$. Тогда $f(x_k) \in U_\varepsilon(f(x_0))$, то есть $\rho(f(x_k), f(x_0)) < \varepsilon$. Значит $f(x_k) \to f(x_0)$ по определению.

(Гейне)⇒(Коши): Предположим противное в определении Коши: для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ (пусть $\delta = 1/k$) мы найдём точку $x_k \in U_{1/k}(x_0)$, такую что $\rho(f(x_k), f(x_0)) \geqslant \varepsilon$. Тогда выйдет, что $x_k \to x_0$ и $f(x_k) \not\to f(x_0)$.

(топологическое определение)⇒(Коши во всех точках): Окрестность $U_\varepsilon(f(x_0))$ открыта и $V = f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ является открытым множеством, содержащим x_0. Тогда по определению открытости найдётся $U_\delta(x_0) \subseteq V$ и тогда $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$.

(Коши во всех точках)⇒(топологическое определение): Пусть U открыто и мы рассматриваем $V = f^{-1}(U)$. Если $x_0 \in V$, то $f(x_0) \in U$ и по определению открытости U найдётся $U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq U$. Рассмотрим соответствующую $U_\delta(x_0)$ из определения Коши.

$$f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq U,$$

следовательно $U_\delta(x_0) \subseteq V$ по определению прообраза. Это означает, что точка x_0 лежит в V вместе со своей окрестностью, то есть V открыто. ☐

При рассмотрении непрерывного отображения $f : X \to N$, определённого на подмножестве $X \subseteq M$, мы всегда будем иметь в виду X как метрическое пространство с индуцированной метрикой и топологией. В частности, в топологическом определении прообразы открытых множество $f^{-1}(U)$ должны быть открыты относительно X. Нетрудно понять, что ограничение непрерывного отображения $f : M \to N$ на подмножество $X \subseteq M$ всегда даёт непрерывное отображение $f|_X : X \to N$.

Теорема 3.31. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f : M \to N$ и $g : N \to L$ непрерывны. Для $h = g \circ f$ и открытого $U \subseteq L$ очевидно, что $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ является открытым. ☐

Можно определить и операцию *декартова произведения отображений*: если $f : M \to N$ и $g : M' \to N'$, то $f \times g : M \times M' \to N \times N'$ действует по формуле

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Определение непрерывности по Гейне легко показывает, что декартово произведение непрерывных отображений (метрических пространств) непрерывно. Для работы с топологическими пространствами и топологическим определением непрерывности важно понимать, что топология в декартовом произведении $M \times M'$ состоит из всевозможных объединений множеств вида $U \times U'$, где $U \subseteq M$ и $U' \subseteq M'$ — открыты. Тогда утверждение про декартово произведение непрерывных отображений будет верным и для непрерывных отображений топологических пространств.

Можно проверить, что операции сложения векторов, умножения вектора на число, деления числа на число непрерывны как отображения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ (проще всего это проверить по Гейне). Если учесть непрерывность простых, но полезных операций диагонали (повторения)

$$\Delta_M : M \to M \times M, \quad \Delta_M(x) = (x, x),$$

добавления к вектору постоянных координат, перестановки координат, забывания координат вектора, то мы можем сказать, что все операции, которые мы можем построить явно с использованием указанных действий над векторами, арифметических операций над числами и элементарных функций, будут непрерывными на своей естественной области определения.

Аналогично определению непрерывности можно ввести определение предела отображения в точке
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$
по Коши или по Гейне, которое по сути будет означать возможность доопределить или переопределить $f(x_0) = A \in N$ и получить отображение, непрерывное в точке x_0. В частном случае отображения $f : M \to \mathbb{R}^n$ мы будем писать
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$
если $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Так как при непрерывном отображении прообраз открытого множества открыт, то и прообраз замкнутого множества замкнут. Связь компактности с непрерывностью даёт следующая теорема:

Теорема 3.32. *Образ компактного множества при непрерывном отображении является компактным.*

Доказательство. Это утверждение верно вообще для любых топологических пространств, необязательно метрических. Пусть $f : X \to N$ непрерывно и X компактно. Заметим, что компактность X как подмножества большего пространства M эквивалентна его компактности в индуцированной с M топологии, поэтому мы работаем только с X как со всем пространством.

Допустим мы покрыли $f(X)$ открытыми множествами $\{U_\alpha\}$. Положим $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$, эти множества открыты по топологическому определению непрерывности и покрывают X. Значит из них можно выбрать конечное подсемейство, покрывающее X. Соответствующее подсемейство $\{U_\alpha\}$ покроет $f(X)$. $\square$

В качестве упражнения читатель может доказать аналогичное утверждение для секвенциальной компактности, используя определение непрерывности по Гейне.

Аналогичное утверждение верно для непрерывных отображений и связности:

Теорема 3.33. *Образ связного множества при непрерывном отображении является связным.*

Доказательство. Аналогично предыдущему, это утверждение верно для любых топологических пространств. Пусть $f : X \to N$ непрерывно и X связно. Заметим, что связность X как подмножества большего пространства M эквивалентна его связности в индуцированной с M топологии, поэтому мы работаем только с X как со всем пространством.

Предположим противное: мы разбили $f(X)$ на два непустых множества, открытых относительно $f(X)$, пусть эти множества $U \cap f(X)$ и $V \cap f(X)$ для открытых $U, V \subseteq N$. Тогда $U' = f^{-1}(U)$ и $V' = f^{-1}(V)$ не пересекаются, непустые, открытые относительно X и покрывают всё X. Получаем противоречие со связностью X. $\square$

Определение 3.34. Отображение $f : M \to N$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, биективно и обратное к нему непрерывно.

Теорема 3.35. *Если метрическое пространство M компактно, то любое непрерывное и биективное отображение $f : M \to N$ будет гомеоморфизмом.*

Доказательство. Нам нужно доказать непрерывность обратного отображения и мы воспользуемся секвенциальной компактностью. Пусть $y_k \to y_0$ в пространстве N. Обозначим $x_k = f^{-1}(y_k)$ и $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Нам надо доказать непрерывность по Гейне, то есть доказать, что $x_k \to x_0$. Предположим противное, тогда для некоторой окрестности $U(x_0)$ последовательность (x_k) имеет бесконечно много элементов в $M \setminus U(x_0)$. Из секвенциальной компактности x_k имеет частичный предел в $M \setminus U(x_0)$, пусть это x'. Перейдя к подпоследовательности, мы можем считать, что $x_k \to x'$, но тогда из непрерывности f будет $y_k = f(x_k) \to f(x') \neq y_0$. Но последовательность y_k выбрана стремящейся к y_0, противоречие. ☐

Заметим, что для некомпактных пространств утверждение может и не быть верным. Рассмотрим к примеру отображение полуинтервала $[0, 2\pi)$ в окружность по очевидной формуле $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Оно очевидно непрерывно и обратимо, но обратное не является непрерывным.

Задача 3.36. Докажите, что отображение $f : X \to \mathbb{R}^m$ для некоторого $X \subseteq \mathbb{R}^n$ переводит всякую фундаментальную последовательность в фундаментальную тогда и только тогда, когда оно продолжается до непрерывного $\overline{f} : \operatorname{cl} X \to \mathbb{R}^m$.

Задача 3.37. Докажите, что для всякого метрического пространства M его функция расстояния $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$ непрерывна.

[[Используйте неравенство треугольника.]]

3.7. **Расстояние между множествами и нормальность.**

Определение 3.38. Расстояние от точки x до множества Y в метрическом пространстве M — это

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf\{\rho(x, y) : y \in Y\}.$$

Часто может возникнуть вопрос, когда нижняя грань в определении достигается. Для этого есть простые достаточные условия, первое работает в произвольном метрическом пространстве, а второе — только в $\mathbb{R}^n$, или в аналогичном пространстве с компактными шарами.

Теорема 3.39. *Если Y компактно, то $\operatorname{dist}(x, Y)$ достигается.*

Доказательство. В силу неравенства треугольника имеем

$$|\rho(x, y') - \rho(x, y'')| \leqslant \rho(y', y''),$$

следовательно $\rho(x, y)$ при фиксированном x является непрерывной функцией от y. Следовательно, при компактном Y минимум $\inf_{y \in Y} \rho(x, y)$ достигается. ☐

Теорема 3.40. *Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнуто, то $\operatorname{dist}(x, Y)$ достигается.*

Доказательство. Пусть $d = \operatorname{dist}(x, Y)$. Множество $B_x(d+1) \cap Y$ является замкнутым подмножеством компактного $B_x(d+1)$, а значит оно само компактно. Кроме того, оно непусто, иначе бы выполнялось $\operatorname{dist}(x, Y) \geqslant d + 1$. Значит $\operatorname{dist}(x, B_x(d+1) \cap Y)$ достигается, но на самом деле это будет $\operatorname{dist}(x, Y)$, так как точки Y на расстоянии более $d + 1$ от x в определении $\operatorname{dist}(x, Y)$ «не участвуют». ☐

Теорема 3.41. *Для произвольного подмножества Y метрического пространства M функция от $x \in M$, заданная формулой $\operatorname{dist}(x, Y)$, непрерывна.*

Доказательство. По неравенству треугольника запишем
$$\rho(x', y) \leqslant \rho(x'', y) + \rho(x', x'').$$
Переходя к точной нижней грани по $y \in Y$, получаем
$$\operatorname{dist}(x', Y) \leqslant \operatorname{dist}(x'', Y) + \rho(x', x'').$$
Учитывая возможность переставить x' и x'', получаем
$$|\operatorname{dist}(x', Y) - \operatorname{dist}(x'', Y)| \leqslant \rho(x', x''),$$
что доказывает непрерывную зависимость от x. □

Определение 3.42. Расстояние между множествами X и Y в метрическом пространстве M — это
$$\operatorname{dist}(X, Y) = \inf\{\rho(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Теорема 3.43. *Если X и Y — компактные подмножества метрического пространства M, то $\operatorname{dist}(X, Y)$ достигается.*

Доказательство. Функция $\operatorname{dist}(x, Y)$ достигает минимума на X в точке x_0 как непрерывная функция на компакте. Далее, $\rho(x_0, y)$ тоже достигает минимума при $y_0 \in Y$ по тем же причинам. Следовательно
$$\operatorname{dist}(X, Y) = \inf_{x \in X} \operatorname{dist}(x, Y) = \operatorname{dist}(x_0, Y) = \rho(x_0, y_0).$$
□

В евклидовом пространстве и в любом пространстве с компактными шарами верно более сильное свойство:

Теорема 3.44. *Если $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно и $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнуто, то $\operatorname{dist}(X, Y)$ достигается.*

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме, функция $\operatorname{dist}(x, Y)$ достигает минимума на X в точке x_0 как непрерывная функция на компакте, а $\rho(x_0, y)$ достигает минимума при $y_0 \in Y$ из замкнутости $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. □

Следствие 3.45. *Если $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнуто и $X \cap Y = \emptyset$, то $\operatorname{dist}(X, Y) > 0$.*

Определение 3.46. Определим ε-окрестность множества X в метрическом пространстве M, при $\varepsilon > 0$, как
$$U_\varepsilon(X) = \{y \in M : \operatorname{dist}(y, X) < \varepsilon\}.$$

Задача 3.47. Докажите, что ε-окрестность любого множества открыта.

Задача 3.48. Докажите, что если компактное множество $K \subseteq \mathbb{R}^n$ содержится в открытом множестве U, то оно содержится в U вместе с некоторой своей ε-окрестностью.

[[Рассмотрите расстояние от K до $\mathbb{R}^n \setminus U$.]]

Следствие 3.45 означает, что у непересекающихся компактного X и замкнутого Y существуют непересекающиеся ε-окрестности, достаточно взять ε меньше половины расстояния между ними. Если убрать требование компактности, то получится такое утверждение:

Теорема 3.49 (Нормальность метрических пространств)**.** *Если замкнутые подмножества X, Y в метрическом пространстве M не пересекаются, то найдутся непересекающиеся открытые $U \supseteq X$ и $V \supseteq Y$.*

Доказательство. Для всякой точки $x \in X$ найдём окрестность $D_x(\varepsilon_x)$, которая не пересекается с Y, это можно сделать по замкнутости Y. Для всякой $y \in Y$ аналогично найдём $D_y(\varepsilon_y)$, которая не пересекается с X. Положим теперь

$$U = \bigcup_{x\in X} D_x(\varepsilon_x/2), \quad V = \bigcup_{y\in Y} D_y(\varepsilon_y/2).$$

Эти множества очевидно открыты и содержат X и Y соответственно. Они не могут пересечься, так как если бы какие-то два открытых шара $D_x(\varepsilon_x/2)$ и $D_y(\varepsilon_y/2)$ пересеклись, то при $\varepsilon_x \geqslant \varepsilon_y$ (без ограничения общности) выполнялось бы $D_x(\varepsilon_x) \ni y$, что противоречит определению $D_x(\varepsilon_x)$. В случае $\varepsilon_x \leqslant \varepsilon_y$ аналогично получилось бы противоречие в виде $x \in D_y(\varepsilon_y)$. □

3.8. **Кривые и линейная связность.**

Определение 3.50. *Кривой* в метрическом пространстве M называется непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to M$. Точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ называются *начало и конец кривой*.

Обычно кривая рассматривается с точностью до допустимой замены параметра, то есть взяв гомеоморфизм $\sigma : [c, d] \to [a, b]$ и взяв композицию $\gamma \circ \sigma : [c, d] \to M$, мы получаем эквивалентную кривую и вообще считаем кривой класс эквивалентности отображений γ с точностью до умножения справа на гомеоморфизм отрезка на отрезок. Если класс эквивалентности определить иначе, разрешив только возрастающие гомеоморфизмы отрезка на отрезок, то получится понятие *ориентированная кривая*.

Определение 3.51. Если конец кривой γ_1 совпадает с началом кривой γ_2 и множества параметров кривых подобраны так, чтобы $\gamma_1 : [a, b] \to M, \gamma_2 : [b, c] \to M$, то кривая

$$\gamma : [a, c] \to M, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c]. \end{cases}$$

называется *конкатенацией кривых* γ_1 и γ_2. Будем писать $\gamma = \gamma_1 \diamond \gamma_2$.

Кривая в $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, параметризованная как $\gamma(t) = (1 - t)p + tq$, называется *отрезком*, соединяющим p и q. Конкатенация конечного числа отрезков называется *ломаной*.

Задача 3.52 (Кривая Пеано). * Придумайте кривую $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, образ которой равен квадрату $[0, 1]^2$.

[[Нарисуйте в квадрате диагональ. Потом разбейте квадрат на 9 маленьких квадратов и замените диагональ на ломаную, составленную непрерывным образом из девяти диагоналей маленьких квадратов. Потом к каждому из 9 отрезков ломаной примените ту же операцию, получив ломаную из 81 отрезка, потом получите ломаную из 729 отрезков и продолжайте делать так же. Пусть на n-м этапе этой процедуры ломаная параметризована с постоянной скоростью как $\gamma_n : [0, 1] \to [0, 1]^2$. Докажите, что предел $\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t)$ существует, непрерывно зависит от t и оказывается во всех точках квадрата.]]

Задача 3.53. Докажите, что ломаная не может заполнить весь квадрат.

[[Можно доказывать по разному. Один из вариантов: заметить, что на плоскости верна теорема Бэра 7.95 об объединении счётного числа замкнутых несчётных множеств.]]

Задача 3.54. * Докажите, что функции $x(t)$ и $y(t)$, получающиеся по приведённому выше рецепту построения кривой Пеано, будут непрерывными, но ни в одной точке не дифференцируемыми.

[[Опишите $x(t)$ как предел последовательности $(x_n(t))$, обратите внимание, что функции x_n кусочно-линейные, $|\frac{dx_n}{dt}| = 3^{n-1}$ там, где производная существует, и что для всякого $t_0 \in [0,1]$ при любом n найдутся $t' \leqslant t \leqslant t''$, такие что

$$t'' - t' \leqslant 3^{1-n}, \quad x_n(t') = x(t'), \quad x_n(t'') = x(t''), \quad \left|\frac{x(t'') - x(t')}{t'' - t'}\right| = 3^{n-1}.$$

Докажите, что это противоречит дифференцируемости $x(t)$ в t_0.]]

Понятие связности имеет достаточно сложное для практической проверки определение, поэтому иногда удобно использовать понятие линейной связности.

Определение 3.55. Множество X в метрическом пространстве M *линейно связно*, если для любых двух точек $x, y \in X$ найдётся кривая $\gamma : [a,b] \to X$, такая что $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.

Теорема 3.56. *Линейно связное множество связно.*

Доказательство. Предположим противное, множество X разбилось на непустые относительно открытые U и V. Возьмём точки $u \in U$ и $v \in V$, по линейной связности найдём кривую $\gamma : [a,b] \to X$, такую что $f(a) = u, f(b) = v$. Множества $U' = \gamma^{-1}(U)$ и $V' = \gamma^{-1}(V)$ тогда дают разбиение $[a,b]$ на непустые (относительно) открытые множества, что противоречит связности отрезка из леммы 3.20. $\square$

Теорема 3.57. *Связное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ линейно связно.*

Доказательство. Пусть наше множество U. Выберем в нём точку p и рассмотрим множество U', образованное точками U, до которых можно дойти по кривым в U из p. Докажем, что оно открыто. Действительно, если $q \in U'$, то у него есть окрестность $U_\delta(q) \subseteq U$. Мы можем дойти из q в любую точку $U_\delta(q)$ по отрезку. Делая конкатенацию кривой из p в q и этого отрезка, мы получаем кривую из p до любой точки $U_\delta(q)$. Следовательно, $U_\delta(q) \subseteq U'$ и вообще U' открыто.

Рассмотрим теперь множество $U'' = U \setminus U'$. Всякая точка $q \in U''$ имеет окрестность $U_\delta(q) \subseteq U$. Если бы какая-то точка $U_\delta(q)$ была концом кривой с началом в p, то можно было бы взять конкатенацию этой кривой с отрезком до q и получить, что $q \in U', q \notin U''$. Но это не так, значит $U_\delta(q)$ не пересекается с U' и полностью содержится в U''.

Итак, U разбилось на два открытых множества. Одно из них, U', содержит p и поэтому не пусто. Из определения связности, другому, U'', придётся быть пустым. Следовательно, $U' = U$ и до любой точки U можно дойти по кривой из p. $\square$

Если множество не открыто, то связность может не означать линейной связности. Рассмотрим на плоскости множество X, являющееся графиком $y = \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$. Оно само линейно связно. Возьмём его замыкание $Y = \operatorname{cl} X$, нетрудно догадаться, что Y отличается от X добавлением отрезка $S = \{x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$. Тогда Y не является линейно связным, так как всякая кривая, соединяющая часть X с отрезком S должна следовать графику функции и иметь разрыв при $x \to +0$, а у нас кривые разрешены только непрерывные. С другой стороны, Y остаётся связным, так как если точка $(0,0)$ лежит в одном из открытых множество разбиения $Y = (U \cap Y) \sqcup (V \cap Y)$, то весь отрезок S лежит в нём же из связности отрезка, то есть без ограничения общности $S \subset U$. График X при $x \to +0$ должен попасть в U, а значит из линейной связности X оказывается $X \subset U$. Тогда $V \cap Y$ оказывается пустым.

Аналогично связности, линейная связность сохраняется при непрерывных отображениях:

Теорема 3.58. *Образ линейно связного множества при непрерывном отображении является линейно связным.*

Доказательство. Пусть $f : X \to f(X)$ — непрерывное отображение и X линейно связно. Для всяких $p', q' \in f(X)$ найдём их прообразы $p, q \in X$. Их соединяет кривая γ в X. Тогда $f \circ \gamma$ соединяет p' и q'. □

Ещё более сильным условием, чем линейная связность, является выпуклость:

Определение 3.59. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (или в любом векторном пространстве) называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in X$ отрезок

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty : t \in [0, 1]\}$$

полностью лежит в X.

Задача 3.60. Докажите, что пересечение выпуклых множеств выпукло. Приведите пример, когда пересечение линейно связных множеств может не быть линейно связным.

Задача 3.61. Докажите, что объединение пересекающихся линейно связных множеств линейно связно. Приведите пример, когда объединение пересекающихся выпуклых множеств не является выпуклым.

Задача 3.62 (Теорема Хелли на плоскости). * Докажите, что если в конечном наборе выпуклых множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$ любые три множества имеют непустое пересечение, то все множества набора имеют непустое пересечение.

[[Используйте индукцию по количеству множеств, ключевой случай — когда в наборе четыре множества.]]

Задача 3.63. * Покажите, что для бесконечных наборов выпуклых множеств теорема Хелли уже неверна.

[[Контрпример можно построить уже на прямой.]]

3.9. **Равномерная непрерывность.**

Определение 3.64. Отображение $F : M \to N$ между метрическими пространствами является *равномерно непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in M, \rho(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Удобно также работать с понятием *модуль непрерывности отображения*:

$$\omega_f(\delta) = \sup\{\rho(f(x), f(y)) : x, y \in M \text{ и } \rho(x, y) < \delta\}.$$

Тогда определение равномерной непрерывности означает, что $\omega_f(\delta) \to +0$ при $\delta \to +0$.

Нетрудно привести пример равномерно непрерывного отображения. Например функция $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна, так как

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

Чуть сложнее доказывается равномерная непрерывность для $f(x) = \sqrt{x}$, проверьте самостоятельно, что

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x - y|}.$$

Теорема 3.65. *Непрерывное отображение $f : M \to N$ метрических пространств при компактном M является равномерно непрерывным.*

Доказательство. Применим определение непрерывности для всякой точки $x \in M$. Тогда при $y \in U_\delta(x)$ мы будем иметь неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Уменьшим все эти окрестности в два раза, то есть рассмотрим семейство $\{U_{\delta(x)/2}(x)\}$. Они покрывают M и в этом покрытии можно оставить конечно число

$$U_{\delta_1/2}(x_1), \dots, U_{\delta_N/2}(x_N).$$

Теперь положим

$$\delta = \min\{\delta_1/2, \dots, \delta_N/2\}.$$

Для всяких x и y на расстоянии не более δ ясно, что $x \in U_{\delta_k/2}(x_k)$ для некоторого k. Тогда из неравенства треугольника $y \in U_{\delta_k}(x_k)$. А значит

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(f(x), f(x_k)) + \rho(f(y), f(x_k)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Это по сути означает равномерную непрерывность. □

Частный случай равномерно непрерывного отображения описывается так:

Определение 3.66. Отображение $f : M \to N$ метрических пространств *липшицево*, если существует константа L, такая что для любых $x, y \in M$

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant L\rho(x, y).$$

Задача 3.67. Докажите, что если производная функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ограничена, то функция липшицева.

[[Используйте теорему о среднем Лагранжа.]]

Задача 3.68. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, то существуют константы $L, C > 0$, такие что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| + C.$$

[[Фиксируйте некоторые ε и δ в определении равномерной непрерывности. Всякий отрезок $[x, y]$ разбейте на части длиной не более δ и оцените сумму приращений f на этих частях.]]

Задача 3.69. * Как естественно определить расстояние в произведении $M \times M$ метрического пространства на себя (то есть $\rho_2 : (M \times M) \times (M \times M) \to \mathbb{R}^+$), чтобы исходная функция расстояния $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$ оказалась относительно этого расстояния липшицевой с константой 1?

[[Поищите в классе функций вида $\rho_2((x, y), (x', y')) = f(\rho(x, x'), \rho(y, y'))$.]]

Задача 3.70. Докажите, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, равномерно непрерывна, то она продолжается до непрерывной функции на замыкании множества X.

[[Заметьте, что f переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные.]]

3.10. **Разрывные и полунепрерывные функции.** Будем работать на метрическом пространстве M и рассмотрим функцию $f : M \to \mathbb{R}$, про которую мы не предполагаем непрерывности. Наша цель заключается в том, чтобы изучить отклонения f от непрерывности и некоторые ослабленные варианты непрерывности, достаточные, например, для задач поиска экстремума.

Определение 3.71. Для всякой точки $x_0 \in M$ число или бесконечность со знаком $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *частичным пределом* f в точке x_0, если можно найти последовательность $(x_n) \subseteq M$, такую что $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ для любого n и $f(x_n) \to A$.

Аналогично частичным пределам последовательностей доказывается, что множество частичных пределов функции f в точке x_0 замкнуто, и что среди частичных пределов f в x_0 есть минимальный и максимальный, которые называются *нижний и верхний пределы* f в точке x_0,

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x), \varlimsup_{x \to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Теорема о единственном частичном пределе последовательности тогда превращается в утверждение, что f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$f(x_0) = \varliminf_{x \to x_0} f(x) = \varlimsup_{x \to x_0} f(x),$$

это тривиально следует из определения непрерывности по Гейне и соответствующего утверждения для последовательностей.

Задача 3.72. Докажите, что если функция f непрерывна в проколотой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$, то множество её частичных пределов в x_0 является промежутком.

[[Используйте связность проколотых окрестностей при $n \geqslant 2$.]]

Определение 3.73. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу*, если в любой точке $x_0 \in M$ выполняется

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{x \to x_0} f(x).$$

Эквивалентно, f полунепрерывна снизу, если для всех $y \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in M : f(x) > y\}$$

открыты.

Второе определение полунепрерывности уместно назвать «топологическим», собственно, оно может применяться не только для метрических пространств, но и для топологических пространств, так как использует только понятие открытости множества.

Лемма 3.74. *Два определения полунепрерывности снизу эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что из первого следует второе. Предположим противное — множество $\{x \in M : f(x) > y\}$ при некотором y не открыто. Это означает существование x_0, такого что $f(x_0) > y$, но в любой окрестности x_0 найдётся x, такое что $f(x) \leqslant y$. Из таких x можно построить последовательность, которая покажет, что

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) \leqslant y,$$

но тогда должно быть $f(x_0) \leqslant y$ — противоречие.

В обратную сторону. Пусть $f(x_0) = y_0$, для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in M : f(x) > y_0 - \varepsilon\}$ открыто, то есть в некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x) > y_0 - \varepsilon$. Следовательно должно выполняться

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant y_0 - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь произвольно, то на самом деле должно выполняться

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant y_0 = f(x_0).$$

□

Оказывается, полунепрерывности снизу достаточно для существования минимума на компактном множестве:

Теорема 3.75. *Если функция $f : M \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу и M компактно, то f принимает минимальное значение в некоторой точке M.*

Доказательство. Пусть $m = \inf_{x\in M} f(x)$, мы пока не исключаем, что $m = -\infty$. Выберем последовательность y_n, строго убывающую и стремящуюся к m. Множества

$$U_n = \{x : f(x) > y_n\}$$

открыты по определению полунепрерывности снизу. Предположим противное — $f(x)$ никогда не равно m. Тогда для всякого x найдётся n, такое что $f(x) > y_n$. Следовательно, множества U_n покрывают всё M.

Так как M компактно, то оно покрывается конечным набором таких множеств, а так как они упорядочены по включению, то на самом деле покрывается одним из них, $U_N = M$. Но это означает, что для всех $x \in M$ выполняется $f(x) > y_N > m$, то есть m не является точной нижней гранью значений f. Противоречие. □

Задача 3.76. Приведите пример полунепрерывной снизу функции на отрезке, не имеющей максимального значения.

Определение полунепрерывности сверху аналогично полунепрерывности снизу:

Определение 3.77. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной сверху*, если в любой точке $x_0 \in M$ выполняется

$$f(x_0) \geqslant \varlimsup_{x\to x_0} f(x).$$

Эквивалентно, f полунепрерывна сверху, если для всех $y \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in M : f(x) < y\}$$

открыты.

Рассмотрим другой способ описать отклонение функции от непрерывности, на этот раз количественно.

Определение 3.78. *Колебание функции f в точке x_0* — это точная нижняя грань по открытым множествам, содержащим x:

$$\omega(f, x_0) = \inf\{\sup_{x\in U} f(x) - \inf_{x\in U} f(x) : U \ni x\}.$$

Для отображений между метрическими пространствами $f : M \to N$ можно обобщить это определение как

$$\omega(f, x_0) = \inf\{\operatorname{diam} f(U) : U \ni x\}.$$

Нижнюю грань в определении можно брать по открытым множествам, а можно только по ε-окрестностям, результат не изменится.

Теорема 3.79. *Непрерывность отображения между метрическими пространствами $f : M \to N$ в точке x_0 равносильна тому, что $\omega(f, x_0) = 0$.*

Доказательство. Если $\omega(f, x_0) = 0$, то для любого положительного ε найдётся окрестность $U \ni x_0$, для которой

$$\operatorname{diam} f(U) < \varepsilon.$$

В частности, это означает, что $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех $x \in U$. Это даёт непрерывность f в точке x_0.

В обратную сторону, если f непрерывно в точке x_0, то для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ выполняется в некоторой окрестности $U \ni x_0$, следовательно, выполняется

$$\forall x, x' \in U,\ \rho(f(x), f(x')) \leqslant 2\varepsilon \Rightarrow \operatorname{diam} f(U) \leqslant 2\varepsilon,$$

что означает $\omega(f, x_0) = 0$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$. □

Задача 3.80. Докажите, что для любого отображения $f : M \to N$ между метрическими пространствами функция $\omega(f, x)$ является полунепрерывной сверху.

[[Используйте определение полунепрерывности с использованием неравенства $\omega(f, x_0) < \varepsilon$ и заметьте, что окрестность $U \ni x_0$ также годится в определение $\omega(f, x)$ для любой точки $x \in U$.]]

Задача 3.81. * Докажите, что не существует функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывной в рациональных точках, и разрывной в иррациональных точках.

[[Рассмотрите замкнутые множества $\{x : \omega(f, x) \geqslant 1/n\}$ и аккуратно примените теорему Бэра.]]

3.11. **Длина кривой в произвольном метрическом пространстве.** Мы уже использовали длины дуг окружности для определения косинуса и синуса, а теперь изучим понятие длины произвольной кривой.

Определение 3.82. *Длина кривой* $\gamma : [a, b] \to M$ в метрическом пространстве M — это

$$\ell(\gamma) = \sup_{a=t_0<t_1<\dots t_{N-1}<t_N=b} \{\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \dots + \rho(\gamma(t_{N-1}), \gamma(t_N))\}.$$

Говоря неформально, мы помещаем на кривую конечное количество точек в согласованном с кривой порядке и суммируем расстояния между одной точкой и следующей. В случае евклидова пространства мы бы сказали, что *в кривую вписана ломаная*.

Лемма 3.83 (Аддитивность длины кривой). *Если* $\gamma = \gamma' \diamond \gamma''$, *то*

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma') + \ell(\gamma'').$$

Доказательство. По сути доказательство уже было приведено для случая дуг окружности в лемме 1.80, оно работает и в более общей постановке. В силу неравенства треугольника в определении $\ell(\gamma)$ можно рассматривать только такие наборы параметров, в которых в качестве одной из точек $\gamma(t_i)$ фигурирует конец γ', равный началу γ''. Тогда сумма (длина ломаной) для γ разбивается на две аналогичные суммы для γ' и γ''.

Наоборот, из любых двух сумм (ломаных) для γ' и γ'' можно собрать сумму (ломаную) для γ, так как можно считать, что начала и концы кривых всегда фигурируют в этих суммах. Далее мы используем тождество

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y,$$

где

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}.$$

□

Лемма 3.84. *Для всякой кривой* $\gamma : [a, b] \to M$

$$\ell(\gamma) \geqslant \rho(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Доказательство. Это выполняется по неравенству треугольника для сумм (ломаных) в определении длины кривой и значит выполняется для точной верхней грани. □

Конечно, для всякой конкретной кривой длина может оказаться бесконечной, кривая конечной длины называется *спрямляемой*. Приведём достаточное условие спрямляемости:

Лемма 3.85. *Если кривая имеет липшицеву параметризацию,*

$$\rho(\gamma(t), \gamma(s)) \leqslant L|t - s|,$$

то она спрямляема.

Доказательство. Очевидно, если $\gamma : [a,b] \to M$ липшицева с константой L, то все суммы «длин ломаных» в определении длины не более $L|b-a|$ и

$$\ell(\gamma) \leqslant L|b-a|.$$

□

Следующая лемма показывает, что на кривой $\gamma : [a,b] \to M$, которая не является постоянным отображением ни на каком интервале в $[a,b]$, можно корректно ввести натуральную параметризацию.

Лемма 3.86. *Пусть дана спрямляемая кривая $\gamma : [a,b] \to M$, обозначим её ограничение на $[a,t] \subseteq [a,b]$ как γ_t, тогда $\ell(\gamma_t)$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Функция $f(t) = \ell(\gamma_t)$ очевидно возрастает и достаточно доказать, что

$$\lim_{\tau\to t-0} f(\tau) = f(t) = \lim_{\tau\to t+0} f(\tau).$$

Достаточно доказать равенство слева, равенство справа тогда последует из переворота ориентации кривой и аддитивности длины, так как натуральная параметризация перевёрнутой кривой будет даваться выражением $s(b) - s(-t')$, $t' \in [-b,-a]$.

Впишем в кривую γ_t ломаную P, длина которой не менее $\ell(\gamma_t) - \varepsilon/2$. Правый конец P будет находиться в точке $\gamma(t)$, из непрерывности кривой мы можем сдвинуть его в точку $\gamma(t')$ с $t' < t$ так, чтобы получилась ломаная P' длины не менее $\ell(P) - \varepsilon/2$, то есть длины не менее $\ell(\gamma_t) - \varepsilon$. Существование такой ломаной показывает, что $\ell(\gamma_{t'}) \geqslant \ell(\gamma_t) - \varepsilon$. Так как ε в последнем неравенстве произвольное (при t' зависящем от него), то этого достаточно, чтобы исключить разрыв слева у возрастающей функции $\ell(\gamma_t)$.

□

Взяв на спрямляемой кривой $\gamma : [a,b] \to M$ *натуральный параметр* $s = \ell(\gamma_t)$ мы видим, что значение t по s восстанавливается не обязательно однозначно, но точка на кривой восстанавливается однозначно. Более того, натуральная параметризация является 1-липшицевой,

$$\rho(\gamma(s), \gamma(s')) \leqslant |s - s'|.$$

С учётом леммы 3.85 можно сказать, что кривая спрямляема тогда и только тогда, когда среди её параметризаций есть липшицева параметризация.

Задача 3.87. Определение длины кривой можно дословно использовать и для разрывных кривых. Докажите, что если разрывная кривая $\gamma : [a,b] \to M$ в полном метрическом пространстве имеет конечную длину, то во всякой $t_0 \in [a,b]$ кривая имеет левый и правый предел, и случаев их несовпадения счётное количество.

[[В силу полноты пространства примените критерий Коши существования, скажем правого, предела и заметьте, что при его отсутствии в кривую можно будет «вписать ломаную» произвольно большой длины.]]

3.12. **Дифференцируемые кривые в евклидовом пространстве.** Если мы рассматриваем кривые в евклидовом пространстве, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, то можно привести простые достаточные условия её спрямляемости и привести способ вычисления длины. Мы воспользуемся понятием производной (скорости) кривой.

Определение 3.88. Кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется дифференцируемой, если у неё есть производная

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

в каждой $t_0 \in [a,b]$, на концах отрезка — правая и левая. Она называется *непрерывно дифференцируемой*, если производная сама по себе непрерывная.

Нетрудно проверить, что дифференцируемость кривой в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна дифференцируемости её координатных компонент.

Лемма 3.89 (Теорема о среднем для кривых). *Если кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема на (a, b), то для некоторого $\xi \in (a, b)$*

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \leqslant |\gamma'(\xi)||b - a|.$$

Доказательство. Пусть e — единичный вектор в направлении $\gamma(b) - \gamma(a)$. Тогда

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = e \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)) = f(b) - f(a),$$

если положить $f(t) = e \cdot \gamma(t)$. Применяя теорему о среднем Лагранжа к f, получим $\xi \in (a, b)$, для которого

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = |f'(\xi)(b - a)| = |e \cdot \gamma'(\xi)(b - a)| \leqslant |\gamma'(\xi)||b - a|.$$

□

Задача 3.90. Приведите пример ситуации, когда в теореме о среднем нельзя добиться равенства ни при каком ξ.

Мы фактически установили липшицевость диффенцируемой кривой с ограниченной производной и получаем:

Следствие 3.91. *Для дифференцируемой кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$*

$$\ell(\gamma) \leqslant |b - a| \sup_{t \in (a,b)} |\gamma'(t)|.$$

Следующая теорема поясняет, что в школьном курсе физики подразумевалось под утверждением о том, что «путевая скорость равна длине векторной скорости»:

Теорема 3.92. *Пусть кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемая, обозначим её ограничение на $[a, t] \subseteq [a, b]$ как γ_t, тогда натуральный параметр кривой*

$$s(t) = \ell(\gamma_t)$$

является непрерывно дифференцируемым и

$$s'(t) = |\gamma'(t)|.$$

Доказательство. Будем изучать правую производную $s(t)$, для левой производной можно доказать, перевернув её параметризацию. Очевидно для $t > t_0$ по аддитивности длины кривой

$$s(t) - s(t_0) = \ell(\gamma_{t_0,t}),$$

то есть мы должны оценить длину куска кривой от параметра t_0 до параметра t. Оценка сверху даётся предыдущим следствием

$$s(t) - s(t_0) \leqslant \sup_{\xi \in (t_0,t)} |\gamma'(\xi)||t - t_0|.$$

Оценка снизу даётся исходя из равенства $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$ и того, что длина кривой не менее расстояния от её начала до её конца:

$$s(t) - s(t_0) \geqslant |(\gamma'(t_0) + o(1))(t - t_0)|\,.$$

Итого

$$|\gamma'(t_0) + o(1)| \leqslant \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leqslant \sup_{\xi \in (t_0,t)} |\gamma'(\xi)|.$$

Переходя к пределу $t \to t_0$ и используя непрерывность $\gamma'(t)$ получаем требуемое по теореме о двух милиционерах. □

По предыдущей теореме натуральный параметр s является допустимым параметром непрерывно дифференцируемой кривой с всюду ненулевой скоростью γ', и в натуральной параметризации кривая тоже непрерывно дифференцируема. Вектор

$$\tau = \frac{d\gamma}{ds}$$

тогда является единичным. Если кривую можно дифференцировать далее, то дифференцируем далее по натуральному параметру

$$\tau \cdot \tau = 1 \Rightarrow \tau' \cdot \tau = 0,$$

то есть вектор $\tau' = \gamma''$ перпендикулярен τ. Если он имеет ненулевую длину, то его направление называется *главной нормалью* ν, а его длина — *кривизной*, то есть выполняется

$$\frac{d\tau}{ds} = k\nu.$$

Сравнивая произвольную кривую с натурально параметризованной окружностью

$$\begin{aligned} x &= R\cos\frac{s}{R},\\ y &= R\sin\frac{s}{R}, \end{aligned}$$

можно заметить, что кривизна окружности равна $\frac{1}{R}$, поэтому величина $R = \frac{1}{k}$ для произвольной кривой называется её радиусом кривизны, а точка

$$\rho = \gamma + R\nu$$

называется *центром кривизны*. Множество всех центров кривизны даёт новую кривую, которая называется *эволютой* исходной кривой.

На плоскости мы можем продифференцировать условия $\tau \cdot \nu = 0$ и $\nu, \cdot \nu = 1$ и получить

$$\tau' \cdot \nu = -\tau \cdot \nu', \nu' \cdot \nu = 0,$$

Получив таким образом *формулы Френе для плоской кривой*:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= k\nu,\\ \frac{d\nu}{ds} &= -k\tau. \end{aligned}$$

Задача 3.93. Выпишите формулу кривизны кривой, заданной в произвольной параметризации.

[[Воспользуйтесь тем, что $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'_t}{|\gamma'_t|}$ и продифференцируйте это равенство по s ещё раз. В левой части получится вектор, длина которого равна кривизне, а производную по s справа найдите как производную по t, делённую на $|\gamma'_t|$.]]

Задача 3.94. Докажите, что для центра кривизны на плоскости выполняется $\frac{d\rho}{ds} = \frac{dR}{ds}\nu$ и объясните, как восстановить кривую γ по её эволюте ρ.

Для кривой в $\mathbb{R}^3$ мы можем добавить ещё один вектор β, чтобы тройка (τ, ν, β) стала правой, тогда β называется *бинормалью*. Дифференцируя соотношения

$$\tau \cdot \tau = \nu \cdot \nu = \beta \cdot \beta = 1, \quad \tau \cdot \nu = \nu \cdot \beta = \beta \cdot \tau = 0,$$

мы получим соотношения

$$\begin{gathered} \tau' \cdot \tau = \nu' \cdot \nu = \beta' \cdot \beta = 0,\\ \tau' \cdot \nu = -\nu' \cdot \tau, \nu' \cdot \beta = -\beta' \cdot \nu, \beta' \cdot \tau = -\tau' \cdot \beta = 0, \end{gathered}$$

в последнем получается нуль, так как $\tau' \parallel \nu$ по определению и следовательно $\tau' \cdot \beta = 0$. Из этих соотношений следует существование ещё одного коэффициента $\varkappa$, для которого верны *формулы Френе для трёхмерной кривой*:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= k\nu, \\ \frac{d\nu}{ds} &= -k\tau + \varkappa\beta, \\ \frac{d\beta}{ds} &= -\varkappa\nu. \end{aligned}$$

Коэффициент $\varkappa$ называется *кручением* кривой.

Задача 3.95. Выведите формулы для кривизны и кручения трижды дифференцируемой кривой в произвольной, не обязательно натуральной, параметризации.

[[Сначала посмотрите на смешанное произведение $(\gamma', \gamma'', \gamma''')$ в натуральной параметризации, а потом изучите, как оно поменяется при замене параметризации на произвольную. Убедитесь, что полученные вами выражения эквивалентны следующим

$$k = \frac{|[\gamma' \times \gamma'']|}{|\gamma'|^3}, \quad \varkappa = \frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|[\gamma' \times \gamma'']|^2}.$$

]]

Задача 3.96. Опишите кривые в $\mathbb{R}^3$ с постоянной ненулевой кривизной и постоянным ненулевым кручением.

[[Подберите какие-то кривые из известных вам или решите систему линейных дифференциальных уравнений, которую дают формулы Френе. Отсутствие других примеров обоснуйте теоремой существования и единственности для линейных дифференциальных уравнений 6.212.]]

3.13. **Внутренняя метрика метрического пространства.** Понятие длины кривой позволяет ввести на всяком метрическом пространстве новую метрику:

Определение 3.97. На линейно связном метрическом пространстве (M, ρ) можно ввести *внутреннюю метрику*

$$\rho_\ell(x, y) = \inf \{\ell(\gamma) : \gamma \text{ идёт из } x \text{ в } y\}.$$

Из леммы 3.84 следует, что $\rho_\ell(x, y) \geqslant \rho(x, y)$ всегда. Конечно, может оказаться, что все кривые из x в y не спрямляемы, например, если метрическое пространство M является неспрямляемой кривой без самопересечений в $\mathbb{R}^n$ с индуцированной метрикой. Получается, что внутренняя метрика корректно определена тогда, когда любые две точки M можно соединить спрямляемой кривой.

Лемма 3.98. *Длины кривых в исходной метрике ρ и во внутренней метрике ρ_ℓ равны.*

Доказательство. Так как длина кривой не менее расстояния между её концами, то выполняется неравенство $\rho \leqslant \rho_\ell$. Значит длины кривых во внутренней метрике не менее длин кривых в исходной метрике. Докажем обратное неравенство. Пусть кривая $\gamma : [a, b] \to M$ имеет длину L в исходной метрике. Рассмотрим набор значений параметров $a = t_0 < \dots < t_n = b$, они разбивают γ на n кусков $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. По аддитивности длины кривой

$$\ell_\rho(\gamma_1) + \dots + \ell_\rho(\gamma_n) = L.$$

Всякая кривая γ_i идёт из $\gamma(t_{i-1})$ в $\gamma(t_i)$, следовательно установленное равенство свидетельствует, что расстояния во внутренней метрике удовлетворяют неравенству

$$\rho_\ell(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \dots + \rho_\ell(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)) \leqslant L.$$

Так как это верно для любого набора значений параметров $a = t_0 < \dots < t_n = b$, то длина кривой γ во внутренней метрике по определению оказывается не более L. $\square$

Задача 3.99. Докажите, что если метрика ρ в M уже была внутренняя, то операция взятия внутренней метрики от неё, ρ_ℓ, даст $\rho_\ell \equiv \rho$.

В евклидовом пространстве очевидно выполняется равенство $\rho_\ell(x, y) = \rho(x, y)$, так как для всяких двух точек длина отрезка между ними в точности равна расстоянию между ними. Следующий, уже не такой тривиальный пример — стандартная единичная сфера $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. На ней есть метрика, индуцированная с $\mathbb{R}^{n+1}$, в ней расстояние между $x, y \in \mathbb{S}^n$ равно $|x - y|$. Однако, если мы будем рассматривать кривые на сфере от точки x до точки y, то их длины будут больше $|x-y|$ и внутренняя метрика окажется строго больше индуцированной.

Теорема 3.100. *Внутренняя метрика на сфере $\mathbb{S}^n$, соответствующая индуцированной с $\mathbb{R}^{n+1}$ метрике, равна*

$$\rho_\ell(x, y) = \arccos(x \cdot y).$$

Доказательство. Вместо того, чтобы доказывать формулу по определению, мы проверим, что $\rho'(x, y) = \arccos(x \cdot y)$ является метрикой, что расстояние в ней равно длине некоторой кривой между x и y на сфере и что длина любой кривой в этой метрике равна длине кривой в исходной метрике.

Чтобы ρ' была метрикой, по сути надо проверить неравенство треугольника

$$\arccos(x \cdot z) \leqslant \arccos(x \cdot y) + \arccos(y \cdot z).$$

Предположим противное, пусть тогда $\arccos(x \cdot z) = \alpha$, $\arccos(x \cdot y) = \beta$, $\arccos(y \cdot z) = \gamma$ и $\alpha > \beta + \gamma$. Вектор y удовлетворяет неравенствам

$$y \cdot x \geqslant \cos\beta,\ y \cdot z \geqslant \cos\gamma, \tag{3.1}$$

тем же неравенствам будет удовлетворять его проекция на плоскость $\langle x, z\rangle$ (так как проекция не меняет значения скалярных произведений с x и z), причём проекция будет по модулю не более единицы. Можно увеличить $|y|$ до единицы, оставив (3.1) в силе. Теперь мы работаем с ситуацией на окружности $\mathbb{S}^1$ и (3.1) просто означает, что угол $|\widehat{yx}| \leqslant \beta$, $|\widehat{yz}| \leqslant \gamma$, тогда как $|\widehat{yz}| = \alpha > \beta + \gamma$. Так быть не может по аддитивности длины дуги.

Теперь напишем очевидные оценки индуцированной метрики на сфере и ρ' друг через друга:

$$\rho(x, y) \leqslant \rho'(x, y) \leqslant 2 \arcsin \rho(x, y)/2.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и заметим, что в определении длины кривой можно разбить кривую сколь угодно мелко, увеличив при этом число под точной верхней гранью. Используя равномерную непрерывность γ и мелко разбивая отрезок параметризации $[a, b]$, мы будем иметь $\rho(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < \varepsilon$ для всех частей кривой. Тогда можно будет написать

$$\ell_\rho(\gamma) \leqslant \ell_{\rho'}(\gamma) \leqslant \ell_\rho(\gamma) \frac{2 \arcsin \varepsilon/2}{\varepsilon},$$

так как $\frac{2\arcsin\varepsilon/2}{\varepsilon}$ возрастает. Так как $\frac{2\arcsin\varepsilon/2}{\varepsilon}$ стремится к 1 при $\varepsilon \to +0$, то в пределе мы получим равенство длин кривых в обеих метриках. Таким образом $\rho_\ell = \rho'_\ell$.

Очевидно, дуга в плоскости $\langle x, y\rangle$, соединяющая x и y, будет иметь длину (в обеих метриках) именно $\arccos(x \cdot y)$, таким образом, $\rho' = \rho'_\ell = \rho_\ell$, что и требовалось доказать. $\square$

Задача 3.101. * Докажите, что в метрическом пространстве с компактными шарами минимум в определении внутренней метрики, если он конечный, достигается на некоторой (возможно не единственной) кривой, называемой *кратчайшей*.

[[Рассмотрите последовательность кривых, стремящихся к точной нижней грани. Параметризуйте их почти натурально липшицевым образом и используйте рассуждения типа теоремы Арцела–Асколи 7.128, выбирая из последовательности кривых равномерно сходящуюся подпоследовательность (см. раздел 4.3).]]

4. Ряды, приближения функций и первообразные

4.1. **Комплексные числа и многочлены.** Определим комплексные числа, как пары действительных чисел $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, записываемые обычно в виде $a + ib$, складываемые покомпонентно и перемножаемые с использованием правила $i^2 = -1$, то есть как

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

При этом a называется *действительной частью*, а b — *мнимой частью* комплексного числа $a + ib$. Действительный числа вкладываются в комплексные с помощью отображения $x \mapsto x + i0$.

Удобно для комплексного числа $z = a + ib$ определить *сопряжённое* $\overline{z} = a - ib$, тогда выполняется равенство

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

После этого можно заметить, что при $z \neq 0$ число (деление на действительное число происходит покомпонентно)

$$z^{-1} = \frac{z}{z\overline{z}}$$

является обратным по умножению числу z. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$, так как на самом деле это то же самое $\mathbb{R}^2$ в смысле метрики

$$\rho(z, z') = \sqrt{(z - z')\overline{(z - z')}},$$

то мы будем применять к множеству комплексных чисел все топологические понятия, которые мы имеем для евклидовых пространств.

Задача 4.1. На множестве четвёрок действительных чисел, записываемых в виде $a+ib+jc+kd$ введём умножение по правилам

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -j, ik = -j,$$

это называется *кватернионы*. Докажите, что у всякого ненулевого кватерниона есть обратный относительно умножения.

[[Определите сопряжение и действуйте как с комплексными числами.]]

Важное отличие комплексных чисел от действительных — отсутствие линейной упорядоченности. С другой стороны, у комплексных чисел есть и преимущества по сравнению с действительными. Запишем два комплексных числа в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

при этом r_i и φ_i называются *модуль* и *аргумент* комплексного числа; аргумент определён с точностью до прибавления числа вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а для нуля аргумент не определён. С помощью тригонометрических формул легко проверить, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, это объясняет полезность такой записи.

Часто выражение $\cos\varphi + i\sin\varphi$ записывают в виде $e^{i\varphi}$. Это оправданно, так как при таком обозначении выходит $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}$. После разложения экспоненты и тригонометрических функций в ряды Тейлора мы увидим ещё более убедительные причины для таких обозначений. В более общем виде можно определить

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b).$$

После этого можно заметить, что уравнение

$$z^n = 1$$

в комплексных числах имеет n корней, которые можно записать в виде

$$w_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

это легко проверяется возведением в степень в тригонометрической записи. Более того, для ненулевого $v = re^{i\varphi}$ уравнение

$$z^n = v$$

имеет n корней

$$w_k = |v|^{1/n} e^{i\frac{2\pi k + \varphi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Это свойство можно обобщить, рассмотрев произвольный многочлен с комплексными коэффициентами

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, c_n \neq 0,$$

число n называется его *степенью*. В окрестности всякой точки z_0 можно подставить в многочлен выражение $z_0 + t$ и заметить, что

$$P(z_0 + t) = P(z_0) + P'(z_0)t + r(z_0, t),$$

где

$$P'(z) = c_1 + 2c_2 z + \dots + nc_n z^{n-1},$$

а остаток $r(z_0, t)$ при фиксированном z_0 оценивается по модулю как $C|t|^2$ в малой окрестности z_0. Это означает, что многочлен является непрерывной функцией комплексного переменного, которая также *дифференцируема в комплексном смысле*, то есть записывается в виде

$$P(z_0 + t) = P(z_0) + P'(z_0)t + o(|t|), \quad t \to 0.$$

Докажем следующую важную теорему:

Теорема 4.2 (Алгебраическая замкнутость комплексных чисел)**.** *Всякий многочлен P с комплексными коэффициентами положительной степени имеет хотя бы один комплексный корень, то есть число $z \in \mathbb{C}$, такое что $P(z) = 0$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать старший коэффициент многочлена c_n равным 1. Тогда можно записать

$$P(z) = z^n \left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_0}{z^n}\right).$$

При $|z| \geqslant R$ модуль выражения в скобках оценивается как

$$\left|1 - \frac{|c_{n-1}|}{R} - \dots - \frac{|c_0|}{R^n}\right| \leqslant \left|1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_0}{z^n}\right| \leqslant \left|1 + \frac{|c_{n-1}|}{R} + \dots + \frac{|c_0|}{R^n}\right|$$

и стремится к единице при $R \to +\infty$. Так как $|z^n| \geqslant R^n \to +\infty$ при $R \to +\infty$, мы делаем вывод, что $|P(z)|$ стремится к $+\infty$ при $|z| \to +\infty$.

Если $P(0) = c_0$, то мы можем выбрать R таким, что $|P(z)| \geqslant |c_0| + 1$ при $|z| \geqslant R$. Значит, минимальное по модулю значение $|P(z)|$ на круге $|z| \leqslant R$ существует как минимум непрерывной на компакте функции, и на самом деле является глобальным минимумом $|P(z)|$ на всём $\mathbb{C}$.

Пусть точка минимума — это z_0. Тогда выражение

$$Q(t) = P(z_0 + t)$$

тоже является многочленом от t степени n (проверьте это явно). Распишем его в виде

$$Q(t) = d_0 + d_1 t + \dots + d_n t^n.$$

Мы хотим доказать, что $d_0 = 0$, тогда окажется $Q(0) = P(z_0) = 0$ и мы найдём корень. Предположим противное, что $d_0 \neq 0$. Пусть за коэффициентом d_0 идёт некоторое количество нулевых коэффициентов, а на k-м месте оказался $d_k \neq 0$, тогда можно записать

$$Q(t) = d_0 + d_k t^k + o(|t|^k) = d_0 + d_k t^k(1 + o(1))$$

при $t \to 0$. Найдём (по замечаниям перед формулировкой теоремы) число w, такое что

$$d_k w^k = -d_0,$$

тогда подставив $t = ws$, мы получим

$$Q(ws) = d_0 - d_0 s^k(1 + o(1)) = d_0(1 - s^k(1 + o(1))).$$

при $s \to 0$. Это выражение показывает, что если s будет стремиться к нулю по действительным положительным числам, то мы увидим значения $|Q(ws)|$, меньшие $|Q(0)|$. Получаем противоречие с выбором минимума модуля. □

В случае, если нам не важно, используем мы рациональные $\mathbb{Q}$, действительные $\mathbb{R}$ или комплексные $\mathbb{C}$ числа, мы будем говорить о поле чисел $\mathbb{F}$. Множество многочленов с коэффициентами в этом поле будем обозначать $\mathbb{F}[x]$. Степень многочлена P будем обозначать $\deg P$, на самом деле она равна степени отображения $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, как будет ясно из раздела 6.24. Далее в качестве задач приводятся основные факты, которые можно найти в любом учебнике по алгебре.

Задача 4.3 (Деление многочленов с остатком). Докажите, что для $P, D \in \mathbb{F}[x]$, при $\deg D > 0$, найдётся единственный *остаток* $R \in \mathbb{F}[x]$ с $\deg R < \deg D$ и единственное *частное* $Q \in \mathbb{F}$, такие что

$$P = QD + R.$$

[[Можно использовать индукцию по степени P.]]

Задача 4.4. Докажите, что всякий многочлен $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots c_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ степени n раскладывается в произведение

$$P(z) = c_n(z - z_0) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

[[Поделите многочлен с остатком на многочлен $z - z_0$ и посмотрите, что будет, если z_0 был его корнем.]]

Задача 4.5. Докажите, что всякий многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ представляется в виде произведения константы, линейных многочленов вида $x - x_i$ и квадратных трёхчленов вида $x^2 + p_i x + q_i$ с отрицательными детерминантами.

[[Примените комплексное утверждение и заметьте, что у действительного многочлена корни идут парами комплексно сопряжённых.]]

Задача 4.6 (Алгоритм Евклида для многочленов). Докажите, что для всяких $P, Q \in \mathbb{F}[x]$ найдутся $S, T \in \mathbb{F}[x]$, такие что $\deg S < \deg Q$, $\deg T < \deg P$, а

$$D = SP + TQ$$

является делителем P и Q. Этот *наибольший общий делитель* D определён однозначно с точностью умножения на константу.

[[Поделите P на Q с остатком и примените индукцию.]]

Задача 4.7. Докажите, что всякий общий делитель P и Q из предыдущей задачи является делителем D из предыдущей задачи.

[[Используйте установленную формулу наибольшего общего делителя.]]

Задача 4.8. Многочлен из $\mathbb{F}[x]$ положительной степени называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения многочленов меньшей степени. Докажите, что всякий многочлен из $\mathbb{F}[x]$ можно разложить в произведение *неприводимых* многочленов единственным образом, с точностью до перестановки сомножителей и домножения их на ненулевые числа (элементы $\mathbb{F}$).

[[Вспомните, как в школе доказывалась единственность разложения натурального числа в произведение простых.]]

Задача 4.9. Многочлены с наибольшем общем делителем степени 0 (то есть константой) назовём *взаимно простыми*. Докажите, что многочлены $P, Q \in \mathbb{C}$ взаимно просты тогда и только тогда, когда они имеют общий корень.

[[Используйте установленную формулу наибольшего общего делителя и алгебраическую замкнутость $\mathbb{C}$.]]

Определим *рациональные функции*, $\mathbb{F}(x)$, как отношения $\frac{P}{Q}$ с $P, Q \in \mathbb{F}[x]$ и $Q \neq 0$, с точностью до стандартного отношения эквивалентности

$$\frac{P}{Q} = \frac{S}{T} \Leftrightarrow PT = QS.$$

Рациональная функция $\frac{P}{Q}$ называется *правильной дробью*, если $\deg P < \deg Q$.

Задача 4.10. Докажите, что если две рациональные дроби из $\mathbb{R}(x)$ принимают одинаковые значения при подстановке в них любого $x \in \mathbb{R}$, для которого они одновременно могут быть вычислены, то они равны в смысле предыдущего определения.

[[Сведите к равенству двух многочленов, значения которых совпадают на бесконечном множестве значений переменной.]]

Задача 4.11. Докажите, что если $\frac{P}{Q_1Q_2}$ — правильная дробь, а Q_1 и Q_2 взаимно просты, то дробь можно представить в виде суммы правильных дробей

$$\frac{P}{Q_1Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}.$$

[[Используйте алгоритм Евклида.]]

Из последней задачи следует (проверьте это), что всякая правильная дробь с комплексными коэффициентами представляется в виде суммы *элементарных дробей* вида $\frac{a}{(z-z_0)^k}$. Это очень помогает при нахождении *первообразных* рациональной функции, то есть функции, производная которой равна данной. Всякую неправильную дробь с помощью деления с остатком можно превратить в сумму многочлена и правильной дроби. Первообразная многочлена

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

находится с точностью до прибавления константы явно как

$$a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \dots + a_n \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

а первообразные элементарных дробей имеют вид

$$(\operatorname{Ln}(z-z_0))' = \frac{1}{z-z_0}, \quad \left(\frac{-1}{(k+1)(z-z_0)^{k+1}}\right)' = \frac{1}{(z-z_0)^k}.$$

Производная здесь понимается в комплексном смысле, логарифм ненулевого комплексного числа определяется как обратная функция к экспоненте с точностью до прибавления $2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$. Подробности работы с функциями комплексного переменного читатель может найти в разделе 8.

Задача 4.12. Для квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$, не имеющего действительных корней, найдите первообразную правильной дроби

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}$$

в виде, использующем только действительные числа и функции.

[[Посмотрите, как записать отдельно действительную и мнимую часть логарифма комплектного числа.]]

4.2. **Суммирование абсолютно сходящихся рядов.** Обсудим понятие суммы бесконечного количества чисел. Один из способов суммирования такой:

Определение 4.13. Если дана последовательность (a_n) действительных или комплексных чисел, то *суммой ряда* называется

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Выражения под знаком предела называются *частичными суммами ряда*. Ряд называется *сходящимся*, если его сумма конечна.

Заметим, что для комплексных чисел суммирование ряда по сути сводится к суммированию действительных и мнимых частей по отдельности. Для такого способа суммирования выполняются *линейность*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n) = A\sum_{n=1}^{\infty} a_n + B\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и *монотонность*

$$a_n \leqslant b_n\ (\forall n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Также можно рассматривать суммы, индексы которых начинаются не с единицы, а с другого натурального числа, и доказать свойство (проделайте это в качестве упражнения)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n,$$

которое понимается так, что из сходимости ряда в правой части следует сходимость ряда в левой части и наоборот.

Это стандартное определение приемлемо во многих ситуациях, но у него есть один недостаток: сумма ряда может зависеть от порядка суммирования, то есть не выполняется свойство «от перемены мест слагаемых сумма не меняется».

Задача 4.14. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

[[Используйте неравенство $1/n \geqslant \ln(1 + 1/n)$.]]

Задача 4.15. Приведите пример ряда, у которого сумма (как предел частичных сумм) меняется при изменении порядка суммирования.

[[Важно, чтобы элементы ряда стремились к нулю, сумма положительных членов ряда была $+\infty$, а сумма отрицательных членов была $-\infty$, тогда подходящим образом переставляя члены ряда можно будет сделать сумму любой.]]

Описанная в предыдущей задаче ситуация называется *условная сходимость ряда* и мы по возможности будем её избегать, хотя в разделах 4.3 и 4.5 мы не будем исключать условную сходимость для функциональных рядов. Для дальнейшей работы со степенными функциональными рядами и с интегралом Лебега нам будет нужно и удобно переставлять слагаемые в суммах и производить другие естественные операции, которые возможны только тогда, когда мы можем по отдельности суммировать положительные и отрицательные слагаемые ряда. Для этого мы начнём с утверждения про сумму ряда неотрицательных чисел, из которого будет ясна независимость этой суммы от перестановок.

Лемма 4.16. *Сумма ряда из неотрицательных чисел равна точной верхней грани сумм конечного числа элементов ряда, сумма ряда из неположительных чисел равна точной нижней грани сумм конечного числа элементов ряда.*

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим ряд из неотрицательных чисел. По нашему определению суммы ряда она равна пределу частичных сумм, то есть пределу сумм начальных отрезков ряда. Так как члены ряда неотрицательны, то частичные суммы ряда возрастают и предел на самом деле равен точной верхней грани сумм начальных отрезков ряда.

Если мы рассмотрим теперь сумму конечного числа элементов ряда, взятых из ряда в произвольных местах, то пусть максимальный номер элемента в этой сумме равен n. Тогда эта конечная сумма не больше частичной суммы ряда всех элементов с номерами от 1 до n, так как все члены ряда неотрицательны. Следовательно, точная верхняя грань по всевозможным конечным подсуммам ряда не более точной верхней грани по начальным отрезкам ряда. Обратно неравенство тривиально, так как всякая частичныя сумма ряда — это частный случай суммы конечного числа элементов ряда. В итоге получаем требуемое равенство. □

Утверждение предыдущей леммы по сути можно считать определением суммы ряда действительных чисел одного и того же знака. Так как это определение не зависит от перестановки элементов ряда, то мы получаем:

Следствие 4.17. *Сумма ряда из чисел одного знака не меняется при перестановке её элементов.*

Для суммы ряда из неотрицательных элементов возможен случай, когда сумма равна $+\infty$, приведённые выше утверждения работают в этом случае. Из предыдущих наблюдений логично сделать вывод, что правильный способ суммирования — это рассматривать отдельно сумму положительных и отдельно — сумму отрицательных элементов ряда. После некоторого размышления, это приводит к следующему определению:

Определение 4.18. Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится*, если сходится сумма модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Нам надо обосновать это определение, показав, что абсолютно сходящийся ряд сходится. Ясно, что если сумма модулей ряда комплексных чисел сходится, то сходятся и суммы модулей действительных и мнимых частей элементов ряда. Перейдя к абсолютному суммированию действительных чисел, мы замечаем, что конечны оказываются по отдельности суммы положительных и суммы отрицательных элементов ряда. Обратно, если для ряда действительных чисел суммы положительных элементов и суммы отрицательных элементов конечны, то сумма модулей элементов ряда будет просто суммой модулей этих двух сумм. Более аккуратно, всякую последовательность

(a_n) действительных чисел мы можем представить в виде

$$a_n = a_n^+ + a_n^-,\quad a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2},\quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2},$$

по сути (a_n^+) получается из (a_n) заменой отрицательных чисел на нули, а (a_n^-) — заменой положительных чисел на нули. Абсолютная сходимость $\sum_{n=1}^\infty a_n$ означает сходимость $\sum_{n=1}^\infty a_n^+$ и $\sum_{n=1}^\infty a_n^-$, а линейность суммы ряда показывает, что

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty a_n^+ + \sum_{n=1}^\infty a_n^-.$$

Вдобавок к линейности и монотонности суммы абсолютно сходящихся рядов уже не зависят от перестановки элементов ряда, так как для рядов с действительными элементами отдельно сумма положительных и сумма отрицательных элементов не зависят от перестановок, а для комплексных можно получить то же самое, рассматривая отдельно действительную и мнимую части.

Далее мы будем проводить рассуждения для рядов действительных чисел, имея в виду, что для рядов комплексных чисел достаточно отдельно рассмотреть действительные и мнимые части. Нам понадобится свойство повторного суммирования. Понятие абсолютного суммирования позволяет говорить о суммах любого счётного набора действительных чисел, не обязательно индексированного натуральными числами, так как порядок элементов в сумме не важен.

Лемма 4.19 (Теорема Фубини для рядов). *Пусть сумма $\sum_{n,m=1}^\infty a_{nm}$ (индексированная счётным множеством $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) сходится абсолютно. Тогда*

$$\sum_{n,m=1}^\infty a_{nm} = \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{m=1}^\infty a_{nm}\right).$$

Если все числа a_{nm} неотрицательны то равенство выполняется даже тогда, когда левая и правая часть равны $+\infty$, при этом считаем, что если мы суммируем неотрицательные числа и среди них встретилась $+\infty$, то общая сумма равна $+\infty$.

Доказательство. Из абсолютной сходимости следует, что достаточно рассмотреть сумму неотрицательных элементов. Тогда мы заодно будем доказывать и утверждение теоремы про сумму неотрицательных чисел.

Выражение слева является супремумом конечных сумм некоторых чисел из a_{nm}. Но каждая конечная сумма (для конечного $X\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$)

$$\sum_{(n,m)\in X} a_{nm}$$

разбивается на наборы сумм с разными n (в конечном числе), что даёт оценки снизу на внутренние суммы в правой части

$$\sum_{m=1}^\infty a_{nm} \geqslant \sum_{m:(n,m)\in X} a_{nm},$$

которые в свою очередь суммируются в оценки снизу для полной суммы в правой части

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{m=1}^\infty a_{nm}\right) \geqslant \sum_{(n,m)\in X} a_{nm}.$$

Это доказывает, что правая часть не менее левой.

Обратное неравенство докажем от противного: пусть правая часть больше S, а левая меньше S. Тогда мы найдём N, такое что в правой части можно оставить конечную сумму, так что

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\right) > S$$

и даже

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\right) > S+\delta$$

для некоторого $\delta > 0$. После этого мы можем найти конечное M, такое что для любого $n \leqslant N$

$$\sum_{m=1}^{M} a_{nm} > \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} - \delta/(2N),$$

если сумма справа в этом неравенстве конечна, либо

$$\sum_{m=1}^{M} a_{nm} > S,$$

если правая сумма бесконечна. Складывая такие неравенства, получим

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{M} a_{nm}\right) = \sum_{n\leqslant N,\ m\leqslant M} a_{n,m} > S.$$

А это означает, что левая часть тоже больше S как супремум всех конечных сумм — противоречие. ☐

Теорема 4.20 (Перемножение абсолютно сходящихся рядов)**.** *Если суммы* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *абсолютно сходятся, то*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{s=2}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{s-1} a_n b_{s-n}\right).$$

Доказательство. Напишем по определению суммы и пределу произведения:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{N} |b_m|\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} |a_n b_m| = \sum_{n,m=1}^{\infty} |a_n b_m| < +\infty.$$

Значит в следующем выражении суммирование будет абсолютным

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{N} b_m\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n b_m = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m,$$

а также мы можем суммировать в любом порядке, например сначала выписать члены с $s = n+m = 2$, потом с $s = n+m = 3$ и т.д. Тогда получается запись

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{s=2}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{s-1} a_n b_{s-n}\right),$$

которую мы потом будем использовать для степенных рядов. ☐

В следующих задачах приводятся типичные примеры абсолютно сходящихся рядов.

Задача 4.21 (Геометрическая прогрессия). Докажите, что для $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

[[Запишите частичную сумму в явном виде.]]

Задача 4.22 (Почти геометрическая прогрессия). Докажите, что для $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

[[Можно написать $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^n$ и просуммировать повторно.]]

Теорема 4.23 (Сравнение абсолютно сходящихся рядов)**.** *Если $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$, то из абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Доказательство. Сходимость и абсолютная сходимость ряда не меняется при отбрасывании конечного числа членов в начале ряда (проверьте это по определению). По определению символа O, после отбрасывания конечного числа слагаемых будет выполняться оценка $|a_n| \leqslant C|b_n|$ с некоторой константой C. Следовательно, для рядов с отброшенными начальными членами в пределе получится

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leqslant C \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

□

Задача 4.24 (Признак Коши). Пусть оказалось, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in [0, +\infty],$$

где $a_n \geqslant 0$. Докажите, что при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а при $q < 1$ — сходится.

[[Заметьте, что по определению верхнего предела для любого $Q < q$ неравенство $\sqrt[n]{a_n} > Q$ выполняется бесконечно много раз, и при любом $Q > q$ неравенство $\sqrt[n]{a_n} < Q$ выполняется для всех достаточно больших n.]]

Задача 4.25. Пусть последовательность положительных чисел (a_n) убывает. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty.$$

[[Оцените одно через другое и наоборот, используя очевидное неравенство $a_{2^{k-1}} \geqslant a_n \geqslant a_{2^k}$ при условии $2^{k-1} \leqslant n \leqslant 2^k$.]]

Задача 4.26. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < +\infty \Leftrightarrow s > 1.$$

[[Используйте две предыдущие задачи.]]

Заметим, что для анализа сходимости ряда в предыдущей задаче и некоторых других можно использовать сравнения ряда с интегралом, которое описано в задаче 5.80.

Задача 4.27. * Докажите, что при $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

где произведение берётся по простым числам и бесконечное произведение понимается как предел частичных произведений.

[[В конечном произведении раскройте скобки и перейдите к пределу по количеству скобок.]]

Задача 4.28. * Докажите, что сумма

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

расходится.

[[Возьмите логарифм в предыдущей формуле.]]

4.3. **Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.** Теперь мы изучим последовательности и ряды, состоящие из функций, определённых на одном и том же множестве. Конечно, фиксируя элемент этого множества, мы получаем последовательность или ряд, состоящий уже не из функций, а из чисел. Например, если при каждом фиксированном аргументе последовательность значений сходится к некоторому числу (зависящему от аргумента функции),

$$f_0(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

то мы будем говорить, что имеет место *поточечная сходимость*. Но иногда хочется иметь более сильное свойство сходимости:

Определение 4.29. Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно* на множестве X к функции f_0, если

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f_0(x)| \to 0, \quad n\to\infty.$$

В этом определении множество X может быть произвольной природы. В случае, когда мы захотим говорить о непрерывности функций, мы будем считать X для определённости метрическим пространством.

Определение 4.30. Ряд из функций $u_n : X \to \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

сходится равномерно на множестве X, если последовательность его частичных сумм

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

сходится равномерно на X к некоторой функции $S : X \to \mathbb{R}$.

Мы конечно будем стараться работать с абсолютно сходящимися рядами, но не исключаем в дальнейшем и условной сходимости, как следует из определения.

Работая с последовательностями функций, про которые неясно, к чему они сходятся, полезно иметь критерий равномерной сходимости, не включающий в себя предельную функцию. Как и в случае последовательностей чисел, нужно использовать фундаментальность в некотором смысле:

Теорема 4.31 (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций). *Для последовательности функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ выполняется*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon), \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

тогда и только тогда, когда последовательность равномерно на X сходится к некоторой функции.

Доказательство. В одну сторону доказательство очевидно следует из неравенства

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_0(x)| + |f_m(x) - f_0(x)|,$$

у которого супремум правой части по x стремится к нулю при $n, m \to \infty$.

В обратную сторону, при каждом фиксированном $x \in X$ мы имеем фундаментальную последовательность $(f_n(x))$ и у неё есть предел $f_0(x)$. Теперь в формулировке критерия Коши мы можем фиксировать n и устремить $m \to \infty$, получая таким образом:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon), \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_0(x)| \leqslant \varepsilon,$$

что фактически означает требуемое. □

Для рядов можно переформулировать критерий Коши в виде:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon), \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_n(x) \right| < \varepsilon,$$

и из неё выводится следующее:

Следствие 4.32 (Необходимое условие сходимости функционального ряда). *Для равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X необходимо, чтобы последовательность функций (u_n) стремилась к нулю равномерно на X.*

Доказательство. Поставим в критерий Коши $n + 1 = m$ и получим

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall m > N(\varepsilon), \sup_{x \in X} |u_m(x)| < \varepsilon,$$

что означает равномерную сходимость u_n к нулю. □

Для рядов нам также будет полезен следующий простой признак сходимости:

Теорема 4.33 (Признак Вейерштрасса сходимости рядов). *Если ряд из функций $u_n : X \to \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$,* мажорируется *на множестве X сходящимся рядом из неотрицательных чисел, то есть*

$$\forall x \in X, \forall n, |u_n(x)| \leqslant a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty,$$

то ряд из функций сходится равномерно и абсолютно на X.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши и заметим, что всегда выполняется

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)|\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} a_k,$$

а для ряда из чисел a_n выполняется критерий Коши сходимости ряда с некоторой $N(\varepsilon)$, в котором мы просто можем заменить a_n на $u_n(x)$ и получить верное утверждение. □

Следующая теорема крайне полезна для анализа непрерывности функций, заданных в виде равномерного предела последовательности или в виде суммы равномерно сходящегося ряда:

Теорема 4.34 (Непрерывность равномерного предела непрерывных функций)**.** *Пусть последовательность $f_n : X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на X к функции f_0 и все функции f_n непрерывны. Тогда f_0 тоже непрерывна.*

Доказательство. Возьмём точку $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$. Для любого положительного ε мы можем найти f_n, которая отклоняется от f_0 не более чем на ε на всём X. В некоторой окрестности $U(x_0) \ni x_0$ выполняется

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon,$$

а значит в той же окрестности выполняется

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

что и означает непрерывность по определению. □

Также полезно иметь возможность переставлять местами операцию взятия первообразной и бесконечного суммирования, что нам даст следующая теорема (производную на концах отрезка будем брать одностороннюю):

Теорема 4.35. *Пусть последовательность дифференцируемых функций $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ сходится в точке x_0, а последовательность производных f'_n сходится равномерно на $[a, b]$ к функции g. Тогда (f_n) равномерно сходится к некоторой f и $f' = g$ на всём отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0; \\ f'_n(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Все эти функции непрерывны, и в точке x_0 мы имеем $\varphi_n(x) \to g(x_0)$. Посмотрим на критерий Коши в других точках:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left|\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0}\right| =$$
$$= \left|\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0}\right| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|$$

для некоторого ξ между x_0 и x по теореме о среднем Лагранжа для функции $f_n(x) - f_m(x)$. Следовательно, из выполнения критерия Коши для равномерной сходимости f'_n на всём отрезке следует выполнение критерия Коши для φ_n на всём отрезке с той же $N(\varepsilon)$.

Тогда мы знаем, что $\varphi_n(x) \to \psi(x)$ равномерно на отрезке и ψ непрерывна. Но тогда из ограниченности $|x - x_0|$ последовательность (f_n) будет равномерно на отрезке стремиться к

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\psi(x),$$

откуда также следует тот факт, что $f'(x_0) = \psi(x_0) = g(x_0)$. Перенося точку x_0 в другую точку отрезка и повторяя рассуждения, получаем равенство $f' = g$ в любой точке отрезка. $\square$

Задача 4.36. Проверьте, что если в теореме о дифференцировании последовательности функций отрезок $[a, b]$ заменить на неограниченный промежуток, то сходимость $(f_n(x))$ может и не быть равномерной.

[[Достаточно рассмотреть случай, когда f_n' являются константами.]]

Следствие 4.37. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке отрезка, то на самом деле $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке и выполняется*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Задача 4.38 (Пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции, см. также задачу 3.54). Пусть функция $\varphi(x)$ равна 0 в чётных целых числах, 1 в нечётных целых числах, непрерывна и линейна между целыми числами (её график выглядит как пила). Докажите, что сумма ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} \varphi(4^n x)$$

непрерывна, но нигде не дифференцируема.

[[Непрерывность следует из признака Вейерштрасса и непрерывности равномерного предела. Для анализа дифференцируемости в точке x_0, для $n \in \mathbb{Z}^+$ рассмотрите приближения

$$a_n = m4^{-n} \leqslant x_0 \leqslant (m+1)4^{-n} = b_n$$

и изучите приращение $f(b_n) - f(a_n)$.]]

4.4. **Степенные ряды и ряд Тейлора функции.** В этом разделе мы попробуем усилить разложение по формуле Тейлора до представления функции рядом вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, начнём с определений:

Определение 4.39. Ряд из функций $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ называется *степенным рядом*.

Степенные ряды можно рассматривать с комплексными коэффициентами и подставлять в них комплексные значения z. Поэтому в утверждениях о степенных рядах числа считаем комплексными, если не указано обратное.

Теорема 4.40. *Для всякого степенного ряда существует* радиус сходимости $R \in [0, +\infty]$, *такой что ряд расходится при $|z - z_0| > R$ и равномерно и абсолютно сходится при $|z - z_0| \leqslant r$ при всяком фиксированном $0 < r < R$.*

Доказательство. Положим $z_0 = 0$, это не уменьшает общности. Если имеется сходимость ряда в точке z, то $a_n z^n \to 0$ по необходимому условию сходимости ряда, а значит последовательность $a_n z^n$ ограничена некоторым числом M. Тогда для $r < |z|$ и $|x| \leqslant r$ мы получим оценку

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n \leqslant \frac{r^n}{|z|^n} M.$$

При этом по формуле суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{|z|^n} M = M \frac{1}{1 - \frac{r}{|z|}} < +\infty.$$

Следовательно, имеется равномерная сходимость при $|x| \leqslant r$ по признаку Вейерштрасса. Теперь понятно, что для

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ сходится} \right\}$$

утверждение теоремы о расходимости выполняется по выбору R, а утверждение о сходимости доказано выше. □

Теорема 4.41 (Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости)**.** *Для степенного ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *радиус сходимости можно найти как*

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

считая $\frac{1}{0} = +\infty$ *и* $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Доказательство. Доказательство является некоторой модификацией решения задачи 4.24. Если найденное по формуле R конечно и положительно, то при $|z - z_0| > R$ по определению верхнего предела бесконечно много раз будет выполняться

$$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|z - z_0|} \Rightarrow |a_n|^{1/n} |z - z_0| > 1 \Rightarrow |a_n (z - z_0)^n| > 1,$$

что противоречит необходимому условию сходимости ряда. То же самое будет выполняться для любого z при $R = 0$.

Если же $|z - z_0| < R$, то найдём r, такое что $|z - z_0| < r < R$. Тогда при достаточно больших n по определению верхнего предела будет выполняться

$$|a_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{r} \Rightarrow |a_n|^{1/n} |z - z_0| \leqslant \frac{|z - z_0|}{r} \Rightarrow |a_n (z - z_0)^n| \leqslant \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n,$$

то есть ряд оценивается сходящейся геометрической прогрессией и сходится. □

Задача 4.42 (Формула Даламбера для радиуса сходимости). Докажите, что для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ радиус сходимости можно найти как

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

если предел существует.

[[Сравните сумму ряда из модулей с геометрической прогрессией.]]

Задача 4.43. Приведите пример степенного ряда, который расходится во всякой граничной точке круга сходимости и пример степенного ряда, который сходится равномерно на замыкании круга сходимости.

[[Используйте формулу Коши–Адамара и наблюдение, что $\sqrt[n]{n} \to 1$ при $n \to \infty$.]]

Теорема 4.44. *Радиус сходимости не меняется при взятии поэлементной производной и в степенных рядах можно переставлять суммирование и дифференцирование в пределах области* $|z - z_0| < R$.

Доказательство. Утверждение для действительных рядов следует из общих сведений о дифференцировании функциональных рядов (следствие 4.37). Для комплексных рядов мы можем заметить, что ряды состоят из многочленов, которые имеют производную в комплексном смысле. Теорема 4.35 верна в этом случае, так как в её доказательстве теорема о среднем Лагранжа (равенство) может быть заменена на теорему о среднем для кривых с неравенством $\leqslant |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|$ для некоторого ξ на отрезке между z_0 и z.

В частности, из правил дифференцирования рядов в обоих случаях, радиус сходимости исходного ряда не менее, чем продифференцированного. На самом деле он и не более, так как из сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ следует сходимость $\sum_{n=0}^{\infty} |na_n x^{n-1}|$ при $|x| < |z|$ по признаку Вейерштрасса аналогично доказательству равномерной сходимости степенного ряда. Также равенство радиусов сходимости исходного и продифференцированного рядов модно установить по формуле Коши–Адамара с учётом $n^{1/n} \to 1$ и с учётом того, что по определению радиуса сходимости умножение и деление всего ряда на $z - z_0$ радиус сходимости не меняет. $\square$

Следствие 4.45. *Если $f(z)$ представлена в окрестности z_0 степенным рядом с положительным радиусом сходимости, то*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

это называется ряд Тейлора.

Доказательство. Если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

то очевидно $f(z_0) = a_0$. Равенства $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ получаются почленным дифференцированием ряда и подстановкой $z = z_0$ после дифференцирования. $\square$

Заметим, что из правил дифференцирования степенного ряда следует, что у степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ с радиусом сходимости $R > 0$ есть первообразная

$$F(x) = \mathrm{const} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}$$

с тем же радиусом сходимости. Далее мы увидим, что все элементарные функции представляются степенными рядами в окрестности точек из внутренности своей области определения, а значит имеют первообразные.

Теорема 4.46. *Для всех $x \in \mathbb{R}$*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Доказательство. Это следует из теоремы 4.51, но можно считать эту формулу просто определением экспоненты.

Действительно, при $n \geqslant 2|x|$ следующее слагаемое как минимум в два раза меньше предыдущего и сумма остатка ряда оценивается суммой геометрической прогрессии. Оперируя абсолютно сходящимися рядами, можно получить

$$\exp(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^k y^\ell}{k!\ell!} =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!}\right) = \exp(x)\exp(y).$$

Также из дифференцирования рядов мы получим $\exp(x)' = \exp(x)$. Этими свойствами экспонента определяется однозначно. $\square$

Задача 4.47. Определите косинус и синус через подстановку комплексного числа в экспоненту

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

проверьте их основные свойства исходя из такого определения, выпишите их ряды Тейлора.

Теорема 4.48. *Для* $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Доказательство. Формула для суммы геометрической прогрессии показывает, что

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

с радиусом сходимости 1. Так как $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, мы получаем формулу для логарифма из теоремы о дифференцировании степенных рядов. □

Задача 4.49. * Используя ряды для e^z и $\ln(1+z)$ как определения этих функций, докажите формулу $\ln e^z = z$ для достаточно близких к нулю комплексных z.

[[Сначала напишите

$$(e^z-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{kz} = \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{k^m z^m}{m!},$$

а потом

$$\ln e^z = \sum_{1\leqslant k\leqslant n\leqslant m} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{n} \frac{k^m z^m}{m!} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n\leqslant m} \binom{n-1}{k-1} (-1)^{k+1} \frac{k^{m-1} z^m}{m!},$$

просуммируйте сначала по n, потом по k.]]

Определим *биномиальный коэффициент* для не обязательно целой степени $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Теорема 4.50. *Для* $|x| < 1$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

с радиусом сходимости не менее 1.

Доказательство. По определению мы знаем, что

$$(1+x)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\ln(1+x))^n.$$

Если $|x| \leqslant r < 1$, то мы знаем, что сумма модулей в ряде для $\ln(1+x)$ будет не более $|\ln(1-r)|$ (если все знаки поменять на плюс, так и получится). Это означает, что воспользовавшись возможностью перемножения и повторного суммирования абсолютно сходящихся рядов, мы получим для $(1+x)^\alpha$ выражение в виде некоего ряда с суммой модулей слагаемых не более

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{n!} |\ln(1-r)|^n = e^{|\alpha||\ln(1-r)|} < +\infty.$$

Приведя в этом выражении подобные слагаемые с одной и той же степенью x (на самом деле при каждой степени будет лишь конечное число слагаемых), мы получим степенной ряд, сходящийся при $|x| < 1$. Таким способом трудно узнать его коэффициенты, но их можно узнать из формулы для ряда Тейлора, дифференцируя $(1+x)^\alpha$ несколько раз и подставляя $x = 0$. $\square$

Сформулируем общее достаточное условие сходимости ряда Тейлора к функции, которое однако не работает для логарифма и функции $(1+x)^\alpha$:

Теорема 4.51. *Пусть в ограниченной окрестности $U(x_0) \ni x_0$ функция f действительного аргумента бесконечно дифференцируема и её производные в этой окрестности оцениваются как $|f^{(n)}(x)| \leqslant C^n$. Тогда ряд Тейлора f по степеням $x - x_0$ сходится к f на $U(x_0)$.*

Доказательство. Пусть $U(x_0) \subseteq (x_0 - M, x_0 + M)$. Воспользуемся формой Лагранжа остаточного члена:

$$|r_{n-1}(x)| = \left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\right| \leqslant \frac{(CM)^n}{n!} \to 0.$$

Так как оценка остаточного члена формулы Тейлора равномерно стремится к нулю, то это означает равномерную сходимость соответствующего ряда Тейлора. $\square$

Из этой теоремы следует, что ряды Тейлора для экспоненты, синуса и косинуса имеют бесконечный радиус сходимости и сходятся к своим функциям. Выпишем их явно

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Формула $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ теперь может быть проверена как равенство рядов Тейлора, в которые можно подставлять и комплексную переменную.

Задача 4.52. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ряд Тейлора которой сходится, но не к f.

[[Используйте функцию из задачи 2.79.]]

Следует отметить, что правильный подход к рядам Тейлора связан с понятием аналитичности (голоморфности) функции. На самом деле для сходимости ряда Тейлора функции f в круге $|z - z_0| < R$ на комплексной плоскости достаточно, чтобы эта функция была дифференцируема в этом круге в комплексном смысле, то есть выполнялось бы

$$f(z+t) = f(z) + f'(z)t + o(|t|)$$

для всякого фиксированного z из открытого круга и комплексных $t \to 0$. Для функции, которая аналитически продолжена на круг с центром в z_0 с особенностями, радиус сходимости просто равен расстоянию до ближайшей особенности; это наблюдение очень помогает при нахождении радиуса сходимости степенного ряда без выписывания формул. Более подробно методы комплексного анализа освещаются в разделе 8.

Пока же мы будем называть функцию действительного переменного *аналитической на интервале* (a, b), если для любой точки $x_0 \in (a, b)$ она раскладывается в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)^n$, сходящийся в некоторой окрестности $U(x_0) \ni x_0$.

4.5. **Условная сходимость рядов, признаки Абеля и Дирихле.** Если мы хотим установить формулы с условной сходимостью

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

то нам нужно знать о применимости ряда Тейлора на конце интервала сходимости. Достаточное условие такое:

Теорема 4.53. *Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится (не обязательно абсолютно), то функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

непрерывна на $[0, 1]$.

Доказательство. Положим $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, тогда $R_n \to 0$ и $a_n = R_n - R_{n+1}$. Тогда посмотрим на отрезок ряда для f и сделаем *преобразование Абеля*

$$\sum_{k=n}^{m} (R_k - R_{k+1}) x^k = R_n x^n - R_{m+1} x^m + \sum_{k=n+1}^{m} R_k (x^k - x^{k-1}).$$

Мы можем выбрать такое N, что при $k \geqslant N$ будет $|R_k| < \varepsilon$; взяв также $m \geqslant n \geqslant N$, мы получим

$$\left| R_n x^n - R_{m+1} x^m + \sum_{k=n+1}^{m} R_k (x^k - x^{k-1}) \right| \leqslant \varepsilon x^n + \varepsilon x^m + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{m} |x^k - x^{k-1}| = \\ = \varepsilon (x^n + x^m + x^n - x^m) \leqslant 2\varepsilon.$$

Значит по критерию Коши равномерной сходимости ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[0, 1]$ и его предельная функция непрерывна. □

В духе предыдущей теоремы можно изучать и не обязательно абсолютную сходимость более общих функциональных и числовых последовательностей и рядов.

Задача 4.54 (Признак Абеля равномерной сходимости ряда). Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно по $x \in X$ сходится, а последовательность $(g_n(x))$ монотонна по n и равномерно ограничена, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$$

тоже равномерно сходится. Все функции считаем определёнными на некотором множестве X.

[[Доказательство предыдущей теоремы работает после замены a_n на $f_n(x)$ и x^n на $g_n(x)$. Заметьте, что $\sum_{n=N}^{\infty} |g_n(x) - g_{n+1}(x)| \leqslant 2M$ при условии, что $|g_n(x)| \leqslant M$ и выражение $g_n(x)$ монотонно по n.]]

Теорема 4.55 (Признак Дирихле равномерной сходимости ряда)**.** *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ имеет равномерно ограниченные частичные суммы, а последовательность $(g_n(x))$ монотонна по n и равномерно по $x \in X$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$$

тоже равномерно сходится. Все функции считаем определёнными на X.

Доказательство. Обозначим $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, тогда $f_n(x) = F_n(x) - F_{n-1}(x)$. Равномерная ограниченность означает оценку $|F_n(x)| \leqslant M$, не зависящую от n и x.

Посмотрим на отрезок суммы ряда и сделаем преобразование Абеля

$$\sum_{k=n}^{m}(F_k(x)-F_{k-1}(x))g_k(x)=F_m(x)g_m(x)-F_{n-1}(x)g_n(x)+\sum_{k=n}^{m-1}F_k(x)(g_k(x)-g_{k+1}(x)).$$

С учётом постоянства знака разностей $(g_k(x)-g_{k+1}(x))$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n}^{m-1}|g_k(x)-g_{k+1}(x)|=|g_m(x)-g_n(x)|.$$

и можно оценить модуль интересующего нас выражения как

$$\left|\sum_{k=n}^{m}(F_k(x)-F_{k-1}(x))g_k(x)\right|\leqslant M|g_m(x)|+M|g_n(x)|+M|g_m(x)-g_n(x)|.$$

Из равномерной сходимости $g\to 0$ следует, что при достаточно больших n будет выполняться $|g_n(x)|<\varepsilon$ независимо от $x\in X$, а значит

$$\left|\sum_{k=n}^{m}f_k(x)g_k(x)\right|<2M\varepsilon,$$

что доказывает равномерную сходимость ряда из сумм по критерию Коши. □

Следствие 4.56 (Признак Лейбница равномерной сходимости ряда)**.** *Если $a_n(x)\to 0$ равномерно на X и монотонно по n, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n(x)$ сходится равномерно.*

Обратите внимание, что это следствие устанавливает сходимость сумм

$$\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

которую требуется обосновать перед применением теоремы 4.53 для вычисления значений этих сумм.

Задача 4.57. Докажите, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$$

сходятся при $\alpha>0$ равномерно на любом отрезке $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$, но при $\alpha\in(0,1]$ сходимость будет условной и не равномерной на $(0,2\pi)$.

[[Примените признак Дирихле, посчитав суммы $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ и $\sum_{k=1}^{n}\cos kx$, которые являются мнимой и действительной частью геометрической прогрессии $\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}$. Для доказательства отсутствия абсолютной сходимости оцените $|\sin x|\geqslant\sin^2 x$ и $|\cos x|\geqslant\cos^2 x$. Для доказательства отсутствия равномерной сходимости в окрестности нуля примените критерий Коши равномерной сходимости.]]

Как мы уже обратили внимание, суммирование условно сходящихся рядов ведёт себя менее предсказуемо по сравнению с суммированием абсолютно сходящихся рядов. Более того, суммирование условно сходящихся рядов может быть определено разными способами. Например, пытаясь просуммировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ мы могли бы рассмотреть функциональный ряд

$$S(q)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$$

для $q\in(0,1)$, который имеет больше шансов сойтись абсолютно, а потом перейти к пределу $q\to 1-0$. Теорема 4.53 показывает, что для сходящегося в обычном смысле ряда мы получим тот же результат. Рассмотрим в задачах ещё один вариант, который потом будет применяться в суммировании тригонометрических рядов по Фейеру.

Задача 4.58. Последовательность a_n *сходится в среднем* к числу a, если последовательность

$$\overline{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

сходится к a в обычном смысле. Докажите, что если $a_n \to a$, то $\overline{a}_n \to a$.

[[Сначала рассмотрите сходимость к нулю, в общем случае представьте последовательность как сумму постоянной и бесконечно малой.]]

Задача 4.59. Опишите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, «непрерывные в среднем», то есть такие, для которых сходимость в среднем x_n к x_0 влечёт сходимость в среднем $f(x_n)$ к $f(x_0)$.

[[Обратите внимание, что последовательность (x_n), принимающая только два значения a и b, может сойтись в среднем к любой точке между a и b.]]

Задача 4.60. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с частичными суммами

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

сходится в среднем (или *сходится по Чезаро*) к числу S, если последовательность (S_n) сходится в среднем к S. Найдите, куда в среднем сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx.$$

[[Для вычислений удобно воспользоваться $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и суммировать геометрические прогрессии.]]

4.6. **Приближение кусочно линейными функциями и многочленами.** Достижением математического анализа было понимание того, что существуют функции достаточно общего вида, не заданные явной формулой. К примеру, просто непрерывные функции. Однако для практических нужд и для внутренних нужд математического анализа требуется понимать что, скажем, общие непрерывные функции можно равномерно приблизить какими-то явными функциями, например многочленами.

Мы уже представили некоторые хорошие функции в виде равномерно сходящихся степенных рядов, что означает их равномерное приближение многочленами на отрезке $|x - x_0| \leqslant r < R$. Однако ясно, что суммы степенных рядов являются бесконечно дифференцируемыми функциями и для приближения многочленами функции, которая всего лишь непрерывна, такой подход совершенно не годится и нужно что-то другое.

Начнём с использования равномерной непрерывности и утверждения про непрерывные функции на прямой с *компактным носителем*, то есть равные нулю за пределами некоторого отрезка. Вообще по определению *носитель функции* — это дополнение к объединению всех открытых множеств, на которых функция равна нулю. Иначе говоря, носитель — это замыкание множества точек, в которых функция не равна нулю. Носитель функции всегда замкнут и поэтому для функций на $\mathbb{R}^n$ компактность носителя означает его ограниченность.

Лемма 4.61. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель, а $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность функций*

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к f.

Доказательство. Непрерывная функция с компактным носителем равномерно непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \forall t, (|t| < \delta) \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Иначе эту формулу можно интерпретировать как равномерную сходимость $f(x - t_n)$ к $f(x)$. □

Лемма 4.62. *Функцию $\sqrt{x}$ можно равномерно приблизить многочленами на любом фиксированном отрезке $[0, a]$.*

Доказательство. Заметим, что функции $f_\delta(x) = \sqrt{x + \delta}$ равномерно стремятся к $\sqrt{x}$ на отрезке $[0, a]$ при $\delta \to +0$, это то же свойство равномерной непрерывности из предыдущей леммы. Заменив переменную $x = a - y$, мы сведём вопрос к функции

$$g(y) = \sqrt{a + \delta - y} = \sqrt{a + \delta}\sqrt{1 - \frac{y}{a + \delta}},$$

которая раскладывается в степенной ряд при $|y| \leqslant a + \delta$ (теорема 4.50), причём если $|y| \leqslant a$, то этот степенной ряд сходится равномерно. Значит, $g(y)$ приближается равномерно многочленом на $[0, a]$, а значит и $\sqrt{x}$ тоже. □

Лемма 4.63. *Функцию $|x|$ можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке $[-a, a]$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0, a^2]$ мы приближаем $\sqrt{t}$ многочленом

$$|\sqrt{t} - P(t)| < \varepsilon.$$

Подставим $x = \sqrt{t}$, тогда при $x \in [0, a]$ у нас будет неравенство

$$|x - P(x^2)| < \varepsilon.$$

Его можно продолжить на $[-a, a]$, если мы продолжим x чётным образом как $|x|$, получив

$$\big||x| - P(x^2)\big| < \varepsilon.$$

□

Теорема 4.64. *Всякую кусочно-линейную на отрезке $[a, b]$ функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

Доказательство. Пусть наша функция f в точке x_i имеет скачок производной на Δ. Тогда функция $f(x) - \Delta/2|x - x_i|$ уже не будет иметь скачка производной в x_i. Сделав так несколько раз, мы представим кусочно-линейную на отрезке функцию в виде

$$f(x) = \sum_i c_i|x - x_i| + ax + b.$$

Так как по предыдущей лемме мы каждое слагаемое можем приблизить многочленом равномерно сколь угодно близко и количество слагаемых конечно, то и всю функцию мы можем приблизить многочленом сколь угодно близко. □

Теперь мы умеем приближать многочленами кусочно-линейные функции и, если мы хотим приближать произвольные непрерывные функции, нам осталось показать, как равномерное приближать непрерывные на отрезке функции кусочно-линейными.

Определим функции для положительных δ

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x < -\delta; \\ 1 - |x|/\delta, & |x| \leqslant \delta; \\ 0, & x > \delta. \end{cases}$$

Такая функция кусочно линейная, непрерывная, и её носитель — это отрезок $[-\delta, \delta]$. Такие функции на конечном отрезке мы уже умеем приближать многочленами. Докажем, что линейными комбинациями этих функций (то есть кусочно-линейными функциями) можно приблизить любую непрерывную функцию на отрезке:

Лемма 4.65. *Пусть дана непрерывная функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Последовательность функций*

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f(k/m)\varphi_{1/m}(x - k/m)$$

равномерно стремится к f.

Доказательство. Воспользуемся тождеством для $x \in [0,1]$

$$\sum_{k=0}^{m} \varphi_{1/m}(x - k/m) = 1,$$

это на самом деле частный случай *разбиения единицы*. Для его доказательства достаточно заметить, что сумма кусочно линейна и имеет скачки производной только в точках вида k/m, $k = 0, \dots, m$ причём во всех таких точках её значения равны 1.

Умножим тождество разбиения единицы на $f(x)$ и вычтем из него определение $f_m(x)$:

$$f(x) - f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} (f(x) - f(k/m))\varphi_{1/m}(x - k/m).$$

При фиксированном x, в правой части этого выражения, из определения $\varphi_{1/m}$, будет не более двух ненулевых слагаемых, у которых $|x - k/m| < 1/m$. Тогда правую часть можно оценить через модуль непрерывности как $2\omega_f(1/m)$, что стремится к нулю по свойству равномерной непрерывности f при $m \to \infty$ $\square$

Соответствующее утверждение для функции нескольких переменных оставляем в качестве задачи:

Задача 4.66. Пусть дана непрерывная функция $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность функций

$$f_m(x) = \sum_{0 \leqslant k_1, \dots, k_n \leqslant m} f(k_1/m, \dots, k_n/m)\varphi_{1/m}(x_1 - k_1/m)\varphi_{1/m}(x_2 - k_2/m) \dots \varphi_{1/m}(x_n - k_n/m)$$

равномерно стремится к f.

[[Аналогично предыдущей задаче, сначала заметьте, что для равной единице функции f в правой части тоже получится единица.]]

Суммируя сведения из предыдущих утверждений и задачи, мы получаем следующее утверждение:

Теорема 4.67. *Всякую непрерывную $f : [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

Доказательство. Сначала можно масштабировать параллелепипед $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ в единичный куб, это не влияет на непрерывность и оставляет многочлен многочленом. Потом можно равномерно приблизить непрерывную функцию комбинацией произведений кусочно-линейных функций отдельных переменных, как в задаче 4.66. А потом все эти кусочно-линейные функции одной переменной можно равномерно приблизить многочленами. □

4.7. **Приближение тригонометрическими многочленами и общая теорема Стоуна–Вейерштрасса.** При изучении рядов Фурье нам будет полезно знать следующее утверждение:

Теорема 4.68 (Теорема Вейерштрасса для тригонометрических многочленов)**.** *Всякую непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию f, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, можно сколь угодно близко равномерно приблизить тригонометрическими многочленами вида*

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Доказательство. Заметим, что из тригонометрических формул следует, что произведение тригонометрических многочленов является тригонометрическим многочленом. Отсюда следует, что если мы можем равномерно приближать тригонометрическим многочленом функции f и g, то мы можем равномерно приближать и их произведение fg.

Более того, если мы можем равномерно приближать f, то мы можем равномерно приближать $g(f)$ при любой непрерывной g. Действительно, область значений f на компакте лежит в некотором отрезке $[A, B]$ и нам достаточно приблизить g на этом отрезке многочленом P, тогда $g(f)$ будет приближена $P(f)$.

Из сказанного следует, что мы уже умеем приближать любую функцию вида $g(\cos x)$ с непрерывной g. В частности, мы можем приблизить 2π-периодическую функцию (φ_δ — кусочно-линейная функция с носителем на $[-\delta, \delta]$ из предыдущего раздела)

$$\psi_\delta(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_\delta(x - 2\pi k),$$

так как она нечётна и 2π-периодична, а значит зависит только от $\cos x$ непрерывно (можно в качестве упражнения выписать явную формулу этой зависимости). Далее любую непрерывную 2π-периодическую f мы будем равномерно приближать суммами

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f(2\pi k/m)\psi_{2\pi/m}(x - 2\pi k/m)$$

как в лемме 4.65. □

На самом деле рассуждения из предыдущего доказательство можно обобщить и доказать весьма общую теорему:

Теорема 4.69 (Теорема Стоуна–Вейерштрасса)**.** *Пусть у нас зафиксирован компакт K и дана алгебра непрерывных функций A на этом компакте, которая разделяет точки, то есть для любых $x \neq y \in K$ найдётся $f \in A$, такая что $f(x) \neq f(y)$. Тогда всякую непрерывную на K функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из A.*

Здесь *алгеброй функций* называется множество, содержащее все постоянные функции и замкнутое относительно операций сложения и умножения, очевидно, эти операции сохраняют непрерывность. Свойство *разделения точек* в этом случае означает, что при фиксированной паре точек $x \neq y \in K$ пара значений $(f(x), f(y))$ может быть любой. Под *компактом* в этой теореме подразумевается любое компактное топологическое пространство, однако читатель может считать K компактным метрическим пространством.

Доказательство теоремы Стоуна–Вейерштрасса. Мы будем действовать как в задаче 4.66, пытаясь строить достаточно произвольно мелкое разбиение единицы из функций, которые мы уже умеем приближать. Те функции, которые можно сколь угодно хорошо приблизить элементами A. На самом деле образуют алгебру непрерывных функций B и эта алгебра уже замкнута не только относительно сложения и умножения, но и относительно операции перехода к равномерному пределу, читатель может проверить это в качестве упражнения. Если $f \in B$, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $g(f) \in B$, так как $g(f)$ можно равномерно приближать выражениями $P(f)$, где P — многочлен, и $P(f) \in B$, так как в алгебре можно складывать и умножать.

Заметим, что если $f \in B$, то обрезанная функция

$$f^{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0, & f(x) < 0; \\ f(x), & f(x) \in [0,1]; \\ 1, & f(x) > 1. \end{cases}$$

тоже лежит в B, так как представляется в виде $h(f)$ с непрерывной (и даже кусочно-линейной) h.

Возьмём теперь некоторую точку $x \in K$ и её окрестность $U(x)$. Для всякой $y \notin U(x)$ найдём по свойству разделения точек $f_y \in B$ такую, что $f_y(x) > 1$, а $f_y(y) < 0$. Обрежем её и получим $g_y(x)$, она тождественно равна 1 в некоторой окрестности x и тождественно равна 0 в некоторой окрестности $V(y) \ni y$.

Такие окрестности $V(y)$ покрывают компакт $K \setminus U(x)$, и мы можем оставить из них конечное число покрывающих, обозначим соответствующие функции $g_1, \dots, g_N$. Тогда произведение

$$g(y) = g_1(y) \dots g_N(y)$$

тождественно равно 1 в некоторой окрестности $W(x) \subset U(x)$ и тождественно равно 0 в $K \setminus U(x)$. В остальных местах её значение между 0 и 1.

Итак, мы научились для всякой точки $x \in K$ и её окрестности $U(x) \ni x$ строить функцию $g_x : K \to [0,1]$, которая тождественно равна 1 в некоторой меньшей окрестности $W(x) \ni x$ и равна нулю за пределами $U(x)$.

Для завершения доказательства рассмотрим непрерывную $f : K \to \mathbb{R}$ и положительное ε, для всякой $x \in K$ пусть $U(x)$ — её окрестность, в которой выполняется $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ при $y \in U(x)$ из определения непрерывности. Применим конструкцию для получения функций g_x и окрестностей $W(x) \subset U(x)$. Воспользуемся компактностью K и оставим конечное число точек $x_1, \dots, x_N$, их окрестностей $W_1, \dots, W_N$, покрывающих K, и непрерывных $g_1, \dots, g_N : K \to [0,1]$, отличных от нуля только в соответствующих $U(x_i) = U_i$. Всякая g_i равна единице в своём W_i, следовательно

$$(1 - g_1(x))(1 - g_2(x)) \dots (1 - g_N(x)) = 0$$

при всех $x \in K$. Отсюда следует, что если положить

$$h_1 = g_1, h_2 = g_2(1 - g_1), \dots, h_N = g_N(1 - g_1) \dots (1 - g_{N-1}),$$

то это функции непрерывны, лежат в B, неотрицательны, и в сумме дают 1 в любой точке K. Кроме того, всякая h_i равна нулю за пределами своей U_i. Можно сказать, что мы построили *разбиение единицы, подчинённое покрытию* $\{U(x)\}$.

Положим теперь

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)h_i(x)$$

и оценим разность

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(x))h_i(x).$$

Для всякой $x \in K$ слагаемые разности отличны от нуля лишь при условии $x \in U_i$. По выбору U_i, в этих слагаемых $|f(x_i) - f(x)| < \varepsilon$, а сумма всех h_i всегда равна 1. Следовательно

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$$

для любого $x \in K$. Очевидно, $f_\varepsilon \in B$, то есть мы приближаем f с любой точностью равномерно. ☐

Следствие 4.70. *Если $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то всякая непрерывная функция на X может быть сколь угодно близко равномерно приближена многочленом от n переменных.*

В следующих задачах мы выясним некоторые алгебраические свойства алгебры $C(X)$ непрерывных функций на компактном пространстве X.

Задача 4.71. Докажите, что если непрерывные функции $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ не имеют общих нулей на X, то найдутся $g_1, \dots, g_n \in C(X)$, такие что

$$g_1 f_1 + \dots + g_n f_n = 1.$$

[[Достаточно положить $g_i = f_i/(f_1^2 + \dots + f_n^2)$.]]

Задача 4.72. Для компактного X докажите, что для всякого гомоморфизма алгебр $P : C(X) \to \mathbb{R}$, то есть линейного отображения, совместимого с умножением по формулам $P(fg) = P(f)P(g)$ и $P(1) = 1$, найдётся точка $x \in X$ такая, что для любой $f \in C(X)$ оказывается

$$P(f) = f(x).$$

[[Рассмотрите множество функций $\mathfrak{m} = \{f \in C(X) : P(f) = 0\}$. Выведите из предыдущей задачи, что любой конечный набор $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}$ имеет общий нуль. Заключите из компактности, что все функции из $\mathfrak{m}$ имеют общий нуль $x \in X$, а потом установите действие отображения P на функции, не содержащиеся в $\mathfrak{m}$.]]

Задача 4.73. ** Докажите утверждение предыдущей задачи для необязательно компактного метрического пространства X.

[[Рассматривая лишь ограниченные непрерывные функции, можно описать гомоморфизмы в духе задачи 7.164 (модифицировав понятие ультрафильтра до элемента *компактификации Стоуна–Чеха* топологического пространства). Потом можно выяснить, что расширение гомоморфизма на неограниченные функции возможно только если гомоморфизм соответствует элементу X.]]

Закончим этот раздел упражнением, близким по духу к рассматриваемым здесь вопросам:

Задача 4.74 (Частный случай теоремы Урысона). * Докажите, что для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдётся функция $f : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, которая равна единице на K и равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

[[Посмотрите на функцию расстояния $\mathrm{dist}(x, K)$.]]

Задача 4.75 (Частный случай теоремы Титце). * Докажите, что непрерывную на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ функцию можно продолжить непрерывно на всё $\mathbb{R}^n$ так, что она будет равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

[[Один из вариантов решения: положить $L = \mathbb{R}^n \setminus U_\varepsilon(K)$, $V = \mathbb{R}^n \setminus (K \cup L)$ и продолжить f на L нулём. Потом сделать разбиение единицы $1 = \sum_n \rho_n(x)$ на V так, чтобы диаметр носителя ρ_n был не более его расстояния до $K \cup L$. Потом домножить ρ_n на значение в ближайшей к носителю ρ_n точке $K \cup L$ и сложить результаты. Другой вариант: вывести эту теорему из теоремы Урысона и непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций, таким образом доказав полный вариант теоремы Титце для нормальных топологических пространств.]]

Задача 4.76. * Докажите, что функцию на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, которая является 1-липшицевой ($|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$), можно продолжить на всё $\mathbb{R}^n$ так, что она останется 1-липшицевой.

[[Докажите, что можно продолжить 1-липшицевым образом на ещё одну точку $x \notin X$. Потом продолжайте по одной точке на счётное плотное в $\mathbb{R}^n \setminus X$ подмножество, а на всё $\mathbb{R}^n$ продолжите по непрерывности]]

Задача 4.77 (Теорема Киршбрауна). ** Докажите, что отображение $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, которое является 1-липшицевым ($|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ для любых $x, y \in X$), можно продолжить до $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ так, что оно останется 1-липшицевым.

[[Аналогично, достаточно продолжить на одну точку, но в этой теореме это посложнее.]]

4.8. **Интегрирование непрерывных функций через приближения.** В этом разделе представлен один способ определить интеграл от непрерывных функций. Далее будет дано определение интеграла Римана на отрезке и более общего интеграла Лебега, не зависящие от материала этого раздела, но кажется полезным сначала изучить такой упрощённый способ.

Теорема 4.78. *У всякой непрерывной на отрезке функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ есть первообразная, то есть непрерывная функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, такая что $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a, b)$.*

Доказательство. Можно сдвинуть отрезок так, чтобы $a = 0$. У многочлена $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ есть первообразная

$$P(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

По теореме 4.67 можно найти последовательность многочленов (p_n), равномерно сходящуюся к f на отрезке $[a, b]$. Выберем первообразные, чтобы выполнялось $P_n'(x) = p_n(x)$, также мы будем знать, что $P_n(0) \equiv 0$. По теореме 4.35 последовательность P_n будет равномерно сходиться к некоторой F, и будет выполняться $F'(x) = f(x)$ на интервале (a, b) и даже на концах отрезка для односторонних производных. ☐

Определение 4.79. Определим интеграл непрерывной функции одного аргумента $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ по *формуле Ньютона–Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

где F — любая первообразная f на отрезке.

Определение не зависит от выбора первообразной, так как любые две первообразные F_1 и F_2 будут обладать свойством $F_1' - F_2' = (F_1 - F_2)' = 0$, Откуда по теореме о среднем Лагранжа следует, что $G = F_1 - F_2$ постоянна на отрезке, а значит в формуле Ньютона–Лейбница ничего не поменяется от замены F_1 на F_2.

Лемма 4.80. *Этот интеграл линейный*

$$\int_a^b Af(x) + Bg(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx,$$

монотонный

$$f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

и аддитивный по отрезкам

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Доказательство. Взяв первообразные $F' = f$ и $G' = g$, мы видим, что $AF(x) + BG(x)$ будет первообразной для $Af(x)+Bg(x)$, так что линейность очевидна. Для доказательства монотонности достаточно заметить, что если $h = f - g \geqslant 0$, то

$$\int_a^b h(x)\,dx = H(b) - H(a) = h(\xi)(b-a) \geqslant 0$$

по теореме о среднем Лагранжа. Аддитивность по отрезкам проверяется тривиально:

$$F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a).$$

□

Из линейности и аддитивности по отрезкам следует, что для непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с компактным носителем, то есть отличной от нуля только на некотором отрезке $[a, b]$, можно определить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

и он не зависит от выбора конечного отрезка $[a, b]$, содержащего носитель функции.

Это позволяет сделать определение

Определение 4.81. Для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с компактным носителем (отличной от нуля только на некотором кубе) определим с помощью повторного интегрирования по всем переменным

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n \ldots dx_1.$$

Здесь происходит интегрирование по одной переменной, тогда как другие выступают как параметры. Если носитель f содержится в кубе с ребром D, то из равномерной непрерывности f можно заметить, что самый внутренний интеграл меняется не более чем на $D\omega_f(\delta)$ при изменении параметров на δ, то есть даёт непрерывную функцию параметров с компактным носителем. Это оправдывает возможность продолжать интегрирование по другой переменной и т.д.

Теорема 4.82. *Определение интеграла непрерывной функции нескольких переменных с компактным носителем не зависит от порядка интегрирования, является линейной и монотонной операцией.*

Доказательство. Линейность и монотонность очевидны по индукции, посмотрим на зависимость от порядка интегрирования. Рассмотрим $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и предположим, что она тождественно равна нулю за пределами куба $[-D, D]^n$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \int_{-D}^{D} \cdots \int_{-D}^{D} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n \ldots dx_1.$$

По теореме 4.67 мы можем приблизить f многочленом нескольких переменных с точностью ε, тогда интеграл будет приближен с точностью $(2D)^n\varepsilon$ (здесь используется интегрирование неравенств, то есть монотонность). Значит достаточно доказать независимость от порядка интегрирования для многочленов нескольких переменных. По линейности это достаточно доказать для мономов

$$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}.$$

Нетрудно убедиться, интегрируя только многочлены, что интеграл от такого монома по рассматриваемому кубу в любом порядке равен одному и тому же числу

$$\left(\frac{D^{k_1+1}}{k_1+1}-\frac{(-D)^{k_1+1}}{k_1+1}\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{D^{k_n+1}}{k_n+1}-\frac{(-D)^{k_n+1}}{k_n+1}\right).$$

∎

Определим для функции нескольких переменных *частную производную* как

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f'_{x_i}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_i+t,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{t},$$

то есть как производную по одной переменной при фиксированных остальных.

Следствие 4.83. *Для всякой непрерывной $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ с компактным носителем с непрерывной частной производной $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ будет выполняться*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n=0.$$

Доказательство. Если начать интегрировать по x_i, то по формуле Ньютона–Лейбница сразу получится ноль. ∎

На самом деле лемма 6.92 (формулировка которой на данном этапе изложения может быть не вполне ясна) показывает, что определённое в этом разделе понятие интеграла, исходя из его установленных свойств, обязано совпадать (с точностью до умножения на константу) с любым другим разумным понятием интеграла от непрерывной функции с компактным носителем.

4.9. **Интеграл Римана на отрезке.** В этом разделе мы приведём элементарное описание интеграла Римана на отрезке. Далее оно будет перекрыто определением интеграла Лебега, но уже этот раздел содержит некоторые полезные конструкции, которые работают и в более общей постановке.

Определим *разбиение отрезка* $[a,b]$ как представление его в виде объединения попарно не пересекающихся промежутков

$$[a,b]=\Delta_1\sqcup\Delta_2\sqcup\dots\sqcup\Delta_N.$$

Часто будем писать для обозначения разбиения $\tau=\{\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_N\}$, будем писать

$$\tau\vdash[a,b].$$

Для двух разбиений $\tau,\sigma\vdash[a,b]$ определим их общее *измельчение*

$$\tau\vee\sigma=\{\Delta'\cap\Delta'':\Delta'\in\tau,\Delta''\in\sigma,\Delta'\cap\Delta''\neq\emptyset\}.$$

Будем также говорить, что τ *мельче* σ, $\tau\preccurlyeq\sigma$, если всякий промежуток τ содержится с некотором промежутке σ. Ясно, что

$$\tau\vee\sigma\preccurlyeq\tau,\quad \tau\vee\sigma\preccurlyeq\sigma.$$

Задача 4.84. Докажите, что если τ состоит из n промежутков, а σ — из m промежутков, то в $\tau\vee\sigma$ не более $n+m-1$ промежутка.

Определение 4.85. Для функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $\tau \vdash [a, b]$ определим *суммы Дарбу*

$$s(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \inf_{x \in \Delta} f(x)|\Delta|,$$

$$S(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \sup_{x \in \Delta} f(x)|\Delta|,$$

где $|\Delta|$ обозначает длину промежутка.

Проверим следующие свойства сумм Дарбу:

Лемма 4.86. *Если $\tau \preccurlyeq \sigma$, то*

$$s(f, \tau) \geqslant s(f, \sigma), \quad S(f, \tau) \leqslant S(f, \sigma).$$

Доказательство. Если одно разбиение мельче другого, то его можно получить последовательным разбиением одного промежутка на два, $\Delta = \Delta' \sqcup \Delta''$. Тогда утверждение об изменении суммы Дарбу при такой операции следует из неравенств

$$\inf_{x \in \Delta'} f(x) \geqslant \inf_{x \in \Delta} f(x), \quad \inf_{x \in \Delta''} f(x) \geqslant \inf_{x \in \Delta} f(x),$$

$$\sup_{x \in \Delta'} f(x) \leqslant \sup_{x \in \Delta} f(x), \quad \sup_{x \in \Delta''} f(x) \leqslant \sup_{x \in \Delta} f(x)$$

и очевидного равенства $|\Delta| = |\Delta'| + |\Delta''|$. $\square$

Лемма 4.87. *Для двух разбиений $\tau, \sigma \vdash [a, b]$ имеет место*

$$s(f, \tau) \leqslant S(f, \sigma).$$

Доказательство. Из предыдущей леммы получаем

$$s(f, \tau) \leqslant s(f, \tau \vee \sigma) \leqslant S(f, \tau \vee \sigma) \leqslant S(f, \sigma),$$

где неравенство посередине тривиально следует из определения. $\square$

Определение 4.88. Определим *верхний и нижний интегралы Римана*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf_{\tau \vdash [a,b]} S(f, \tau),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_{\tau \vdash [a,b]} s(f, \tau).$$

По предыдущей лемме

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

и если они оба равны одному числу, то их общее значение называется просто *интеграл Римана*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Анализируя определение можно сказать, что для неограниченной сверху функции верхний интеграл равен $+\infty$. Аналогично для неограниченной снизу функции нижний интеграл равен $-\infty$. Поэтому интегрируемой по Риману может быть только ограниченная на отрезке функция.

Для понимания развиваемого далее понятия интеграла Лебега нам будет полезно переформулировать это определение.

Определение 4.89. Функция $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *(элементарно) ступенчатой*, если для некоторого разбиения $\tau \vdash [a, b]$ она является постоянной со значением $f(\Delta)$ на всяком промежутке $\Delta \in \tau$.

В этом параграфе мы будем называть такие функции просто ступенчатыми, в определении интеграла Лебега будет намного более общее понятие ступенчатых функций, но общие приёмы работы с ними будут похожи.

Определение 4.90. *Интегралом ступенчатой функции* называется

$$\int_a^b h(x)\,dx = \sum_{\Delta\in\tau} f(\Delta)|\Delta|.$$

Теперь можно переписать определение нижнего и верхнего интеграла Римана как

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{h\geqslant f \text{ ступенчатая}} \int_a^b h(x)\,dx,$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{h\leqslant f \text{ ступенчатая}} \int_a^b h(x)\,dx,$$

где неравенство между функциями понимается как выполняющееся в каждой точке. Действительно, например, нижняя сумма Дарбу для фиксированного разбиения τ является ни чем иным, как максимально возможным интегралом от ступенчатой $h \leqslant f$, построенной на разбиении τ, аналогично для верхней суммы Дарбу.

Лемма 4.91 (Монотонность интеграла ступенчатой функции). *Если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ступенчатые и $f \leqslant g$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть f и g являются ступенчатыми на разбиениях τ и σ соответственно. Тогда их можно также считать ступенчатыми на разбиении $\varphi = \tau \vee \sigma$, причём из аддитивности длины промежутка следует, что значение интеграла не изменится, если мы применим определение к измельчению исходного разбиения. А для двух ступенчатых функций на одном и том же разбиении φ утверждение очевидно. $\square$

Из предыдущей леммы также следует корректность определения интеграла ступенчатой функции, то есть независимость от выбора разбиения на ступеньки для одной и той же функции.

Лемма 4.92 (Линейность интеграла ступенчатой функции). *Если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ступенчатые, то $Af + Bg$ тоже ступенчатая и*

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\,\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме, пусть f и g являются ступенчатыми на разбиениях τ и σ. Тогда из можно также считать ступенчатыми на разбиении $\varphi = \tau \vee \sigma$. Для ступенчатых функций на одном и том же разбиении линейность очевидна. $\square$

Задача 4.93. Докажите, что если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ступенчатые, то

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

тоже ступенчатые.

Переходя к пределу в определении интеграла Римана, получаем:

Теорема 4.94 (Монотонность интеграла Римана). *Если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману и $f \leqslant g$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Это следует из определения сумм Дарбу и их монотонности по функции. □

Теорема 4.95 (Линейность интеграла Римана). *Если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману, то $Af + Bg$ тоже интегрируема по Риману и*

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\ dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть мы оценили f и g снизу и сверху ступенчатыми функциями

$$h_f \leqslant f \leqslant H_f, \quad h_g \leqslant g \leqslant H_g,$$

причём по определению интегрируемости можем считать

$$\int_a^b (H_f - h_f)\ dx < \varepsilon, \quad \int_a^b (H_g - h_g)\ dx < \varepsilon.$$

Тогда линейная комбинация тоже оценивается сверху и снизу

$$Ah_f + Bh_g \leqslant Af + Bg \leqslant AH_f + BH_g$$

и

$$\int_a^b ((AH_f + BH_g) - (Ah_f + Bh_g)\ )\,dx \leqslant (|A| + |B|)\varepsilon,$$

что доказывает интегрируемость линейной комбинации. А из линейности интеграла для ступенчатых функций следуют неравенства

$$A\int_a^b h_f\ dx + B\int_a^b h_g\ dx \leqslant \int_a^b (Af + Bg)\ dx \leqslant A\int_a^b Ha_f\ dx + B\int_a^b H_g\ dx.$$

Так как левая и правая часть могут быть сделаны сколь угодно близкими к

$$A\int_a^b f(x)\ dx + B\int_a^b g(x)\ dx,$$

то находящееся посередине в предыдущей формуле выражение обязано быть равным последнему. □

Теорема 4.96. *Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и на отрезке $[b, c]$, то она интегрируема по Риману и на отрезке $[a, c]$.*

Доказательство. Пусть f оценена на отрезке $[a, b]$ снизу и сверху ступенчатыми $g_1 \leqslant f \leqslant h_1$ так что

$$\int_a^b (h_1(x) - g_1(x))\ dx < \varepsilon,$$

а на отрезке $[b, c]$ оценена снизу и сверху ступенчатыми $g_2 \leqslant f \leqslant h_2$ так что

$$\int_b^c (h_2(x) - g_2(x))\ dx < \varepsilon.$$

Тогда из ступенчатых h_1 и h_2 составим ступенчатую $h : [a, c] \to \mathbb{R}$, а из g_1 и g_2 составим ступенчатую $g : [a, c] \to \mathbb{R}$. Тогда на отрезке $[a, c]$ будет иметь место оценка $g \leqslant f \leqslant h$, а непосредственно из определения интеграла ступенчатой функции видно, что

$$\int_a^c (h(x) - g(x))\ dx < 2\varepsilon.$$

□

Теорема 4.97. *Если функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема по Риману на любом отрезке $[c, d] \subseteq [a, b]$.*

Доказательство. По определению интеграла Римана, для любого $\varepsilon > 0$ функция f может быть оценена на $[a, b]$ сверху и снизу ступенчатыми $g \leqslant f \leqslant h$ так, что

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\ dx < \varepsilon.$$

Но тогда на отрезке $[c, d]$ те же ступенчатые функции оценивают f и по определению интеграла ступенчатой функции выполняется

$$\int_c^d (h(x) - g(x))\ dx < \varepsilon.$$

□

Часто бывает полезно рассмотреть *взвешенную сумму колебаний*

$$\Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \omega(f, \Delta)|\Delta|,$$

где $\omega(f, X) = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$ — *колебание функции на множестве X*. Тогда интегрируемость f по Риману, как возможность приблизить функцию снизу и сверху ступенчатыми с произвольно малым интегралом разности, может быть переписана как

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau \vdash [a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

С помощью этого понятия доказывается:

Теорема 4.98. *Если функции $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману, то их модули интегрируемы, а также их произведение интегрируемо.*

Доказательство. Пусть для некоторого $\tau \vdash [a, b]$

$$\Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

Если колебание на промежутке разбиения записать как

$$\omega(f, \Delta) = \sup_{x', x'' \in \Delta} |f(x') - f(x'')|,$$

то из очевидного неравенства $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$ получается

$$\omega(|f|, \Delta) \leqslant \omega(f, \Delta),$$

а во взвешенной сумме по всем промежуткам выходит

$$\Omega(|f|, \tau) \leqslant \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

Это доказывает утверждение про модуль. Далее, пусть f и g ограничены константой M. Если выполняется

$$\Omega(f, \tau) < \varepsilon,\ \Omega(g, \tau) < \varepsilon,$$

то из неравенства $|ab - cd| \leqslant |b| \cdot |a - c| + |c| \cdot |b - d|$ следует

$$\Omega(fg, \tau) \leqslant M\Omega(f, \tau) + M\Omega(g, \tau) \leqslant 2M\varepsilon.$$

□

Нам также будет полезно знать, что при взятии достаточно мелких разбиений суммы Дарбу будут достаточно близки к интегралу Римана. Для этого введём определения.

Определение 4.99. *Мелкостью разбиения* $\tau \vdash [a, b]$ называется

$$|\tau| = \max_{\Delta\in\tau} |\Delta|.$$

Определение 4.100. *Суммой Римана* для функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ разбиения $\tau \vdash [a, b]$ и системы представителей $\{\xi(\Delta) \in \Delta\}_{\Delta\in\tau}$ называется

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{\Delta\in\tau} f(\xi(\Delta))|\Delta|.$$

Ясно, что суммы Дарбу для функции f являются точной нижней и точной верхней гранью сумм Римана $\sigma(f, \tau, \xi)$ при фиксированных f и τ и меняющихся системах представителей ξ.

Теорема 4.101. *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что если $|\tau| < \delta$, то для любой системы представителей*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sigma(f, \tau, \xi)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение для ступенчатых функций. Пусть h ступенчатая, ограниченная числом M и имеющая N разрывов на $[a, b]$. Заметим, что для ступенчатой функции h и любого разбиения τ выполняется

$$\int_a^b h(x)\,dx = \sum_{\Delta\in\tau} \int_\Delta h(x)\,dx,$$

а разность между интегралом и суммой Римана имеет вид

$$\int_a^b h(x)\,dx - \sigma(h, \tau, \xi) = \sum_{\Delta\in\tau} \int_\Delta (h(x) - h(\xi(\Delta)))\,\,dx.$$

Если на промежутке Δ функция h постоянна, то соответствующее слагаемое суммы оказывается равным нулю. Значит количество ненулевых слагаемых в сумме не больше числа разрывов функции h. Если τ имеет мелкость $|\tau| < \delta$, то всякое ненулевое слагаемое в сумме по модулю не более $2M\delta$, как величина не большая $2M$, проинтегрированная по промежутку длиной не более δ. Следовательно, отклонение суммы Римана для h от интеграла Римана h будет не более $2MN\delta$ для любой системы представителей ξ. Так как NM зависит только от функции и не зависит от разбиения, то утверждение для ступенчатой функции доказано.

Пусть теперь f приближена ступенчатой h снизу $h \leqslant f$, и

$$\int_a^b h(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon/2.$$

Тогда при $|\tau| < \frac{\varepsilon}{4M_hN_h}$ в силу монотонной зависимости суммы Римана от функции будем иметь

$$\sigma(f, \tau, \xi) \geqslant \sigma(h, \tau, \xi) > \int_a^b h(x)\,dx - \varepsilon/2 \geqslant \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Аналогично для приближения сверху ступенчатой $H \geqslant f$, интеграл которой отличается от интеграла f не более чем на $\varepsilon/2$, при $|\tau| < \frac{\varepsilon}{4M_H N_H}$ будем иметь

$$\sigma(f,\tau,\xi) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$

□

В предыдущем разделе мы показывали, что формулу Ньютона–Лейбница можно считать определением интеграла непрерывной функции. Теперь же у нас другое определение интеграла и её надо будет доказать.

Теорема 4.102 (Формула Ньютона–Лейбница для интеграла Римана). *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману и имеет первообразную F на интервале (a,b), непрерывную на концах отрезка $[a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение, заданное концами промежутков разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, и запишем по теореме о среднем Лагранжа

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)|\Delta_k|.$$

Но справа стоит некоторая сумма Римана для функции f и данного разбиения, которая будет стремиться к интегралу f при мелкости разбиения, стремящейся к нулю. □

Определение 4.103. Если $b < a$ и функция $f : [b,a] \to \mathbb{R}$ интегрируема, то будем писать

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Ясно (например из рассмотрения сумм Римана и предельного перехода), что при таком определении выполняется *аддитивность интеграла Римана по отрезкам*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx,$$

если f интегрируема на некотором отрезке, содержащем a, b, c.

Теорема 4.104 (Интегрируемость по Риману и существование первообразной у непрерывной функции). *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то она интегрируема по Риману. Кроме того, функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной для f.

Доказательство. Для непрерывной функции легко выписать оценку через модуль непрерывности

$$\Omega(f,\tau) = \sum_{\Delta\in\tau} \omega(f,\Delta)|\Delta| \leqslant \omega_f(|\tau|) \sum_{\Delta\in\tau} |\Delta| = \omega_f(|\tau|)(b-a),$$

что стремится к нулю при $|\tau| \to 0$ по равномерной непрерывности f на отрезке. Таким образом непрерывная функция интегрируема. Далее, можно записать по аддитивности и линейности

$$F(x+u) - F(x) = \int_x^{x+u} f(t)\,dt = f(x)u + \int_x^{x+u} (f(t) - f(x))\,dt.$$

Второе слагаемое можно оценить с использованием $|f(t) - f(x)| \leqslant \omega_f(|u|)$ как

$$\left|\int_x^{x+u} (f(t) - f(x))\;dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+u} \omega_f(|u|)\;dt\right| \leqslant \omega_f(|u|)|u| = o(|u|),$$

в конце мы используем равномерную непрерывность в виде $\omega_f(|u|) \to 0$ при $u \to 0$. Это даёт дифференцируемость функции F и равенство её производной f по определению. $\square$

Теорема 4.105 (Интегрируемость по Риману монотонной функции)**.** *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ монотонна, то она интегрируема.*

Доказательство. Заметим, что монотонная на отрезке функция ограничена (её значениями на концах), а также сумма колебаний функции по промежуткам разбиения не более колебания на всём отрезке:

$$\sum_{\Delta\in\tau} \omega(f, \Delta) \leqslant \omega(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|.$$

Тогда

$$\Omega(f, \tau) = \sum_{\Delta\in\tau} \omega(f, \Delta)|\Delta| \leqslant |\tau| \sum_{\Delta\in\tau} \omega(f, \Delta) \leqslant |\tau||f(b) - f(a)|,$$

что стремится к нулю при $|\tau| \to +0$. $\square$

Задача 4.106 (Функция Дирихле). Докажите, что функция, принимающая значение 1 на рациональных числах и 0 на иррациональных, не интегрируема по Риману ни на одном отрезке.

[[Заметьте, что её колебание но промежутке положительной длины равно 1.]]

Задача 4.107. Пусть последовательность интегрируемых по Риману функций $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ сходится равномерно к функции f_0. Докажите, что f_0 интегрируема и

$$\int_a^b f_0(x)\;dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\;dx.$$

[[Используйте, что f_n равномерно приближает f_0 и само может быть приближено снизу и сверху ступенчатыми функциями с небольшой разностью между их интегралами.]]

Задача 4.108. Докажите, что предыдущее утверждение не верно для поточечной сходимости функций, даже если все эти функции равномерно ограничены.

[[Можно использовать функцию Дирихле.]]

Задача 4.109. Докажите, что если функция ограничена на $[a, b]$ и интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ при любых $a < \alpha \leqslant \beta < b$, то она интегрируема и на $[a, b]$.

[[Дополните разбиение $[\alpha, \beta]$ до разбиения $[a, b]$ и оцените добавку к взвешенной сумме колебаний.]]

4.10. **Приёмы интегрирования.** Взяв за определение интеграла непрерывной функции формулу Ньютона–Лейбница, мы можем сформулировать основные приёмы интегрирования:

Теорема 4.110 (Интегрирование по частям)**.** *Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), а их производные интегрируемы по Риману на $[a, b]$ (неважно как определённые на концах), то*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\;dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\;dx,$$

где $F(x)|_a^b$ обозначает $F(b) - F(a)$.

Доказательство. Функция $F(x) = f(x)g(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ и дифференцируемой на (a, b). Её производная

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

является интегрируемой по интегрируемости произведения, поэтому остаётся применить формулу Ньютона–Лейбница к F. $\square$

Теорема 4.111 (Замена переменной в интеграле)**.** *Пусть функция $\varphi : [a, b] \to [\varphi(a), \varphi(b)]$ непрерывно дифференцируема, а f непрерывна на $[\varphi(a), \varphi(b)]$ и имеет на том же отрезке первообразную F. Тогда*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx.$$

Доказательство. Функция $G(x) = F(\varphi(x))$ является первообразной для непрерывной функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ и достаточно применить к ней формулу Ньютона–Лейбница. $\square$

На самом деле предыдущая теорема верна без предположения непрерывности f, достаточно лишь её интегрируемости. В качестве упражнения читатель может доказать усиленный вариант самостоятельно. Мы не будем такой вариант обсуждать, потому что после развития понимания интеграла Лебега и приближения функций в среднем непрерывными становится ясно, что доказывать теорему о замене переменных в интеграле для непрерывных функций вполне достаточно, а потом останется воспользоваться тем, что отображение φ искажает меру (длины отрезков) не более чем в константу раз. Аналогичные соображения будут применяться и в разделе 6.13 при замене переменных в интеграле функции нескольких переменных.

Докажем также полезный вариант формулы Тейлора:

Теорема 4.112 (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме)**.** *Если f имеет n производных в окрестности $U \ni x_0$ и n-я производная интегрируема по Риману, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1}\, dt.$$

Доказательство. Заметим, что для $n = 1$ это формула Ньютона–Лейбница:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt.$$

Далее будем интегрировать остаточный член по частям:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{n-1)!}(x - t)^{n-1}\, dt = -\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} d\frac{(x-t)^n}{n} =$$
$$= -\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{n!} d(x - t)^n = -\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n\, dt =$$
$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n\, dt,$$

что и означает возможность сделать шаг индукции. $\square$

Задача 4.113. Докажите, что число e иррационально.

[[Предположите $e = p/q$ и умножьте на $q!$ формулу

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

]]

Задача 4.114. Докажите, что число π иррационально.

[[Предположите $\pi = p/q$ и рассмотрите последовательность

$$a_n = \int_0^\pi \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \sin x \, dx.$$

Она очевидно не равна нулю, но стремится к нулю. Заметьте, что выражение $\frac{x^n(p-qx)^n}{n!}$ не меняется при замене $x \mapsto \pi - x$, его производные до $(n-1)$-го порядка на концах отрезка равны нулю, а производные порядка n и более на концах отрезка являются целыми числами. Используя эти свойства, установите интегрированием по частям, что a_n является целым числом.]]

Задача 4.115. * Существует ли бесконечно дифференцируемая функция на отрезке $[0,1]$, у которой все производные на отрезке $[0,1]$ неотрицательные, любая производная в нуле и значение функции в нуле равны нулю, и $f(1) = 1$?

[[Сравните формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для $f(1)$ и $f(a)$ при фиксированном $a < 1$ и стремящихся с бесконечности n.]]

5. Мера и интеграл Лебега

5.1. **Элементарные множества и мера Жордана.** Мера Лебега допускает много разнообразных определений. Мы будем следовать учебнику Никольского и будем определять меру Лебега через более простое понятие — меру Жордана.

Назовём *параллелепипедом* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ произведение ограниченных промежутков $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ (которые могут быть точками), наши параллелепипеды всегда будут «параллельны координатным осям» и мера будет определена с использованием выделенной системы координат, хотя и заведомо инвариантна относительно сдвигов координат. Поведение меры при линейных заменах координат будет установлено в теореме 5.87.

Мера параллелепипеда (открытого, замкнутого или промежуточного между ними) определяется как произведение длин его проекций на координатные оси. Если параллелепипед явно имеет вид

$$P = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

или

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

или что-то между ними, то мера будет равна $mP = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$.

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ назовём *элементарным*, если оно является объединением конечного числа попарно не пересекающихся параллелепипедов. Для произвольного элементарного множества мера mS определяется как сумма мер в его разбиении на параллелепипеды. Чтобы проверить корректность определения, для двух разбиений $S = \bigcup P'_i$ и $S = \bigcup_j P''_j$ сделаем их общее измельчение как разбиение на параллелепипеды $P'_i \cap P''_j$ (которые не пустые), тогда проверка корректности сведётся к проверке того, что при измельчении разбиения на параллелепипеды сумма мер параллелепипедов не меняется. Последнее утверждение достаточно проверить для одного параллелепипеда — если он разбит на меньшие параллелепипеды, то сумма мер меньших будет равна мере исходного, это простейший случай *аддитивности меры*.

Аддитивность для одного параллелепипеда относительно разбиения $P = P_1 \cup \dots \cup P_N$ можно проверять так. Сделаем все параллелепипеды замкнутыми, тогда они могут пересекаться, но только по границам, такая ситуация будет называться *попарно не перекрываются*. Если параллелепипед разрезан на два перпендикулярно одной из координат, то есть разрезан гиперплоскостью $\{x_i = c\}$ на части $\{x_i < c\}$ и $\{x_i > c\}$, то аддитивность объёма следует из дистрибутивности умножения

$$\begin{multline*}(b_1 - a_1) \dots (b_i - a_i) \dots (b_n - a_n) = \\ = (b_1 - a_1) \dots (b_i - c) \dots (b_n - a_n) + (b_1 - a_1) \dots (c - a_i) \dots (b_n - a_n).\end{multline*}$$

В общем случае для разбиения $P = P_1 \cup \dots \cup P_N$, найдём некоторую координату x_i и число c, так что гиперплоскость $H = \{x_i = c\}$ имеет один из P_k (нестрого) с одной стороны от себя, и ещё один P_ℓ (нестрого) с другой стороны от себя. Покажем, что такую гиперплоскость действительно можно найти. Если для x_i такого c нет, то это означает наличие такого значения d_i, что оно лежит строго внутри всех проекций P_j на ось x_i (проверьте это!); повторяя это для всех координат находим точку $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, которая лежит строго внутри всех P_j, что противоречит требованию отсутствия перекрытий между P_j.

Итак, мы можем найти гиперплоскость $H = \{x_i = c\}$ и порежем P и каждый P_j гиперплоскостью H на две части, тогда P разобьётся на две части $P = P' \cup P''$, и каждый P_j тоже может быть разобьётся на две части $P_j = P'_j \cup P''_j$, одна из которых может быть пустой. Если H пересекает P_j по границе, но не по внутренности, то будем считать, что от P_j осталась только одна часть при разрезании. Из условия выбора гиперплоскости

H в обоих разбиениях

$$P' = P'_1 \cup \dots \cup P'_N, \quad P'' = P''_1 \cup \dots \cup P''_N$$

в правой части хотя бы один параллелепипед $P'_{j'}$ и $P''_{j''}$ пуст. Значит на самом деле в каждом из этих разбиений строго меньше N частей, так что мы можем применить индукцию по N и заключить, что

$$mP' = mP'_1 + \dots + mP'_N, \quad mP'' = mP''_1 + \dots + mP''_N,$$

а потом воспользоваться уже установленным случаем разрезания гиперплоскостью и сделать вывод, что

$$mP = mP' + mP'' = \sum_{j=1}^{N} mP'_j + mP''_j = \sum_{k=1}^{N} mP_j.$$

Из предыдущего наблюдения про инвариантность меры относительно измельчений следует, что для всяких двух элементарных множеств S и T множества $S \cap T$ и $S \cup T$ тоже элементарны и выполняется *аддитивность меры*:

$$mS + mT = m(S \cup T) + m(S \cap T),$$

для доказательства достаточно всю картину разрезать на маленькие параллелепипеды так, чтобы S, T, а следовательно $S \cap T$ и $S \cup T$, были объединениями некоторых наборов маленьких параллелепипедов. Также ясно, что множество $S \setminus T$ всегда является элементарным при элементарных S и T.

Разобравшись с мерой элементарных множеств и её аддитивностью, мы переходим к определению меры Жордана произвольного множества с помощью приближения его элементарными.

Определение 5.1. *Нижняя мера Жордана* X — это точная верхняя грань объёма элементарного множества $s \subseteq X$; *верхняя мера Жордана* X — это точная нижняя грань объёма элементарного множества $S \supseteq X$.

Если верхняя мера Жордана равна нижней мере Жордана X, то будем говорить, что они равны мере Жордана X и X *измеримо по Жордану*. Очевидно по определению, что измеримое по Жордану множество ограничено, иначе бы оно не поместилось ни в какое элементарное множество.

Задача 5.2 (Критерий измеримости множества по Жордану). Докажите, что множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда оно ограничено и мера Жордана границы ∂X равна нулю.

[[Поместите X в большой параллелепипед P. Имея элементарные $s \subseteq X \subseteq S$, разбейте P на маленькие параллелепипеды так, чтобы s, S и $S \setminus s$ были составлены из некоторых маленьких параллелепипедов разбиения и получите покрытие границы набором маленьких параллелепипедов, являющихся замыканиями параллелепипедов, составляющих $S \setminus s$. Имея элементарное $\sigma \supseteq \partial X$, разбейте весь P на маленькие параллелепипеды так, чтобы σ было составлено из некоторых маленьких параллелепипедов разбиения, соберите соответствующие s и S из маленьких параллелепипедов этого разбиения, которые полностью содержатся в X или которые составляют σ.]]

Задача 5.3. Докажите, что если $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану, то измеримы $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ и выполняется

$$mX + mY = m(X \cup Y) + m(X \cap Y).$$

[[Если приблизить элементарными $s \subseteq X \subseteq S$ и $t \subseteq Y \subseteq T$ так что

$$mS - ms < \varepsilon, \quad mT - mt < \varepsilon,$$

то $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ тоже можно будет очевидным образом приблизить снизу и сверху элементарными с точностью не более 2ε. Сравните с аналогичным утверждением для меры Лебега, теоремой 5.17.]]

Задача 5.4. Докажите, что если $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану и $X \subseteq Y$, то

$$mX \leqslant mY.$$

[[Докажите это для нижней меры Жордана по определению.]]

Задача 5.5. Докажите, что если элементарное S покрыто счётным семейством элементарных $\{\Sigma_k\}$, то

$$mS \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\Sigma_k.$$

[[Поместите каждое Σ_k в открытое элементарное Σ_k', так что $m\Sigma_k' - m\Sigma_k < \varepsilon 2^{-k}$. Поместите в S компактное элементарное S', так что $mS - mS' < \varepsilon$ и воспользуйтесь его компактностью.]]

5.2. **Мера Лебега открытых и компактных множеств.** Теперь, имея понятие о мере Жордана, начнём с частичного определения меры Лебега:

Определение 5.6. Мера Лебега открытого множества в $\mathbb{R}^n$ — это его нижняя мера Жордана. Мера Лебега компактного множества в $\mathbb{R}^n$ — это его верхняя мера Жордана.

Меру Лебега мы будем обозначать буквой μ, а меру Жордана — буквой m. Так как самым важным для нас свойством меры Лебега будем счётная аддитивность, то мы докажем вначале *счётную субаддитивность* меры Лебега открытых множеств:

Лемма 5.7. *Для счётного семейства открытых множеств U_i*

$$\mu \bigcup_i U_i \leqslant \sum_i \mu U_i.$$

Доказательство. Предположим противное, это означает по определению, что в $\bigcup_i U_i$ влезает элементарное множество S меры большей, чем $\sum_i \mu U_i$. Немного уменьшив параллелепипеды, составляющие S, мы сможем сделать их все компактными и считать, что множество S компактно и его мера всё ещё больше $\sum_i \mu U_i$. Тогда из компактности следует, что оно покрывается конечным числом U_i, к примеру $1 \leqslant i \leqslant N$, и всё ещё выполняется

$$mS > \sum_{i=1}^{N} \mu U_i.$$

Разрежем S мелкой сеткой из гиперплоскостей типа $\{x_i = c\}$ на маленькие кубики. Покажем, что если мелкость достаточно мала, то каждый кубик лежит полностью в каком-то одном U_i (см. также задачу 3.26). Действительно, если это не так, то у нас будет последовательность уменьшающихся кубиков, ни какой из которых не лежит в одном множестве покрытия. У этой последовательности есть предельная точка $x \in S$. Она покрыта одним из U_i вместе с некоторой своей окрестностью, ей же будут покрыты достаточно маленькие кубики из нашей последовательности — противоречие.

Теперь, если мелкость достаточно мала, то из маленьких кубиков мы соберём попарно не перекрывающиеся элементарные множества $S_i \subset U_i$, такие что

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_N \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{N} mS_i = mS$$

из аддитивности меры элементарных множеств. Тогда по определению меры Лебега U_i

$$\sum_{i=1}^N \mu U_i \geqslant \sum_{i=1}^N mS_i = mS,$$

что противоречит предположению противного и доказывает лемму. □

Супераддитивность меры Лебега компактных множеств нам понадобится в таком виде:

Лемма 5.8. *Для попарно непересекающихся компактных* $F_1, \dots, F_N \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^N F_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^N \mu F_i.$$

Доказательство. Минимальное расстояние между парами F_i и F_j положительно, пусть оно равно δ. Рассмотрев разбиение пространства на кубики диаметра менее $\delta/2$ каждый, мы заметим, что каждый маленький кубик пересекает не более одного множества F_i. Тогда из маленьких кубиков можно сформировать попарно непересекающиеся элементарные $S_i \supseteq F_i$. Если нам удалось поместить объединение $\bigcup_{i=1}^N F_i$ в элементарное T, такое что

$$mT < \sum_{i=1}^N \mu F_i,$$

то множества $T_i = T \cap S_i \supseteq F_i$ будут элементарными, попарно не пересекающимися и лежащими в T. Тогда

$$mT \geqslant \sum_{i=1}^N mT_i \geqslant \sum_{i=1}^N mF_i,$$

противоречие. □

Следующая лемма устанавливает согласованность понятий меры Лебега открытого и компактного множества.

Лемма 5.9. *Если компактное F содержится в открытом U, то $U \setminus F$ открыто и*

$$\mu(U \setminus F) = \mu U - \mu F.$$

Доказательство. Во-первых, установим частный случай *монотонности меры*, $\mu U \geqslant \mu F$. Так как расстояние от F до замкнутого $\mathbb{R}^n \setminus U$ равно некоторому $\delta > 0$, то разбивая пространство на маленькие параллелепипеды диаметра не более $\delta/2$ и выбирая из них только пересекающиеся с F, мы соберём элементарное $s \supseteq F$, которое к тому же содержится внутри U. Это доказывает монотонность по определению мер Лебега U и F.

По определению мер F и U мы можем сколь угодно близко по мере приблизить F сверху некоторым s', а U снизу некоторым S'. Взяв s из предыдущего абзаца и рассмотрев множества $s'' = s \cap s'$ и $S'' = s \cup S'$, мы увидим, что они будут приближать F сверху и U снизу по мере не хуже исходных и будет выполняться $s'' \subseteq S''$. Из равенства $mS'' \setminus s'' = mS'' - ms''$ получим в пределе, когда $ms'' \to \mu F$ и $mS'' \to \mu U$, неравенство

$$\mu(U \setminus F) \geqslant \sup m(S'' \setminus s'') \geqslant \mu U - \mu F,$$

так как мера открытого множества $U \setminus F$ по определению не менее супремума мер содержащихся в нём элементарных $S'' \setminus s''$.

Если же оказалось $\mu(U \setminus F) > \mu U - \mu F$, то по определению меры открытого $U \setminus F$ найдётся элементарное $\sigma \subset U \setminus F$ с мерой большей, чем $\mu U - \mu F$. Немного уменьшив параллелепипеды, составляющие σ, можно считать его также компактным. Тогда мера компактного несвязного объединения $\sigma \cup F \subset U$ по супераддитивности на компактных множествах оказывается больше μU, что противоречит уже установленной монотонности меры для включения компакта $\sigma \cup F$ в открытое множество U. $\square$

5.3. **Мера Лебега произвольных множеств.**

Определение 5.10. Определим верхнюю меру Лебега произвольного $X \subset \mathbb{R}^n$ как

$$\overline{\mu} X = \inf\{\mu U : U \supseteq X, \quad U \text{ открыто}\}.$$

Определим нижнюю меру Лебега произвольного $X \subset \mathbb{R}^n$ как

$$\underline{\mu} X = \sup\{\mu F : F \subseteq X, \quad F \text{ компактно}\}.$$

Если обе величины конечны и равны друг другу, назовём X *измеримым с конечной мерой*.

Нетрудно доказать, что верхняя мера Лебега не менее нижней меры Лебега для любого множества. Также по определению верхняя и нижняя меры монотонны: Если $X \subseteq Y$, то $\overline{\mu} X \leqslant \overline{\mu} Y$ и $\underline{\mu} X \leqslant \underline{\mu} Y$.

Случай, когда множество измеримо и мера Лебега бесконечна, надо описать аккуратнее:

Определение 5.11. Назовём $X \subset \mathbb{R}^n$ *измеримым по Лебегу*, если его пересечение с любым параллелепипедом $P \subset \mathbb{R}^n$ измеримо с конечной мерой.

Если в условиях предыдущего определения $\underline{\mu} X = +\infty$, то будем считать, что $\mu X = +\infty$, то есть множество X измеримо с бесконечной мерой. Следующие две леммы проясняют связь определения измеримости с определением конечной меры Лебега.

Лемма 5.12. *Множество конечной меры Лебега измеримо в смысле определения 5.11.*

Доказательство. Если X имеет конечную меру Лебега, то его можно заключить между компактным и открытым множеством $F \subseteq X \subseteq U$ так, что $\mu U - \mu F \leqslant \varepsilon$. По лемме 5.9

$$\mu(U \setminus F) = \mu U - \mu F \leqslant \varepsilon.$$

Параллелепипед P в свою очередь можно приблизить замкнутым и открытым параллелепипедом, $G \subseteq P \subseteq V$ так, что $\mu(V \setminus G) < \varepsilon$ мы получим включения

$$G \cap F \subseteq X \cap P \subseteq U \cap V,$$

причём по лемме 5.9 и субаддитивности меры Лебега на открытых множествах

$$\mu(U \cap V) - \mu(G \cap F) = \mu(U \cap V) \setminus (G \cap F) \leqslant \mu(U \setminus F) + \mu(V \setminus G) \leqslant 2\varepsilon.$$

$\square$

Лемма 5.13. *Измеримое в смысле определения 5.11 множество с конечной нижней мерой Лебега имеет равную ей верхнюю меру Лебега.*

Доказательство. Разобьём пространство $\mathbb{R}^n$ на параллелепипеды вида $P = [k_1, k_1 + 1) \times \dots \times [k_n, k_n + 1)$, по определению 5.11 всякое $X \cap P$ измеримо. Занумеруем параллелепипеды как (P_m).

Приблизим всякое $X \cap P_m$ компактным и открытым,

$$F_m \subset X \cap P_m \subset U_m$$

так чтобы $\mu U_m - \mu F_m < \varepsilon/2^m$. Тогда X приближается сверху открытым $U = \bigcup_m U_m$ и по счётной субаддитивности меры Лебега открытых множеств

$$\mu U \leqslant \sum_m \mu(X \cap P_m) + \varepsilon.$$

Кроме того, сумма $\sum_m \mu F_m$ конечна (иначе X имело бы бесконечную нижнюю меру Лебега) и при достаточно большом N

$$\sum_{m=1}^{N} \mu F_m \geqslant \sum_m \mu F_m - \varepsilon \geqslant \sum_m \mu(X \cap P_m) - 2\varepsilon,$$

в частности сумма $\sum_m \mu(X \cap P_m)$ конечна. Положив $F = \bigcup_{m=1}^N F_m$, по супераддитивности меры Лебега компактных множеств получаем

$$\mu F \geqslant \sum_m \mu(X \cap P_m) - 2\varepsilon.$$

Значит X хорошо в смысле меры Лебега приближается снизу компактным F и сверху открытым U. □

Предыдущее рассуждение даёт частный случай счётной аддитивности меры Лебега, которая более подробно будет обсуждаться в следующем разделе. Докажем ещё одну теорему, которая может считаться альтернативным определением множества с конечной мерой Лебега.

Теорема 5.14. *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу с конечной мерой тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся элементарное $S \subset \mathbb{R}^n$, такое что*

$$\overline{\mu}(S \setminus X) + \overline{\mu}(X \setminus S) < \varepsilon.$$

Доказательство. Если X измеримо с конечной мерой, то найдутся компактное $F \subseteq X$ и открытое $U \supseteq X$, такие что

$$\mu U - \mu F = \mu U \setminus F < \varepsilon,$$

а так как $X \setminus F \subseteq U \setminus F$, то

$$\overline{\mu}(X \setminus F) < \varepsilon.$$

Для компактного F по определению его меры найдётся элементарное $S \supseteq F$, такое что $\mu S - \mu F < \varepsilon$. Так как S можно считать открытым с сохранением этого неравенства, то получается, что

$$\mu(S \setminus F) < \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(S \setminus F) < \varepsilon.$$

Тогда по очевидной из определения монотонности верхней меры Лебега

$$\overline{\mu}(S \setminus X) + \overline{\mu}(X \setminus S) \leqslant \overline{\mu}(S \setminus F) + \overline{\mu}(X \setminus F) < 2\varepsilon.$$

Докажем утверждение в обратную сторону. Если

$$\overline{\mu}(S \setminus X) + \overline{\mu}(X \setminus S) < \varepsilon.$$

то возьмём по определению верхней меры Лебега открытые

$$V \supseteq S \setminus X,\ W \supseteq X \setminus S,\ Y \supseteq \partial S$$

с мерами не более 2ε каждое. Положим теперь

$$F = S \setminus (V \cup Y),\ U = S \cup W \cup Y,$$

первое будет компактным, второе будет открытым. Тогда выполняются включения

$$F \subseteq X \subseteq U, \quad U \setminus F \subseteq W \cup V \cup Y.$$

Тогда по лемме 5.9 и субаддитивности меры открытых множеств

$$\mu U - \mu F = \mu(U \setminus F) \leqslant \mu V + \mu W + \mu Y \leqslant 6\varepsilon,$$

что означает измеримость X с конечной мерой Лебега. □

Приведённые выше определения меры Лебега не являются единственно возможными, следующие упражнения намечают альтернативные варианты:

Задача 5.15. Докажите, что с помощью теоремы 4.82 можно определить меру Лебега открытого $U \subset \mathbb{R}^n$ как

$$\mu U = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} f\ dx_1 \dots dx_n : \text{по непрерывным} f : \mathbb{R}^n \to [0,1] \text{ с носителем в } U\right\}.$$

Докажите, что эта величина счётно субаддитивна на открытых множествах, то есть

$$\mu \bigcup_n U_n \leqslant \sum_n \mu U_n.$$

[[Используйте компактность носителя, сведя счётную аддитивность к конечной.]]

Задача 5.16. Докажите, что определение из предыдущей задачи эквивалентно определению меры Лебега открытого U как нижней меры Жордана.

[[Используйте непрерывные функции, которые равны единице на данном компакте и равны нулю за пределами его ε-окрестности.]]

5.4. **Аддитивность и счётная аддитивность меры Лебега.** Покажем, что мера Лебега хорошо себя ведёт по отношению к теоретико-множественным операциям:

Теорема 5.17. *Если множества $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу, то измеримы и $X \cup Y$, $X \cap Y$ и $X \setminus Y$.*

Доказательство. Пересекая всё с параллелепипедом, сведём вопрос к ограниченным множествам с конечной мерой Лебега. Приблизим наши множества компактными снизу и открытыми сверху:

$$F \subseteq X \subseteq U,\ G \subseteq Y \subseteq V.$$

По лемме 5.9, мы можем считать, что

$$\mu U - \mu F = \mu(U \setminus F) < \varepsilon, \quad \mu V - \mu G = \mu(V \setminus G) < \varepsilon.$$

Из этого и из субаддитивности меры Лебега открытых множеств следует, что в приближениях

$$F \cup G \subseteq X \cup Y \subseteq U \cup V,$$
$$F \cap G \subseteq X \cap Y \subseteq U \cap V,$$
$$F \setminus V \subseteq X \setminus Y \subseteq U \setminus G$$

разница между верхним открытым и нижним компактным приближением по мере не более 2ε, так как выполняются включения

$$\begin{aligned}(U \cup V) \setminus (F \cup G) &\subseteq (U \setminus F) \cup (V \setminus G),\\ (U \cap V) \setminus (F \cap G) &\subseteq (U \setminus F) \cup (V \setminus G),\\ (U \setminus G) \setminus (F \setminus V) &\subseteq (U \setminus F) \cup (V \setminus G).\end{aligned}$$

□

Конечно, нам нужны будут формулы типа $\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu X + \mu Y$, помимо измеримости. На самом деле они следуют из гораздо более сильного свойства:

Теорема 5.18 (Счётная аддитивность меры Лебега)**.** *Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ представлено как счётное объединение попарно непересекающихся измеримых множеств,*

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Тогда X измеримо и

$$\mu X = \sum_{i=1}^{\infty} \mu X_i.$$

Доказательство. Предположим для начала, что сумма справа конечна. Поместим X_i в открытое U_i так, чтобы $\mu U_i \leqslant \mu X_i + 2^{-i}\varepsilon$. Тогда X будет содержаться в объединении $\bigcup U_i$, мера которого по свойству субаддитивности будет не более

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu X_i + \varepsilon.$$

Это доказывает, что верхняя мера Лебега X не более суммы мер.

Для оценки нижней меры оставим конечно число X_i так, чтобы выполнялось

$$\sum_{i=1}^{N} \mu X_i \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu X_i - \varepsilon.$$

Выберем последовательность компактов $F_i \subseteq X_i$, при $i = 1, \dots, N$, так что

$$\mu F_i \geqslant \mu X_i - \frac{\varepsilon}{N}, \quad i = 1, \dots N.$$

Их объединение будет компактом $F \subseteq X$, мера которого по супераддитивности не менее

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu X_i - 2\varepsilon.$$

Значит и нижняя, и верхняя меры Лебега X совпадают с суммой мер.

Если теперь сумма справа бесконечна, то выберем компактные $F_i \subseteq X_i$ так что $\mu F_i \geqslant \mu X_i - 2^{-i}$. Тогда по супераддитивности меры объединения компактов меры $\bigcup_{i=1}^{N} F_i$ будут неограниченно расти с ростом N, доказывая что $\underline{\mu} X = +\infty$. Остаётся доказать измеримость X, для всякого параллелепипеда P можно записать

$$X \cap P = \bigsqcup_i (X_i \cap P).$$

Сумма мер $\sum_i \mu(X_i \cap P)$ не превосходит меры P, иначе если мы будем приближать X_i снизу компактными F_i, то получим противоречие с супераддитивностью меры компактных множеств и верным по определению меры компактного множества неравенством

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} F_i\right) \leqslant mP.$$

Следовательно, для множеств $X_i \cap P$ применимо рассуждение для случая конечной суммы мер, и $X \cap P$ оказывается измеримым по Лебегу. ☐

Конечная аддитивность меры Лебега тоже имеет место, достаточно применить счётную аддитивность к набору, в котором конечное семейство множеств дополнено счётным количеством пустых множеств. Также выполняется формула

$$\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu X + \mu Y,$$

так как множества, стоящие слева и справа в данном равенстве можно представить в виде объединений некоторых множеств из попарно непересекающегося набора $X \setminus Y$, $Y \setminus X$, $X \cap Y$, а значит можно выразить обе части равенства через меры $\mu(X \setminus Y)$, $\mu(Y \setminus X)$, $\mu(X \cap Y)$.

Счётная аддитивность меры Лебега резко отличает её от меры Жордана. Например, всякая точка имеет меру Лебега нуль, поэтому по счётной аддитивности всякое счётное множество измеримо и имеет меру нуль. В частности, рациональные числа $\mathbb{Q}$ имеют меру нуль. Для ясности можно доказать это и по определению. Если мы занумеруем все рациональные числа как $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ и рассмотрим объединение окрестностей

$$U = \bigcup_k \left(r_k - 2^{-k-1}\varepsilon, r_k + 2^{-k-1}\varepsilon\right)$$

длины $2^{-k}\varepsilon$ каждая, то мы увидим, что множество U открыто, $\mu U \leqslant \varepsilon$ по субаддитивности и U накрывает все рациональные числа.

Измеримость можно установить и для объединения счётного числа множеств с попарными пересечениями:

Теорема 5.19. *Объединение счётного числа измеримых по Лебегу множеств измеримо.*

Доказательство. Обозначим конечные объединения

$$Y_k = \bigcup_{i=1}^{k} X_i,$$

они измеримы по теореме 5.17. Мы получили возрастающую последовательности измеримых множеств $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \subseteq \dots$, причём

$$Y_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (Y_k \setminus Y_{k-1}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Остаётся заметить, что измеримые множества $Y_1, Y_2 \setminus Y_1, Y_3 \setminus Y_2, \dots$ попарно не пересекаются и интересующее нас объединение измеримо по теореме 5.18. □

Аналогичное утверждение верно и для пересечений:

Теорема 5.20. *Пересечение счётного числа измеримых по Лебегу множеств измеримо.*

Доказательство. Рассмотрим пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ и обозначим конечные пересечения

$$Y_k = \bigcap_{i=1}^{k} X_i.$$

Мы получили убывающую последовательности измеримых множеств $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$, причём

$$I = \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Тогда множество $X_1 = Y_1$ представляется в виде объединения множества I и счётного объединения разностей $Y_k \setminus Y_{k+1}$. Так как счётное объединение разностей, обозначим его D, измеримо, то $I = X_1 \setminus D$ тоже измеримо. □

Отметим следующее свойство пространства $\mathbb{R}^n$ и меры Лебега на нём: всё пространство имеет бесконечную меру, но представляется в виде счётного объединения множеств конечной меры. Иногда про это говорят, что мера Лебега *счётно-конечна*. С учётом счётной аддитивности меры Лебега и возможности пересекать всё параллелепипедами, это позволяет сводить многие вопросы к вопросам о мере Лебега в параллелепипеде, множестве конечной меры.

Этот раздел мы завершаем задачами на понимание меры Лебега.

Задача 5.21 (Непрерывность меры Лебега). Докажите, что если множество X является объединением возрастающей последовательности измеримых множеств

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_k \subseteq \dots,$$

то $\lim_{k\to\infty} \mu X_k = \mu X$.

[[Примените аддитивность к X_1 и разностям $X_{k+1} \setminus X_k$.]]

Задача 5.22. Докажите, что если множество X является пересечением убывающей последовательности измеримых множеств

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_k \supseteq \dots$$

и мера какого-то из X_k конечна, то $\lim_{k\to\infty} \mu X_k = \mu X$. Приведите пример, когда все меры X_k бесконечны, а мера X всё же конечна.

[[Примените аддитивность к пересечению $I = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ и разностям $X_k \setminus X_{k+1}$.]]

Задача 5.23 (Непрерывность сдвига относительно меры Лебега). Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу с конечной мерой, то мера

$$\mu(X \setminus (X + t))$$

стремится к нулю при $t \to 0$. Здесь $X + t$ — это сдвиг множества X на t.

[[Воспользуйтесь теоремой 5.14.]]

Задача 5.24. Постройте примеры компактных неплотных подмножеств отрезка $[0, 1]$, имеющих произвольную меру в диапазоне $[0, 1)$.

[[Сделайте обобщённое канторово множество: выкиньте из отрезка $[0, 1]$ интервал длины ε_1 в середине, у каждого из получившихся отрезков выкиньте интервалы посередине, длины которых относятся к длинам отрезков как ε_2 и так далее счётное количество раз. Проверьте, что мера получившегося множества равна $\prod_{k=1}^{\infty}(1 - \varepsilon_k)$.]]

Задача 5.25. Докажите, что существует подмножество отрезка, не измеримое по Лебегу. Можно использовать аксиому выбора.

[[Вместо отрезка удобнее рассматривать окружность, взять поворот R на угол $t\pi$ с $t \notin \mathbb{Q}$, и придумать множество X, повороты которого $\{R^n X\}_{n\in\mathbb{Z}}$ попарно не пересекаются и покрывают всю окружность.]]

5.5. **Измеримые по Лебегу и борелевские функции.** В предыдущем разделе мы говорили об измеримых по Лебегу множествах не обязательно конечной меры. Перед тем, как определить интеграл Лебега, нам надо определить класс функций, которые в принципе имеет смысл интегрировать по Лебегу.

Определение 5.26. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) называется *измеримой по Лебегу*, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) < c\}$ измеримо по Лебегу.

Из определения следует, что само X тоже обязано быть измеримым по Лебегу.

Лемма 5.27. *Определение измеримой функции со строгим неравенством эквивалентно определению с нестрогим неравенством* $\{x : f(x) \leqslant c\}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\{x : f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) < c + 1/k\}$$

и

$$\{x : f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) \leqslant c - 1/k\}\,.$$

Нужное утверждение следует из измеримости счётных объединений и пересечений измеримых множеств. $\square$

Задача 5.28. Докажите, что сужение измеримой на X функции на измеримое $Y \subseteq X$ тоже будет измеримой функцией.

Очевидно, что всякая непрерывная функция (на измеримом множестве) измерима по Лебегу, так как множество в определении измеримости функции будет пересечением открытого и измеримого, и следовательно будет измеримым по Лебегу.

Можно доказать, что арифметические операции не выводят нас за класс измеримых по Лебегу функций. К примеру, выражение со счётным объединением

$$\{f(x) + g(x) < c\} = \bigcup_{s,t\in\mathbb{Q}, s+t<c} \{f(x) < s\} \cap \{g(x) < t\}$$

доказывает это для суммы, остальные доказательства аналогичны (сделайте их в качестве упражнения). Верны также более интересные свойства:

Теорема 5.29. *Поточечное взятие точной верхней или нижней грани последовательности функций не выводит за класс измеримых функций.*

Доказательство. Для верхней грани можно написать

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < c\right\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}, s>0} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(x) < c - s\}$$

и воспользоваться измеримостью счётных объединений и пересечений. Для точной нижней грани формула ещё проще

$$\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < c\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(x) < c\}$$

$\square$

Теорема 5.30. *Поточечный переход к (верхнему или нижнему) пределу также не выводит за класс измеримых функций.*

Доказательство. Для верхнего предела можно написать

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) < c\right\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}, s>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant N} \{f_n(x) < c - s\}$$

и воспользоваться измеримостью счётных объединений и пересечений. Чтобы не писать формулу для нижнего предела, можно заметить, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = -\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-f_n(x))$$

и воспользоваться возможностью поменять знак у функции, оставив её измеримой. $\square$

Иногда вместо измеримых множеств и функций удобно рассматривать более узкий класс множеств и функций:

Определение 5.31. *Борелевским множеством* в $\mathbb{R}^n$ называется множество, которое можно получить из открытых множеств операциями разности множеств, счётного объединения и счётного пересечения. *Борелевской функцией* называется функция, у которой все множества $\{f(x) < c\}$ борелевские.

Сказанное выше об измеримых по Лебегу функциях относится и к борелевским, их класс замкнут относительно арифметических операций, перехода к точной грани счётного семейства функций или к поточечному пределу.

Говоря несколько неформально, все сравнительно явно заданные функции будут не просто измеримыми по Лебегу, а даже борелевскими. Но на самом деле измеримых по Лебегу множеств намного больше, чем борелевских. Например, канторово множество имеет меру Лебега нуль и мощность континуума $\aleph_1 = |2^{\mathbb{N}}|$, значит все его подмножества измеримы и имеют меру нуль (это называется *полнота меры Лебега*), а их количество $2^{\aleph_1} > \aleph_1$. Но при этом читатель в качестве (не очень простого) упражнения может доказать, что количество открытых множеств в евклидовом пространстве — континуум, и количество борелевских — тоже континуум.

Хотя борелевских множеств намного меньше, чем измеримых по Лебегу, всё же можно утверждать, что всякое измеримое по Лебегу множество «почти борелевское» в следующем смысле:

Теорема 5.32. *Всякое измеримое $X \subset \mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения борелевского множества и множества меры нуль.*

Доказательство. Разрезая $\mathbb{R}^n$ на параллелепипеды, можно свести утверждение к случаю ограниченного X с конечной мерой Лебега. Тогда по определению нижней меры Лебега в X можно поместить компакт $F_n \subseteq X$, так что $\mu F_n \geqslant \mu X - 2^{-n}$. Объединение $Y = \bigcup_n F_n$ будет борелевским множеством меры не менее μX, а так как оно содержится в X, то его мера равна точно μX. Разность $X \setminus Y$ тогда должна иметь меру нуль. ☐

Следствие 5.33. *Всякую измеримую функцию $f : X \to \mathbb{R}$ можно переопределить на множестве меры нуль (возможно изменив область определения на меру нуль) так, что она станет борелевской.*

Доказательство. Для всякого рационального r рассмотрим множество

$$X_r = \{x \in X : f(x) < r\}.$$

Функция f тогда восстанавливается по набору этих множеств как

$$f(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in X_r\} = \inf\{r \in \mathbb{Q} : f(x) < r\}.$$

Заменим теперь каждое X_r на борелевское $Y_r \subseteq X_r$ с нулевой мерой разности $X_r \setminus Y_r$. Тогда функция

$$g(x) = \inf\{r : x \in Y_r\}$$

определена на множестве $Y = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} Y_r \subset X$ и может отличаться от f лишь на множестве $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(X_r \setminus Y_r)$ меры нуль. Функция $g : Y \to \mathbb{R}$ уже является борелевской, так как

$$\{x \in Y : g(x) < c\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q},\ r<c} Y_r.$$

☐

В следствии 5.33, если область определения X изначально была борелевским множеством, то у новой функции g область определения можно не сужать, определив её на борелевском множестве $X \setminus Y$ нулём.

Задача 5.34. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Докажите, что его характеристическая функция $\chi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X; \\ 0, & x \notin X, \end{cases}$$

будет измеримой по Лебегу тогда и только тогда, когда X измеримо по Лебегу. Докажите, что характеристическая функция будет борелевской тогда и только тогда, когда множество X будет борелевским.

[[Примените определение и опишите, какие множества имеют вид $\{x : \chi_X(x) < c\}$.]]

Теорема 5.35. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ борелевская тогда и только тогда, когда прообраз любого борелевского множества $Y \subseteq \mathbb{R}$ тоже является борелевским.*

Доказательство. Определение борелевской функции требует борелевости множества $f^{-1}(-\infty, c)$. Из неё будет следовать борелевость $f^{-1}(-\infty, c]$ (как мы уже делали для измеримости), а также борелевость прообразов интервалов и отрезков. Всякое открытое множество $U \subseteq \mathbb{R}$ можно представить в виде объединения счётного количества интервалов. Например, для всякого рационального $r \in U$ рассмотрим максимальный содержащий r интервал $I_r \ni r$, содержащийся в U, и объединим все такие интервалы. Следовательно для всякого открытого U прообраз $f^{-1}(U)$ тоже борелевский.

Далее, если мы будет делать с открытыми подмножествами прямой операции объединения, пересечения и разности, а также счётные объединения и пересечения, то те же операции будут делаться в прообразами, следовательно в прообразе всегда будет получаться борелевское множество для любого борелевского множества на прямой. ☐

Предыдущая теорема позволяет расширить определение борелевских функций на отображения между метрическими или топологическими пространствами. Если какие-то множества объявлены открытыми, то борелевским множеством в том же пространстве называется множество, которое можно получить из открытых множеств операциями разности множеств, счётного объединения и счётного пересечения.

Определение 5.36. Отображение $f : X \to Y$ метрических или топологических пространств называется борелевским, если прообраз всякого борелевского множества борелевский.

В нашем частном случае $X \subseteq \mathbb{R}^n$ мы требуем также, чтобы X само было борелевским, хотя формально из приведённого выше определения это не следует (в нём у неборелевского X могут быть «относительно борелевские» подмножества в индуцированной топологии).

Теорема 5.37. *Композиция борелевских отображений тоже будет борелевской.*

Доказательство. Доказывается также, как непрерывность композиции в топологическом определении композиции, так как прообраз при композиции — это прообраз прообраза. ☐

Из этой теоремы и предыдущих наблюдений про борелевость сумм, разностей, произведений, частных, непрерывных функций, точных граней и поточечных пределов следует, что всякая сравнительно явно описанная функция нескольких переменных будет борелевской, а значит и измеримой по Лебегу. Построение не измеримой по Лебегу функции возможно лишь весьма неявно, например на основе результата задачи 5.25.

Задача 5.38. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримая, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская. Докажите, что композиция $g \circ f$ измеримая.

[[Заметьте, что если функция измерима, то прообраз любого борелевского множества относительно неё измерим по Лебегу.]]

Задача 5.39. Приведите пример, показывающий, что композиция измеримых по Лебегу функций одной переменной не обязательно измерима по Лебегу.

[[Постройте сначала инъективную и монотонную функцию f, отображающую прямую в множество меры нуль, из монотонности она будет измерима по Лебегу. А функцию g тогда можно определять на образе f как угодно, если за его пределами она равна нулю, в любом случае она будет измерима по Лебегу. Это позволяет сделать функцию $g \circ f$ любой.]]

Задача 5.40. Докажите, что всякая полунепрерывная снизу (см. определение 3.73) функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ борелевская.

[[Используйте второй вариант определения полунепрерывности.]]

Задача 5.41. Докажите, что если все функции в последовательности $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ полунепрерывны снизу, то функция, определённая по формуле

$$\bar{f}(x) = \sup_k f_k(x),$$

тоже полунепрерывна снизу.

[[Аналогично предыдущей задаче.]]

5.6. **Интеграл Лебега для ступенчатых и произвольных функций.** Интеграл Лебега мы определим, в общем следуя схеме определения интеграла Римана через нижние и верхние суммы Дарбу. Иначе это можно понимать как приближение функции снизу и сверху ступенчатыми функциями. Для интеграла Лебега мы тоже введём понятие ступенчатой функции, только основаниями ступенек мы разрешим быть любым измеримым по Лебегу множествам, а количество ступенек, имея в виду счётную аддитивность меры Лебега, может быть и счётным.

Определение 5.42. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) называется *счётно ступенчатой* (или в этом разделе просто *ступенчатой*), если X разбивается в счётное объединение измеримых множеств $X = \bigsqcup_i X_i$ и на каждом X_i функция равна константе c_i.

В данном определении удобно термином «счётное» обозначать любое не более чем счётное множество. Хотя формально, если разбиение было конечным, то к нему можно дописать счётное количество пустых множеств и получить счётное разбиение. Также из счётной аддитивности меры Лебега следует, что область определения функции, множество X, в этом определении обязана быть измеримой.

Задача 5.43. Проверьте, что всякая ступенчатая функция измерима по Лебегу.

[[Заметьте, что $\{x : f(x) < c\} = \bigcup_{c_i<c} X_i$.]]

Определение 5.44. Для ступенчатой функции из предыдущего определения положим

$$\int_X f(x)\, dx = \sum_i c_i \mu X_i,$$

считая $0 \cdot (+\infty) = 0$ и требуя, чтобы сумма абсолютно сходилась.

В этом определении сумма может абсолютно сойтись только в том случае, если на ступеньках с бесконечной μX_i значение функции равно нулю.

Заметим, что если у нас есть два разбиения на ступеньки, $X = \bigsqcup_i X'_i$ и $X = \bigsqcup_j X''_j$, то множества $X'_i \cap X''_j$ тоже образуют счётное измеримое разбиение X, которое является *измельчением* каждого из исходных разбиений, в котором множество X'_i измельчается на счётное количество множеств $X'_i \cap X''_j$.

При переходе от одного разбиения к его измельчению счётная аддитивность меры Лебега позволяет нам установить, что интеграл ступенчатой функции от измельчения её множества ступенек не меняется. Более явно это можно записать как

$$\sum_i c_i' \mu X_i' = \sum_{i,j} c_i' \mu(X_i' \cap X_j'') = \sum_{i,j} c_i'' \mu(X_i' \cap X_j'') = \sum_j c_j'' X_j'',$$

так как на всяком непустом пересечении $X_i' \cap X_j''$ функция должна принимать одно и то же значение $c_i' = c_j''$, а пустые пересечения не вносят вклада в сумму.

Нетрудно доказать стандартные свойства интеграла для ступенчатых функций. Для доказательства линейности,

$$\int_X (af(x) + bg(x))\ dx = a \int_X f(x)\ dx + b \int_X g(x)\ dx$$

нам достаточно перейти к разбиению (на множества $X_i' \cap X_j''$), на котором обе функции f и g будут ступенчатыми одновременно и сложить абсолютно сходящиеся ряды. Для доказательства монотонности

$$\forall x\ f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \int_X f(x)\ dx \geqslant \int_X g(x)\ dx$$

нам тоже достаточно рассмотреть подходящее для обеих функций разбиение на ступеньки и применить монотонность суммирования (или просто воспользоваться линейностью и рассмотреть разность интегралов).

Чтобы определить интеграл Лебега произвольной функции, мы хотим приближать её ступенчатыми снизу и сверху и смотреть, можно ли сделать зазор между интегралами от этих приближений произвольно малым. Следующее утверждение показывает, что для измеримых функций в некотором смысле это возможно:

Теорема 5.45. *Для любой измеримой по Лебегу функции $f : X \to \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся две ступенчатые функции $g, h : X \to \mathbb{R}$, такие что $g \leqslant f \leqslant h$ и*

$$\int_X (h(x) - g(x))\ dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда X имеет конечную меру. Положим

$$X_i = \{x \in X : \varepsilon i \leqslant f(x) < \varepsilon(i+1)\}$$

при $i \in \mathbb{Z}$, это счётное разбиение X на измеримые ступеньки. Определим ступенчатые функции

$$g(X_i) = \varepsilon i, h(X_i) = \varepsilon(i+1),$$

очевидно, что $g \leqslant f \leqslant h$ и $\int_X (h(x) - g(x))\ dx = \varepsilon \mu X$.

Множество X с бесконечной мерой можно разбить на счётное количество множеств Y_i с конечной мерой, на Y_i приблизить функцию ступенчатыми с точностью $2^{-i}\varepsilon$, и собрать общее приближение с точностью ε. □

Предыдущая теорема не утверждает, что ступенчатые g и h имеют интеграл Лебега, так как мы ничего не знаем о его абсолютной сходимости. Однако уже можно утверждать, что построенные в доказательстве теоремы g и h имеют или не имеют сходящийся интеграл Лебега одновременно, так как у разности интеграл Лебега конечен.

Определение интеграла Лебега произвольной функции у нас будет таким:

Определение 5.46. Для измеримой по Лебегу функции $f : X \to \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) определим *нижний интеграл Лебега* как

$$\sup \int_X g(x)\ dx$$

по интегрируемым ступенчатым $g \leqslant f$. Определим *верхний интеграл Лебега* как

$$\inf \int_X h(x)\, dx$$

по интегрируемым ступенчатым $h \geqslant f$.

Определение 5.47. Будем говорить, что измеримая $f : X \to \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) *интегрируема по Лебегу с конечным интегралом*, если её нижний и верхний интегралы Лебега конечны и равны между собой.

Оказывается, что для измеримой функции не может оказаться так, что нижний и верхний интегралы Лебега конечны и различны. Мы выведем это из теоремы 5.45:

Следствие 5.48. *Если измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ может быть оценена снизу и сверху, $g_0 \leqslant f \leqslant h_0$ ступенчатыми с конечным интегралом, то она сама имеет конечный интеграл Лебега.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ примерим теорему 5.45 и найдём ступенчатые функции, $g \leqslant f \leqslant h$, такие что

$$\int_X (h(x) - g(x))\, dx < \varepsilon.$$

Рассмотрим новые ступенчатые функции, определённые по формулам

$$g^*(x) = \max\{g_0(x), g(x)\}, \quad h^*(x) = \min\{h_0(x), h(x)\}.$$

Так как $h^*(x) - g^*(x) \leqslant h(x) - g(x)$, то выполняется

$$\int_X (h^*(x) - g^*(x))\, dx < \varepsilon.$$

А так как $g_0 \leqslant g^* \leqslant f \leqslant h^* \leqslant h_0$, то ступенчатые g^* и h^* заключены между ступенчатыми g_0 и h_0 с конечным интегралом, следовательно они тоже имеют конечный интеграл. То есть мы можем применить линейность интеграла и написать

$$\int_X h^*(x)\, dx < \int_X g^*(x)\, dx + \varepsilon,$$

из чего уже следует, что верхний и нижний интегралы f отличаются не более чем на ε. ☐

Задача 5.49. Докажите, что если $f : X \to \mathbb{R}$ имеет конечный интеграл, то её сужение на измеримое $Y \subseteq X$ тоже будет иметь конечный интеграл.

[[Докажите для начала, что интеграл ступенчатой неотрицательной функции по X не менее интеграла её сужения на Y, потом приближайте f снизу и сверху ступенчатыми.]]

Неотрицательную функцию можно приблизить снизу нулём, а всякое её приближение ступенчатой функцией сверху имеет определённый интеграл, возможно равный $+\infty$. Значит точная нижняя и верхняя грань в определении всегда берутся по непустому подмножеству $[0, +\infty]$ и имеет смысл следующее определение:

Определение 5.50. Для неотрицательной измеримой функции $f : X \to \mathbb{R}^+$ будем писать $\int_X f(x)\, dx = +\infty$, если её нижний интеграл Лебега бесконечен.

Поясним это определение с помощью теоремы 5.45:

Следствие 5.51. *Если неотрицательная измеримая $f : X \to \mathbb{R}^+$ имеет конечный нижний интеграл Лебега, то её верхний интеграл Лебега равен нижнему.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ примерим теорему 5.45 и найдём ступенчатые функции, $g \leqslant f \leqslant h$, такие что

$$\int_X (h(x) - g(x))\, dx < \varepsilon.$$

При этом функцию g можно считать неотрицательной, а значит её интеграл Лебега можно считать определённым как элемент $[0, +\infty]$. Если он равен $+\infty$, то по определению нижний интеграл Лебега f бесконечен, а условие теоремы предполагает обратное. Значит интеграл g конечен, тогда интеграл h тоже конечен из линейности. Следовательно h даёт пример приближения f ступенчатой функцией сверху с конечным интегралом, к тому же не большим, чем нижний интеграл Лебега f плюс ε. В силу произвольности ε верхний интеграл Лебега f обязан совпасть с его нижним интегралом Лебега. □

Заметим, что неотрицательной функции мы можем разрешить принимать значения $+\infty$. Если такое значение принимается на множестве положительной меры, то интеграл мы считаем равным $+\infty$, иначе такие значения не влияют на определение интеграла. Далее интегрирование неотрицательных функций всегда будет пониматься в таком смысле.

Для знакопеременной функции в определении интеграла Лебега требуется абсолютная сходимость, следующая теорема обобщает свойство суммирования абсолютно сходящихся рядов отдельно по положительной и отрицательной части:

Теорема 5.52. *Для измеримой функции $f : X \to \mathbb{R}$ положим*

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0; \\ 0, & f(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

и

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leqslant 0; \\ 0, & f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Если $\int_X f(x)\, dx$ конечен, то $\int_X f_+(x)\, dx$ и $\int_X f_-(x)\, dx$ тоже конечны и наоборот.

Доказательство. Если интеграл f конечен, то приблизим f ступенчатыми функциями $g \leqslant f \leqslant h$ с конечными интегралами, тогда для любого $x \in X$ выполняется

$$f_+(x) \leqslant h_+(x), \quad f_-(x) \geqslant g_-(x).$$

Для ступенчатых функций утверждение очевидно из соответствующего свойства рядов, следовательно для положительной части мы имеем оценку

$$\int_X f_+(x)\, dx \leqslant \int_X h_+(x)\, dx < +\infty$$

и для отрицательной части

$$\int_X f_-(x)\, dx \geqslant \int_X g_-(x)\, dx > -\infty.$$

В обратную сторону, из приближений положительной и отрицательной части ступенчатыми с конечным интегралом можно сделать и приближение исходной функции ступенчатыми с конечным интегралом, просто сложив их. □

Устанавливаемая далее линейность интеграла Лебега означает выполнение равенства

$$\int_X f(x)\, dx = \int_X f_+(x)\, dx + \int_X f_-(x)\, dx.$$

Иногда его используют для определения интеграла Лебега произвольной измеримой функции через интеграл Лебега знакопостоянной измеримой функции. Собственно, слагаемые в правой части равенства лежат в промежутках $[0, +\infty]$ и $[-\infty, 0]$ соответственно и их сумме можно придать определённое значение в $[-\infty, +\infty]$ в почти всех случаях, кроме случая, когда они оба бесконечны с разными знаками.

Задача 5.53. Докажите, что интегрируемая по Риману на отрезке функция интегрируема и по Лебегу с тем же интегралом.

[[Заметьте, что понятие ступенчатой по Лебегу функции содержит в себе понятие ступенчатой по Риману.]]

Задача 5.54 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману). Докажите, что $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

[[Рассмотрите колебание функции в точке $\omega(f, x)$ (см. определение 3.78), обратите внимание, что множества

$$D_k = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geqslant 1/k\}$$

компактны и мера множества точек разрыва равна нулю тогда и только тогда, когда верхняя мера Жордана всех этих множеств равна нулю. Используйте тот факт, что определение верхней меры Жордана использует покрытие конечным количеством промежутков.]]

5.7. **Линейность и строгая монотонность интеграла Лебега.** Из линейности интеграла для ступенчатых функций с помощью предельного перехода следует его линейность для измеримых функций. Имея два приближения

$$g_1 \leqslant f_1 \leqslant h_1, \quad g_2 \leqslant f_2 \leqslant h_2,$$

в случае $A, B \geqslant 0$ (другие случаи делаются аналогично с переменой мест g_i и h_i) мы получаем приближение

$$Ag_1 + Bg_2 \leqslant Af_1 + Bf_2 \leqslant Ah_1 + Bh_2.$$

Для интеграла с учётом установленной линейности для ступенчатых функций мы знаем

$$A \int_X g_1\,dx + B \int_X g_2\,dx \leqslant \int_X (Af_1 + Bf_2)\,dx \leqslant A \int_X h_1\,dx + B \int_X h_2\,dx$$

и

$$A \int_X g_1\,dx + B \int_X g_2\,dx \leqslant A \int_X f_1\,dx + B \int_X f_2\,dx \leqslant A \int_X h_1\,dx + B \int_X h_2\,dx.$$

Зазор между левой и правой частью в этих цепочках неравенств может быть сделан произвольно малым, из чего и следует линейность

$$\int_X (Af_1 + Bf_2)\,dx = A \int_X f_1\,dx + B \int_X f_2\,dx.$$

Монотонность с учётом линейности сводится к доказательству того, что интеграл измеримой неотрицательной функции неотрицателен. Но очевидно неотрицательную $f \geqslant 0$ можно приблизить снизу нулевой функцией и получить по определению интеграла

$$\int_X f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Это утверждение можно усилить до строгой монотонности, если $f > 0$ на множестве положительной меры, то и интеграл будет положителен. Сформулируем это точнее:

Теорема 5.55. *Если функция $f \geqslant 0$ интегрируема по Лебегу на множестве X положительной меры Лебега и*

$$\int_X f(x)\,dx = 0,$$

то $f(x) = 0$ на всём X кроме множества меры нуль.

Доказательство. Предположим противное: множество $X_+ = \{x : f(x) > 0\}$ имеет положительную меру. Оно является объединением счётной последовательности множеств

$$X_n = \{x : f(x) > 1/n\},$$

значит какое-то X_n должно иметь положительную меру по свойству непрерывности меры Лебега. Но тогда по не обязательно строгой монотонности мы оценим функцию снизу ступенькой на основании X_n:

$$\int_X f(x)\,dx \geqslant \int_X \frac{1}{n}\chi_{X_n}(x)\,dx = \frac{\mu X_n}{n} > 0.$$

□

Следующая теорема дополнительно проясняет определение интеграла Лебега:

Теорема 5.56. *В определении интегрируемый по Лебегу функции с конечным интегралом требование измеримости функции следует из остальных требований.*

Доказательство. Если f можно заключить между двумя ступенчатыми $g \leqslant f \leqslant h$ так, что разность их интегралов произвольно мала, то можно и выбрать возрастающую последовательность ступенчатых $g_n \leqslant f$ и убывающую последовательность ступенчатых $h_n \geqslant f$ так, что разность их интегралов будет стремиться к нулю.

По теореме 5.30 поточечные пределы $g_n \to g$ и $h_n \to h$ будут измеримыми по Лебегу. Из неравенств $g_n \leqslant g \leqslant f \leqslant h \leqslant h_n$ после перехода к пределу $n \to \infty$ будет следовать, что интегралы g и h равны и равны интегралу f. Следовательно

$$\int_X (h - g)\,dx = 0$$

и по предыдущей теореме $h = g$ на множестве $Y \subset X$, таком что $\mu(X \setminus Y) = 0$. Тогда на Y также выполняется $g = f = h$, а следовательно f совпадает с измеримой функцией везде, кроме множества меры нуль, а значит она сама измерима. □

Из следствия 5.33 также становится ясно, что функция с конечным интегралом Лебега совпадает с некоторой борелевской функцией за исключением множества меры нуль и борелевская функция имеет тот же интеграл.

5.8. **Приближение интегрируемых функций в среднем.** Определение интеграла Лебега подразумевает приближение функции ступенчатыми в некотором смысле. В общем случае *приближение в среднем* функции $f : X \to \mathbb{R}$ функциями из класса $\mathcal{G}$ — это выполнение условия

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{G} : \int_X |f(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Очевидное неравенство (треугольника)

$$\int_X |f - h|\,dx \leqslant \int_X |f - g|\,dx + \int_X |g - h|\,dx$$

позволяет рассуждать о приближениях в среднем как о приближениях в метрическом пространстве, правда метрика вырождена, почти всюду совпадающие функции f и g будут иметь нулевое расстояние $\int_X |f - g|\,dx$.

Заметим также, что если f приближена в среднем g с точностью ε, то (из линейности и монотонности интеграла с учётом неравенств $-|f-g| \leqslant f-g \leqslant |f-g|$) интегралы этих функций отличаются не более чем на ε, если хотя бы один из них конечен. Следующая теорема даёт естественный способ приблизить интегрируемую функцию ограниченной.

Определение интеграла Лебега означает, что всякую функцию с конечным интегралом Лебега можно сколь угодно близко приблизить ступенчатой функцией среднем, причём можно приближать и сверху, и снизу. Далее мы докажем ещё пару утверждений о том, как можно приближать функцию в среднем.

Теорема 5.57. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ на измеримом $X \subset \mathbb{R}^n$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом. Положим для $M > 0$*

$$f_M(x) = \begin{cases} M, & f(x) \geqslant M; \\ f(x), & |f(x)| \leqslant M; \\ -M, & f(x) \leqslant -M. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{M\to+\infty} \int_X f_M(x)\, dx = \int_X f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \lim_{M\to+\infty} \int_X |f(x) - f_M(x)|\, dx = 0.$$

Доказательство. Это утверждение для ступенчатых функций легко следует из определения и абсолютной сходимости ряда в их определении, при достаточно большом M при обрезании функции по модулю значением M лишь небольшая (по сумме модулей) часть членов ряда в определении интеграла ступенчатой функции может уменьшиться. Для произвольной функции утверждение следует из её приближения ступенчатыми, с учётом неравенств

$$|f_M - g_M| \leqslant |f-g| \Rightarrow \int_X |f_M - g_M|\, dx \leqslant \int_X |f-g|\, dx.$$

□

Задача 5.58. Докажите, что если функцию f на отрезке можно приблизить функциями из некоторого класса $\mathcal{G}$ равномерно, то её можно приблизить функциями $\mathcal{G}$ и в среднем. Докажите, что на прямой (или в $\mathbb{R}^n$) из возможности приблизить равномерно возможность приблизить в среднем не следует.

[[Проверьте, когда ограниченность функции позволяет ограничить её интеграл.]]

Можно сделать ещё одно полезное утверждение о приближении в среднем интегрируемой функции:

Теорема 5.59. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом. Тогда f можно сколь угодно близко приблизить в среднем ступенчатыми функциями с конечным числом элементарных ступенек (мы их будем называть* элементарно ступенчатыми*).*

Доказательство. Из определения интеграла непосредственно следует, что можно сколь угодно близко в среднем приблизить функцию f ступенчатой функцией g из счётного числа измеримых по Лебегу ступенек. Далее из определения интеграла g следует, что можно оставить в этой функции конечное число ступенек так, что разность между g и конечно-ступенчатой функцией h будет иметь маленький интеграл модуля, то есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - h(x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - h(x)|\, dx < 2\varepsilon.$$

Теперь h состоит из конечного числа измеримых по Лебегу ступенек,

$$h(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{X_k}(x),$$

пусть $M = \sum_{k=1}^{N} |a_k|$. Основание каждой ступеньки X_k можно приблизить элементарным множеством по теореме 5.14, у нас получаются элементарные множества S_k, такие что

$$\mu(S_k \setminus X_k) + \mu(X_k \setminus S_k) = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{X_k}(x) - \chi_{S_k}(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тогда положив

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{S_k}(x),$$

мы будем иметь неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - \varphi(x)|\,dx < \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} |a_k||\chi_{X_k}(x) - \chi_{S_k}(x)|\,dx < \varepsilon.$$

В итоге наша исходная функция приближена в среднем элементарно ступенчатой φ с точностью 3ε. ☐

Дальнейшее изложение приближения функций мы откладываем до разделов 6.3 и 7.3.

5.9. **Аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам.** Установим некоторые свойства интеграла Лебега, которые аналогичны соответствующим свойствам меры Лебега.

Теорема 5.60 (Счётная аддитивность интеграла Лебега по множествам). *Если измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ неотрицательна или имеет конечный интеграл на множестве X, которое представляется в виде объединения попарно непересекающихся измеримых по Лебегу множеств как $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, то*

$$\int_X f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Для ступенчатой функции на ступеньках $\{X_i\}$, $f(X_i) = c_i$ утверждение сводится к суммированию равенств

$$\mu X_i = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_i \cap Y_k),$$

верных в силу счётной аддитивности меры Лебега, с коэффициентами c_i. Для произвольной функции утверждение следует из её приближения ступенчатыми. ☐

Задача 5.61. Приведите пример измеримой на $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ функции f, которая имеет на каждом Y_k конечный интеграл, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} f(x)\,dx$$

абсолютно сходится, но f не имеет интеграла на всём X.

[[Вспомните, при каких условиях интеграл измеримой функции может быть не определён.]]

Теорема 5.62 (Непрерывность интеграла Лебега по множествам). *Пусть множества $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу и возрастают по включению*

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \subseteq X_k \subseteq X_{k+1} \subseteq \dots.$$

Пусть также $X = \bigcup_k X_k$ и интеграл Лебега $\int_X f(x)\,dx$ конечен или f измерима и неотрицательна. Тогда

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Сводится к аддитивности интеграла Лебега, если положить $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2 \setminus X_1, \dots, Y_k = X_k \setminus X_{k-1}, \dots$ Тогда

$$\int_{X_k} f(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{k} \int_{Y_\ell} f(x)\,dx,$$

и в пределе $k \to \infty$ в правой части получается интеграл f по X. □

Теорема 5.63 (Непрерывность интеграла Лебега по убыванию множеств). *Пусть множества $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу и убывают по включению*

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \dots \supseteq X_k \supseteq X_{k+1} \supseteq \dots.$$

Пусть также $X = \bigcap_k X_k$ и интеграл Лебега $\int_{X_1} f(x)\,dx$ конечен. Тогда

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Сводится к предыдущей теореме, если положить $X'_k = X_1 \setminus X_k$ и воспользоваться аддитивностью

$$\int_{X_1} f(x)\,dx = \int_{X_1\setminus X} f(x)\,dx + \int_X f(x)\,dx.$$

□

Обратите внимание, что в случае бесконечных интегралов неотрицательных функций предыдущая теорема может быть неверна и приведите соответствующие примеры.

Следствие 5.64 (Непрерывность интеграла Лебега по верхнему пределу). *Если f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$ с конечным интегралом, то выражение*

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

непрерывно зависит от x.

Доказательство. В определении предела функции по Гейне достаточно рассматривать монотонные последовательности $x_n \to x$ (докажите это самостоятельно). Если последовательность (x_n) возрастает, то значения $g(x_n)$ являются интегралами f по возрастающей последовательности отрезков $[a, x_n]$ и можно перейти к пределу по непрерывности интеграла Лебега. Если же последовательность x_n убывает, то можно перейти к пределу по непрерывности для убывающей последовательности отрезков. □

Следующая задача показывает, что функция g из предыдущего следствия на самом деле обладает более сильным свойством, чем непрерывность:

Задача 5.65 (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега). Пусть f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что если $X \subset [a, b]$ измеримо и $\mu X < \delta$, то

$$\int_X |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

[[Используйте приближение функции в среднем ограниченными функциями или посмотрите на доказательство теоремы 7.20.]]

5.10. **Предельный переход в интеграле Лебега по функциям.** Далее мы будем изучать, насколько переход к пределу функций соответствует переходу к пределу для их интегралов. Важным свойством интеграла Лебега оказывается, что не обязательно требовать равномерной сходимости для последовательности функций, а достаточно иметь поточечную сходимость вместе с некоторым дополнительным условием, монотонностью или равномерной ограниченностью.

Теорема 5.66 (Теорема о монотонной сходимости). *Пусть функции f_k $(k \in \mathbb{N})$ на измеримом X неотрицательны и измеримы по Лебегу, при этом при любом $x \in X$ последовательность $f_k(x)$ возрастает и стремится к $f(x)$ (значения $+\infty$ разрешены). Тогда*

$$\int_X f_k\, dx \to \int_X f\, dx, \quad k \to \infty.$$

Доказательство. Напомним, что по теореме 5.30 поточечные пределы измеримых функций измеримы, так что f будет измеримой с конечным или бесконечным интегралом. Из монотонности сразу следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, dx \leqslant \int_X f\, dx.$$

Остаётся доказать, что левая часть не менее правой. Можно выбросить из X те точки, где $f(x)$ равна нулю, так как остальные f_k в этих точках тоже обязаны быть равны нулю. В итоге, мы считаем все функции неотрицательными, а f считаем положительной.

Сначала рассмотрим случай, когда $f(x) = +\infty$ на множестве меры нуль. Тогда можно выбросить это множество. Возьмём теперь $\varepsilon > 0$. Положим

$$X_k = \{x \in X : f_k(x) \geqslant (1-\varepsilon) f(x)\},$$

это измеримые множества, заданные неравенствами с измеримыми функциями. Из поточечной сходимости следует, что $X = \bigcup_k X_k$ и эти множества упорядочены по включению. Значит, при достаточно большом k будет выполняться (считаем интеграл конечным, иначе достаточно правую часть равенства заменить на $1/\varepsilon$)

$$\int_{X_k} f(x)\, dx \geqslant \int_X f(x)\, dx - \varepsilon.$$

С учётом определения X_k получаем

$$\int_X f_k(x)\, dx \geqslant \int_{X_k} f_k(x)\, dx \geqslant (1-\varepsilon) \int_{X_k} f(x)\, dx \geqslant (1-\varepsilon) \left(\int_X f(x)\, dx - \varepsilon \right),$$

или в случае $\int_X f\, dx = +\infty$

$$\int_X f_k(x)\, dx \geqslant \int_{X_k} f_k(x)\, dx \geqslant (1-\varepsilon) \int_{X_k} f(x)\, dx \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},$$

Рассматривая $\varepsilon \to +0$ мы видим, что в обоих случаях предел интегралов f_k должны быть не менее интеграла f.

Осталось рассмотреть случай, когда $f(x) = +\infty$ на множестве положительной меры. Тогда достаточно рассматривать только это множество и доказывать, что интегралы $\int_X f_k\ dx$ стремятся к $+\infty$ при $k \to \infty$. Аналогично предыдущему случаю, можно положить

$$X_k = \{x \in X : f_k(x) \geqslant 1/\varepsilon\}.$$

При достаточно больших k будет выполняться

$$\mu X_k \geqslant 1/2\mu X$$

и

$$\int_X f_k(x)\ dx \geqslant \int_{X_k} f_k(x)\ dx \geqslant 1/\varepsilon \mu X_k \geqslant \frac{1}{2\varepsilon}\mu X,$$

что и означает стремление к бесконечности последовательности интегралов. □

Теорему о монотонной сходимости можно переформулировать иначе, сделав более отчётливым её аналогию со счётной аддитивностью меры Лебега:

Теорема 5.67 (Счётная аддитивность интеграла Лебега по функциям). *Пусть функции u_k на измеримом X неотрицательны и измеримы по Лебегу. Тогда*

$$\int_X \sum_k u_k\ dx = \sum_k \int_X u_k\ dx.$$

Доказательство. Сводится к теореме о монотонной сходимости рассмотрением частичных сумм $f_k = \sum_{\ell=1}^k u_\ell$. □

Можно сказать, что предыдущая теорема позволяет переставлять счётное суммирование и интегрирование, если речь идёт о неотрицательных выражениях. Она естественно обобщает утверждение о перестановке двойных сумм для неотрицательных выражений. Переставлять интегрирование и суммирование также можно и в случае функций произвольного знака при условии

$$\int_X \sum_k |u_k|\ dx = \sum_k \int_X |u_k|\ dx < +\infty,$$

тогда можно разложить каждую u_k на неотрицательную и неположительную части, $u_k = u_{k,+} + u_{k,-}$, и интегрировать их по отдельности.

Задача 5.68 (Лемма Фату). Докажите, что для любой последовательности неотрицательных измеримых функций $f_k : X \to \mathbb{R}$ выполняется

$$\varliminf_{k\to\infty} \int_X f_k\ dx \geqslant \int_X \varliminf_{k\to\infty} f_k\ dx.$$

[[Рассмотрите возрастающую последовательность функций $g_k = \inf_{m\geqslant k} f_m$.]]

Следующая теорема позволяет переходить к поточечному пределу под знаком интеграла без монотонности:

Теорема 5.69 (Теорема об ограниченной сходимости). *Пусть неотрицательная функция g на измеримом X имеет конечный интеграл. Пусть f_k измеримы на X, $|f_k| \leqslant g$ для всех k и $f_k \to f$ поточечно на X. Тогда*

$$\int_X f_k\ dx \to \int_X f\ dx, \quad k \to \infty.$$

Доказательство. Можно выкинуть из рассмотрения измеримое множество точек, где g равна нулю, так как там и f равна нулю. Также выкинем точки, где g равна $+\infty$, при конечном интеграле g их мера тоже нуль. Так как в пределе выполняется $|f| \leqslant g$ и f измерима по теореме 5.30, то можно говорить об интеграле f и её интеграл конечен.

Возьмём $\varepsilon > 0$ и положим

$$X_k = \{x \in X : \forall \ell \geqslant k, |f_\ell(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon g(x)\},$$

из поточечной сходимости получается, что $X = \bigcup_k X_k$. Множества X_k измеримы, так как они получаются из решений неравенств на измеримые функции операцией счётного пересечения. Применим к ним непрерывность интеграла от g при $k \to \infty$ (теорема 5.62) и получим при достаточно больших k

$$\int_{X_k} g(x)\,dx \geqslant \int_X g(x)\,dx - \varepsilon \Rightarrow \int_{X\setminus X_k} g(x)\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Тогда при достаточно больших k мы можем оценить разность $|f_k(x) - f(x)|$ либо как $\varepsilon g(x)$ при $x \in X_k$, либо грубо как $2g(x)$ в противном случае и после интегрирования получить

$$\int_X |f_k(x) - f(x)|\,dx \leqslant \int_{X_k} \varepsilon g(x)\,dx + \int_{X\setminus X_k} 2g(x)\,dx \leqslant \varepsilon \int_X g(x)\,dx + 2\varepsilon.$$

При $\varepsilon \to +0$ мы получаем требуемое, с учётом неравенства

$$\left|\int_X f_k(x)\,dx - \int_X f(x)\,dx\right| \leqslant \int_X |f_k(x) - f(x)|\,dx.$$

□

Подводя итог, можно сказать, что поточечная сходимость влечёт сходимость в среднем и предельный переход под знаком интеграла при выполнении некоторых дополнительных условий. Рассмотрев функции типа (убегающие вправо ступеньки)

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$$

мы получаем пример, когда поточечный предел равен 0, но интегралы от функций не стремятся к нулю. Так что дополнительные требования, монотонности или ограниченность функцией с конечным интегралом, в самом деле нужны.

Задача 5.70. Докажите, что если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) с ограниченной производной, то

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

[[Используйте определение производной и теорему об ограниченной сходимости.]]

5.11. **Примеры применения интеграла Лебега.**

Теорема 5.71 (Неравенство Коши–Буняковского)**.** *Пусть функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу и их квадраты $|f|^2, |g|^2$ имеют конечные интегралы. Тогда*

$$\left(\int_X f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_X |f(x)|^2\,dx\right) \cdot \left(\int_X |g(x)|^2\,dx\right).$$

Доказательство. Если один из интегралов квадрата равен нулю, например $\int_X |f(x)|^2\,dx = 0$, то по теореме 5.55 функция f равна нулю почти всюду (кроме множества меры нуль). Тогда и интеграл $\int_X f(x)g(x)\,dx$ равен нулю. Иначе, домножив функции на константы, мы можем считать

$$\int_X |f(x)|^2\,dx = \int_X |g(x)|^2\,dx = 1,$$

а в требуемом неравенстве левая и правая часть домножатся на одну и ту же положительную константу, причём правая часть станет равна 1. Тогда интегрируя тривиальное неравенство $|fg| \leqslant |f|^2/2 + |g|^2/2$, мы получим

$$\int_X |fg|\,dx \leqslant 1.$$

Из него следует и аналогичное неравенство и без модуля. □

Следующая теорема позволит нам дифференцировать интеграл по параметру при выполнении некоторых разумных предположений. Производные функций нескольких переменных будут систематически изучаться далее в разделе 6.1, здесь нам будет достаточно определения *частной производной* функции $f : X \times (a,b) \to \mathbb{R}$ в виде

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

По сути это производная функции одной переменной $y \in (a, b)$ при каждом фиксированном $x \in X$.

Теорема 5.72 (Дифференцирование под знаком интеграла)**.** *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по множеству X при любом $y \in (a, b)$, дифференцируема по y и для любого $y \in (a, b)$*

$$|f'_y(x, y)| \leqslant g(x), \quad \int_X g(x)\,dx < +\infty.$$

Тогда

$$\frac{d}{dy} \int_X f(x, y)\,dx = \int_X f'_y(x, y)\,dx.$$

Доказательство. Посчитаем производную интеграла как предел с использованием линейности

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_X f(x, y + h)\,dx - \int_X f(x, y)\,dx}{h} = \lim_{h \to 0} \int_X \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}\,dx.$$

Поточечный переход к пределу под знаком интеграла даёт требуемую формулу. Этот переход обоснован теоремой об ограниченной сходимости, так как

$$\left| \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \right| = |f'_y(x, y + \vartheta(x)h)| \leqslant g(x).$$

□

Теорема 5.73 (Теорема о среднем для интеграла)**.** *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна и ограничена на связном X, $g : X \to \mathbb{R}^+$ имеет конечный интеграл на X. Тогда для некоторого $\xi \in X$ выполняется*

$$\int_X f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_X g(x)\,dx.$$

Доказательство. Будем считать интеграл g положительным, иначе в обеих частях равенства стоят нули. Также выбросим из X точки, где $g(x) = 0$, это не поменяет ни левую, ни правую часть интеграла; после этого считаем $g > 0$. Пусть $m = \inf_{x\in X} f(x)$ и $M = \sup_{x\in X} f(x)$. Тогда интегрируя неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ мы получим

$$m \int_X g(x)\ dx \leqslant \int_X f(x)g(x)\ dx \leqslant M \int_X g(x)\ dx.$$

Так как f непрерывна на связном X, то её область значений как минимум содержит интервал (m, M). Следовательно, при выполнении строгого неравенства

$$m \int_X g(x)\ dx < \int_X f(x)g(x)\ dx < M \int_X g(x)\ dx$$

мы подберём такое ξ, чтобы $f(\xi)\int_X g(x)\ dx$ оказалось равно интегралу. Остаётся рассмотреть крайние случаи. Пусть, например,

$$m \int_X g(x)\ dx = \int_X f(x)g(x)\ dx \Rightarrow \int_X (f(x) - m)g(x)\ dx = 0.$$

По теореме 5.55 в этом случае $f(x) = m$ почти всюду (кроме множества меры нуль) и почти любое $\xi \in X$ подойдёт для нужной нам формулы. □

Можно заметить, что теорема верна и для неположительной g, для этого достаточно изменить её знак, тогда в обеих частях требуемого равенства поменяются знаки. Ещё один вариант теоремы о среднем будет играть принципиальную роль в при изучении условно сходящихся интегралов и далее в гармоническом анализе.

Теорема 5.74 (Вторая теорема о среднем). *Если f интегрируема по Лебегу, а g монотонна и ограничена на $[a, b]$, то при некотором $\vartheta \in [a, b]$*

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = g(a+0) \int_a^\vartheta f(x)\ dx + g(b-0) \int_\vartheta^b f(x)\ dx.$$

Доказательство. Переопределим g на концах, чтобы было $g(a+0) = g(a)$ и $g(b-0) = g(b)$. Функцию f можно приблизить в среднем непрерывно дифференцируемой f_n (сначала можно приблизить элементарно-ступенчатой, а потом и сгладить ступеньки, более подробно про это написано в теореме 7.15) так, что

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\ dx < \frac{1}{n}.$$

Считая доказанной формулу для непрерывно дифференцируемых f_n вместо f, из ограниченности g некоторой константой M, интеграл в левой части при замене f на f_n изменится не более чем на M/n, а в правой части будут получатся разные ϑ_n и при замене f на f_n интегралы тоже изменятся не более чем на M/n. Значит мы будем иметь

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\ dx - g(a) \int_a^{\vartheta_n} f(x)\ dx - g(b) \int_{\vartheta_n}^b f(x)\ dx \right| < \frac{3M}{n}.$$

Переходя к пределу в этом равенстве $n \to \infty$, мы можем считать по теореме Больцано–Вейерштрасса, что $\vartheta_n \to \vartheta$ и воспользоваться непрерывностью интеграла по пределу интегрирования.

Выведем формулу для непрерывно дифференцируемой f, считая её верной для случая, когда и f, и g непрерывно дифференцируемы. Можно приблизить общую g

в среднем монотонной и непрерывно дифференцируемой g_n (аналогично приближению элементарно ступенчатой, но надо проследить за сохранением монотонности) так, что

$$\int_a^b |g(x) - g_n(x)|\,dx < \frac{1}{n}.$$

Теперь уже ограниченность f некоторой константой M позволит нам перейти к пределу в обеих частях равенства. В итоге мы свели доказательство формулы к случаю непрерывно дифференцируемых функций.

Для непрерывно дифференцируемых функций это можно доказать, интегрируя по частям, причём удобно начать со случая $g(b) = 0$. Тогда нам надо получить формулу

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\vartheta f(x)\,dx.$$

Положим $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ и проинтегрируем по частям

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx = -\int_a^b F(x)g'(x)\,dx,$$

так как $F(a) = 0$ и $g(b) = 0$. Пусть без ограничения общности g убывает, тогда из $-g'(x) \geqslant 0$ и по теореме 5.73 для F найдётся ϑ, такое что

$$\int_a^b F(x)(-g'(x))\,dx = F(\vartheta)\int_a^b (-g'(x))\,dx = F(\vartheta)g(a),$$

что и доказывает равенство в случае $g(b) = 0$. В общем случае напишем

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)(g(x) - g(b))\,dx + \int_a^b f(x)g(b)\,dx =$$
$$= (g(a) - g(b))\int_a^\vartheta f(x)\,dx + g(b)\int_a^b f(x)\,dx = g(a)\int_a^\vartheta f(x)\,dx + g(b)\int_\vartheta^b f(x)\,dx.$$

□

5.12. **Несобственный интеграл функции одной переменной.** Во многих ситуациях интеграл Лебега оказывается достаточным, но аналогично ситуации с рядами, иногда хочется проинтегрировать то, что заведомо не является абсолютно интегрируемым. По аналогии с суммами ряда сделаем определение:

Определение 5.75. *Несобственным интегралом* на интервале (a, b) с особенностью в b называется предел

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)\,dx$$

в предположении, что все интегралы $\int_a^\beta f(x)\,dx$ конечны.

В случае существования интеграла Лебега $\int_a^b f(x)\,dx$ по свойству непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела несобственный интеграл оказывается равным собственному. При этом в силу свойства абсолютной сходимости интеграла Лебега интеграл от $|f|$ также будет конечен. Поэтому содержательный случай несобственного интеграла — это *условная сходимость*, когда

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = +\infty$$

и интеграл может существовать только в несобственном смысле.

Теорема 5.76 (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла)**.** *Несобственный интеграл $\int_a^{*b} f(x)\ dx$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\beta(\varepsilon) : \forall\xi,\eta \in [\beta(\varepsilon), b), \left|\int_\xi^\eta f(x)\ dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Следует из критерия Коши существования предела функции. □

Есть два полезных признака сходимости несобственного интеграла:

Теорема 5.77 (Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла)**.** *Пусть найдётся константа M, такая что при любом $\beta \in (a, b)$*

$$\left|\int_a^\beta f(x)\ dx\right| \leqslant M,$$

а функция g монотонно стремится к нулю при $x \to b - 0$. Тогда

$$\int_a^{*b} f(x)g(x)\ dx$$

сходится.

Доказательство. В выражении из критерия Коши используем вторую теорему о среднем:

$$\left|\int_\xi^\eta f(x)g(x)\ dx\right| \leqslant |g(\xi)| \left|\int_\xi^\vartheta f(x)\ dx\right| + |g(\eta)| \left|\int_\vartheta^\eta f(x)\ dx\right| \leqslant 2M(|g(\xi))| + |g(\eta)|).$$

Заметим, что из стремления g к нулю, при $\xi,\eta \geqslant \beta(\varepsilon)$ из определения предела $g(b - 0)$ это выражение будет не более $4M\varepsilon$. □

Теорема 5.78 (Признак Абеля сходимости несобственного интеграла)**.** *Пусть интеграл*

$$\int_a^{*b} f(x)\ dx$$

сходится, а функция g монотонна и ограничена. Тогда

$$\int_a^{*b} f(x)g(x)\ dx$$

сходится.

Доказательство. Пусть $|g(x)| \leqslant M$. В выражении из критерия Коши используем вторую теорему о среднем:

$$\left|\int_\xi^\eta f(x)g(x)\ dx\right| \leqslant |g(\xi)| \left|\int_\xi^\vartheta f(x)\ dx\right| + |g(\eta)| \left|\int_\vartheta^\eta f(x)\ dx\right| \leqslant M \left|\int_\xi^\vartheta f(x)\ dx\right| + M \left|\int_\vartheta^\eta f(x)\ dx\right|.$$

Из критерия Коши сходимости $\int_a^{*b} f(x)\ dx$ следует, что при $\xi,\eta \geqslant \beta(\varepsilon)$ интегралы в формуле будут не более ε и всё выражение будет не более $2M\varepsilon$. □

Задача 5.79. Докажите, что интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\ dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\ dx$$

сходятся абсолютно только при $\alpha > 1$, но сходятся условно в несобственном смысле при $\alpha > 0$.

[[Используйте признак Дирихле для доказательства сходимости, критерий Коши для доказательства расходимости, и оценку $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$ для доказательства отсутствия абсолютной сходимости.]]

Задача 5.80 (Интегральный признак сходимости числового ряда). Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ убывает. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\; dx < +\infty.$$

[[Докажите неравенства

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\; dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

заключив f между парой ступенчатых функций.]]

Задача 5.81. Пусть функция $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ убывает и стремится к нулю на бесконечности. Докажите, что

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin x\; dx \geqslant 0.$$

[[Примените вторую теорему о среднем.]]

Задача 5.82. Пусть функция $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ выпукла и стремится к нулю на бесконечности. Докажите, что

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos x\; dx \geqslant 0.$$

[[Докажите, что можно интегрировать по частям. При возникновении затруднений можно посмотреть раздел 5.15.]]

5.13. **Теорема Фубини и линейная замена переменных в интеграле.** Рассмотрим теперь теорему, позволяющую сводить вычисление интеграла функции нескольких переменных к последовательным вычислениям интеграла по одной переменной.

Теорема 5.83 (Теорема Фубини). *Пусть функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема на произведении интегрируемых множеств. Тогда*

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\; dxdy = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\; dy \right) dx$$

и в частности интеграл в скобках справа существует при почти всех $x \in X$ и является измеримой функцией от $x \in X$.

Доказательство. Продолжив функцию нулём, будем считать $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, тогда в выражении справа функция тоже продолжается нулём и ничего не меняется.

Докажем сначала теорему для борелевских неотрицательных функций, для которых левая часть и внутренний интеграл в правой части определены. Из доказательства теоремы 5.45 следует, что всякую неотрицательную функцию можно представить в виде суммы счётного числа неотрицательных ступенчатых. Действительно, сначала можно вычесть из функции неотрицательную ступенчатую так, чтобы остаток был в диапазоне $[0, 1]$. Потом можно вычесть неотрицательную ступенчатую так, чтобы остаток был в диапазоне $[0, 1/2]$, потом $[0, 1/4]$ и т.д. Заметим, что все ступеньки при этом будут борелевскими. Так как и интеграл слева в формуле и повторный интеграл справа обладают свойством счётной аддитивности, то это сводит доказательство к рассмотрению неотрицательных борелевских ступенчатых функций. Применяя счётную аддитивность ещё раз, мы сведём доказательство к одной ступеньке, то есть к характеристической функции борелевского множества.

Посмотрим, что можно сказать о характеристической функции борелевского множества. Если это множество параллелепипед, то утверждение очевидно (проверьте!). Если множество открытое, то его можно представить в виде объединения счётного числа элементарных параллелепипедов, таким образом теорема опять последует из счётной аддитивности. Компактное множество можно представить в виде разности двух открытых и теорема последует из аддитивности. Далее для произвольного борелевского множества теорема также последует из счётной аддитивности и монотонной сходимости интеграла, применённой несколько раз. Заметим, что внешний интеграл в правой части равенства будет существовать, так как мы (несколько раз) представляем подынтегральное выражение в виде поточечного предела возрастающей последовательности неотрицательных функций, каждый раз удостоверяя его борелевость.

Если функция не постоянного знака с конечным интегралом, то теорема 5.52 позволяет свести утверждение к знакопостоянному случаю. Если же функция не борелевская, то теорему также можно свести к случаю характеристической функции измеримого по Лебегу множества, правда надо допустить, что для некоторых $x \in X$, составляющих множество меры нуль, интеграл в скобках справа может не быть определён. По теореме 5.32 после вычитания борелевского множества доказательство сведётся к характеристической функции множества меры нуль. Приблизим это множество сверху убывающей последовательностью открытых множеств, у которых меры стремятся к нулю. В терминах характеристических функций пусть это означает $0 \leqslant f(x, y) \leqslant g_k(x, y)$. Для g_k формула уже доказана и мы получаем

$$\lim_{k\to\infty} \int_X \left(\int_Y g_k(x, y)\, dy\right) dx = \lim_{k\to\infty} \int_{X\times Y} g_k(x, y)\, dxdy = 0.$$

Переставив пределы со знаком интеграла по теореме об ограниченной сходимости получим

$$\int_X \lim_{k\to\infty} \left(\int_Y g_k(x, y)\, dy\right) dx = 0.$$

Выходит, что у нас есть интегрируемая функция

$$G(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\int_Y g_k(x, y)\, dy\right)$$

и её интеграл равен нулю. По теореме 5.55 это означает, что она отличается от нуля только на множестве меры нуль $\Sigma \subset X$. На множестве $X \setminus \Sigma$ она равна нулю, а из неравенства $0 \leqslant f(x, y) \leqslant g_k(x, y)$ следует в пределе, что для фиксированного $x \in X \setminus \Sigma$ функция $f(x, y)$ интегрируема по y и её интеграл равен нулю. Это верно для почти всех x, следовательно, повторный интеграл для f тоже будет равен нулю. ☐

Рассматривая интеграл произведения характеристических функций сразу получаем следствие (которое можно было доказать и непосредственно по определению, начав с элементарных множеств):

Следствие 5.84. *Если множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо и $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ измеримо, то $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ тоже измеримо и*

$$\mu(X \times Y) = \mu(X) \cdot \mu(Y).$$

Менее тривиально, мы получаем способ найти меру множества $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, если мы знаем меры его сечений

$$Z_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in Z\}.$$

Тогда теорема Фубини, утверждает, что при почти всех x множество Z_x измеримо и

$$\mu Z = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_Z(x,y)\ dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_Z(x,y)\ dy \right)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mu Z_x\ dx.$$

Задача 5.85. Приведите пример, когда повторные интегралы функции двух переменных в обоих порядках x, y и y, x существуют, но интеграл функции двух переменных не существует.

[[Вспомните, что интеграл Лебега от функции f абсолютный, то есть подразумевает существование интеграла от $|f|$, пример можно построить даже не для интеграла, а для повторного суммирования ряда.]]

Докажем одно полезное следствие теоремы Фубини, которое сводит интеграл от любой функции к интегралу от функции одной переменной.

Теорема 5.86. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ неотрицательна и измерима. Обозначим $g(y) = \mu\{x \in X : f(x) \geqslant y\}$. Тогда*

$$\int_X f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} g(y)\ dy.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $S_f \subset X \times [0, +\infty)$, состоящее из пар (x, y), таких что $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Если функция ступенчатая, $f = \sum_i c_i \chi_{X_i}$, то её множество S_f представляется в виде

$$S_f = \bigcup_i X_i \times [0, c_i]$$

и следовательно измеримо. Произвольную измеримую f можно по теореме 5.45 представить в виде поточечного предела убывающей последовательности ступенчатых, $f_k \to f$, и тогда

$$S_f = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{f_k}$$

окажется измеримым.

Применяя теорему Фубини в порядке (x, y) и в порядке (y, x) к характеристической функции этого множества, получаем равенство двух выражений из формулировки теоремы. ☐

Обратите внимание, что множество S_f (подграфик функции) в доказательстве теоремы измеримо и его мера равна интегралу функции. Это объясняет интерпретацию интеграла, как «площади под графиком».

Теорема Фубини также позволяет ответить на вопрос, как меняется интеграл при линейных заменах переменной в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5.87 (Теорема о линейной замене переменных в интеграле Лебега). *Для интегрируемой $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и линейного преобразования $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ dy = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\ dx.$$

Доказательство. Рассмотрим для начала элементарную замену $y = Ax$, при которой $(j \neq k)$

$$\forall i \neq j, y_i = x_i \text{ и } y_j = x_j + a_{jk} x_k.$$

Без ограничения общности, пусть $j = 1$, тогда по теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2, \dots, y_n)\,dy_1\right) dy_2 \dots dy_n =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 + a_{1k}x_k, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\right) dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(y(x))\,dx,$$

При переходе от переменной y_1 к переменной x_1 в интеграле мы использовали только то, что при фиксированных остальных переменных эти две переменные отличаются сдвигом, а мера и интеграл Лебега очевидно инвариантны относительно сдвига.

Мы доказали утверждение для элементарных отображений, при них интеграл не меняется. Воспользуемся фактом из линейной алгебры, что всякое линейное преобразование является композицией элементарных преобразований, перестановок координат и диагонального преобразования. Это следует из того, что имея невырожденную матрицу, можно сделать её единичной с помощью перестановок строк, умножения строк на ненулевые числа, и прибавления к одной строки другой, умноженной на число (метод Гаусса). Все эти операции можно понимать как умножение исходной матрицы слева на матрицы перестановки, диагональные матрицы или элементарные матрицы, поэтому в итоге (так как обратные к элементарным тоже элементарные) исходная матрица будет представлена в виде произведения таких матриц. Также важно, что детерминант произведения равен произведению детерминантов (некоторые сведения про это имеются в разделе 6.9), а значит утверждение теоремы достаточно доказывать для тех отображений, в произведение которых разложено исходное.

Перестановки координат очевидно не меняют меру Лебега и интеграл. Для диагонального преобразования $y_i = a_i x_i$ меры элементарных параллелепипедов умножаются на $|\det A| = |a_1 \dots a_n|$, а значит и на всех этапах определения меры Лебега все меры умножаются на $|\det A|$. Из этого следует требуемая формула. □

Заметим, что в этом рассуждении можно было делать и замены переменных вида $y_1 = x_1 + f(x_2, \dots, x_n)$ для некоторой непрерывной (или даже борелевской) функции f от $n-1$ переменной. Развитие этой идеи приводит к доказательству теоремы о произвольной гладкой замене переменных в интеграле, теоремы 6.98.

5.14. **Объём шара, интеграл Пуассона, гамма и бета функции.** Мы продолжаем изучать приложения интеграла Лебега, на этот раз с применением теоремы Фубини.

Теорема 5.88 (Объём шара и интеграл Пуассона)**.** *Рассмотрим единичный шар*

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}.$$

Тогда

$$\pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \mu B_n \cdot \Gamma(n/2 + 1),$$

где

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t}\,dt.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_n(x) = e^{-|x|^2} = e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}$. По теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2}\,dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2}\,dx_n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^n.$$

Можно сказать, что интеграл от f_n равен I^n для некоторой константы I. С другой стороны, по теореме 5.86

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx_1\dots dx_n = \int_0^1 \mu\{|x|^2 \leqslant -\ln y\}\,dy.$$

Множество $\{|x|^2 \leqslant -\ln y\}$ является шаром радиуса $r = \sqrt{-\ln y}$, его мера равна $r^n\mu B^n$ по теореме о линейной замене переменных. Значит

$$I^n = \mu B^n \int_0^1 (-\ln y)^{n/2}\,dy.$$

В интеграле по одной переменной можно сделать замену $-\ln y = t$, в этом случае на ограниченных отрезках функция непрерывна, интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана и замена разрешена, потом можно перейти от интегралов по отрезкам к интегралу по полупрямой с помощью непрерывности интеграла Лебега. Тогда мы получаем

$$I^n = \mu B^n \int_0^{+\infty} t^{n/2}e^{-t}\,dt = \mu B^n\Gamma(n/2+1).$$

Осталось найти μB^n хотя бы в одной размерности. При $n = 2$ у нас $\Gamma(2) = 1$ и мы можем найти

$$\mu B^2 = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \pi,$$

следовательно $I = \sqrt{\pi}$ и $\mu B^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$. $\square$

В формуле для объёма шара возникла *гамма-функция* $\Gamma(p)$. Установим некоторые её полезные свойства. Найдём её значение при $p = 1$, здесь интеграл можно посчитать явно

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-t}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\left(1-e^{-u}\right) = 1.$$

Теорема 5.89 (Формула понижения). *Для $p > 0$ верно тождество*

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Доказательство. Напишем с использованием теоремы Фубини для функции, определённой при $0 \leqslant u \leqslant t$ как $u^{p-1}e^{-t}$, а на остальных точках плоскости определённой нулём:

$$\frac{1}{p}\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{p}e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t u^{p-1}\,du\right)e^{-t}\,dt =$$
$$= \int_0^{+\infty} u^{p-1}\left(\int_u^{+\infty} e^{-t}\,dt\right)du = \int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du = \Gamma(p).$$

$\square$

Применяя формулу для объёма шара в размерности 1, мы получим равенство

$$\mu B^1 = 2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(3/2)} \Rightarrow \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

С помощью понижения степени тогда можно найти

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Задача 5.90. Докажите, что для $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n},$$

где $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ и считаем $(-1)!! = 1$.

[[Примените известные значения $\Gamma(1) = 1$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, а потом примените формулу понижения.]]

Введём также *бета-функцию* при $p, q > 0$ как интеграл от неотрицательного выражения

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt.$$

Теорема 5.91. *Верна формула*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Доказательство. Напишем (используя теорему Фубини)

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_{x,y\geqslant 0} x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}\,dxdy.$$

Сделаем линейную замену координат (x,y) на $(x, s = x+y)$, её определитель равен единице и поэтому можно написать

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^s x^{p-1}(s-x)^{q-1}\,dx\right)e^{-s}\,ds.$$

Далее во внутреннем интеграле удобно линейно заменить $x = ts$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и получить

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\; s^{p+q-1}dt\right)e^{-s}\,ds =$$
$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\right)s^{p+q-1}e^{-s}\,ds = B(p,q)\Gamma(p+q).$$

□

Задача 5.92. Найдите при $u, v > -1$ интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^u x \cos^v y\,dx.$$

[[Сведите к бета-функции.]]

Формула для интеграла Пуассона позволяет выяснить асимптотику гамма-функции и получить формулу Стирлинга.

Теорема 5.93 (Формула Стирлинга). *Для $x \to +\infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = \sqrt{2\pi x}x^x e^{-x}(1+o(1)).)$$

Доказательство. Сделаем замену $t = sx$, тогда можно записать интеграл в виде

$$x! = x^{x+1}\int_0^{+\infty} e^{-x(s-\ln s)}\,ds.$$

Функция $s - \ln s$ имеет минимум в точке 1, равный 1, то есть представляется в виде

$$s - \ln s = 1 + \varphi(s),$$

где $\varphi(x) \geqslant 0$. Тогда

$$x! = x^{x+1}e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(s)}\, ds,$$

нам надо выяснить асимптотику интеграла $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(s)}\, ds$. Посчитаем вторую производную φ в точке 1, она равна 1. Значит, для всякого $\varepsilon > 0$ мы сможем найти интервал $(a, b) \ni 1$, такой что на нём

$$(1/2 - \varepsilon)(s-1)^2 \leqslant \varphi(s) \leqslant (1/2 + \varepsilon)(s-1)^2.$$

На отрезках $[0, a]$ и $[b, 2]$ функция φ не менее некоторой положительной константы, так что соответствующие части $I(x)$ убывают экспоненциально с ростом x. На промежутке $[2, +\infty)$ имеем неравенство $\varphi(s) \geqslant 1 - \ln 2 + (s-2)/2$, что также даёт экспоненциальное убывание соответствующей части $I(x)$. Тогда нам остаётся оценить часть на отрезке $[a, b]$, выпишем её

$$\int_a^b e^{-x(1/2+\varepsilon)(s-1)^2}\, ds \leqslant I_{[a,b]}(s) \leqslant \int_a^b e^{-x(1/2-\varepsilon)(s-1)^2}\, ds.$$

Оценивающие интегралы также можно продолжить на всю прямую, при этом они изменяться на экспоненциально убывающий с ростом x множитель. Но тогда они превращаются в интегралы Пуассона, и с точность до экспоненциально убывающих множителей наш интеграл $I(x)$ лежит в отрезке $\left[\sqrt{\frac{2\pi}{x(1+2\varepsilon)}}, \sqrt{\frac{2\pi}{x(1-2\varepsilon)}}\right]$. Значит,

$$x! = x^{x+1}e^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}(1 + o(1)) = \sqrt{2\pi x}x^x e^{-x}(1 + o(1)).$$

$\square$

Задача 5.94 (Объём тела вращения). Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ измерима, а множество $X \subset \mathbb{R}^3$ задано условиями

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y^2 + z^2 \leqslant f(x)^2.$$

Докажите, что

$$\mu X = \int_a^b \pi f(x)^2\, dx.$$

[[Используйте теорему Фубини, проинтегрировав сначала по переменным (y, z).]]

Задача 5.95. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма. Докажите формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\, dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2} \cdot (\det Q)^{-1/2}.$$

[[Линейной ортогональной заменой переменных сделайте Q диагональной.]]

Задача 5.96. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма, а E_C — эллипсоид $\{x : Q(x) \leqslant C\}$. Докажите формулу

$$\mu E = \frac{\pi^{n/2} C^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)(\det Q)^{1/2}}.$$

[[Выведите из предыдущей задачи аналогично формуле для объёма шара.]]

Задача 5.97. Посчитайте интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 e^{-|x|^2}\ dx_1 \dots dx_n.$$

[[Используйте теорему Фубини и интегрирование по частям.]]

5.15. **Лемма Безиковича и дифференцируемость почти всюду.** В этом разделе мы изучим некоторые продвинутые свойства интеграла Лебега и варианты формулы Ньютона–Лейбница. Мы рассматриваем только одномерный вариант, хотя у первых двух теорем есть и многомерные аналоги.

Теорема 5.98 (Лемма Безиковича о покрытии на прямой). *Пусть в каждой точке x измеримого $X \subset \mathbb{R}$ дан набор отрезков $\{I_{x,k}\}_k$, каждый из которых содержит x строго внутри и длины которых стремятся к нулю при $k \to \infty$. Тогда из всех этих отрезков можно выбрать счётную систему попарно не пересекающихся отрезков $\mathcal{C}$, которая покрывает почти всё X, то есть $\mu X \setminus \bigcup \mathcal{C} = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим компактное $K \subset X$, у которого $\mu K \geqslant 1/2 \mu X$. Оно покрыто внутренностями таких отрезков, следовательно оно покрыто некоторой конечной системой таких отрезков. Выберем в этой системе минимальную подсистему, покрывающую K. В минимальной подсистеме ни один отрезок не содержится внутри другого, поэтому можно занумеровать их слева направо так, что их левые концы и их правые концы будут идти в соответствии с данным порядком. Тогда можно заметить, что если отрезок номер i пересекает отрезок номер $j > i$, то отрезки с номерами между ними можно было бы выкинуть, не уменьшая их объединения. Следовательно, пересекаются только отрезки с соседними номерами. Тогда разобьём нашу систему на чётные и нечётные отрезки, какая-то из них, $\mathcal{C}_1$, покрывает не менее половины меры μK, следовательно она же покрывает не менее четверти меры X.

Теперь выбросим из X объединение $\bigcup \mathcal{C}_1$, получив $X_2 = X \setminus \bigcup \mathcal{C}_1$ с $\mu X_2 \leqslant 3/4 \mu X$. В соответствующих системах отрезков с центрами в X_2 выбросим те, которые пересекаются с $\bigcup \mathcal{C}_1$. Тогда всё ещё верны условия теоремы для X_2, так как мы выкинули замкнутое множество и в каждой системе $\{I_{x,k}\}_k$ длины отрезков стремились к нулю и при $x \in X_2$ в системе $\{I_{x,k}\}_k$ осталось бесконечно много отрезков. Продолжая таким образом, мы будем каждый раз выбрасывать конечное число отрезков $\mathcal{C}_k$, не пересекающихся между собой и не пересекающихся с предыдущими, и уменьшать меру остатка X_{k+1} множества X как минимум на четверть. Сделав такое счётное количество раз, мы получим счётную систему отрезков, которые попарно не пересекаются и покрывают всё X с точностью до множества меры нуль. □

Задача 5.99 (Лемма Безиковича о покрытии в $\mathbb{R}^n$). * Пусть в каждой точке x измеримого $X \subset \mathbb{R}^n$ дан набор шаров $\{B_{x,k}\}_k$ с центрами в x, радиусы которых стремятся к нулю при $k \to \infty$. Тогда из всех этих шаров можно выбрать счётную систему попарно не пересекающихся шаров $\mathcal{C}$, которая покрывает почти всё X, то есть $\mu X \setminus \bigcup \mathcal{C} = 0$.

[[Аналогично одномерному случаю, надо вначале покрыть конечной системой непересекающихся шаров какую-то фиксированную долю X. Для этого надо покрыть X некоторой подсистемой из этих шаров $\mathcal{D}$, которую можно раскрасить в конечное число $M(n)$ цветов так, что шары одного цвета из $\mathcal{D}$ попарно не пересекаются. Тогда один из цветов будет покрывать не менее $1/M(n)$ от меры X. Для построения $\mathcal{D}$ можно использовать жадный алгоритм, который сводится к выбору на каждом шаге самого большого шара (точнее, близкого к супремуму) из тех шаров системы, центры которых не покрыты ранее выбранными шарами. Далее надо доказать, что в результате работы жадного алгоритма выбранный на некотором шаге шар пересекает не более $M(n) - 1$ предыдущих, для подходящей константы $M(n)$, зависящей только от размерности.]]

Из леммы Безиковича следует важное утверждение о структуре измеримых множеств:

Теорема 5.100 (Плотность измеримого множества). *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ измеримо. Тогда для почти всех $x \in X$*

$$\lim_{t\to+0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 1$$

и для почти всех $x \notin X$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 0.$$

Доказательство. Предположим противное первому утверждению (второе делается аналогично). Отклонение от утверждения возможно, только если при некотором $\varepsilon > 0$

$$\varliminf_{t\to+0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} < 1-\varepsilon$$

в некоторых точках множества X. Множество X_ε, определяемое таким неравенством, измеримо, так как до взятия предела выражение непрерывно зависит от t, что позволяет в логической формуле нижнего предела использовать только рациональные положительные t в счётном количестве, получая в итоге борелевское множество.

При достаточно малом ε мера X_ε должна быть положительной, иначе по счётной аддитивности по рациональным положительным ε отклонение от равенства

$$\lim_{t\to+0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 1$$

было бы только на множестве меры нуль, а мы предполагаем противное. Пусть теперь при некотором положительном ε множество $Y = X_\varepsilon$ имеет положительную меру. Рассмотрим открытое $V \supseteq Y$ меры не более $(1+\varepsilon)\mu Y$ и раскроем определение нижнего предела. Для всякой $x \in Y$ у нас найдутся сколь угодно короткие отрезки $[x-t, x+t] \subset V$, для которых

$$\mu(Y \cap [x-t, x+t]) \leqslant \mu(X \cap [x-t, x+t]) < (1-\varepsilon)\mu[x-t, x+t]$$

Применим лемму Безиковича к множеству Y и таким отрезкам, в результате Y почти полностью покроется ими. Так как они все лежат в V, то суммируя неравенства по полученной системе попарно не пересекающихся отрезков мы узнаем, что

$$\mu Y \leqslant (1-\varepsilon)\mu V \leqslant (1-\varepsilon^2)\mu Y,$$

противоречие. □

Аналогично доказывается более общий факт про функции вместо множеств:

Теорема 5.101 (Усреднение интегрируемой функции). *Если f локально интегрируема на $\mathbb{R}$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \lim_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\, d\xi}{2t} = \lim_{t\to+0} \frac{\int_{x}^{x+t} f(\xi)\, d\xi}{t} = \lim_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x} f(\xi)\, d\xi}{t}.$$

Доказательство. Докажем сначала для симметричного усреднения и посмотрим, как может нарушаться требуемое равенство, один из вариантов (остальные аналогичны):

$$f(x) < \varlimsup_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\, d\xi}{2t}. \tag{5.1}$$

Чтобы доказать, что такое бывает только на множестве меры нуль, достаточно доказать (из счётной аддитивности), что для любых двух рациональных $a < b$ условия

$$f(x) < a < b < \varlimsup_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\, d\xi}{2t} \tag{5.2}$$

могут выполняться только на множестве меры нуль. Действительно, множество, на котором выполняется (5.1) является объединением счётного числа (по рациональным $a < b$) множеств, на которых выполняется (5.2).

Обратите внимание, что верхний предел в формуле измерим, так как выражение непрерывно по x и t и логическая формула для предела может быть выписана только для рациональных t; поэтому неравенство (5.2) задаёт измеримое множество. Допустим противное, такое множество Y для некоторых рациональных $a < b$ имеет положительную меру, тогда по строгой монотонности интеграла Лебега

$$\int_Y f(x)\, dx < a\mu Y.$$

По свойству непрерывности интеграла Лебега найдём открытое $V \subseteq Y$, такое что

$$\int_{V\setminus Y} |f(x)|\, dx < (b-a)\mu Y.$$

Теперь из определения верхнего предела в каждой точке $x \in Y$ мы найдём стягивающуюся последовательность отрезков $[x-t, x+t] \subset V$, в которой выполняется

$$\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\, d\xi > b\mu[x-t, x+t].$$

Применяя к множеству Y и этой системе лемму Безиковича, мы получим некоторое объединение счётной системы отрезков Y', такое что $Y' \subseteq V$, $\mu(Y \setminus Y') = 0$ и в сумме по счётной аддитивности интеграла Лебега

$$\int_{Y'} f(\xi)\, d\xi \geqslant b\mu Y' \geqslant b\mu Y \Rightarrow \int_Y f(\xi)\, d\xi > b\mu Y - (b-a)\mu Y = a\mu Y,$$

противоречие.

Для усреднения слева и справа лемма Безиковича так сразу не работает. Однако можно заметить, что, например, при всяком нарушении типа

$$f(x) < a < b < \varlimsup_{t\to+0} \frac{\int_{x}^{x+t} f(\xi)\, d\xi}{t}$$

мы сможем найти сколь угодно короткие отрезки $[x, x+t]$, на которых

$$\int_{x}^{x+t} f(\xi)\, d\xi > b\mu[x, x+t].$$

А потом из непрерывности интеграла по нижнему пределу для каждого такого отрезка можно найти произвольно малое $t' > 0$, такое что

$$\int_{x-t'}^{x+t} f(\xi)\, d\xi > b\mu[x-t', x+t].$$

Таким образом точка x войдёт внутрь модифицированного отрезка и противоречивое неравенство сохранится. Далее лемма Безиковича применима и аналогично случаю симметричного усреднения получается противоречие. $\square$

Теперь мы в состоянии изучить, неформально говоря, вопрос о существовании почти всюду первообразной у интегрируемой функции и выполнении формулы Ньютона–Лейбница в весьма общем смысле:

Теорема 5.102 (Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом). *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема, то функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

почти всюду дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ почти всюду.

Доказательство. Так как

$$F(x+t) - F(x) = \int_x^{x+t} f(\xi)\,d\xi,$$

то это утверждение эквивалентно одному из утверждений предыдущей теоремы. □

Задача 5.103. Докажите что если у измеримой функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интеграл по любому отрезку $[a, x] \subseteq [a, b]$ равен нулю, то она равна нулю почти всюду.

[[Примените предыдущую теорему.]]

В ситуации предыдущей теоремы мы будем говорить, что F является *обобщённой первообразной* интегрируемой f.

В теореме 5.102 мы шли от некоторой функции к первообразной, но иногда полезно идти от функции к её производной почти всюду. Мы установим одно из достаточных условий на функцию, позволяющее ей фигурировать в качестве обобщённой первообразной в формуле Ньютона–Лейбница.

Теорема 5.104. *Если $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|F(x) - F(y)| \leqslant L|x - y|,$$

то она почти всюду имеет производную и её приращение на отрезке равно интегралу производной,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим верхнюю правую производную, обозначим её $\varphi(x)$, она измерима и ограничена из липшицевости. Следовательно, она интегрируема и по теореме 5.102

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$$

почти всюду имеет производную, равную $\varphi(x)$.

Посмотрим теперь на разность $G(x) = F(x) - \Phi(x)$, она почти всюду имеет правую производную, равную нулю. Мы хотим доказать, что $G(b) \geqslant G(a)$, отсюда будет следовать, что приращение $F(b) - F(a)$ не менее интеграла правой верхней производной F. Доказав аналогичным образом, что приращение не более интеграла от правой нижней производной, мы получим, что на самом деле правая нижняя и правая верхняя производные F совпадают почти всюду и приращение $F(b) - F(a)$ равно интегралу любой из них. После этого теорема 5.102 показывает, что F на самом деле почти всюду дифференцируема.

Итак, мы работаем с G, имеющей почти всюду нулевую верхнюю правую производную и являющейся липшицевой с некоторой константой (так как Φ тоже была липшицевой). Предположим противное тому, что мы хотим доказать: $G(b) < G(a)$. Прибавив к G линейную функцию $2\varepsilon x$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ мы оставим в силе неравенство

$$G(b) < G(a) - \varepsilon, \tag{5.3}$$

а верхняя правая производная G почти всюду будет больше ε, пусть последнее выполняется на множестве $X \subseteq [a, b]$, $\mu X = \mu[a, b]$. Также функция G остаётся липшицевой и мы обозначим её константу липшицевости той же буквой L. Будем считать, что концы отрезка не входят в X. По определению верхней правой производной, для любого $x \in X$ найдётся произвольно маленькое t, такое что

$$G(x + t) - G(x) > \varepsilon t.$$

Тогда по непрерывности можно найти достаточно маленькое $t' < t$, так что будет выполняться

$$G(x + t) - G(x - t') > 0.$$

По лемме Безиковича покроем такими попарно не пересекающимися отрезками $[x - t', x + t]$ почти всё X, а значит и весь отрезок $[a, b]$ кроме множества меры нуль. Теперь оставим лишь конечное число таких отрезков $[x - t', x + t]$ так, чтобы суммарная длина дополнительных промежутков отрезка $[a, b]$ была менее ε/L. Тогда на оставленных отрезках G имеет положительное приращение по их выбору, а на дополнительных интервалах она из-за условия Липшица убывает менее чем на ε в сумме. Но это противоречит (5.3). □

Далее в разделе про гармонический анализ будут доказаны теоремы 7.20 и 7.21, которые полностью ответят на вопрос, когда можно писать формулу Ньютона–Лейбница для приращения некоторой функции. На самом деле предыдущие две теоремы уже демонстрируют все нужные для этого соображения.

Задача 5.105. Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю.

[[Вспомните про канторово множество, пусть функция возрастает только на нём, а на его дополнении кусочно постоянна.]]

Задача 5.106. ** Докажите, что монотонная на отрезке функция почти всюду имеет производную.

[[Действуйте аналогично доказательству дифференцируемости почти всюду липшицевой функции, но более аккуратно.]]

Задача 5.107. * Докажите, что 1-липшицево отображение $f : X \to \mathbb{R}^n$ для $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (то есть отображение со свойством $|f(x) - f(x)| \leqslant |x - y|$) не увеличивает верхнюю меру Лебега множества и переводит измеримые множества в измеримые.

[[Используйте многомерный вариант леммы Безиковича.]]

Задача 5.108 (Теорема Радемахера). * Докажите, что липшицева функция на области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ почти всюду дифференцируема (в смысле определения из раздела 6.1).

[[Проверьте наличие частных производных почти всюду по одномерному случаю, потом для значений этих производных используйте многомерный вариант теоремы о плотности.]]

6. Дифференциальная геометрия

6.1. **Дифференцируемые отображения открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$.** Определим понятие дифференцируемости отображений, аналогичное дифференцируемости функций одной переменной.

Определение 6.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \quad x \to x_0,$$

где $Df_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является линейным отображением и называется *производной* f в точке x_0.

По сравнению с определением производной функции одной переменной здесь производная — это не число, а линейное отображение. Впрочем, старому определению это не противоречит, так как линейное отображение $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является умножением на некоторое действительное число, которое и есть производная в старом смысле.

Определение 6.2. В условиях предыдущего определения f называется *непрерывно дифференцируемым* на U если оно дифференцируемо в каждой точке и Df_x непрерывно зависит от x.

Лемма 6.3. *Для всякого линейного отображения $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ найдётся число $\|A\|$ такое что для всех $x \in \mathbb{R}^n$*

$$|Ax| \leqslant \|A\| \cdot |x|.$$

Доказательство. Заметим, что сумму модулей координат Ax можно оценить как сумму модулей матричных элементов A, умноженную на максимальный модуль координаты x. Так как длины вектора не больше суммы модулей его координат и не меньше максимального модуля координаты, то сумма модулей матричных элементов A сгодится в качестве $\|A\|$. □

Обычно за *норму линейного отображения* $\|A\|$ берётся минимальное число, которое гарантирует неравенство

$$|Ax| \leqslant \|A\| \cdot |x|$$

для всех x. Обе части неравенства умножаются на $|\lambda|$ при умножении x на число λ, поэтому это неравенство достаточно проверить, например, на единичной сфере $\{x : |x| = 1\}$. Тогда из соображений компактности видно, что оптимальное значение $\|A\|$ в неравенстве достигается.

Задача 6.4. Найдите $\|A\|$ для самосопряжённого оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и докажите, что для любого линейного отображения $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ выполняется

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A^*\|^2.$$

[[Приведите в некотором ортонормированном базисе самосопряжённый оператор A к диагональному виду, изучите также максимум выражения (x, Ax) по единичным векторам x для самосопряжённого A.]]

С учётом существования нормы линейной части, для дифференцируемого отображения верна оценка

$$|f(x) - f(x_0)| = O(|x - x_0|)$$

при $x \to x_0$ и мы получаем:

Следствие 6.5. *Если отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x_0 \in U$, то оно непрерывно в точке x_0.*

Следующее свойство является главным инструментом практического вычисления производных отображений:

Теорема 6.6 (Дифференцирование композиции). *Если f дифференцируемо в точке x_0, а g дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x и $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$.*

Доказательство. Запишем

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(y_0) + Dg_{y_0}(f(x) - f(x_0)) + o(|f(x) - f(x_0)|) = \\ &= g(y_0) + Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}(x - x_0) + Dg_{y_0} o(|x - x_0|) + o(|Df_{x_0}(x - x_0)|) + o(o(|x - x_0|)) = \\ &= g(y_0) + Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \end{aligned}$$

используя оценку из предыдущей леммы $|Ax| = O(|x|)$. □

Для функций $f : U \to \mathbb{R}$ мы будем обозначать $Df_x = df_x$ и называть это *дифференциал функции*. По определению это линейная форма на $\mathbb{R}^n$.

Определение 6.7. *Производной функции f по направлению $v \in \mathbb{R}^n$* в точке x называется

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Лемма 6.8. *Если функция дифференцируема в точке x, то в этой точке*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = df_x(v).$$

Доказательство. Подставим $x + tv$ в определение дифференциала

$$f(x + tv) - f(x) = df_x(tv) + o(|t||v|) = t\left(df_x(v) + o(1)\right).$$

Поделив на t и перейдя к пределу, мы получим требуемое.

Без формул можно было сказать, что производная по направлению — это производная композиции нашей функции и параметризации куска прямой. □

Предыдущая лемма, в частности, даёт выражение *частных производных*, то есть производных по направлениям базисных векторов $e_1, \ldots, e_n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x)}{t}$$

через дифференциал функции. Получается, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = df_x(e_i),$$

то есть частные производные оказываются равными координатам дифференциала как линейного отображения. В итоге дифференциал функции в точке можно выразить как

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

где $dx_1, \ldots, dx_n$ — дифференциалы координатных функций, образующие двойственный базис к базису $e_1, \ldots, e_n$.

Задача 6.9. Приведите пример функции двух переменных, определённой в окрестности нуля и имеющей производные по всем направлениям в нуле, но не являющейся дифференцируемой в нуле.

[[На самом деле такая функция даже не обязана быть непрерывной в нуле.]]

Для отображений в $\mathbb{R}^m$ дифференцируемость на самом деле означает дифференцируемость каждой из его координат $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ и производная Df как линейное отображение на самом деле представлена матрицей из частных производных $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$. В обратную сторону, наличие частных производных может и не означать дифференцируемости, просто потому, что частные производные говорят только об изменении $f(x)$ при движении x вдоль координатных осей. Приведём некоторые достаточные условия для практической проверки дифференцируемости отображения в терминах частных производных:

Теорема 6.10. *Если отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ из открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в координатах как*

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n),\ i = 1, \dots, m$$

и функции f_i имеют непрерывные частные производные на U, то f непрерывно дифференцируемо на U.

Доказательство. Достаточно доказать для $m = 1$, то есть для одной функции. Фиксируем точку $x \in U$ и рассмотрим другую точку ξ в некоторой окрестности $U_\delta(x) \subseteq U$. Тогда от x до ξ можно дойти, двигаясь вдоль координатных осей, что даёт формулу

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(x) = f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) &+ \\ + f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, x_{n-1}, x_n) &+ \\ + \dots &+ \\ + f(\xi_1, x_2 \dots, x_n) - f(x_1, x_2 \dots, x_n)&. \end{aligned}$$

Применим теорему о среднем Лагранжа в каждой строке

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta_n)(\xi_n - x_n) &+ \\ + \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\xi_1, \dots, \eta_{n-1}, x_n)(\xi_{n-1} - x_{n-1}) &+ \\ + \dots &+ \\ + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\eta_1, x_2 \dots, x_n)(\xi_1 - x_1)&, \end{aligned}$$

для некоторых η_i между x_i и ξ_i. Каждая частная производная берётся в некоторой точке $U_\delta(x)$, поэтому при $\delta \to 0$ из её непрерывности можно записать

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + o(1)\right)(\xi_n - x_n) &+ \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x) + o(1)\right)(\xi_{n-1} - x_{n-1}) &+ \\ + \dots &+ \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + o(1)\right)(\xi_1 - x_1)&, \end{aligned}$$

что уже означает непрерывность по определению, выражения $o(1)(\xi_k - x_k)$ в сумме дадут $o(|\xi - x|)$.

Отображения получается непрерывно дифференцируемым, так как Df_x, представленное матрицей с компонентами $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, непрерывно зависит от x. $\square$

Если координатные функции отображения можно дифференцировать по произвольным x_i не менее k раз и производные до k-го порядка включительно оказываются непрерывными, то отображение будет называться *k раз непрерывно дифференцируемым*, или *класса C^k*. Если k может быть произвольно большим, то отображение будет называться *бесконечно гладким* или *класса C^∞*.

Задача 6.11. Приведите пример, показывающий, что существование всех частных производных, скажем в окрестности нуля для функции двух переменных, не гарантирует её дифференцируемости в нуле.

6.2. **Формула Тейлора для функции нескольких переменных и гессиан.** Докажем некоторые стандартные факты про производные высшего порядка для функций нескольких переменных.

Лемма 6.12. *Если функция $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0), то для вторых производных*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Доказательство. Выражение $g(x, y) = f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)$ можно двумя применениями теоремы о среднем Лагранжа (проделайте это аккуратно) привести к виду

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta')(x - x_0)(y - y_0)$$

для некоторых ξ' между x и x_0 и η' между y и y_0. Делая то же самое в другом порядке, можно получить аналогичное выражение

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi'', \eta'')(x - x_0)(y - y_0).$$

При $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ получается равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi'', \eta'')$$

и в нём достаточно перейти к пределу $(x, y) \to (x_0, y_0)$ (а значит $(\xi', \eta') \to (x_0, y_0)$ и $(\xi'', \eta'') \to (x_0, y_0)$). ☐

Теорема 6.13 (Формула Тейлора для функций нескольких переменных)**.** *Если функция f $x \in \mathbb{R}^n$ m раз непрерывно дифференцируема в окрестности $U_\varepsilon(x)$, то для любого $\xi \in U_\varepsilon(x)$ выполняется (суммирование по неотрицательным целым k_i)*

$$\begin{aligned} f(\xi) = &\sum_{k_1+\dots+k_n<m} \frac{1}{k_1!\dots k_n!}\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}(x)\cdot(\xi_1 - x_1)^{k_1}\dots(\xi_n - x_n)^{k_n}+\\ &+\sum_{k_1+\dots+k_n=m} \frac{1}{k_1!\dots k_n!}\frac{\partial^{m} f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}(x+\vartheta(\xi - x))\cdot(\xi_1 - x_1)^{k_1}\dots(\xi_n - x_n)^{k_n} =\\ &=\sum_{k_1+\dots+k_n\leqslant m} \frac{1}{k_1!\dots k_n!}\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}(x)\cdot(\xi_1 - x_1)^{k_1}\dots(\xi_n - x_n)^{k_n} + o(|\xi - x|^m). \end{aligned}$$

для некоторого $\vartheta \in (0, 1)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть функцию одной переменной $f(x + t(\xi - x))$ и выписать для неё формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для значений $t = 0$ и $t = 1$. Конкретнее, если мы продифференцируем выражение $f(x + t(\xi - x))$ по переменной t, то мы получим по формуле для производной по направлению

$$\frac{d}{dt} f(x + t(\xi - x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(\xi - x))(\xi_i - x_i).$$

При дифференцировании в следующий раз и далее мы применяем эту формулу и подставляем её в саму себя, получая

$$\frac{d^k}{dt^k} f(x + t(\xi - x)) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x + t(\xi - x))(\xi_{i_1} - x_{i_1}) \dots (\xi_{i_k} - x_{i_k}).$$

Эту формулу можно переписать иначе, учитывая установленный факт, что частные дифференцирования коммутируют друг с другом. Считая суммы не по порядку дифференцирования, а по тому, сколько раз дифференцировалась каждая переменная, x_1 — k_1 раз, ..., x_n — k_n раз, мы можем написать в виде суммы по неотрицательным $k_1, \dots, k_n$

$$\frac{d^k}{dt^k} f(x + t(\xi - x)) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \binom{k}{k_1 \dots k_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x + t(\xi - x))(\xi_1 - x_1)^{k_1} \dots (\xi_n - x_n)^{k_n}.$$

Здесь

$$\binom{k}{k_1 \dots k_n} = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}$$

мультиномиальный коэффициент, показывающий, сколькими способами мы можем переставить k_1 единиц, k_2 двоек, ..., k_n чисел n в последовательности — что соответствует порядку дифференцирований по соответствующим переменным. Выражение через факториалы получается из того факта, что всю последовательность можно переставить $k!$ способами, но при этом $k_1!$ способов переставить единицы её не меняют, $k_2!$ способов переставить двойки тоже её не меняют и т.д.

Таким образом мы доказали первый вариант формулы, с остаточным членом в форме Лагранжа. Второй вариант формулы (с остаточным членом в форме Пеано) следует из равенства

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x + \vartheta(\xi - x)) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x) + o(1).$$

□

Для формулы Тейлора и производных высших порядков придуманы обозначения $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ для вектора из неотрицательных целых чисел, $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n$ для суммы его координат, $\mathbf{k}! = k_1! \dots k_n!$, а также для вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ из действительных чисел, его возведения в степень и производной

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}} = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Тогда формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано начинает выглядеть так:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant m} \frac{1}{\mathbf{k}!} \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}}(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{k}} + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^m).$$

Эти обозначения удобно использовать при работе с частными производными высших порядков, но для первой и второй производных мы не будем ими злоупотреблять.

Можно заметить, что формула Тейлора начинается с

$$f(\xi) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)(\xi_n - x_n) + o(|\xi - x|),$$

то есть с постоянного члена и линейной части — первого дифференциала. Следующие слагаемые можно (с точностью до множителя) называть вторым дифференциалом и т.п. Второй дифференциал, например, является квадратичной формой от $\xi - x$, то есть можно написать

$$f(\xi) = f(x) + df_x(\xi - x) + \frac{1}{2}d_2 f_x(\xi - x) + o(|\xi - x|^2)$$

при условии дважды непрерывной дифференцируемости. Второй дифференциал также называется *гессианом* функции. Мы будем писать d_2 вместо d^2, так как в дальнейшем мы расширим определение d так, что всегда будет выполняться $d^2 = 0$.

Нас интересуют вопросы преобразования разных выражений при криволинейной замене координат и в частности, преобразование формулы Тейлора. Если мы делаем гладкую подстановку $x = \varphi(t)$ и её производная в точке есть $D\varphi$, то при замене координат по теореме о дифференцировании композиции df заменится на $df \circ D\varphi$. Это означает, что первый дифференциал меняется как положено меняться линейной форме при линейной замене координат отображением $D\varphi$.

Для второго дифференциала всё не так просто. Уже в одномерном случае можно убедиться, что

$$\frac{d^2 f \circ \varphi}{dt^2} = f''(\varphi')^2 + f'\varphi'',$$

то есть вторая производная в новых координатах зависит и от первой производной в старых. Однако в одном важном для нас случае гессиан оказывает инвариантным:

Лемма 6.14. *Если $df_{x_0} = 0$, то при любой замене координат $x = \varphi(t)$ второй дифференциал в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ меняется так:*

$$d_2(f \circ \varphi)_{t_0}(\Delta t) = d_2 f_{x_0}(D\varphi_{t_0}(\Delta t)).$$

Доказательство. Надо дифференцировать композицию один раз, а потом ещё один раз. Помимо выписанных слагаемых со вторыми производными f и первыми производными φ могли бы появиться слагаемые с первыми производными f и вторыми производными φ. Но по условию в точке x_0 первые производные f равны нулю. □

6.3. **Свёртки и приближение функций бесконечно гладкими.** Помимо приближения функций с помощь теоремы Стоуна–Вейерштрасса 4.69 или приближения в среднем элементарными по теореме 5.59 иногда бывает полезно иметь более контролируемое приближение функций и отображений. В этом разделе мы рассмотрим соответствующие полезные приёмы приближения функций.

Определим понятие *свёртки функций*:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - t)g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x - t)\, dt.$$

Конечно, в определении свёртки остаётся вопрос о существовании интеграла. Можно заметить, что если одна функция ограничена, а другая имеет конечный интеграл, то свёртка также ограничена, кроме того:

Теорема 6.15. *Если функции f и g имеют конечные интегралы, то $f * g$ определена почти всюду и выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g|\, dx$$

и равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * g\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\ dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g\ dx.$$

Доказательство. Функция $f(y)g(x)$ измерима по Лебегу и интеграл её модуля равен произведению интегралов модулей f и g по теореме Фубини. Тогда выражение

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|\ dtdx$$

также равно произведению интегралов модулей f и g, так как отличается от $|f(y)g(x)|$ линейной заменой переменных с единичным детерминантом. Тогда очевидно, что интегралы в неравенстве

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\ dt\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|\ dt$$

определены для почти всех x и требуемое неравенство получается интегрированием этого неравенства по x. Последнее равенство в теореме просто следует из теоремы Фубини и линейной замены $x - t = y$. ☐

Задача 6.16. Докажите ассоциативность свёртки

$$f * (g * h) = (f * g) * h,$$

для функций с конечным интегралом.

[[Выпишите интеграл, который повторным интегрированием сводится к двум разным порядкам свёртки.]]

Предположим, что в свёртке функция g интегрируема, а f ограничена, так же как и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Тогда возможно дифференцирование под знаком интеграла (теорема 5.72) и мы получаем

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x_i} g(t)\ dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g,$$

то есть при дифференцировании свёртки надо дифференцировать одну из функций, и мы будем часто этим пользоваться.

Для содержательного применения свёртки (и для построения *гладких разбиений единицы* далее) нам потребуются специфические бесконечно гладкие функции. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases}$$

Она бесконечно дифференцируема везде, кроме быть может точки 0. Всякая её производная справа от нуля имеет вид $P(1/x)e^{-1/x}$, где P — многочлен. Отсюда следует, что предел любой её производной в нуле равен нулю. Тогда по правилу Лопиталя

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n+1)}(x)}{1} = 0$$

и функция f оказывается бесконечно дифференцируемой в нуле, то есть бесконечно гладкой на всей прямой. Тогда функция

$$\varphi(x) = f(x+1)f(1-x)$$

будет бесконечно гладкой, и будет отличной от нуля только на интервале $(-1, 1)$, на котором она положительна.

Лемма 6.17. *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно гладкая функция $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, отличная от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ и такая, что*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Для всяких $\varepsilon > \delta > 0$ существует бесконечно гладкая функция $\psi_{\varepsilon,\delta} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, отличная от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ тождественно равная 1 в $U_\delta(0)$.

Доказательство. В первом случае сгодится функция вида

$$\varphi_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = A\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right)\ldots\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right)$$

для ранее построенной функции одной переменной φ и некоторой константы A.

Во втором случае рассмотрим сначала функцию одной переменной

$$\psi(x) = B\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt,$$

где константу выберем так, чтобы $\psi(x) \equiv 0$ при $x \leqslant -1$ и $\psi(x) \equiv 1$ при $x \geqslant 1$. Тогда достаточно положить

$$\psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta + \varepsilon - 2|x|}{\varepsilon - \delta}\right).$$

□

Сворачивая с такими функциями, мы можем приближать непрерывную функцию бесконечно гладкими:

Теорема 6.18. *Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leqslant 1$ и пусть $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$. Положим*

$$\varphi_k(x) = k^n\varphi(kx),$$

эти функции тоже имеют единичные интегралы и φ_k отлична от нуля только при $|x| \leqslant 1/k$. Теперь для непрерывной $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определим свёртки

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - t)\varphi_k(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x - t)\, dt.$$

Функции f_k бесконечно дифференцируемые и $f_k \to f$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Выпишем разность

$$f_x(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x - t) - f(x))\varphi_k(t)\, dt.$$

Пусть f равномерно непрерывна в δ окрестности компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и пусть $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$ в этой окрестности. Выберем k настолько большим, чтобы $1/k < \delta$. Тогда в интеграле $\varphi_k(t)$ отлична от нуля только при $|t| < \delta$, и тогда $|f(x-t)| - f(x)| < \varepsilon$, при $x \in K$. Тогда при $x \in K$ верна оценка

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\, dx = \varepsilon.$$

Это доказывает равномерную сходимость на компактах. Дифференцируемость можно доказать, используя дифференцирование интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x - t)\, dt.$$

по параметру и теорему 5.72. Заметим, что производная при $x \in K$ будет зависеть только от значений f в $1/k$-окрестности K, то есть f можно считать интегрируемой при дифференцировании по параметру, что позволяет применить теорему. □

Теорема 6.19. *В условиях предыдущей теоремы, если исходная функция f имеет непрерывные производные до m-го порядка, то производные f_k до m-го порядка равномерно на компактах сходятся к соответствующим производным f.*

Доказательство. Можно продифференцировать выражение

$$f * \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_k(t)\, dt.$$

по нескольким x_i, используя каждый раз дифференцирование под знаком интеграла с помощью теоремы об ограниченной сходимости, как было объяснено выше. Тогда мы получим

$$\frac{\partial^m (f * \varphi_k)}{\partial x_{i_1} \dots x_{i_m}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots x_{i_m}} * \varphi_k.$$

Таким образом, последовательность производных свёртки является последовательностью свёрток производной f с теми же функциями φ_k. А значит для этой последовательности тоже имеет место верна равномерная сходимость к производной f. □

При практическом применении вышеуказанных теорем полезно заметить, что на самом деле для равномерной сходимости на конкретном компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ достаточно определённости f и её производных (если мы их используем) на некоторой окрестности K, так как в силу размера носителя φ_k значения свёртки $f * \varphi_k$ на K будут зависеть только от значений f в $1/k$-окрестности K.

Следующая теорема показывает, что свёртки также дают приближение в среднем функции с конечным интегралом Лебега бесконечно гладкими функциями.

Теорема 6.20. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет конечный интеграл Лебега. Тогда свёртки $f * \varphi_k$ с функциями из теоремы 6.18 сколь угодно близко приближают f в среднем.*

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$ и представим по теореме 5.59

$$f = g + h,$$

где g — элементарно ступенчатая и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Тогда по теореме 6.15

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k|\, dx < \varepsilon.$$

Это значит, что если окажется

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k|\, dx < \varepsilon,$$

то будет выполняться

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f * \varphi_k|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k|\, dx < 3\varepsilon.$$

Таким образом, достаточно доказать утверждение для элементарно ступенчатой g. Раскладывая g в сумму характеристических функций параллелепипеда с некоторыми коэффициентами, можно видеть, что достаточно доказать утверждение для одной характеристической функции параллелепипеда χ_P. Но разность $\chi_P - \chi_P * \varphi_k$ будет отлична от нуля только в $1/k$-окрестности ∂P и будет там по модулю не более 1, то есть после интегрирования модуля разности мы получим не более $\mu\left(U_{1/k}(\partial P)\right)$. Прямым вычислением можно убедиться, что эта мера стремится к нулю при $k \to \infty$. $\square$

Задача 6.21. * Докажите, что в условиях предыдущей задачи $f * \varphi_k \to f$ поточечно почти всюду.

[[Используйте теорему об усреднении 5.101 в одномерном случае или докажите и используйте её многомерный аналог.]]

6.4. **Непрерывно дифференцируемые отображения и криволинейные системы координат.** Смысл дифференциальной геометрии (а также общей теории относительности в физике) заключается в изучении объектов, определённых на открытых подмножествах $U \subseteq \mathbb{R}^n$ инвариантно относительно *криволинейных замен координат*, то есть таких бесконечно гладких отображений $\varphi : U \to V$, что обратное φ^{-1} определено и тоже бесконечно гладко. Математически правильно такие отображения называть *диффеоморфизмами открытых подмножеств* $\mathbb{R}^n$, но мы части будем называть их менее формально криволинейными заменами координат.

На практике обычно не требуется бесконечная гладкость, а требуется только конечное число производных координатных функций отображения, которое можно определить в каждом конкретном случае; когда мы будем говорить о бесконечной гладкости, мы будем называть её просто *гладкость*.

Мы сейчас установим стандартные инструменты, необходимые для работы с криволинейными заменами координат. Для начала установим лемму, которая записывает приращение непрерывно дифференцируемого отображения как переменный линейный оператор от приращения аргумента, она нам понадобится в этом разделе и далее.

Лемма 6.22. *Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Для непрерывно дифференцируемого $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ найдётся непрерывное $A : U \times U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, такое что для любых $x', x'' \in U$*

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = A(x', x'')(x'' - x')$$

и $A(x, x) = D\varphi_x$. Здесь $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — линейные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Запишем формулу Ньютона–Лейбница (интеграл от векторнозначной функции можно понимать покоординатно)

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = \int_0^1 \frac{\partial \varphi((1-s)x' + sx'')}{\partial s}\, ds = \int_0^1 D\varphi_{(1-s)x'+sx''}(x'' - x')\, ds,$$

так что достаточно положить (интеграл от матричнозначной функции можно понимать покоординатно)

$$A(x', x'') = \int_0^1 D\varphi_{(1-s)x'+sx''}\, ds.$$

Непрерывность A следует из равномерной непрерывности подынтегрального выражения по переменным x' и x'', рассматриваемым как параметры, меняющиеся в рамках некоторого компакта $K \subset U \times U$, содержащего маленькую окрестность данной пары (x', x''). При изменении x' и x'' не более чем на $\delta > 0$ из равномерной непрерывности значение под интегралом будет меняться не более чем на $\varepsilon > 0$, а значит и сам интеграл будет меняться не более чем на ε.

При $x' = x'' = x$ из явной формулы мы будем иметь

$$A(x, x) = D\varphi_x.$$

□

Задача 6.23. Докажите, что если у непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ выпуклой области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ производная $D\varphi$ в каждой точке является симметричной положительно определённой матрицей, то φ инъективно.

[[Посмотрите, какое получается $A(x', x'')$ в доказательстве леммы 6.22.]]

Теорема 6.24 (Теорема об обратном отображении). *Если отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x и его дифференциал $D\varphi_x$ является невырожденным линейным преобразованием, то это отображение взаимно однозначно отображает некоторую окрестность $V \ni x$ на окрестность $W \ni y$, где $y = \varphi(x)$, и обратное отображение $\varphi^{-1} : W \to V$ тоже непрерывно дифференцируемо.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что мы работаем в окрестности точки $x = 0$ и $y = \varphi(x) = 0$. Заменив φ на его композицию с линейным отображением $D\varphi_0^{-1}$, будем считать, что $D\varphi$ в нуле является единичным линейным преобразованием, запишем тогда

$$\varphi(x) = x + \alpha(x).$$

Тогда $D\alpha = D\varphi - \mathrm{id}$ в нуле является нулевым линейным оператором, а в некоторой δ-окрестности нуля настолько мал, что

$$|D\alpha(v)| \leqslant \|D\alpha\| \cdot |v| \leqslant 1/2|v|.$$

Тогда в этой δ-окрестности нуля у нас окажется выполненным (с формулой из леммы 6.22)

$$|\alpha(x'') - \alpha(x')| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt}\alpha((1-t)x' + tx'')\, dt \right| = \left| \int_0^1 D\alpha_{(1-t)x'+tx''}(x'' - x')\, dt \right| \leqslant 1/2|x'' - x'|.$$

Нам надо решить уравнение $\varphi(x) = x + \alpha(x) = y$, то есть

$$x = y - \alpha(x) = f(x, y).$$

При $|y| \leqslant \delta/2$ и $|x| \leqslant \delta$ из неравенства для α получаются свойства

$$|f(x, y)| \leqslant \delta. \tag{6.1}$$

и (*сжимающее отображение*)

$$|f(x'', y) - f(x', y)| \leqslant 1/2|x'' - x'|. \tag{6.2}$$

Будем действовать методом последовательных приближений. Положим $\psi_1(y) = 0$, и далее определим по индукции

$$\psi_k(y) = f(\psi_{k-1}(y), y),$$

В силу свойства (6.1) образ ψ_k всегда в δ-окрестности нуля, а свойство (6.2) гарантирует, что

$$|\psi_{k+1}(y) - \psi_k(y)| = |f(\psi_{k-1}(y), y) - f(\psi_{k-1}(y), y)| \leqslant 1/2\, |\psi_k(y) - \psi_{k-1}(y)|\,,$$

откуда по индукции можно заключить, что

$$|\psi_{k+1}(y) - \psi_k(y)| \leqslant \delta 2^{2-k}.$$

Значит $\psi_k(y)$ сходятся к непрерывному отображению $\psi(y)$ равномерно по признаку Вейерштрасса и переходя к пределу $k \to \infty$ в определении ψ_k получим

$$\psi(y) = f(\psi(y), y) = y - \alpha(\psi(y)) = y - \varphi(\psi(y)) + \psi(y),$$

то есть $y = \varphi(\psi(y))$. Из свойства сжатия

$$|\alpha(x') - \alpha(x'')| \leqslant 1/2|x' - x''|$$

также следует, что для всякого y с $|y| \leqslant \delta/2$ найдётся не более одного x с $|x| \leqslant \delta$, для которого $\varphi(x) = y$, и на самом деле мы его уже нашли как $x = \psi(y)$.

Взяв окрестность $W \ni y$, меньшую по сравнению с $\delta/2$, и взяв открытое $V = \varphi^{-1}(W)$ мы видим, что φ и ψ являются взаимно обратными на этих окрестностях.

Установим дифференцируемость ψ. По лемме 6.22 можно написать

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) = A(x)x,$$

где линейный оператор $A(x)$ непрерывно зависит от x и равен тождественному при $x = 0$. Подставим в эту формулу $x = \psi(y)$ и получим

$$y = A(\psi(y))\psi(y) \Rightarrow \psi(y) = A(\psi(y))^{-1}y,$$

Где линейный оператор $B(y) = A(\psi(y))^{-1}$ непрерывен по y и равен тождественному при $y = 0$. Из выражения $\psi(y) = B(y)y$ тогда следует дифференцируемость ψ в нуле с дифференциалом $B(0)$, дифференцируемость в остальных точках проверяется после сдвига начала координат в соответствующую точку повторением тех же рассуждений. $\square$

В этой теореме оказалась важна невырожденность $D\varphi$, которую на практике можно проверить как $\det D\varphi \neq 0$ (см. также раздел 6.9). Поэтому определитель $J\varphi = \det D\varphi$ имеет специальное обозначение и называется *якобианом* отображения, в координатах он равен $\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)$. В дальнейшем якобиан будет играть роль в понятии ориентации и в теореме о замене переменных в интеграле.

На практике помимо предложенного в доказательстве метода решения уравнения $\varphi(x) = y$, можно использовать итерации по *методу Ньютона*:

$$x_{k+1} = x_k + D\varphi_{x_k}^{-1}(y - \varphi(x_k)).$$

Записав с помощью леммы 6.22

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = A(x_k, x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = A(x_k, x_{k+1}) \circ D\varphi_{x_k}^{-1}(y - \varphi(x_k)),$$

можно заметить, что при небольшом отклонении $A(x_k, x_{k+1}) \circ D\varphi_{x_k}^{-1}$ от тождественного оператора (что выполняется, если x_k и x_{k+1} достаточно близки) отклонение $\varphi(x_{k+1})$ от y будет меньше, чем отклонение $\varphi(x_k)$ от y. Аккуратный анализ этого метода можно найти в курсах вычислительной математики.

Определение 6.25. *Криволинейной системой координат* в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ мы будем называть набор таких функций, которые являются координатами гладкого отображения окрестности p на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с гладким обратным отображением.

По теореме об обратном отображении для того, чтобы гладкие $y_1, \dots, y_n$ в некоторой окрестности p давали криволинейную систему координат, достаточно проверить невырожденность матрицы $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ в точке p, или иначе говоря, проверить линейную независимость дифференциалов $dy_1, \dots, dy_n$ в точке p.

Также важно иметь в виду, что неполный набор функций с линейно независимыми в данной точке дифференциалами можно дополнить до криволинейной системы координат. В частности, можно доказать полезное утверждение:

Теорема 6.26 (Теорема о неявной функции)**.** *Пусть функции $f_1, \dots, f_k$ непрерывно дифференцируемы в окрестности $p \in \mathbb{R}^n$ и определитель*

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^k$$

не равен нулю в этой окрестности, пусть также $f_i(p) = y_i$. Тогда найдётся окрестность точки p вида $U \times V$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$, такая что в этой окрестности множество решений системы уравнений

$$f_1(x) = y_1, \dots, f_k(x) = y_k,$$

совпадает с графиком непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi : V \to U$, заданного в координатах как

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\dots \\ x_k &= \varphi_k(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Доказательство. Условия теоремы означают, что дифференциалы

$$df_1, \dots, df_k, dx_{k+1}, \dots, dx_n$$

являются линейно независимыми и из функций $f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ можно составить отображение, локально имеющее непрерывно дифференцируемое обратное, то есть они дают криволинейную систему координат в окрестности p. Следовательно, в этой окрестности старые координаты $x_1, \dots, x_k$ можно непрерывно дифференцируемо выразить через новые координаты

$$x_i = \varphi_i(f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

и поставить в этом выражении вместо f_i константы y_i.

Это рассуждение доказывает, что множество решений системы уравнений содержится в графике отображения $\varphi : V \to U$ при достаточно малых V и U, таких что $\varphi(V) \subseteq U$. Но и обратное верно, так как значения $f_1, \dots, f_k$ на точке вида

$$(\varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

обязаны совпадать с $y_1, \dots, y_k$, так как φ_i были выбраны как компоненты отображения, обратного к отображению с компонентами

$$(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)\,.$$

∎

Следующая теорема даёт криволинейный аналог разложения линейного отображения в композицию элементарных, перестановки и диагонального отображения.

Теорема 6.27 (Теорема о расщеплении отображения на элементарные)**.** *Если отображение φ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ и имеет обратимый $D\varphi_x$, то его можно представить в виде композиции перестановки координат, отражений координат и элементарных отображений, непрерывно дифференцируемо и возрастающим образом меняющих только одну координату $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n)$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы имитирует приведение матрицы к гауссовому виду, то есть разложение матрицы в произведение матрицы перестановки, матриц умножений координаты на число, и элементарных матриц.

Пусть компоненты φ являются функциями $y_1, \dots, y_n$ в окрестности точки p. Некоторая y_i имеет ненулевую производную $\frac{\partial y_i}{\partial x_1}$. Переставив y (и запомнив эту перестановку) мы можем считать, что это y_1. Поменяв при необходимости знак y_1, можно считать эту производную положительной. Тогда $y_1, x_2, \dots, x_n$ (в силу нетривиальности якобиана) дают криволинейную систему координат в некоторой окрестности p и эта система отличается от исходной возрастающей заменой первой координаты.

Далее какая-то из оставшихся $y_2, \dots, y_n$ уже в новой системе координат $y_1, x_2, \dots, x_n$ имеет ненулевую $\frac{\partial y_i}{\partial x_2}$, иначе dy_i $(i = 1, \dots, n)$ не были бы линейно независимыми. Переставив y (и запомнив и эту перестановку), можно считать, что это y_2. Также можно считать эту производную положительной, поменяв при необходимости знак y_2. Тогда можно заменить $y_1, x_2, \dots, x_n$ на систему координат $y_1, y_2, x_2, \dots, x_n$. Делая в том же духе n раз, мы сделаем n замен координат (отображений), меняющих возрастающим образом только одну координату, а в конце нам останется поменять знаки у некоторых y_i и переставить их. ☐

Так как нас часто интересуют не просто непрерывно дифференцируемые отображения, а несколько раз непрерывно дифференцируемые или даже бесконечно гладкие, то нам понадобится такое утверждение:

Теорема 6.28. *Теоремы об обратном отображении, о неявной функции и о расщеплении отображения дают отображения класса C^k при $k \geqslant 1$, если исходные отображения или функции были класса C^k.*

Доказательство. Так как все утверждения основаны на теореме об обратном отображении, то достаточно рассмотреть лишь её. В ней при $k \geqslant 1$ мы для взаимно обратных φ и ψ имеем

$$D\psi_y = (D\varphi_{\psi(y)})^{-1},$$

то есть фактически это композиция отображения ψ, отображения $x \mapsto D\varphi_x$ и отображения взятия обратной матрицы. Знания из линейной алгебры показывают, что взятие обратной к невырожденной матрице является бесконечно гладким отображением. Тогда при наличии у $D\varphi$ и ψ непрерывных частных производных до ℓ-го порядка мы можем утверждать, что у левой части тоже есть непрерывные частные производные до ℓ-го порядка. Последнее будет означать, что у ψ есть все частные производные $(\ell+1)$-го порядка. Индукция по ℓ тогда позволяет заключить, что если φ будет класса C^k, а значит $D\varphi$ класса C^{k-1}, то ψ тоже будет класса C^k. ☐

Задача 6.29. Докажите, что если дифференциалы гладких функций $f_1, \dots, f_k$ линейно зависимы в окрестности точки p, а дифференциалы функций $f_2, \dots, f_k$ линейно независимы в p, то в некоторой окрестности точки p функция f_1 выражается через остальные.

[[Считайте функции $f_2, \dots, f_k$ частью системы координат в точке p.]]

6.5. **Исследование функций нескольких переменных на экстремум.** С помощью разложения функций нескольких переменных по формуле Тейлора мы можем рассмотреть вопрос о необходимых или достаточных условиях локального экстремума функции нескольких переменных.

Определение 6.30. Точка p называется локальным экстремумом функции f, если она является точкой экстремума (максимума или минимума) ограничения f на некоторую окрестность p.

С помощью формулы Тейлора мы можем установить некоторые необходимые условия экстремума:

Теорема 6.31 (Необходимые условия экстремума). *Если f дифференцируема в точке p и имеет локальный экстремум в p, то $df_p = 0$. Если f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности p, то $d_2 f_p \geqslant 0$ для минимума и $d_2 f_p \leqslant 0$ для максимума.*

Здесь неравенство $\geqslant$ означает, что квадратичная форма второго дифференциала принимает неотрицательные значения на всех векторах, то есть *положительно полуопределена*, аналогично интерпретируется знак $\leqslant$.

Доказательство. Утверждение для первой производной следует, например, из варьирования одной координаты при фиксированных остальных, тогда по свойствам экстремума функции одной переменной мы получим равенство нулю всех частных производных, то есть всего первого дифференциала.

Для исследования второй производной (при равной нулю первой) мы запишем для $\xi = p + tv$

$$f(p+tv) = f(p) + \frac{1}{2}d_2 f_p(tv) + o(t^2|v|^2) = f(x) + t^2\left(\frac{1}{2}d_2 f_p(v) + o(1)\right).$$

Переход к пределу $t \to 0$ при фиксированном v показывает, что $d_2 f_p(v) \geqslant 0$ для минимума и $d_2 f_p(v) \leqslant 0$ для максимума. □

Для установления достаточных условий экстремума нам понадобится вспомогательное утверждение. Напомним, что квадратичная форма Q *положительно определена*, если $Q(v) > 0$ при ненулевых v. Аналогично для *отрицательно определённой* формы должно быть $Q(v) < 0$ при $v \neq 0$.

Лемма 6.32. *Если квадратичная форма Q положительно определена, то найдётся $\varepsilon > 0$, такой что*

$$Q(v) \geqslant \varepsilon|v|^2$$

для любого v.

Доказательство. Положим ε равным минимуму Q на единичной сфере. Так как единичная сфера является компактом, то этот минимум достигается и положителен. Тогда неравенство верно для единичной сферы. Из этого следует неравенство для всех векторов, так как при умножении вектора на t обе части неравенства умножаются на t^2. □

Теорема 6.33 (Достаточные условия экстремума)**.** *Если f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности p, $df_p = 0$ и $d_2 f_p > 0$, то p — точка строгого локального минимума. Если неравенство в другую сторону, $d_2 f_p < 0$, то p — точка строгого локального максимума.*

Доказательство. Докажем без ограничения общности для минимума. Для $\xi = p + v$ запишем по формуле Тейлора с использованием предыдущей леммы:

$$f(p+v) = f(p) + \frac{1}{2}d_2 f_p(v) + o(|v|^2) \geqslant f(p) + \left(\frac{\varepsilon}{2} + o(1)\right)|v|^2.$$

По определению $o(1)$ при достаточно малом $|v|$ (независимо от направления v) выражение в скобках будет положительным. □

Также часто рассматривают случай *условного экстремума* функции нескольких переменных, то есть экстремума ограничения функции f на множество S, задаваемое системой непрерывно дифференцируемых (как минимум) уравнений

$$\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0. \tag{6.3}$$

После изучения сведений о криволинейных системах координат можно догадаться, что для обеспечения понятной структуры множества S мы будем требовать условие линейной независимости дифференциалов

$$\dim\langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m\rangle = m \tag{6.4}$$

в некоторой окрестности точки p. Это условие гарантирует, что функции φ_i просто являются частью некоторой криволинейной системы координат и множество решений (6.3) может быть легко параметризовано $n - m$ оставшимися координатами этой криволинейной системы.

Теорема 6.34 (Необходимые условия условного экстремума в терминах первых производных)**.** *Если f и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ непрерывно дифференцируемы в окрестности p, выполняется* (6.4) *и f имеет условный экстремум в p при условии* (6.3)*, то в точке p выполняется*

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p}$$

для некоторых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Доказательство. Заметим, что нахождение df в линейной оболочке $d\varphi_i$ инвариантно относительно криволинейных замен координат по формуле дифференциала композиции. Согласно этой формуле, при замене координат строка чисел $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ получается из строки чисел $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ умножением справа на матрицу $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$.

Тогда мы можем считать $\varphi_1 = y_1, \dots, \varphi_m = y_m$ в системе координат $y_1, \dots, y_n$. В этом случае мы имеем экстремум функции по остальным переменным при условии $y_1 = \dots = y_m = 0$, что даёт равенства $\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$ при $i > m$. Тогда можно составить линейную комбинацию

$$df_p = \lambda_1 dy_1 + \dots + \lambda_m dy_m$$

по явному выражению для дифференциала в координатах. □

При выполнении необходимого условия условного экстремума удобно положить

$$L(x) = f(x) - \lambda_1\varphi_1(x) - \dots - \lambda_m\varphi_m(x).$$

Это называется *функция Лагранжа*, а λ_i называются *множители Лагранжа*. Главное свойство этой функции — обращение в нуль дифференциала dL_p в точке экстремума. Это используется при более детальном изучении условного экстремума в следующих теоремах.

Теорема 6.35 (Необходимые условия условного экстремума в терминах вторых производных)**.** *Если f и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности p, выполняется* (6.4) *и f имеет условный экстремум в p при условии* (6.3)*, то*

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p}$$

и второй дифференциал функции Лагранжа положительно полуопределён (для минимума) или отрицательно полуопределён (для максимума) на векторах v, удовлетворяющих линейным уравнениям

$$d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0.$$

Доказательство. Заметим, что при условиях (6.3) функции f и L равны. Но функция Лагранжа удобнее тем, что $dL_p = 0$. Лемма 6.14 позволяет в этом случае считать d_2L_p корректно определённой квадратичной формой и сделать замену координат так, чтобы $\varphi_1 = y_1, \dots, \varphi_m = y_m$, при этом d_2L_p преобразуется так, как положено преобразовываться квадратичной форме при линейном преобразовании, которое является производной замены координат.

После замены координат мы фактически рассматриваем функцию L при фиксированных первых m переменных. Допустимые приращения соответствуют векторам v, первые m координат которых равны нулю, то есть

$$dy_1(v) = \dots = dy_m(v) = 0.$$

Но тогда теорема о необходимом условии экстремума без условий показывает, что d_2L_p должна быть полуопределена на допустимых приращениях v, что после обратной замены координат превращается в утверждение теоремы. □

В конце доказательства этой теоремы мы принимаем, что при замене координат вектор умножается (слева как столбец) на производную этой замены, делая таким образом произведение вектора на дифференциал функции инвариантно определённым. Более содержательное обсуждение понятия «вектор» мы проведём в следующем разделе.

Теорема 6.36 (Достаточные условия условного экстремума в терминах вторых производных)**.** *Если f и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности p, выполняется* (6.4),

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p} \Leftrightarrow dL_p = 0$$

и второй дифференциал функции Лагранжа > 0 (для минимума) или < 0 (для максимума) на векторах v, удовлетворяющих линейным уравнениям

$$d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0,$$

то f имеет строгий условный экстремум в p при условии (6.3).

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме, взяв φ_i за первые m координат и воспользовавшись леммой 6.14, мы сводим задачу к случаю экстремума без условий. □

Пространство векторов v, удовлетворяющих линейной системе

$$d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0,$$

логично назвать *касательным пространством* к *многообразию* S решений системы (6.3) в точке p. В следующих разделах мы развиваем идею касательного вектора, касательного пространства и многообразия на более абстрактном уровне.

6.6. **Векторы и векторные поля.** Нашей целью будет определить объекты и операции, с которыми можно одинаково легко работать в любой криволинейной системе координат. Первые объекты, с которым можно корректно работать в любой системе координат — это гладкие функции $U \to \mathbb{R}$, их множество обозначим $C^\infty(U)$. Для функции f в координатах $y = (y_1, \dots, y_n)$ переход к координатам $x = (x_1, \dots, x_n)$ заключается в подстановке (композиции) $g(x) = f(\varphi(x))$, если замена координат имела вид $y = \varphi(x)$. Это естественное преобразование подразумевалось уже в предыдущих разделах.

Разобравшись с преобразованием функций при замене криволинейных координат, другие объекты дифференциальной геометрии мы будем определять в терминах гладких функций. Нам понадобится следующая лемма о структуре гладкой функции в окрестности точки, пусть без ограничения общности эта точка $0 \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 6.37. *Всякую гладкую функцию в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде*

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} x_k g_k(x)$$

с гладкими g_i.

Доказательство. Это следует из леммы 6.22, бесконечная дифференцируемость g_k (которые в той лемме были компонентами отображения A) следует из возможности бесконечно дифференцировать определяющий их интеграл по параметрам. □

Для функций, у которых первый дифференциал в точке равен нулю, а второй невырожден, существует аналогичное утверждение, которое мы оставляем в качестве упражнения:

Задача 6.38 (Лемма Морса). * Докажите, что всякую гладкую функцию, у которой первый дифференциал в нуле равен нулю, а гессиан невырожден (то есть матрица вторых производных $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ невырождена), можно криволинейной заменой координат привести к виду

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$$

в некоторой окрестности нуля, где $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

[[Дважды используйте лемму 6.37, а потом вспомните процедуру приведения квадратичной формы к каноническому виду.]]

Теперь мы готовы определить касательный вектор в точке $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$. Идея этого определения следующая. Для всякого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ мы можем определить производную по направлению вектора

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

проверить её линейность по f и формулу Лейбница для производной произведения,

$$\frac{\partial fg}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} g + f \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Некоторая проблема заключается в том, что эта формула не инвариантна относительно криволинейной замены координат, в частности сложение $p + tv$ не определено инвариантно. С другой стороны, мы можем подействовать в обратном порядке и определить вектор как дифференцирование алгебры гладких функций в точке, удовлетворяющее формуле Лейбница.

Определение 6.39. Определим *касательный вектор* в точке $p \in U$ как $\mathbb{R}$-линейное отображение $X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Касательное пространство к U в точке p состоит из всех касательных векторов в точке p и обозначается T_pU.

Работая в некоторой системе координат мы понимаем, что всякий касательный вектор в координатном смысле даёт некоторое дифференцирование, и все они различны. Так что некоторые касательные векторы в смысле инвариантного определения мы можем предъявить и остаётся выяснить, что других на самом деле нет. Для начала установим свойство локальности:

Лемма 6.40. *Если X — касательный вектор в точке $p \in U$, то для любой окрестности $V \ni p$, $V \subseteq U$, выражение $X(f)$ может зависеть только от значений f в V, а не на всём U.*

Доказательство. По лемме 6.17, найдём гладкую функцию $\psi : U \to [0, 1]$, равную нулю за пределами V и равную единице в некоторой окрестности $W \subset V$ точки p. Обозначим $h = 1 - \psi$. Теперь, если у нас есть функция $g \in C^\infty(U)$, такая что её ограничение на V такое же, как и f, то $(f - g)h = f - g$, так как в каждой точке U либо $f = g$, либо $h = 1$. Следовательно, по свойству линейности и правилу Лейбница для X,

$$X(f) - X(g) = X((f - g)) = X((f - g)h) = (f(p) - g(p))X(h) + h(p)X(f - g) = \\ = 0 \cdot X(h) + 0 \cdot X(f - g) = 0.$$

□

В силу предыдущей леммы мы можем корректно дифференцировать операцией X и функции, определённые на произвольно малой окрестности V точки p. Действительно, их можно умножать на функцию типа ψ из доказательства с носителем в V, тогда они гладко продолжаются за пределы V нулём, оставаясь неизменными в окрестности p. После этого операция X применима по определению и по лемме её результат не зависит от того, как именно мы умножали и продолжали функцию.

Посмотрим теперь на действие некоторого дифференцирования X на функцию f в свете леммы 6.37; мы можем перейти в окрестность, даваемую этой леммой, в силу леммы 6.40 и замечания после неё. Выберем систему координат с условием $x_i(p) = 0$, тогда

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} X(x_i)g_i(p) + \sum_{i=1}^{n} x_i(p)X(g_i) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)g_i(p).$$

Здесь мы использовали, что дифференцирование константы даёт нуль, так как $X(1) = X(1^2) = X(1) + X(1)$ по правилу Лейбница, то есть $X(1) = 0$. Оказывается, что значение $X(f)$ зависит только от значений $g_i(p)$, которые в свою очередь равны частным производным f, то есть

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\frac{\partial f(p)}{\partial x_i}.$$

Числа $X_i = X(x_i)$ называются координатами касательного вектора в данной криволинейной системе координат, тогда весь вектор в точке p записывается как

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Заметим, что в выписанной формуле условие того, что $x_i(p) = 0$ на самом деле не нужно, так как получив аналогичное выражение в системе координат $x_1 - x_1(p), \dots, x_n - x_n(p)$ мы можем использовать тот факт, что $X(x_i - x_i(p)) = X(x_i) - X(x_i(p)) = X(x_i)$ (дифференцирование константы даёт нуль).

Полученное выражение $\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ является просто дифференцированием по направлению $(X_1, \dots, X_n)$ в координатной системе (см. лемму 6.8), то есть все касательные векторы в точке в смысле инвариантного определения являются касательными векторами в точке в смысле производной по направлению.

Для наших целей (и особенно для целей изучения дифференциальных уравнений) полезно также рассмотреть ситуацию, когда касательный вектор задан в каждой точке некоторого открытого множества.

Определение 6.41. *Векторным полем* на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выбор касательного вектора $X(p) \in T_pU$ для каждой точки $p \in U$, гладко зависящий от p. Гладкая зависимость понимается в смысле гладкой зависимости координат векторного поля $X_i(p)$ от точки p.

Обобщая определение одиночного вектора как дифференцирования на векторные поля, мы можем сформулировать:

Лемма 6.42. *Для открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ всякое $\mathbb{R}$-линейное отображение $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, удовлетворяющее соотношению*

$$X(fg) = X(f)g + fX(g),$$

задаётся векторным полем *на U*

Доказательство. Подействуем векторным полем на координатные функции и рассмотрим гладкие функции $X_i = X(x_i)$. Так как композиция дифференцирования X и взятия значения в точке является дифференцированием в точке, то по ранее установленному описанию дифференцирований в точке мы получим, что в любой точке выполняется равенство

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Значит операция $X(f)$ задаётся применением дифференцирования по направлению вектора с координатами $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ в каждой точке $p \in U$. $\square$

Можно также корректно определить образ касательного вектора при произвольном гладком отображении $\varphi : U \to V$, не обязательно обратимом, следующим образом. Пусть у нас есть вектор $X \in T_pU$, $q = \varphi(p)$, тогда *прямой образ вектора*, $\varphi_*(X)$, определяется по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi). \tag{6.5}$$

Построенная так операция $\varphi_*(X)$ тоже является дифференцированием $C^\infty(V)$ в точке q. Действительно, отображение $\varphi : U \to V$ определяет *гомоморфизм алгебр* (то есть операцию, сохраняющую умножение и сложение, а также переводящую постоянные функции в постоянные с теми же значениями) $\varphi^* : C^\infty(V) \to C^\infty(U)$ по формуле

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi,$$

вектор даёт нам дифференцирование алгебры $X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ и тогда $\varphi_* X = X \circ \varphi^*$ тоже будет дифференцированием алгебры. Возвращаясь к более явным выражениям, исходя из определения (6.5) по формуле дифференцирования композиции в координатах можно выписать координаты $Y = \varphi_*(X)$ как

$$Y_i = \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} X_j.$$

Таким образом мы можем бескоординатно определить производную отображения φ в точке p как линейное отображение $\varphi_* : T_pU \to T_qV$ при $q = \varphi(p)$. Его также можно обозначать как $D\varphi_p$, так как в силу своего выражения в координатах оно на самом деле совпадает с введённый ранее производной в смысле линейного приближения отображения, что проясняет геометрический смысл конструкции прямого образа вектора.

Задача 6.43. Проверьте, что для функции $f : U \to \mathbb{R}$ отображение f_* действительно совпадает с её дифференциалом df.

Эти наблюдения могут показаться бессмысленной переформулировкой и так понятных вещей, но в дальнейшем мы будем уделять внимание преобразованиям разных объектов при заменах координат и гладких отображениях, поэтому нам надо начать со сравнительно простых примеров и посмотреть на ситуацию с разных точек зрения.

Заметим, что если гладкое отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ является диффеоморфизмом на свой образ, то тогда на образе $\varphi(U)$ корректно определён и прямой образ всего векторного поля X на U (а не только отдельных векторов) при данном отображении. В таком случае каждая $q \in \varphi(U)$ является образом единственной точки $p \in U$, в качестве вектора в q мы однозначно выбираем $Y(q) = \varphi_*(X(p))$. Гладкая зависимость Y от q гарантируется гладкой зависимостью p от q, так как по определению диффеоморфизма обратное отображение $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ тоже гладкое.

Если же отображение φ не является инъективным, то прямой образ векторного поля при таком отображении невозможно определить, так как в одну точку могут придти два разных вектора.

Задача 6.44. Приведите пример гладкого отображения $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которое является инъективным, но переводит гладкие векторные поля в негладкие.

[[Сделайте так, чтобы производная φ обращалась в нуль.]]

6.7. **Факторпространство и конечная порождённость векторного пространства.** Этот и два следующих раздела позволят читателю вспомнить понятия линейной алгебры, которые понадобятся в дифференциальной геометрии и прочих областях математики. Обзор этих понятий будет неполным и при возникновении затруднений читателю рекомендуется ознакомиться с соответствующими учебниками, например [2].

Будем рассматривать векторные пространства над полем $\mathbb{K}$, которое читатель для простоты может считать полем действительных чисел. Определение векторного пространства мы напоминать не будем, но напомним сначала определение факторпространства векторного пространства:

Определение 6.45. Пусть $W \subseteq V$ — векторные пространства. Тогда *факторпространством* V/W называется фактормножество V по отношению эквивалентности

$$v \sim v' \Leftrightarrow v - v' \in W.$$

Задача 6.46. Проверьте, что сложение и умножение на скаляр в пространстве V корректно индуцирует структуру векторного пространства в V/W.

С понятием факторпространства связана естественная проекция на фактормножество $\pi : V \to V/W$, которая сопоставляет вектору $v \in V$ его класс эквивалентности в пространстве V/W. По определению это отображение является сюръективным и его ядро (обращающиеся в нуль векторы) — это в точности подпространство W. Более того, как нетрудно проверить по определению, любое линейное отображение $f : V \to U$ порождает последовательность отображений

$$\ker f \longrightarrow V \xrightarrow{\pi_f} V/\ker V \xrightarrow{s_f} \operatorname{Im} f \xrightarrow{i_f} U \longrightarrow U/\operatorname{Im} f,$$

в которой π_f — естественная проекция на факторпространство, i_f — естественное вложение подпространства, а s_f является изоморфизмом векторных пространств; f при этом равно композиции $f = i_f \circ s_f \circ \pi_f$.

Задача 6.47. Докажите, что линейный оператор $f : V \to V$, такой что $f(W) \subseteq W$, корректно определяет линейный оператор $\bar{f} : V/W \to V/W$.

Сформулируем понятие, отличающее «сравнительно маленькие» векторные пространства от произвольных.

Определение 6.48. Векторное пространство V над полем $\mathbb{K}$ называется *конечно-порождённым*, если оно изоморфно факторпространству пространства $\mathbb{K}^N$ (прямая сумма N экземпляров $\mathbb{K}$) при некотором $N \in \mathbb{Z}^+$.

Конечно, это понятие можно объяснить попроще. Рассмотрев сюръекцию $\pi : \mathbb{K}^N \to V$ и обозначив

$$v_i = \pi(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-i-1}),$$

мы получаем, что конечно порождённое пространство V должно совпадать с пространством линейных комбинаций своих векторов $v_1, \dots, v_N$,

$$V = \langle v_1, \dots, v_N \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{N} x_i v_i : x_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Из определения пока не ясно, является ли подпространство конечно-порождённого пространства конечно-порождённым, но в следующем разделе мы найдём подход к этому вопросу. Для векторных пространств это понятие просто будет означать конечномерность, хотя его аналог для *модулей над кольцом* (когда в определении поля $\mathbb{K}$ убирается операция деления и возможно опускается требование коммутативности умножения) имеет собственный смысл.

Задача 6.49. Докажите, что факторпространство конечно-порождённого векторного пространства является конечно-порождённым.

[[Примените композицию сюръективных отображений.]]

Задача 6.50. Пусть дана пара векторных пространств $W \subset V$, причём W и V/W оказались конечно-порождёнными. Докажите, что V тоже является конечно-порождённым.

[[Используйте описание конечной порождённости через системы векторов, или дождитесь описания через флаги в следующем разделе.]]

6.8. **Размерность векторного пространства.** В этом разделе мы обсудим понятие размерности векторного пространство. Скорее всего оно уже известно читателю, но перед изучением более сложных вопросов хотелось бы освежить понимание уже известных идей, и заодно более геометрически взглянуть на понятие размерности векторного пространства над полем $\mathbb{K}$.

Определение 6.51. Последовательность нетривиальных возрастающих по включению векторных пространств

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$$

называется *флагом* в пространстве V длины n. Флаг называется *полным*, если в него нельзя добавить ни одного подпространства, то есть $V_k/V_{k-1} \cong \mathbb{K}$ для всех k.

Поясним полноту флага. Если факторпространство V_k/V_{k-1} имеет не более одного линейно независимого вектора, то возьмём один его вектор v и выразим любой другой как αv с $\alpha \in \mathbb{K}$. Это означает, что V_k/V_{k-1} изоморфно $\mathbb{K}$. Если же в V_k/V_{k-1} есть вектор v и он не порождает всё V_k, то это означает по определению факторпространства, что $V_{k-1} \neq V_{k-1} + \langle v \rangle \neq V_k$, то есть $V_{k-1} + \langle v \rangle$ можно было бы добавить в флаг между V_{k-1} и V_k.

Лемма 6.52. *Для векторного пространства V максимальная длина флага в нём равна максимальному количеству линейно независимых векторов в нём. Если длина флага неограничена, то и количество линейно независимых векторов тоже неограничено.*

Доказательство. Докажем в одну сторону. Пусть есть система линейно независимых векторов $v_1, \dots, v_n$, положим

$$V_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Эта последовательность нетривиальных подпространств V строго возрастает по включению и $V_k \neq V_{k-1}$, так как иначе v_k выражался бы через $v_1, \dots, v_{k-1}$ по определению линейной оболочки.

В другую сторону, есть есть флаг

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V,$$

то положим $v_k \in V_k \setminus V_{k-1}$ (так обозначено не факторпространство, а разность множеств). Если между векторами $v_1, \dots, v_n$ была бы линейная зависимость, то какой-то из них, например v_k, выражался бы через предыдущие. Но тогда выполнялось бы $v_k \in V_{k-1}$, что мы запретили. □

После этой леммы уместно сделать определение:

Определение 6.53. *Размерностью* векторного пространства V, $\dim V$, называется максимальная длина флага в нём, или эквивалентно, максимальный размер системы линейно независимых векторов в нём.

Система линейно независимых векторов, порождающая V, называется *базисом* в V. Определение размерности можно интерпретировать как максимальный размер базиса векторного пространства (под размером мы упрощённо будем понимать натуральное число или ∞, чтобы не вдаваться в теоретико-множественные проблемы). Из определения не следует, что размеры всех базисов одного и того же пространства одинаковые, но это мы сейчас будем доказывать в следующем виде (в силу леммы 6.52):

Лемма 6.54. *У конечно-порождённого векторного пространства все полные флаги имеют одинаковую длину.*

Доказательство. Заметим, что у конечно порождённого пространства есть какая-то конечная система линейно независимых векторов. Выбрасывая из неё векторы, которые выражаются через оставшиеся, можно добиться её линейной независимости и оставить её порождающей всё пространство, то есть сделать её базисом. В силу леммы 6.52 (точнее её доказательства) это означает, что в конечно-порождённом V есть хотя бы один полный флаг.

Давайте теперь переопределим размерность конечно-порождённого пространства V как *минимальную длину* полного флага в нём. Если мы докажем утверждение леммы (все полные флаги имеют одинаковую длину), то это определение будет совпадать с исходным.

Будем вести индукцию по размерности V. При размерности 1 по определению $V \cong \mathbb{K}$ и утверждение очевидно (если нет, проверьте его внимательно). Рассмотрим полный флаг минимальной длины

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$$

и какой-то другой полный флаг

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_m = V.$$

Пусть $V' = V_{n-1} \cap W_{m-1}$.

Рассмотрим случай $V' = V_{n-1}$: из полноты флагов следует, что тогда $W_{m-1} = V'$. В пространстве V' есть флаг $\{V_k\}_{k=1}^{n-1}$ длины $n-1$, а также есть флаг $\{W_k\}_{k=1}^{m-1}$ длины $m-1$. По предположению индукции $n-1 = m-1$ и следовательно $n = m$.

Случай $V' = W_{m-1}$ даёт ту же самую ситуацию, осталось разобраться со случаем, когда включения $V' \subset V_{n-1} \subset V$ и $V' \subset W_{n-1} \subset V$ строгие. Тогда естественные отображения (из задачи 6.47) $V_{n-1}/V' \to V/W_{m-1}$ и $W_{m-1}/V' \to V/V_{n-1}$ являются сюръективными и инъективными (проверьте это в качестве упражнения), то есть все эти факторы изоморфны $\mathbb{K}$. Последовательность подпространств V' вида $V_1 \cap V', \dots, V_{n-2} \cap V', V_{n-1} \cap V' =$

V' имеет последовательные факторпространства либо изоморфные $\mathbb{K}$, либо нулевые, так как естественные отображения

$$(V_k \cap V')/(V_{k-1} \cap V') \to (V_k)/(V_{k-1})$$

инъективны (если $v \in V_k \cap V'$ оказался в V_{k-1}, то он оказался в $V_{k-1} \cap V'$). Убирая из последовательности $\{V_k \cap V'\}$ повторы, мы получим полный флаг

$$0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_\ell = V'$$

длины $\ell \leqslant n-1$. Сравнивая флаги пространства V_{n-1} (второй записан в обратном порядке)

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \supset V_{n-1} \supset V'_\ell \supset \cdots \supset V'_1 \supset V'_0 = 0$$

и применяя предположение индукции мы получаем, что $\ell = n-2$. Теперь сравнивая флаги в пространстве W_{m-1}

$$0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_\ell \subset W_{m-1} \supset W_{m-2} \supset \cdots \supset W_1 \supset W_0 = 0$$

и используя предположение индукции, получаем $m-1 = \ell+1$, то есть $m = n$, что и требовалось доказать. □

Теперь конечно-порождённые векторные пространства можно называть *конечномерными*, так как случай наличия конечных базисов в одном и том же пространстве, размеры которых неограничены, исключён предыдущей леммой.

Следствие 6.55. *Если* $W \subseteq V$, $\dim W$ *и* $\dim V/W$ *конечны, то* $\dim V = \dim W + \dim V/W$.

Доказательство. Взяв полные флаги

$$0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_k = W, \quad 0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_\ell = V/W,$$

мы можем построить полный флаг (здесь $\pi : V \to V/W$ — естественная проекция)

$$0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_k \subset \pi^{-1}(V'_1) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(V'_\ell) = V$$

длины $k+\ell$. □

Задача 6.56. Докажите, что пары векторных подпространств $U, W \subseteq V$ классифицируются числами $\dim U \cap W, \dim U, \dim W, \dim V$, и что выполняется соотношение

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim(U+W).$$

[[Докажите и используйте изоморфизмы $(U+W)/U \cong W/(W \cap U)$, $(U+W)/W \cong U/(U \cap W)$.]]

Задача 6.57. Докажите, что если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто (например, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$), V — конечномерное пространство над этим полем, $A : V \to V$ — линейный оператор, то существует полный флаг в V, инвариантный относительно A (в том смысле, что все составляющие флаг подпространства инварианты относительно A).

[[Найдите одномерное инвариантное подпространство для A и перейдите к фактору по нему, применив индукцию.]]

Задача 6.58. Приведите примеры линейных операторов $A : V \to V$, не имеющих инвариантных полных флагов для поля, не являющегося алгебраически замкнутым (например, поле действительных чисел $\mathbb{R}$).

Задача 6.59. Пусть V — векторное пространство размерности n, $\mathcal{F}$ — семейство его векторных подпространств. Докажите, что найдутся не более n представителей $L_1, \dots, L_m \in \mathcal{F}$ $(m \leqslant n)$ такие, что

$$\bigcap_{i=1}^{m} L_i = \bigcap_{L\in\mathcal{F}} L := \bigcap \mathcal{F}.$$

Понятие размерности векторного пространства позволяет говорить о ранге линейного отображения.

Определение 6.60. Рангом линейного отображения $f : V \to U$, $\operatorname{rk} f$, называется размерность пространства $V/\ker f \cong \operatorname{Im} f$, для простоты считаем ранг либо неотрицательным целым числом, либо ∞.

Напомним, что *двойственное пространство* V^* — это пространство линейных форм (отображений) $\lambda : V \to \mathbb{K}$. Всякое линейное отображение отображение $f : V \to U$ порождает *сопряжённое отображение* $f^* : U^* \to V^*$ по формуле

$$f^*(\lambda) = \lambda \circ f.$$

Для композиции линейных отображений $f = g \circ h$ по определению верна формула $f^* = h^* \circ g^*$ (проверьте её в качестве упражнения).

Так как всякая линейная форма $\lambda : V \to \mathbb{K}$ для конечномерного пространства V с базисом $e_1, \dots, e_n$ задаётся как

$$\lambda(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = \lambda_1x_1 + \dots \lambda_ne_n,$$

то мы получаем (неестественные изоморфизмы) $V \cong V^* \cong \mathbb{K}^n$, то есть размерности V и V^* в конечномерном случае равны.

Задача 6.61. * Проверьте, что в бесконечномерном случае размерности V и V^* (определённые как мощности базисов) не обязаны быть равны.

[[Проще всего рассмотреть случай счётной прямой суммы с самим собой $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ для конечного поля $\mathbb{K}$.]]

Следовательно, естественное вложение $s : V \mapsto V^{**}$, действующее по формуле

$$s(v)(\lambda) = \lambda(v),$$

является изоморфизмом в конечномерном случае из совпадения размерностей (и следствия 6.55).

Задача 6.62. * Проверьте, что в бесконечномерном случае $s : V \to V^{**}$ не является изоморфизмом. Попробуйте придумать элемент V^{**}, не лежащий в V.

Лемма 6.63. *Для отображения конечного ранга $f : V \to U$ оказывается* $\operatorname{rk} f^* \leqslant \operatorname{rk} f$.

Доказательство. Посмотрим на разложение $f = i_f \circ s_f \circ \pi_f$ из диаграммы

$$\ker f \longrightarrow V \xrightarrow{\pi_f} V/\ker V \xrightarrow{s_f} \operatorname{Im} f \xrightarrow{i_f} U \longrightarrow U/\operatorname{Im} f.$$

И неё ясно, что $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} s_f$. Из формулы для сопряжения произведения получается $f^* = \pi_f^* \circ s_f^* \circ i_f^*$, тогда из определения ранга следует, что

$$\operatorname{rk} f^* \leqslant \min\{\operatorname{rk} \pi_f^*, \operatorname{rk} s_f^*, \operatorname{rk} i_f^*\} \leqslant \operatorname{rk} s_f^* \leqslant \operatorname{rk} s_f = \operatorname{rk} f,$$

так как s_f и s_f^* — изоморфизмы и их ранг равен (конечной по предположению) размерности пространств, на которых они действуют. $\square$

Следствие 6.64. *Для отображения конечномерных пространств $f : V \to U$ оказывается* $\operatorname{rk} f^* = \operatorname{rk} f$.

Доказательство. В этом случае можно интерпретировать $f^{**} : V^{**} \to U^{**}$ как отображение $V \to U$, равное f. Тогда по доказанному в предыдущей лемме

$$\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^{**} \leqslant \operatorname{rk} f^* \leqslant \operatorname{rk} f.$$

□

Задача 6.65. ** Проверьте, что для установления равенства $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^*$ достаточно конечности ранга, а конечномерность пространств на самом деле не нужна.

[[Докажите для начала, что всякое линейное отображение $\lambda : \operatorname{Im} f \to \mathbb{K}$ продолжается до линейного отображения $\bar{\lambda} : U \to \mathbb{K}$. Для этого может понадобиться лемма Цорна (теорема 7.131).]]

6.9. **Полилинейные формы и детерминант.** Часто понятия размерности и линейной зависимости объясняются с помощью понятия «детерминант», поэтому имеет смысл пояснить значение детерминанта в терминах линейной алгебры.

Определение 6.66. Для векторного пространства V над полем $\mathbb{K}$ отображение

$$p : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{K}$$

называется *полилинейной формой степени* k на V, если оно линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных.

Заметим, что если в пространстве V задан базис $v_1, \dots, v_n$, то полилинейная форма с помощью свойства полилинейности определяется своими координатами

$$p_{i_1,\dots,i_k} = p(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Более того, эти координаты независимы, так как для всякого набора координат $p_{\dots}$ выражение

$$p\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{1,i_1} v_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^{n} x_{k,i_1} v_{i_1}\right) = \sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_k\leqslant n} p_{i_1,\dots,i_k} x_{1,i_1} \dots x_{k,i_k}$$

корректно определяет полилинейную форму на V.

Определение 6.67. Полилинейная форма

$$p : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{K}$$

называется *кососимметричной*, если при перестановке любых двух своих аргументов она меняет знак.

Заметим, что если к кососимметричной форме встречается один и тот же вектор в разных позициях, то с помощью перестановки мы получим

$$p(\dots, v, \dots, v, \dots) = -p(\dots, v, \dots, v, \dots).$$

Если в поле $\mathbb{K}$ имеет место $2 \neq 0$ (*характеристика поля не равна* 2), то отсюда следует

$$p(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0.$$

Далее можно предполагать, что либо $2 \neq 0$ в поле $\mathbb{K}$, либо в определении кососимметричности мы явно требуем обнуления формы при подстановке в неё двух одинаковых векторов в разные позиции.

Можно заметить, что всякая перестановка двух аргументов полилинейной формы (*транспозиция*) может быть получена как результат нескольких перестановок соседних пар. Нам надо установить, что свойство кососимметричности достаточно проверять именно на транспозициях соседних аргументов полилинейной формы. Мы обоснуем эти и заодно изучим полезное понятие:

Определение 6.68. *Число беспорядков в перестановке* $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ — это количество таких пар $1 \leqslant i < j \leqslant n$, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Лемма 6.69. *Если σ — произвольная перестановка, а τ — транспозиция соседних элементов i и $i+1$, то число беспорядков в σ и $\sigma \circ \tau$ отличаются на единицу.*

Доказательство. При замене σ на $\sigma \circ \tau$ в определении беспорядка происходит изменение только в одной паре $(i, i+1)$, другие пары не меняются, если предполагать, что рассматривая для σ пару (i, j) мы будем рассматривать для $\sigma \circ \tau$ пару $(i+1, j)$ вместо неё и наоборот, аналогично для (j, i) и $(j, i+1)$. $\square$

Лемма 6.70. *Транспозиция двух элементов $\{1, \dots, n\}$ может быть представлена как композиция нечётного числа транспозиций соседних элементов и следовательно в свойстве кососимметричности достаточно рассматривать транспозиции соседних аргументов.*

Доказательство. Остаётся в качестве упражнения. $\square$

Векторное пространство кососимметричных форм на V степени k обозначается $\wedge^k V^*$, при этом оказывается $\wedge^1 V^* = V^*$, $\wedge^0 V^* = \mathbb{K}$ (последнее можно считать определением).

Лемма 6.71. *Для векторного пространства V размерности n, $\wedge^m V^* = 0$ при $m > n$ и $\wedge^n V^*$ одномерно.*

Доказательство. Сначала разберём случай степени m, большей размерности n. Форма p тогда определяется своими значениями на последовательностях базисных векторов. Но базисным векторов всего n и в последовательности длины m какие-то два из них повторятся, но тогда p должна обнулиться по свойству кососимметричности.

Если же степень равна в точности n, то значение полилинейной формы p определяется числами

$$p_\sigma = p\left(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\right),$$

где σ пробегает все перестановки чисел $\{1, \dots, n\}$ из-за запрета повторов. На самом деле достаточно знать одно из них, так как каждую перестановку можно получить из любой другой последовательностью транспозиций, каждая из которых обязана менять знак p_σ. Это означает, что пространство кососимметричных форм степени n не более чем одномерно и для доказательства одномерности достаточно предъявить хотя бы одну нетривиальную такую форму.

Пусть для перестановки $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ её *знак*, $\operatorname{sgn} \sigma$ — это $+1$ при чётном количестве беспорядков в перестановке и -1 — при нечётном. Определим через сумму по всем перестановкам

$$p\left(\sum_{j=1}^n x_{1,j} v_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{n,j} v_j\right) = \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma \cdot x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}.$$

Это очевидно полилинейная форма. В силу леммы 6.70 достаточно проверить её кососимметричность при перестановке соседних векторов, которая соответствует умножению перестановки σ под знаком суммы на транспозицию. Но при этом $\operatorname{sgn} \sigma$ меняет знак по лемме 6.69.

В случае поля характеристики 2 нам надо также проверить, что при подстановке в эту форму двух одинаковых векторов она обнуляется. Пусть эти два вектора стоят на позициях, которые переставляет транспозиция τ. Тогда в сумме слагаемое для σ такое же, как и слагаемое для $\sigma \circ \tau$, то есть сумма делится на $2 = 0$, значит она равна 0. $\square$

Задача 6.72. Докажите, что если $\dim V = n$, то $\dim \wedge^k V^* = \binom{n}{k}$.

[[Рассмотрите значения формы на наборах базисных векторов.]]

Теперь для всякого линейного отображения $f : V \to U$ на можно рассмотреть $\wedge^n f^* : \wedge^n U^* \to \wedge^n V^*$, действующий по формуле:

$$\wedge^n f^*(p)(v_1, \dots, v_n) = p(fv_1, \dots, fv_n).$$

Из леммы 6.71 следует, что при $\dim V = n$ отображение $\wedge^n f^* : \wedge^n V^* \to \wedge^n V^*$ является отображением одномерного векторного пространства в себя, то есть умножением на число, которое называется *детерминант* f и обозначается $\det f$. Из доказательства леммы 6.71 понятно, что если оператор задан в координатно-матричном представлении

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_{ij} x_j v_i,$$

то

$$\det f = \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma \cdot f_{1,\sigma(1)} \dots f_{n,\sigma(n)}.$$

Из нашего определения детерминанта тривиально следуют его важные свойства:

Лемма 6.73. *Если $f : V \to V$ и $g : V \to V$ — два линейных оператора на конечномерном пространстве, то $\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$.*

Доказательство. Следует из того, что $\wedge^n (f \circ g)^* = \wedge^n g^* \circ \wedge^n f^*$. $\square$

Задача 6.74. Докажите, что для любых двух перестановок n чисел выполняется

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \rho) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \rho.$$

[[Сделайте из перестановки линейный оператор.]]

Лемма 6.75. *Линейный оператор на конечномерном пространстве $f : V \to V$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\det f \neq 0$.*

Доказательство. Если f является изоморфизмом, то он имеет обратный f^{-1} и нетривиальность детерминанта следует из леммы 6.73

$$\det f \cdot \det f^{-1} = \det \mathrm{id}_V = 1.$$

По следствию 6.55

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$$

и если f не является изоморфизмом, то у него нетривиальное ядро и образ имеет размерность меньше $\dim V$. Следовательно f записывается как композиция отображений в диаграмме

$$V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} V,$$

для $W = \operatorname{Im} f$ с $\dim V = n$ и $\dim W < n$. По лемме 6.71 $\wedge^n W^* = 0$. Следовательно отображения $\wedge^n h^*$ и $\wedge^n g^*$ нулевые, как и

$$\wedge^n f^* = \wedge^n g^* \circ \wedge^n h^* = 0.$$

$\square$

Задача 6.76. Проверьте, что для линейного оператора в конечномерном пространстве $f : V \to V$ выполняется $\det f = \det f^*$.

[[Можно использовать явную формулу, а можно заметить, что $\wedge^n f^* = (\wedge^n f)^*$.]]

Задача 6.77. Проверьте, что если $W \subset V$ и линейный оператор $f : V \to V$ обладает свойством $f(W) \subseteq W$, то

$$\det f = \det f|_W \cdot \det \bar{f},$$

где $\bar{f} : V/W \to V/W$ индуцирован f.

[[Можно использовать формулу $\wedge^{\dim V} V^* = \wedge^{\dim W} W^* \otimes \wedge^{\dim V - \dim W} V/W^*$ или сделать это через подходящий базис и матричное представление f.]]

Задача 6.78. Интерпретируйте матричные элементы линейного отображения $\wedge^k f^* : \wedge^k U^* \to \wedge^k V^*$ в терминах матричных элементов отображения $f : V \to U$.

[[Должно получиться понятие, известное из матрично-ориентированных учебников как «минор».]]

Задача 6.79. Опишите собственные значения оператора $\wedge^k f^* : \wedge^k V^* \to \wedge^k V^*$ в терминах собственных значений исходного оператора $f : V \to V$.

[[Приведите f к верхнетреугольному виду.]]

6.10. **Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование.** После определения векторных полей уместно определить дифференциальные формы. Дифференциальная форма первой степени в точке $p \in U$ — это просто элемент двойственного пространства $(T_pU)^*$, которое обычно обозначается как T_p^*U, то есть линейная форма на касательном пространстве. Следующее упражнение даёт более прямое (но и более абстрактное) описание T_p^*U.

Задача 6.80. Обозначим $\mathfrak{m}_p(U)$ гладкие функции на U, которые обращаются в нуль в точке p. Обозначим $\mathfrak{m}_p^2(U)$ те гладкие функции, которые представляются в виде

$$f_1g_1 + f_2g_2 + \dots + f_kg_k, \quad \forall i\ f_i, g_i \in \mathfrak{m}_p(U).$$

Установите изоморфизм $T_p^*U = \mathfrak{m}_p(U)/\mathfrak{m}_p^2(U)$.

[[Работая в системе координат, по существу надо доказать, что функции с нулевым значением и нулевыми производными в p лежат в $\mathfrak{m}_p^2(U)$.]]

Как и в случае векторных полей, от формы первой степени в точке можно перейти к форме первой степени, определённой в каждой точке и гладко зависящей от точки. Нетрудно проверить (например, в координатах), что любая форма первой степени α, определённая на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — это сопоставление каждому векторному полю X на U гладкой функции $\alpha(X)$, линейное относительно умножения на гладкие функции, то есть $\alpha(fX) = f\alpha(X)$ для любых f и X. В таком духе мы определим дифференциальные формы высших степеней на открытом множестве.

Определение 6.81. Определим *дифференциальную форму степени* k на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как отображение наборов из k гладких векторных полей $X_1, \dots, X_k$ на U в бесконечно гладкие функции на U, $(X_1, \dots, X_k) \to \alpha(X_1, \dots, X_k)$, линейное по каждому аргументу

$$\alpha(X_1, \dots, X_i + Y_i, \dots, X_k) = \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + \alpha(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_k)$$

и относительно умножения на бесконечно гладкие функции

$$\alpha(f_1X_1, \dots, f_kX_k) = f_1 \dots f_k \alpha(X_1, \dots, X_k),$$

и кососимметричное, то есть меняющее знак при перестановке любых двух своих аргументов.

Кососимметричность в этом определении пока не выглядит естественно, но она будет играть ключевую роль в определении внешнего дифференциала дифференциальной формы, а далее и при интегрировании дифференциальных форм.

Лемма 6.82. *Значение выражения $\alpha(X_1, \dots, X_k)$ в точке p зависит только от значений векторных полей X_i в точке p.*

Доказательство. Представим каждое поле X_i в виде $\sum_j X_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Применив линейность α, разложим выражение на слагаемые, в каждом из которых α применяется к векторным полям $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (это будет не зависящая от векторных полей часть), а множители X_i^j вынесены из α как функции. Значение этого выражения в точке p будет зависеть только от значений X_i^j в точке p. $\square$

Предыдущая лемма позволяет переформулировать определение дифференциальной формы иначе, как выбор кососимметричной полилинейной формы степени k на касательном пространстве T_pU в каждой точке $p \in U$ так, чтобы выбранная форма гладко зависела от точки p. Такое определение более геометрическое, в отличие от первого, более алгебраического.

Пространство дифференциальных форм степени k на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим $\Omega^k(U)$. Из леммы 6.71 следует, что $\Omega^k(U) = 0$ при $k > n$, а при $k = n$ дифференциальная форма степени n в точке определяется одним числом (которое однако меняется при криволинейной замене координат!). То есть $\Omega^n(U)$ в фиксированной системе координат выглядит как $C^\infty(U)$, но при замене координат ведёт себя иначе.

Посмотрим теперь подробнее на формы небольшой степени. Формы нулевой степени по определению производят функцию из ничего, то есть они оказываются гладкими функциями, $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.

Для всякой функции $f \in C^\infty(U)$ её дифференциал как отображения $U \to \mathbb{R}$ можно считать формой первой степени в соответствии с формулой

$$df(X) = X(f),$$

действительно, это выражение линейно относительно умножения X на бесконечно гладкие функции и в координатах компоненты df оказываются равны $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то есть это уже известный нам дифференциал функции, но определённый по-новому.

Дифференциалы координатных функций $dx_1, \dots, dx_n$ в любой точке дают базис пространства T_p^*U, двойственный к базису $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ в смысле

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

По этому базису можно разложить любую форму в точке, а применяя это во всех точках области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обнаруживаем, что всякая дифференциальная форма на U первой степени выражается как

$$\alpha_1 dx_1 + \dots + \alpha_n dx_n,$$

где $\alpha_i \in C^\infty(U)$. При замене координат компоненты дифференциальной формы первой степени ведут себя так же, как компоненты дифференциала функции, то есть преобразование от новой к старой системе координат выглядит как

$$\alpha_j = \sum_j \widetilde{\alpha}_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

По сути это означает, что преобразование выражения в новых координатах

$$\sum_i \widetilde{\alpha}_i dy_i$$

в выражение в старых координатах

$$\sum_j \alpha_i dx_i$$

производится чисто формально, рассматривая y_i как функции от x_j и беря их дифференциалы, а также подставляя в $\widetilde{\alpha}_i$ выражения y_i через $x_1, \dots, x_n$.

Существует (известное из линейной алгебры) *внешнее умножение* $\Omega^k(U) \times \Omega^\ell(U) \to \Omega^{k+\ell}(U)$, которое можно определить по формуле, суммируя по всем перестановкам из $k + \ell$ элементов:

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = c_{k,\ell} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}).$$

Коэффициент $c_{k,\ell}$ можно выбрать так, чтобы выполнялась ассоциативность умножения и условие нормировки (в некоторых учебниках условие нормировки может быть другим!)

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = 1.$$

Задача 6.83. Найдите коэффициенты $c_{k,\ell}$, совместимые с ассоциативностью внешнего умножения и условием нормировки.

Задача 6.84. Проверьте, что умножение формы $\alpha \in \Omega^k(U)$ на функцию $f \in C^\infty(U)$ по формуле

$$(f\alpha)(X_1, \dots, X_k) = f \cdot \alpha(X_1, \dots, X_k)$$

совпадает со внешним умножением $f \wedge \alpha$ при интерпретации функции как формы из $\Omega^0(U)$.

С помощью внешнего умножения всякую дифференциальную форму степени k в координатах можно единственным образом записать в виде:

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

где $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ — гладкие функции. Это следует из того, что в каждой точке кососимметричные формы $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, составленные из дифференциалов координатных функций, дают базис пространства k-линейных кососимметричных форм на T_pU. Это означает, что дифференциальные формы на области U порождаются с помощью операций сложения и внешнего умножения функциями (как элементами $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$) и их дифференциалами (как элементами $\Omega^1(U)$). Это наблюдение позволит нам определить операцию *внешнего дифференцирования* $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$.

Лемма 6.85. *На гладких дифференциальных формах на U существует единственный $\mathbb{R}$-линейный оператор $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, удовлетворяющий условиям: а) для функций df является её дифференциалом; б) $d^2 = 0$; в) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$ (правило Лейбница).*

Доказательство. Так как внешние формы порождаются функциями и их дифференциалами, то (с учётом вытекающего из свойства (б) равенства $d^2 x_i = 0$) дифференциал формы α в координатах обязан находиться по формуле

$$d\left(\sum_{i_1<\dots<i_k} \alpha_{i_1\dots i_k} dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\right) = \sum_{i_1<\dots<i_k} d\alpha_{i_1\dots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k} =$$
$$= \sum_{i_1<\dots<i_k,\ j\notin\{i_1,\dots,i_k\}} \frac{\partial\alpha_{i_1\dots i_k}}{\partial x_j} dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}.$$

Это доказывает единственность.

Чтобы доказать существование, можно просто использовать эту формулу как определение в некоторой системе координат и проверить свойства. Свойство (а) будет очевидно; свойство (б) достаточно проверять для монома вида $f dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$ и оно будет следовать из независимости второй производной от порядка дифференцирования и вытекающего из него тождества

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_\ell} dx_j\wedge dx_\ell + \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell\partial x_j} dx_\ell\wedge dx_j = 0;$$

свойство (в), в силу билинейности умножения, достаточно будет проверить на мономах вида $f dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$ и $g dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_\ell}$, что сводится к формуле Лейбница для дифференциала произведения двух функций. Читателю предлагается самостоятельно проверить, что знаки $\pm$ в выражениях будут именно такими, как написано в условии. $\square$

Доказанная единственность показывает, что операция внешнего дифференцирования совместима с заменами координат, то есть по сути определена независимо от выбора криволинейной системы координат. Помимо обратимой замены координат полезно рассмотреть и произвольные гладкие отображения, определив *обратный образ дифференциальной формы* при гладком отображении:

Определение 6.86. Для всякого гладкого отображения $\varphi : U \to V$ между открытыми подмножествами евклидовых пространств определено отображение пространств дифференциальных форм $\varphi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$, действующее по формуле (для некоторых векторов $X_1,\dots,X_k$ в одной и той же точке $p\in U$)

$$\varphi^*\alpha(X_1,\dots,X_k) = \alpha(\varphi_*X_1,\dots,\varphi_*X_k).$$

В этом определении следует понимать, что когда левая часть вычисляется в точке $p\in U$, то правая вычисляется в точке $\varphi(p)$. Тогда становится понятным, что для функции $f\in C^\infty(V) = \Omega^0(V)$ оказывается

$$\varphi^* f = f\circ\varphi,$$

что совпадает с понятием замены переменных в функции. Для форм первой степени это отображение является сопряжённым к φ_* в каждой точке, оно задаётся композицией $\alpha\circ\varphi_*$, где α находится в точке $f(p)$, а φ_* — в точке p.

Важно понимать, что в отличие от векторных полей, для дифференциальных форм любое гладкое отображение порождает отображение пространства дифференциальных форма в обратную сторону.

Лемма 6.87. *Взятие обратного образа дифференциальных форм коммутирует с внешним умножением и внешним дифференцированием.*

Доказательство. Для внешнего умножения можно проверить по определению умножения. Для дифференцирования, с учётом возможности умножать и правила Лейбница для дифференцирования, достаточно проверить на функциях и их дифференциалах, что сводится к формуле для производной композиции, что можно изобразить как

$$d(\varphi^* f) = d(f\circ\varphi) = df\circ D\varphi = \varphi^*(df).$$

□

Предыдущая лемма означает, что нахождение обратного образа явно заданной дифференциальной формы происходит формально, подстановкой выражений новых переменных через старые в коэффициенты формы и в дифференциалы новых переменных.

Задача 6.88. Выпишите в явном виде действие φ^* на Ω^n в областях $\mathbb{R}^n$.

[[В выражение $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ подставьте dy_i как дифференциалы новых функций в старых координатах $dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} dx_n$ и перемножьте по правилам внешнего умножения.]]

6.11. **Интеграл дифференциальной формы с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$.** В этом разделе мы изучим определение интеграла от дифференциальной формы. Неформально говоря, дифференциальная форма (максимальной степени) — это именно тот объект, для которого можно определить интеграл, почти не зависящий от выбора криволинейной системы координат. Причём в слове «почти» тоже скрывается глубокое понятие ориентации системы координат.

В целях интегрирования мы будем рассматривать дифференциальные формы с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$, то есть определённые на всём $\mathbb{R}^n$ и равные нулю за пределами некоторого компакта). В более общем виде можно рассматривать формы с компактным носителем на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Формы с компактным носителем на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначаются $\Omega_c^k(U)$ и нетрудно понять (проверьте это самостоятельно), что продолжение формы нулём за пределы U даёт включение $\Omega_c^k(U) \subseteq \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$. Поэтому в большинстве случаев нам будет удобно рассматривать формы с компактным носителем на всём $\mathbb{R}^n$, хотя иногда мы будем упоминать и общий случай.

Определение 6.89. Для гладкой формы с компактным носителем $\nu = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ определим в какой-то фиксированной системе координат

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nu := \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\ dx_1 \dots dx_n.$$

Так как функция $a(x)$ гладкая с компактным носителем, то этот интеграл существует и является числом в любом смысле, как повторный интеграл Римана или как интеграл Лебега. Чтобы исследовать зависимость этого определения от выбора криволинейной системы координат (в окрестности носителя формы), нам надо установить одно свойство, связывающее интеграл и внешнее дифференцирование:

Лемма 6.90. *Если $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, то*

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\lambda = 0.$$

Доказательство. Всякое λ представляется в виде суммы выражений $\lambda_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$, где шапочка традиционно (в гомологической алгебре) обозначает отсутствующий множитель. В силу линейности достаточно доказать утверждение для одного множителя, без ограничения общности пусть это $f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Тогда

$$d(f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

С учётом компактности носителя f, при интегрировании такого выражения по x_1 уже получается нуль, значит по теореме Фубини и общий интеграл будет равен нулю. □

Таким образом интеграл оказывается определён как линейный функционал на факторпространстве $\Omega^n_c(\mathbb{R}^n)/d\Omega^{n-1}_c(\mathbb{R}^n)$. Следующая лемма показывает, что соответствующее факторпространство одномерно:

Лемма 6.91. *Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — гладкая функция с компактным носителем и единичным интегралом. Для всякой $\nu \in \Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$ найдётся число I и форма $\lambda \in \Omega^{n-1}_c(\mathbb{R}^n)$, такие что*

$$\nu = I\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + d\lambda.$$

Доказательство. Для ясности начнём со случая размерности 1, пусть у нас форма $\nu = f dx$, тогда положим

$$I(\nu) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f dx, \quad P(x) = \int_{t=-\infty}^{x} (f - I(\nu)\varphi(t))\, dt.$$

Тогда

$$\nu = I(\nu)\varphi(x)dx + dP$$

и носитель P компактен, так как полный интеграл в определении P равен нулю.

Теперь для произвольной формы мы будем применять индукцию по количеству координат. Применив конструкцию для переменной x_1, считая остальные переменные параметрами, мы представим форму в виде

$$\nu = \varphi(x_1)J(x_2, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + d(Pdx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) \tag{6.6}$$

с гладкими функциями $J(x_2, \dots, x_n)$ и $P(x_1, \dots, x_n)$, которые будут иметь компактные носители, если ν имело компактный носитель. По предположению индукции

$$J(x_2, \dots, x_n)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = I\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + d\mu, \tag{6.7}$$

где форма μ степени $n - 2$ не зависит от переменной x_1 и не содержит дифференциала dx_1. Заметим, что дифференциал μ как формы от переменных $x_1, \dots, x_n$ равен её дифференциалу как формы переменных $x_2, \dots, x_n$, так как её производная по x_1 равна нулю. Также заметим, что $d(\varphi(x_1)dx_1) = 0$ и следовательно

$$-d(\varphi(x_1)dx_1 \wedge \mu) = \varphi(x_1)dx_1 \wedge d\mu.$$

Подставляя (6.7) в (6.6), с учётом предыдущей формулы получим

$$\nu = I\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n - d(\varphi(x_1)dx_1 \wedge \mu) + d(Pdx_2 \wedge \dots \wedge dx_n).$$

Осталось положить $\lambda = -\varphi(x_1)dx_1 \wedge \mu + Pdx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ и завершить шаг индукции. □

Лемма 6.92. *Факторпространство $\Omega^n_c(\mathbb{R}^n)/d\Omega^{n-1}_c(\mathbb{R}^n)$ одномерно, то есть всевозможные способы определить интеграл формы $\nu \in \Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы интеграл от $d\lambda$ равнялся нулю, могут отличаться только умножением на константу.*

Доказательство. Предыдущая лемма показывает, что это факторпространство пространство не более чем одномерно. С другой стороны, на этом факторпространстве уже определён интеграл, который очевидно иногда принимает ненулевые значения, значит оно не нульмерно. □

Это утверждение показывает, что определение интеграла формы по $\mathbb{R}^n$ не сильно зависит от выбора системы координат. Всё, что может произойти при замене координат в $\mathbb{R}^n$ — это умножение всех таких интегралов на одну и ту же константу. Характер этой зависимости мы установим более точно в следующем разделе.

6.12. **Замена координат в интеграле от формы.** Мы начнём с рассмотрения частного случая замены переменных, при котором интеграл от дифференциальной формы высшей степени не меняется. Мы будем использовать понятие *собственного* отображения — непрерывного отображения, при котором прообраз всякого компактного множества тоже компактен (непрерывность гарантирует только, что прообраз замкнутого множества замкнут).

Теорема 6.93 (Замена координат для где-то однозначных собственных отображений). *Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является собственным, для некоторого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ отображение φ тождественно на U и $\varphi^{-1}(U) = U$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \nu = \int_{\mathbb{R}^n} \nu.$$

Доказательство. Заметим, что из собственности φ и компактности носителя ν следует компактность носителя $\varphi^*\nu$. Так как обратный образ дифференциальной формы коммутирует с внешним дифференцированием, то выражение слева обнуляется при подстановке $\nu = d\lambda$ для любого $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Следовательно, выражение слева является линейным функционалом на одномерном пространстве $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)/d\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ и обязано быть пропорционально интегралу в правой части с некоторым коэффициентом, зависящим только от φ. Но коэффициент пропорциональности обязан быть равным 1, это можно установить, взяв ν с носителем в указанной в формулировке области U, для которой выполняется тождество $\varphi^*\nu = \nu$. ☐

С помощью этой теоремы можно установить следующий полезный факт (заметив, что отображение в формулировке теоремы не обязано быть обратимым).

Задача 6.94. Докажите, что где-то однозначное собственное отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сюръективно.

[[Примените теорему к форме ν с носителем, сосредоточенным в малой окрестности некоторой точки $p \in \mathbb{R}^n$.]]

В теореме 6.93 описывается некоторый класс замен координат, который не меняет интеграл от дифференциальной формы. Рассмотрение отображения, заданного как $y_1 = -x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$, или заданного перестановкой двух координат показывает, что интеграл дифференциальной формы иногда всё-таки может поменять знак, так как выражение $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ будет отличаться знаком от $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Далее мы выясним, что ничего другого при замене координат на связной области произойти не может.

При работе с интегралом в силу его линейности бывает удобно разбивать произвольное выражение в сумму выражений, каждое из которых имеет небольшой носитель; это позволяет следующее утверждение.

Лемма 6.95 (Разбиение единицы в окрестности компакта в $\mathbb{R}^n$). *Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ компакта $K \subseteq \mathbb{R}^n$ найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ с компактными носителями $\operatorname{supp} \rho_\alpha$ таких, что*

$$\forall \alpha \ \operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha,$$

только конечно число из них не равно нулю и

$$\sum_\alpha \rho_\alpha(x) \equiv 1$$

в некоторой окрестности K. Это называется разбиение единицы, подчинённое покрытию.

Доказательство. Для каждой точки $x \in K$ найдём по лемме 6.17 гладкую функцию ψ_x, которая принимает значения в $[0,1]$, равна 1 в окрестности $V_x \ni x$ и имеет носитель в одном из U_α. Из открытых V_x можно выбрать конечное подпокрытие компакта K. Соответственно, мы оставим конечное число функций $\psi_i = \psi_{x_i}$ так, чтобы в каждой точке $y \in K$ одна из выбранных ψ_i была равна единице.

По процедуре из доказательства теоремы 4.69 функции ψ_i с помощью верного в окрестности K тождества

$$(1-\psi_1)(1-\psi_2)\dots(1-\psi_N) = 0$$

можно преобразовать в гладкое разбиение единицы (работающее в некоторой окрестности K)

$$h_i = \psi_i(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{i-1}),$$

в котором каждая h_i имеет носитель, содержащийся в одном из U_α. Далее в качестве искомой функции ρ_α можно положить сумму тех h_i, которые приписаны к U_α, или нуль, если таких нет. □

Имея дифференциальную форму ν с компактным носителем и мелкое покрытие её носителя $\{U_\alpha\}_\alpha$, мы можем найти соответствующее разбиение единицы $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ и представить форму в виде суммы форм с маленькими носителями:

$$\nu = \sum_\alpha \rho_\alpha \nu,$$

то есть носитель каждого слагаемого $\rho_\alpha \nu$ будет содержаться в соответствующем U_α.

Задача 6.96. Докажите, что для связной области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ пространство $\Omega^n_c(U)/d\Omega^{n-1}_c(U)$ одномерно.

[[Заметьте, что рассуждение для $\mathbb{R}^n$ работает для открытых элементарных параллелепипедов в качестве U. Далее у произвольной формы ν с компактным носителем в U можно покрыть носитель такими параллелепипедами, каждый из которых содержится в U. Разбиение единицы, подчинённое такому покрытию, позволит доказать, что ν представляется в виде суммы единообразно устроенных форм $I_i\varphi(k(x-x_i))dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$ с центрами x_i и носителями в соответствующих параллелепипедах при достаточно большом $k > 0$. Далее остаётся использовать связность и от суммы перейти к одной такой форме.]]

В силу линейности интеграла разбиение единицы и представление формы в виде суммы сводит многие вопросы об интегрировании дифференциальной формы к интегрированию дифференциальной формы с маленьким носителем. Например, мы можем уточнить поведение интеграла при замене координат:

Теорема 6.97 (Поведение интеграла формы относительно замены координат). *Интеграл дифференциальной формы с компактным носителем на области U при отображении φ^*, соответствующем диффеоморфизму $\varphi : U \to V$ между областями меняет или не меняет знак в зависимости от знака якобиана $J\varphi$, то есть*

$$\int_U \varphi^*\nu = (\operatorname{sgn} J\varphi)\int_V \nu.$$

Заметим, что так как U и V связны, то знак якобиана один и тот же во всех точках области.

Доказательство. Использование разбиения единицы, линейности интеграла и компактности носителя (или решения задачи 6.96) показывает, что достаточно взять любую точку $x \in U$ и доказать утверждение для достаточно малой окрестности x и формы с носителем в этой окрестности.

В некоторой окрестности x теорема 6.27 позволяет расщепить отображение в композицию перестановки координат, отражений координат и отображений, возрастающим образом меняющих только одну координату. Перестановки координат могут поменять знак интеграла при отрицательном знаке перестановки, отражения меняют знак и имеют отрицательный якобиан. Композиция таких отображений будет менять знак интеграла в соответствии со знаком своего якобиана.

Остаются элементарные возрастающие отображения φ_i, которые в координатах задаются формулами

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad \forall j \neq i\; y_j = x_j,$$

пусть для простоты мы меняем первую координату и $i = 1$. Сделав сдвиг (который не влияет на интеграл), мы можем считать, что работаем в окрестности нуля и образ нуля тоже является нулём. Тогда производная $g = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ будет положительной гладкой функцией в окрестности нуля W. Выбрав функцию ψ из леммы 6.17 с носителем в W, мы можем заменить g на определённую на всём $\mathbb{R}^n$ гладкую функцию

$$\psi(x)g(x) + (1 - \psi(x)),$$

новая функция g в меньшей окрестности нуля всё ещё совпадает с $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, всюду положительна, а за пределами W равна единице. Далее, рассмотрим функцию

$$h(x_2, \dots, x_n) = f_1(0, x_2, \dots, x_n),$$

определённую на некоторой окрестности нуля W'. Взяв ψ' от $n-1$ переменной из леммы 6.17 с носителем в W', мы заменим h на $h\psi$, такая функция будет всё ещё совпадать с $f_1(0, x_2, \dots, x_n)$ в меньшей окрестности нуля. Теперь определим

$$\bar{f}_1(x_1, \dots, x_n) = h(x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} g(t, x_2, \dots, x_n)\, dt.$$

Эта функция уже везде строго возрастает по x_1 и совпадает с f_1 в некоторой окрестности нуля, так как h в некоторой окрестности нуля совпадает с $f_1(0, \dots)$, а g в некоторой окрестности нуля совпадает с $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ и в этой окрестности получается верная формула Ньютона–Лейбница для приращения f по переменной x_1. Кроме того, $\bar{f}_1$ отличается от координатной функции x_1 не более чем на константу на всём $\mathbb{R}^n$, так как h ограничена, а g за пределами компакта равна единице.

Отображение $\bar{\varphi}_1$, заданное формулами

$$y_1 = \bar{f}_1(x_1, \dots, x_n), \quad \forall j \neq 1\; y_j = x_j,$$

инъективно, отличается от тождественного не более чем на константу и совпадает с φ_1 в некоторой окрестности нуля. Так как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут, а прообраз ограниченного множества при $\bar{\varphi}_1$ ограничен, то оно является собственным. Более того, при далёких от нуля значениях $(x_2, \dots, x_n)$ это отображение совпадает с тождественным и с учётом инъективности удовлетворяет условиям теоремы 6.93. Следовательно, оно не меняет интеграл формы, в том числе интеграл формы в окрестности нуля, где оно совпадает с φ_1. $\square$

6.13. **Замена координат в интеграле от функции.** Теперь от интеграла дифференциальной формы мы можем вернуться к интегралу от функции в смысле Лебега и получить формулу для криволинейной замены переменных в интеграле.

Следствие 6.98 (Криволинейная замена переменных в кратном интеграле). *При диффеоморфизме $\varphi : U \to V$ для интегрируемой по Лебегу на V функции f имеет место формула*

$$\int_V f(y)\,dx = \int_U f(\varphi(x))|J\varphi|\,dx.$$

Доказательство. Теорема 6.97 может быть интерпретирована как доказательство утверждения для гладких функций с компактным носителем, так как координатное представление дифференциальной формы степени n при замене координат умножается на якобиан замены, см. задачу 6.88. Введение модуля якобиана позволяет не беспокоиться о смене знака.

Переходя к более общему случаю, мы сначала заметим, что мера Лебега $\varphi(W)$ равна точной грани интегралов гладких функций $f : \varphi(U) \to [0,1]$ с компактным носителем в $\varphi(W)$. Действительно, такой интеграл не более меры носителя f, но при этом для всякого компактного $S \subseteq \varphi(U)$ сумма разбиения единицы из теоремы 6.95 даёт $f : \varphi(U) \to [0,1]$, которая равна единице на S и имеет носитель в наперёд заданной окрестности S, и значит имеет интеграл, больший меры S. Переходя к поточечному пределу по таким функциям с носителями в $\varphi(W)$, и применяя уже установленное утверждение для гладких функций с компактным носителем , для открытых множеств $W \subseteq U$ мы получаем формулу

$$\mu(\varphi(W)) = \int_W |J\varphi|\,dx.$$

Эта же формула верна для компактных множеств, так как их можно представить в виде разности двух открытых.

Если мы рассмотрим открытое $W \subseteq U$ с компактным замыканием в U, то на нём $\sup |J\varphi| = C_W < +\infty$. Тогда всякое измеримое по Лебегу $X \subseteq W$ мы будем приближать снизу компактным, а сверху открытым, $F \subseteq X \subseteq O$, так чтобы $\mu(O \setminus F) \to 0$. С учётом неравенства

$$\mu(\varphi(O \setminus F)) \leqslant C_W\mu(O \setminus F),$$

множество $\varphi(X)$ также будет по мере Лебега приближаться $\varphi(F)$ и $\varphi(O)$. Переходя к пределу в интеграле, мы получим формулу

$$\mu(\varphi(X)) = \int_X |J\varphi|\,dx$$

для всякого измеримого X с компактным замыканием в U. От условия компактности замыкания в U можно избавиться с помощью счётной аддитивности, разбив X на счётное количество частей, каждая из которых имеет компактное замыкание в U.

Мы установили формулу для меры образа измеримого множества, по счётной аддитивности она даёт формулу замены переменных для счётно-ступенчатых функций, а потом и для произвольных измеримых функций с конечным интегралом или с бесконечным интегралом определённого знака из приближения их ступенчатыми стандартным способом. □

Задача 6.99. В теореме о замене переменных в кратном интеграле ослабьте условие бесконечной гладкости отображения φ до его непрерывной дифференцируемости.

[[Начните с интегрирования бесконечно гладких функций с компактным носителем. Для них можно равномерно приближать непрерывно дифференцируемое отображение φ вместе с производными последовательностью бесконечно гладких φ_k и переходить к равномерному пределу в обеих частях равенства, при этом надо аккуратно обосновать инъективность φ_k при достаточно больших k. Переход к интегрируемым функциям сделайте как в доказательстве теоремы для гладких φ.]]

Можно доказать формулу замены переменной для непрерывно дифференцируемых отображений иначе, в духе теории меры, а не дифференциальной геометрии и гомологической алгебры.

Набросок доказательства теоремы 6.98 без дифференциальных форм. Аналогично написанному выше, в силу стандартных сведений о мере и интеграле достаточно доказать

$$\mu(\varphi(X)) = \int_X |J\varphi|\, dx$$

при условии, что X компактно, а φ биективно и непрерывно дифференцируемо в окрестности X. Предположим противное, что для некоторого положительного ε (случай неравенства в другую сторону аналогичен)

$$\mu(\varphi(X)) > (1+\varepsilon) \int_X |J\varphi|\, dx. \tag{6.8}$$

Мы можем поделить X (например, гиперплоскостью) на две части положительной меры, для одной из которых такое неравенство продолжает выполняться. Потом можно делить дальше и продолжить переходить от X_k к его части X_{k+1} так, что последовательность компактов (X_k), для которых выполняется «плохое неравенство» (6.8), будет стремиться к точке $x_0 \in X$. В этой точке отображение φ приближается линейным и домножив его на линейное отображение $D\varphi_{x_0}^{-1}$, мы сделаем его дифференциал единичным в x_0. Теорема 5.87 (о линейной замене переменных в интеграле) показывает, что после такой замены у нас всё ещё будет выполняться неравенство (6.8) для всех X_k.

После этого лемма 6.22 показывает, что для любого $\delta > 0$ в достаточно малой окрестности x_0 будет выполняться

$$(1-\delta)|x' - x''| \leqslant |\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant (1+\delta)|x' - x''|, \tag{6.9}$$

а также в достаточно малой окрестности из непрерывности $J\varphi$ и равенства $J\varphi_{x_0} = 1$ будет выполняться

$$\mu(\varphi(X_k)) > (1+\varepsilon/2) \int_{X_k} dx = (1+\varepsilon/2)\, \mu X_k. \tag{6.10}$$

После этого остаётся заметить, что условие (6.9) гарантирует, что мера множества при отображении φ меняется не менее чем в $(1-\delta)^n$ и не более чем в $(1+\delta)^n$ раз (n — это размерность). Последнее утверждение можно доказать, покрывая компактное множество системой шаров в духе леммы Безиковича (задача 5.99) так, чтобы суммарная мера шаров была сколь угодно близка к мере множества. Таким образом, при достаточно малом δ получится противоречие с неравенством (6.10). □

6.14. **Вложенные многообразия в $\mathbb{R}^N$.** Работа с векторными полями и дифференциальными формами на открытых подмножествах $\mathbb{R}^n$ бескоординатным образом может показаться не очень осмысленным упражнением, ведь координаты в $\mathbb{R}^n$ определены глобально. Бескоординатный способ начинает выглядеть логично, если мы переходим к изучению подмножеств $\mathbb{R}^N$ которые локально выглядят как открытые подмножества $\mathbb{R}^n$, но глобально могут и не иметь системы из n координатных функций.

Определение 6.100. Замкнутое подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^N$ называется *вложенным многообразием размерности* n, если для каждой $p \in M$ найдётся окрестность и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subset \mathbb{R}^N$ превращается в стандартное вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$ в пересечении с некоторой окрестностью нуля.

Напомним, что задать *криволинейную систему координат* в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^N$ — это значит найти набор гладких функций $y_1, \dots, y_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, у которых линейно независимы дифференциалы в точке p и которые по теореме об обратном отображении дают диффеоморфизм некоторой окрестности $U \ni p$ на открытое множество $V \subseteq \mathbb{R}^N$. Отображение φ, заданное такой системой координат, должно точку p отправлять в 0, а часть многообразия $M \cap U$ превращать в $\mathbb{R}^n \cap V$.

Примеры этого понятия мы неявно встречали в работе с условными экстремумами. Если M задаётся гладкими уравнениями

$$f_1 = \dots = f_{N-n} = 0$$

и дифференциалы этих уравнений линейно независимы в каждой точке M, то M будет вложенным многообразием размерности n, так как определяющие его функции можно считать частью системы координат

$$y_{n+1} = f_1, \dots, y_N = f_{N-n}$$

в окрестности каждой точки $p \in M$, и M в такой окрестности выглядит в точности как $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$ около нуля, а функции $y_1, \dots, y_n$ задают систему координат в M, пересечённом с окрестностью p.

Задача 6.101. Проверьте, что любая сфера в $\mathbb{R}^n$ является вложенным многообразием размерности $n - 1$.

Нам надо будет немного расширить определение многообразия до понятия многообразия с краем:

Определение 6.102. Замкнутое подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^N$ называется *вложенным многообразием с краем размерности* n, если для каждой $p \in M$ найдётся окрестность и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subset \mathbb{R}^N$

либо превращается в стандартное вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$, пересечённое с окрестностью нуля;

либо превращается в стандартное вложение $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^N$, пересечённое с окрестностью нуля.

В последнем случае, если первая координата точки p равна нулю, мы говорим, что точка p лежит на краю ∂M многообразия.

Задача 6.103. Проверьте, что край ∂M многообразия с краем M сам по себе является $(n-1)$-мерным многообразием без края.

Определение многообразия показывает, что у всякой точки $p \in M$ есть окрестность в многообразии $M \cap U$ (относительно открытое подмножество многообразия) и отображение $\varphi : M \cap U \to \mathbb{R}^n$, являющееся диффеоморфизмом между $M \cap U$ и $\varphi(M \cap U)$. Такие отображения (диффеоморфизмы относительно открытых подмножеств M на открытые подмножества $\mathbb{R}^n$) называются *координатными картами* многообразия M. Иногда мы неформально будем называть картой само множество $M \cap U$, однако на самом деле оно всегда идёт в комплекте со своими координатами, компонентами отображения φ.

Наши определения векторов, векторных полей и дифференциальных форм специально выбирались таким образом, чтобы они не зависели от криволинейной замены координат, то есть в новой терминологии — от выбора карты. Это позволяет корректно распространить их на произвольное многообразие. Например, функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *гладкой функцией на многообразии*, $f \in C^\infty(M)$, если в каждой координатной карте $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ (здесь уже U является относительно открытым подмножеством M) эта функция (то есть композиция $f \circ \varphi^{-1}$) является гладкой функцией на образе $\varphi(U)$.

Приведём более общее и более концептуальное определение: *дифференциальной формой $\alpha \in \Omega^k(M)$ на многообразии* мы будем называть набор дифференциальных форм α_i на образах карт $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, которые обладают свойством

$$\left(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\right)^* \alpha_i = \alpha_j \tag{6.11}$$

на естественной области определения $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ в $\mathbb{R}^n$, для всяких двух карт φ_i, φ_j. Можно неформально сказать, что глобальная форма собирается из локальных форм, если одна локальная переходит в другую соответственно замене одной карты на другую, причём делает это именно так как это происходит в ранее изученном случае, когда многообразие является областью $\mathbb{R}^n$.

В определении дифференциальной формы на многообразии достаточно рассматривать не все возможные карты многообразия M, а лишь некоторый набор карт, покрывающих M. Тогда в любой другой координатной карте $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ соответствующее координатное представление $\alpha \in \Omega^k(\varphi(U))$ будет выглядеть как

$$\alpha = \left(\varphi_i \circ \varphi^{-1}\right)^* \alpha_i$$

на множестве $\varphi(U \cap U_i)$, и по свойству (6.11) оказывается

$$\left(\varphi_j \circ \varphi^{-1}\right)^* \alpha_j = \left(\varphi_j \circ \varphi^{-1}\right)^* \left(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\right)^* \alpha_i = \left(\varphi_i \circ \varphi^{-1}\right)^* \alpha_i$$

на $\varphi(U \cap U_i \cap U_j)$, то есть определение не меняется при замене i на j в тех точках, где это имеет смысл. В силу установленной ранее независимости от выбора криволинейных координат (например, в силу леммы 6.87) операции внешнего умножения и внешнего дифференцирования оказываются корректно определены для форм на многообразиях.

Есть простой и естественный способ получить дифференциальную форму на $M \subset \mathbb{R}^N$ — это ограничить какую-то дифференциальную форму из евклидова пространства, или из окрестности M. В вышеописанных терминах это означает положить в каждой карте $\alpha_i = (\varphi_i^{-1})^*\alpha$ для $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^N)$. Касательный вектор к вложенному многообразию $M \subset \mathbb{R}^N$ также можно рассматривать как касательный вектор к $\mathbb{R}^N$, так как его определение как дифференцирования функций на M позволяет ему дифференцировать и функции на $\mathbb{R}^N$, ограничивая их на M. Можно проверить, что более явное описание касательных векторов к M получается именно таким, какое мы использовали при анализе условного экстремума, так как дифференцирование постоянных на многообразии функций должно давать нуль.

В случае многообразий с краем мы будем требовать, чтобы в координатном представлении диффеоморфизмы замены координат, векторные поля и дифференциальные формы гладко продолжались на окрестность края, это избавит нас от многих технических проблем. На самом деле при этом важна будет возможность гладкого продолжения, а не выбор конкретного продолжения. Некоторые технические подробности мы опускаем, но заинтересованный читатель может приобщиться к ним, решая такую задачу:

Задача 6.104. * Пусть функция $f : (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ непрерывна и все её частные производные определены при $x_1 < 0$ и непрерывно продолжаются до $x_1 = 0$. Докажите, что функцию можно продолжить до гладкой функции на всём $\mathbb{R}^n$.

[[Для решения этой задачи надо решить задачу 2.80 так, чтобы её решение гладко зависело от возможных параметров.]]

6.15. **Абстрактное определение многообразия.** Работа со вложенным многообразием через локальные карты показывает, что само вложение играет мало роли и можно пытаться представить себе абстрактное многообразие, которое вообще никуда не вложено. Приведём стандартное определение абстрактного многообразия (с краем).

Определение 6.105 (Абстрактное определение многообразия). *Гладкое n-мерное многообразие M* — это отделимое топологическое пространство со счётной базой, покрытое открытыми картами U_i так, что для каждой карты задано отображение $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ являющееся гомеоморфизмом на открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, и для пары таких отображений φ_i и φ_j композиция $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ является диффеоморфизмом на своей естественной области определения.

Гладкое n-мерное многообразие с краем M отличается тем, что некоторые из карт являются не такими, как описано выше, а являются гомеоморфизмами на относительно открытое подмножество $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$, в котором точки из $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ образуют *край*, а замены координат $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ переводят край в край.

Отображения φ_i называются *картами*, а их совокупность — *атласом* многообразия M.

Отделимость или хаусдорфовость топологического пространства — это существование у всяких двух точек нерепесекающихся открытых окрестностей. В качестве упражнения читателю предлагается придумать неотделимое одномерное многообразие. *Счётность базы топологии* означает наличие счётной системы (базы) открытых подмножеств M, так что всякое открытое множество в M можно представить в виде объединения некоторого количества открытых множеств базы.

Задача 6.106. Постройте счётную базу топологии в $\mathbb{R}^n$.

[[Используйте счётность множества рациональных чисел.]]

Объекты на гладком многообразии задаются по уже описанной выше схеме. Например, векторное поле на многообразии задаётся как набор векторных полей X_i на образах карт $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, которые обладают свойством $(\varphi_i \varphi_j^{-1})_* X_j = X_i$ на естественной области определения $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ в $\mathbb{R}^n$, для всяких двух карт φ_i, φ_j. Аналогично определяются дифференциальные формы. Утверждения о независимости основных операций с рассматриваемыми объектами от криволинейной замены координат, типа леммы 6.87, гарантируют нам, что операции дифференцирования функции векторным полем, внешнего умножения дифференциальных форм и внешнего дифференцирования на самом деле определены корректно для дифференциальных форм на многообразиях.

Задача 6.107. Проверьте, что векторное поле на многообразии M можно определить как дифференцирование $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $\mathbb{R}$-линейное и удовлетворяющее правилу Лейбница $X(fg) = gX(f) + fX(g)$.

[[Начните со значения дифференцирования в точке, постройте функцию, отличную от нуля только в заданной координатной карте в окрестности U этой точки и равную единице в меньшей окрестности точки. С помощью такой функции докажите локальность дифференцирования, то есть однозначную определённость дифференцирования в точке как отображения $C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, после этого утверждение сведётся к случая открытого подмножества $\mathbb{R}^n$.]]

Задача 6.108. Проверьте, что край ∂M абстрактного многообразия с краем M естественным образом является $(n-1)$-мерным абстрактным многообразием без края.

Абстрактное определение многообразия требует некоторого понимания топологии, и для понимания дальнейшего в основном достаточно представлять многообразие вложенным в евклидово пространство; хотя в разделе 8.12 будет существенно использоваться именно абстрактное определение. Локальные вопросы в гладких многообразиях решаются в координатных картах, а глобальные вопросы решаются с помощью построения глобальных не более чем счётных и локально конечных разбиений единицы, для этого и требуются условия «отделимое топологическое пространство со счётной базой» в определении.

На самом деле далее мы будем в большинстве случаев использовать только разбиения единицы в окрестностях компактов (лемма 6.124), для которых не нужна счётность базы топологии. Но она нужна для существования счётных и локально конечных разбиений единицы на всём многообразии и, например, для следующего утверждения (теорема о вложимости Уитни): Всякое n-мерное абстрактное многообразие вкладывается в $\mathbb{R}^{2n+1}$ без труда, а с некоторым трудом вкладывается и в $\mathbb{R}^{2n}$. Поэтому рассмотрение вложенных в евклидово пространство многообразий на самом деле не уменьшает общности.

Ещё одно техническое замечание такое. Для абстрактного многообразия M всякое его открытое подмножество $U \subseteq M$ тоже является абстрактным многообразием по определению, достаточно ограничить карты M на U. Для вложенного $M \subseteq \mathbb{R}^N$ его относительно открытое подмножество $U \subseteq M$ уже может не быть вложенным многообразием в нашем определении, так как от вложенного многообразия по определению мы требуем замкнутость. Однако, мы можем построить гладкую функцию $y : U \to \mathbb{R}^+$, для которой всякое множество $\{x \in U : y(x) \leqslant M\}$ будет компактным. Тогда отображение $U \to \mathbb{R}^{N+1}$, у которого первые N координат взяты с $\mathbb{R}^N$, а последняя даётся нашей функцией y, уже будет представлять U в виде замкнутого вложенного многообразия в $\mathbb{R}^{N+1}$.

Задача 6.109. * Постройте такую $\rho : U \to \mathbb{R}^+$.

[[Представьте U в виде объединения последовательности компактных подмножеств $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, так чтобы внутренность K_{n+1} содержала K_n. Далее стройте функцию по индукции, добиваясь того, чтобы $\rho(K_{n+1} \setminus K_n) \subseteq (n-1, n+1)$. Можно пользоваться результатом задачи 4.74 для получения непрерывных функций, а потом их сглаживать, или сразу решить задачу 4.74 для гладких функций.]]

Следующие задачи позволят читателю проверить своё понимание абстрактного определения многообразия.

Задача 6.110. Рассмотрите на $\mathbb{R}^1$ две карты $\varphi_A : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_A(x) = x$ и $\varphi_B : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_B(x) = x^3$. Проверьте, что они задают две разные гладкие структуры на прямой и приведите пример, когда одна и та же функция является гладкой функцией относительно одной гладкой структуры и не является гладкой функцией относительно другой.

[[Рассмотрите выражение $\varphi_A \circ \varphi_B^{-1}$.]]

Предыдущая задача показывает, что когда мы говорим «гладкое многообразие», мы имеем в виду не только M как топологическое пространство, но и идущий в комплекте с ним атлас из координатных карт, покрывающих M и имеющих гладкие функции перехода между картами в обе стороны.

Задача 6.111. Докажите, что многообразие является связным топологическим пространством тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

[[Заметьте, что доказательство теоремы 3.57 работает с минимальными модификациями.]]

Задача 6.112. * Опишите все компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

[[Компактность позволяет оставить лишь конечное число карт в атласе, карты при этом можно считать связными. Покажите, что многообразие распадается на компоненты (линейной) связности, которых оказывается конечное число. Далее изучите связные компактные многообразия.]]

Задача 6.113. * Опишите все не обязательно компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

[[Действуйте аналогично предыдущей задаче. В данном случае не обязательно есть конечное покрытие координатными картами, но по определению многообразия есть счётное покрытие, с которым надо аккуратно поработать.]]

6.16. Гладкие отображения между многообразиями.

Определение 6.114. *Гладким отображением* между многообразиями $f : M \to N$ размерностей m и n называется непрерывное отображение, которое в окрестности каждой точки, в достаточно малых координатных картах, выглядит как гладкое отображение области из $\mathbb{R}^m$ в область в $\mathbb{R}^n$.

Можно пояснить, что непрерывность в этом определении позволяет найти координатные окрестности $p \in U \subset M$ и $f(p) \in V \subset N$, такие что $f(U) \subseteq V$. После этого, рассматривая отображение в координатах, то есть рассматривая

$$\varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U) \to \varphi_V(V)$$

как отображение между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, можно судить о его гладкости.

Определение 6.115. Гладкое обратимое отображение $f : M \to N$ с обратным гладким назовём *диффеоморфизмом многообразий*.

Для гладкого отображения многообразий, с помощью локального рассмотрения (или с помощью формулы (6.5)), корректно определена производная $Df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ в каждой точке $p \in M$, которую мы также называли прямым образом вектора φ_*. Это линейное отображение касательных пространств в точке. С помощью него определяется отображение обратного образа дифференциальных форм $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ как

$$f^*\alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k)$$

где в левой части формулы вычисление значения $f^*\alpha$ происходит в точке p, а в правой части вычисление значения α происходит в точке $f(p)$. В частности, для функций, отображение $f^* : \Omega^0(N) \to \Omega^0(M)$, то есть $f^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, переводит всякую функцию $g : N \to \mathbb{R}$ в $f^*(g) = g \circ f$.

В случае диффеоморфизма также определено отображение f_* на уровне векторных полей (используя единственность прообраза точки и его гладкую зависимость от образа) и дифференциальных форм (просто как $f_* = (f^{-1})^*$). Как было замечено ранее, при отсутствии биективности или гладкости обратного отображения прямой образ векторного поля или дифференциальной формы определить затруднительно.

Для приложений важно понятие кривой или поверхности, *заданной параметрически*. В общей терминологии многообразий это означает, что берётся некоторое гладкое многообразие M (область определения параметров) и гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$, от которого требуется, чтобы ранг Df_p был равен $m = \dim M$ во всех точках. Само по себе это не гарантирует, что образ $f(M)$ будет вложенным многообразием, даже если отображение f инъективно (приведите соответствующие примеры для $m = 1$ самостоятельно). Однако верно такое утверждение:

Лемма 6.116. *Для гладкого отображения $f : M \to \mathbb{R}^n$ с $\operatorname{rk} Df \equiv m = \dim M$, для всякой $p \in M$ найдётся окрестность $U \ni p$ такая, что $f(U)$ в некоторой криволинейной системе координат в окрестности $f(p)$ является открытым подмножеством стандартно вложенного $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $k = n - m$ и рассмотрим произведение $M \times \mathbb{R}^k$. Это тоже гладкое многообразие по любому из определений. Мы знаем, что касательное пространство T_pM вкладывается в $T_{f(p)}\mathbb{R}^n$. Тогда можно выбрать векторы $v_1, \dots, v_k$, которые дают разложение в прямую сумму

$$Df_p(T_pM) \oplus \langle v_1, \dots, v_k \rangle = T_{f(p)}\mathbb{R}^n.$$

Продолжим теперь отображение f на $M \times \mathbb{R}^k$ по формуле

$$g(q, t_1, \dots, t_k) = f(q) + v_1 t_1 + \dots v_k t_k.$$

легко проверить, что Dg в точке $(p, 0)$ является изоморфизмом линейных пространств. Тогда по теореме об обратном отображении в окрестности p координаты многообразия M плюс координаты $t_1, \dots, t_k$ могут считаться локальной системой координат в окрестности $f(p)$, образ $f(U)$ удовлетворяет уравнениям $t_1 = \dots = t_k = 0$, что и означает требуемое. $\square$

Задача 6.117. Докажите, что если отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$ гладких многообразий инъективно, $\operatorname{rk} Df \equiv \dim M$ всюду и M компактно, то его образ $f(M)$ является вложенным в $\mathbb{R}^n$ многообразием.

[[Надо проверить, что в достаточно малой окрестности $V \ni f(p)$ ничего кроме $f(U)$ не будет.]]

Задача 6.118. Докажите, что диффеоморфизм гладких многообразий с краем $f : M \to N$ переводит край в край.

[[Если какая-то точка $p \in M$ не из края идёт в край, то рассматривая ситуацию в локальных координатах можно получить противоречие с теоремой об обратном отображении.]]

Задача 6.119. * Докажите, что гомеоморфизм (не обязательно гладкое непрерывное отображение с непрерывным обратным) гладких многообразий с краем $f : M \to N$ переводит край в край.

[[Если какая-то точка $p \in M$ не из края идёт в край, то можно рассмотреть ситуацию в локальных координатах. С помощью содержимого раздела 6.24 докажите, что маленькую сферу $S_r(p)$ с центром в p нельзя непрерывно деформировать в точку, не задевая p. Однако её образ $f(S_r(p))$ в окрестности $f(p)$ непрерывно деформировать в точку, не задевая $f(p)$, можно.]]

Следующие задачи дают алгебраическую интерпретацию гладких отображений между многообразиями и точек многообразия.

Задача 6.120. * Докажите, что гладкие отображения между многообразиями $M \to N$ находятся в однозначном соответствии с *гомоморфизмами алгебр* $C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, то есть отображениями колец функций, сохраняющих сложение, умножение, и переводящих константу в ту же константу.

[[В одну сторону очевидно. Обратно, если есть гомоморфизм колец φ^* и если без ограничения общности N вложено $\mathbb{R}^\nu$, то посмотрите на образы координатных функций в $\mathbb{R}^\nu$ при отображении φ^*, они являются координатами некоторого отображения $M \to \mathbb{R}^\nu$. Докажите с помощью леммы 6.37, что гомоморфизм колец задаётся композицией функции с этим отображением.]]

Задача 6.121. * Каким геометрическим объектам соответствуют гомоморфизмы алгебр $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$?

Задача 6.122. * Докажите, что всякий $\mathbb{R}$-линейный гомоморфизм колец $C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ на самом деле имеет образ в $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

[[Продолжите гомоморфизм $e : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ до $\mathbb{C}$-линейного гомоморфизма кольца комплекснозначных функций $e : C^\infty(M, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Докажите, что для всякой комплекснозначной f число $e(f) \in \mathbb{C}$ является значением f, приведя к противоречию предположение о том, что $f - e(f)$ обратима в $C^\infty(M, \mathbb{C})$.]]

Задача 6.123. * Если вы знакомы с алгеброй, опишите все максимальные идеалы в кольце $C^\infty(M)$ для компактного гладкого многообразия M.

[[Проверьте, что решение задачи 4.72 проходит при замене непрерывных функций на гладкие.]]

6.17. **Разбиение единицы на многообразии.** Для работы с объектами на многообразии полезно применять разбиение единицы, частный случай которого в $\mathbb{R}^n$ был установлен в лемме 6.95. Собственно, теперь мы обобщим ту лемму на случай компактного подмножества многообразия.

Лемма 6.124 (Разбиение единицы в окрестности компакта на многообразии)**.** *Пусть M — гладкое многообразие, а $K \subseteq M$ — его компактное подмножество. Для любого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ компакта K открытыми множествами найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ с компактными носителями $\operatorname{supp} \rho_\alpha$ таких, что*

$$\forall \alpha \ \operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha,$$

только конечное число из них отлично от нуля и

$$\sum_\alpha \rho_\alpha(x) \equiv 1$$

в некоторой окрестности K.

Доказательство. Рассуждение аналогично доказательству леммы 6.95. Для всякой точки $p \in K$ в некоторой координатной окрестности W_p мы найдём функцию ψ_p, носитель которой содержится в каком-то из пересечений $U_\alpha \cap W_p$, и которая тождественно равна единице в некоторой окрестности $V_p \ni p$. Если эту функцию продолжить нулём за пределы W_p, то она окажется гладкой функцией на M. В последнем утверждении неявно используется, что дополнение в M к компактному замыканию V_p в W_p открыто в M. Это очевидно для вложенных в евклидово пространство многообразий, а случай абстрактного многообразия разбирается в задаче 6.125 ниже. Из-за компактности K мы можем оставить лишь конечное число таких ψ_p, обладающих свойством, что в каждой точке некоторой окрестности K хотя бы одна из них обращается в единицу.

Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 4.69 или леммы 6.95, мы сделаем из $\{\psi_i\}$ конечное разбиение единицы $\{h_i\}$ в окрестности K, не увеличивая носителей этих функций. Заметим, что в итоге каждому U_α может быть сопоставлено несколько функций разбиения единицы h_i с носителем в нём, но их всех мы можем сгруппировать в одно ρ_α и получить то, что требуется в лемме. □

Задача 6.125. Докажите, что компактное подмножество абстрактного гладкого многообразия является замкнутым.

[[Используйте свойство отделимости и топологическое определение компактности. Покажите, что если точка не лежит в заданном компактном подмножестве, то заданное компактное подмножество и точка имеют непересекающиеся окрестности.]]

Разбиение единицы мы будем применять, например, для представления дифференциальной формы α с компактным носителем в M в виде суммы дифференциальных форм с носителями в координатных окрестностях $U_i \subset M$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \alpha.$$

Аналогично можно поступать и с векторными полями или другими аналогичными объектами. Следующая задача показывает, что на самом деле требование компактности носителя тоже можно обойти (и нам иногда будет нужен такой вариант).

Задача 6.126. * Докажите, что для открытых покрытий всего многообразия M тоже можно построить подчинённое разбиение единицы, которое будет локально конечным, то есть у всякой точки будет окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом носителей функций разбиения.

[[Представьте M в виде объединения последовательности его компактных подмножеств $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, так чтобы внутренность K_{n+1} содержала K_n (здесь надо будет использовать счётность базы топологии M). Далее надо достраивать разбиение единицы в окрестности $V_n \supset K_n$, $V_n \subset K_{n+1}$ до разбиения единицы в окрестности $V_{n+1} \supset K_{n+1}$ так, чтобы над K_{n-1} ничего не изменилось.]]

Задача 6.127. Пусть многообразие M вложено в $\mathbb{R}^N$. Докажите, что всякая гладкая функция $f : M \to \mathbb{R}$ является сужением на M некоторой гладкой функции $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

[[Домножьте f на разбиение единицы и сведите утверждение к продолжению функции в координатной окрестности.]]

Задача 6.128. Докажите, что векторные поля на многообразии можно определить как дифференцирования $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ гладких функций в себя.

[[Надо доказать локальность и показать, что на самом деле можно рассуждать в системе координат, что было проделано ранее.]]

6.18. **Ориентация многообразия.** При рассмотрении зависимости интеграла дифференциальной формы в $\mathbb{R}^n$ от замены координат мы столкнулись с тем, что при замене координат интеграл может остаться тем же, а может поменять знак. Это как бы разбивает все возможные системы координат на $\mathbb{R}^n$ (или даже на его связных открытых подмножествах) на два класса — «ориентированные так» и «ориентированные иначе», при этом переход между представителями разных классов имеет отрицательный якобиан. Для определения интеграла формы по многообразию нам надо будет детально разобраться с понятием ориентации произвольного многообразия.

Определение 6.129. Гладкое многообразие M называется *ориентируемым*, если можно выбрать покрывающий его набор карт так, что якобианы замен координат между любыми двумя картами всегда будет положительными.

После этого определения надо сделать важное замечание по определению многообразия. Может оказаться так, что в нашем атласе на многообразии было слишком много карт или они были каким-то неудачными, и только поэтому мы не смогли выбрать на нём ориентацию.

Задача 6.130. Придумайте атлас на $\mathbb{R}^1$, из которого нельзя выбрать покрывающий $\mathbb{R}^1$ податлас с положительными якобианами перехода, даже если разрешить переворачивать координаты ($x \mapsto -x$) в картах.

[[Покройте $\mathbb{R}^1$ двумя картами, область определения одной из которых состоит из двух интервалов, а знак производной отображения φ карты меняется.]]

В свете предыдущей задачи мы будем придерживаться соглашения, что помимо исходного атласа на всяком многообразии мы считаем допустимыми любые другие координатные карты $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ с открытым $U \subseteq M$, у которых функции перехода в исходный атлас и обратно гладкие, то есть которые задают гладкое отображение $U \to \mathbb{R}^n$, являющееся диффеоморфизмом на свой образ.

Для любых двух таких допустимых карт функции перехода между ними двумя тоже будут гладкими, как (локально) композиции функций перехода в старую карту и обратно. Если в исходном атласе был задан некоторый объект, например векторное поле X, то во всякой новой карте мы тоже будем иметь векторное поле, собранное из прямых образов $(\psi \circ \varphi^{-1})_* X_\varphi$, полученных с имеющихся карт φ и образов X_φ в них. Для наведения строгости читатель может проверить, что эти прямые образы действительно согласованы и образуют одно векторное поле на новой карте.

С учётом предыдущих замечаний обычно работают с максимальным по включению атласом многообразия, совместимым с исходным покрывающим его атласом, получив этот максимальный атлас добавлением всех карт, которые совместимы с исходными. В частности, для всякой карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ наш атлас многообразия также будет содержать её сужения на всевозможные открытые $V \subseteq U$; и для всякой точки многообразия найдётся накрывающая её карта, область определения которой связна, это будет удобно при работе с ориентацией.

При выборе ориентации мы будем поступать так же: начав с покрывающего многообразие (по определению ориентируемости) набора «положительных» карт с положительными якобианами замен координат между картами, мы будем далее записывать в «положительные» карты все карты максимального атласа, у которых якобианы перехода с начальным набором «положительных» карт положительные. Это можно сформулировать в виде определения:

Определение 6.131. *Ориентацией гладкого многообразия M* называется набор покрывающих его карт с положительными якобианами перехода между ними, максимальный по включению среди всех таких наборов.

Задача 6.132. Докажите, что на связном ориентируемом многообразии существует ровно две ориентации. Сколько ориентаций может быть на несвязном многообразии?

[[Ещё одну ориентацию из первой можно получить, назначив положительными все карты, для которых якобиан перехода из карт первой ориентации всюду отрицателен. То, что других ориентаций на связном многообразии не будет, проще вывести из следующей ниже леммы.]]

В итоге строгое определение ориентации многообразия получилось несколько громоздким и может быть излишне абстрактным. Следующая лемма позволяет ориентировать многообразие на практике с помощью ненулевой формы максимальной степени.

Лемма 6.133. *Многообразие M размерности n ориентируемо тогда и только тогда, когда существует дифференциальная форма $\nu \in \Omega^n(M)$, которая ни в одной точке не равна нулю.*

Доказательство. Действительно, при наличии ненулевой формы ν положительность карты (назовём её *ν-положительность*) можно определить условием $\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0$. Всё многообразие можно покрыть связными картами (по замечанию выше), а в связной карте знак этого выражения либо везде положителен, либо везде отрицателен. Если карта оказалась ν-положительна, мы её оставляем в списке, если нет, то меняем в ней порядок пары координатных функций и она становится ν-положительной и добавляется в список, таким образом всё многообразие оказывается покрыто выбранными так связными картами. Якобианы переходов между ними должны быть положительными, так как иначе неравенство $\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0$ поменяет знак. Следовательно, назначенные нами ν-положительные связные (да и не только связные) карты задают ориентацию многообразия, так как если мы изначально имели максимальный по включению атлас, то всякая карта с положительными якобианами замены со всеми ν-положительными картами сама будет ν-положительной.

Если же у нас есть покрытие многообразия некоторыми картами с положительными якобианами переходов между ними, то в каждой карте U_i (мы оставим только счётное их число и будем нумеровать их) мы построим согласованную с ориентацией n-форму ν_i, заданную в координатах просто как $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Потом возьмём подчинённое покрытию $\{U_i\}$ локально конечное разбиение единицы $\{\rho_i\}$ (здесь используется существование локально конечного разбиения единицы в полной общности) и определим

$$\nu = \sum_i \rho_i \nu_i,$$

где $\rho_i \nu_i$ понимается как форма с компактным носителем в U_i, продолженная за пределы U_i нулём. Это выражение корректно, так как у каждой точки есть окрестность, в которой сумма справа выглядит как конечная сумма.

Рассматривая эту сумму локально в какой-либо из положительных карт, мы видим, что она везде положительна как сумма неотрицательных слагаемых, по крайней мере одно из которых не равно нулю. Следовательно, ν нигде не обращается нуль. Кроме того, положительность какой-либо карты в исходном смысле и положительность $\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ на ней равносильны. □

С учётом предыдущей леммы можно задавать ориентацию n-мерного многообразия M с помощью нигде не обращающейся в нуль формы $\nu \in \Omega^n(M)$. Тогда положительность или отрицательность системы координат $x_1, \dots, x_n$ будет определяться знаком функции a в выражении $\nu = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ в этих координатах. Замена ν на $f\nu$ для некоторой везде положительной функции f ориентацию не меняет, а замена на $f\nu$ с везде отрицательной f меняет ориентацию на противоположную.

Задача 6.134. Определите ориентацию на единичной сфере $\{x^2+y^2+z^2=1\}$ с помощью какой-нибудь формы второй степени, не обращающейся в нуль при ограничении на сферу.

[[Посмотрите на смешанное произведение в $\mathbb{R}^3$ и подставьте в него одним из аргументов вектор (x, y, z).]]

Для следующего определения нам также надо понимать ориентацию 0-мерного многообразия. Нульмерное многообразие является несвязным набором из не более чем счётного числа отдельных точек, а ориентацию мы будем понимать в смысле предыдущего абзаца, как задание на этом множестве точек нигде не обращающейся в нуль функции. Так как в ориентирующей функции важен только знак, то можно считать, что каждой точке сопоставляется знак $+1$ или -1.

Определение 6.135. Для n-мерного ориентированного многообразия с краем M введём ориентацию на его крае ∂M следующим образом. Если в локальной системе координат $x_1, \dots, x_n$ в окрестности некоторой точки края M задано неравенством $x_1 \leqslant 0$, а ∂M — соответственно равенством $x_1 = 0$, то знак карты $x_2, \dots, x_n$ на ∂M мы объявляем равным знаку карты $x_1, \dots, x_n$ на M.

Лемма 6.136. *Предыдущее определение корректно задаёт ориентацию на ∂M.*

Доказательство. По определению края всё многообразие ∂M можно покрыть картами вида $x_2, \dots, x_n$ из предыдущего определения. Рассмотрим замену координат $x_1, \dots, x_n$ на $y_1, \dots, y_n$ между двумя координатными картами из определения. При этой замене край многообразия должен переходить в край, а это означает, что на краю должно выполняться $\frac{\partial y_1}{\partial x_j} = 0$ при $j > 1$, а также $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} > 0$.

Это означает, что знак определителя матрицы $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ совпадает со знаком её главного минора без первых строки и столбца. Это выполняется на пересечении края M с данной координатной окрестностью, а значит и во всей координатной окрестности, если мы без ограничения общности будем считать её связной. Это означает, что если при такой замене мы переходили из положительной карты на M в положительную карту, или из отрицательной карты в отрицательную, то и на ∂M такая замена координат (кроме первой) не меняет знак карты. Следовательно, описанное в определение назначение знаков картам задаёт некоторую корректную ориентацию на крае ∂M. □

В качестве важного примера рассмотрим связное одномерное многообразие с краем, например отрезок $[0, 1]$ с координатой t и ориентацией, заданной формой dt. Тогда можно проверить по определению, что на его крае, множестве из двух точек 0 и 1, задана ориентация, приписывающая точке 0 знак -1, а точке 1 — знак $+1$.

Задача 6.137. Предположим, что многообразие M размерности n определяется системой уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad \dots, \quad f_{N-n}(x) = 0,$$

и дифференциалы этой системы уравнений линейно независимы в каждой точке M. Докажите, что M ориентируемо.

[[Для выяснения ориентации карты из координат $t_1, \dots, t_n$ на M дополните её функциями $f_1, \dots, f_{N-n}$ до системы координат в области $\mathbb{R}^N$.]]

6.19. **Интеграл формы по ориентированному многообразию и формула Стокса.** После сделанных в предыдущих разделах приготовлений мы готовы определить интеграл дифференциальной формы по ориентированному многообразию.

Определение 6.138. Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega^n_c(M)$ с компактным носителем по ориентированному n-мерному многообразию M определяется с помощью разбиения единицы в окрестности носителя ν

$$\rho_1 + \dots + \rho_m = 1,$$

подчинённого некоторому набору положительно ориентированных карт как

$$\int_M \nu = \sum_i \int_M \rho_i \nu,$$

где интегралы справа рассматриваются в координатных картах, содержащих носители соответствующих ρ_i.

Лемма 6.139. *Определение интеграла не зависит от выбора системы положительных карт в данной ориентации и подчинённого им разбиения единицы.*

Доказательство. Пусть у нас были карты $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ с подчинённым разбиением единицы $\rho_i : M \to \mathbb{R}^+$ и новые карты $\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ с подчинённым разбиением единицы $\sigma_j : M \to \mathbb{R}^+$. Если мы выбрали другую систему с той же ориентацией, то якобианы переходов от старых к новым должны быть положительными.

Выпишем формулу

$$\sum_i \rho_i \left(\sum_j \sigma_j\right) = \sum_{i,j} \rho_i\sigma_j = \sum_j \sigma_j \left(\sum_i \rho_i\right),$$

которая позволяет от двух разбиений единицы перейти к их общему «подразбиению» $\{\rho_i\sigma_j\}_{i,j}$, и умножим её на ν. Тогда мы можем написать

$$\sum_i \int_M \rho_i\nu = \sum_i \int_M \rho_i \left(\sum_j \sigma_j\right)\nu = \sum_i\sum_j \int_M \rho_i\sigma_j\nu = \sum_j \int_M \left(\sum_i \rho_i\right)\sigma_j\nu = \sum_j \int_M \sigma_j\nu.$$

Внутренние знаки равенства интерпретируются как уже известная нам аддитивность интеграла в пределах координатной карты. Выражение посередине подразумевает, что при сравнении интегралов каждого слагаемого $\rho_i\sigma_j\nu$ в карте U_i и в карте V_j мы используем независимость интеграла от замены одних координат на другие (отображением $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$) с положительным якобианом, таким образом подтверждая корректность выражения. $\square$

Правила замены переменных в интеграле от формы говорят, что если мы хотим проинтегрировать форму в карте, отрицательной относительно данной ориентации многообразия, то мы можем это сделать, но нам нужно будет поменять знак получившегося выражения. Также уточним, что такое интеграл формы нулевой степени с компактным носителем, то есть на самом деле функции с конечным носителем, по 0-мерному многообразию. Это просто сумма значений этой функции в точках 0-мерного многообразия, взятых со знаками, происходящими из ориентации точек данного многообразия.

На практике форму по многообразию можно интегрировать без разбиения единицы, если если интегрировать её в карте, которая покрывает всё многообразие кроме множества меры нуль. Например, сферу радиуса R в $\mathbb{R}^3$ можно параметризовать почти всю как

$$x = R\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = R\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = R\cos\vartheta$$

при $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi$ и интегрировать в указанном диапазоне.

С учётом определения интеграла формы по многообразию и сделанных замечаний мы готовы доказать основную формулу про интегрирование дифференциальных форм.

Теорема 6.140 (Формула Стокса). *Для ориентированного многообразия с краем $(M, \partial M)$ (край рассматривается с согласованной ориентацией) размерности n и формы $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(M)$ выполняется*

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

В этой формуле мы рассматриваем естественное гладкое вложение многообразий $i : \partial M \to M$ (см. также задачу 6.108) и, строго говоря, в правой части равенства интегрируем $i^*\alpha$ по краю ∂M. Напомним, что в координатном представлении мы просто требуем продолжимости α на окрестность края и таким образом $i^*\alpha$ корректно определена.

Такое же соглашение применяется всякий раз, когда мы хотим интегрировать дифференциальную форму, заданную на одном многообразии, по его *подмногообразию*, то есть рассматривать образ некоторого гладкого инъективного (или даже необязательно инъективного) отображения $i : N \to M$ одного многообразия в другое и брать форму $i^*\alpha$ на N.

Доказательство формулы Стокса. Используя разбиение единицы в окрестности носителя α по лемме 6.124, подчинённое покрытию носителя α координатными окрестностями, мы сведём задачу к вопросу в координатах, то есть к случаю $M = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ и $\partial M = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Рассмотрим случай $\alpha = f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ и $d\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Начав интегрировать по x_1, мы получим по теореме Фубини и формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_M \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\partial M} f(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

что доказывает теорему в этом случае. Мы можем считать, что мы рассматривали связные координатные карты некоторого знака. Отрицательность координатной карты могла внести знак «$-$» в левую часть формулы, но по определению ориентации на краю в правой части тоже появится «$-$», так что формула в любом случае остаётся верной.

Если же $\alpha = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ при $i > 1$, то уже интегрирование по x_i обнуляет левую часть (по формуле Ньютона–Лейбница), а в правой части будет стоять нуль по определению, так как ограничение формы α на ∂M окажется нулевым в силу того, что $dx_1 \equiv 0$ на краю.

Также заметим, что в координатной окрестности, в которой края не видно, левая часть равенства обращается в нуль, как мы уже видели в доказательстве независимости определения интеграла дифференциальной формы от замены координат с положительным якобианом. Правая часть в таких координатных окрестностях очевидно нулевая. ☐

В следующей задаче мы изучаем полезные случаи формулы Стокса для некоторых «многообразий с углами»:

Задача 6.141. Распространите формулу Стокса на параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ и на симплекс

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \geqslant 0, x_1 + \dots + x_n \leqslant 1\},$$

считая интеграл по краю как сумму интегралов по граням с правильной ориентацией.

[[Можно обобщить рассуждение в основном доказательстве на случай, когда локально множество, по которому интегрируют $d\alpha$, устроено как $(-\infty, 0]^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.]]

6.20. **Частные случаи формулы Стокса и её применения.** Обсудим интеграл по многообразию и формулу Стокса в малых размерностях. Одномерное компактное многообразие с краем (см. задачу 6.112) — это просто набор кривых, диффеоморфных отрезкам или окружностям. Для определённости мы будем рассматривать кривую, параметризованную отрезком. Формула Стокса для ориентированной кривой с началом в точке p и концом в точке q сводится к утверждению

$$\int_\gamma df = f(q) - f(p),$$

которое конечно можно было бы доказать и непосредственно, рассмотрев интеграл в параметризации кривой и применив формулу Ньютона–Лейбница.

Задача 6.142. Проверьте, что ориентация кривой, которую мы определяли при изучении кривых, и ориентация вложенной кривой как одномерного многообразия дают по сути одно и то же понятие.

Отметим, что формально кривая не должна иметь самопересечений, чтобы считаться вложенным многообразием в евклидовом пространстве, но выписанная формула очевидно верна без этого предположения, если мы интегрируем обратный образ df по отрезку в параметризации. Также кривую можно считать не бесконечно гладкой, а всего лишь кусочно непрерывно дифференцируемой, формула всё равно остаётся верной.

Перейдём к менее тривиальному случаю. Для компактной области $G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей (представляющей из себя вложенное одномерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^2$), ориентированной так, что при движении по ∂G область G оказывается слева (это и есть правильная ориентация края G в двумерном случае), верна *формула Грина*

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

С помощью аккуратного предельного перехода можно обобщить это утверждение на области с кусочно-гладкой (или даже кусочно один раз непрерывно дифференцируемой) границей, многие полезные для практики обобщения можно получить в духе задачи 6.141.

Для компактной области $G \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей (то есть представляющей из себя вложенное трёхмерное гладкое многообразие с краем в $\mathbb{R}^3$) верна *формула Гаусса–Остроградского*

$$\int_{\partial G} P\ dy \wedge dz + Q\ dz \wedge dx + R\ dx \wedge dy = \int_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)\ dx \wedge dy \wedge dz.$$

Задача 6.143. Проверьте, что ориентация ∂G в формуле Гаусса–Остроградского должна быть такая, что в положительной карте на ∂G с координатами (u, v) вектор $[r'_u \times r'_v]$ торчит вовне G.

Для компактной двумерной поверхности с краем (то есть вложенного двумерного многообразия с краем) $S \subset \mathbb{R}^3$ верна *формула Стокса в узком смысле*

$$\int_{\partial S} P\ dx+Q\ dy+R\ dz = \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\ dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\ dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\ dx\wedge dy.$$

Ориентация в данном случае в простых терминах может быть описана аналогично предыдущему случаю:

Задача 6.144. Проверьте, что при согласованной ориентации поверхности и её края в трёхмерной формуле Стокса ориентирующий касательный вектор ∂S, ориентирующая нормаль S (вида $[r'_u \times r'_v]$ для некоторых положительных координат (u, v)), и касательный вектор к S, направленный перпендикулярно ∂S от S, должны образовывать правую тройку.

Заметим, что на самом деле формула Стокса в $\mathbb{R}^3$ (а на самом деле и в больших размерностях) верна не только для вложенных двумерных многообразий, но и вообще для всякого образа гладкого отображения $f : D \to \mathbb{R}^3$ области $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей (даже не инъективного), если интегралы мы понимаем как интегралы обратных образов $f^*(\alpha)$ и $f^*(d\alpha)$ по ∂D и D соответственно. Собственно, в такой формулировке вопрос сводится к формуле Грина на плоскости. Для практических применений полезно ослабить условия гладкости f до непрерывной дифференцируемости, тогда f надо равномерно приближать вместе с его первыми производными последовательностью гладких отображений (f_k) по теореме 6.19 и переходить к пределу в интеграле, замечая, что в его координатном представлении используются производные f не более чем первого порядка.

Поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ в формуле Стокса в узком смысле может быть кусочно-гладкой, то есть «склеенной» из ориентированных кусков S_i с кусочно гладкими краями так, что все линии склейки участвуют в двух из частей ∂S_i с разными ориентациями. Краем склеенной поверхности тогда считаются те части из ∂S_i, которые не участвовали в склейке. При таком определении при сложении формул Стокса будут складываться и правые части, и левые части, с сокращением интегралов по линиям склейки.

Формула Гаусса–Остроградского тоже может быть с некоторыми усилиями обобщена на случай, когда ∂G является кусочно-гладкой поверхностью в описанном смысле, читатель может поразмышлять над этим самостоятельно, а также проверить, что у поверхности ∂G не будет края в описанном выше кусочно-гладком смысле и убедиться, что бесконечную гладкость поверхности S можно заменить на её однократную непрерывную дифференцируемость в параметрическом представлении.

Следующие задачи демонстрируют полезные способы вычисления площадей и объёмов с помощью формул Грина и Гаусса–Остроградского.

Задача 6.145. Докажите, что площадь области, ограниченной замкнутой гладкой кривой без самопересечений $C \subset \mathbb{R}^2$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_C x dy,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации кривой.

Задача 6.146. * Четыре замкнутые кривые на плоскости

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

не имеют самопересечений и ограничивают области площадей $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, S_\delta$. Также оказалось, что в любой момент времени точки $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ образуют квадрат в указанном порядке, ориентированный по часовой стрелке. Как найти площадь одной из этих областей, зная площади трёх других?

[[Выпишите площади по формуле Грина.]]

Задача 6.147. Докажите, что объём области в $\mathbb{R}^3$, ограниченной гладкой связной вложенной поверхностью без края $S \subset \mathbb{R}^3$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_S x dy \wedge dz,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации поверхности, не забывая про положительность объёма.

При определении дифференциальных форм на многообразии с краем мы требовали, чтобы в координатных картах дифференциальная форма «чуть-чуть» продолжалась за край. Иногда это ограничение может быть чрезмерным, в следующей задаче мы намечаем способ ослабить такое ограничение.

Задача 6.148. Распространите формулу Стокса на случай, когда α непрерывна на всём многообразии, дифференцируема на его внутренности $M \setminus \partial M$ с локально ограниченными производными, а $d\alpha$ глобально абсолютно интегрируема по Лебегу на его внутренности.

[[Приведённое доказательство формулы Стокса проходит, если его правильно понимать и если при локальном рассмотрении сначала доказать формулу для области $x_1 \leqslant -\varepsilon < 0$ и потом устремить $\varepsilon \to +0$, используя непрерывность интеграла Лебега и непрерывность α вплоть до границы.]]

6.21. **Потенциалы дифференциальных форм первой степени.** В физике существует понятие потенциала силового поля, которое в математических терминах означает поиск функции $u \in C^\infty(M)$ такой, что $df = \alpha$ для некоторой заданной «силы» $\alpha \in \Omega^1(M)$. При наличии потенциала «работа силы» вдоль гладкой кривой $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ (то есть интеграл формы по кривой в наших терминах) выражается как

$$\int_\gamma \alpha = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0)),$$

конечно же, это просто одномерная формула Стокса.

Далее мы будем рассматривать интегралы $\int_\gamma \alpha$ для кусочно-гладких кривых, определив интеграл как сумму интегралов по кускам. Более того, на самом деле для корректной работы с такими интегралами достаточно считать кривую (кусочно) один раз непрерывно дифференцируемой, так как выражение (в котором мы переносим форму на координатную карту t)

$$\int_\gamma \alpha = \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\gamma'(t))\, dt$$

корректно определено и в этом случае. Более того, интегрируемую форму α здесь вполне достаточно считать всего лишь непрерывно зависящей от точки, а не бесконечно гладкой.

Теорема 6.149. *Необходимым и достаточным условием наличия потенциала у непрерывной $\alpha \in \Omega^1(M)$, для связного многообразия M, является независимость интеграла $\int_\gamma \alpha$ от выбора кусочно-гладкой кривой γ, соединяющей две фиксированные точки. Эквивалентно, необходимым и достаточным условием наличия потенциала является равенство нулю интегралов $\int_\gamma \alpha$ по всем замкнутым кусочно-гладким кривым.*

Доказательство. Необходимость обоих условий очевидна, так как при наличии потенциала интеграл по кривой должен зависеть только от значений потенциала на концах.

Первое условие следует из второго. Действительно, рассмотрим две кривые γ_1 и γ_2, у которых совпадают начало и конец. Определим замкнутую кривую $\gamma_1 \diamond (-\gamma_2)$ (у γ_2 взята противоположная ориентация), тогда

$$\int_{\gamma_1 \diamond (-\gamma_2)} \alpha = 0$$

означает, что

$$\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = 0.$$

Покажем достаточность первого условия. В связном многообразии M можно фиксировать одну точку p, выбрать какое-то значение $u(p)$ и положить по определению

$$u(q) = u(p) + \int_p^q \alpha,$$

используя то, что интеграл в правой части не зависит от выбора кривой из p в q. Тогда в локальных координатах, в которых

$$\alpha = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n,$$

для нахождения производной $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ нам надо изучить приращение u при замене точки $q = (q_1, \dots, q_i, \dots q_n)$ на $q' = (q_1, \dots, q_i', \dots q_n)$. Будем считать, что путь из p в q' идёт сначала из p в q, а потом из q в q' по отрезку. Но тогда находя интеграл по отрезку вдоль i-й координатной оси мы получим

$$u(q') - u(q) = \int_q^{q'} \alpha = \int_0^1 a_i(q + (q' - q)t)(q'_i - q_i)\, dt,$$

откуда ясно, что $\frac{\partial u}{\partial x_i}(q) = a_i(q)$. Иначе говоря, $du = \alpha$. □

Условия существования потенциала в предыдущей теореме не являются практически проверяемыми. Конечно, практически проверяемым необходимым условием существования потенциала у $\alpha \in \Omega^1(M)$ является $d\alpha = 0$, так как это просто $d(du) = 0$. Можно привести пример, когда оно не является достаточным. Например, в открытой области $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ положим

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Легко проверить, что $d\alpha = 0$, но интеграл α по стандартной единичной окружности равен 2π, что противоречит наличию потенциала. Этот пример неприятен с точки зрения нахождения потенциала дифференциальной формы, но из него есть позитивные следствия, которые приведены в виде задач.

Задача 6.150 (Порядок точки относительно кривой). Для замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, не проходящей через начало координат, обозначим *порядок начала координат относительно кривой* γ

$$w(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Докажите, что это число не меняется при непрерывных деформациях кривой, при которых она не проходит через начало координат. Докажите, что это число корректно определено и для непрерывных замкнутых кривых, которые не проходят через начало координат.

[[Выражение под интегралом локально является полным дифференциалом (используйте арктангенс), что позволяет доказать инвариантность при непрерывных деформациях и определить число для непрерывных кривых.]]

Задача 6.151. Докажите, что порядок точки относительно кривой является целым.

[[Если кривая не приближается к началу координат ближе чем на ε, то её равномерное приближение ломаной с точностью $\varepsilon/2$ не меняет порядка точки относительно кривой. Для ломаной же можно с помощью локальной первообразной интерпретировать вклад каждого её отрезка в порядок точки и смысл суммы этих вкладов.]]

Задача 6.152. Докажите, что порядок начала координат относительно не проходящей через него нечётной (как отображение $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ со свойством $\gamma(-u) = -\gamma(u)$) кривой является нечётным целым числом.

[[Посмотрите на определяющий порядок интеграл по половине нечётной кривой.]]

Задача 6.153. Пусть гладкая кривая на плоскости замкнута и имеет всюду ненулевую скорость. Докажите, что интеграл кривизны (взятой со знаком)

$$\int_\gamma k(s)\, ds$$

по натуральному параметру является целым числом, умноженным на 2π.

[[Посмотрите на скорость этой кривой и порядок нуля относительно скорости.]]

Задача 6.154. *[Лемма Жордана для кусочно-гладких кривых] Докажите, что замкнутая кусочно-гладкая кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений делит плоскость на две связные части, внутреннюю и внешнюю.

[[Зафиксируем кривую и будем менять точку p, для которой мы смотрим её порядок относительно кривой. Проверьте, что порядок не меняется, если точка p движется, не пересекая кривую и меняется на ± 1, когда точка p пересекает кривую в её гладкой точке. На основе этого поймите, как определить внутреннюю и внешнюю части плоскости относительно кривой.]]

Задача 6.155. **[Лемма Жордана для непрерывных кривых] Докажите, что замкнутая непрерывная кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений делит плоскость на две связные части, внутреннюю и внешнюю.

[[В этой задаче надо очень аккуратно приближать непрерывную кривую ломаными.]]

Вернёмся к вопросу нахождения потенциала дифференциальной формы первой степени. Формула Стокса вместе с теоремой 6.149 показывают, что достаточным условием для нахождения потенциала $\alpha \in \Omega^1(M)$, у которой $d\alpha = 0$, является возможность на всякую замкнутую гладкую кривую γ натянуть кусочно-гладкую двумерную поверхность $S \subset M$ (на самом деле у неё даже допускаются самопересечения, если мы интерпретируем интегралы в формуле Стокса как интегралы обратных образов) так, чтобы γ оказалась её краем, то есть $\gamma = \partial S$. В этом случае мы получаем

$$\int_\gamma \alpha = \int_S d\alpha = 0$$

и наличие потенциала по теореме 6.149.

Условие натягивания поверхности на контур как на край обычно называется *поверхностная односвязность* многообразия. Можно убедиться, что поверхностная односвязность следует из обычной *односвязности*, которая означает возможность стянуть всякую замкнутую кривую непрерывно в точку (то есть устроить непрерывную гомотопию между параметризацией кривой и постоянным отображением). Понятие гомотопии поясняется в следующем разделе.

6.22. **Первообразные дифференциальных форм и когомологии де Рама.** Приведённые выше примеры наводят на мысль, что вопрос о нахождении β, такой что $d\beta = \alpha$, для некоторой $\alpha \in \Omega^k(M)$, при выполнении условия $d\alpha = 0$, имеет топологический характер. Например, для дифференциальных форм на таком «топологически простом» пространстве, как $\mathbb{R}^n$, мы ожидаем, что задача нахождения «первообразной» дифференциальной формы любой положительной степени всегда имеет решение, если конечно $d\alpha = 0$.

Для лучшего понимания этих вопросов читателю будет полезно изучить стандартные учебники по топологии типа [11], а в этом разделе мы продемонстрируем некоторые базовые инструменты и понятия. Введём некоторую терминологию:

Определение 6.156. Дифференциальная форма $\alpha \in \Omega^k(M)$ называется *замкнутой*, если $d\alpha = 0$. Она называется *точной*, если для некоторой $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ оказывается $d\beta = \alpha$.

Задача 6.157. Докажите, что внешнее произведение замкнутой формы на точную форму — точная форма.

[[Используйте правило Лейбница для внешнего произведения.]]

Задача 6.158. Пусть M — многообразие, а $N \subset M$ — некоторое его подмногообразие. Верно ли, что ограничение замкнутой $\alpha \in \Omega^*(M)$ на N является замкнутой формой? Верно ли, что ограничение точной формы $\alpha \in \Omega^*(M)$ на N является точной формой?

[[Используйте тот факт, что ограничение формы на подмногообразие коммутирует с внешним дифференцированием.]]

Далее мы построим некоторую теорию, позволяющую устанавливать точность замкнутой формы в некоторых случаях. Начнём с важного отношения эквивалентности для гладких отображений:

Определение 6.159. Два отображения $h_0, h_1 : M \to N$ *гладко гомотопны*, если существует гладкое отображение цилиндра

$$h : M \times [0,1] \to N,$$

такое что $h_0(x) = h(x,0)$ и $h_1(x) = h(x,1)$.

Цилиндр, декартово произведение многообразия M на отрезок, является топологическим пространством, которое локально устроено как произведение открытого подмножества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ на отрезок. Можно проверить, что если M было многообразием без края, то $M \times [0,1]$ будет многообразием с краем $M \times \{0,1\}$.

Неформально говорят, что в определении гомотопии отображение h_0 гладко деформируется в отображение h_1 с помощью семейства отображений $h_t = h(\cdot, t)$, гладко зависящего от t. Гомотопия между отображениями — это наиболее грубое отношение эквивалентности между ними.

Обычно рассматриваются непрерывные гомотопии, но мы работаем с гладкими многообразиями и будем использовать гладкие гомотопии. На самом деле с помощью техники сглаживания можно показать, что если два гладких отображения непрерывно гомотопны, то они и гладко гомотопны. При этом (и во многих других построениях) полезно считать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ в гомотопии выполнялось $h(x,t) = h(x,0)$ при $t < \varepsilon$ и $h(x,y) = h(x,1)$ при $t > 1-\varepsilon$. Действительно, для этого надо определить новую гомотопию через старую как $h'(x,t) = h(x, \varphi(t))$, где бесконечно гладкая функция $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ равна 0 при $t \leqslant \varepsilon$ и равна 1 при $t \geqslant 1-\varepsilon$.

Задача 6.160. Докажите, что гладкая гомотопность является отношением эквивалентности между гладкими отображениями многообразий.

[[Проверьте транзитивность, определив для данных гомотопий $h_1(x,t)$ и $h_2(x,t)$ при условии $h_1(x,1) \equiv h_2(x,0)$ новую гомотопию $h_3(x,t)$, равную $h_1(x,2t)$ при $t \leqslant 1/2$ и $h_2(2t-1)$ при $t \geqslant 1/2$. Обоснуйте её гладкость.]]

Задача 6.161. Докажите, что гомотопность замкнутой кривой $\gamma : S^1 \to M$ отображению S^1 в одну точку фактически означает возможность непрерывно продолжить отображение γ на единичный круг, получив непрерывное отображение $h : B^2 \to M$.

[[Подумайте, как из цилиндра $S^1 \times [0,1]$ сделать круг.]]

Следующее утверждение показывает, как отличаются обратные образы дифференциальной формы при двух гомотопных друг другу отображениях.

Теорема 6.162 (Цепная гомотопия для гладких отображений и дифференциальных форм)**.** *Если два отображения $f_0, f_1 : M \to N$ гладко гомотопны, то для любой дифференциальной формы $\alpha \in \Omega^k(N)$ выполняется*

$$f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = H(d\alpha) + d(H(\alpha))$$

для некоторой линейной операции $H : \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$.

Доказательство. Рассмотрим форму $h^*\alpha$ на цилиндре $M\times[0,1]$, на самом деле операция H будет по сути происходить на цилиндре и заключаться в некотором интегрировании $h^*\alpha$ по переменной t.

Для форм, делящихся на dt, положим

$$I(dt\wedge\beta(x,t))=\int_0^1\beta(x,t)\;dt,$$

а на формах, не делящихся на dt, положим $I(\beta(x,t))=0$. Получается операция $I:\Omega^k(M\times[0,1])\to\Omega^{k-1}(M)$, так как результат интегрирования уже не будет зависеть от t и не будет делиться на dt.

Посмотрим, как действует $Id+dI$ на формы, делящиеся на dt

$$dI(dt\wedge\beta(x,t))=d\int_0^1\beta(x,t)\;dt=d_x\int_0^1\beta(x,t)\;dt=\int_0^1 d_x\beta(x,t)\;dt,$$

где через d_x обозначен модифицированный дифференциал, который дифференцирует только по координатам M, но не дифференцирует по переменной t. Мы воспользовались здесь дифференцированием под знаком интеграла. Далее,

$$I(d(dt\wedge\beta(x,t)))=-\int_0^1 d_x\beta(x,t)\;dt=-\int_0^1 d_x\beta(x,t)\;dt.$$

То есть $Id+dI$ даёт нуль на формах, делящихся на dt. Посмотрим теперь, как $Id+dI$ действует на форму $\beta(x,t)$, не делящуюся на dt:

$$dI(\beta)=0,$$

$$I(d\beta)=I\left(dt\wedge\frac{\partial\beta(x,t)}{\partial t}\right)+I(d_x\beta(x,t))=\int_0^1\frac{\partial\beta(x,t)}{\partial t}\;dt=\beta(x,1)-\beta(x,0).$$

В итоге только для формы β, не делящейся на dt, мы имеем ненулевое значение

$$I(d\beta(x,t))+d(I(\beta(x,t)))=\beta(x,1)-\beta(x,0),$$

равенство понимается в том смысле, что в левой части стоят формы, не зависящие от t и не делящиеся на dt, которые можно считать дифференциальными формами на M.

Иначе можно сказать, что $Id+dI$ от любой формы $\alpha\in\Omega^k(M\times[0,1])$ даёт форму на M, являющуюся разностью $i_1^*\alpha-i_0^*\alpha$, где $i_0,i_1:M\to M\times[0,1]$ — это вложения нижнего и верхнего края цилиндра в цилиндр.

Утверждение теоремы теперь следует через рассмотрение f_1 и f_0 как композиций

$$f_0=h\circ i_0,\quad f_1=h\circ i_1,$$

и $H=I\circ h^*$. ☐

Определение 6.163. Если две формы α_1,α_2 отличаются на $d\beta$ (точную форму), то говорят, что α_1 и α_2 *гомологичны*.

Напомним, что при определении интеграла формы с компактным носителем (и в формуле Стокса) мы обнаружили, что для гомологичных форм интегралы совпадают (но правда тогда гомологичность тоже была с компактным носителем). Замкнутые формы с точностью до гомологичности дают полезные векторные пространства:

Определение 6.164. *Когомологии де Рама* гладкого многообразия M — это факторпространства

$$H^k_{DR}(M)=\left(\ker d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)\right)/d\Omega^{k-1}(M).$$

В степени 0 в этом определении мы считаем $d\Omega^{-1}(M)$ нулевым пространством и на самом деле рассматриваем функции $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, такие что $df = 0$ — то есть локально постоянные функции. Отсюда следует, что $H^0_{DR}(M)$ — это векторное пространство той размерности, сколько компонент связности у многообразия M, при конечном количестве компонент, а при бесконечном количестве компонент — двойственное к векторному пространству размерности, равной числу компонент.

По сути когомологии де Рама измеряют, насколько задача нахождения первообразной замкнутой формы может оказаться нерешаемой. Если $H^k_{DR}(M) = 0$, то для всех замкнутых форм степени k на M найдутся первообразные, то есть все они будут точными.

Для гладкого отображения $f : M \to N$ и некоторой формы $\alpha \in \Omega^k(N)$ при условии $d\alpha = 0$ оказывается верным $df^*\alpha = 0$. При условии $\alpha = d\beta$ для некоторой $\beta \in \Omega^{k-1}(N)$ оказывается верно $f^*\alpha = df^*\beta$. Следовательно, всякое гладкое отображение f порождает отображение $f^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M)$. Из теоремы о цепной гомотопии выводится важное свойство этого отображения:

Следствие 6.165. *Если два отображения $f_0, f_1 : M \to N$ гладко гомотопны и для некоторой $\alpha \in \Omega^k(N)$ оказалось, что $d\alpha = 0$, то найдётся $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$, такая что $f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = d\beta$. Следовательно $f_1^*\alpha$ и $f_2^*\alpha$ гомологичны, иначе говоря, отображения $f_0^*, f_1^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M)$ совпадают.*

Доказательство. Достаточно взять цепную гомотопию H и положить $\beta = H(\alpha)$. □

Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама позволяет их посчитать в некоторых ситуациях, которые не сложны, но полезны на практике.

Теорема 6.166 (Лемма Пуанкаре). *$H^k_{DR}(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq 0$ и $H^0_{DR}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.*

Доказательство. Легко построить гомотопию между тождественным отображением $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и отображением f всего $\mathbb{R}^n$ в начало координат. При этом id^* даёт тождественное отображение когомологий де Рама на себя, а f^* отображает функции в константы (их значение в нуле), обнуляя дифференциальные формы положительных степеней. Так как оба отображения в когомологиях действуют одинаково, то когомологии положительной степени должны быть равны нулю, а нулевой степени — совпадать с одномерным пространством констант. □

Лемма де Рама с тем же доказательством верна для всякой выпуклой области $U \subseteq \mathbb{R}^n$, то есть по сути она означает, что задача поиска первообразной для замкнутой формы всегда имеет решение локально. Глобальная ситуация может отличаться, как например в рассмотренном выше примере с формами первой степени на плоскости с выброшенным началом координат.

Название «когомологии» возникло из того, что когомологии (например, де Рама) являются двойственными к *гомологиям* $H_*(M; \mathbb{R})$. В первом (и не вполне корректном) приближении k-мерные гомологии M можно рассматривать как вложенные компактные ориентированные k-мерные подмногообразия M без края. Отношение гомологичности двух таких подмногообразий Z_0, Z_1 (опять таки в первном приближении) можно рассматривать как возможность найти $(k+1)$-мерное вложенное ориентированное компактное подмногообразие с краем W, для которого ∂W является объединением Z_0 и Z_1, причём ∂W даёт на Z_1 правильную ориентацию, а на Z_0 — обратную. При этом двойственность между гомологиями и когомологиями даёт интегрирование формы по подмногообразию с учётом формулы Стокса.

Настоящее определение гомологий отличается от приведённого выше наброска следующими моментами: а) рассматриваются не только подмногообразия, но и их формальные комбинации с действительными (или целыми) коэффициентами; б) вместо вложений подмногообразий рассматриваются произвольные отображения многообразий в данное; в) у многообразий приходится разрешить некоторую негладкость (иначе мы определим не гомологии, а *бордизмы*) — это как раз существенный момент, который мы не будем далее обсуждать и отсылаем читателя к любому учебнику по алгебраической/гомотопической топологии.

Важный факт заключается в том, что гомологии (и когомологии) компактного многообразия (возможно с краем) оказываются конечномерными векторными пространствами (или конечно порождёнными группами), и таким образом представляют некоторую информацию о его топологии в конечном и обычно явно вычислимом виде. Вычислениями мы здесь заниматься не будем и отсылаем читателя к стандартному учебнику [11].

Задача 6.167. Придумайте форму $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, у которой $d\alpha = 0$ и для которой не существует $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, такой что $d\beta = \alpha$.

[[Постарайтесь придумать замкнутую α так, чтобы её интеграл по единичной сфере был ненулевым. Тогда отсутствие «первообразной» будет следовать из формулы Стокса.]]

Задача 6.168. Докажите, что при условии $d\alpha = 0$ для $\alpha \in \Omega^1(M)$ интеграл по кривой $\int_\gamma \alpha$ можно определить для непрерывных кривых без требования дифференцируемости.

[[Утверждение по сути локально, поэтому можно работать в $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и считать, что $\alpha = du$. Тогда интеграл можно определить как разность потенциалов в конце и в начале.]]

Задача 6.169. * Докажите, что для произвольной $\alpha \in \Omega^1(M)$ можно корректно определить интеграл по не обязательно дифференцируемой кривой γ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию Гёльдера

$$|\gamma(t') - \gamma(t'')| \leqslant C|t' - t''|^\alpha$$

с показателем $\alpha > 1/2$.

[[Приближайте кривую всё более мелко вписанными в неё ломаными и докажите, что интегралы по ломаным составляют фундаментальную последовательность.]]

Задача 6.170. * Для не обязательно компактного многообразия без края M рассмотрим дифференциальные формы с компактным носителем $\Omega^*_c(M)$ и определим *когомологии де Рама с компактным носителем*

$$H^k_c(M) = \left(\ker d : \Omega^k_c(M) \to \Omega^{k+1}_c(M)\right) / d\Omega^{k-1}_c(M).$$

Докажите, что если $n = \dim M$, M ориентируемо и связно, то $H^n_c(M)$ одномерно. Что будет, если M связно, но не ориентируемо?

[[Лемма 6.91 доказывает это для $\mathbb{R}^n$, модифицируйте доказательство для произвольного связного M.]]

Задача 6.171. ** Докажите, что $H^k_c(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq n$ и $H^n_c(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

[[Для случая $k = 0$ утверждение делается вручную. В остальных случаях заметьте, что цепная гомотопия с сохранением компактности носителя возможна для *собственных* отображений и гомотопий, то есть отображений с компактными прообразами компактов. Отсюда следует, что $\alpha \in \Omega^k_c(\mathbb{R}^n)$ гомологична с компактным носителем $f^*\alpha$, где f — любой собственный диффеоморфизм, гомотопный тождественному с помощью гладкой собственной гомотопии.

Один из вариантов дальнейшего рассуждения: вывести гомологичность α с компактным носителем её усреднению по всевозможным вращениям $\mathbb{R}^n$ вокруг начала координат и изучить формы степени k, инвариантные относительно вращений.]]

6.23. **Критические и регулярные значения, теорема Сарда.** Рассматривая гладкую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, мы можем поинтересоваться, для каких значений $y \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = y$ определяет вложенное многообразие. Теоремы об обратном отображении или о неявной функции гарантируют, что это выполняется в том случае, если во всех точках этого множества дифференциал df не равен нулю. В более общей формулировке, для m функций, то есть для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, множество решений системы уравнений $\{f(x) = y\}$ гарантированно будет вложенным $(n-m)$-мерным многообразием, если в каждой его точке дифференциалы $df_1, \dots, df_m$ будут линейно независимы, или эквивалентно, производная отображения Df будет иметь ранг m. В качестве примера мы уже накладывали такие ограничения в ситуации поиска условного экстремума.

Мы собираемся установить замечательное свойство — в приведённых примерах при почти всех y выполняется ровно то, что нам нужно, и множество $\{f(x) = y\}$ является вложенным многообразием. Перейдём к рассуждениям в терминах отображений между многообразиями, так как это не вносит никаких усложнений, но позволяет рассмотреть много разных случаев единообразно. А именно, будем рассматривать гладкое отображение $f : N \to M$ между гладкими многообразиями и сделаем определение.

Определение 6.172. Точка $x \in N$ называется *критической точкой* гладкого отображения $f : N \to M$, если Df_x не является сюръективным. Если для точки $y \in M$ найдётся критическая $x \in N$, такая что $y = f(x)$, то y называется *критическим значением* отображения f. Не критическое значение называется *регулярным значением*.

Если размерность N равна нулю, а размерность M положительна, то всякая точка N по этому определению оказывается критической. Если же обе размерности нулевые, то всякая точка отображения будет считаться регулярной. Также ясно, что при $\dim N < \dim M$ все точки N критические и всё множество $f(N) \subset M$ состоит из критических значений, регулярны только значения из $M \setminus f(N)$. Для функции $f : N \to \mathbb{R}$ критическая точка — это точка, в которой её дифференциал обращается в нуль, именно такие точки мы считаем подозрительными на экстремум.

Задача 6.173. Опишите критические и регулярные значения функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Также нам понадобится определение множества лебеговой меры нуль в произвольном многообразии. Конечно, формула замены переменных в кратном интеграле показывает, что лебегова мера в общем не инвариантна относительно замены переменных. Однако свойство множества иметь меру нуль не зависит от криволинейных замен координат (по той же формуле), а значит его можно определить и на произвольном многообразии, потребовав, чтобы во всякой карте видимая в карте часть этого множества оказывалась множеством меры нуль. В нульмерном многообразии будем считать множеством лебеговой меры нуль пустое множество.

Теорема 6.174 (Теорема Сарда). *Для бесконечно гладкого отображения $f : N \to M$ между многообразиями множество критических значений f имеет меру нуль в M, то есть почти все точки M являются регулярными значениями f.*

Доказательство. Пусть $\dim N = n, \dim M = m$, мы будем применять индукцию по обоим размерностям (иначе говоря, по их сумме), читатель может проверить базу индукции в случае $n = 0$ самостоятельно исходя из приведённых выше комментариев про нульмерный случай.

Мы в основном будем действовать локально. А именно, для всякой точки $x \in N$ мы хотели бы доказать, что у неё есть окрестность $U \ni x$ такая, что образ множества критических точек из этой окрестности имеет меру нуль в M. Тогда такие окрестности покрывают всё многообразие N, из этого покрытия можно выбрать счётное подпокрытие (проверьте это с использованием счётной базы топологии M) и утверждение для всего многообразия следует из счётной аддитивности меры Лебега. На самом деле далее в процессе доказательства мы будем применять рассуждение со счётностью базы не только к N, но и к его подмножествам.

Множество критических точек $C \subset N$ снабдим системой убывающих замкнутых подмножеств $C \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$, где множество C_k состоит из тех точек $x \in N$, в которых у компонент отображения f обнуляются все частные производные порядка до k включительно (проверьте, что это определение не зависит от системы координат).

Шаг 0: Если $x \notin C$, то у неё есть окрестность $U \ni x$, состоящая полностью из регулярных точек, тогда требуемое утверждение очевидно.

Шаг 1: Если $x \in C\setminus C_1$. Работая локально мы можем предположить, что одна из производных координатного представления f всё же не обратилась в нуль в точке x, которая нас интересует. Пусть без ограничения общности компонента отображения f_1 имеет ненулевой дифференциал. Тогда в некоторой окрестности $U \ni x$ можно сделать замену переменных в N так, чтобы f_1 стала просто одной из координат, тогда отображение будет удовлетворять равенству $y_1 = x_1$. В таком случае окрестность x отображается с сохранением первой координаты и в каждом слое $x_1 = c$ у нас возникает отдельное гладкое отображение f_c в слой $y_1 = c$. Посмотрев на матрицу производных мы можем заключить, что критические точки f содержатся в объединении критических точек f_c во всех слоях. Применяя предположение индукции мы видим, что критические значения отображения f_c в каждом слое дают множество меры нуль, используя теорему Фубини мы заключаем, что критические значения $f(C \cap U)$ тоже имеют меру нуль.

После первого шага с учётом рассуждения со счётной базой многообразия $N \setminus C_1$ мы уже доказали, что $f(C \setminus C_1)$ имеет меру нуль.

Шаг 2 (на самом деле несколько шагов): Если $x \in C_k \setminus C_{k+1}$. Пусть в точке x обнулились все k-е производные компонент отображения f, но какая-то $(k+1)$-я производная не обнулилась. Тогда без ограничения общности пусть w — какая-то из k-х производных компонент f и её дифференциал не нулевой. Сделав в некоторой окрестности $U \ni x$ замену координат, можно считать $w = x_1$. Множество C_k в пересечении с U полностью лежит в гиперплоскости $x_1 = 0$, ведь w там должна обращаться в нуль. Пусть f_0 — ограничение f на гиперплоскость $\{x_1 = 0\}$. Тогда тривиально, что $C_k \cap U$ содержится в множестве критических точек f_0, а образ $f(C_k \cap U)$ — в множестве критических значений f_0. По предположению индукции мера критических значений f_0 нулевая, значит мера $f(C_k \cap U)$ — тоже нулевая. По результатам шага 1 или шага 2 с меньшим значением k, а также с учётом рассуждения со счётной базой многообразия $N \setminus C_k$, мы на самом деле имеем, что образ $f(C \setminus C_k)$ имеет меру нуль и выводим, что образ $f(C \setminus C_{k+1})$ тоже имеет меру нуль.

Теперь после нескольких описанных выше шагов мы уже доказали, что при всяком натуральном k образ множества

$$C \setminus C_k = (C \setminus C_1) \cup \dots \cup (C_{k-1} \setminus C_k)$$

имеет меру нуль. Докажем теперь, что при $k > n/m - 1$ мера множества $f(C_k)$ равна нулю. Как и ранее, нам достаточно доказать для всякой точки $x \in C_k$ найдётся окрестность $U \ni x$ с нулевой мерой $f(C_k \cap U)$. В качестве U в какой-то координатной карте возьмём окрестность x с компактным замыканием, на которой $(k+1)$-е производные f ограничены. Порежем U на не более $A\varepsilon^{-n}$ кубиков диаметра не более ε (A — некоторая зависящая только от U константа). Те из них, что пересекаются с C_k, будут иметь образы диаметра не более $B\varepsilon^{k+1}$ (из разложения по формуле Тейлора координат отображения, B — некоторая другая константа, зависящая от U и f). Следовательно, суммарная мера образа объединения тех кубиков, которые покрывают C_k, будет не более

$$A\varepsilon^{-n}B^m\varepsilon^{m(k+1)} = AB^m\varepsilon^{m(k+1)-n}.$$

Так как $m(k+1) - n > 0$, то при уменьшении ε мы оцениваем меру $f(C_k \cap U)$ сверху сколь угодно малым числом. Следовательно, $f(C_k \cap U)$ имеет меру нуль, и в целом $f(C_k)$ имеет меру нуль.

В итоге доказано, что мера множества критических значений f равна нулю. □

Задача 6.175. В теореме Сарда сначала следовало бы проверить, что множество критических значений измеримо. Докажите, что оно является объединением счётного числа замкнутых множеств.

[[Представьте N в виде объединения счётной последовательности компактных многообразий (с краем), и покажите, что для каждого из них множество критических точек замкнуто, а значит и множество соответствующих критических значений в M — тоже.]]

Из теоремы Сарда следуют важные факты. Например, при $\dim N < \dim M$ образ $f(N)$ по определению состоит только из критических значений и имеет меру нуль в M. В случае $\dim N \geqslant \dim M$ для почти всех точек $y \in M$ множество $f^{-1}(y)$, *слой отображения*, является замкнутым подмногообразием в N размерности $n - m$ (возможно пустым). Последнее утверждение следует из того, что локальные координаты около y в композиции с f дают частичные системы координат в любой точке $x \in f^{-1}(y)$ и следовательно слой локально выглядит как $\mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$.

Важный вопрос: как меняется слой при изменении точки y в связном M? В следующем разделе мы изучаем случай $n = m$, когда слой отображения над регулярным значением является нульмерным многообразием, то есть дискретным набором точек. А пока предлагаем задачи, которые можно решить без теоремы Сарда, но с её помощью они решаются намного проще.

Задача 6.176. Докажите, что множество матриц с единичным детерминантом $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ является гладким подмногообразием в пространстве матриц $n \times n$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{n^2}$.

[[Рассмотрите положительное регулярное значение функции детерминанта матрицы, масштабируйте множество соответствующих ему матриц.]]

Задача 6.177. Докажите, что множество ортогональных матриц $\mathrm{O}(n)$ является гладким подмногообразием в пространстве матриц $n \times n$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{n^2}$.

[[Рассмотрите отображение $X \mapsto X^TX$ пространства всех матриц в пространство симметричных положительно полуопределённых матриц и его положительно определённое регулярное значение. Покажите, что слой над каким-то регулярным значением диффеоморфен слою над единичной матрицей.]]

6.24. **Степень отображения и её применения.** В этом разделе мы определим гомотопический инвариант отображений между многообразиями равных размерностей (с некоторыми дополнительными ограничениями). Как станет ясно чуть позже, это понятие даёт геометрический взгляд на величины, которые можно (в некоторых случаях) иначе определить с помощью когомологий де Рама.

Определение 6.178. Если $f : N \to M$ — гладкое отображение ориентированных многообразий одной и той же размерности, многообразие N компактно, и y — регулярное значение f, *степенью отображения в точке* y называется число точек в прообразе $f^{-1}(y)$, для которых якобиан Jf_x положителен минус число точек в прообразе $f^{-1}(y)$, у которых якобиан отрицателен. В случае отсутствия ориентации хотя бы одного многообразия степень определена по модулю 2 как чётность количества точек в прообразе $f^{-1}(y)$.

Обратите внимание, что знак якобиана корректно определён только для отображения между ориентированными многообразиями. При смене ориентации одного из них на противоположную степень тоже меняет знак. При забывании ориентации многообразий степень заменяется на свой остаток по модулю два, зачем так делается — станет ясно позднее.

Их условия того, что y — регулярное значение, следует, что множество $f^{-1}(y)$ состоит из изолированных точек (то есть *дискретное множество*). В случае компактного N их число должно оказаться конечным, так как дискретное компактное множество конечно. Также множество $f^{-1}(y)$ окажется конечным в случае *собственного отображения* f, то есть отображения, для которого прообраз любого компакта является компактом. Далее мы рассматриваем случай компактного N, но утверждения остаются верными для некомпактных N, собственных отображений и собственных гомотопий между отображениями.

Лемма 6.179. *Если $f : N \to M$ — гладкое отображение ориентированных многообразий без края одной и той же размерности, многообразие N компактно, и y — регулярное значение f, то найдётся окрестность $U \ni y$, такая что все $y' \in U$ регулярны и степени f во всех $y' \in U$ равны его степени в y. В случае отсутствия ориентации в N мы просто утверждаем независимость количества точек в $f^{-1}(y')$ от y' при $y' \in U$.*

Доказательство. Пусть $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_N\}$, это конечное множество, так как оно дискретно и компактно, в том числе оно может быть пустым. По теореме об обратном отображении у каждого x_i есть окрестность V_i, такая что f в сужении на неё является диффеоморфизмом на $U_i \ni y$. Возьмём в качестве U пересечение всех U_i и обозначим $W_i = f^{-1}(U) \cap V_i$. Тогда f даёт диффеоморфизмы каждого W_i на U.

Предположим, что прообраз $f^{-1}(U)$ содержит что-то кроме объединения множеств W_i. Если это так, попытаемся уменьшить U и соответственно W_i так, чтобы прообраз $f^{-1}(U)$ оказался равен точно $\bigcup_i W_i$. Если так не получается, то мы получим последовательность точек $(y_k) \subset M$ и $(\xi_k) \subset N$, так что $f(\xi_k) = y_k$, $y_k \to y$, но $\xi_k \notin \bigcup_i W_i$. Переходя к подпоследовательности мы можем считать, что $\xi_k \to \xi \in N$ из компактности. Но тогда получается, что $\xi \notin \bigcup_i W_i$, и значит ξ не равно ни одному из $x_1, \dots, x_N$, однако же по непрерывности $f(\xi) = y$ — противоречие.

Итак, на самом деле для достаточно малой окрестности U её прообраз равен несвязному объединению открытых множеств $\bigcup_i W_i$, для каждого W_i отображение f устанавливает его диффеоморфизм на U. Следовательно, структура прообраза точки $y' \in U$ не зависит от y', все такие y' регулярны, знаки якобианов в прообразе y' не меняются по непрерывности, если мы выбрали U связной, и степень отображения во всех $y' \in U$ тоже одна и та же. $\square$

Задача 6.180. Докажите, что без предположения о компактности N или собственности отображения f предыдущая лемма неверна.

[[Постройте контрпример из одномерных многообразий и отображений между ними.]]

Теорема 6.181. *Пусть многообразие N компактное без края, M — не обязательно компактное без края, $h : N \times [0, 1] \to M$ — гладкая гомотопия, а точка $y \in M$ такова, что она является регулярным значением для h_0 и h_1. Тогда степени отображений h_0 и h_1 в точке y равны. Если оба многообразия ориентированы, то степень считается со знаком, иначе она считается как чётность.*

Доказательство. По лемме точку y можно шевелить в рамках какой-то её окрестности, оставляя её регулярной для h_0 и h_1 и не меняя структуру прообразов $h_0^{-1}(y)$ и $h_1^{-1}(y)$, в частности не меняя степени. Тогда сдвинем точку y в точку, являющуюся регулярным значением для h как отображения $N \times [0,1] \to M$. Более того, следуя замечанию после определения 6.159, нам будет удобно считать гомотопию гладко определённой при всех t, но не зависящей от t в диапазоне $t \leqslant 0$ и в диапазоне $t \geqslant 1$. Тогда мы сможем считать y также регулярным значением для расширенной гомотопии $h : N \times \mathbb{R} \to M$. Прообраз $h^{-1}(y)$ в $N \times \mathbb{R}$ будет одномерным многообразием, а его пересечение с $N \times [0,1]$ тогда будет одномерным компактным многообразием с краем (край возникнет на пересечении с $t = 0$ и $t = 1$), к тому же несущим соответствующую ориентацию, если у нас были ориентации на N и на M. В локальных координатах $x_1, \dots, x_n, t$, где $x_1, \dots, x_n$ подняты с N, одномерное многообразие $h^{-1}(y)$ будет перпендикулярно $N \times \{0\}$ и $N \times \{1\}$ в тех его точках, где t равно 0 или 1, так как гомотопия не зависит от t при $t \leqslant 0$ или $t \geqslant 1$.

Одномерное компактное многообразие является набором отрезков и окружностей (см. задачу 6.112), то есть кривых в $N \times [0,1]$. Окружности не пересекают край $N \times [0,1]$ и не вносят вклада в определение степени. Концы отрезков (концов всего чётное число) в точности дают все точки в $h_0^{-1}(y)$ и $h_1^{-1}(y)$. Это уже доказывает равенство степени по модулю два. При наличии ориентации можно взять параметр $s \in [0,1]$ на отрезке $S \subseteq f^{-1}(y)$ за одну координату и продолжить её гладко на окрестность S (читатель может аккуратно обосновать продолжение через разбиение единицы). Другие n координат $y_1, \dots, y_n$ вокруг S поднимем с координатной окрестности y в M с помощью отображения h. Так как отрезок S связен, то либо в любой его точке система координат $s, y_1, \dots, y_n$ является положительной относительно ориентации $N \times [0,1]$, либо в любой его точке она является отрицательной. Рассмотрим первый случай без ограничения общности.

По нашему выбору, на конце отрезка, для которого $t = 0$ или $t = 1$, знак якобиана замены $t, x_1, \dots, x_n$ на $s, y_1, \dots, y_n$ положителен, если $x_1, \dots, x_n$ — положительная система координат на N в окрестности этой точки. Так как производные координат на M по t в этой точке равны нулю (так как у нас гомотопия продолжалась гладко в области $t < 0$ и $t > 1$ и не зависела там от t), то знак якобиана замены $x_1, \dots, x_n$ на $y_1, \dots, y_n$ будет равен знаку $\frac{\partial s}{\partial t}$. То есть вклад в определение степени h_0 или h_1 в этой точке равен знаку $\frac{\partial s}{\partial t}$. Следовательно, S либо соединяет точку $h_0^{-1}(y)$ с точкой $h_1^{-1}(y)$ с одинаковым знаком якобиана отображений h_0 и h_1 на концах, либо соединяет пару точек в $h_0^{-1}(y)$ с разными знаками Jh_0, либо соединяет пару точек в $h_1^{-1}(y)$ с разными знаками якобиана Jh_1. Таким образом подсчёт в ориентированном случае тоже даёт равенство степеней. $\square$

Для доказательства независимости степени от выбора точки $y \in M$ нам понадобится одно дополнительное понятие.

Определение 6.182. Семейство диффеоморфизмов $h_t : N \to M$ назовём *изотопией*, если оно гладко зависит и от параметра t, то есть даёт гладкое отображение

$$h : N \times [0,1] \to M.$$

Как и в определении 6.159, мы опять будем делать техническое предположение, что h_t гладко продолжается на все значения t по формуле $h_t = h_0$ при $t < 0$ и $h_t = h_1$ при $t > 1$. Иначе можно сказать, что изотопия — это гладкая гомотопия (определение 6.159) между диффеоморфизмами в классе диффеоморфизмов.

Лемма 6.183. *Если многообразие M связное, без края и $x, y \in M$, то существует изотопия $h_t : M \to M$ такая, что h_0 является тождественным отображением и $h_1(x) = y$.*

Доказательство. Достаточно работать в окрестности и показать возможность «сдвинуть» изотопно x в любую близкую точку так, чтобы носитель изотопии (множество точек где $h_t(x) \neq x$) остался в этой окрестности. Действительно, если изотопия h' сдвигает x в x', а изотопия h'' сдвигает x' в x'', то изотопия

$$h_t = h''_t \circ h'_t$$

равна тождественному отображению при $t = 0$ и сдвигает x в x'' при $t = 1$. Кроме того, если изотопия h_t сдвигает x в x', то изотопия

$$h'_t = (h_t)^{-1}$$

равна тождественному отображению при $t = 0$ и сдвигает x' в x при $t = 1$. Тогда при возможности сдвинуть изотопией любую точку $x' \in N$ в любую точку x'' в некоторой окрестности $U_{x'} \ni x'$, множество точек, в которые можно сдвинуть изотопией данную $x \in M$, открыто. Множество точек, в которую x нельзя сдвинуть изотопией, тоже открыто. Из связности M будет следовать, что $x \in M$ можно сдвинуть в любую другую точку M.

В одномерном случае требуемую локальную изотопию можно построить «на картинке» или с помощью явной формулы типа

$$g_t(x) = x + t\varphi(x),$$

где φ имеет маленький носитель около нуля, положительное значение в нуле и производную $|\varphi'(x)| < 1$; пусть $g_1(0) = a \neq 0$. Для размерности n в окрестности нуля положим

$$h_t(x_1, \dots, x_n) = (g_{t\psi(x_2,\dots,x_n)}(x_1), x_2, \dots, x_n),$$

где $\psi(x_2, \dots, x_n)$ равна единице в нуле и равна нулю за пределами малой окрестности нуля. Можно проверить, что построенная изотопия сдвигает начало координат в точку $(a, 0, \dots, 0)$, диффеоморфно двигая при этом её окрестность. Так можно сдвигать начало координат изотопией на немного в любом направлении и окрестность нуля будет таким образом достижима композицией не более n таких изотопий. ☐

Теорема 6.184. *Степень отображения $f : N \to M$ для связного многообразия без края M и компактного многообразия без края N не зависит от выбора регулярного значения в M. Если оба многообразия ориентированы, то степень считается со знаком, иначе она считается как чётность.*

Доказательство. Возьмём две регулярные точки $y', y'' \in M$ для отображения f. Рассмотрим, например, изотопию h_t из леммы 6.183 с $h_0(y') = y'$ и $h_1(y'') = y'$. Построим гомотопию $g_t(x) = h_t \circ f$ и применим теорему 6.181 к g_t и точке y'. Заметим, что при $t = 0$ мы получаем степень $g_0 = f$ в точке y', а при $t = 1$ мы получаем степень $h_1 \circ f$ в точке y', равную степени f в точке $(h_1)^{-1}(y') = y''$. Последнее верно, так как диффеоморфизм h_t при всех t имеет положительные якобианы во всех точках (при наличии ориентации M), поэтому умножение слева на него не меняет знак степени, а количество точек в прообразе тем более не меняется. Следовательно, степени f в y' и y'' равны. ☐

Другой способ определить степень отображения (в случае наличия ориентаций) даёт следующая задача:

Задача 6.185. Пусть $f : N \to M$ — гладкое собственное отображение ориентированных многообразий без края одной и той же размерности n, причём M связно. Докажите, что для всякой $\omega \in \Omega^n_c(M)$ выполняется

$$\int_N f^*\omega = \deg f \cdot \int_M \omega.$$

[[Посмотрите на ω с носителем в окрестности регулярного значения. Произвольную ω разбейте в сумму форм с маленькими носителями и с помощью леммы 6.91 сдвиньте их с критических значений на регулярные.]]

Задача 6.186. Пусть $f : N \to M$ — гладкое отображение компактных ориентированных многообразий с краем одной и той же размерности, причём $f(\partial N) = \partial M$ и M связно. Докажите, что в этом случае степень корректно определена и $\deg f = \deg f|_{\partial N}$.

[[Можно рассуждать геометрически (заодно доказав вариант утверждения для чётностей при отсутствии ориентации), а можно использовать предыдущую задачу и формулу Стокса, модифицировав рассуждения для многообразий с краем.]]

Из корректности определения степени отображения и свойства гомотопической инвариантности степени следует, например, что тождественное отображение компактного многообразия без края $\mathrm{id} : N \to N$ никогда не гомотопно его постоянному отображению в одну точку, так как первое имеет нечётную степень, а второе — нулевую. Причём оно также не гомотопно непрерывной гомотопией, так как непрерывную гомотопию можно было бы сгладить.

Задача 6.187. * Проверьте возможность приблизить непрерывное отображение между многообразиями $f : N \to M$ гладкими. Говорить о равномерном приближении поможет гладкое вложение $M \to \mathbb{R}^D$, а N для простоты считайте компактным.

[[Сначала сгладьте f как отображение $N \to \mathbb{R}^D$, сведя вопрос к локальному с помощью разбиения единицы и используя свёртку. Далее верните это гладкое отображение на M, например, с помощью результата задачи 6.267 (которая для евклидовой метрики в $\mathbb{R}^D$ сравнительно элементарна).]]

Задача 6.188. * Докажите, что всякое вложенное в $\mathbb{R}^3$ компактное двумерное многообразие без края S ориентируемо.

[[Попробуйте построить ориентацию с помощью непрерывного выбора нормали к данной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$. Заметьте, что если это не получится, то дополнение $\mathbb{R}^3 \setminus S$ связно. Для всякой точки $p \notin S$ рассмотрите отображение $g_p : S \to S^2$, заданное как $g_p(x) = (x-p)/|x-p|$. Докажите, что его степень (как остаток по модулю два) не меняется при небольших изменениях p. Рассмотрев близкие к S точки докажите, что степень g_p принимает оба значения остатков по модулю два и получите противоречие.]]

В частности, с помощью понятия степени отображения мы можем доказать следующую теорему:

Теорема 6.189 (Теорема Брауэра о неподвижной точке)**.** *Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый замкнутый шар. Всякое непрерывное отображение шара в себя $f : B \to B$ имеет неподвижную точку, то есть точку, в которой $f(x) = x$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать шар единичным с центром в начале координат. Сначала сделаем технические процедуры, которые сведут вопрос к вопросу о гладких отображениях. Предположим противное, тогда $|f(x) - x| \geqslant 2\varepsilon > 0$ для любого $x \in B$ из компактности. Заменив $f(x)$ на $(1-\varepsilon)f(x)$ мы всё ещё будем иметь $|f(x)-x| \geqslant \varepsilon$ и образ f будет содержаться в шаре радиуса $1-\varepsilon$. Теперь приблизим наше отображение гладким с точностью $\varepsilon/2$ (например, по теореме Стоуна–Вейерштрасса), образ шара B всё ещё будет строго внутри шара и у нас всё ещё останется оценка $|f(x) - x| \geqslant \varepsilon/2$.

Теперь рассмотрим отображение сферы $S = \partial B$ в себя, заданное по формуле

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}.$$

Это гладкое отображение гомотопно тождественному через гомотопию (так как образ f не пересекает сферу)

$$h_t(x) = \frac{x - tf(x)}{|x - tf(x)|}.$$

Также оно гомотопно постоянному отображению через гомотопию (так как $f(x) \neq x$ для любого x)

$$\tilde{h}_t(x) = \frac{tx - f(tx)}{|tx - f(tx)|}.$$

По теоремам 6.181 и 6.184 отображение g имеет одновременно степень 0 и 1, что невозможно. ☐

Приведённое доказательство теоремы Брауэра демонстирует возможности понятия степени отображения, но есть способы доказать её чуть более элементарными способами. Например, доказательство теоремы Брауэра можно вывести из следующего утверждения:

Теорема 6.190 (Отсутствие ретракции шара на его границу)**.** *Пусть сфера S^n рассматривается как край шара B^n. Не существует непрерывного отображения $f : B^n \to S^n$, такого что $f|_{S^n} = \mathrm{id}_{S^n}$.*

Доказательство через теорему Сарда. Аналогично предыдущему доказательству, можно сделать f гладким. Для его регулярного значения $y \in S^n$ мы знаем, что $f^{-1}(y)$ должно быть компактным одномерным многообразием с краем, но его краем может быть только точка y. Доказательство завершается наблюдением, что у компактного одномерного многообразия с краем край не может состоять из одной точки. Полезно заметить, что в этом доказательстве шар B^n можно заменить любым многообразием с краем. ☐

Доказательство через формулу Стокса. Рассмотрим форму $\lambda = x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Её дифференциал $d\lambda$ является стандартной формой объёма в $\mathbb{R}^n$ и даёт ненулевой объём рассматриваемого шара $v_n > 0$. Тогда можно написать с учётом условия и формулы Стокса

$$v_n = \int_{B^n} d\lambda = \int_{S^n} \lambda = \int_{S^n} f^*\lambda = \int_{B^n} d(f^*\lambda) = \int_{B^n} f^* d\lambda,$$

однако в выражении $f^*d\lambda$ форма $d\lambda$ рассматривается как элемент нулевого пространства $\Omega^n(S^{n-1})$ и, следовательно, равна нулю. Таким образом получаем противоречие, оказывается $v_n = 0$. ☐

Задача 6.191. Выведите теорему Брауэра из теоремы 6.190.

[[Сделайте так, чтобы отображение $f : B^n \to B^n$ шло строго внутрь шара и постройте ректракцию, рассматривая прямые $[x, f(x)]$, которые все невырождены при условии отсутствия неподвижных точек.]]

Некоторое развитие темы степени отображения и теоремы Брауэра предлагается в виде следующих задач.

Задача 6.192. Докажите, что всякое выпуклое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфно шару некоторой размерности и для непрерывных отображений $f : K \to K$ тоже верна теорема Брауэра.

[[Перейдите из $\mathbb{R}^n$ в аффинную оболочку K (наименьшее аффинное подпространство, содержащее K). Заметьте, что в этой аффинной оболочке K имеет непустую внутренность, поместите во внутренность начало координат, докажите, что для лучей из начала координат расстояние от начала координат до пересечения луча с ∂K будет непрерывно зависеть от луча. После этого выпишете гомеоморфизм явно.]]

Задача 6.193. Докажите, что для непрерывного отображения сферы в себя $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ либо найдётся x, такая что $f(x) = -x$, либо f сюръективно.

[[Попробуйте сделать гомотопию между f и тождественным отображением кратчайшим поворотом от $f(x)$ к x. Используйте тот факт, что степень корректно определена для всего лишь непрерывных отображений.]]

Задача 6.194. Докажите, что если степень непрерывного отображения $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ не равна $(-1)^{n-1}$, то f имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

[[Рассмотрите отображение, действующее по формуле $g(x) = -f(x)$, и примените предыдущую задачу.]]

Задача 6.195. Докажите, что если на сфере $\mathbb{S}^n$ есть всюду ненулевое касательное векторное поле, то n должно быть нечётным.

[[Один способ: построить из ненулевого векторного поля отображение сферы в себя без неподвижных точек, гомотопное тождественному. Другой способ: построить из ненулевого векторного поля гомотопию между тождественным отображением сферы и отображением $x \mapsto -x$.]]

Задача 6.196. Приведите пример всюду ненулевого касательного векторного поля на сфере нечётной размерности.

[[Рассмотрите сферу в $\mathbb{R}^{2n}$ как сферу в $\mathbb{C}^n$.]]

Задача 6.197. Классифицируйте непрерывные отображения окружности в себя $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ с точностью до гомотопии.

[[Рассмотрите стандартную параметризацию $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ и найдите непрерывное $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такое что $\tau \circ g = f \circ \tau$, изучите свойства таких g.]]

6.25. **Внутреннее умножение и производная Ли.** В этом разделе мы вернёмся от глобальных вопросов к локальным и рассмотрим операции, связывающие векторные поля и дифференциальные формы на одном и том же многообразии.

Определение 6.198. Определим операцию *внутреннего умножения* векторного поля на форму как

$$i_X\alpha(X_2, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k).$$

Эта операция поточечная, то есть значение результата в точке зависит только от вектора в точке и дифференциальной формы в точке. Иначе можно сказать, что при умножении X или α на функцию f выражение $i_X\alpha$ просто умножается на функцию f. Также внутреннее умножение по определению линейно по вектору и по форме. Взаимодействие внутреннего умножения с внешним описывается правилом Лейбница:

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha}\alpha \wedge i_X\beta,$$

которое означает, что внутреннее умножение на векторное поле является дифференцированием алгебры дифференциальных форм. Поясним, почему правило Лейбница верно. Из определения внутреннего умножения и внешнего умножения форм следует, что должна выполняться какая-то такая формула с точностью до знаков и множителей. Проверить знаки и множители по линейности достаточно на базисных элементах. Для этого заметим, что

$$i_{\frac{\partial}{\partial x_j}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = (-1)^{\ell-1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

если $j = i_\ell$ и равно нулю, если j не встречается среди i_ℓ. После этого проверка правила Лейбница становится понятной, неформально говоря, внутреннему умножению на $\frac{\partial}{\partial x_j}$ (дифференцированию) «надо добраться» до своего dx_j, причём при «перепрыгивании» через неподходящие dx_i знак выражения меняется. При внутреннем умножении на $\frac{\partial}{\partial x_j}$ произведения базисных форм будут возможны три варианта: dx_j найдётся в первом сомножителе; dx_j найдётся во втором сомножителе; или вообще нигде не найдётся. Во всех трёх случаях правило Лейбница верно.

Задача 6.199. Найдите, что делает с дифференциальными формами операция $i_X e_\alpha + e_\alpha i_X$, где i_X — внутреннее умножение на вектор X, а e_α — внешнее умножение на линейную форму α.

В итоге для всякого векторного поля X на многообразии M у нас получается операция $i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, которую мы по определению считаем нулевой на $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Определим ещё более важную в дифференциальной геометрии операцию дифференцирования, которая не является поточечной (так как содержит производные в координатном представлении):

Определение 6.200. Определим *производную Ли вдоль векторного поля* X на дифференциальных формах как «суперкоммутатор»

$$L_X = i_X d + d\, i_X.$$

Эта операция линейна относительно сложения и умножения на константы, но при умножении X или формы на функцию эта функция не выносится за скобки, а в выражении возникает её дифференциал.

Задача 6.201. Пусть f — гладкая функция, а X — векторное поле. Выразите действие L_{fX} на дифференциальную форму через действие L_X на ту же форму.

Правило Лейбница для производной Ли следует из правила Лейбница для внешнего дифференцирования и правила Лейбница для внутреннего дифференцирования. В итоге получается выражение без знаков (проверьте это самостоятельно):

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta.$$

Проверим, что такое производная Ли функции (формы нулевой степени) по определению

$$L_X f = i_X df + d(i_X f) = i_X df = df(X) = X(f),$$

то есть на функциях у нас получается уже известная нам естественная операция дифференцирования функции по векторному полю. Полезно также посмотреть, что получается на линейных формах, равных дифференциалам функции

$$L_X df = i_X d(df) + d(i_X df) = d(X(f)),$$

это можно описать как коммутирование операции L_X с внешним дифференциалом d для функций. С учётом формулы Лейбница для L_X, действие L_X на функциях и их дифференциалах полностью определяет его действие на формах произвольной степени.

Задача 6.202. Докажите, что производная Ли вдоль векторного поля L_X коммутирует с внешним дифференцированием d для форм любой степени.

[[Проще всего это вывести непосредственно из определения.]]

На самом деле производная Ли имеет достаточно простой смысл с точки зрения дифференциальных уравнений, см. обсуждение в следующих разделах и теорему 6.219. Но мы её определяем иначе, чтобы формально не опираться на дифференциальные уравнения до их более внимательного изучения.

Определение производной Ли одного векторного поля вдоль другого векторного поля на одном и том же многообразии M можно сделать через дифференциальные уравнения (по формуле из теоремы 6.219), но мы определим его иначе. Мы воспользуемся двойственностью между касательным и кокасательным пространством в точке и определим векторное поле L_XY (*производная Ли Y по X*) через его каноническое произведение (в смысле двойственных линейных пространств в каждой точке) на некоторую линейную форму $\alpha \in \Omega^1(M)$. По сути мы потребуем выполнения формулы Лейбница для производной Ли вдоль X значения $\alpha(Y) = i_Y\alpha$:

$$X(\alpha(Y)) = L_X(\alpha)(Y) + \alpha(L_XY).$$

Распишем эту формулу подробнее через определение $L_X(\alpha)$:

$$\alpha(L_XY) = i_Xd(i_Y\alpha) - i_Yd(i_X\alpha) - i_Yi_Xd\alpha \tag{6.12}$$

и покажем, что это можно считать определением L_XY. Можно (и полезно в качестве упражнения) проверить, что правая часть умножается на функцию f, если α умножается на f. Следовательно, зная выражение в правой части для базисных форм, $dx_i(L_XY)$, мы для произвольной формы $\alpha = \sum_i a_i dx_i$ мы выпишем его в виде

$$\alpha(L_XY) = \sum_i a_i dx_i(L_XY).$$

Это означает, что (6.12) на самом деле корректно определяет векторное поле L_XY в каждой точке p как линейный функционал на T_p^*M, а координаты L_XY в данной системе координат равны

$$(L_XY)_i = dx_i(L_XY) = i_Xd(i_Ydx_i) - i_Yd(i_Xdx_i).$$

Задача 6.203. Доведите предыдущую формулу до полностью координатного выражения L_XY через компоненты $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

[[В итоге должно получиться

$$\left[\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i,j} Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

]]

Если мы применим векторное поле L_XY как дифференцирование функции f, то мы получим выражение

$$(L_XY)f = df(L_XY) = i_Xd(i_Ydf) - i_Yd(i_Xdf) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Поэтому с точки зрения дифференциальных операторов на функциях производная Ли L_XY — это коммутатор векторных полей $[X, Y]$ (то есть коммутатор соответствующих им дифференциальных операторов) с очевидным свойством $[X, Y] = -[Y, X]$. Это наблюдение очень полезно, например из него следует другое характеристическое свойство коммутатора, *тождество Якоби*:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0,$$

которое проще всего проверить по его действию на функции. Раскрытие коммутаторов даст нам 12 выражений, в которых 6 перестановок векторных полей действуют на функцию и каждая из них встречается два раза с разными знаками.

Задача 6.204. Пусть векторное поле X в $\mathbb{R}^n$ задано так, что в точке p находится вектор Ap, где $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, аналогично пусть есть векторное поле Y, заданное как $p \mapsto Bp$. Посчитайте коммутатор X и Y.

[[Можно воспользоваться координатной формулой.]]

Задача 6.205. Докажите формулу для векторных полей X, Y и дифференциальной формы α

$$i_{[X,Y]}\alpha = di_X i_Y\alpha + i_X di_Y\alpha - i_Y di_X\alpha - i_Y i_X d\alpha.$$

[[Начните с формулы Лейбница $L_X(i_Y\alpha) = i_{L_X Y}\alpha + i_Y L_X\alpha$, которую наверное проще всего объяснить с помощью теоремы 6.219.]]

Задача 6.206. Проверьте, что для неоднородных линейных дифференциальных операторов первого порядка, которые в координатах имеют вид

$$f \mapsto X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} + X_0 f$$

тоже определен коммутатор и выполняется тождество Якоби.

[[Проверьте, что после коммутирования производных второго порядка не будет.]]

Следующая задача показывает один из способов обобщения формулы Гаусса–Остроградского на случай произвольного многообразия.

Задача 6.207 (Теорема о дивергенции). Пусть на многообразии M фиксирована нигде не нулевая форма $\nu \in \Omega^n(M)$ при $n = \dim M$. Интегрирование этой формы задаёт некоторое понятие объёма (меры) на многообразии. Тогда дивергенцию векторного поля X относительно этого объёма можно определить как

$$L_X\nu = (\operatorname{div}_\nu X)\nu.$$

Как написать интеграл по многообразию с краем

$$\int_M (\operatorname{div}_\nu X)\nu$$

через интеграл по краю ∂M?

[[Вспомните формулу для производной Ли дифференциальной формы и примените формулу Стокса.]]

Следующие задачи дают вводные сведения про гамильтоновы векторные поля на *симплектических многообразиях*, которые являются одним из основных объектов изучения классической механики. Симплектическое многообразие — это многообразие M с формой $\omega \in \Omega^2(M)$, которая замкнута ($d\omega = 0$) и невырожденна как билинейная форма, то есть если для некоторого вектора $X \in T_pM$ оказывается $\omega(X, Y) = 0$ для всех $Y \in T_pM$, то обязательно должно быть $X = 0$.

Задача 6.208. Докажите, что для всякой гладкой функции $H : M \to \mathbb{R}$ (*гамильтониана*) на симплектическом многообразии найдётся единственное *гамильтоново векторное поле* X_H со свойством

$$i_{X_H}\omega = -dH.$$

[[Обратите внимание, что невырожденная билинейная форма устанавливает изоморфизм между векторным пространством и его двойственным.]]

Задача 6.209. Докажите, что в условия предыдущей задачи

$$X_H(H) = 0, \quad L_{X_H}\omega = 0.$$

[[Проверьте всё это по определению.]]

Задача 6.210. Докажите, что на симплектическом многообразии операция скобки Ли векторных полей может быть поднята (в смысле сопоставления функции её гамильтонова векторного поля) до операции *скобки Пуассона* функций со свойствами

$$\{f,g\} = -\{g,f\}, \quad \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0, \quad [X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}.$$

[[Посмотрите на выражение $\omega(X_f, X_g) = X_f g = -X_g f$ и проверьте равенства

$$d(X_f g) = L_{X_f} dg = -L_{X_f} i_{X_g}\omega = -i_{L_{X_f} X_g}\omega - i_{X_g} L_{X_f}\omega = -i_{[X_f,X_g]}\omega,$$

возможно, эти равенства проще понять из геометрического смысла производной Ли в смысле теоремы 6.219.]]

6.26. **Интегрирование векторных полей и дифференциальные уравнения.** В этом разделе мы начнём рассматривать «интегрированием» векторных полей, на самом деле это предмет изучения науки о дифференциальных уравнениях. Дифференциальное уравнение на многообразии — это, при наличии векторного поля X на многообразии M и точки $p \in M$, нахождение такой *интегральной кривой* $\gamma : (a,b) \to M$, для которой

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$$

и $\gamma(t_0) = p$ при данном $t_0 \in (a,b)$. Здесь производную (скорость) кривой $\gamma'(t)$ можно определить как прямой образ вектора $\frac{\partial}{\partial t}$ в точке $\gamma(t)$, или как дифференцирование функций на M в точке $\gamma(t)$ по формуле

$$f \mapsto \frac{d}{dt} f(\gamma(t)).$$

На самом деле нетрудно выписать всё это в координатах и убедиться, что локально это и есть нахождение решения автономного дифференциального уравнения. Если же векторному полю X разрешить зависеть от времени t, то это будет нахождение решения неавтономного дифференциального уравнения.

Для полноты изложения мы приведём стандартные теоремы, описывающие локальную структуру решения дифференциального уравнения. Будем работать в области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и запишем уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x(t), t),$$

где $f : U \times (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$) — некоторое отображение (вектор-функция) на открытом множестве, в терминах дифференциальной геометрии это на самом деле зависящее от времени векторное поле. Переменную t будем называть «время», а производную кривой $x : (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \to U$ по времени будем назвать «скорость» и обозначать $\dot{x}$. Будем решать для дифференциального уравнения задачу Коши с начальным условием

$$x(t_0) = a \in U,$$

в некоторый момент времени, который в конкретных рассуждениях без ограничения общности можно считать нулевым, и будем пытаться найти решение хотя бы для времени $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ при каком-то маленьком $\varepsilon > 0$. Наличие решений гарантирует:

Теорема 6.211 (Существование и единственность решений дифференциальных уравнений). *Если f непрерывно по всем аргументам и удовлетворяет условию Липшица по x в окрестности a, то решение с данным начальным условием существует и единственно в некотором диапазоне $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать $t_0 = 0$ и перепишем уравнение в интегральном виде

$$x(t) = a + \int_0^t f(x(s), s)\, ds,$$

для непрерывных $x(t)$ очевидно, что оно эквивалентно исходному дифференциальному уравнению. Удобно ввести обозначение для рассматриваемого интегрального оператора, действующего на кривую $y : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ (ε будет подобрано позднее),

$$I[y](t) = a + \int_0^t f(y(s), s)\, ds.$$

Из условия Липшица

$$|f(x', t) - f(x'', t)| \leqslant L|x' - x''|$$

мы можем получить свойство «сжатия» интегрального оператора. Если положить для отображений $y', y'' : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$

$$\|y' - y''\|_C = \sup_{|t|<\varepsilon} |y'(t) - y''(t)|,$$

то

$$\|I[y'] - I[y'']\|_C \leqslant \int_0^t |f(y'(s), s) - f(y''(s), s)|\, ds \leqslant L\varepsilon\|y'' - y'\|_C.$$

Мы выберем ε настолько малым, чтобы $L\varepsilon < 1/2$ в δ-окрестности a, которая лежит в области определения U, и на которой действует константа Липшица L. Это гарантирует сжатие для y', y'' со значениями в этой δ-окрестности,

$$\|I[y'] - I[y'']\|_C \leqslant 1/2\|y'' - y'\|_C.$$

Для сохранения образа оператора I в той же окрестности также введём «ограничение скорости», чтобы в рассматриваемой области при $|t| < \varepsilon$ выполнялось $|f(x, t)| \leqslant M$ и уменьшим ε, чтобы выполнялось $M\varepsilon < \delta/2$.

Будем решать методом последовательных приближений, как в доказательстве теоремы об обратной функции 6.24, начнём с

$$x_1(t) \equiv a$$

и будем брать

$$x_k = I[x_{k-1}].$$

Из ограничения скорости следует

$$\|x_2 - x_1\|_C \leqslant \delta/2,$$

тогда далее по свойству сжатия мы будем иметь по индукции

$$\|x_{k+1} - x_k\|_C \leqslant 1/2\|x_k - x_{k-1}\|_C \leqslant \delta 2^{-k}.$$

Это означает, что все значения $x_k(t)$ будут оставаться в δ-окрестности a, свойство сжатия будет оставаться применимым и будет иметь место равномерная по $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ сходимость $x_k(t) \to x(t)$. Равномерный предел непрерывных отображений будет непрерывным, и переходя к равномерному пределу в рекуррентной формуле, мы получим

$$x = I[x].$$

Это означает, что мы нашли решение. Единственность решения также следует из свойства сжатия. Если у нас есть два решения

$$x' = I[x'], \quad x'' = I[x''],$$

то по ограничению скорости они не выходят за δ-окрестность a (рассмотрение первого момента выхода даёт противоречие с ограничением скорости). Тогда по свойству сжатия

$$\|x' - x''\|_C = \|I[x]' - I[x'']\|_C \leqslant 1/2\|x' - x''\|_C,$$

что влечёт $\|x' - x''\|_C = 0$ и гарантирует равенство двух решений. □

Аналогично доказывается усиленный вариант для линейных уравнений:

Теорема 6.212 (Существование и единственность решений линейного уравнения)**.** *Решение линейного уравнения*

$$\dot{x} = A(t)x(t) + b(t)$$

с непрерывно зависящими от времени линейным оператором $A(t)$ и вектором $b(t)$, при любом начальном условии $x(t_0) = a$ существует и единственно на любом промежутке времени, на котором A и b непрерывны.

Здесь непрерывная зависимость оператора понимается в том смысле, что коэффициенты его матричного представления непрерывно зависят от t. В случаях операторов в бесконечномерных банаховых пространствах непрерывность будет пониматься в смысле нормы оператора, но сейчас это не важно.

Доказательство. Существование и единственность для ε-окрестности некоторого момента времени t_0 можно доказать по основной теореме. Приведём похожее на предыдущее рассуждение, работающее для немаленьких промежутков времени. Рассмотрим без ограничения общности отрезок $[0, T]$, на котором из компактности отрезка $\|A(t)\| \leqslant L$ и $|b(t)| \leqslant M$, и будем искать решение с начальным условием $x(0) = a$. Возьмём те же приближения

$$x_1(t) \equiv a, \quad x_{k+1}(t) = a + \int_0^t (A(s)x_k(s) + b(s))\ ds.$$

Тогда индукцией по k доказывается оценка

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leqslant L^{k-1}(L|a| + M)\frac{t^k}{k!}$$

и следующая из неё

$$|x_k(t)| \leqslant |a|e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt} - 1).$$

Из этих оценок следует, что на $[0, T]$ последовательность приближений равномерно и быстрее геометрической прогрессии сходится к решению уравнения.

Для доказательства единственности можно заметить, что из условия

$$|x'(t) - x''(t)| \leqslant \int_0^t L|x'(s) - x''(s)|\ ds$$

по индукции выводятся оценки

$$|x'(t) - x''(t)| \leqslant \|x' - x''\|_C \frac{L^n t^n}{n!},$$

которые при $n \to \infty$ и фиксированном t стремятся к нулю. □

Изучим теперь зависимость решения от параметров и начальных условий, а именно сформулируем задачу

$$\dot{x} = f(x(t), t, p), \quad x(0) = a \in U,$$

где p пробегает некоторое метрическое пространство параметров P и правая часть $f(x, t, p)$ непрерывна и по p тоже.

Теорема 6.213 (Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных условий)**.** *Если $f(x,t,p)$ непрерывна по всем аргументам, удовлетворяет условию Липшица по x в окрестности a_0 равномерно по $t \in (t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0)$ и $p \in P$, равномерно ограничена при всех значениях параметра $p \in P$, то решение существует и единственно в некотором диапазоне $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, при значениях a в некоторой окрестности $U(a_0)$ и любом $p \in P$. Оно непрерывно зависит от $a \in U(a_0)$ и $p \in P$.*

Доказательство. Опираясь на рассуждения в доказательстве теоремы существования и единственности, мы применим ту же процедуру с

$$x_1(t,a,p) \equiv a$$

и

$$x_{k+1}(t,a,p) = a + \int_0^t f(x_k(s,a,p),s,p)\,ds,$$

Условия теоремы позволяют нам выбрать константы M и L в некоторой окрестности $U_{2\delta}(a_0)$ при всех $p \in P$ и иметь равномерное по параметру ограничение скорости и равномерное по параметру свойство сжатия. Оценки на отклонение итераций от a (не более чем на δ) позволят нам работать с любым начальным условием $a \in U_\delta(a_0)$, исключить выход итераций из $U_{2\delta}(a_0)$ и иметь равномерную зависимость от a. Тогда все $x_k(t,a,p)$ будут непрерывно зависеть от a и p и сходиться как минимум со скоростью геометрической прогрессии при $k \to \infty$, а значит в равномерном пределе эта непрерывная зависимость сохранится. ☐

Мы доказали непрерывную зависимость решения дифференциального уравнения от начальных условий и параметров; но на практике часто требуется непрерывно дифференцируемая несколько раз зависимость, при соответствующих ограничениях на правую часть дифференциального уравнения f, и мы собираемся её установить. В качестве области определения f будем рассматривать некоторый шар U, чтобы вместе с любыми двумя точками он содержал отрезок, соединяющий их (свойство выпуклости), это будет нужно для свободного применения леммы 6.22 о выражении приращения непрерывно дифференцируемого отображения.

Теорема 6.214 (Дифференцируемая зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных условий)**.** *Если правая часть дифференциального уравнения $f(x,t,p)$ непрерывна по времени в диапазоне $(t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0)$ и непрерывно дифференцируемо зависит от $x \in U$ и параметра p в некотором открытом множестве $P \subseteq \mathbb{R}^m$, то решение дифференциального уравнения непрерывно дифференцируемым образом зависит от параметров и от начальных условий в некотором диапазоне $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$.*

Доказательство. В этом случае каждый параметр p можно считать дополнительной координатой решения, дифференциальное уравнение для которой имеет вид $\dot p = 0$. Непрерывная дифференцируемость правой части по x и p тогда гарантирует локальную липшицевость по этим переменным (например, в силу леммы 6.22) и рассмотрение зависимости от параметров сводится к рассмотрению зависимости от начального условия. Так что мы опять рассматриваем уравнение

$$x(t) = a + \int_0^t f(x(s),s)\,ds$$

и изучаем зависимость решения от a. После сдвига координат мы можем считать, что мы начинаем с $a = 0$ и сравниваем соответствующее решение $x_0(t)$ с решением $x_h(t)$

для $a = hv$, где v будет фиксированным вектором, а h — переменным параметром. Тогда по теореме 6.213 $x_h(t)$ непрерывно зависит от h и

$$x_h(t) = hv + \int_0^t f(x_h(s), s)\ ds, \quad x_0(t) = \int_0^t f(x_0(s), s)\ ds.$$

введя обозначение $y_h(t) = \frac{x_h(t)-x_0(t)}{h}$, по лемме 6.22 для приращения f от $x' = x_0(t)$ до $x'' = x_h(t)$ получим

$$\begin{aligned} y_h(t) = \frac{x_h(t) - x_0(t)}{h} &= v + \int_0^t \frac{f(x_h(s), s) - f(x_0(s), s)}{h}\ ds = \\ &= v + \int_0^t G(x_0(s), x_h(s), s) \left(\frac{x_h(s) - x_0(s)}{h}\right)\ ds = v + \int_0^t G(x_0(s), x_h(s), s)(y_h(s))\ ds \end{aligned}$$

с некоторыми $G(x', x'', t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, непрерывно зависящими от x', x'', t. Заметим, что зависимость от любого параметра (t в данном случае) в лемме 6.22 будет непрерывной в силу явной формулы в её доказательстве. Полученное интегральное соотношение можно понимать как линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{y}_h = H(t, h)y_h \tag{6.13}$$

с начальным условием $y_h(0) = v$ и линейным оператором

$$H(t, h) = G(x_0(t), x_h(t), t),$$

$H(t, h)$ тогда непрерывно зависит от времени и от h. При этом лемма 6.22 показывает, что $H(t, h)$ непрерывен и определён и при $h = 0$, а также

$$H(t, 0) = D_x f(x_0(t), t),$$

где $D_x f$ обозначает производную отображения f по первому аргументу. По теоремам 6.211 и 6.213 решения уравнения (6.13) непрерывно зависят от параметра h вплоть до $h = 0$, и предельное значение

$$y_0(t) = \lim_{h\to 0} y_h(t) = \frac{\partial x_h(t)}{\partial h}\Big|_{h=0}$$

удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{y}_0 = D_x f(x_0(t), t)y_0.$$

Таким образом производная решения по начальному условию существует, а так как она сама является решением явного линейного дифференциального уравнения, правая часть которого непрерывно зависит от $x_0(t)$, в свою очередь непрерывно зависящего от начальных условий, то от начальных условий производная тоже зависит непрерывно по теореме 6.213. $\square$

Так как рассуждения в предыдущей лемме заканчиваются явным уравнением для производной по начальному условию, то при наличии более чем однократной дифференцируемости правой части уравнения мы получаем соответствующую дифференцируемость решений, что можно сформулировать как

Следствие 6.215. *Если правая часть дифференциального уравнения непрерывна по времени и m раз непрерывно дифференцируемо зависит от x и параметров, то и решение уравнения m раз непрерывно дифференцируемо зависит от параметров и начальных условий.*

6.27. **Интегрирование векторных полей на многообразии, геометрический смысл производной Ли.** На этом стандартный материал про дифференциальные уравнения заканчивается и мы продолжаем рассуждать в терминах гладких многообразий и гладких векторных полей.

Теорема 6.216 (Выпрямление векторного поля). *Если векторное поле X в точке $p \in M$ не равно нулю, то в некоторой криволинейной системе координат $x_1, \dots, x_n$ в окрестности точки p оно может быть приведено к виду $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.*

Доказательство. Рассмотрим гладкую функцию y в некоторой окрестности p, для которой $X(y) \neq 0$ в p и $y(p) = 0$, условие $X(y) \neq 0$ будет сохраняться в некоторой окрестности p. Дополним y до системы координат в $y, x_2, \dots, x_n$ и пока будем работать в некоторой окрестности p в этих координатах. Рассмотрим решения дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = X_{x(t)}$$

с начальным условием $x(0) = (0, x_2, \dots, x_n)$, обозначим также гиперплоскость $Z = \{y = 0\}$. В итоге решение этого уравнения гладко зависит от начальных условий $x_2, \dots, x_n$ и времени t, которое мы возьмём за координату x_1 вместо y. Это действительно координаты в достаточно малой окрестности p, так как отображение, порождаемое решениями дифференциального уравнения,

$$(t, x_2, \dots, x_n) \mapsto x(t, (0, x_2, \dots, x_n))$$

имеет невырожденный дифференциал в нуле; его частные производные по $x_2, \dots, x_n$ дают базис к T_pZ, а частная производная по $x_1 = t$ равна $X(p) \notin T_pZ$ (так как $X(y) \neq 0$).

В построенной системе координат $(x_1, \dots, x_n)$, очевидно, решения уравнения

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) \Leftrightarrow \dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 0, \dots, \dot{x}_n = 0$$

с произвольными начальными условиями (когда уже не обязательно $x_1 \equiv t$) имеют вид

$$x_1 = t + \mathrm{const}, x_2 = \mathrm{const}, \dots x_n = \mathrm{const},$$

а само векторное поле равно $\frac{\partial}{\partial x_1}$. □

Возвращаясь к глобальному интегрированию векторных полей на многообразиях, можно изучить продолжение интегральной кривой векторного поля в полезном для нас частном случае.

Теорема 6.217. *Для (возможно зависящего от времени) векторного поля X с компактным носителем на многообразии без края M интегральные кривые продолжаются по времени неограниченно в обе стороны. Под компактным носителем имеется в виду, что X равно нулю за пределами некоторого компакта $K \subseteq M$ во все моменты времени.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть продолжение при положительном t. Рассмотрим задачу Коши для данного векторного поля с начальным условием $\gamma(0) = p$. У неё могут существовать два решения $\gamma_1 : [0, t_1) \to M$ и $\gamma_2 : [0, t_2) \to M$, определённые на разных полуинтервалах. Решения γ_1 и γ_2 будут устроены так, что γ_2 будет продолжением γ_1 при $t_1 < t_2$. Действительно, если это не так, то достаточно рассмотреть $t^* \in [0, t_1)$ как точную нижнюю грань моментов времени, где решения различаются. Из открытости множества моментов времени, на котором решения различаются, мы делаем вывод, что в t^* они ещё не различались. Тогда можно использовать теорему существования и единственности, чтобы показать, что γ_1 и γ_2 на самом деле не должны различаться ещё некоторое время после t^*, приведя таким образом к противоречию с выбором t^*.

Теперь рассмотрим объединение всех промежутков $[0, t)$, на которые продолжается интегральная кривая $\gamma : [0, t) \to M$ с заданным начальным условием $\gamma(0) = p$, это будет некоторый промежуток $[0, T)$. По сказанному в начале доказательства, на $[0, T)$ корректно определено продолжение интегральной кривой γ с начальным условием $\gamma(0) = p$ и это максимальный промежуток, на который решение можно продолжить. Пусть значение T конечно, рассмотрим один из частичных пределов p' кривой $\gamma(t)$ при $t \to T - 0$; частичный предел существует, так как либо решение является постоянным и доказывать нечего, либо решение полностью находится в компактном носителе K векторного поля.

Будем работать в координатной карте вокруг p'. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра показывает, что найдутся окрестности $U(p') \subset V(p')$ и числа $0 < \delta < \varepsilon$, такие что при попадании интегральной кривой в $U(p')$ в момент времени в пределах $(T - \delta, T + \delta)$, в моменты времени, отличающиеся от момента попадания на ε, интегральная кривая будет продолжаться в $V(p')$. Но так как p' — предельная точка и кривая попадает в $U(p')$ в моменты времени сколь угодно близкие к T, то она будет продолжаться и за момент времени T, что противоречит выбору T. □

Конечно, векторные поля с компактным носителем редко встречаются в реальной жизни, но нам пока хватит и такого случая. Более реалистическую ситуацию бесконечного продолжения решений дифференциального уравнения можно найти в задаче 6.260. По предыдущей теореме можно сопоставить векторному полю с компактным носителем семейство диффеоморфизмов $\varphi_{t,t_0} : M \to M$, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{d}{dt}\varphi_{t,t_0}(x) = X_{\varphi_{t,t_0}(x),t}, \varphi_{t_0,t_0} = \mathrm{id}_M\,.$$

Если векторное поле зависит от времени гладко, то и φ_{t,t_0} будет зависеть от времени гладко. Смысл $\varphi_{t,t_0}(x)$ можно иначе объяснить как нахождение интегральной кривой $\gamma(t)$ векторного поля X с начальным условием $\gamma(t_0) = x$ и определение $\varphi_{t,t_0}(x) = \gamma(t)$.

Теорема 6.218. *Для возможно зависящего от времени векторного поля X на многообразии без края M и соответствующих ему диффеоморфизмов φ_{t,t_0} выполняется*

$$\varphi_{t_2,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_2,t_0}.$$

Доказательство. Посмотрим на действия левой и правой части на точку $x_0 \in M$. Точка $x_1 = \varphi_{t_1,t_0}(x_0)$ — это положение решения дифференциального уравнения в момент времени t_1 при условии, что в момент времени t_0 оно находилось в точке x_0. Точка $x_2 = \varphi_{t_2,t_1}(x_1)$ тогда соответствует положению того же решения дифференциального уравнения в момент времени t_2. Но тогда $x_2 = \varphi_{t_2,t_0}(x_0)$ по определению и формула верна в x_0. □

В частности, выполняется

$$\varphi_{t_0,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_0,t_0} = \mathrm{id}_M, \quad \varphi_{t_1,t_0} \circ \varphi_{t_0,t_1} = \varphi_{t_1,t_1} = \mathrm{id}_M,$$

и это показывает, что φ_{t_1,t_0} имеет гладкое обратное отображение и действительно является диффеоморфизмом.

В случае не зависящего от времени векторного поля, если $\gamma(t)$ является решением уравнения, то $\gamma(t+s)$ тоже является решением как функция от t. Следовательно,

$$\varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_1+s,t_0+s}$$

при любом s, то есть диффеоморфизм зависит только от разности $t_1 - t_0$. Тогда удобно положить

$$\varphi_t = \varphi_{t,0}$$

и утверждение Теоремы 6.218 тогда переписывается как

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}.$$

В таком случае (не зависящее от времени векторное поле) говорят, что векторное поле порождает *однопараметрическую группу диффеоморфизмов*.

С понятием однопараметрической группы диффеоморфизмов связана геометрическая интерпретация производной Ли векторного поля, которую достаточно удобно считать определением производной Ли.

Теорема 6.219. *Производная Ли может быть определена с помощью соответствующей полю X однопараметрической группы $\{\varphi_t\}$ диффеоморфизмов для дифференциальной формы α или другого векторного поля Y как поточечный предел*

$$L_X\alpha = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\alpha - \alpha}{t} = \frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha|_{t=0},\quad L_XY = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*Y - Y}{t} = \frac{d}{dt}\varphi_t^*Y|_{t=0},$$

где обратный образ векторного поля при диффеоморфизме определяется как обратное отображение к прямому образу.

Конечно, в формулировке теоремы возникает вопрос определённости φ_t. Если нас интересует выражение в окрестности точки $p \in M$, то мы можем домножить X на гладкую функцию ψ с компактным носителем (из леммы 6.17), которая в этой окрестности равна 1, превратив X в поле с компактным носителем и не изменив его значения в окрестности p. Тогда порождённая полем однопараметрическая группа диффеоморфизмов будет корректно определена и выражения можно понимать именно в таком смысле. Так как в выражениях используется переход к пределу $t \to 0$, то они на самом деле не будут зависеть от конкретного выбора ψ.

Доказательство теоремы 6.219. Эти формулы можно проверить в координатах напрямую, но мы опишем несколько более интеллектуальную процедуру. Если поле X в некоторой точке ненулевое, то его можно выпрямить до $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ в окрестности точки и проверить равенства в явном виде, заметив, что формы α достаточно рассматривать только нулевой и первой степени, так как обе части равенства удовлетворяют правилу Лейбница без знаков относительно внешнего умножения.

Для форм нулевой степени (функций) утверждение очевидно, для первой степени получаем

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\alpha - \alpha}{t} = \frac{d}{dt}\sum_i a_i(x + te_1)dx_i = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_1}dx_i.$$

тогда как

$$i_{e_1}d\alpha + d(i_{e_1}\alpha) = i_{e_1}\sum_{i,j}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_i + da_1 = \sum_i\frac{\partial a_i}{\partial x_1}dx_i - \sum_j\frac{\partial a_1}{\partial x_j}dx_j + \sum_j\frac{\partial a_1}{\partial x_j}dx_j = \sum_i\frac{\partial a_i}{\partial x_1}dx_i.$$

Аналогично можно проверить явно выражение для $L_{\frac{\partial}{\partial x_1}}Y$, или сослаться на формулу Лейбница для $L_X(\alpha(Y))$.

Посмотрим теперь на точки, где X равно нулю. В правой части формулы выражение $\varphi_t^*\alpha$ или φ_t^*Y гладко зависит и от точки многообразия и от параметра t, поэтому и предел в правой части просто является производной $\varphi_t^*\alpha$ или φ_t^*Y по параметру t при $t = 0$, и следовательно гладко зависит от точки многообразия и от t. Поэтому на точки, в любой окрестности которых поле не является тождественно нулевым, равенства продолжаются по непрерывности. Для прочих точек, в некоторой окрестности которых поле тождественно равно нулю, обе части равенств очевидно нулевые. ∎

Геометрический смысл производной Ли позволяет также прояснить геометрический смысл дивергенции векторного поля относительно формы объёма. При наличии на многообразии M размерности n нигде не нулевой формы $\nu \in \Omega^n(M)$ будем измерять объёмы компактных множеств (это техническое ограничение, чтобы объёмы были конечными) как

$$\mathrm{vol}_\nu K = \int_K \nu.$$

Напомним также, что дивергенция определяется как $L_X\nu = (\mathrm{div}_\nu X)\nu$.

Теорема 6.220 (Геометрический смысл дивергенции). *Пусть на ориентированном многообразии M мера определена как интеграл от некоторой всюду ненулевой формы $\nu \in \Omega^n(M)$. Тогда для дивергенции векторного поля X относительно объёма ν и всякого компактного $K \subseteq M$ имеет место формула*

$$\int_K (\mathrm{div}_\nu X)\nu = \frac{d}{dt}\,\mathrm{vol}_\nu\,\varphi_t(K)|_{t=0},$$

где φ_t — соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов.

Заметим, что из теоремы о непрерывной зависимости от параметра следует, что $\varphi_t(K)$ действительно определено при достаточно малых t.

Доказательство. Напишем по определению дивергенции и с переменой порядка интегрирования и дифференцирования

$$\int_K (\mathrm{div}_\nu X)\nu = \int_K L_X\nu = \int_K \frac{d}{dt}\varphi_t^*\nu|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_K \varphi_t^*\nu|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(K)} \nu|_{t=0} = \frac{d}{dt}\,\mathrm{vol}_\nu\,\varphi_t(K)|_{t=0}.$$

□

Далее мы приводим разнообразные классические факты об интегрировании векторных полей в виде задач, подробности по этим вопросам можно найти в стандартных учебниках дифференциальной геометрии.

Задача 6.221. Докажите, что скобка Ли векторных полей X, Y с соответствующими группами диффеоморфизмов φ_t, ψ_t является производной при $t = 0$ семейства диффеоморфизмов $\psi_{-\sqrt{t}}\varphi_{-\sqrt{t}}\psi_{\sqrt{t}}\varphi_{\sqrt{t}}$.

[[Можно выпрямить одно из векторных полей и проверить тождество в координатах.]]

Задача 6.222. Пусть векторные поля $X_1, \ldots, X_k$ линейно независимы в точке p многообразия M. Докажите, что если какая-то скобка $[X_i, X_j]$ в точке p не является линейной комбинацией $X_1, \ldots, X_k$ в какой-то точке, то не может быть k-мерных подмногообразий $N \subset M$, $N \ni p$, у которых $TN = \langle X_1, \ldots, X_k\rangle$ в окрестности p.

[[Проверьте, что если два векторных поля касаются N в некоторой окрестности p, то их коммутатор тоже касается N.]]

Задача 6.223. * Пусть векторные поля $X_1, \ldots, X_k$ линейно независимы в окрестности точки p многообразия M и всякая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через $X_1, \ldots, X_k$ с коэффициентами-функциями. Пусть поле X_i из нашего списка порождает однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ^t. Докажите, что

$$\varphi^t_*\langle X_1, \ldots, X_k\rangle = \langle X_1, \ldots, X_k\rangle$$

в окрестности p для достаточно малых t.

[[Используйте утверждение $\frac{d}{dt}\varphi^t_*Y = -[X_i, \varphi^t_*Y]$.]]

Задача 6.224 (Теорема Фробениуса). Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_k$ линейно независимы в окрестности точки p многообразия M и всякая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через $X_1, \dots, X_k$ с коэффициентами-функциями. Докажите, что в некоторой окрестности p найдётся подмногообразие $N \subset M$ размерности k, проходящее через p и у которого $TN \subseteq \langle X_1, \dots, X_k \rangle$.

[[Рассмотрите однопараметрические семейства диффеоморфизмов φ_i^t для соответствующих векторных полей X_i, докажите, что все они сохраняют линейную оболочку $X_1, \dots, X_k$. Докажите гладкость в p параметрически заданного подмногообразия

$$N = \{\varphi_k^{t_k} \circ \varphi_{k-1}^{t_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_1^{t_1}(p) : (t_1, \dots, t_k) \text{ из окрестности } (0, \dots, 0)\}.$$

Проверьте принадлежность его касательного пространства линейной оболочке $X_1, \dots, X_k$.]]

6.28. **Римановы многообразия и риманов объём.** В предыдущих разделах мы убедились, что на произвольном гладком многообразии, не фиксируя локальные системы координат, можно делать много замечательных вещей, работать с векторными полями и дифференциальными формами, интегрировать их (в разных смыслах этого слова) и т.п. Для внутренних нужд геометрии и для нужд физики иногда бывает полезно добавить многообразию дополнительную структуру, и пожалуй наиболее естественная структура, которую имеет смысл рассматривать — это (полу)риманова структура, то есть симметричная билинейная форма на касательных векторах.

Определение 6.225. *Римановой структурой* на гладком многообразии M называется задание положительно определённой квадратичной формы g_p на касательном пространстве T_pM в каждой точке M, гладко зависящее от точки p. *Полуриманова структура* — это задание невырожденной, но необязательно положительно определённой квадратичной формы.

Мы как всегда будем отождествлять квадратичную форму с симметричным скалярным произведением. В координатной карте это скалярное произведение выглядит как

$$g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j,$$

где функции g_{ij} гладкие и в любой точке составляют симметричную невырожденную (и положительно определённую в римановом случае) матрицу, которая в линейной алгебре называлась *матрица Грама*. Иначе это можно выразить формулами

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

На самом деле на всяком гладком многообразии существует риманова структура. Для этого достаточно взять локально конечное разбиение единицы $\{\rho_i\}$, подчинённое картам $\{U_i\}$, в каждой карте построить риманову структуру g_i (в координатах это нетрудно) и положить

$$g = \sum_i \rho_i g_i.$$

Эта сумма будет локально конечна и в любой точке будет давать положительно определённую квадратичную форму, так как сумма неотрицательно определённых квадратичных форм, хотя бы одна из которых положительно определена, будет положительно определена. Следующая задача показывает, что римановы структуры образуют непустое выпуклое множество:

Задача 6.226. Докажите, что для всяких двух римановых структур g и g' на одном и том же многообразии M и $t \in [0,1]$ билинейная форма $(1-t)g + tg'$ тоже будет римановой структурой.

[[Проверьте положительную определённость.]]

Естественный способ получить риманову структуру на вложенном многообразии $M \subset \mathbb{R}^N$ — это просто ограничить стандартную квадратичную форму на $\mathbb{R}^N$ на каждое касательной пространство T_pM. Говоря более абстрактно, вы ограничиваем стандартную (она называется *евклидовой*) риманову структуру

$$\sum_{i=1}^{N} dx_i \otimes dx_i$$

с евклидова пространства на его подмногообразие M. В таком случае, если локальные координаты на M — это $u_1, \dots, u_n$, то риманова структура задаётся в координатах как

$$g_{ij} = \frac{\partial r}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial u_j},$$

где точка означает скалярное произведение.

Вместе с (полу)римановой структурой появляется и согласованный с ней способ измерять объёмы:

Определение 6.227 (Формула риманова объёма). Для (полу)римановой структуры g формула

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{|\det g|}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где $\det g$ подразумевает детерминант матрицы (g_{ij}), корректно определяет одну и ту же плотность меры в любой системе координат.

Понятие *плотность меры* означает величину, которая преобразуется почти как дифференциальная форма высшего ранга, но умножаясь при замене координат на модуль якобиана обратной замены, а не на сам якобиан; такая величина имеет интеграл, не зависящий от системы координат с любой ориентацией. Риманов объём действительно даёт плотность меры, ибо как известно из линейной алгебры, при замене переменных с некоторой матрицей производных корень из детерминанта квадратичной формы будем умножаться на модуль якобиана обратной замены. В случае ориентированного многообразия мы считаем vol_g формой высшей степени, положительной относительно выбранной ориентации.

Рассмотрим частный случай риманова объёма — *площадь двумерной поверхности в евклидовом пространстве*, то есть интеграл от vol_g по этой поверхности. Заметим, что если поверхность задана параметрически и положительно ориентированные параметры на поверхности — (u, v), то для индуцированной с $\mathbb{R}^n$ римановой структуры

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{|r'_u|^2|r'_v|^2 - (r'_u \cdot r'_v)^2}\, du \wedge dv.$$

В трёхмерном случае эту формулу можно продолжить как

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{|r'_u|^2|r'_v|^2 - (r'_u \cdot r'_v)^2}\, du \wedge dv = |[r'_u \times r'_v]|\, du \wedge dv.$$

Это та формула, которая обычно используется в учебниках по математическому анализу для определения площади поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве.

Задача 6.228. Докажите, что для гиперповерхности $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$, являющейся графиком гладкой функции $f : U \to \mathbb{R}$,

$$H = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n),\ (x_1, \dots, x_n) \in U\},$$

риманов объём в индуцированной с $\mathbb{R}^{n+1}$ римановой структуре находится по формуле

$$\operatorname{vol} H = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}\, dx_1 \dots dx_n.$$

[[Установите сначала формулу для детерминанта квадратичной формы $g_0 + \alpha \otimes \alpha$, где g_0 — положительно определённая квадратичная форма, а α — линейная форма.]]

Для двух римановых многообразий M и N их произведение $M \times N$ можно тоже считать римановым многообразием по формуле

$$g_{M\times N}(X, Y) = g_M(p_*X, p_*Y) + g_N(q_*Xq_*Y),$$

где $p : M \times N \to M$ и $q : M \times N \to N$ — естественные проекции. В матричном виде на произведении координатных карт $g_{M\times N}$ будет просто прямой суммой матриц g_M и g_N, то есть блочной матрицей из двух соответствующих квадратных блоков на диагонали.

Так как детерминант прямой суммы матриц равен произведению детерминантов исходных матриц, то для риманова объёма произведения (например, борелевских) подмножеств $X \subseteq M$, $Y \subseteq N$ выполняется формула:

$$\operatorname{vol}_{M\times N}(X \times Y) = \operatorname{vol}_M X \cdot \operatorname{vol}_N Y, \tag{6.14}$$

это по сути утверждение о детерминанте прямой суммы квадратичных форм (с учётом теоремы Фубини). Свойство произведения в некотором смысле обосновывает естественность выбора риманова объёма, ещё одно обоснование естественности (при переходе к подмногообразию) будет дано в разделе 6.38.

Задача 6.229. Проверьте, что евклидова структура на $\mathbb{R}^n$ является произведением n римановых структур на прямой $\mathbb{R}^1$.

Задача 6.230. Посчитайте площадь поверхности (риманов объём) единичной сферы в $\mathbb{R}^3$.

[[Параметризуйте её каким-либо образом.]]

Задача 6.231. Посчитайте площадь поверхности тора в $\mathbb{R}^4$, заданного уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

[[Можно посчитать в лоб, а можно проверить, является ли этот тор произведением римановых многообразий.]]

Задача 6.232. У выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$ взяли нормали к граням $\{n_i\}$ и площади этих граней $\{A_i\}$. Докажите, что

$$\sum_i A_i n_i = 0$$

[[Поинтегрируйте по поверхности многогранника формы типа $dx \wedge dy$ и свяжите это выражение с площадями граней.]]

Задача 6.233. * Рассмотрим отображение единичной сферы $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ в $(n-1)$-мерный симплекс $\Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ по формуле

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2\right).$$

Докажите, что риманов объём на сфере при этом переходит, с точностью до умножения на константу, в риманов объём на симплексе.

[[Риманов объём на сфере определён инвариантно относительно вращений и эта инвариантность характеризует его однозначно с точностью до константы. Значит существует константа c_n, такая, что для всякого измеримого $X \subseteq S^{2n-1}$ его мера относительно риманова объёма равна гауссовой мере с плотностью $e^{-\pi|\bar{z}|^2}$ конуса над множеством X, $\{tx : t \geqslant 0,\ x \in X\}$. Далее уже нетрудно понять, во что переходит гауссова мера при рассматриваемом в задаче отображении.]]

Задача 6.234. * Докажите, что для двумерной компактной поверхности с краем $S \subset \mathbb{R}^4$ и индуцированной с $\mathbb{R}^4$ евклидовой структуры выполняется

$$\mathrm{vol}_g S \geqslant \int_S dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4.$$

Когда выполняется равенство?

[[Это на самом деле локальный вопрос, который в каждой точке сводится к рассмотрению двумерных линейных подпространств $\mathbb{R}^4$. Его удобно решать, введя комплексную структуру на $\mathbb{R}^4$, то есть считая пары (x_1, x_2) и (x_3, x_4) двумя комплексными координатами в $\mathbb{C}^2$.]]

6.29. **Звёздочка Ходжа, градиент, ротор, дивергенция.** Заметим, что наличие (полу)римановой структуры позволяет преобразовать вектор в дифференциальную форму первой степени по формуле

$$X^\flat(Y) = g(X, Y).$$

Возможна и обратная операция, делающая из формы первой степени вектор в соответствии с формулой

$$g(\alpha^\sharp, Y) = \alpha(Y).$$

В теоретической физике эти операции называются «опускание индекса» и «поднятие индекса», что связано со специфическими обозначениями координат векторов и линейных форм. Например, для вектора с координатами X^i (написанными сверху) получается форма с координатами написанными снизу

$$X^\flat_i = \sum_j g_{ij} X^j,$$

как принято в теоретической физике (там даже не пишут знак суммы). Если речь идёт о стандартной евклидовой структуре в $\mathbb{R}^3$ и работе в ортонормированной системе координат, то эти операции оставляют те же самые координаты векторов и форм, поэтому в этом случае их можно не заметить.

Также наличие (полу)римановой структуры порождает билинейные симметрические формы на всех связанных с касательным пространством в точке пространствах, например на пространстве полилинейных кососимметричных форм в точке. Для знакомых с понятием тензорного произведения и изоморфизмом $V^* \otimes U \cong \mathcal{L}(V, U)$ (для конечномерного V) можно сказать, что форма (полу)римановой структуры g может рассматриваться как отображение

$$T_pM \otimes T_pM \to \mathbb{R},$$

а также как элемент $T_p^*M \otimes T_p^*M$, или как отображение $T_pM \to T_p^*M$ (опускание индексов) с обратным $T_p^*M \to T_pM$ (поднятие индексов). Композиция g и двух поднятий индексов на её аргументах даёт билинейное отображение

$$\tilde{g} : T_p^*M \otimes T_p^*M \to \mathbb{R},$$

то есть симметричную билинейную форму на кокасательном пространстве.

Задача 6.235. Объясните, как связаны матрицы g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$ (последнюю в теоретической физике пишут как g^{ij}), представляющие (полу)риманову структуру на исходном касательном пространстве и соответствующую билинейную форму на двойственном к нему кокасательном пространстве.

Задача 6.236. Докажите неравенство

$$\alpha(X)^2 \leqslant g(X, X) \cdot \tilde{g}(\alpha, \alpha).$$

[[При правильном выборе системы координат должно получиться неравенство Коши–Буняковского.]]

Тензорно перемножая $\tilde{g}$ на себя (и сортируя тензорные множители), можно расширить её до отображения

$$\tilde{g} : \underbrace{T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}_{k} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}_{k} \to \mathbb{R}$$

Вкладывая пространство $\Omega_p^k(M)$ (дифференциальных форм степени k в точке p) в тензорное произведение

$$\Omega_p^k(M) \subseteq \underbrace{T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}_{k}$$

мы таким образом можем рассмотреть $\tilde{g}$ как билинейную форму на $\Omega_p^k(M)$. Так как в разных учебниках кососимметричные формы по разному вкладываются в полилинейные формы (с точностью до умножения на зависящую от k константу), то нам надо внести определённость и нормировать произведение

$$\tilde{g}_p(\alpha, \beta).$$

Мы будем нормировать так, что если линейные формы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Omega^1(M)$ образует (почти) ортонормированный базис в точке p, то есть

$$\tilde{g}_p(\alpha_i, \alpha_j) = \pm\delta_{ij},$$

то формы $\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}$ будут образовывать (почти) ортонормированный базис относительно $\tilde{g}_p$. Ортогональность будет иметь место в любом случае, а нормирование на единицу мы постулируем.

Будем теперь рассматривать многообразие M^n размерности n. Заметим, что внешнее умножение между $\Omega^k(M)$ и $\Omega^{n-k}(M)$ в точке p является *невырожденным спариванием*, то есть для всякой ненулевой $\alpha \in \Omega^k(M)$ можно найти $\beta \in \Omega^{n-k}(M)$ так, что $\alpha \wedge \beta$ не будет равна нулю в точке p.

Задача 6.237. Проверьте невырожденность внешнего умножения в координатах в качестве упражнения.

Спаривание $\beta : V \otimes W \to \mathbb{R}$ между векторными пространствами задаёт отображения $V \mapsto W^*$,

$$X \mapsto (Y \mapsto \beta(X, Y))$$

и $W \to V^*$, невырожденность же означает, что оба этих отображения имеют нулевое ядро. В конечномерном случае, когда размерность двойственного пространства равна размерности исходного, невырожденности достаточно для установления изоморфизмов $V \cong W^*$ и $W \cong V^*$.

Вспомнив также, что $\tilde{g}$ даёт изоморфизм между Ω^{n-k} в точке и его двойственным, мы можем обосновать корректность следующего определения.

Определение 6.238. В присутствии (полу)римановой структуры g на ориентированном многообразии M^n (чтобы vol_g можно было считать элементом $\Omega^n(M)$) формула

$$\alpha \wedge *\beta = \tilde{g}(\alpha, \beta)\,\mathrm{vol}_g,$$

корректно определяет линейный оператор $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$, *звёздочку Ходжа*.

Точнее можно сказать, что $*$ определяется как композиция изоморфизмов в каждой точке

$$\Omega_p^k(M) \longrightarrow (\Omega_p^k(M))^* \longrightarrow \Omega_p^{n-k}(M),$$

в которой первый возникает из невырожденного спаривания $\tilde{g}$ между формами k-степени, а второй — из спаривания, заданного внешним умножением с делением на vol_g.

Оператор звёздочки является поточечным, то есть линейным относительно умножения на функцию, $*(f\alpha) = f * \alpha$. Например, для $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой структурой и координатами x, y, z мы получим

$$*1 = dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$*dx = dy \wedge dz, *dy = dz \wedge dx, *dz = dx \wedge dy,$$
$$*(dx \wedge dy) = dz, *(dy \wedge dz) = dx, *(dz \wedge dx) = dy,$$
$$*(dx \wedge dy \wedge dz) = 1.$$

Задача 6.239. Докажите, что на n-мерном (полу)римановом многообразии для звёздочки $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ выполняется

$$**\alpha = (-1)^{k(n-k)}\,\mathrm{sgn}\det g \cdot \alpha.$$

[[Проверьте в координатах, в которых g имеет диагональный вид с ± 1 на диагонали.]]

С помощью операций $\flat, \sharp, *$ мы можем выразить такие понятия, как *ротор и дивергенция* векторного поля в $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{rot}\, X = (*d(X^\flat))^\sharp, \quad \mathrm{div}\, X = *d(*X^\flat), \tag{6.15}$$

градиент функции как $\mathrm{grad}\, f = (df)^\sharp$. Градиент тогда можно геометрически описать как вектор с максимальным значением $X(f)$ в точке при фиксированной длине $\sqrt{g(X,X)}$ и такой что $g(X, X) = X(f)$. Геометрический смысл дивергенции, в силу задачи 6.207 и того, что $*1$ является формой риманова объёма, соответствует изменению риманова объёма при действии диффеоморфизмов, получающихся интегрированием данного векторного поля. Над геометрическим смыслом ротора читатель может поразмышлять самостоятельно.

Задача 6.240. Докажите, что определение дивергенции для риманова многообразия согласовано с определением дивергенции относительно формы объёма как $\mathrm{div}\, X\, \mathrm{vol}_g = L_X(\mathrm{vol}_g)$.

[[Используйте формулу Картана $L_X = i_X d + d i_X$ и $*1 = \mathrm{vol}_g$.]]

Из приведённых формул для градиента, дивергенции и ротора видно, что они на самом деле зависят от римановой структуры в $\mathbb{R}^3$ и их можно считать корректно определёнными только до тех пор, пока мы не меняем её. Говоря проще, можно сказать, что координатные формулы для них остаются теми же самыми при замене ортонормированной системы координат на другую ортонормированную систему координат.

Задача 6.241. Докажите что $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0$ и $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, X = 0$.

[[Вспомните свойство $d^2 = 0$.]]

Задача 6.242. Докажите для гладкого векторного поля на $\mathbb{R}^3$, что если $\operatorname{rot} X = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $X = \operatorname{grad} f$, для некоторой функции f. А если $\operatorname{div} X = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $X = \operatorname{rot} Y$, для некоторого векторного поля Y (последнее физики называют «векторный потенциал»).

[[Сведите к теореме 6.166 про обращение операции d.]]

Определения градиента, дивергенции и ротора по формулам (6.15) позволяют записать эти операции в любых криволинейных координатах, так как внешнее дифференцирование во всех системах координат записывается одинаково, а оператор $*$ является линейным относительно относительно умножения на функции (то есть не содержит производных) и может быть выписан в координатах с помощью своего определения.

Следующие задачи посвящены использованию римановой структуры и связанных с ней операций.

Задача 6.243. Выпишите оператор Лапласа для функций в сферических координатах $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$.

[[Используйте выражение $\Delta f = *d*df$ и тот факт, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ ортогональны (но не ортонормированы). Начните с доказательства формул

$$*dr = r^2\sin\vartheta\ d\vartheta\wedge d\varphi,\quad *d\vartheta = \sin\vartheta\ d\varphi\wedge dr,\quad *d\varphi = \frac{1}{\sin\vartheta}dr\wedge d\vartheta.$$

]]

Задача 6.244. * Функция f на римановом многообразии называется *гармонической*, если $\Delta f = *d*df = 0$. Докажите, что у гармонической на $\mathbb{R}^n$ функции все средние значения на сферах с центрами в нуле равны её значению $f(0)$.

[[Заметьте, что оператор Лапласа линеен и инвариантен относительно вращений, следовательно функция, получающаяся из f усреднением относительно всех вращений $\mathrm{SO}(n)$ тоже гармоническая и зависит только от расстояния до начала координат. Найдите общий вид гармонических функций в $\mathbb{R}^n$, зависящих только от расстояния до начала координат.]]

Задача 6.245. Докажите, что непостоянная гармоническая функция на многообразии не может иметь компактный носитель.

[[Выразите интеграл $\int_M |df|^2 \operatorname{vol}_g = \int_M df\wedge *df$ через лапласиан Δf.]]

Задача 6.246. В ортогональной матрице A с положительным детерминантом размера $n\times n$ взяли левую верхнюю подматрицу B размера $k\times k$ и правую нижнюю подматрицу C размера $(n-k)\times(n-k)$. Докажите, что $\det B = \det C$.

[[Действие ортогонального оператора A можно распространить на $\wedge^*(\mathbb{R}^n)$, назовём этот оператор $\wedge A$, его матричные элементы являются минорами исходной матрицы A. Заметьте, что $\wedge A$ коммутирует с действием звёздочки Ходжа на $\wedge^*(\mathbb{R}^n)$ и звёздочка Ходжа сама ортогональна.]]

Задача 6.247. Проверьте, что можно подобрать понижающий степень формы на единицу дифференциальный оператор $d^* : \Omega^*(M)\to\Omega^{*-1}(M)$, такой что для форм с компактным носителем будет выполняться

$$\int_M \tilde g(d\alpha,\beta)\operatorname{vol}_g = \int_M \tilde g(\alpha, d^*\beta)\operatorname{vol}_g.$$

[[Попробуйте выражение $d^* = \pm * d *$ и подберите в нём знак.]]

Задача 6.248. Оператор Лапласа на дифференциальных формах (с точностью до знака) определяется как $\Delta = (d + d^*)^2$, *гармонические формы* определяются как решения уравнения $\Delta\alpha = 0$. Докажите, что на компактном многообразии без края форма α гармоническая тогда и только тогда, когда $d\alpha = 0$ и $d^*\alpha = 0$.

[[Рассмотрите выражение $\int_M g(\alpha, \Delta\alpha) \operatorname{vol}_g$.]]

Задача 6.249. * Работая с линейным пространством V с симметричной билинейной формой g зададим для всякого $X \in V$ оператор на кососимметричных формах пространства V как $e(X) : \wedge^* V \to \wedge^* V$ как

$$e(X) : \alpha \mapsto X^\flat \wedge \alpha + i_X\alpha,$$

где операция $\flat$ определена через g. Докажите, что эти операции удовлетворяют соотношению

$$e(X)e(Y) + e(Y)e(X) = 2g(X, Y).$$

Докажите, что они порождают (в смысле линейных комбинаций и умножения) *алгебру Клиффорда* размерности $2^{\dim V}$.

[[Выпишите выражение $e(X)e(Y) + e(Y)e(X)$ по определению, используйте что $X^\flat \wedge Y^\flat + Y^\flat \wedge X^\flat = 0$, $i_Xi_Y + i_Yi_X = 0$ и правило Лейбница для i_X и i_Y. Для вычисления размерности докажите, что если фиксировать базис $X_1, \dots, X_n$ в V, то алгебра Клиффорда порождена мономами $e(X_{i_1})e(X_{i_2})\dots e(X_{i_k})$ для всевозможных наборов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$ (это оценивает размерность сверху) и при этом любой элемент $\wedge^*(V)$ можно получить, умножая образующую $\wedge^n(V)$ на подходящий элемент алгебры Клиффорда (это оценивает размерность снизу).]]

6.30. **Ковариантная производная.** Мы продолжаем рассматривать многообразие (M, g) с (полу)римановой структурой g (невырожденной, но необязательно положительно определённой). Мы хотим установить существование операции *ковариантного дифференцирования векторных полей* и, аналогично внешнему дифференцированию, мы сначала перечислим требуемые свойства этой операции $\nabla_X Y$, которая из двух векторных полей делает третье:

а) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ (линейность по первому аргументу) и $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$ (правило Лейбница) для умножения на функцию;

б) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (отсутствие кручения);

в) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (совместимость с g).

Существование такой операции мы сейчас установим.

Теорема 6.250 (Формула Козюля и существование ковариантной производной)**.** *Из условий на ковариантное дифференцирование следует формула*

$$2g(\nabla_X Y, Z) =$$
$$= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y).$$

Если считать правую часть формулы определением левой части, то построенное так ковариантное дифференцирование будет иметь требуемые свойства.

Доказательство. Применим свойство (в) к циклическим перестановкам тройки векторов:

$$\begin{aligned}
X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),\\
Y(g(Z, X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X),\\
Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).
\end{aligned}$$

Сложим первые два и вычтем из них третье, тогда получится

$$X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y) =$$
$$= g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) =$$
$$= 2g(\nabla_X Y, Z) - g([X,Y],Z) + g([Y,Z],X) - g([Z,X],Y),$$

где в последней строчке применено свойство (б) — отсутствие кручения. Дальше остаётся перенести $2g(\nabla_X Y, Z)$ влево, а всё остальное — вправо.

Чтобы использовать эту формулу для определения $\nabla_Z Y$, надо проверить, что правая часть не зависит от производных Z, то есть при умножении Z на функцию f функция выносится из правой части. Проверим это (не выписывая явно слагаемые, где f не дифференцируется)

$$X(g(Y,fZ)) + Y(g(fZ,X)) - fZ(g(X,Y)) + g([X,Y],fZ) - g([Y,fZ],X) + g([fZ,X],Y) =$$
$$= f(\dots) + X(f)g(Y,Z) + Y(f)g(Z,X) - g(Y(f)Z,X) - g(X(f)Z,Y) = f(\dots).$$

Здесь использовались формулы типа $[X,Y] = L_X Y = -L_Y X$ и правило Лейбница для производной Ли произведения функции на векторное поле. Проверим также, что происходит при умножении X на f

$$fX(g(Y,Z)) + Y(g(Z,fX)) - Z(g(fX,Y)) + g([fX,Y],Z) - g([Y,Z],fX) + g([Z,fX],Y) =$$
$$= f(\dots) + Y(f)g(Z,X) - Z(f)g(X,Y) - g(Y(f),X,Z) + g(Z(f)X,Y) = f(\dots)$$

и при умножении Y на f

$$X(g(fY,Z)) + fY(g(Z,X)) - Z(g(X,fY)) + g([X,fY],Z) - g([fY,Z],X) + g([Z,X],fY) =$$
$$= f(\dots) + X(f)g(Y,Z) - Z(f)g(X,Y) + g(X(f)Y,Z) + g(Z(f)Y,X) =$$
$$= f(\dots) + 2X(f)g(Y,Z).$$

Таким образом установлено свойство (а).

Если поменять в формуле местами X и Y, то первые два слагаемых и последние два слагаемых поменяются местами, третье не изменится, и только четвёртое $g([X,Y],Z)$ поменяет знак. Это доказывает свойство (б).

Для доказательства свойства (в) нам надо сложить две такие формулы с перестановкой Y и Z. При этом первое слагаемое даст нам нужный результат, второе и третье поменяются местами и поменяют знак, то есть сократятся в сумме, четвёртое и последнее тоже поменяются местами и поменяют знак, а предпоследнее слагаемое просто поменяет знак и в сумме сократится. □

Отличие ковариантной производной $\nabla_X Y$ от производной Ли $L_X Y$ заключается в том, что ковариантная производна C^∞-линейна по вектору X,

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y,$$

иначе говоря значение $\nabla_X Y$ в точке зависит только от значения X в той же точке, но не от производных X. Свойство (б) при этом показывает, что некоторая связь с производной Ли у ковариантной производной всё же имеется.

Зависимость ковариантной производной от векторного поля Y включает в себя и его производные, что ясно из формулы Козюля или из приведённого ниже координатного выражения. В целом такой характер зависимости $\nabla_X Y$ от X и Y позволяет определить «перенос вектора вдоль кривой», см. далее формулу (6.16).

Можно определить ковариантную производную не только для векторных полей. Действие ковариантной производной ∇_X на функции определяется просто как $X(f)$, а на формах первой степени определяется из требования выполнения правила Лейбница для канонического умножения векторных форм первой степени на векторные поля:

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = \nabla_X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y).$$

На формы высшей степени ковариантную производную тоже можно распространить, потребовав выполнения правила Лейбница для внешнего произведения форм. Также можно распространить определение ковариантной производной по правилу Лейбница (для тензорного произведения) на симметричные формы от двух векторов и убедиться, что условие (в) совместимости ковариантного дифференцирования с g будет выглядеть как $\nabla g = 0$.

Задача 6.251. Докажите, что условие (б) отсутствия кручения эквивалентно тому, что для форм первой степени выполняется

$$(\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) = d\alpha(X, Y).$$

[[Вспомните, что $d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) + \alpha([X, Y])$.]]

Задача 6.252. Получите выражение в координатах для

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

при условии $\nabla_X Y = Z$ как

$$Z^k = \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k X^i Y^j.$$

Проверьте, что *символы Кристоффеля*

$$\Gamma_{\ell ij} = \sum_k g_{\ell k} \Gamma_{ij}^k$$

можно в координатах найти как

$$\Gamma_{\ell ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}\right).$$

[[По сути это формула Козюля для попарно коммутирующих векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}$.]]

Задача 6.253. * Определим *оператор Дирака* в окрестности точки, выбрав в этой окрестности пару взаимных базисов $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_n$ векторных полей, чтобы выполнялось условие $g(X_i, Y_j) \equiv \delta_{ij}$ и положив

$$D = \sum_i e(X_i) \nabla_{Y_i}$$

с использованием операторов $e(\cdot)$ из задачи 6.249. Докажите, что этот оператор не зависит от выбора взаимных базисов и следовательно определён на (полу)римановом многообразии глобально. Проверьте, что на дифференциальных формах он совпадает с $d + d^*$ из задачи 6.248.

[[Первое утверждение проверяется в явном виде. Второе удобно проверить в экспоненциальных координатах (см. задачу 6.258), таких что в базисе $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ значение g в начале координат диагонально с ± 1 на диагонали и символы Кристоффеля в начале координат обнуляются.]]

Интересное свойство оператора Дирака из предыдущей задачи заключается в том, что он может действовать не только на дифференциальных формах, но и на «функциях со значениями» в представлениях алгебры Клиффорда (то есть в векторных пространствах, на которых алгебра Клиффорда действует линейными отображениями), отличных от векторов и дифференциальных форм. В интересном для физики четырёхмерном случае, например, возникает четырёхмерное комплексное представление V алгебры Клиффорда и соответствующее *уравнение Дирака*

$$D\varphi = m\varphi$$

для функций со значениями в V, представляющее движение свободных электронов и позитронов. Более строгое изложение этой темы требует понятия о произвольных векторных расслоениях над многообразиями и их связностях, что выходит за рамки нашего краткого изложения. Отметим лишь, что построение связности (ковариантного дифференцирования) для функций φ в уравнении Дирака имеет некоторую неоднозначность, которая может интерпретироваться как возникновение электромагнитного поля.

6.31. **Длина кривой и уравнение геодезической.** Определим длину кривой $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ в римановом многообразии

$$\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt,$$

эта формула мотивирована формулой длину кусочно непрерывно дифференцируемой кривой в $\mathbb{R}^n$. Посмотрим, как ковариантная производная позволяет выписать уравнение для кривой, локально минимизирующей длину.

Заметим, что ранее, говоря о метрических пространствах, мы определяли длину кривой с помощью метрики пространства. Для римановой структуры определение длины кривой другое и с его помощью уже можно определить внутреннюю метрику через нижнюю грань длин кривых, соединяющих две данных точки. Тогда риманово многообразие (с положительно определённой римановой структурой) превратится в метрическое пространство.

Задача 6.254. Проверьте аксиомы метрического пространства для метрики риманова многообразия.

[[Наименее тривиально проверить невырожденность метрики, что между двумя разными точками оказывается положительное расстояние. Заметьте, что оценить снизу расстояние можно, если заметить, что кривая из точки p в точку q должна пересечь некоторую маленькую сферу S вокруг p в некоторой координатной окрестности, а далее оценить метрику в этой координатной окрестности снизу метрикой, пропорциональной евклидовой и оценить длину части кривой от p до S.]]

Это оправдывает использование термина *риманова метрика* как взаимозаменяемого с термином *риманова структура*, хотя на самом деле риманова структура g, строго говоря, не является метрикой, а лишь порождает метрику на римановом многообразии. Если же речь идёт о полуримановой структуре g, то никакой метрики на своём многообразии она не порождает, но иногда и в этом случае g называют *полуримановой метрикой*, что мы тоже иногда будем делать.

Изучение локального строения риманова многообразия (см. пояснения у неравенства (6.17) ниже) может прояснить, что его риманова метрика в точке p может быть получена как гессиан выражения $\rho^2(p, x)$ (как функции от x), то есть восстановить обратно квадратичную форму g по этой внутренней метрике тоже можно.

Проблема с минимизацией длины заключается в том, что одна и та же кривая с разными параметризациями даёт одну и ту же длину и это вырождение надо как-то снимать. Параметризация будет фиксирована, если вместо длины мы рассмотрим функционал «энергии»

$$E(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma, \dot\gamma)\, dt.$$

Теорема 6.255. *Среди всех параметризаций одной и той же кривой отрезком $[t_0, t_1]$ минимальная энергия достигается на параметризации с постоянной скоростью и в этом случае выполняется равенство*

$$E(\gamma) = \frac{1}{(t_1 - t_0)}\ell(\gamma)^2.$$

Доказательство. Напишем неравенство Коши–Буняковского:

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma, \dot\gamma)\, dt\right) \cdot \left(\int_{t_0}^{t_1} dt\right) \geqslant \left(\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt\right)^2,$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma, \dot\gamma)\, dt \geqslant \frac{1}{t_1 - t_0}\left(\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt\right)^2.$$

Заметим, что при постоянной скорости в неравенстве Коши–Буняковского выполняется равенство. ☐

Другое преимущество функционала энергии — отсутствие необходимости извлекать корень из отрицательного числа, если метрика полуриманова. Это на самом деле используется в принципе наименьшего действия для частицы в общей теории относительности, тогда наша «энергия» называется *действием* для свободной частицы.

В науке о дифференциальных уравнениях изучаются такого рода *вариационные задачи* и выводятся дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет любая гладкая кривая, для которой этот функционал является локальным экстремумом (и возможно, некоторые другие). Приведём набросок вывода уравнения в этом случае, это будет *уравнение геодезической*.

Рассмотрим точку p кривой, в которой скорость $\dot\gamma$ не равна нулю. Возьмём векторное поле X, которое в окрестности p имеет выпрямленный вид и наложим технические условия, что X не параллельно $\dot\gamma$ в некоторой окрестности p и произведение $g(X, \dot\gamma)$ постоянно в той же окрестности. Это позволяет продолжить $\dot\gamma$ до векторного поля V в окрестности носителя X так, чтобы $[X, V] = 0$. Для этого надо разнести определённое на кривой векторное поле $\dot\gamma$ вдоль X, а далее продолжить произвольным коммутирующим с X образом поперёк X, для выпрямленного не параллельного $\dot\gamma$ поля X читатель может проверить в координатной карте, что это возможно.

Возьмём теперь функцию ρ с носителем в малой окрестности p и векторное поле $Z = \rho X$. Для порождённого им семейства диффеоморфизмов φ_s рассмотрим деформации кривой $\varphi_s \circ \gamma$ и посчитаем производную их энергии

$$\frac{d}{ds}E(\varphi_s \circ \gamma)|_{s=0} = \int_{t_0}^{t_1} Z(g(V, V))\, dt = 2\int_{t_0}^{t_1} g(\nabla_Z V, V)\, dt = 2\int_{t_0}^{t_1} \rho(\gamma(t)) g(\nabla_X V, V)\, dt =$$
$$= -2\int_{t_0}^{t_1} \rho(\gamma(t)) g(\nabla_V X, V)\, dt = -2\int_{t_0}^{t_1} \rho(\gamma(t)) V g(X, V)\, dt + 2\int_{t_0}^{t_1} \rho(\gamma(t)) g(X, \nabla_V V)\, dt =$$
$$= 2\int_{t_0}^{t_1} \rho(\gamma(t)) g(X, \nabla_V V)\, dt,$$

здесь использовано коммутирование $[X, V]$ и его следствие $\nabla_X V = -\nabla_V X$, а также постоянство $g(X, V)$. Если кривая даёт локальный экстремум функционала, то при любой ρ это выражение должно быть равно нулю. По основной лемме вариационного исчисления $g(X, \nabla_V V) \equiv 0$ в некоторой окрестности p. Это верно для непараллельных $\dot\gamma$ векторов в точке p, а на параллельные может быть продолжено до непрерывности, то есть это верно для всякого значения X в точке p. Из невырожденности g следует, что $\nabla_V V = 0$ и мы получаем *уравнение геодезической*

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0.$$

Величину в левой части также называют *ускорение* и обозначают $\ddot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$. Это уравнение, помимо всего прочего, означает постоянство квадрата скорости $g(\dot\gamma, \dot\gamma)$, в частности, если кривая, дающая экстремум «энергии» хоть где-то имеет ненулевую скорость, то эта скорость остаётся постоянной. Из этого следует, что при наличии нулевой скорости хоть в одной точки она должна оставаться нулевой везде. Другой способ справиться с нулевой скоростью — заметить, что если мы будем выписывать уравнение Эйлера–Лагранжа по правилам вариационного исчисления, то мы получим то же уравнение $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ без дополнительных условий на скорость.

В предыдущем рассуждении было важно, что для всякого векторного поля X выражение

$$\nabla_{\dot\gamma} X$$

зависит только от значений векторного поля X на образе кривой и не зависит от его гладкого продолжения за пределы кривой, например в координатах (задача 6.252) можно проверить, что в выражении будут фигурировать производные координат X вдоль $\dot\gamma$ и комбинации этих же координат с символами Кристоффеля. В частности, условие

$$\nabla_{\dot\gamma} X = 0 \tag{6.16}$$

является (при фиксированной γ) уравнением *параллельного переноса* векторного поля X вдоль кривой γ; это дифференциальное уравнение первого порядка на X. Это придаёт некоторый геометрический смысл ковариантной производной.

Задача 6.256. Проверьте, что параллельный перенос векторов из начала кривой в конец является ортогональным (относительно g) оператором.

[[Используйте совместимость ∇ с метрикой и докажите сохранение $g(X, X)$ при переносе.]]

Уравнение геодезической можно переписать в координатах следующим образом:

$$\frac{d^2\gamma^i}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^k}{dt} = 0.$$

Его можно получить раскрытием выражения $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$, используя соотношение (частные производные в левой части понимаются как частные производные $\dot\gamma$, продолженной до векторного поля V)

$$\sum_j \dot\gamma^j \frac{\partial\dot\gamma^i}{\partial x_j} = \frac{d^2\gamma^i}{dt^2}.$$

Иначе, уравнение геодезической в координатах можно получить напрямую стандартными методами вариационного исчисления (см. какой-нибудь учебник по дифференциальным уравнениям или книгу [3, гл. IV, §2]), выписав уравнение Эйлера–Лагранжа в координатах:

$$\frac{\partial \sum_{ij} g_{ij}\dot\gamma_i\dot\gamma_j}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \sum_{ij} g_{ij}\dot\gamma_i\dot\gamma_j}{\partial\dot\gamma^k} = 0,$$

в процессе его преобразования может понадобиться свойство отсутствия кручения, в координатах выраженное как $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Задача 6.257. Докажите, что если риманово многообразие N вложено в риманово многообразие M и на N рассматривается индуцированная риманова метрика, то всякая геодезическая M, полностью лежащая на N, является геодезической N.

[[Для доказательства этого проще использовать вариационное описание геодезической.]]

6.32. **Экспоненциальное отображение, локальная минимальность геодезических и полнота.** Положительная определённость римановой структуры, как уже было замечено, позволяет определить метрику (расстояние между парами точек) и рассуждать в метрических терминах. В этом разделе мы рассмотрим римановы многообразия и свойства их метрики.

Мы уже установили, что геодезическая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, в качестве начальных условий для такого уравнения можно выбирать значения γ_i и $\dot\gamma_i$ в некоторый момент времени. Более точно, по теореме о существовании и единственности решений дифференциального уравнения, для всякой точки $p \in M$ и всякого вектора $V \in T_pM$ найдётся геодезическая $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, определённая в некоторой окрестности нуля, для которой $\gamma(0) = p, \dot\gamma(0) = V$. Если всякая геодезическая в M продолжается до отображения $\gamma : \mathbb{R} \to M$, то M называется *геодезически полным*. В таком случае для всякой фиксированной точки p определено экспоненциальное отображение:

$$\exp_p : T_pM \to M, \quad \exp_p(V) = \gamma(1) \text{ для геодезической, такой что } \gamma(0) = p, \dot\gamma(0) = V.$$

Теорема о гладкой зависимости решения дифференциального уравнения от параметра показывает, что даже при отсутствии геодезической полноты это отображение даёт диффеоморфизм окрестности $0 \in T_pM$ и окрестности $p \in M$.

Задача 6.258. Если рассмотреть $(\exp_p)^{-1}$ в достаточно малой окрестности p, то получаются *геодезические координаты* в окрестности точки. Докажите, что в этих координатах символы Кристоффеля обращаются в нуль в точке p.

[[Из уравнения геодезической в координатах и того, что все прямые через начало координат в геодезической системе координат являются геодезическими следует, что для любого i и любого вектора v в начале координат выполняется $\sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} v_j v_k = 0$. Далее воспользуйтесь свойством отсутствия кручения в виде $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.]]

Экспоненциальное отображение позволяет изучать локальное поведение функции расстояния в римановом многообразии M. Рассмотрим случай положительно определённой метрики, то есть риманова многообразия, а не полуриманова. Заметим для начала, что если геодезическая изменяется, сохраняя свою длину, то есть мы имеем дело с семейством геодезических $\gamma_s : [a, b] \to M$, параметризованных с одной и той же постоянной скоростью, то рассуждение из вывода уравнения геодезической показывает, что векторное поле $J = \frac{\partial\gamma}{\partial s}$ вдоль геодезической обладает свойством (V здесь является полем векторов скорости геодезических нашего семейства, оно коммутирует с J)

$$0 = Jg(V, V) = 2g(\nabla_J V, V) = -2g(\nabla_V J, V) = -2V(g(J, V)) + 2g(J, \nabla_V V) = -V(g(J, V)).$$

Следовательно, вдоль кривой выполняется

$$g(J, V) = g\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right) = \mathrm{const}.$$

В частности, если мы рассматриваем экспоненциальное отображение и меняем направление начального вектора скорости, но не его длину, образ экспоненциального отображения — конец геодезической одной и той же длины — движется ортогонально самой геодезической, так как на всей геодезической должно выполняться $g(J, V) = 0$.

Теперь мы более детально рассмотрим экспоненциальное отображение в окрестности нуля и выясним, как связана евклидова норма в касательном пространстве точки и риманова метрика в окрестности этой точки. Для касательного вектора $V \in T_pM$ выражение $|V| = \sqrt{g(V, V)}$ даёт функцию на T_pM, а экспоненциальное отображение $\exp_p$ делает из неё функцию $r : U \to \mathbb{R}^+$ в некоторой окрестности U точки p, которую мы находим из теоремы об обратном отображении. Можно считать, что окрестность U задана условием $r(x) \leqslant r_0$. Из замеченного выше свойства ортогональности следует, что поверхности уровня $r(x) = \mathrm{const}$ ортогональны геодезическим из точки p, иначе говоря, дифференциал функции r в отличных от p точках имеет единичную норму в смысле метрики g, обозначим единичное векторное поле $R = \operatorname{grad} r = dr^\flat$, это векторное поле направлено вдоль геодезических из p.

После введения такой функции $r : U \to \mathbb{R}^+$ мы рассмотрим не обязательно геодезическую кривую γ с началом в p, лежащую в U. Тогда можем написать по неравенству Коши–Буняковского

(6.17)
$$\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt \geqslant \int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma, R)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} dr(\dot\gamma)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} d(r(\gamma)) = r(\gamma(t_1)) - r(\gamma(t_0)).$$

Так как очевидно для всякой точки с $r(x) \leqslant r_0$ по определению существует геодезическая из p в x длины $r(x)$, то мы получаем, что расстояние от p до x в точности равно $r(x)$ и отрезки геодезических от p до x являются *кратчайшими* кривыми, то есть реализующими минимум расстояния. Иначе ситуацию можно описать так, что экспоненциальное отображение $\exp_p$ в некоторой окрестности нуля переводит длину вектора в расстояние от точки p.

Задача 6.259. Докажите эквивалентность топологии риманова многообразия как многообразия и как метрического пространства.

[[Надо доказать, что всякая окрестность точки в топологии многообразия содержит метрическую окрестность и всякая метрическая окрестность содержит окрестность в смысле топологии многообразия.]]

Следующий набор задач проливает свет на теорему Хопфа–Ринова о том, что для римановых многообразий геодезическая полнота и метрическая полнота эквивалентны, хотя на первый взгляд геодезическая полнота является более слабым свойством.

Задача 6.260. Докажите, что если риманово многообразие полно в своей внутренней метрике то всякое равномерно ограниченное векторное поле на нём имеет интегральные кривые, определённые для всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

[[Предположите, что решение не продолжается за момент времени T, как в доказательстве теоремы 6.217, и используйте полноту.]]

Задача 6.261. Докажите, что если риманово многообразие полно в своей внутренней метрике, то оно геодезически полно.

[[Можно рассуждать аналогично предыдущей задаче, но с поправкой на то, что уравнение геодезической — это уравнение второго порядка.]]

Задача 6.262. Модифицируйте предыдущее рассуждение с функцией r, чтобы показать, что для всякой натурально параметризованной отрезком геодезической существует $\delta > 0$ такое, что всякий её кусок длины не более δ является кратчайшим.

[[Используйте компактность отрезка.]]

Задача 6.263. * Докажите, что кривая в римановом многообразии, которая является кратчайшей, на самом деле является геодезической.

[[Утверждение на самом деле локально, и здесь поможет использование функции r.]]

Задача 6.264. * Докажите, что у геодезически полного и связного метрического многообразия экспоненциальное отображение сюръективно.

[[Рассмотрите точки p и q и заметьте из рассуждения с функцией r, что при нахождении кратчайшей между p и q достаточно рассматривать кривые, начинающиеся с геодезического отрезка длиной не менее r_0, и при стремлении длин кривых к расстоянию $\rho(p,q)$ из компактности можно считать, что этот отрезок стремиться к какому-то фиксированному отрезку γ. Далее, предполагая, что γ не достаёт до точки q, повторите рассуждение с заменой p на его конец p' и покажите, что γ можно наращивать с сохранением свойства $\ell(\gamma) + \rho(p', q) = \rho(p, p') + \rho(p', q) = \rho(p, q)$. При переходе от p' к p'' будет важно, из $\rho(p', p'') + \rho(p'', q) = \rho(p', q)$ и предыдущего равенства следует, что $\rho(p, p') + \rho(p', p'') = \rho(p, p'')$.]]

Задача 6.265. * Докажите, что если риманово многообразие геодезически полно, то оно полно в своей внутренней метрике.

[[Заметьте, что по предыдущей задаче замкнутый метрический шар радиуса R с центром в точке $p \in M$ является образом при экспоненциальном отображении шара радиуса R в касательном пространстве T_pM. Эти шары компактны как образы компактов, и тогда проходит доказательство полноты с использованием компактности ограниченных множеств и нахождением частичного предела фундаментальной последовательности.]]

Задача 6.266. * Докажите, что на каждом многообразии без края можно ввести полную риманову метрику.

[[Попробуйте использовать разбиение единицы, позаботившись о достаточно быстром убывании метрики «на бесконечности»; или используйте теорему Уитни о вложении.]]

Задача 6.267. * Докажите, что компактное многообразие S в другом многообразии M имеет *трубчатую окрестность* U и гладкое отображение (*ретракцию*) $r : U \to S$, для которого $r|_S = \mathrm{id}_S$.

[[Возьмите многообразие N_MS, составленное из пар (p, v), где $p \in S$, а вектор v в точке p касательный к M и перпендикулярный S. Экспоненциальное отображение можно рассматривать как гладкое отображение $\exp : N_SM \to M$. Проверьте, что оно является диффеоморфизмом в окрестности S, то есть для достаточно малых v. Ретракцию получите как композицию обратного к этому отображению и естественной проекции $N_MS \to S$.]]

6.33. **Кривизна римановых многообразий.** Исследование вариации геодезических, то есть производных семейств геодезических по параметру, естественным образом приводит к понятию *кривизны Римана*. Но мы уравнение в вариациях для геодезической оставляем в виде задачи 6.277, а кривизну просто определим по некоторой формуле с оператором ковариантного дифференцирования.

Определение 6.268. Выражение (делающее из трёх векторных полей одно векторное поле)

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

называется *тензор кривизны Римана*.

Теорема 6.269. *Выражение тензора кривизны Римана является тензором в том смысле, что оно линейно по X, Y, и Z и при умножении на функцию f векторного поля X, Y, или Z всё выражение просто умножается на f.*

Доказательство. Линейность по всем аргументам ясна из формулы. Проверим, что происходит при умножении на функцию, не выписывая слагаемые, в которых функция просто выносится за скобки:

$$R_{fX,Y}Z = f(\dots) + Y(f)\nabla_X Z + \nabla_{L_Y fX} Z = f(\dots) + Y(f)\nabla_X Z + Y(f)\nabla_X Z = f(\dots).$$

Аналогично для умножения Y на функцию, так как выражение кососимметрично по перестановке X и Y. Попробуем умножить Z на функцию:

$$R_{X,Y} fZ = f(\dots) + \nabla_X(Y(f)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_X(Y(f)Z + f\nabla_Y Z) - [X,Y](f)Z = f(\dots)+$$
$$+ X(Y(f))Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z - Y(X(f))Z - X(f)\nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - [X,Y](f)Z =$$
$$= f(\dots) + X(Y(f))Z - Y(X(f))Z - [X,Y](f)Z = 0,$$

где в конце использована интерпретация скобки Ли как коммутатора при действии на функции. ☐

Доказанное утверждение означает, что мы можем выписать $R_{X,Y}Z$, зная лишь величины R^ℓ_{ijk}, такие что

$$R_{\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_\ell R^\ell_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_\ell},$$

получив выражение для координат

$$(R_{X,Y}Z)^\ell = \sum_{i,j,k} R^\ell_{ijk} X^i Y^j Z^k,$$

не содержащее производных. То есть тензор кривизны на самом деле является поточечной трилинейной операцией $T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$, гладко зависящей от точки p. Из этого, в частности, следует, что если тензор кривизны в какой-то системе координат ненулевой, то и в любой другой криволинейной системе координат он будет ненулевой.

Задача 6.270. Проверьте, что выражение $\nabla_X Y$ не является тензором по Y. Приведите пример, когда в одной системе координат все символы Кристоффеля обращаются в нуль, а в другой — нет.

Тензорный характер кривизны Римана, то есть независимость от производных участвующих векторных полей, позволяет для вычисления его значения в точке продолжать векторы из точки произвольно. Например, удобно продолжать векторы из точки до векторных полей так, чтобы векторные поля коммутировали, тогда слагаемое $\nabla_{[X,Y]}Z$ в определении тензора кривизны обнулится.

Геометрический смысл тензора кривизны исходя из определения можно понимать так: если два векторных поля X и Y коммутируют, то ковариантная производная третьего векторного поля по этим двум зависит от порядка дифференцирования (сравните с леммой 6.12), и эта зависимость как раз выражается тензором кривизны Римана.

Также мы можем связать тензор кривизны римана с понятием переноса вектора вдоль кривой. Пусть у нас есть замкнутая кривая γ, являющаяся краем двумерной поверхности S в многообразии M с координатами u, v. Тогда мы можем написать с помощью формулы Грина, обозначив для краткости $X = \frac{\partial}{\partial u}, Y = \frac{\partial}{\partial v}$:

$$\int_\gamma g(\nabla_{\dot\gamma} Z, T)\ dt = \int_\gamma g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Z, T) du + g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Z, T) dv =$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial}{\partial u} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Z, T) - \frac{\partial}{\partial v} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Z, T) \right) du \wedge dv = \int_S \left(X \left(g(\nabla_Y Z, T) \right) - Y \left(g(\nabla_X Z, T) \right) \right) du \wedge dv =$$

$$= \int_S \left(g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z, T) \right) du \wedge dv + \int_S \left(g(\nabla_Y Z, \nabla_X T) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y T) \right) du \wedge dv =$$

$$= \int_S g(R_{X,Y} Z, T) du \wedge dv + \int_S \left(g(\nabla_Y Z, \nabla_X T) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y T) \right) du \wedge dv.$$

Выражение

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y} Z, T)$$

мы будем называть *формой кривизны Римана*. Следствия полученной формулы представлены в задачах:

Задача 6.271. * Пусть векторы X и Y непараллельны в точке p и продолжены до коммутирующих векторных полей в окрестности p. Докажите что при переносе вектора Z по контуру маленького параллелограмма около точки p с направлениями сторон X и Y он меняется на

$$\frac{-R_{X,Y} Z}{\sqrt{g(X,X) g(Y,Y) - g(X,Y)^2}} A + o(A),$$

где A — площадь параллелограмма.

[[Продолжите вектор Z с помощью связности по левой стороне параллелограмма, а потом с помощью связности продолжите его слева направо. Продолжите вектор T с помощью связности по правой стороне параллелограмма, а потом продолжите его справа налево. Заметьте, что при этом в правой части формулы для $\int_\gamma g(\nabla_{\dot\gamma} Z, T)\ dt$ останется только интеграл от формы кривизны.]]

Задача 6.272. * Докажите, что при тождественном равенстве нулю тензора кривизны (полу)риманова многообразия результат переноса вектора вдоль кривой не меняется при гомотопиях кривой и в окрестности каждой точки существует система координат, в которой компоненты g постоянны.

[[Рассмотрите гомотопию между кривыми как поверхность с координатами u, v из некоторого прямоугольника, продолжения векторов до векторных полей сделайте как в предыдущей задаче.]]

У формы кривизны Римана есть некоторые симметрии. Очевидно, что она меняет знак при перестановке X и Y, но есть и другие свойства, которые описаны в следующих задачах.

Задача 6.273. Докажите первое тождество Бьянки:

$$R_{X,Y} Z + R_{Y,Z} X + R_{Z,X} Y = 0.$$

[[Можно продолжить векторы до попарно коммутирующих векторных полей и применить отсутствие кручения для коммутирующих векторных полей в виде $\nabla_X Y = \nabla_Y X$.]]

Задача 6.274. Докажите, что форма кривизны Римана

$$R(X,Y,Z,T) = g(R_{X,Y}Z,T)$$

меняет знак при перестановке X и Y, меняет знак при перестановке Z и T и не меняется при обмене пар X,Y и Z,T.

[[Считая векторные поля попарно коммутирующими, можно из совместимости ∇ с метрикой и формулы Козюля получить выражение

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,T) &= \\ &= \frac{1}{2}X(Z(g(Y,T))) + \frac{1}{2}Y(T(g(X,Z))) - \frac{1}{2}X(T(g(Y,Z))) - \frac{1}{2}Y(Z(g(X,T))) + \\ &\qquad + g(\nabla_X Z, \nabla_Y T) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X T), \end{aligned}$$

которое имеет требуемые свойства симметрии с учётом коммутирования векторных полей.]]

Задача 6.275. Получите выражения для координат формы кривизны Римана

$$R(X,Y,Z,T) = g(R_{X,Y}Z,T)$$

через координаты g.

[[Подставьте базисные векторные поля $\frac{\partial}{\partial x_i}$ в формулу из предыдущей задачи.]]

Задача 6.276. * Докажите, что форма кривизны Римана полностью определяется значениями $R(X,Y,X,Y)$ на всевозможных парах векторов X,Y.

[[Пусть V — касательное пространство в какой-то точке, так как в форму кривизны подставляется не более четырёх векторов, достаточно рассмотреть четырёхмерный случай. Исходя из свойств симметрии форма кривизны может считаться симметричной билинейной формой $\tilde{R}$ на $\wedge^2 V$, которая в силу известных свойств билинейных форм определяется своими значениями на парах ξ,ξ для всевозможных $\xi \in \wedge^2 V$. Проверьте, что при $\dim V \leqslant 3$ все ξ имеют вид $X \wedge Y$ и тогда утверждение доказано. Проверьте, что при $\dim V = 4$ в виде $X \wedge Y$ представляются те и только те ξ, которые удовлетворяют квадратичному соотношению $\xi \wedge \xi = 0$. Это означает, что R определяется своими значениями на наборах вида X,Y,X,Y с точностью до выражения, пропорционального $\det(X,Y,Z,T)$. Далее можно использовать тождество Бьянки, чтобы показать, что пропорциональные $\det(X,Y,Z,T)$ выражения можно исключить.]]

Риманова кривизна также необходима для понимания того, как меняются геодезические в зависимости от начального параметра или какого-то ещё параметра. Тогда производная по параметру задаёт векторное поле вдоль геодезической и для него можно написать дифференциальное уравнение. Подробности даны в следующей задаче.

Задача 6.277 (Уравнение Якоби). Докажите, что если имеется гладкое семейство геодезических $\{\gamma_s\}$, то производная $J = (\gamma_s)'_s$ является при данном значении s векторным полем J вдоль $\gamma = \gamma_s$, удовлетворяющим линейному дифференциальному уравнению (со второй производной в смысле ковариантного дифференцирования по кривой)

$$\ddot{J} = -R_{J,\dot\gamma}\dot\gamma.$$

[[Поясните возможность сделать предположение $[J,V]=0$ и написать формулы

$$0 = \nabla_J 0 = \nabla_J \nabla_V V = R_{J,V}V + \nabla_V\nabla_J V = R_{J,V}V + \nabla_V\nabla_V J = R_{J,V}V + \ddot{J}.$$

]]

Для читателей, знакомых с понятием тензора и тензорного произведения из линейной алгебры можно сделать такие пояснения. Понятие *тензора* или *тензорного поля* в дифференциальной геометрии означает выбор элемента некоторого тензорного произведения

$$\underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_{k} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_{\ell},$$

гладко зависящий от точки p. Более конкретно при данных значениях k и ℓ говорят о тензоре ранга (k, ℓ). Из изученного ранее мы видим, что векторное поле — это тензор ранга $(1, 0)$, дифференциальная форма степени ℓ — это тензор ранга $(0, \ell)$, антисимметричный относительно действия группы перестановок $\mathfrak{S}_\ell$ на множителях тензорного произведения. Риманова или полуриманова метрика — это тензор ранга $(0, 2)$, симметричный относительно перестановок двух множителей тензорного произведения. Тензор кривизны Римана в таких терминах имеет ранг $(1, 3)$, так как он из трёх векторов делает один полилинейным способом. Форма кривизны $R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T)$ при этом имеет ранг $(0, 4)$.

Для геометрии и физики важна также билинейная форма (или тензор ранга $(0, 2)$), которая получается в качестве свёртки тензора кривизны по паре переменных. Выбрав взаимные базисы в касательном пространстве e_i и f_i, так что $g(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, мы можем рассмотреть *тензор кривизны Риччи*

$$Ric(Y, Z) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, Y, Z, f_i) = \sum_{i=1}^{n} g(R_{e_i,Y}Z, f_i).$$

Геометрический смысл этого тензора (симметричной билинейной формы) в том, что отношение риманова объёма в окрестности точки p к объёму, пришедшему из экспоненциального отображения с касательного пространства, в квадратичном приближении в точке $x \in U(p)$ равно

$$1 - \frac{1}{6} Ric(\exp_p^{-1} x, \exp_p^{-1} x) + o(\rho(x, p)^2).$$

Эта формула получается из уравнения Якоби, так как изменение объёма можно связать со следом оператора, стоящего в правой части этого уравнения. Читатель может попробовать восстановить детали этого рассуждения самостоятельно.

Задача 6.278. * Докажите, что в трёхмерном случае риманову кривизну можно восстановить по тензору Риччи.

[[Можно проделать манипуляции в явном виде, а можно воспользоваться задачей 6.276.]]

Задача 6.279. Для метрики на области $D \subset \mathbb{R}^2$ вида

$$g(X, Y) = e^{2U}(X, Y),$$

где $U : D \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, а (X, Y) — евклидово скалярное произведение, найдите тензор кривизны Римана.

[[Для упрощения вычислений все векторные поля можно считать имеющими постоянные коэффициенты в данной системе координат, и в частности коммутирующими друг с другом. В таких предположениях формула Козюля сокращается до

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)),$$

а постоянство векторных полей позволяет её расписать как (скобки обозначают евклидово скалярное произведение)

$$2e^{2U}(\nabla_X Y, Z) = 2X(U)e^{2U}(Y, Z) + 2Y(U)e^{2U}(Z, X) - 2Z(U)e^{2U}(X, Y),$$

что упрощается до

$$(\nabla_X Y, Z) = X(U)(Y, Z) + Y(U)(Z, X) - Z(U)(X, Y),$$

или эквивалентно (с градиентом в евклидовом смысле)

$$\nabla_X Y = X(U)Y + Y(U)X - (X, Y)\operatorname{grad} U.$$

Рассмотрев поля $X = \frac{\partial}{\partial x}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ тогда можно получить

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X = U'_x Y + U'_y X, \quad \nabla_X X = U'_x X - U'_y Y, \quad \nabla_Y Y = -U'_x X + U'_y Y$$

и в итоге

$$\begin{aligned} R_{X,Y}X = \nabla_X\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_X X = U''_{xx}Y + U''_{yx}X - U''_{xy}X + U''_{yy}Y + \\ + U'_x(U'_x X + U'_y Y) + U'_y(U'_x X - U'_y Y) - U'_x(U'_x X + U'_y Y) + U'_y(-U'_x X + U'_y Y) = \\ = U''_{xx}Y + U''_{yy}Y + 0 = \Delta U \cdot Y, \end{aligned}$$

что с учётом симметрий тензора Римана даёт для произвольных векторов

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T) = \Delta U e^{-2U}\left(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z)\right).$$

]]

6.34. **Пространство-время специальной теории относительности.** Внимательное изучение показывает, что на самом деле многие нужные в физике вещи естественней записывать в терминах векторных полей и дифференциальных форм. Например, работа силы вдоль траектории естественно определяется как интеграл дифференциальной формы первой степени по ориентированной кривой.

Мы рассмотрим ещё один содержательный пример, когда в дело вступает полуриманова структура: пространство-время специальной теории относительности $\mathbb{R}^{1+3}$ с координатами t, z, y, z и полуримановой структурой (иногда выбирается противоположный знак)

$$g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz.$$

Это пространство является плоским приближением к реальной ситуации, и на самом деле выписываемые далее формулы для электромагнитного поля будут верны и в общей теории относительности, когда g будет произвольной полуримановой метрикой с той же сигнатурой $1 + 3$. Это пространство является минимальной модификацией евклидова пространства в сторону замены положительно определённой метрики на просто невырожденную.

В пространстве $\mathbb{R}^{1+3}$ векторы v с условием $g(v, v) = 0$ соответствуют движению световых лучей (по прямым данного направления), векторы с условием $g(v, v) > 0$ называются *пространственно-подобными*, а $g(v, v) < 0$ — *времениподобными*. Времениподобные векторы соответствую возможным движениям частиц положительной массы.

Задача 6.280. Докажите, что множество времениподобных векторов распадается на две компоненты связности, их можно назвать направленными в будущее и в прошлое.

Задача 6.281. Докажите, что в $\mathbb{R}^{1+3}$ для двух времениподобных векторов X, Y выполняется

$$g(X, Y)^2 \geqslant g(X, X) \cdot g(Y, Y).$$

[[Вспомните доказательство неравенства Коши–Буняковского и инвариантности сигнатуры квадратичной формы.]]

Задача 6.282. Докажите, что отношение между точками x и y «$x - y$ является направленным в будущее вектором» порождает отношение частичного порядка.

Подмногообразия в $\mathbb{R}^{1+3}$ будем называть *времениподобными*, если все их касательные векторы времениподобны, и *пространственноподобными*, если все их касательные векторы пространственноподобны.

Задача 6.283. Докажите, что времениподобные многообразия в $\mathbb{R}^{1+3}$ имеют размерность не более 1, а пространственноподобные — не более 3.

[[Вспомните про инвариантность индекса квадратичной формы.]]

Задача 6.284. Докажите, что времениподобное многообразие в $\mathbb{R}^{1+3}$ не может быть диффеоморфно окружности.

Задача 6.285. Докажите, что времениподобные прямые максимизируют $\int_\gamma \sqrt{|g(\dot\gamma, \dot\gamma)|}\, dt$ (*собственное время частицы*) среди всех времениподобных кривых, соединяющих две данные точки.

[[Выведите обратное неравенство треугольника из обратного неравенства Коши–Буняковского.]]

Аналогично ортогональным преобразованиям евклидова пространства можно рассмотреть преобразования $\mathbb{R}^{1+3}$, которые сохраняют полуриманову структуру (то есть являются *изометриями*). В рассматриваемой системе координат для полуримановой структуры обнуляются все символы Кристоффеля, геодезические оказываются прямыми линиями, параметризованными с постоянной (в смысле координат) скоростью, и всякий диффеоморфизм, сохраняющий прямые и их равномерную параметризацию, обязан быть аффинными.

Задача 6.286. Докажите аккуратно, что сохранение прямых и их равномерной параметризации влечёт аффинность изометрий $\mathbb{R}^{1+3}$.

Если рассмотреть аффинные преобразования по модулю сдвигов (очевидно являющихся изометриями), то есть рассмотреть линейные преобразования, сохраняющие g как квадратичную форму, то получится *группа Лоренца*, обозначаемая $\mathrm{O}(1,3)$, последнее обозначение можно распространить и на группу изометрий невырожденной квадратичной формы произвольной сигнатуры.

Задача 6.287. Докажите, что группа Лоренца может перевести любой направленный в будущее единичный вектор в любой другой направленный в будущее единичный вектор.

[[В силу наличия композиции и взятия обратного в группе достаточно доказать, что вектор $(1,0,0,0)$ можно перевести в любой направленный в будущее единичный вектор. Полезно выписать координаты такого линейного преобразования из $\mathrm{O}(1,3)$ явно.]]

Задача 6.288. Докажите, что любой «почти ортонормированный» базис, в котором $g(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$, можно группой Лоренца перевести в любой другой такой же базис.

[[Заметьте, что при переводе вектора с данными координатами в одном базисе в вектор с теми же координатами в другом базисе получается изометрия.]]

Задача 6.289. Докажите, что группа Лоренца имеет четыре компоненты связности.

[[Рассмотрите детерминант преобразования и возможную смену прошлого на будущее. Докажите также, что преобразования единичного детерминанта, не меняющие местами прошлое и будущее, составляют связную подгруппу.]]

Задача 6.290. * Заметьте, что множество всевозможных направлений световых лучей из начала координат в $\mathbb{R}^{1+3}$ диффеоморфно двумерной сфере. Проверьте, что при введении на ней римановой структуры из представления её в виде решения системы уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, t = 1,$$

преобразования группы Лоренца оказываются *конформными*, то есть сохраняют риманову структуру с точностью до умножения на функцию.

[[Заметьте, что на световом конусе $\{t^2 = x^2+y^2+z^2\}$ возникает вырожденная риманова структура, вырожденная вдоль световых лучей, проходящих через нуль. При этом на всякой двумерной поверхности в этом конусе, которая пересекает каждый световой луч ровно один раз и не касается световых лучей, эта риманова структура уже не является вырожденной. Докажите, что центральная проекция одной такой поверхности на другую конформна относительно их римановых структур.]]

6.35. **Движение в электромагнитном поле, уравнения Максвелла, уравнение Эйнштейна.** В этом разделе мы посмотрим геометрическую интерпретацию классической электродинамики. Дело может происходить в рассмотренном выше плоском пространстве-времени, или в полуримановом многообразии более общего вида, с сигнатурой $1+3$. В добавок к (полу)римановой структуре зададим ещё дифференциальную форму $\alpha \in \Omega^1(M)$ и рассмотрим вопрос поиска экстремальных кривых достаточно естественного функционала

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}g(\dot\gamma, \dot\gamma) \ + \alpha(\dot\gamma)\right) dt.$$

Можно проверить, что уравнение предположительно экстремальной кривой будет отличаться от уравнения геодезической слагаемым, зависящим от α следующим образом (ускорение понимается как $\ddot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$):

$$\ddot\gamma = (i_{\dot\gamma} d\alpha)^\sharp,$$

то есть для любого векторного поля X при деформациях вдоль X мы должны иметь $g(\ddot\gamma, X) = d\alpha(X, Y)$.

Задача 6.291. Проверьте эту формулу по аналогии с рассуждением для уравнения геодезической.

Такое уравнение (после добавления констант массы в g и заряда в α) в полуримановой метрике теории относительности соответствует движению заряженной частицы в электромагнитном поле $F = d\alpha$. Тот факт, что в уравнение α входит только в виде своего дифференциала можно объяснить тем, что замена α на α' с равенством $d\alpha = d\alpha'$ не меняет значение $A(\gamma)$ (если ещё дополнительно предположить, например, поверхностную односвязность многообразия). При некотором желании можно даже определить $A(\gamma)$ в некотором локальном смысле, имея лишь замкнутую форму F без глобального потенциала.

Само по себе электромагнитное поле F удовлетворяет достаточно простой (в изученных нами терминах) системе уравнений. Если добавить понятие электрического тока как формы $j \in \Omega^3(M)$, описывающее усреднённое движение большого количества заряженных частиц, то можно написать уравнения

$$dF = 0, \quad d(*F) = j.$$

Первое из них выражает уже замеченную замкнутость F, второе выражает связь F с током. Расписав эти уравнения в координатах с помощью выражения (знаки могут быть разными при разном выборе знаков в g)

$$F = (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy,$$

можно убедиться, что это на самом деле классические уравнения Максвелла в вакууме с точностью до констант.

Форму тока j при этом можно интегрировать по трёхмерным гиперповерхностям, находя полный заряд (если гиперповерхность пространственноподобна) или интерпретируя интеграл как поток заряда через двумерную пространственноподобную поверхность за заданное время. Условие $j = d(*F)$ и формула Стокса гарантируют, что интеграл тока по компактным трёхмерным многообразиям без края равен нулю, это называется «сохранение заряда». Ток также можно считать вектором J, имея в виду формулу $j = i_J \operatorname{vol}_g$, но выписанные ранее формулы показывают, что удобнее считать ток формой степени три.

Форму $*F$ при этом можно интегрировать по двумерным пространственноподобным поверхностям, находя в силу уравнения Максвелла количество заряда, ограниченного такой поверхностью в некоторой трёхмерной пространственноподобной области, краем которой является данная двумерная поверхность.

Задача 6.292. Найдите действие звёздочки Ходжа на формах $dx\wedge dt$, $dy\wedge dt$, $dz\wedge dt$, $dy\wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ в $\mathbb{R}^{1+3}$.

Задача 6.293. Выпишите уравнения для градиента и дивергенции векторного поля в стандартных координатах $\mathbb{R}^{1+3}$. Проверьте, есть ли отличия от случая евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

Задача 6.294. Выразите уравнение $d(*F) = j$ через дивергенцию и ротор (по пространственным координатам) в $\mathbb{R}^{1+3}$.

Продолжая тему физических уравнений, выпишем уравнение Эйнштейна для гравитационного поля (полуримановой структуры), которое с точностью до физических констант в четырёхмерном пространстве-времени выглядит как

$$Ric - 1/2Sg + \Lambda g = T,$$

где $S = \sum_{i=1}^4 Ric(e_i, f_i)$ — свёртка (след) тензора Риччи, *скалярная кривизна*, отвечающая за искажение объёма окрестности точки по сравнению с объёмом из экспоненциального отображения, Λ — космологическая постоянная, также известная как «тёмная энергия», а T — *тензор энергии-импульса*, который зависит от находящегося в пространстве вещества и излучения.

Уравнение Эйнштейна получается варьированием функционала действия, в котором часть, отвечающая за собственно гравитационное поле имеет вид интеграла скалярной кривизны по риманову объёму многообразия. Читатель, знакомый с методами вариационного исчисления, может проверить, что так получается уравнение без Λ и T. Константу Λ в уравнении можно получить, если добавить в действие риманов объём многообразия. Тензор энергии-импульса в таком подходе возникает при добавлении в действие части, зависящей от вещества и излучения. Часть, отвечающая за частицу и её взаимодействие с электромагнитным полем уже выписывалась выше. Часть, порождающая уравнения Максвелла, включает интегралы от $F\wedge *F$ и $\alpha\wedge j$ по многообразию, что читатель может проверить в качестве упражнения.

6.36. **Модельные пространства римановой геометрии.** После уже рассмотренных плоских (то есть нулевой кривизны) многообразий $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{1+3}$, мы рассмотрим чуть менее тривиальные римановы многообразия. Самое понятное из них — это круглая сфера $\mathbb{S}^n$, которую можно задать уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной римановой (евклидовой) метрикой

$$g = dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n.$$

Можно посчитать ковариантную производную и кривизну на сфере вручную, но кое-что можно узнать и из общих соображений. Группа вращений, сохраняющих g, является ортогональной группой $\mathrm{O}(n+1)$. Если в касательном пространстве сферы, в некоторой точке p, задан ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$, то эта группа может перевести p в любую другую точку и преобразовать базис в любой другой базис.

Допустим, нам надо посчитать значение $R_{e_i,e_j}e_k$ для любого выбора трёх базисных векторов. Можно считать $i \neq j$ из свойства антисимметричности $R_{X,Y}Z$ по X и Y. Для касательных векторов e_i и e_j найдётся изометрическая копия двумерной сферы $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^n$, которая содержит точку p и касается векторов e_i, e_j.

Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^{n-3}$, дополнительную к $\mathbb{S}^2$. Иначе говоря, мы рассматриваем ортогональное разложение $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ и пересекаем его со сферой. Заметим, что мы можем вращать второе слагаемое $\mathbb{R}^{n-2}$, оставляя на месте первое, при этом сфера будет вращаться изометриями, сохраняющими её метрику g. Такими вращениями мы можем сделать любое ортогональное преобразование на нормальных к $\mathbb{S}^2$ векторах. При фиксированных e_i, e_j из свойств симметрии формы кривизны Римана выражение $g(R_{e_1,e_j}Z, T)$ является кососимметричной формой от Z и T. Эта кососимметричная форма инвариантна относительно вращений ортогонального к $\mathbb{S}^2$ пространства, в частности должна сохраняться при перемене мест Z на T, то есть она равна нулю при любых $Z, T \perp e_1, e_2$.

Следующим этапом надо выяснить значения $R_{e_i,e_j}Z$ при $Z \perp \langle e_i, e_j\rangle$, всё ещё возможно, что это значение является линейной комбинацией e_i и e_j. Но тогда аналогично предыдущим рассуждениям линейные по Z выражения $g(R_{e_i,e_j}Z, e_i)$ и $g(R_{e_i,e_j}Z, e_j)$ инвариантны относительно любых вращений Z в ортогональном дополнении к $\langle e_1, e_2\rangle$, то есть обязаны быть равными нулю. Следовательно $R_{e_i,e_j}e_k$ будет равно нулю для случаев, когда e_k не совпадает с e_i или e_j.

Остаётся понять, чему равны $R_{e_i,e_j}e_i$ и $R_{e_i,e_j}e_j$, которые по доказанному должны лежать в линейной оболочке e_1 и e_2. Для выяснения этого вопроса нам достаточно работать на двумерной сфере. Для нахождения кривизны можно использовать формулу из задачи 6.279 для *стереографической* системы координат на сфере

$$x = \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \quad y = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \quad z = \frac{1-u^2-v^2}{1+v^2+u^2}.$$

Задача 6.295 (Стереографическая проекция). Докажите, что центральная проекция из полюса (точки $(1, 0, \dots, 0)$) сферы $\mathbb{S}^n$ на гиперплоскость $\{x_0 = 0\}$ задаёт систему координат на сфере без одной точки, в которой метрика имеет вид

$$g = \frac{4dx_1 \otimes dx_1 + 4dx_2 \otimes dx_2 + \dots + 4dx_n \otimes dx_n}{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^2}.$$

[[Заметьте, что стереографическая проекция сохраняет углы между касательными векторами, то есть должна переводить метрику на сфере с метрику евклидова пространства с точностью до умножения на функцию. Найдите эту функцию, рассмотрев одномерную подсферу, проходящую через полюс.]]

Можно также рассуждать о кривизне двумерной сферы геометрически, заодно посмотрев на связь кривизны и углов многоугольника из геодезических. Заметим, что на двумерной сфере при движении вдоль геодезической γ условие $\nabla_{\dot\gamma} Z = 0$ означает, что угол между $\dot\gamma$ и Z сохраняется. При переносе по четырёхугольнику из геодезических вектор Z окажется повёрнут на сумму углов, дополнительных к углам этого четырёхугольника. Эта сумма (из школьной стереометрии, см. также пояснения далее) равна площади четырёхугольника плюс 2π. Так как поворот на 2π не меняет вектор, то поворот просто пропорционален площади четырёхугольника и направлен против часовой стрелки, отсюда с учётом результата задачи 6.271 следует:

Теорема 6.296. *В любой точке сферы $\mathbb{S}^n$ для ортогонального базиса касательных векторов выполняется*

$$R_{e_i,e_j} e_k = -e_\ell, R_{e_i,e_j} e_\ell = e_k$$

при условии, что $i = k, j = \ell$, в остальных случая компоненты римановой кривизны равны нулю. Это означает, что сфера имеет постоянную кривизну 1.

Можно записать значения формы кривизны сферы на произвольных векторах с помощью формулы

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y} Z, T) = g(X, T)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, T),$$

на векторах ортонормированного базиса она выполняется, на остальные она продолжается по полилинейности.

В следующих задачах обозначено элементарное объяснение использованного факта про суммы углов сферических двуугольников и треугольников, из которых следует использованный выше факт про углы четырёхугольника.

Задача 6.297. Докажите, что на единичной двумерной сфере сферический двуугольник, образованный двумя половинами больших окружностей с углом φ между ними, имеет площадь 2φ.

[[Используйте вращение вокруг ребра двуугольника, которое сохраняет площадь поверхности сферы. Это даёт доказательство для рациональных φ/π, остальные случаи получаются предельным переходом.]]

Задача 6.298. Докажите, что на единичной двумерной сфере сферический треугольник с внутренними углами α, β, γ имеет площадь

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

[[Продолжите стороны треугольника до больших окружностей, которые разобьют сферу на восемь треугольников, которые разбиваются на центрально-симметричные пары. Запишите уравнения на общую площадь сферы и на площади возникающих на картинке двуугольников.]]

Задача 6.299. Выведите определение тензора кривизны сферы произвольной размерности из задачи 6.276 и информации о кривизне двумерной сферы.

Можно развить пример со сферой. Рассмотрим полуриманову метрику

$$g = -dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n.$$

в $\mathbb{R}^{1+n}$, и зададим гиперповерхность $\mathbb{H}^n$ (*гиперболическое пространство*) условиями

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1,\ x_0 > 0.$$

Рассмотрев группу линейных изометрий $\mathbb{R}^{1+n}$, $\mathrm{O}(1, n)$, можно заметить, что она может перевести любую точку $\mathbb{H}^n$ в любую другую и любой ортогональный базис касательных векторов в любой другой, см. задачу 6.288. Ситуация аналогична случаю сферы, и это на самом деле максимально возможный набор симметрий для риманова многообразия, как показывает следующая задача:

Задача 6.300. Докажите, что если изометрия связного риманова многообразия M оставляет на месте одну точку p и действует на касательном пространстве T_pM тождественно, то она сама является тождественным отображением.

[[Используйте экспоненциальное отображение для доказательства локальной тождественности, далее используйте связность.]]

Задача 6.301. Докажите, что группа $\mathrm{O}(n+1)$ даёт все изометрии $\mathbb{S}^n$, а группа $\mathrm{O}^+(1,n)$ — подгруппа $\mathrm{O}(1,n)$, не меняющая местами связные компоненты гиперболоида — даёт все изометрии $\mathbb{H}^n$.

[[Сделайте композицию какой-то изометрии φ с линейной изометрией φ так, чтобы эта композиция $\varphi \circ \psi$ оставляла не месте некоторую точку сферы/гиперболического пространства и не меняла касательные векторы в этой точке. Примените результат предыдущей задачи.]]

Также можно построить изометричные вложения $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^n$ через любую точку и пару непараллельных касательных векторов в ней и убедиться, что $\mathbb{H}^n$ можно произвольно вращать, оставляя на месте $\mathbb{H}^2$, как и было в случае сферы. Читатель может проверить технические детали и сделать явное вычисление на $\mathbb{H}^2$ (например, в приведённых ниже координатах Пуанкаре), чтобы установить:

Теорема 6.302. *В любой точке гиперболического пространства $\mathbb{H}^n$ для ортогонального базиса касательных векторов выполняется*

$$R_{e_i,e_j}e_k = e_\ell, R_{e_i,e_j}e_\ell = -e_k$$

при условии, что $i = k, j = \ell$, в остальных случая компоненты римановой кривизны равны нулю. Это означает, что гиперболическое пространство имеет постоянную кривизну -1.

Аналогично случаю сферы, можно записать значения формы кривизны гиперболического пространства на произвольных векторах с помощью формулы

$$R(X,Y,Z,T) = g(R_{X,Y}Z,T) = -g(X,T)g(Y,Z) + g(X,Z)g(Y,T).$$

Задача 6.303 (Координаты Пуанкаре). Докажите, что центральная проекция из точки $(-1,0,\dots,0)$ на гиперплоскость $\{x_0 = 0\}$ задаёт систему координат на гиперболическом пространстве (со значениями в единичном открытом шаре), в которой метрика имеет вид

$$g = \frac{4dx_1 \otimes dx_1 + 4dx_2 \otimes dx_2 + \dots + 4dx_n \otimes dx_n}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}.$$

[[Как и в задаче про стереографическую проекцию сферы, удобно сначала доказать сохранение углов, то есть *конформность* данного отображения.]]

Задача 6.304. Выпишите явный вид геодезических в натуральной параметризации на сфере и в гиперболическом пространстве (как в гиперповерхностях в $\mathbb{R}^{n+1}$).

[[Используя симметрии сферы и гиперболического пространства, покажите, что геодезическая обязана лежать в том же двумерном линейном подпространстве объемлющего $\mathbb{R}^{n+1}$, где лежат её начальная точка и начальная скорость. Для сферы после этого нетрудно выписать явную формулу, а для гиперболического пространства надо понять, зачем нужны функции $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$ вместо обычных косинуса и синуса.]]

Задача 6.305. * Проверьте, что в гиперболическом пространстве любой отрезок геодезической является кратчайшей.

[[Убедитесь, что гиперболическое пространство геодезически полно и его экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом. Далее воспользуйтесь теоремой Хопфа–Ринова и рассуждениями в её доказательстве. Иначе, можно доказать, что метрическая проекция на геодезическую в гиперболическом пространстве 1-липшицева.]]

6.37. **Пространства де Ситтера и метрика Шварцшильда.** В этом разделе мы рассмотрим некоторые несложные полуримановы многообразия. Конструкцию гиперболического пространства можно далее модифицировать. В той же метрике специальной теории относительности

$$g = -dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n.$$

в $\mathbb{R}^{n+1}$ можно задать гиперповерхность (*пространство де Ситтера*) $\mathrm{d}\mathbb{S}^n$ условием

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Если $n = 2$, то это получится однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$, на примере которого удобно проверить основные свойства такого пространства.

Метрика g ограничивается на пространство де Ситтера до полуримановой метрики с сигнатурой $1, n-1$. Направления кривых, таких что $g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0$ и $\ddot\gamma = 0$ (*световые лучи*), даются прямыми, лежащими на гиперболоиде (см. задачу 6.257). При $n = 2$ через каждую точку проходит пара таких прямых, в больших размерностях их будет бесконечное количество. Достаточно познавательно, что в пространстве де Ситтера есть такие пары точек, идущие из которых световые лучи никогда не встретятся друг с другом.

Группа симметрий формы g в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathrm{O}(1, n)$, может перевести любую точку $\mathrm{d}\mathbb{S}^n$ в любую другую, и даже перевести любой вектор с условием $g(X, X) = -1$ (*времениподобный единичный вектор*) в любой аналогичный вектор в другой точке, см задачу 6.288. Это означает, что с точки зрения любого наблюдателя это «пространство-время» выглядит одинаково, хотя и представление его в виде гиперболоида создаёт ощущение, что оно «расширяется», когда время x_0 положительно и возрастает. Пространственная часть (например, при $x_0 = 0$) пространства де Ситтера выглядит как сфера постоянной положительной кривизны.

В общей теории относительности такое пространство-время является одним из решений уравнений Эйнштейна с положительной космологической постоянной (за счёт того, что оно в определённом смысле является пространством постоянной кривизны) и нулевым тензором энергии-импульса.

Задача 6.306. Докажите, что в части пространства де Ситтера $\mathrm{d}\mathbb{S}^4$, выделенной условием $x_4 > 0$, в системе координат $x_0/x_4, x_1/x_4, x_2/x_4, x_3/x_4$ все геодезические этого пространства являются прямыми линиями. По Ньютону такая система координат должна называться *инерциальной*, так как частицы, взаимодействующие только с гравитационным полем, движутся в ней равномерно и прямолинейно.

[[Докажите, что всякое двумерное линейное подпространство $P \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в пересечении с $\mathrm{d}\mathbb{S}^4$ даёт геодезическую или пару геодезических.]]

Аналогично можно определить анти-пространство де Ситтера $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^{n+1}$ как гиперповерхность, заданную уравнением

$$-u^2 - v^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1,$$

с метрикой, которая получена на гиперповерхность ограничением плоской метрики

$$g = -du \otimes du - dv \otimes dv + dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n.$$

После ограничения метрика будет иметь сигнатуру $1+n$. Световые лучи в этой метрике также даются прямыми, лежащими на соответствующем гиперболоиде (при $n = 1$ это будет однополостный гиперболоид), однако кривые движения частиц положительной массы (то есть кривые с условием $g(\dot\gamma, \dot\gamma) < 0$) могут, например, иметь вид

$$u = \cos t, \quad v = \sin t,$$

то есть частицы могут пройти по некоторому маршруту и вернуться в ту же точку этого пространства-времени. Если нам не нравятся такие путешествия во времени, то введя в анти-пространстве де Ситтера координату t так, чтобы

$$u = \sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \cos t, \quad v = \sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sin t,$$

можно перейти к его универсальному накрытию $\widetilde{\mathrm{Ad}\mathbb{S}}^{n+1}$ (см. раздел 8.12) с координатами $t, x_1, \dots, x_n$, в котором t уже рассматривается как произвольное действительное число, а не с точностью до прибавления $2\pi k$.

Для сравнения, пространство де Ситтера $\mathrm{d}\mathbb{S}^2$ не имеет проблем с замкнутыми времениподобными траекториями, но тоже имеет нетривиальное универсальное накрытие $\widetilde{\mathrm{d}\mathbb{S}}^2$, так как оно совпадает с $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2$ с точностью до смены знака метрики.

Задача 6.307. Напишите выражение для метрики $\widetilde{\mathrm{Ad}\mathbb{S}}^{n+1}$ в координатах $(t, x_1, \dots, x_n)$.

Анти-пространство де Ситтера имеет группу симметрий $\mathrm{O}(2, n)$ и точно так же, как в случае с пространством де Ситтера, с точки зрения любого наблюдателя, движущегося во времениподобном направлении, оно выглядит одинаково. То же верно и для его универсального накрытия. Пространственная часть анти-пространства де Ситтера (при $t = 0$) выглядит как гиперболическое пространство постоянной отрицательной кривизны. В общей теории относительности такое анти-пространство де Ситтера является одним из решений уравнений Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной и нулевым тензором энергии-импульса.

Задача 6.308. Докажите, что в части анти-пространства де Ситтера $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^4$, выделенной условием $u > 0$, в системе координат $v/u, x_1/u, x_2/u, x_3/u$ все геодезические являются прямыми линиями.

[[Аналогично задаче про пространство де Ситтера.]]

Выпишем намного менее симметричную, но имеющую полезный физический смысл *метрику Шварцшильда*:

$$g = -\frac{r-\rho}{r} dt \otimes dt + \frac{r}{r-\rho} dr \otimes dr + r^2(\sin^2 \vartheta d\varphi \otimes d\varphi + d\vartheta \otimes d\vartheta).$$

В этой метрике t играет роль времени, хотя собственное время находящихся в фиксированном пространственном положении объектов идёт медленнее из-за множителя $\frac{r-\rho}{r}$, $\rho > 0$ — это некоторая константа. Переменная $r > \rho$ играет роль радиальной координаты, но не равна расстоянию, радиальное расстояние можно найти как интеграл

$$\int \sqrt{\frac{r}{r-\rho}}\, dr.$$

Переменные φ и ϑ играют роль углов сферических координат. В принципе, эту формулу можно написать с заменой r, φ, ϑ на x, y, z, но она тогда будет намного длиннее.

Задача 6.309. Возьмите интеграл и посчитайте радиальное расстояние в метрике Шварцшильда.

В целом метрика Шварцшильда симметрична относительно трёхмерных вращений, не меняющих время, а также инвариантна при сдвиге времени. Это позволяет при анализе движения объекта в этой метрике выбрать координаты так, что $\vartheta = \pi/2$ и упростить вычисления.

Задача 6.310. Определите в метрике Шварцшильда поведение световых лучей, идущих в радиальном направлении.

[[Положите $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = 0$ и решите уравнение

$$-\frac{r-\rho}{r}dt^2 + \frac{r}{r-\rho}dr^2 = 0.$$

]]

Задача 6.311. Множитель $1 - \rho/r$ в формуле метрики Шварцшильда соответствует, после извлечения из него квадратного корня, замедлению собственного времени для наблюдателя, находящего на поверхности Земли, по сравнению с наблюдателем, находящимся дальше от Земли. Оцените, сильнее ли этот эффект эффекта замедления собственного времени от движения спутника на круговой орбите для низкой околоземной орбиты и для геостационарной орбиты.

[[Учтите, что $\rho = 2GM/c^2$ в реальных единицах, а замедление собственного времени при движении со скоростью v описывается формулой $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.]]

Задача 6.312. * Определите радиальное движение объектов положительной массы (то есть геодезические с $g(\dot\gamma, \dot\gamma) < 0$) в метрике Шварцшильда. Покажите, что за конечное собственное время движущийся к центру объект уходит в зону $t = +\infty$. Это говорит о том, что метрика Шварцшильда требует какого-то продолжения за пределы координатной карты, в которой она определена.

[[Варьируйте функционал действия $\int_\gamma g(\dot\gamma, \dot\gamma)\, ds$ (здесь $\dot\gamma$ обозначает производную по параметру s, не путать с производной по «времени» в координатах Шварцшильда t). Инвариантность относительно сдвига t даст закон сохранения энергии.]]

Задача 6.313. ** Изучите движение объектов положительной массы в метрике Шварцшильда, если они движутся в плоскости $\vartheta = \pi/2$. Посчитайте величину эффектов отклонения световых лучей и смещения перигелия орбиты.

[[Можно напрямую варьировать функционал действия $\int_\gamma g(\dot\gamma, \dot\gamma)\, ds$. Его варьирование по времени t и углу поворота φ даст законы сохранения энергии и углового момента:

$$\frac{r-\rho}{r}\frac{dt}{ds} = \mathrm{const}, \quad r^2\frac{d\varphi}{ds} = \mathrm{const}.$$

Варьирование по координате r даст уравнение второго порядка, которое надо будет изучать.]]

6.38. **Площадь поверхности по Минковскому.** Рассмотрим риманово многообразие (M, g) размерности n и гиперповерхность $H \subset M$, то есть вложенное в M многообразие без края размерности $n - 1$. Метрика g индуцирует на H метрику $\bar g$ и мы хотим интерпретировать риманов объём H в терминах риманова объёма в M. Частным случаем этой ситуации будет компактная ориентированная гиперповерхность без края $H \subset \mathbb{R}^n$ с индуцированной метрикой. Возьмём $\varepsilon > 0$ и рассмотрим метрическую ε-окрестность H, обозначив её для краткости H_ε.

Теорема 6.314 (Формула Минковского для объёма гиперповерхности)**.** *Для компактной гладкой гиперповерхности и её риманова объёма имеет место формула*

$$\operatorname{vol}_{\bar g} H = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\operatorname{vol}_g H_\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

Доказательство. Для всякой точки $p \notin H$ расстояние $\operatorname{dist}(p, H)$ достигается на некоторой точке $x \in H$ (возможно, не одной). При достаточно малом расстоянии $\operatorname{dist}(p, x)$ это означает в силу формулы (6.17), что существует геодезическая γ между p и x длины $\operatorname{dist}(p, x)$. Из компактности H следует, что «достаточно малое расстояние» можно выбрать одинаковым в этом рассуждении независимо от x. Так как γ реализует минимальное расстояние от p до H, она должна быть перпендикулярна H в точке x.

Предположим, что мы можем непрерывно выбрать нормаль $n(x)$ к H в каждой точке $x \in H$, этот выбор будет тогда гладко зависеть от x. Если этого сделать нельзя, то это можно будет сделать после перехода к некоторому накрытию $\widetilde{M} \to M$ и $\widetilde{H} \to H$ (см. раздел 8.12), которое просто удвоит все рассматриваемые объёмы. Пока же мы просто предполагаем, что выбрать нормаль возможно.

Построим отображение $f : H \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ следующим образом. Для пары $x \in H$ и $|t| < \varepsilon$ возьмём геодезическую γ_x с началом в x и касательной в x равной $n(x)$ и положим

$$f(x, t) = \gamma_x(t).$$

При достаточно малом ε отображение будет определено и будет гладко зависеть от x и t по теореме о гладкой зависимости решений дифференциального уравнения от начальных данных. Рассуждения из начала доказательства показывают, что, по крайней мере при достаточно малом ε, это отображение является сюръекцией на окрестность H_ε. Более того, из компактности H и теоремы об обратном отображении следует, что при достаточно малом ε отображение f является диффеоморфизмом. Читателю предлагается проверить это, накрыв $H \times \{0\}$ конечным числом открытых множеств вида $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, на которых f является диффеоморфизмом, и выбрав ε настолько малым, что 2ε-окрестность любой точки $H \times \{0\}$ полностью содержится в одном из множеств покрытия.

Дифференциал f в любой точке $(x, 0)$ тождественно действует на T_xH и переводит единичный ортогональный вектор к T_xH в цилиндре $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ в единичный ортогональный вектор к T_xH в M. Если мы обозначим метрику произведения на $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ за $g^\times$, то можно будет сказать, что f^*g совпадает с $g^\times$ над H. Из непрерывности метрик это означает, что для всякого $\delta > 0$ при достаточно малом ε метрики $g^\times$ и f^*g будут отличаться не более чем в $1 + \delta$ раз на цилиндре $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, а соответствующие им римановы объёмы — соответственно не более чем в $(1 + \delta)^n$ раз. Оценки

$$(1+\delta)^{-n} \operatorname{vol}_{g^\times} \leqslant \operatorname{vol}_{f^*g} \leqslant (1+\delta)^n \operatorname{vol}_{g^\times}$$

и формулы (6.14) достаточно, чтобы сделать вывод, что

$$\operatorname{vol}_{\bar g} H = \frac{\operatorname{vol}_{g^\times} H \times (-\varepsilon, \varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\operatorname{vol}_{f^*g} H \times (-\varepsilon, \varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\operatorname{vol}_g H_\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

$\square$

Аналогичная формула верна и для k-мерных подмногообразий в n-мерных многообразиях, надо только поставить в знаменатель $v_{n-k}\varepsilon^{n-k}$, где v_{n-k} — объём евклидова единичного $(n-k)$-мерного шара, читатель может поразмышлять об этом самостоятельно и подумать, на что надо заменить цилиндр $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ в этом случае.

Можно пойти в обратном направлении и считать формулу Минковского определением. Для простоты вернёмся в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и для произвольного множества $G \subseteq \mathbb{R}^n$ выражение

$$\mathfrak{M}(G) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\mu G_\varepsilon - \mu G}{\varepsilon}. \tag{6.18}$$

будем называть *площадь поверхности по Минковскому* множества G. Если предел не существует, то можно взять нижний предел и обозначить его $\underline{\mathfrak{M}}(G)$. Аналогично приведённым выше рассуждениям устанавливается, что если граница G является гладкой гиперповерхностью, то эта формула даёт $(n-1)$-мерный риманов объём этой гиперповерхности.

Задача 6.315. Найдите риманов объём единичной сферы $\mathbb{S}^n$.

[[Наверное проще всего будет это сделать, рассмотрев ε-окрестность единичного шара в $\mathbb{R}^{n+1}$, которая сама является шаром радиуса $1+\varepsilon$, и применив формулу (6.18).]]

Задача 6.316. * Посчитайте риманов объём ε-окрестности точки (метрического шара радиуса ε) во внутренней метрике сферы и во внутренней метрике гиперболического пространства.

[[Заметьте, что можно представить n-мерный объём как интеграл $(n-1)$-мерных объёмов $\operatorname{vol}_n U_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \operatorname{vol}_{n-1} \partial U_t \; dt$ по соображениям, аналогичным формуле Минковского. Из симметричности сферы и гиперболического пространства следует, что $\partial U(t)$ изометрично стандартной $(n-1)$-мерной сфере некоторого радиуса, который остаётся выразить через t.]]

6.39. **Неравенство Брунна–Минковского и изопериметрическое неравенство.** Классическая изопериметрическая задача заключается в том, чтобы найти множество $G \subset \mathbb{R}^n$, имеющее минимальную площадь поверхности (например, понимаемую как $\underline{\mathfrak{M}}(G)$ по Минковскому) при фиксированном объёме μG. Естественно предположить, что экстремум достигается на шаре, однако доказательство этого утверждения не столь просто. Мы наметим последовательность рассуждений, детали можно заполнить самостоятельно или посмотреть в книгах.

Определим понятие *суммы Минковского* для двух множеств $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ как

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}.$$

Множество $X+Y$ можно представить как линейную проекцию произведения $X\times Y \subset \mathbb{R}^{2n}$, поэтому достаточно очевидно, что оно будет компактным в случае, если множества X и Y компактны. Также нетрудно заметить, что $X+Y$ будет открыто, если хотя бы одно из исходных множеств открыто. Однако, существуют примеры, когда X и Y измеримы по Лебегу, но их сумма Минковского $X+Y$ не измерима по Лебегу. Для целей дальнейшего изложения, когда мы хотим оценить меру Лебега множества $X+Y$ снизу, можно считать, что мы приблизили X и Y по мере содержащимися в них компактными $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, оценили снизу меру Лебега $X'+Y'$, и таким образом оценили снизу нижнюю меру Лебега множества $X+Y$.

Положим для числа $t \in \mathbb{R}$, $tX = \{tx : x \in X\}$. Пусть B — единичный шар с центром в нуле. Тогда замыкание t-окрестности G можно выразить в этих терминах как $G + tB$, оценка площади поверхности G снизу будет следовать из оценки объёма $G+tB$ снизу, в силу определение площади поверхности по Минковскому. Ключевым фактом в этой оценке будет *неравенство Брунна–Минковского*

$$\mu(X+Y)^{1/n} \geqslant \mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n}$$

для измеримых $X, Y, X+Y \subseteq \mathbb{R}^n$ (если $X+Y$ не измеримо, то берём его нижнюю меру Лебега). Предполагая выполнение этого неравенства, мы получаем

$$\mu(G+tB) \geqslant \left(\mu(G)^{1/n} + t\mu(B)^{1/n}\right)^n.$$

Переходя к пределу при $t \to +0$, получаем

$$\underline{\mathfrak{M}}(G) \geqslant n\mu(G)^{\frac{n-1}{n}}\mu(B)^{1/n}$$

с равенством, выполняющимся для любого шара. Например, для единичного шара по итогам задачи 6.315

$$\underline{\mathfrak{M}}(B) = n\mu B = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

и это есть равенство, а для произвольного шара при увеличении его радиуса до R обе части равенства умножаются на R^{n-1} и оно остаётся в силе.

Неравенство Брунна–Минковского можно доказывать по-разному, план одного из рассуждений такой:

1) Вывести неравенство Брунна–Минковского из его логарифмической формы (для любого $0 < t < 1$)

$$\mu((1-t)X' + tY') \geqslant \mu(X')^{1-t}\mu(Y')^t,$$

положив $X' = \frac{1}{1-t}X$, $Y' = \frac{1}{t}Y$ и пооптимизировав правую часть по параметру t, используя равенства $\mu((1-t)X') = (1-t)^n\mu X'$, $\mu(tY') = t^n\mu Y'$.

2) Вывести логарифмический вариант из функционального варианта

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\,dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx\right)^{1-t} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\,dx\right)^t$$

для неотрицательных измеримых h, f, g, удовлетворяющих условию

$$h((1-t)x+ty) \geqslant f(x)^{1-t}g(y)^t$$

при любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и фиксированном $0 < t < 1$. Для вывода надо взять в качестве f, g, h индикаторные функции $X' + Y', X', Y'$ соответственно.

3) Функциональный вариант доказать для одномерного случая. После нормировки интегралов от f и g на единицу теорема 5.86 сводит функциональное неравенство Брунна–Минковского на прямой к неравенству Брунна–Минковского для измеримых множеств $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ в виде

$$C \supseteq A + B \Rightarrow \mu C \geqslant \mu A + \mu B.$$

4) В функциональном неравенстве Брунна–Минковского сделать шаг индукции по размерности следующим образом. Ввести функции

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\,dx_n,\\
\bar{g}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\,dx_n,\\
\bar{h}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\,dx_n.
\end{aligned}$$

Применить одномерный вариант неравенства, чтобы доказать, что они удовлетворяют условию

$$\bar{h}((1-t)x+ty) \geqslant \bar{f}(x)^{1-t}\bar{g}(y)^t,$$

а потом применить предположение индукции к этим функциям.

Задача 6.317. Докажите неравенство Брунна–Минковского на прямой для компактных множеств.

[[Заметьте, что множества A и B можно двигать туда-сюда на прямой, не меняя их меру и меру множества $A+B$. Также заметьте, что в случае, когда множества компактны и $\sup A = 0 = \inf B$ утверждение очевидно.]]

Задача 6.318. Проверьте остальные шаги по приведённому выше плану, чтобы доказать неравенство Брунна–Минковского.

7. Гармонический анализ и функциональные пространства

7.1. Пространства L_p, неравенства Гёльдера и Минковского. Для начала напомним некоторые сведения про интегрируемые по Лебегу функции и зафиксируем терминологию. Для некоторого измеримого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ рассмотрим измеримые по Лебегу функции $f : X \to \mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)|\ dx$, будем назвать их *абсолютно интегрируемыми* на X. Для таких функций интеграл без модуля $\int_X f(x)\ dx$ тоже существует и является конечным. Расстояние между абсолютно интегрируемыми функциями удобно измерять как $\int_X |f(x) - g(x)|\ dx$, для любых двух абсолютно интегрируемых функций расстояние между ними конечно.

Задача 7.1. Докажите, что расстояние между двумя абсолютно интегрируемыми функциями конечно.

[[Проинтегрируйте неравенство $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$.]]

Нам будет удобно считать интегрируемые функции, находящиеся в таком смысле на нулевом расстоянии друг от друга (то есть равные друг другу почти всюду по теореме 5.55), равными; то есть формально говоря, взять факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. Это факторпространство обозначается как $L_1(X)$ и его *нормой* называется величина

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)|\ dx,$$

которая не зависит от того, какую конкретно функцию f из её класса эквивалентности мы взяли.

Задача 7.2. Докажите, что норма в $L_1(X)$ не зависит от выбора класса эквивалентности.

[[Примените неравенство треугольника $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ или разбейте интеграл на два: по множеству, где функции отличаются и по множеству, где они не отличаются.]]

Величина $\|f\|$ называется нормой на векторном пространстве $L_1(X)$, так как по определению $L_1(X)$ она обращается в нуль тогда и только тогда, когда $f = 0$ как элемент этого пространства. Если бы мы не брали факторпространство, а рассматривали бы абсолютно интегрируемые функции как есть, то эту величину следовало бы называть *полунормой*, допускающей равенство нулю на ненулевых элементах векторного пространства. Далее мы иногда будем говорить об элементах пространства $L_1(X)$ как о функциях, если это не приводит к неверным утверждениям. Более абстрактное изучение нормированных векторных пространств мы оставляем до раздела 7.19, а до тех пор будем изучать лишь конкретные примеры норм и полунорм.

Мы собираемся несколько обобщить понятие абсолютно интегрируемой функции. Для измеримого по Лебегу $X \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p \geqslant 1$ пусть $L_p(X)$ — это пространство измеримых по Лебегу функций на X с конечной полунормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\ dx\right)^{1/p},$$

а точнее $L_p(X)$ — это факторпространство таких функций по модулю функций, равных нулю почти всюду. Опять-таки, мы иногда будем считать элементы $L_p(X)$ (как факторпространства) функциями, если это не приводит к недоразумениям.

Чтобы иметь право называть $\|f\|_p$ (полу)нормой, нам надо проверить некоторые свойства. Во-первых, очевидное свойство 1-однородности: $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$ для любой константы c. Другое свойство (полу)нормы — неравенство треугольника — не так очевидно при $p > 1$, и мы постепенно будем его устанавливать.

Теорема 7.3 (Неравенство Гёльдера). *Возьмём $p, q > 1$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $f \in L_p(X)$ и $g \in L_q(X)$. Тогда*

$$\int_X |fg|\, dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Доказательство. Если одна из норм справа равна нулю, то соответствующая функция равна нулю почти всюду и интеграл слева тоже равен нулю. Иначе мы можем домножить функции на константы так, чтобы оказалось $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, обе части неравенства при этом домножатся на произведение констант. В этом случае мы можем получить искомое неравенство $\int_X |fg|\, dx \leqslant 1$, интегрируя неравенство

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q},$$

последнее неравенство для двух неотрицательных чисел $|f(x)|, |g(x)|$ остаётся в качестве упражнения. □

Следствие 7.4. *Для измеримых функций и чисел $p, q > 0$, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, имеет место формула*

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int_X fg\, dx : \|g\|_q \leqslant 1\right\}, \tag{7.1}$$

Доказательство. Действительно, норма f не менее супремума в правой части по неравенству Гёльдера, причём равенство достигается при выборе

$$g(x) = \frac{\operatorname{sgn} f(x) |f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

□

Следующее определение обобщает понятие выпуклости функции, которое мы изучали для функции одной переменной, на функции нескольких переменных.

Определение 7.5. Функция $f : V \to \mathbb{R}$ на векторном пространстве называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in V$ и любого $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое для всех $x \neq y$ и $t \in (0, 1)$.

Выпуклость можно определить не только для функции на всём векторном пространстве, но и для функции на его *выпуклом* подмножестве $C \subseteq V$, то есть на множестве C, которое вместе со всякой парой точек $x, y \in C$ содержит и соединяющий их отрезок $\{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$.

Лемма 7.6. *Если в семействе функций $f_\alpha : V \to \mathbb{R}$ все функции выпуклые, то*

$$f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$$

тоже выпуклая (если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$).

Доказательство. Утверждение следует из того, что супремум суммы не превосходит суммы супремумов. Заметим на будущее, что выпуклость функции нескольких переменных по определению означает выпуклость всех её ограничений на прямые, а значит утверждения типа этой леммы достаточно проверить для функций одной переменной, например, нарисовав для себя убедительный рисунок. □

На следующих задачах читатель может проверить своё понимание понятия выпуклой функции.

Задача 7.7. Сформулируйте достаточное условия выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции нескольких переменных.

[[Вспомните про ограничение функции на прямые.]]

Задача 7.8 (Неравенство Йенсена для конечных сумм). Докажите, что если функция $f : V \to \mathbb{R}$ выпуклая, то для любого набора $v_1, \dots, v_N \in V$ и неотрицательных коэффициентов $t_1, \dots, t_N$, таких что $t_1 + t_2 + \dots + t_N = 1$, выполняется

$$f(t_1v_1 + \dots + t_Nv_N) \leqslant t_1f(v_1) + \dots + t_Nf(v_N).$$

[[Используйте индукцию по N.]]

Задача 7.9. Положительная функция на выпуклом множестве C называется *логарифмически выпуклой*, если её логарифм выпуклый, то есть

$$f((1-t)x + ty) \leqslant f(x)^{1-t} \cdot f(y)^t$$

при любых $x, y \in C$, $t \in (0, 1)$. Докажите, что сумма логарифмически выпуклых функций логарифмически выпукла и что по сути это утверждение эквивалентно неравенству Гёльдера.

[[Заметьте, что достаточно рассматривать функции одной переменной на промежутке. Проверьте, что функция логарифмически выпукла тогда и только тогда, когда она является супремумом семейства функций вида ab^x. Для сумм функций такого вида неравенство логарифмической выпуклости является неравенством Гёльдера.]]

Наконец, теперь мы можем установить неравенство треугольника в пространстве L_p, если расстояние понимать как $\rho(f, g) = \|f - g\|_p$.

Теорема 7.10 (Неравенство Минковского). *Для функций $f, g \in L_p$ при $p \geqslant 1$*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Доказательство. При $p = 1$ это неравенство очевидно. Иначе, из формулы (7.1) следует, что норма $\|\cdot\|_p$ является выпуклой функцией на L_p, как супремум линейных функций. Значит, в частности,

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right).$$

Из 1-однородности нормы мы можем вынести множитель $1/2$ и получить требуемое неравенство. ☐

Таким образом мы корректно определили норму в пространстве $L_p(X)$ при $p \geqslant 1$.

7.2. **Полнота пространств L_p.** Векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$ (сейчас мы рассматриваем нормы на конкретных примерах, а абстрактное определение будет дано в разделе 7.19) всегда является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x, y) = \|x - y\|$ и мы можем использовать соответствующую терминологию. В частности мы хотим доказать, что пространство $L_p(X)$ *полное*, то есть всякая фундаментальная последовательность в нём имеет предел. Заметим, что единственность предела обеспечивается факторизацией пространства $L_p(X)$ по почти всюду нулевым функциям и следующей из этого невырожденностью метрики.

Лемма 7.11. *Пусть у последовательности функций* (u_k) *из* $L_p(X)$ *сумма*

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p$$

оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *определена для почти всех* x *и*

$$\|S\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p.$$

Доказательство. Определим возрастающую последовательность неотрицательных функций по формуле

$$\rho_N(x) = \left(\sum_{k=1}^{N} |u_k(x)|\right)^p.$$

По неравенству Минковского (возведённому в степень p)

$$\int_X \rho_N(x) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} \|u_k\|_p\right)^p \leqslant \Sigma^p,$$

значит по теореме о монотонной сходимости функция

$$\rho(x) = \lim_{N\to\infty} \rho_N(x)$$

почти всюду конечна и имеет конечный интеграл. Это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ почти всюду абсолютно сходится к некоторой функции $S(x)$.

Кроме того, последовательность $\sigma_N(x) = \left|\sum_{k=1}^{N} u_k(x)\right|^p$ почти всюду сходится к $|S(x)|^p$ и ограничена функцией $\rho(x)$. По теореме об ограниченной сходимости интегралы от σ_N стремятся к интегралу от $|S|^p$, что можно переписать как

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} u_k(x)\right\|_p^p \to \|S\|_p^p.$$

Тогда неравенство

$$\|S\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p$$

получается из неравенства Минковского предельным переходом. $\square$

Теорема 7.12. *Пространство* $L_p(X)$ *полно.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность (f_k) в $L_p(X)$. Как и в случае критерия Коши для действительных чисел, достаточно доказать сходимость какой-то её подпоследовательности. Можно выбрать подпоследовательность так, чтобы после перехода к подпоследовательности выполнялось неравенство $\|f_k - f_\ell\|_p \leqslant 2^{-k-1}$ при всех $\ell > k$.

Положим $u_1 = f_1, u_k = f_k - f_{k-1}$ для $k \geqslant 2$. Вопрос сводится к изучению суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Нам известно, что $\|u_k\|_p \leqslant 2^{-k}$. Предыдущая лемма показывает, что сумма ряда почти всюду сходится к функции $S \in L_p(X)$. Более того, для остатка ряда (по той же лемме, применённой к остатку) имеет место неравенство

$$\left\|\sum_{k=N}^{\infty} u_k\right\|_p \leqslant 2^{-N+1},$$

что означает сходимость частичных сумм ряда (а значит и последовательности (f_k)) к функции $S(x)$ в смысле нормы пространства $L_p(X)$. $\square$

Фактически в предыдущих рассуждениях мы использовали такое общее наблюдение: в нормированном пространстве вопрос полноты сводится к вопросу сходимости рядов, у которых сходятся суммы норм.

Задача 7.13. Покажите на примере, что сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

[[Рассмотрите последовательность ступенек высоты 1, у которых мера основания стремится к нулю, но при этом ступеньки бесконечно много раз пробегают по множеству X.]]

Заметим, что определение пространств $L_p(X)$ легко распространяется на случай, когда на некоторой сигма-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств фиксированного множества X задана счётно аддитивная мера и мы рассматриваем *измеримые относительно сигма-алгебры* $\mathcal{A}$ функции f, то есть функции, для которых $\{f(x) \leqslant c\} \in \mathcal{A}$ при любом c. *Сигма-алгебра* — это семейство подмножеств, включающее пустое множество, замкнутое относительно взятия дополнения и не более чем счётных объединений и пересечений. Такие абстрактные пространства с сигма-алгеброй и с мерой на сигма-алгебре важны для теории вероятностей, в теории вероятностей также используется условие нормировки $\mu X = 1$, при выполнении которого мера называется *вероятностной*.

В качестве важного частного случая общей конструкции рассмотрим $\mathbb{N}$ со считающей мерой, ставящей в соответствие подмножеству $X \subset \mathbb{N}$ количество его элементов. В этой мере измеримы все подмножества $\mathbb{N}$ и она счётно-аддитивна (проверьте это). Пространства $L_p(\mathbb{N})$ обычно обозначаются более коротко как ℓ_p. Говоря более простым языком, ℓ_p — это пространство числовых последовательностей (c_k), у которых норм,а определённая как

$$\|(c_k)\|_p = \left(\sum_k |c_k|^p\right)^{1/p},$$

конечна. Для последовательностей точно так же доказываются неравенства Гёльдера и Минковского, и вообще пространства ℓ_p мы далее рассматриваем как частный случай пространств $L_p(X)$.

7.3. **Приближения функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими.** Мы хотим приблизить функцию из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в смысле нормы L_p достаточно приличными функциями. На этот раз мы рассмотрим функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества, назовём их *элементарно ступенчатые*. В случае функции одного аргумента из $L_p(\mathbb{R})$ эту будут функции, которые являются ступенчатыми на некотором разбиении $\mathbb{R}$ на конечное число промежутков, как в определении сумм Дарбу и интеграла Римана.

Теорема 7.14. *Всякую $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить элементарно ступенчатой.*

Доказательство. Сначала с помощью теоремы 5.57 можно приблизить всякую функцию f функцией g, ограниченной некоторой константой M. Точнее, чтобы получить приближение в норме L_p нам надо обрезать функцию $|f|^p$ константой M^p, мало меняя интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, dx$, тогда интеграл от разности между f и её обрезанным вариантом оценивается исходя из интегрирования неравенств

$$|f(x) - M|^p \leqslant |f(x)|^p - M^p, \quad \text{при} \quad f(x) > M$$

и

$$|f(x)+M|^p \leqslant |f(x)|^p - M^p, \quad \text{при} \quad f(x) < -M$$

Теперь мы пытаемся приблизить ограниченную функцию g. Теорема 5.62 показывает, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\, dx = \lim_{a\in+\infty} \int_{[-a,a]^n} |g(x)|^p\, dx,$$

поэтому обнулив g за пределами некоторого достаточно большого куба $Q = [-a,a]^n$, мы приблизим её в L_p норме функцией h, которая ограничена числом M и имеет носитель в Q. Так как h ещё и измерима по Лебегу, то она оказывается в $L_1(Q)$.

Теперь приблизим h по теореме 5.59 элементарно ступенчатой s в норме L_1. Заметим, что в этой процедуре итоговая функция s также будет ограничена числом M.

В итоге мы знаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)-s(x)|\, dx \leqslant \varepsilon.$$

Тогда, имея в виду $|h(x)-s(x)|^p = |h(x)-s(x)|^{p-1}\cdot|h(x)-s(x)|$, можно записать

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)-s(x)|^p\, dx \leqslant M^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)-s(x)|\, dx \leqslant M^{p-1}\varepsilon.$$

Так как ε мы выбирали после M, то значит мы можем сколь угодно близко приблизить h элементарно ступенчатой функцией и в норме L_p. В итоге, по неравенству Минковского, мы приблизили f сколь угодно близко элементарно ступенчатой функцией. $\square$

Теорема 7.15. *Всякую $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.*

Доказательство. Надо воспользоваться предыдущей теоремой и потом приблизить каждую ступеньку над элементарным множеством. Точнее, достаточно приблизить в норме L_p ступеньку над параллелепипедом P, то есть приблизить характеристическую функцию χ_P в данной норме бесконечно гладкой функцией. Нетрудно построить (с помощью свёртки или явно) бесконечно гладкую функцию g, которая равна 1 на P, равна нулю за пределами ε-окрестности $U_\varepsilon(P)$ и вообще принимает значения в $[0,1]$. Тогда очевидно (U_ε обозначает ε-окрестность)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_P(x)-g(x)|^p\, dx \leqslant \mu U_\varepsilon(P) - \mu P,$$

что стремится к нулю при $\varepsilon\to+0$. $\square$

Задача 7.16 (Непрерывность сдвига в пространстве L_p). Пусть $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t)-f(x)|^p\, dx \to 0 \text{ при } |t|\to 0.$$

[[Сначала докажите утверждение для непрерывной функции с компактным носителем, используя её равномерную непрерывность. Потом приблизьте произвольную функцию $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ непрерывной с компактным носителем и воспользуйтесь неравенством Минковского.]]

7.4. **Ограниченная вариация.** Нам нужно ввести некоторые классы функций одной переменной, с которыми будет удобно работать при рассмотрении рядов и интегралов Фурье.

Определение 7.17. Функция f на промежутке I имеет *ограниченную вариацию*, если для любых $x_0 < x_1 < \dots < x_N \in I$ (в любом количестве)

$$|f(x_0)-f(x_1)| + |f(x_1)-f(x_2)| + \dots + |f(x_{N-1})-f(x_N)| \leqslant M,$$

для некоторой константы M. Наименьшую константу M в этом неравенстве назовём *вариацией функции* f, $\|f\|_B$.

Можно проверить, что величина $\|f\|_B$ является *полунормой* («полу» здесь существенно, так как у постоянной функции вариация нулевая). Внимательный читатель может заметить, что вариация — это на самом деле длина кривой в одномерном варианте, в частности кривая в $\mathbb{R}^n$ спрямляема тогда и только тогда, когда все её координаты имеют ограниченную вариацию. Заметим также, что в отличие от случая кривых мы не требуем от функции ограниченной вариации непрерывности, последствия этого обсуждались в задаче 3.87.

Для монотонной на отрезке функции вариация равна модулю её приращения на отрезке (проверьте это), а в общем случае ограниченность вариации можно свести к монотонности следующей теоремой:

Лемма 7.18. *Функцию ограниченной вариации на отрезке* $[a, b]$ *можно представить в виде суммы двух функций* $f = u + d$, *одна из которых возрастает, а другая убывает. При этом* $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$ *и если* f *была непрерывна, то* u *и* d *тоже будут непрерывны.*

В этом утверждении $[a, b]$ можно взять равным равным $[-\infty, +\infty]$, так как функция ограниченной вариации, по критерию Коши, обязательно имеет пределы в $-\infty$ и в $+\infty$.

Доказательство. Будем считать $f(a) = 0$, этого можно добиться прибавлением константы к функции, что не влияет на утверждения леммы. Для фиксированного $x \in [a, b]$ изучим вариацию f на отрезке $[a, x]$. Всякий набор в определении вариации можно продолжить до набора, содержащего концы отрезка, сумма модулей приращений при этом не уменьшится, поэтому можно считать, что в определении вариации участвуют только наборы чисел, содержащие концы отрезка. Тогда рассмотрим всевозможные наборы

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = x$$

и определим *вариацию вверх* на этом отрезке $u(x)$ как точную верхнюю грань сумм тех приращений $f(x_k) - f(x_{k-1})$, которые положительны. Определим *вариацию вниз* на этом отрезке $d(x)$ как точную нижнюю грань сумм тех приращений $f(x_k) - f(x_{k-1})$, которые отрицательны. Всякий набор приращений f (без модулей) в сумме даёт $f(x)$ и его можно разбить на две части, одна из которых участвует в определении $u(x)$, а другая — в определении $d(x)$. Из этого получается, что

$$f(x) = u(x) + d(x), \quad \|f\|_{B[a,x]} = u(x) - d(x).$$

Также очевидно по определению, что $u(x)$ возрастает, $d(x)$ убывает и на всём отрезке выполняется $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$.

Теперь, если f непрерывна, то функции u и $-d$ не убывают и нам надо доказать, что у них нет скачков. Их сумма равна вариации f на отрезке $[a, x]$, и нам тогда достаточно доказать, что у неё, как у неубывающей функции от x, нет скачков. Для завершения доказательства достаточно заметить, что требуемое утверждение является частным случаем теоремы 3.86, так как одномерная длина кривой и есть вариация.

□

Функции ограниченной вариации хороши тем, что допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией. Это основывается на оценке интеграла произведения монотонной функции и интегрируемой по второй теореме о среднем 5.74, напомним соответствующую формулу (в которой g монотонна):

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^{\vartheta} f(x)\,dx + g(b-0)\int_{\vartheta}^b f(x)\,dx.$$

С учётом леммы 7.18, для любой, не обязательно монотонной, функции ограниченной вариации g из второй теоремы о среднем следует оценка

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant (|g(a-0)| + \|g\|_B) \cdot \sup_{\vartheta\in[a,b]} \left|\int_\vartheta^b f(x)\,dx\right|.$$

7.5. **Абсолютная непрерывность, обобщённая формула Ньютона–Лейбница и обобщённое интегрирование по частям.** В этом разделе мы ещё раз вернёмся к формуле Ньютона–Лейбница, в виде выражения приращения функции на отрезке как интеграла от её производной. Теорема 5.102 говорит, что эта формула верна, если сама функция F является интегралом с переменным верхним пределом от некоторой интегрируемой по Лебегу функции f, тогда почти всюду $F' = f$. Но такое утверждение слишком неявно и не позволяет понять, верна или нет формула для данной функции F. Более явное утверждение содержится в теореме 5.104, которая говорит, что формула работает для липшицевой функции F. Оказывается, условие липшицевости можно ослабить до следующего:

Определение 7.19. Функция F на промежутке I *абсолютно непрерывна*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что любых $x_1 \leqslant y_1 \leqslant x_2 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N \leqslant y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_N - y_N| \leqslant \delta$$

следует

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \cdots + |F(x_N) - F(y_N)| \leqslant \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю. Нетрудно убедиться по определению, что абсолютно непрерывная функция на конечном отрезке имеет ограниченную вариацию, так как её вариация на всяком отрезке длины δ будет не более ε (δ и ε взяты из определения).

Теорема 7.20. *Всякая обобщённая первообразная*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

для некоторой $f \in L_1[a,b]$, является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с f.

Доказательство. Из теоремы 5.102 следует, что производная F почти всюду равна f. Докажем абсолютную непрерывность F. По теореме 5.57 приблизим f ограниченной g так что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Пусть $|g(x)| \leqslant M$. Если у нас есть объединение конечного набора отрезков S суммарной длины $< \delta$, то мы имеем

$$\int_S |g(x)|\,dx \leqslant M\delta,\ \int_S |f(x) - g(x)| \ < \varepsilon \Rightarrow \int_S |f(x)|\,dx \leqslant M\delta + \varepsilon.$$

Выбирая $\delta < \varepsilon/M$ (выбор не зависит от S), получаем

$$\int_S |f(x)|\,dx \leqslant 2\varepsilon.$$

но это означает, что сумма приращений F на отрезках множества S не более 2ε при условии $\mu S < \delta$, что и означает абсолютную непрерывность по определению. ☐

Теорема 7.21. *Абсолютно непрерывная функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ почти всюду имеет производную и является обобщённой первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона–Лейбница*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Доказательство. Во-первых, можно считать F возрастающей, так как в её разложении в сумму возрастающей и убывающей по лемме 7.18, обе функции получатся абсолютно непрерывными (проверьте это самостоятельно).

Далее рассуждения аналогичны доказательству теоремы 5.104. В начале доказательства теоремы 5.104 мы рассматриваем правую верхнюю производную F, обозначив её φ. Из монотонности F мы имеем неравенство $\varphi \geqslant 0$. Если интеграл от φ конечен, то мы обозначаем абсолютно непрерывную (по теореме 7.20) функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$$

и дальнейшие рассуждения для функции $G = F - \Phi$, имеющей почти всюду нулевую правую верхнюю производную, из доказательства теоремы 5.104 проходят. В конце доказательства теоремы 5.104 мы применили липшицевость для оценки суммарного приращения функции на некоторой конечной системе интервалов достаточно малой суммарной длины, но для этой оценки как раз достаточно было абсолютной непрерывности по определению — если сумма длин интервалов менее δ, то сумма модулей приращений функции на этих интервалах будет не более ε. В итоге мы опять получаем неравенство

$$F(b) - F(a) \geqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Интеграл от нижней правой производной ψ тоже будет существовать, так как она заключена между 0 и φ, тогда те же рассуждения для правой нижней производной (с заменой $F \mapsto -F$) дадут неравенство

$$F(b) - F(a) \leqslant \int_a^b \psi(x)\,dx,$$

из которого будет следовать, что правая верхняя и правая нижняя производная совпадают почти всюду и дают просто правую производную с интегралом, равным приращению F на отрезке. Значит F представляется в виде интеграла от своей правой производной с переменным верхним пределом, а значит у неё есть производная почти всюду по теореме 5.102.

Осталось рассмотреть случай, которого не было в теореме 5.104. Если интеграл от φ оказался бесконечен, то обрежем функцию φ значением $M > 0$ до φ_M, определим Φ_M как интеграл от обрезанной φ_M. Для функции $G = F - \Phi_M$, у которой верхняя правая производная почти всюду неотрицательна, мы тем же способом докажем, что её приращение на отрезке неотрицательно. В силу произвольности $M > 0$ и стремления к бесконечности приращения Φ_M на отрезке, отсюда последует, что приращение F на отрезке бесконечно, то есть такого случая на самом деле быть не может. ☐

Мы будем применять абсолютную непрерывность в такой ситуации:

Следствие 7.22. *Если $f \in L_1[a, b]$, а g абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b fg\,dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx,$$

где $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Доказательство. Действительно, производная g' при этих условиях существует почти всюду, функция F абсолютно непрерывна по теореме 7.20, отсюда функция Fg тоже абсолютно непрерывна (это легко вывести из определения абсолютной непрерывности и ограниченности F и g), её производная почти всюду равна $fg+Fg'$, и к её приращению применима формула Ньютона–Лейбница. □

7.6. **Борелевские меры на отрезках, интеграл Лебега–Стилтьеса.** Приведём конструкцию, которая даёт понимание структуры *конечной борелевской меры* на отрезке, то есть счётно аддитивной меры, определённой и конечной на всех борелевских подмножествах отрезка.

Рассмотрим для начала возрастающую и ограниченную функцию $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ и определим меры промежутков как

$$\mu_g[x, y] = g(y + 0) - g(x - 0),\ \mu_g(x, y) = g(y - 0) - g(x + 0),$$
$$\mu_g[x, y) = g(y - 0) - g(x - 0),\ \mu_g(x, y] = g(y + 0) - g(x + 0).$$

Такое определение продолжается до всевозможных элементарных множеств, состоящих из конечного числа промежутков на $[a, b]$. Заметим, что в отличие от стандартной меры Лебега, эта мера может давать ненулевое значение множеству, состоящему из одной точки, если g в этой точке имеет скачок.

Далее можно продолжить определение меры до открытых подмножеств отрезка, определив меру открытого множества U как точную верхнюю грань мер элементарных множеств, содержащихся в U, и аналогично определить меру для компактных (замкнутых) подмножеств отрезка K как точную нижнюю грань мер элементарных множеств, содержащих K. Далее верхняя мера $\overline{\mu_g}X$ произвольного множества определяется как точная нижняя грань мер открытых множеств, содержащих X, а нижняя мера $\underline{\mu_g}X$ — как точная верхняя грань мер компактных множеств, содержащихся в X. Впрочем, возможны и другие конструкции, основанные на возможности продолжить меру на сигма-алгебру, порождённую элементарными множествами, то есть на все борелевские подмножества отрезка.

Обратно, если у нас есть борелевская мера ν на отрезке, то мы можем определить *функцию распределения* этой меры как

$$g(x) = \nu[a, x)$$

и заметить, что мера ν восстанавливается из функции g по описанной выше процедуре. Изменение функции на константу не меняет меру, также нам не важно, какое именно значение функция распределения принимает в точке разрыва, важны лишь её левый и правый пределы.

Обратите внимание, что понятие измеримости подмножества отрезка относительно стандартной меры Лебега и введённой меры μ_g могут отличаться. Например в стандартной мере Лебега канторово множество $K \subset [0, 1]$ (состоящее из чисел, которые в троичной записи можно записать цифрами 0 и 2) имеет меру нуль и всякое его подмножество имеет меру нуль. Однако, описав K как множество чисел из цифр $0, 2$ и заменив 2 на 1 и считая число представленным уже в двоичной системе счисления, мы получим отображение $f : K \to [0, 1]$, которое биективно кроме счётного множества исключений. Тогда стандартная мера на отрезке даст нам с помощью f единичную меру на K. Рассматривая теперь K как подмножество отрезка $[0, 1]$, мы продолжим эту меру нулём на $[0, 1] \setminus K$. Этой мере соответствует некоторая функция распределения, которая помогает решить задачу 5.105. А так как на отрезке есть множества, неизмеримые относительно стандартной меры Лебега, то и относительно этой меры не все подмножества канторова множества будут измеримы.

Далее, аналогично стандартному интегралу Лебега, определяется *интеграл Лебега–Стилтьеса*

$$\int_a^b f(x)d\mu_g = \int_a^b f(x)dg(x),$$

в определении которого мера Лебега будет заменена на меру μ_g. Функция f при этом должна быть измерима относительно меры μ_g (достаточно, чтобы f была борелевской) и либо неотрицательной (тогда интегралу разрешается принимать значение $+\infty$), либо абсолютно интегрируемой относительно μ_g (тогда интеграл конечен).

Основные свойства такого интеграла (линейность, монотонность, счётная аддитивность) аналогичны свойствам обычного интеграла Лебега, нет только непрерывности интеграла по верхнему пределу интегрирования, так как сама функция распределения g (то есть интеграл характеристической функции полуинтервала) уже может иметь скачки.

Задача 7.23. Докажите, что

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leqslant \mu_g[a,b]\cdot\|f\|_C,$$

где $\|f\|_C = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

Дальнейшее обобщение интеграла Лебега–Стилтьеса — это рассмотрение функций g ограниченной вариации вместо монотонных. По лемме 7.18 имеет место разложение $g = g_\uparrow + g_\downarrow$ в сумму возрастающей и убывающей функции с выполнением $\|g\|_B = \|g_\uparrow\|_B + \|g_\downarrow\|_B$, и мы можем положить

$$\int_a^b f(x)\ dg(x) = \int_a^b f(x)\ dg_\uparrow(x) - \int_a^b f(x)\ d(-g_\downarrow)(x),$$

где выражения в правой части понимаются как интегралы по соответствующим мерам. Тогда это выражение будет линейно не только по f, но и по g.

Задача 7.24. * Докажите, что для g ограниченной вариации

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leqslant \|g\|_B\cdot\|f\|_C,$$

причём неравенство может быть сколь угодно близко к равенству даже для непрерывных f.

В принципе, можно было бы работать и на всей прямой $\mathbb{R}$ вместо отрезка $[a,b]$, при этом ничего принципиально не меняется для g, вариация которых на прямой конечна, или хотя бы конечна на всяком отрезке. Этот случай важен в теории вероятностей, когда рассматриваются функции распределения действительных случайных величин.

Задача 7.25. Докажите, что последовательность функций $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, которые равномерно ограничены и имеют равномерно ограниченную вариацию, имеет поточечно сходящуюся подпоследовательность.

[[По лемме 7.18 достаточно рассматривать монотонные функции g_n. Переходом к подпоследовательности нетрудно добиться сходимости в одной точке, с помощью достаточно аккуратных рассуждений можно добиться сходимости в счётном множестве точек, например во всех рациональных точках отрезка. Это позволяет идентифицировать предельную функцию с точностью до значений в счётном множестве точек, далее надо ещё раз сделать переход к подпоследовательности.]]

Задача 7.26. * Докажите, что в условиях предыдущей задачи переход к подпоследовательности (g_{n_k}) не позволит добиться сходимости каждой последовательности интегралов

$$\int_a^b f dg_{n_k}$$

для всех ограниченных борелевских f.

[[Контрпример можно построить на возрастающих g_n, принимающих только значения 0 и 1.]]

7.7. **Борелевские меры со знаком на $\mathbb{R}^n$ и плотность меры.** В более общем контексте, можно определить *меру со знаком* на борелевских подмножествах $\mathbb{R}^n$, как счётно-аддитивную меру, которой разрешено принимать и отрицательные значения. *Вариация* меры со знаком μ определяется как мера без знака, по формуле

$$|\mu|(X) = \sup\left\{\sum_i |\mu(X_i)| : \text{по счётным разбиениям } X = \bigsqcup_i X_i\right\}.$$

Это определение в некотором смысле обобщает определение вариации для функции распределения.

Имеет место соответствующее обобщение леммы 7.18:

Теорема 7.27 (Теорема Хана о разложении меры со знаком)**.** *Борелевская мера со знаком μ конечной вариации на $\mathbb{R}^n$ даёт разложение $\mathbb{R}^n = P \sqcup N$ так, что для любого борелевского $X \subseteq P$ оказывается $\mu(X) \geqslant 0$, а для любого борелевского $X \subseteq N$ оказывается $\mu(X) \leqslant 0$. Таким образом μ раскладывается в разность неотрицательных борелевских мер μ_P на P и μ_N на N и $|\mu| = \mu_P + \mu_N$.*

Доказательство. Будем рассматривать только борелевские множества. Для всякого X положим

$$\mu_+(X) = \sup\{\mu Y : Y \subseteq X\}, \quad \mu_-(X) = \inf\{\mu(Y) : Y \subseteq X\}.$$

Мы предположили, что вариация μ ограничена, значит эти величины тоже ограничены. Возьмём $A < \mu_+(\mathbb{R}^n)$ и множество X_1, такое что $\mu(X_1) \geqslant A$. Если $\mu_-(X_1) = 0$, то на этом остановимся, иначе найдём $Y_1 \subseteq X_1$, такое что

$$\mu(Y_1) \leqslant \mu_-(X_1)/2 < 0.$$

Тогда у нового множества $X_2 = X_1 \setminus Y_1$ окажется $\mu(X_2) \geqslant \mu(X_1)$ и $\mu_-(X_2) \geqslant 1/2\mu_-(X_1)$. Построим так упорядоченную по включению последовательность X_k с возрастающими $\mu(X_k)$ и стремящимися к нулю $\mu_-(X_k)$. Пусть теперь $Z = \bigcap_k X_k$. У этого множества $\mu(Z) \geqslant \mu(X_1) \geqslant A$ и $\mu_-(Z) = 0$, так как при наличии подмножества Z отрицательной меры $-\delta$ мы бы имели $\mu_-(X_k) \leqslant -\delta$ на всех шагах, что противоречит построению.

В итоге, мы умеем строит «положительное» (то есть не содержащее подмножеств отрицательной меры) множество Z_1, мера которого не менее, скажем $\mu_+(\mathbb{R}^n)/2$. Потом в дополнении $\mathbb{R}^n \setminus Z_1$ мы найдём положительное Z_2, у которого $\mu(Z_2) \geqslant \mu_+(\mathbb{R}^n \setminus Z_1)/2$, и продолжаем далее, имея последовательность непересекающихся положительных множеств со свойством

$$\mu(Z_k) \geqslant \mu_+(\mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_{k-1}))/2.$$

Их объединение $P = \bigcup_k Z_k$ будет положительным и в $N = \mathbb{R}^n \setminus P$ уже не будет подмножеств положительной меры, так как на каждом шаге построения $\mu_+(\mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_{k-1}))$ убывало как минимум в два раза и в итоге

$$N = \bigcap_k \mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_{k-1})$$

уже не может содержать подмножеств положительной меры. □

Произвольную борелевскую меру можно представлять себе как некоторое распределение массы. В принципе, масса может быть сосредоточена в одной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, тогда соответствующую меру можно определить как $\delta(X) = M$, если $X \ni x_0$ и $\delta(X) = 0$, если $X \not\ni x_0$.

Задача 7.28. Представьте дельта-меру, сосредоточенную в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ с помощью функции распределения, как в предыдущем разделе.

Также полезно иметь критерий, когда мера *имеет плотность*, то есть может быть задана формулой

$$\nu X = \int_X f(x)\, dx,$$

этот критерий даётся в следующем определении и теореме:

Определение 7.29. Борелевская мера ν на $\mathbb{R}^n$ *абсолютно непрерывна* относительно стандартной меры Лебега μ, если для всякого борелевского X, у которого лебегова мера $\mu X = 0$, оказывается также $\nu X = 0$.

Теорема 7.30 (Теорема Радона–Никодима в $\mathbb{R}^n$). *Пусть неотрицательная конечная борелевская мера ν на $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Тогда у меры ν есть* плотность, *то есть $f \geqslant 0$, такая что для всякого борелевского X*

$$\nu X = \int_X f(x)\, dx.$$

Доказательство. Будем рассматривать только борелевские множества. Положим

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^n) : f \geqslant 0, \forall X, \nu X \geqslant \int_X f(x)\, dx \right\}.$$

Заметим, что если $f, g \in \mathcal{F}$, то $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ тоже лежит в $\mathcal{F}$. Действительно, пусть

$$A = \{x : f(x) \leqslant g(x)\}, B = \{x : f(x) > g(x)\},$$

тогда

$$\nu(X) = \nu(X \cap A) + \nu(X \cap B) \geqslant \int_{X\cap A} g(x)\, dx + \int_{X\cap B} f(x)\, dx = \int_X h(x)\, dx.$$

Рассмотрим последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}$, такую что

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\, dx \to \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx : f \in \mathcal{F} \right\}, \quad n \to \infty.$$

По предыдущему замечанию, заменяя f_k на $\max\{f_1, \dots, f_k\}$, можно считать эту последовательность поточечно возрастающей к некоторой f, а по теореме о монотонной сходимости получается, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx : g \in \mathcal{F} \right\}.$$

Мы хотим доказать, что f является искомой плотностью. Рассмотрим теперь меру, заданную по формуле

$$\lambda X = \nu X - \int_X f(x)\, dx,$$

которая по определению $\mathcal{F}$ неотрицательна и даёт нуль множествам лебеговой меры нуль. Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что λ нулевая.

Если это не так, $\lambda(\mathbb{R}^n) = 2\varepsilon > 0$, то для некоторого ограниченного Y будет по непрерывности (которая следует из счётной аддитивности) $\lambda Y > \varepsilon$. Подберём $\delta > 0$ так, чтобы $\delta\mu Y < \varepsilon$ и рассмотрим меру со знаком $\varkappa = (\lambda - \delta\mu)|_Y$, здесь *ограничение меры* на множество Y определяется как $\nu|_Y(X) = \nu(X \cap Y)$.

По выбору $\varkappa(Y) > 0$, и теорема о разложении меры со знаком даст борелевское $P \subseteq Y$, на котором $\varkappa \geqslant 0$ и $\varkappa(P) > 0$. Это означает, что для всякого $X \subseteq P$

$$\lambda X \geqslant \delta\mu X.$$

Если мы положим $g(x) = \delta\chi_P(x)$, то оказывается, что

$$\lambda(X) \geqslant \int_X g(x)\,dx$$

для всякого борелевского X (не обязательно лежащего в P), то есть $f+g \in \mathcal{F}$ по определению. Так как $\varkappa(P) > 0$, из свойства абсолютной непрерывности следует, что $\mu(P) > 0$, а значит

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = \delta\mu P > 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)\,dx > \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx,$$

что противоречит построению f. $\square$

На самом деле в последних двух теоремах конечность меры или ограниченность вариации не так важны, это свойство можно потребовать лишь локально, в каждом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^n$. Также в этом рассуждении было не важно, что μ является стандартной мерой Лебега, теорема Радона–Никодима может использоваться для сравнения любых двух мер, если одна абсолютно непрерывна относительно другой (выпишите определение абсолютной непрерывности одной меры относительно другой в качестве упражнения).

В свете теоремы Радона–Никодима можно интерпретировать формулу замены переменных в интеграле 6.98 как сравнение меры Лебега на открытом множестве и *прямого образа* меры Лебега относительно данного отображения, $\varphi_*\mu(X) = \mu(\varphi^{-1}(X))$. Локально можно установить, что эти меры отличаются не более чем на константу, хотя бы потому, что расстояние увеличивается не более чем в константу раз. Значит они абсолютно непрерывны одна относительно другой, а соответствующая функция плотности может быть найдена из локального линейного приближения отображения.

Возвращаясь к более элементарным вопросам, можно заметить, что теорема Радона–Никодима обобщает утверждение (теоремы 7.21 и 7.20) о том, что абсолютно непрерывная на отрезке функция представляется как интеграл с переменным верхним пределом, просто потому что такая функция есть функция распределения меры (со знаком), абсолютно непрерывной относительно стандартной меры Лебега.

Задача 7.31 (Теорема Лебега о разложении). Докажите, что неотрицательная конечная борелевская мера ν на $\mathbb{R}^n$ раскладывается в сумму абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега μ) меры ν_c и *сингулярной относительно меры Лебега* меры ν_s. Последнее означает, что существует множество $X \subseteq \mathbb{R}$, такое что $\nu_s(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$ и $\mu(X) = 0$.

[[Заметьте, что в доказательстве теоремы Радона–Никодима абсолютная непрерывность была нужна лишь на последнем шаге, который надо модифицировать для изучения сингулярной части меры.]]

7.8. **Осцилляция и убывание коэффициентов Фурье.** В этом разделе мы возвращаемся к более простым вещам. Мы установим лемму Римана об осцилляции для функций из $L_1(\mathbb{R})$ и аналогичные оценки для скорости убывания коэффициентов Фурье.

Мы будем рассматривать интеграл от комплекснозначной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, который понимается как интеграл от действительной части плюс умноженный на i интеграл от мнимой части. Работа с интегралом комплекснозначной функции аналогична работе и интегралом действительной функции, можно даже определить соответствующие пространства L_p и убедиться, что их ранее установленные свойства переносятся на комплексный случай. Также отметим, что и в действительном, и в комплексном случае норма L_2 порождена скалярным произведением (черта сверху означает комплексное сопряжение)

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

как

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

Запишем выражение (коэффициент Фурье с точностью до умножения на константу)

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx,$$

и сформулируем его очевидные свойства:

Теорема 7.32. *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $|c_f(y)| \leqslant \|f\|_1$ и $c_f(y)$ непрерывно зависит от y.*

Доказательство. Оценка $|c_f(y)|$ очевидна, а теорема об ограниченной сходимости 5.69 (по модулю всё ограничено $|f(x)|$) разрешает предельный переход под знаком интеграла, значит $c_f(y)$ непрерывно зависит от y. □

Теорема 7.33 (Лемма об осцилляции). *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx$$

стремится к нулю при $y \to \infty$.

Доказательство. При наличии достаточной гладкости функции f с компактным носителем можно получить оценки на порядок убывания $c_f(y)$ при $y \to \infty$. Например, если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то интегрируя по частям (дифференцируя функцию и интегрируя экспоненту), мы получаем

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\frac{e^{-ixy}}{-iy} = f(x)\frac{e^{-ixy}}{-iy}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\frac{e^{-ixy}}{iy}\, dx =$$
$$= \frac{1}{iy}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\, dx = \frac{c_{f'}(y)}{iy} = \dots = \frac{c_{f^{(k)}}(y)}{(iy)^k} = O(1/y^k), \quad y \to \infty,$$

При интегрировании по частям возникающие слагаемые вида $f^{(\ell)}(x)e^{-ixy}\big|_{-\infty}^{+\infty}$ будут равны нулю в силу компактности носителя функции и её производных.

По теореме 7.15 найдём бесконечно гладкую g с компактным носителем, такую что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Тогда очевидно, что для любого $y \in \mathbb{R}$

$$|c_f(y) - c_g(y)| = |c_{f-g}(y)| \leqslant \varepsilon.$$

При этом для бесконечно гладкой функции с компактным носителем $c_g(y) \to 0$ по замеченному в начале доказательства. Отсюда следует, что верхний предел $|c_f(y)|$ не более ε. А так как $\varepsilon > 0$ в этом рассуждении любое, то на самом деле предел $c_f(y)$ просто равен нулю. □

Задача 7.34. Можно было доказать лемму об осцилляции другим способом, с помощью приближения функции элементарно ступенчатой. Проверьте, что для элементарно ступенчатой функции g выполняется $c_g(y) = O(1/y)$.

[[Проверьте это для одной ступеньки.]]

Интегрирование по частям позволяет уточнить порядок убывания $c_f(y)$ для дифференцируемых несколько раз функций:

Следствие 7.35. *Если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то*

$$c_f(y) = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \quad y \to \infty.$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны предыдущему доказательству, но слагаемые вида $f^{(\ell)}(x)e^{-ixy}\big|_{-\infty}^{+\infty}$ исчезают по другим причинам. Так как $f^{(\ell+1)} \in L_1(\mathbb{R})$, то $f^{(\ell)}$ имеет конечные пределы в $-\infty$ и $+\infty$. Но эти пределы должны быть равны нулю, так как сама $f^{(\ell)}$ иначе не имела бы конечного интеграла. $\square$

Следующее обобщение леммы об осцилляции будет важно при анализе (равномерной) сходимости рядов и интегралов Фурье:

Теорема 7.36 (Лемма о равномерной осцилляции). *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c(y, \xi, \eta) = \int_\xi^\eta f(x)e^{-ixy}\,dx$$

стремится к нулю при $y \to \infty$ равномерно по ξ, η.

Доказательство. Разобьём $\mathbb{R}$ на промежутки числами $x_1 < \dots < x_N$ так, чтобы на каждом промежутке интеграл $|f|$ был меньше ε. Для ξ и η найдём ближайшие к ним x_i и x_j, тогда

$$\left|\int_\xi^\eta f(x)e^{-ixy}\,dx\right| \leqslant \left|\int_{x_i}^{x_j} f(x)e^{-ixy}\,dx\right| + 2\varepsilon$$

и при достаточно большом y интеграл в правой части тоже меньше ε по уже доказанному неравномерному варианту утверждения. Это доказывает равномерную оценку. $\square$

Полезно также получить оценку для $c_f(y)$ для функции ограниченной вариации.

Теорема 7.37. *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

оказывается $O(1/y)$ при $y \to \infty$.

Доказательство. Получим сначала оценку для интеграла по отрезку $[a, b]$. По лемме 7.18 достаточно рассмотреть случай монотонной f, тогда по второй теореме о среднем

$$c_{[a,b]}(y) = f(a+0)\int_a^\vartheta e^{-ixy}\,dx + f(b-0)\int_\vartheta^b e^{-ixy}\,dx.$$

Функция ограниченной вариации f имеет пределы на бесконечности, а из её интегрируемости следует, что эти пределы равны нулю. Следовательно, значения f оцениваются полной вариацией $\|f\|_B$, а интегралы в формуле оцениваются по модулю в явном виде как $\frac{2}{|y|}$. Так как итоговая оценка $\frac{4\|f\|_B}{|y|}$ не зависит от выбора отрезка $[a, b]$, то она верна и для интеграла по всей прямой. $\square$

Интегрирование по частям позволяет обобщить предыдущую теорему до следующего утверждения:

Следствие 7.38. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет абсолютно непрерывную $f^{(k-1)}$, производные до k-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, а $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, тогда*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \quad y \to \infty.$$

Если мы работаем с 2π-периодическими функциями, $f(x+2\pi) = f(x)$, и оцениваем их коэффициенты Фурье (последнее выражение понимается как скалярное произведение в $L_2[-\pi,\pi]$)

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = (f, e^{inx}),$$

то имеются следующие аналоги уже доказанных утверждений для этого случая:

Теорема 7.39. *Пусть функция f имеет период 2π и абсолютно непрерывную $f^{(k-1)}$, причём $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $[-\pi,\pi]$, тогда*

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. При работе с 2π-периодической абсолютно непрерывной функцией и интегрировании по частям

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = f(x)e^{-inx}\big|_{-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

слагаемое $f(x)e^{-inx}|_{-\pi}^{\pi}$ обращается в нуль в силу 2π-периодичности, поэтому можно несколько раз продифференцировать и применить теорему 7.37. ☐

Для коэффициентов Фурье любой непрерывной 2π-периодической функции можно получить и такую оценку:

Теорема 7.40. *Пусть функция f непрерывная и 2π-периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка*

$$c_n = O(\omega_f(\pi/n)),$$

где ω_f — модуль непрерывности f.

Доказательство. Запишем

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Заменим в этом выражении переменную $x = x' + \pi/n$ и воспользуемся тем, что интеграл по периоду можно начинать с любого места, тогда

$$c_n = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x'+\pi/n)e^{-inx'}\,dx'.$$

Возьмём полусумму этих выражений

$$|c_n| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\pi/n) - f(x)}{2}e^{-inx}\,dx\right| \leqslant \pi\omega_f(\pi/n).$$

☐

Предыдущая теорема не очень точна, хотя и полезна в случаях, когда непрерывная функция имеет неограниченную вариацию, примерно как $\sqrt{|x|}\sin 1/x$. Для понимания её неточности полезно разобрать следующий пример:

Задача 7.41. Найдите порядок убывания коэффициентов Фурье функции $f(x) = \sqrt{|x|}$ на $[-\pi, \pi]$.

[[Запишите выражения для коэффициента Фурье в явном виде и замените nx на новую переменную, потом проинтегрируйте по частям.]]

Следующие две задачи дают базовые свойства конечномерных версий «интеграла Фейнмана».

Задача 7.42. Пусть M — ориентированное многообразие, $\nu \in \Omega^n_c(M)$ — некоторая форма с компактным носителем, а $\varphi \in C^\infty(M)$ — фазовая функция. Докажите, что интеграл с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)}\nu$$

при $t \to +\infty$ с точностью до быстро убывающих (быстрее любой степени t) слагаемых определяется значениями подинтегрального выражения в произвольно малой окрестности множества критических точек φ, то есть точек, где $d\varphi_x = 0$.

[[Для окрестности V множества критических точек φ рассмотрите компакт и сделайте разбиение единицы для $\operatorname{supp}\nu \setminus V$, $\rho_1 + \dots + \rho_N \equiv 1$ так, чтобы в окрестности носителя каждой ρ_i функцию φ можно было бы выбрать за одну из координат. Потом по теореме Фубини начните интегрирование слагаемого $\rho_i e^{it\varphi}\nu$ с этой координаты и в интеграле по этой координате сделайте преобразования типа:

$$\int a(\varphi)e^{it\varphi}\, d\varphi = \frac{i}{t}\int a'(\varphi)e^{it\varphi}\, d\varphi = \frac{i^2}{t^2}\int a''(\varphi)e^{it\varphi}\, d\varphi = \dots.$$

]]

Задача 7.43. * В том же интеграле с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)}\nu$$

получите выражение для вклада невырожденной критической точки φ с точностью до быстро убывающих слагаемых при $t \to +\infty$.

[[Примените лемму Морса 6.38 к φ, потом в соответствующих координатах рассмотрите $e^{it\varphi}$ как элемент $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, примените к нему преобразование Фурье и разложите по степеням $\frac{1}{t}$.]]

7.9. **Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном.** Заметим, что по теореме 7.15 всякую (возможно, комплекснозначную) функцию $f \in L_2[-\pi, \pi]$ можно сколь угодно близко в норме $\|\cdot\|_2$ приблизить бесконечно гладкой функцией с носителем строго в $(-\pi, \pi)$. Такая функция продолжается до бесконечно гладкой 2π-периодической функции на всей прямой и её по теореме 4.68 можно равномерно приблизить *тригонометрическим многочленом*, записанным в комплексной форме как

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

равномерное приближение также является приближением по норме L_2, так как на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеем $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{2\pi}\|f\|_C$.

Теорема 7.44 (Оптимальность коэффициентов Фурье). *Для всякой $f \in L_2[-\pi, \pi]$ и данного числа n лучшее по норме L_2 приближение f тригонометрическим многочленом*

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

дают коэффициенты Фурье

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Доказательство. Воспользуемся скалярным произведением в $L_2[-\pi, \pi]$

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx,$$

для которого $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$. Занумеруем наши функции e^{ikx} в некотором порядке как $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, в наших рассуждениях будет важна лишь ортогональность этих функций относительно введённого скалярного произведения и больше ничего.

Пусть мы приближаем нашу f выражением $\sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k$ и оптимизируем коэффициенты a_k, рассмотрим квадрат разности

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} \bar{a}_k (f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^{N} a_k (\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2.$$

Используя определение коэффициентов Фурье $(f, \varphi_k) = c_k \|\varphi_k\|_2^2$, получим

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{a}_k c_k - a_k \bar{c}_k + |a_k|^2 \right) \|\varphi_k\|_2^2 =$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2 + \sum_{k=1}^{N} |c_k - a_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2.$$

Отсюда ясно, что для приближения оптимально положить $a_k = c_k$. □

Последняя формула предыдущего доказательства в оптимальном случае имеет вид

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2,$$

что доказывает также *неравенство Бесселя*

$$\|f\|_2^2 \geqslant \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2,$$

которое для тригонометрической системы записывается в виде:

$$\|f\|_2^2 \geqslant 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Теорема 7.45 (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном). *Для всякой комплекснозначной $f \in L_2[-\pi, \pi]$*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, а также выполняется равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Доказательство. Из замечания в начале раздела следует, что функцию f можно сколь угодно точно по норме $\|\cdot\|_2$ приблизить тригонометрическим многочленом. Из оптимальности коэффициентов Фурье можно сделать вывод, что это приближение дано конечным отрезком ряда Фурье. Формула

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 < \varepsilon.$$

показывает, что следующие приближения (при увеличении количества слагаемых в ряде Фурье) будут не хуже данного, это означает сходимость ряда Фурье по норме $\|\cdot\|_2$ по определению. Также эта формула показывает, что в пределе в неравенстве Бесселя будет равенство (Парсеваля). ☐

В этой теореме мы просуммировали, как положено в теории рядов Фурье, «симметрично»

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

иначе это называется *сумма в смысле главного значения* и обозначается

$$v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

Хотя на самом деле конкретно в данной теореме любой порядок суммирования даёт тот же результат, для поточечной сходимости суммирование в смысле главного значения будет важно.

Заметим, что для доказательства неравенства Бесселя от тригонометрической системы требовалась только её ортогональность, тогда как для сходимости и равенства Парсеваля потребовалось нетривиальное свойство этой системы, *полнота*, как возможность приблизить любую функцию линейной комбинацией функцией нашей системы сколь угодно точно.

Другое замечание относится к тому, как надо понимать эту формулу. Из сходимости ряда в среднеквадратичном в принципе может и не следовать его сходимость хотя бы в одной точке (см. задачу 7.13), то есть мы не доказали, что в эту формулу можно подставить хоть одно конкретное значение x. Тот факт, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi, \pi]$ на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлесоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лузина.

7.10. **Равномерная и поточечная сходимость ряда Фурье.** Мы заметили, что сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном устанавливается легко, а теперь разовьём более сложную технику для анализа сходимости в точке или равномерной сходимости.

Лемма 7.46. *Для n-й частичной суммы ряда Фурье 2π-периодической функции имеет место формула*

$$T_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt,$$

с ядром Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}.$$

Доказательство. Подставим определение коэффициентов Фурье в формулу

$$T_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

и получим

$$T_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)e^{ikx-ik\xi}\,d\xi.$$

Сделаем замену $\xi = x+t$ и заметим, что все функции 2π-периодические и поэтому интегралы по любому отрезку $[a, a+2\pi]$ не будут зависеть от a. Тогда

$$T_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}\right)\,dt.$$

Сумму можно найти как геометрическую прогрессию

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{2\pi(e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}.$$

□

Лемма 7.47 (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле)**.** *Существует такая константа C, что*

$$\left|\int_a^b D_n(t)\,dt\right| \leqslant C$$

для любых $a,b\in[-\pi,\pi]$, $n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Вынесем из-под интеграла монотонное и ограниченное на $[-\pi,0]$ и $[0,\pi]$ выражение $\frac{t}{\sin t/2}$ по второй теореме о среднем, сведя таким образом утверждение к оценке интеграла Дирихле

$$\left|\int_a^b \frac{\sin(n+1/2)x}{x}\,dx\right| \leqslant C.$$

После замены $t = (n+1/2)x$ мы должны оценить интегралы

$$\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t}\,dt\right|$$

независимо от a и b. Существование оценки следует из сходимости несобственного интеграла на бесконечности по признаку Дирихле. □

Из формулы

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}$$

следует формула для интеграла от ядра Дирихле

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1.$$

Она позволяет записать

$$T_n(f,x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x))D_n(t)\ dt.$$

Главный инструмент исследования этого выражения даёт:

Теорема 7.48 (Равномерный принцип локализации). *Запишем для $\delta \in (0,\pi)$*

$$T_n(f,x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x))D_n(t)\ dt =$$
$$= \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x))D_n(t)\ dt + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} (f(x+t) - f(x))D_n(t)\ dt.$$

Если $f \in L_1[-\pi,\pi]$, то

$$\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} (f(x+t) - f(x))D_n(t)\ dt \to 0$$

при $n \to \infty$. Если f ограничена на интервале (A,B), то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [a,b] \subset (A,B)$.

Доказательство. С помощью второй теоремы о среднем вынесем множитель $\frac{1}{\sin t/2}$ из интеграла (он ограничен при $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$). В оставшемся выражении можно применить лемму об осцилляции или лемму о равномерной осцилляции для равномерного варианта утверждения. Например,

$$\left|\int_{\delta}^{\pi} f(x+t)\sin(n+1/2)t\ dt\right| \leqslant \left|\int_{x+\delta}^{x+\pi} f(\xi)e^{i(n+1/2)\xi - i(n+1/2)x}\ d\xi\right| =$$
$$= \left|e^{-i(n+1/2)x}\int_{x+\delta}^{x+\pi} f(\xi)e^{i(n+1/2)\xi}\ d\xi\right| = \left|\int_{x+\delta}^{x+\pi} f(\xi)e^{i(n+1/2)\xi}\ d\xi\right|.$$

В последнем выражении пределы интегрирования лежат в диапазоне $[-2\pi, 2\pi]$, на котором $|f|$ имеет конечный интеграл, поэтому лемма о равномерной осцилляции применима. □

Теперь мы готовы доказать (равномерную) сходимость ряда Фурье к достаточно хорошим функциям.

Определение 7.49. Функция f называется *гёльдеровой степени* $\alpha > 0$, если для любых x, y из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha}$$

с некоторой константой C.

Теорема 7.50 (Признак Липшица сходимости ряда Фурье). *Для абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми $C, \alpha > 0$ на интервале $(A,B) \supset [a,b]$*

$$T_n(f,x) \to f(x)$$

равномерно по $x \in [a,b]$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Оценим локальную часть $T_n(f,x) - f(x)$ как

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x))D_n(t)\ dt\right| \leqslant C\int_{-\delta}^{\delta} |t|^{\alpha}\frac{1}{2\pi\,|\sin t/2|}\ dt \leqslant C\int_{-\delta}^{\delta} |t|^{\alpha}\frac{1}{2|t|}\ dt = \frac{C}{\alpha}|\delta|^{\alpha},$$

здесь было использовано неравенство $\pi\,|\sin t/2| \geqslant |t|$ на отрезке $[-\pi,\pi]$. Из произвольности δ и равномерного принципа локализации следует, что $T_n(f,x) - f(x)$ может быть равномерно сделано сколь угодно маленьким при подходящем $\delta > 0$ и достаточно большом n. $\square$

Теорема 7.51 (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье). *Для абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*

$$T_n(f, x) \to f(x)$$

равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.

Доказательство. По лемме 7.18 представим f как разность монотонных и непрерывных на (A, B) функций и будем доказывать утверждение для монотонных и непрерывных f. Тогда по второй теореме о среднем и лемме 7.47 можно написать

$$\left|\int_0^\delta (f(x+t) - f(x))D_n(t)\ dt\right| = \left|(f(x+\delta) - f(x))\int_\vartheta^\delta D_n(t)\ dt\right| \leqslant C|f(x+\delta) - f(x)|$$

и аналогично для интеграла от $-\delta$ до 0. Полученная оценка равномерно стремится к нулю при $\delta \to +0$ из равномерной непрерывности f в некоторой окрестности отрезка $[a, b]$. $\square$

Задача 7.52 (Признаки сходимости ряда Фурье в точке). Сформулируйте варианты предыдущих признаков, достаточные для установления сходимости в одной точке, то есть при $a = b$.

Задача 7.53 (Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке). Докажите сходимость ряда Фурье к значению функции в точке x, если интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right|\ dt$$

сходится.

[[Замените $\sin t/2$ на t в знаменателе интеграла с помощью второй теоремы о среднем.]]

7.11. **Интегрирование ряда Фурье, разложение котангенса на элементарные дроби и формула дополнения для бета-функции.** Докажем возможность почленно интегрировать ряд Фурье даже в том случае, когда он не везде сходится.

Теорема 7.54 (Почленное интегрирование ряда Фурье). *Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$ соответствует не обязательно сходящийся ряд Фурье, записанный в действительном виде как*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Тогда ряд Фурье можно почленно интегрировать и выполняется

$$\int_a^b f(x)\ dx = a_0(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n}\right)\Big|_a^b.$$

Доказательство. Можно вычесть из функции константу, тогда из ряда Фурье вычтется та же константа и равенство не потеряется, поэтому считаем, что $a_0 = 0$ и интеграл f на отрезке $[-\pi, \pi]$ равен нулю. Также ясно, что достаточно доказать утверждение для интеграла от $-\pi$ до числа ξ, поэтому положим

$$F(\xi) = \int_{-\pi}^{\xi} f(x)\ dx.$$

Эта функция имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-\pi, \pi]$ (равную L_1 норме f) и равные значения на концах (так как $a_0 = 0$), поэтому её ряд Фурье сходится к ней равномерно. Посчитаем её коэффициенты Фурье при $n \neq 0$:

$$c_n(F) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)e^{-in\xi}\, d\xi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\xi} f(x)e^{-in\xi}\, dxd\xi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\int_{x}^{\pi} e^{-in\xi}\, d\xi\right)\, dx =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{-inx} - e^{-in\pi}}{in}\, dx = \frac{c_n(f)}{in} - \frac{e^{-in\pi}}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{c_n(f)}{in},$$

в последнем равенстве использовано равенство нулю интеграла от f по отрезку $[-\pi, \pi]$. Значит равномерно по ξ выполняется равенство

$$F(\xi) = c_0(F) + \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{+\infty} \frac{c_n(f)}{in}e^{inx},$$

то есть выполняется

$$F(\xi) = C + \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\xi} c_n(f)e^{inx}\, dx = C + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\xi},$$

причём подстановка $\xi = -\pi$ показывает, что константа равна нулю. Это и есть требуемое равенство. ☐

Задача 7.55. Предположим, что последовательность (a_n) убывает и стремится к нулю. Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

равномерно сходится на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$ для любого положительного δ. Приведите пример, когда нет равномерной сходимости на всём периоде $[-\pi, \pi]$.

[[Напишите $\cos nx = \frac{\sin(n+1/2)x - \sin(n-1/2)x}{2\sin x/2}$ и примените признак Дирихле равномерной сходимости ряда 4.55. Пример достаточно привести с расходимостью в нуле.]]

Задача 7.56. Предположим, что последовательность (b_n) убывает и стремится к нулю. Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

равномерно сходится на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$ для любого положительного δ. Приведите пример, когда нет равномерной сходимости на $[-\pi, \pi]$.

[[Напишите $\sin nx = \frac{\cos(n-1/2)x - \cos(n+1/2)x}{2\sin x/2}$ и примените признак Дирихле равномерной сходимости ряда 4.55. При построении примера примените критерий Коши равномерной сходимости ряда.]]

Задача 7.57. Докажите, что выражение

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

[[Что будет, если мы его проинтегрируем?]]

В следующей задаче получаются формулы, которые можно интерпретировать как разложение некоторых тригонометрических функций в (бесконечную) сумму элементарных дробей, или как разложение в бесконечное произведение линейных функций. Так как суммы бесконечны, то эти утверждения далеко не так очевидны, как их конечные аналоги для рациональных функций и многочленов.

Задача 7.58. Разложите функцию, заданную формулой $\cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$, в ряд Фурье. Выведите из полученного выражения формулы:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} x &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \pi k}\\
\frac{1}{\sin x} &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k}\\
\sin x &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right),
\end{aligned}$$

где $v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k$.

Задача 7.59. Докажите *формулу дополнения* для бета-функции при $p \in (0, 1)$:

$$B(p, 1-p) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{-p}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

[[С помощью замены переменной напишите

$$B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x}\, dx.$$

Разложите в сумму $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ и переставьте сумму с интегралом по теореме о монотонной сходимости (это можно, если считать бесконечную сумму пределом частичных сумм с чётным количеством слагаемых). Потом воспользуйтесь одним из равенств в предыдущей задаче. Другое доказательство этой формулы см. в разделе 8.6.]]

Задача 7.60. Докажите формулу для $0 < |z| < \pi$

$$\frac{1}{z} - \operatorname{ctg} z = \sum_{n,k\geqslant 1} \frac{2z^{2k-1}}{\pi^{2k} n^{2k}},$$

выведите из неё значения сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

[[Используйте разложение котангенса на элементарные дроби.]]

7.12. **Суммы Фейера.** Существует явный способ приблизить любую непрерывную 2π-периодическую функцию тригонометрическими рядами, которые будут сходится к ней равномерно. Как показывает теорема 7.101, частичные суммы ряда Фурье для этого не годятся и надо действовать хитрее. Мы будем отталкиваться от ядра Дирихле для частичной суммы ряда Фурье и определим *ядро Фейера*

$$\Phi_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikx}.$$

усреднением ядер Дирихле. Соответствующая *сумма Фейера* будет соответствовать усреднению первых $n+1$ частичных сумм ряда Фурье,

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi)\Phi_n(\xi)\, d\xi = \frac{T_0(f,x)+\dots+T_n(f,x)}{n+1}.$$

Записав

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\pi \sin t/2} = \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{4\pi \sin^2 t/2}$$

и суммируя, мы легко получим формулу

$$\Phi_n(t) = \frac{1-\cos(n+1)t}{4\pi(n+1)\sin^2 t/2} = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{2\pi(n+1)\sin^2 t/2},$$

в которой для нас важна неотрицательность.

Теорема 7.61. *Для непрерывной 2π-периодической f*

$$S_n(f,x) \to f(x)$$

равномерно.

Доказательство. Так как ядра Фейера являются усреднением ядер Дирихле, то мы получаем нормировку

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt = 1.$$

Также мы будем использовать неотрицательность ядра Фейера и очевидную оценку

$$0 \leqslant \Phi_n(t) \leqslant \frac{1}{2\pi(n+1)\sin^2 t/2}$$

Запишем

$$S_n(f,x) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t)-f(x))\Phi_n(t)\, dt + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} (f(x+t)-f(x))\Phi_n(t)\, dt.$$

В первом интеграле воспользуемся модулем непрерывности $\omega_f(\delta)$ функции f, а во втором просто ограничим разность значений функции выражением $2\|f\|_C$, тогда

$$|S_n(f,x)-f(x)| \leqslant \omega_f(\delta)\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\, dt + 4\|f\|_C \int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \omega_f(\delta) + 4\|f\|_C \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{2\pi(n+1)\sin^2 t/2} = \omega_f(\delta) + 4\|f\|_C \frac{1}{\pi(n+1)} \operatorname{ctg} \delta/2.$$

Ясно, что при фиксированном δ в (частичном) пределе $n \to \infty$ получится не более $\omega_f(\delta)$. Из равномерной непрерывности f следует, что эта оценка произвольно мала при достаточно малом δ, то есть на самом деле оценка стремится к нулю при $n \to \infty$. □

Далее мы приводим задачи для самостоятельного решения на суммы Фейера, ядро Фейера и близкие вопросы.

Задача 7.62. * Докажите, что для $f \in L_1[-\pi,\pi]$

$$S_n(f,x) \to f(x)$$

в смысле сходимости в $L_1[-\pi,\pi]$ (в среднем).

[[Запишите интеграл от $|S_n(f,x) - f|$ и поработайте с ним.]]

Задача 7.63. Посчитайте сумму для $r \in [0, 1)$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ikx}.$$

[[Вспомните про сумму геометрической прогрессии.]]

Задача 7.64. * Пусть последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел убывает, стремится к нулю и выпукла (в смысле $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} \geqslant 0$ при $n \geqslant 1$). Докажите, что сумма

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

неотрицательна (в некоторых точках может быть $+\infty$).

[[Воспользуйтесь преобразованием Абеля для рядов и обнаружьте ядро Фейера.]]

7.13. **Интеграл Фурье и вычисление интеграла Дирихле.** Представление функции интегралом Фурье — это формула вида

$$f(x) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} c(y) e^{ixy}\, dy,$$

где *интеграл в смысле главного значения* — это по определению

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{-h}^{h} g(x)\, dx.$$

По аналогии с коэффициентами ряда Фурье, коэффициент $c(y)$ находится как

$$c(y) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx.$$

Мы обычно будем рассматривать $f \in L_1(\mathbb{R})$, в этом случае интеграл можно брать и по Лебегу, а не только в смысле главного значения. Собственно, выражения такого вида без константы мы уже изучали в разделе 7.8.

Как и в случае с рядами, подставив определение $c(y)$ в формулу интеграла Фурье до перехода к пределу $h \to +\infty$, мы получим *частичный интеграл Фурье*:

$$T_h(f, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) D_h(t)\, dt,$$

где

$$D_h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^{h} e^{ity}\, dy = \frac{\sin ht}{\pi t}$$

уместно назвать *ядром Дирихле для интеграла Фурье*. Его свойства аналогичны свойствам ядра Дирихле для ряда Фурье, однако условие нормировки проверить чуть сложнее:

Лемма 7.65 (Нормировка интеграла Дирихле)**.** *Выполняется*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ht}{\pi t}\, dt = 1.$$

Доказательство. Замена ht на новую переменную показывает, что это достаточно доказать для $h = 1$, а с учётом чётности функции достаточно доказать для условно сходящегося интеграла

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}. \tag{7.2}$$

Этот интеграл условно сходится по признаку Дирихле 5.77 и нам надо работать с ним достаточно аккуратно. Сходимость означает, что для $\varepsilon > 0$ найдётся $\beta(\varepsilon)$, такое что при любом $a \geqslant \beta(\varepsilon)$

$$\left|\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt\right| < \varepsilon.$$

Посмотрим теперь на интеграл с параметром $y \in [0, +\infty)$

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yt}\frac{\sin t}{t}\, dt,$$

он уже сходится абсолютно при $y > 0$. Разложим интеграл на два и проанализируем отдельно

$$I(y) = \int_0^a e^{-yt}\frac{\sin t}{t}\, dt + \int_a^{+\infty} e^{-yt}\frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Во второй его части мы можем вынести по второй теореме о среднем экспоненту за знак интеграла

$$\int_a^{+\infty} e^{-yt}\frac{\sin t}{t}\, dt = e^{-ya}\int_a^{\vartheta} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

и обнаружить, что эта часть по модулю меньше ε, если $a \geqslant \beta(\varepsilon)$. Первая часть же при $y \to +0$ стремится равномерно к

$$\int_0^a \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

что отличается от искомого значения $I(0)$ не более чем на ε. Таким образом мы доказали, что $I(y)$ непрерывно зависит от y даже при $y \to +0$.

Дифференцируя под знаком интеграла по y по теореме 5.72 при $y > 0$ (когда производную можно оценить абсолютно интегрируемым выражением), мы получим по формуле Ньютона–Лейбница

$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-yt}\sin t\, dt = \frac{-1}{1+y^2},$$

а из граничного условия $I(y) \to 0$ при $y \to +\infty$ мы найдём

$$I(y) = \pi/2 - \operatorname{arctg} y,$$

что даёт требуемое $I(0) = \pi/2$. □

Задача 7.66. Выведите формулу для интеграла Дирихле из того, что для ядра Дирихле ряда Фурье $D_n(x)$ при любом $\delta > 0$ выполняется (частный случай принципа локализации)

$$\int_{-\delta}^{\delta} D_n(x)\, dx \to 1, \quad n \to \infty.$$

[[Вынесите из интеграла близкое к единице выражение $\frac{x}{2\sin x/2}$ по второй теореме о среднем и замените переменную $y = (n + 1/2)x$.]]

Свойство равномерной ограниченности интегралов от ядра Дирихле,

$$\left|\int_a^b D_h(t)\, dt\right| \leqslant C,$$

проверятся совсем просто, и мы на самом деле его уже проверяли, когда выясняли аналогичное свойство ядра Дирихле для рядов. Замена ht на новую переменную показывает, что его достаточно проверить при $h = 1$, а в этом случае оно верно, так как по уже доказанному выражение под интегралом имеет ограниченную первообразную.

7.14. **Равномерная сходимость несобственного интеграла.** Мы посчитали интеграл Дирихле с помощью дифференцирования по параметру. В этом и в других случаях для изучения условно сходящихся интегралов, зависящих от параметра, может быть применено понятие *равномерной сходимости несобственного интеграла*. Мы приведём стандартные сведения об этом понятии в виде упражнений, но использовать его в дальнейшем мы не будем.

По определению равномерная сходимость означает, что сходимость несобственного интеграла

$$\int_a^\beta f(x,y)\,dx \to \int_a^{*b} f(x,y)\,dx$$

при $\beta \to b-0$ является равномерной по $y \in Y$, где Y — некоторое множество параметров. Иначе это можно сформулировать как

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_\beta^{*b} f(x,y)\right| \to 0,\quad \beta\to b-0$$

или в виде *критерия Коши*

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_\alpha^{\beta} f(x,y)\right| \to 0,\quad \alpha,\beta\to b-0.$$

Простейшая ситуация, которая обычно называется *признак Вейерштрасса*, когда при $x\in[a,b)$ и $y\in Y$ выполняется неравенство $|f(x,y)|\leqslant g(x)$ и интеграл

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

конечен. В этом случае по определению интеграл

$$I(y)=\int_a^{*b} f(x,y)\,dx \tag{7.3}$$

сходится равномерно. На самом деле последний интеграл в этом случае сходится по Лебегу без необходимости применять определение несобственного интеграла, а полезное свойство непрерывности $I(y)$ будет гарантировано теоремой об ограниченной сходимости при условии непрерывности $f(x,y)$ по переменной y (непрерывность на x не требуется). Иначе говоря, при применимости признака Вейерштрасса понятие равномерной сходимости интеграла не даёт ничего нового. В следующих задачах выясняются достаточные условия непрерывности и дифференцируемости интеграла по параметру, связанные с понятием равномерной сходимости несобственного интеграла.

Задача 7.67 (Непрерывность равномерно сходящегося интеграла по параметру). Докажите, что равномерно сходящийся несобственный интеграл (7.3) непрерывен по параметру y, если подынтегральная функция $f(x,y)$ непрерывна по переменной y и ограничена функцией переменной x, $|f(x,y)|\leqslant g(x)$, имеющей конечные интегралы на конечных отрезках $[a,\beta]\subset[a,b)$.

[[До перехода к пределу в определении несобственного интеграла примените теорему об ограниченной сходимости, во время перехода к пределу $\beta\to b-0$ примените теорему 4.34.]]

Задача 7.68 (Дифференцирование равномерно сходящегося интеграла по параметру). Пусть интеграл

$$I(y) = \int_a^{*b} f(x, y)\, dx$$

сходится хотя бы в одной точке $y \in (c, d)$, а интеграл

$$J(y) = \int_a^{*b} f'_y(x, y)\, dx$$

сходится равномерно по $y \in (c, d)$. Предположим также, что на всяком $[a, \beta] \subset [a, b)$ применима теорема 5.72 о дифференцировании интеграла Лебега по параметру. Докажите, что тогда $I(y)$ сходится равномерно по $y \in (c, d)$ и $I'(y) = J(y)$.

[[Выберите последовательность $\beta_n \to b - 0$, рассмотрите соответствующие собственные интегралы $I_n(y)$ и $J_n(y)$, примените к ним теорему 4.35.]]

Аналогично ситуации (функциональных) рядов и интеграла без параметра, для интеграла с параметром есть свои варианты признаков Дирихле и Абеля.

Задача 7.69 (Признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла). Пусть найдётся константа M, такая что при любом $\beta \in (a, b)$ и $y \in Y$

$$\left| \int_a^{\beta} f(x, y)\, dx \right| \leqslant M,$$

а функция g монотонно стремится к нулю при $x \to b - 0$ равномерно по $y \in Y$. Докажите, что

$$\int_a^{*b} f(x, y) g(x, y)\, dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$.

[[Проверьте, что доказательство «неравномерного» варианта 5.77 через вторую теорему о среднем работает и в этом случае.]]

Задача 7.70 (Признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла). Пусть интеграл

$$\int_a^{*b} f(x, y)\, dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$, а функция g монотонна по x и ограничена $|g(x, y)| \leqslant M$ для любых $x \in (a, b)$ и $y \in Y$. Докажите, что

$$\int_a^{*b} f(x, y) g(x, y)\, dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$.

[[Проверьте, что доказательство «неравномерного» варианта 5.78 через вторую теорему о среднем работает и в этом случае.]]

Задача 7.71. Сведите вычисление интеграла Дирихле через интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-yx} \sin x}{x}\, dx$$

к результатам предыдущих задач.

7.15. **Сходимость интеграла Фурье.** Дальнейший анализ сходимости $T_h(f,x)$ к функции f при $f \in L_1(\mathbb{R})$ производится точно так же, как и анализ сходимости ряда Фурье; на самом деле рассуждения даже проще, так как нам не придётся заменять $\sin t/2$ на t в знаменателе. Для примера покажем аналог принципа локализации для интеграла Фурье.

Теорема 7.72. *Предположим функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ ограничена на $[a,b]$ тогда в выражении*

$$T_h(f,x) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x))D_h(t)\,dt + \int_{|t|\geqslant\delta} (f(x+t) - f(x))D_h(t)\,dt$$

при фиксированном $\delta > 0$ второй интеграл стремится к нулю равномерно по $x \in [a,b]$.

Доказательство. Половину второго интеграла можно оценить через вторую теорему о среднем (в качестве монотонной функции выносим $1/t$)

$$\int_{\delta}^{+\infty} (f(x+t) - f(x))D_h(t)\,dt = \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{\vartheta} f(x+t)\frac{\sin ht}{\pi}\,dt - f(x)\int_{\delta}^{+\infty} D_h(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{\vartheta} f(x+t)\frac{\sin ht}{\pi}\,dt - f(x)\int_{h\delta}^{+\infty} D_1(\xi)\,d\xi.$$

После этого в итоговом выражении первая часть стремится к нулю по лемме о (равномерной) осцилляции, а вторая часть стремится к нулю при $h \to +\infty$ из сходимости интеграла от ядра Дирихле на бесконечности. □

Из этого утверждения следуют признаки сходимости и равномерной сходимости Липшица и Дирихле, признак Дини сходимости в точке, формулируемые аналогично их вариантам для рядов Фурье. Например, если $f \in L_1(\mathbb{R})$ непрерывна с ограниченной вариацией на интервале $(A,B) \supset [a,b]$ (или удовлетворяет условию Гёльдера на (A,B)), то $T_h(f,x) \to f(x)$ равномерно на $[a,b]$. Сформулируем общее следствие из этих утверждений:

Следствие 7.73. *Интеграл Фурье сходится поточечно к $f \in L_1(\mathbb{R})$, если f непрерывна и в каждой точке удовлетворяет условию Гёльдера, Дини или Дирихле; и сходится равномерно на отрезках, если f непрерывна и на каждом отрезке либо имеет ограниченную вариацию, либо удовлетворяет условию Гёльдера.*

7.16. **Свойства преобразования Фурье и пространство $\mathcal{S}$.** Заметим, что переход от $f(x)$ к $c(y)$ и обратно в интеграле Фурье выглядит достаточно симметрично, в отличие от ситуации с рядом Фурье. Его можно сделать ещё более симметричным, изменив константы в выражениях (хотя в литературе часто встречаются обозначения с константой $\frac{1}{2\pi}$ туда и 1 обратно):

Определение 7.74. Преобразование Фурье задаётся по формуле

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}\,dx,$$

обратное преобразование Фурье задаётся по формуле

$$\tilde{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx}\,dx.$$

Будем обозначать их как операторы F и F^{-1}, $\hat{f} = F[f]$, $\tilde{f} = F^{-1}[f]$.

В тех случаях, когда функция f представляется интегралом Фурье, мы можем утверждать, что $f = F^{-1}[F[f]]$ и $f = F[F^{-1}[f]]$, надо просто подставить формулы и понять, что это и есть представление интегралом Фурье. Это значит, что преобразования действительно оказываются обратными друг к другу.

Нам понадобятся следующие простые утверждения:

Теорема 7.75 (Производная преобразования Фурье)**.** *Если $f, xf \in L_1(\mathbb{R})$, то*

$$\frac{d}{dy}F[f] = -iF[xf].$$

Доказательство. Достаточно продифференцировать под знаком интеграла и ограничить получившееся выражение независимо от параметра y функцией $|xf|$ с конечным интегралом, тогда утверждение получается из теоремы 5.72. $\square$

Теорема 7.76 (Преобразование Фурье производной)**.** *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$, является абсолютно непрерывной, и её определённая почти всюду производная f' тоже лежит в $L_1(\mathbb{R})$. Тогда*

$$F[f'] = iyF[f].$$

Доказательство. Распишем по определению (преобразование Фурье будем писать без коэффициента):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx = f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

Осталось заметить (как мы уже замечали в доказательстве следствия 7.35), что $f(x)$ должна иметь нулевые пределы на бесконечности. Так как f представляется интегралом от своей абсолютно интегрируемой производной, то у неё есть конечные пределы на бесконечности. Эти пределы не могут быть ненулевыми, так как тогда f не могла бы быть абсолютно интегрируемой. $\square$

В качестве полезного примера рассмотрим преобразование Фурье гауссовой плотности.

Лемма 7.77 (Преобразование Фурье для гауссовой плотности)**.** *Выполняется формула*

$$F[e^{-x^2/2}] = e^{-y^2/2}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = e^{-x^2/2}$ и $F[e^{-x^2/2}] = g(y)$. По формуле для производной преобразования Фурье и преобразования Фурье производной получим

$$g'(y) = -iF[xf] = iF[f'] = -yg(y).$$

Решая дифференциальное уравнение, получаем

$$\ln g(y) = -\int y\,dy = -y^2 + \mathrm{const},$$

то есть $g(y) = Ae^{-y^2/2}$. Константу A можно найти, заметив, что f чётная, а значит обратное преобразование Фурье действует на неё так же, как и прямое. Но так как обратное преобразование Фурье должно вернуть её обратно, то $A^2 = 1$. Из этого следует, что $A = 1$, так как случай $A = -1$ исключается тем, что очевидно $g(0) > 0$. $\square$

Можно заметить, что предыдущее доказательство даёт ещё один способ вычисления интеграла Пуассона. В принципе, считая известным интеграл Пуассона из теоремы 5.88, можно действовать в обратную сторону и обосновать таким образом нахождение интеграла Дирихле, который нормирует формулы в определении преобразования Фурье.

Далее мы переходим к вопросу о том, какие пространства функций переводятся преобразованием Фурье в себя.

Определение 7.78. Определим пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ как пространство бесконечно дифференцируемых функций, у которых конечны все полунормы ($k, n \geqslant 0$)

$$\|f\|_{n,k} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^n f^{(k)}(x)\right|.$$

Задача 7.79. Проверьте, что функция $e^{x^2/2}$ лежит в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Определение 7.80. Последовательность (f_m) функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *стремится* к f_0, если для любых $n, k \geqslant 0$

$$\|f_m - f_0\|_{n,k} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Можно определить и топологию на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, объявив предбазовыми открытыми окрестностями множества

$$U_{n,k,f_0,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \|f - f_0\|_{n,k} < \varepsilon\}$$

и объявив открытыми множества, получающиеся из них операциями конечного пересечения и произвольного объединения.

Теорема 7.81. *Преобразование Фурье непрерывно переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Заметим, что $\sup |F[f]|$ ограничен $\|f\|_1$ с точностью до константы. Также заметим, что

$$\|f\|_1 \leqslant \pi(\|f\|_{0,0} + \|f\|_{2,0}),$$

так как если $|f| \leqslant M$ и $|x^2 f| \leqslant N$ всюду, то $(1+x^2)|f| \leqslant M+N$ и интеграл от $|f|$ не более $M+N$, умноженного на интеграл от $\frac{1}{1+x^2}$, который равен π.

Таким образом мы можем ограничить $\|F[f]\|_{0,0}$ в терминах полунорм исходной функции f. Если же нас интересует супремум выражения вида

$$y^n \frac{d^k}{dy^k} F[f],$$

то по теоремам о производной преобразования Фурье и преобразовании Фурье производной, это выражение с точностью до константы является преобразованием Фурье от

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^k f(x)).$$

Заметим, что имеет место выражение

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^k f(x)) = \sum_{k'\leqslant k,\ n'\leqslant n} C_{k',n',k,n} x^{k'} \frac{d^{n'} f}{dx^{n'}}$$

с некоторыми не важными для нас константами, которое можно доказать индукцией по n. Все слагаемые в правой части ограничены и даже ограничены после умножения на x^2, следовательно их интегралы тоже ограничены. В итоге мы будем иметь оценку типа

$$\|F[f]\|_{n,k} \leqslant \sum_{k'\leqslant k+2,\ n'\leqslant n} C_{k',n',k,n} \|f\|_{k',n'},$$

которая доказывает определённость и непрерывность преобразования Фурье на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\square$

Теорема 7.82. *Для функций $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет место унитарность преобразования Фурье (равенство Парсеваля):*

$$(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g),$$

где скалярное произведение (для комплекснозначных функций) определено стандартно:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

Доказательство. Запишем по определению $\hat{f}$ и используя тот факт, что в силу быстрого убывания участвующих в формулах функций применима теорема Фубини,

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\overline{\widetilde{g(y)}}\, dxdy.$$

Проинтегрировав по y, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

□

Из этой теоремы следует, что преобразование Фурье продолжается до унитарного оператора $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Действительно, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$ (так как в L_2 всякую функцию можно сколь угодно хорошо приблизить гладкими с компактными носителями), и всякая фундаментальная в L_2-норме последовательность функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ переводится преобразованием Фурье в фундаментальную последовательность. Следовательно, это преобразование корректно продолжается до замыкания $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, то есть до всего $L_2(\mathbb{R})$ (мы используем при этом его полноту).

Заметим, что преобразование Фурье функций из L_2 построено весьма неявно и совершенно неочевидно, что его вообще можно задать явно. Вообще $L_2(\mathbb{R}) \not\subseteq L_1(\mathbb{R})$ и поэтому даже сходимость интеграла в определении преобразования Фурье находится под вопросом. Однако, как уже было упомянуто в связи с рядами Фурье, Л. Карлесон (1966) доказал, что явные формулы преобразования Фурье работают для функций из $L_2(\mathbb{R})$ для почти всех значений аргумента.

7.17. **Многомерный интеграл Фурье.** Для интеграла Фурье можно определить его многомерный вариант по формулам ($\cdot$ обозначает скалярное произведение):

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(y)e^{ix\cdot y}\, dy$$

и

$$c(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}\, dx.$$

Интеграл в смысле главного значения тоже можно определить в многомерном случае, однако уже не вполне ясно, следует ли брать интеграл по шарам и устремлять их радиус к бесконечности, или по кубам с центром в начале координат и устремлять их размер к бесконечности. Для начала логично предположить, что обе функции f и c являются абсолютно интегрируемыми, чтобы избавиться от этих трудностей.

Достаточные условия сходимости многомерного интеграла Фурье представлены в следующих утверждениях.

Лемма 7.83 (Интеграл Фурье для многомерной гауссовой плотности)**.** *Имеет место формула*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2 - ix\cdot y}\, dx = (2\pi)^{n/2} e^{-|y|^2/2}.$$

Доказательство. По теореме Фубини достаточно интегрировать по каждой переменной последовательно, применяя каждый раз одномерный вариант этого утверждения из леммы 7.77. □

Теорема 7.84 (Достаточное условие сходимости многомерного интеграла Фурье). *Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ непрерывна в точке x, а функция*

$$c(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}\, dx$$

тоже оказалась в $L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} c(y)e^{ix\cdot y}\, dy.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} c(y)e^{ix\cdot y-\alpha|y|^2/2}\, dy$$

По теореме об ограниченной сходимости 5.69, это выражение стремится к

$$f_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} c(y)e^{ix\cdot y}\, dy$$

при $\alpha \to +0$ и мы должны доказать, что на самом деле $f_0(x) = f(x)$. Подставим определение $c(y)$

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{-i\xi\cdot y}e^{ix\cdot y-\alpha|y|^2/2}\, d\xi dy = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{-i(\xi-x)\cdot y-\alpha|y|^2/2}\, d\xi dy.$$

Модуль подынтегрального выражения оценивается $|f(\xi)|e^{-\alpha|y|^2/2}$, значит оно интегрируемо и можно менять порядок интегрирования. Тогда из леммы 7.83 (заменив переменную $t = \sqrt{\alpha}y$ и проинтегрировав по ней) получим

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi\alpha)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{-\frac{|\xi-x|^2}{2\alpha}}\, d\xi.$$

Это значит, что $f_\alpha(x)$ является свёрткой f с гауссовой плотностью

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{(2\pi\alpha)^{n/2}}e^{-\frac{|t|^2}{2\alpha}}.$$

Нетрудно проверить (через интеграл Пуассона и замену переменных), что

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\alpha(t)\, dt = 1,$$

а при всяком $\delta > 0$

$$\int_{|t|\geqslant\delta}\varphi_\alpha(t)\, dt \to 0 \text{ при } \alpha \to +0$$

и

$$\sup_{|t|\geqslant\delta}\varphi_\alpha(t) = \frac{e^{-\frac{\delta^2}{2\alpha}}}{(2\pi\alpha)^{n/2}} \to 0 \text{ при } \alpha \to +0.$$

Значит, если f непрерывна в точке x и $|f(x+t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ при $|t| \leqslant \delta$, то

$$f_\alpha(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}(f(x+t) - f(x))\varphi_\alpha(t)\, dt =$$
$$= \int_{|t|\leqslant\delta}(f(x+t) - f(x))\varphi_\alpha(t)\, dt + \int_{|t|\geqslant\delta} f(x+t)\varphi_\alpha(t)\, dt - \int_{|t|\geqslant\delta} f(x)\varphi_\alpha(t)\, dt.$$

Первый интеграл по модулю оценивается как ε, второй как

$$\|f\|_1 \cdot \sup_{|t|\geqslant\delta} \varphi_\alpha(t),$$

а третий как

$$|f(x)| \cdot \int_{|t|\geqslant\delta} \varphi_\alpha(t)\, dt.$$

Последние две оценки при $\alpha \to +0$ стремятся к нулю, а в силу произвольности ε и вся разность $f_\alpha(x) - f(x)$ стремится к нулю при $\alpha \to +0$. $\square$

Задача 7.85. Докажите, что существование у f производных до $n+1$ порядка, лежащих в $L_1(\mathbb{R}^n)$, достаточно для абсолютной интегрируемости $c(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}\, dx$.

[[Выведите из существования производных у f тот факт, что $P(y)c(y)$ стремится к нулю на бесконечности для любого многочлена $P(y)$ степени не более $n+1$, аналогично одномерному случаю в теореме 7.76.]]

В следующих задачах рассматривается многомерный аналог пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и связь преобразования Фурье со свёрткой.

Определение 7.86. Преобразование Фурье функций n переменных задаётся по формуле

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-iy\cdot x}\, dx,$$

обратное преобразование Фурье функций n переменных задаётся по формуле

$$\tilde{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{(y\cdot x}\, dx.$$

Будем обозначать их как операторы F и F^{-1}.

Определение 7.87. Определим $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ аналогично одномерному случаю, рассмотрев полунормы

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left| \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \frac{\partial^{|\mathbf{n}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{n}}} \right|.$$

Здесь для точки $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и вектора неотрицательных чисел $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ используется обозначение

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

и аналогичное обозначение для частных производных.

Задача 7.88. Докажите, что преобразование Фурье функции из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ можно представить как композицию преобразований Фурье по каждой переменной и что преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя.

[[Выясните, как связаны дифференцирование по координате и умножение на координату для исходной функции и её преобразования Фурье.]]

Задача 7.89. Докажите, что преобразование Фурье $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ продолжается до унитарного оператора $F : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$.

[[Установите унитарность на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ как в одномерном случае. Заметьте, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и продолжите операцию F с помощью фундаментальных в норме $\|\cdot\|_2$ последовательностей элементов $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.]]

Следующая задача связывает свёртку с преобразованием Фурье и даёт крайне полезный на практике способ вычисления свёртки (с помощью *быстрого дискретного преобразования Фурье*).

Задача 7.90. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, рассмотрим их свёртку $h = f * g$, определённую как

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\ dt,$$

интеграл почти всюду существует по теореме Фубини. Докажите, что

$$\hat{h}(y) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(y)\hat{g}(y).$$

[[Запишите определение преобразования Фурье h, подставьте в него определение свёртки и воспользуйтесь теоремой Фубини, чтобы разбить интеграл в произведение двух.]]

Задача 7.91 (Многомерная лемма Римана об осцилляции). Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то интегралы

$$c(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}\ dx$$

стремятся к нулю при $|y| \to +\infty$.

[[Аналогично одномерному случаю, приблизьте функцию в среднем гладкой функцией с компактным носителем. Для гладкой функции с компактным носителем воспользуйтесь формулой

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} df_x(y)\frac{e^{-ik\cdot x}}{i|y|^2}\ dx.$$

]]

7.18. **Ряд и интеграл Фурье в точках разрыва 1-го рода и явление Гиббса.** Для функции f с разрывом первого рода в точке x остаётся возможность, что ряд Фурье или интеграл Фурье будут сходится к среднему значению между пределами

$$M_f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Действительно, нетрудно преобразовать выражение свёртки с ядром Дирихле для частичной суммы ряда Фурье в (сумма по двум вариантам выбора знака)

$$T_n(f,x) - M_f(x) = \sum_{\pm}\int_0^{\pi}(f(x\pm\xi) - f(x\pm 0))D_n(x)\ dx$$

и анализировать его также, как в случае сходимости к значению функции. Например выполнение условия Гёльдера для разрывной функции в окрестности точки разрыва x в виде

$$|f(x\pm\xi) - f(x\pm 0)| \leqslant C|\xi|^{\alpha},$$

с положительными C и α, гарантирует сходимость ряда Фурье к $M_f(x)$ в точке x.

Очевидно, что сходимость к разрывной функции не может быть равномерной. На самом деле мы можем более детально изучить характер этой неравномерности. Рассмотрим представление функции $\operatorname{sgn} x$ интегралом Фурье

$$\operatorname{sgn} x = \frac{1}{\pi}v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\ dy = \lim_{R\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^R\frac{\sin xy}{y}\ dy.$$

Если у какой-то другой функции f есть разрыв первого рода в некоторой точке, её можно будет представить как сумму сдвинутого и умноженного на константу $\operatorname{sgn} x$ и непрерывной в точке функции g, поэтому результат анализа $\operatorname{sgn} x$ будет применим к такой функции тоже, конечно если g достаточно прилично ведёт себя в окрестности точки и удовлетворяет одному из достаточных условий сходимости интеграла Фурье в точке.

Обозначим
$$S(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\eta \frac{\sin t}{t}\,dt.$$
Эта функция стремится к 1 при $\eta \to +\infty$ (так как это интеграл Дирихле), но её максимум должен достигаться в одной из точек, где её производная равна нулю — это точки πk при $k \in \mathbb{N}$. Так как интегралы
$$\int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \frac{\sin t}{t}\,dt$$
меняют знак и по модулю убывают с ростом k, то на самом деле максимум достигается при $k = 1$. Оценка
$$\frac{\sin t}{t} > 1 - \frac{t}{\pi}$$
следует из вогнутости левой части на отрезке $[0, \pi]$ и показывает, что $S(\pi) = 1 + G$ при некотором $G > 0$ (в качестве упражнения можно оценить эту величину).

Теперь запишем
$$\operatorname{sgn} x = \lim_{R\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^R \frac{\sin xy}{y}\,dy = \lim_{R\to+\infty} S(Rx).$$
Отсюда следует, что «частичный интеграл Фурье» в точках π/R принимает значение $1 + G$, то есть вылезает за область значений $\operatorname{sgn} x$ на G при всех значениях R, это называется *явление Гиббса*.

С помощью более сложных выкладок можно обнаружить и явление Гиббса для функции $\operatorname{sgn} x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и её ряда Фурье.

Задача 7.92. Докажите, что при суммировании ряда Фурье по Фейеру явление Гиббса отсутствует, то есть значения сумм в точке x при $n \to \infty$ не выходят далеко за диапазон значений функции на отрезке, содержащем x внутри.

[[Используйте неотрицательность ядра Фейера.]]

7.19. **Банаховы пространства и теорема Бэра.** Рассмотрим нормированные (и не только) векторные пространства в абстрактной постановке, но имея в виду, что содержательные применения будут происходить для пространств функций, которые мы уже изучали или планируем изучить.

Определение 7.93. Векторное пространство E *нормировано*, если для всякого вектора $v \in E$ имеется неотрицательное число $\|v\|$, удовлетворяющее свойствам:

а) $\|av\| = |a|\|v\|$ (однородность при умножении на константу);

б) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (неравенство треугольника);

в) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (невырожденность).

Константы в этом определении можно считать действительными или комплексными. Для простоты мы будем в основном подразумевать действительные константы. Если свойство невырожденности нормы нарушается, то мы будем говорить (и на самом деле уже говорили), что задана не норма, а *полунорма*.

Всякое нормированное пространство является метрическим с расстоянием $\rho(x, y) = \|x-y\|$, поэтому применимы соответствующие понятия, связанные с метрикой. Например, шаром с центром c и радиусом r в банаховом пространстве E называется множество
$$B_c(r) = \{x \in E : \|x - c\| \leqslant r\}.$$

Можно заметить, что норма полностью определяется единичным шаром с центром в нуле $B_0(1)$, а именно
$$\|x\| = \inf\{|1/t| : tx \in B_0(1)\},$$
и любой другой шар отличается от единичного с геометрической точки зрения лишь сдвигом и гомотетией.

Как мы знаем из примера евклидова пространства, удобно работать в ситуации, когда пространство *полное*, то есть всякая фундаментальная последовательность в нём имеет предел. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством*. Примерами банахова пространства являются $C[a, b]$ (по критерию Коши для равномерной сходимости и непрерывности равномерного предела непрерывных функций), $L_p(X)$ (его полноту мы уже доказали), причём во втором случае в определении принимаются специальные меры для того, чтобы избежать вырождения нормы на функциях, почти всюду равных нулю — такие функции надо считать равными нулю по определению, то есть брать факторпространство по ним.

Несложно установить следующее важное свойство банаховых пространств, на самом деле верное для всех полных метрических пространств (и установленное для прямой $\mathbb{R}$ в теореме 1.117):

Теорема 7.94 (Теорема Бэра для открытых множеств)**.** *Счётное семейство открытых всюду плотных подмножеств банахова пространства E имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть $\{U_n\}$ — эти открытые множества. В первом их них можно выбрать шар B_1 радиуса не более $1/2$. Так как второе множество открыто и всюду плотно, то можно выбрать $B_2 \subset U_2 \cap B_1$ радиуса не более $1/4$, и так далее можно выбирать $B_k \subset U_k \cap B_{k-1}$ радиуса не более $1/2^k$. Это будет последовательность вложенных шаров стремящегося к нулю радиуса, значит последовательность их центров фундаментальна. Предел последовательности центров, x, будет общей точкой всех шаров, так как иначе они не могли бы быть вложенными друг в друга. А это значит, что пересечение последовательности шаров, а также и последовательности множеств $U_k \supset B_k$, непусто. ☐

Заметим, что полученное в теореме пересечение в свою очередь пересекает любое открытое множество (первый шар можно было выбрать в нём), то есть пересечение $\bigcap_k U_k$ на самом деле плотно в E (то есть его замыкание совпадает с E). Есть также формулировка этой теоремы для замкнутых множеств, которая получается переходом к дополнениям:

Следствие 7.95 (Теорема Бэра для замкнутых множеств)**.** *Если банахово пространство E покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.*

Следующее утверждение о неподвижной точки бывает полезно в разных ситуациях, например, наши доказательства теоремы об обратном отображении 6.24 и теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений 6.211 можно было переформулировать в таких терминах:

Теорема 7.96 (Неподвижные точки сжимающих отображений)**.** *Пусть E — банахово пространство. Пусть $X \subset E$ — замкнутое подмножество и $f : X \to X$ является* сжимающим (липшицевым с меньшей единицы константой)
$$\exists C < 1\ \forall x, y \in X\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant C\|x - y\|.$$
Тогда f имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

Доказательство. Применим f много раз к одной точке, полученная последовательность будет фундаментальной и её предел будет неподвижной точкой. □

7.20. **Двойственное пространство, его норма и принцип равномерной ограниченности.** Определение двойственного пространства из линейной алгебры можно модифицировать, рассматривая только непрерывные линейные функционалы. Как мы увидим далее, это гораздо более разумный вариант двойственности при работе с функциональными пространствами.

Определение 7.97. Для нормированного пространства E введём *двойственное пространство* E' — пространство непрерывных линейных отображений $\lambda : E \to \mathbb{R}$. Норму в E' определим как

$$\|\lambda\| = \sup\{|\lambda(x)| : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Задача 7.98. Проверьте, что линейный функционал $\lambda : E \to \mathbb{R}$ непрерывен тогда и только тогда, когда его норма конечна.

[[Линейность позволяет сделать сдвиг и проверять непрерывность только в нуле. Вспомните определение ε-окрестности нуля в $\mathbb{R}$ и δ-окрестности нуля в E.]]

Замечательным фактом является то, что переходя в двойственному к некоторому нормированному пространству мы автоматически получаем банахово пространство:

Теорема 7.99. *Двойственное E' к нормированному пространству E полно в своей норме.*

Доказательство. Пусть последовательность линейных функционалов (λ_n) фундаментальна. Для всякого $x \in E$ имеем

$$\|\lambda_n - \lambda_m\| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \|\lambda_n(x) - \lambda_m(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|,$$

следовательно последовательность чисел $(\lambda_n(x))$ сходится к некоторому значению $\lambda_0(x)$, а предельный переход в тождестве

$$\lambda_n(ax + by) = a\lambda_n(x) + b\lambda_n(y)$$

показывает, что $\lambda_0(x)$ линейно зависит от x. Так как фундаментальная последовательность функционалов была ограниченна в E', то мы имели по определению при любом n

$$|\lambda_n(x)| \leqslant M\|x\|$$

и в пределе будем иметь

$$|\lambda_0(x)| \leqslant M\|x\|,$$

то есть λ_0 оказывается непрерывным. Переходя в пределу $m \to \infty$ в неравенстве

$$\|\lambda_n(x) - \lambda_m(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|,$$

мы получим

$$\forall x \in E,\ \|\lambda_n(x) - \lambda_0(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\| \Leftrightarrow \|\lambda_n - \lambda_0\| \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что $\lambda_n \to \lambda_0$ в смысле нормы в E'. □

Теорема 7.100 (Теорема Банаха–Штейнгауза — принцип равномерной ограниченности)**.** *Пусть семейство линейных функционалов $Y \subset E'$ ограничено в любой точке банахова пространства E, то есть множество*

$$\{\lambda(x) : \lambda \in Y\} \subset \mathbb{R}$$

ограничено для любого $x \in E$. Тогда Y ограничено в смысле нормы в E'.

Доказательство. Рассмотрим замкнутое множество $F = \{x \in E : \forall\lambda \in Y\ |\lambda(x)| \leqslant 1\}$. Условие теоремы означает, что всякий $x \in E$ лежит в некотором

$$nF = \{x \in E : \forall\lambda \in Y\ |\lambda(x)| \leqslant n\}.$$

Иначе говоря, E покрыто его гомотетичными копиями nF, $n \in \mathbb{N}$. По теореме Бэра одно из множеств покрытия должно иметь непустую внутренность. Так как они гомеоморфны друг другу, то исходное F должно иметь непустую внутренность, то есть содержать некоторый шар $B_c(r)$. Так как F центрально симметрично, то оно содержит и шар $B_{-c}(r)$, а из выпуклости F оно содержит и центрированный шар $B_0(r)$.

Мы видим, что на шаре $B_0(r)$ все функционалы Y ограничены единицей. Значит в силу их однородности на единичном шаре $B_0(1)$ они все ограничены величиной $1/r$, то есть ограничены как подмножество E'. ☐

Теорема 7.101 (Расходимость ряда Фурье в точке)**.** *Существует непрерывная 2π-периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке* 0.

Доказательство. На пространстве $\dot{C}[-\pi,\pi]$ непрерывных 2π-периодических функций определим линейный функционал

$$\lambda_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,dt,$$

это значение n-й частичной суммы ряда Фурье в точке 0, $T_n(f,0)$. Можно заметить по определению нормы, что его норма равна

$$\|\lambda_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt.$$

Действительно, норма не более этого интеграла прямо по определению нормы, так как

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,dt\right| \leqslant \|f\|_C \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt,$$

и в этом неравенстве можно сколь угодно приблизиться к равенству, взяв f большую часть времени принимающую значения -1 и $+1$ с быстрым переключением между ними, так чтобы $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} D_n(x)$ везде. Несложная оценка с заменой модуля синуса на квадрат синуса показывает, что эти нормы функционалов при $n \to \infty$ не являются ограниченными. Следовательно, по теореме Банаха–Штейнгауза, применённой в обратную сторону, для некоторой функции $f \in \dot{C}[-\pi,\pi]$ значения $\lambda_n(f) = T_n(f,0)$ неограничены и расходятся. ☐

Задача 7.102. Проведите оценку снизу выражения

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt$$

из приведённого доказательства.

Задача 7.103 (Явный пример расходимости ряда Фурье в точке). Докажите, что ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin|2^{k^3}x|$$

расходится в нуле.

[[Выпишите коэффициенты Фурье по косинусам (в силу чётности функции) о оцените их сумму. Воспользуйтесь тем, что для функции вида $\sin k|x|$ значение суммы Фурье в нуле неотрицательно.]]

7.21. **Линейные отображения между банаховыми пространствами.** По аналогии с непрерывными линейными отображениями $E \to \mathbb{R}$ и их нормой, можно рассмотреть непрерывные линейные отображения между двумя банаховыми пространствами

$$A : E \to F.$$

Что означает непрерывность такого отображения по Коши? В частности, для всякой окрестности нуля $V \subset F$ мы найдём окрестность нуля $U \in E$, такую что $A(U) \subseteq V$. Взяв в качестве V открытый единичный шар $U_1(0) \subset F$, мы получим шар $U = U_\delta(0) \subset E$. Это будет означать, что вектора длины менее δ переходят в вектора длины менее 1. По линейности это будет означать, что векторы длиной менее 1 будут переходить в вектора длиной менее $1/\delta$. Это мотивирует следующее определение:

Определение 7.104. *Нормой* линейного отображения $A : E \to F$ между банаховыми пространствами называется

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\}.$$

Рассуждения выше показывают, что линейное отображение A непрерывно тогда и только тогда, когда $\|A\| < +\infty$. Также можно сказать, что норма является оптимальной константой в неравенстве (которое получается из определения продолжением по линейности)

$$\forall x \in E, \|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|.$$

Как и в случае отображения между конечномерными линейными пространствами, мы можем говорить о ядре и образе непрерывного линейного отображения. Ядро

$$\ker A = \{x \in E : Ax = 0\}$$

по определению замкнуто (как прообраз нуля при непрерывном отображении). Образ $A(E)$ в общем случае не обязан быть замкнутым. В качестве примера можно рассмотреть оператор

$$I : C[0,1] \to C[0,1], \quad I[f](x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

В образе оператора I лежат непрерывно дифференцируемые функции, у которых $g(0) = 0$. Всякую непрерывную функцию f, у которой $f(0) = 0$, можно приблизить такой же непрерывно дифференцируемой по норме C, однако не каждая f сама непрерывно дифференцируема. Так что замыкание образа I не совпадает с образом.

Определим факторпространство по замкнутому подпространству:

Определение 7.105. Если $G \subset E$ является замкнутым подпространством банахова пространства E, то на факторпространстве E/G определим норму как

$$\|x + G\| = \inf_{y \in G} \|x + y\| = \operatorname{dist}(x, G).$$

Из замкнутости G следует, то эта норма невырожденна, однородность и неравенство треугольника проверяются тривиально.

Лемма 7.106. *Факторпространство банахова пространства по замкнутому подпространству полно.*

Доказательство. Пусть последовательность (y_n) в E/G фундаментальна. Нам достаточно доказать сходимость какой-нибудь её подпоследовательности. Аналогично доказательству полноты L_p, мы можем выбрать подпоследовательность, для которой будет выполняться

$$\forall n \geqslant 2, \|y_n - y_{n-1}\| \leqslant 2^{-n},$$

и тогда вопрос сведётся к существованию суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_1 = y_1$, а $u_n = y_n - y_{n-1}$ и $\|u_n\| \leqslant 2^{-n}$ начиная со второго элемента.

По определению нормы в E/G мы можем выбрать прообраз $v_n \in E$ для $u_n \in E/G$ так, чтобы $\|v_n\| \leqslant 2\|u_n\|$. Но тогда при $n \geqslant 2$ будет выполняться $\|v_n\| \leqslant 2^{1-n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ будет сходиться в E по фундаментальности к некоторому x. Если $x_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, то y_n соответствует классу $x_n + G$. Если $x_n \to x$ в E, то $y \in E/G$, соответствующий $x + G$, будет пределом y_n, так как по определению нормы факторпространства

$$\|y_n - y\| \leqslant \|x_n - x\|.$$

□

Сформулируем теперь теорему об изоморфизме с учётом замечания о том, что без требования замкнутости образа ничего хорошего у нас не получится.

Определение 7.107. Линейное отображение $A : E \to F$ называется *изоморфизмом*, если оно непрерывно, обратимо и обратное к нему тоже непрерывно.

Теорема 7.108 (Теорема об изоморфизме для банаховых пространств)**.** *Если линейное непрерывное отображение $A : E \to F$ имеет замкнутый образ $A(E)$, то оно порождает изоморфизм $E/\ker A \to A(E)$.*

Доказательство. Ясно, что A порождает непрерывное инъективное отображение

$$\bar{A} : E/\ker A \to F.$$

Также можно заменить F на его замкнутое подмножество $A(E)$ и считать, что $A(E) = F$. В итоге нам остаётся доказать такое утверждение: если A является непрерывной биекцией, то обратное к нему тоже непрерывно. Заметим, что непрерывность обратного в такой постановке равносильна тому, что образ единичного шара $A(B_E)$ содержит некоторый маленький шар tB_F, $t > 0$.

Рассмотрим последовательность шаров натуральных радиусов в E, (nB_E). Их образы $A(nB_E)$ образуют возрастающую последовательность подмножеств F и из биективности A покрывают всё F. Применим теорему Бэра в варианте с замкнутыми множествами, она утверждает, что замыкание одного из этих множеств должно иметь непустую внутренность,

$$\operatorname{cl} A(mB_E) \supseteq tB_F.$$

Это почти то, что нам нужно, остаётся только избавиться от операции замыкания. Положив $M = m/t$, получим с помощью гомотетии (которая является гомеоморфизмом F)

$$\operatorname{cl} A(MB_E) \supseteq B_F.$$

Применив ещё раз гомотетия с коэффициентом α, мы получим включение

$$\operatorname{cl} A(\alpha MB_E) \supseteq \alpha B_F \tag{7.4}$$

для фиксированного $M > 0$ и произвольного $\alpha > 0$. Посмотрим на какой-нибудь вектор $y \in B_F$. По (7.4) можно найти $v_1 \in mB_E$, такой что

$$\|v_1\| \leqslant M \text{ и } \|y - Av_1\| \leqslant 1/2.$$

Далее, применяя (7.4) к $y - Av_1$, найдём v_2, такой что

$$\|v_2\| \leqslant M/2 \text{ и } \|y - Av_1 - Av_2\| \leqslant 1/4.$$

Продолжая в том же духе, будем иметь равенства

$$\|v_k\| \leqslant M2^{1-k} \text{ и } \|y - Av_1 - Av_2 - \dots - Av_k\| \leqslant 2^{-k}.$$

Если мы теперь обозначим $x_k = v_1 + \dots + v_k$, то последовательность x_k фундаментальна в E и сходится в E к некоторому x с нормой не более $2M$. Так как

$$\|y - Ax_k\| \leqslant 2^{-k},$$

то Ax_k сходится к $y = Ax$. Таким образом мы доказали

$$A(2MB_E) \supseteq B_F,$$

что означает $\|A^{-1}\| \leqslant 2M$, то есть непрерывность A^{-1}. □

Задача 7.109. Докажите, что пространство непрерывных линейных отображений $E \to F$ (обозначаемое $\mathcal{L}(E, F)$) является банаховым пространством с введённой здесь нормой.

[[Надо проверить лишь полноту, что несложно.]]

7.22. **Гильбертовы пространства и их базисы.** Изучим важный частный случай банахова пространства, являющийся абстрактным аналогом пространства L_2 и, в частности, евклидова пространства.

Определение 7.110 (Гильбертово пространство). Пусть норма в банаховом пространстве E порождается положительно определённым скалярным произведением

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

тогда пространство называется *гильбертовым*.

Если поле констант комплексное, то скалярное произведение будет комплексно-линейным по первому аргументу и комплексно-антилинейным по второму, а также $(x, y) = \overline{(y, x)}$. В основном мы будем рассматривать действительный случай, на самом деле всякое комплексное гильбертово пространство является действительным гильбертовым пространством со скалярным произведением $\mathrm{Re}(x, y)$ и той же самой нормой, отличие будет только в присутствии ортогонального (сохраняющего скалярное произведение и обратимого) оператора $J : H \to H$, у которого $J^2 = -1$ (*комплексная структура*).

Рассмотрим неравенство (в комплексном варианте)

$$(ax + by, ax + by) \geqslant 0 \Leftrightarrow |a|^2\|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, a\bar{b}(x, y) + b^2\|y\|^2 \geqslant 0,$$

используя условия неотрицательности эрмитовой формы двух переменных a, b мы получим неравенство Коши–Буняковского

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

из которого, как и в конечномерном случае, следует неравенство треугольника для нормы. Конечномерное гильбертово пространство изометрично $\mathbb{R}^n$, как известно из курса линейной алгебры, поэтому далее мы рассматриваем бесконечномерные гильбертовы пространства.

Гильбертово пространство имеет много полезных свойств, например, в нём можно развивать абстрактную теорию рядов Фурье точно так же, как она идёт в $L_2[-\pi, \pi]$, с минимальным свойством коэффициентов Фурье и неравенством Бесселя. Результаты этой теории можно резюмировать в следующей теореме:

Теорема 7.111. *Для всякой ортогональной системы (φ_k) в гильбертовом пространстве H следующие свойства эквивалентны:*

а) полнота системы (плотность её линейной оболочки в H);

б) замкнутость системы (отсутствие в H ненулевых элементов, ортогональных всем φ_k);

в) сходимость ряда Фурье любого $x \in H$ по системе (φ_k) к x;

г) равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье любого $x \in H$ по данной системе.

Доказательство. Пусть для упрощения формул система ортонормирована. Докажем по шагам

(а)⇒(б): Пусть найдётся x, ортогональный всем φ_k и пусть $\|x\| = 2\varepsilon > 0$. Приблизим x линейной комбинацией $y = \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k$ с точностью ε, тогда x ортогонален y, но

$$0 = (x, y) = (x, y - x) + (x, x), \text{ хотя } |(x, x)| = 4\varepsilon^2, |(x, y - x)| \leqslant 2\varepsilon^2.$$

(б)⇒(в): Для всякого x можно аналогично случаю L_2 установить минимальное свойство коэффициентов Фурье $c_k = (x, \varphi_k)$

$$\|x - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |a_k - c_k|^2$$

и соответствующее неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

тогда ряд Фурье $\sum_{k=1}^\infty c_k\varphi_k$ сходится по фундаментальности, так как

$$\left\|\sum_{k=n}^m c_k\varphi_k\right\| = \sqrt{\sum_{k=n}^m |c_k|^2} \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Пусть тогда $y = \sum_{k=1}^\infty c_k\varphi_k$. Из непрерывности скалярного произведения в H следует

$$(x - y, \varphi_k) = (x, \varphi_k) - (y, \varphi_k) = c_k - \sum_{\ell=1}^\infty c_\ell(\varphi_\ell, \varphi_k) = 0,$$

то есть $x - y$ ортогонален всем φ_k, а значит, должен равняться нулю и ряд Фурье должен сходиться к $x = y$.

(в)⇔(г). Из равенства

$$\left\|x - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

в пределе следует эквивалентность сходимости ряда Фурье к x и равенства Парсеваля.

(в)⇒(а): Очевидно. □

Приведённая теорема показывает, что можно строить много ортогональных систем в пространствах L_2, по которым можно раскладывать в ряд Фурье, сходящийся по норме L_2. Например, можно взять систему $\{1, x, x^2, \dots, \}$ на отрезке $[-1, 1]$, она полна, так как всякую функцию на отрезке можно приблизить многочленом в норме L_2 (сначала приблизить бесконечно гладкой в норме L_2, а потом равномерно приблизить многочленом по теореме Вейерштрасса). Значит, если ортогонализовать эту систему по методу Грама–Шмидта, то можно получить полную и замкнутую систему многочленов P_n на отрезке $[-1, 1]$, причём многочлен номер n будет иметь степень n, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Задача 7.112 (Многочлены Лежандра с точностью до константы). Проверьте, что многочлены

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

составляют ортогональную систему в $L_2[-1, 1]$.

[[Поинтегрируйте произведение двух таких многочленов по частям.]]

Мы даже можем описать «сравнительно небольшие» гильбертовы пространства с точностью до изометрии:

Теорема 7.113 (Теорема Рисса–Фишера)**.** *Всякое гильбертово пространство H, в котором нашлась счётная полная система элементов, изометрично некоторому $\mathbb{R}^n$ или ℓ_2.*

Доказательство. Счётную полную систему элементов можно сделать ортонормированной по методу Грама–Шмидта. Если она оказалась конечной, то у нас получилось евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Иначе счётная полная ортонормированная система (φ_k) позволяет сопоставить каждому элементу $x \in H$ последовательность его коэффициентов Фурье

$$c_k(x) = (x, \varphi_k), \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\varphi_k$$

с выполнением равенства Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Наоборот, всякая последовательность (c_k) с конечной суммой квадратов модулей сходится по фундаментальности, так как

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} c_k\varphi_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=n}^{m} |c_k|^2} \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

и даёт элемент

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\varphi_k.$$

Это даёт биекцию между H и пространством $\ell_2 = L_2(\mathbb{N})$ последовательностей с конечной суммой квадратов модуля. Она сохраняет норму вектора и значит сохраняет скалярное произведение, так как скалярное произведение можно выразить через норму с помощью формулы

$$(x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

□

Задача 7.114. Назовём линейный оператор $A : H \to H$ в гильбертовом пространстве *изометричным*, если для любых $x, y \in H$ оказывается $(Ax, Ay) = (x, y)$. Постройте пример необратимого изометричного оператора.

[[Удобно построить такой оператор в пространстве ℓ_2.]]

7.23. **Двойственное к гильбертову пространству.** С точки зрения двойственности гильбертово пространство отличается тем, что его двойственное по сути совпадает с ним самим. Доказательство этого произведём в два шага:

Теорема 7.115 (Метрическая проекция в гильбертовом пространстве)**.** *Пусть H — гильбертово пространство, $V \subset H$ — его замкнутое линейное (или аффинное) подпространство. Для всякого $x \in H$ существует единственный $\pi_V(x) \in V$, ближайший к x, то есть*

$$\|x - \pi_V(x)\| = \inf_{y \in V} \|x - y\|.$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{dist}(x, V) = d$, мы хотим доказать, что это значение достигается для некоторой точки $y \in V$. Нам понадобится следующее утверждение: если $\|x - y'\|, \|x - y''\| < \sqrt{d^2 + t^2}$, то $\|y' - y''\| < 2t$.

Доказательство утверждения по сути школьное, мы переходим в двумерную аффинную плоскость P, натянутую на x, y', y'', замечаем, что прямая ℓ через точки y', y'' содержится в $V \cap P$, следовательно $\operatorname{dist}(x, \ell) \geqslant d$. По теореме Пифагора точки y', y'' находятся не далее t от основания перпендикуляра из x на ℓ, что доказывает утверждение.

Из утверждения следует, что всякая последовательность точек $y_k \in V$, для которой $\|x - y_k\| \to d$, является фундаментальной, имеет предел, и из замкнутости V следует, что этот предел лежит в V. □

Теорема 7.116 (Двойственное к гильбертову пространству). *Для всякого y в гильбертовом пространстве H положим*

$$\lambda_y(x) = (x, y).$$

Тогда $\lambda_y \in H'$, $\|\lambda_y\| = \|y\|$ и все элементы двойственного пространства H' имеют такой вид.

Доказательство. Нетривиально доказать только последнее утверждение. Пусть у нас есть какой-то непрерывный линейный функционал $\lambda : H \to \mathbb{R}$. Рассмотрим замкнутое аффинное подпространство $A = \{x \in H : \lambda(x) = 1\}$.

Спроецируем метрически 0 на A, получим точку $y \in A$. Рассмотрим элемент $y+x \in A$, тогда вся прямая $y + tx$ лежит в A. Из минимальности выражения

$$\|y + tx\|^2 = \|y\|^2 + 2(x, y)t + \|x\|^2 t^2$$

при $t = 0$ следует $(x, y) = 0$. Из этого следует, что все элементы A имеют скалярное произведение с y, равное $\|y\|^2$. Следовательно, функционал

$$\lambda_y(\cdot) = \left(\cdot, \frac{y}{\|y\|^2}\right)$$

совпадает с λ на A, по однородности и непрерывности это совпадение распространяется на всё H. □

Предыдущее отождествление $C : H \to H'$ можно распространить на случай гильбертова пространства с комплексным полем скаляров (при этом отображение C будет комплексно-антилинейным), мы оставляем читателю проверить это в качестве упражнения.

Описание двойственности $L_p' = L_q$ при $1/p + 1/q = 1$ оставляем для самостоятельного разбора читателем в виде задач:

Задача 7.117 (Неравенство Ханнера). * Если $p > 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \geqslant 2\|f\|_p^p + 2\|g\|_p^p.$$

[[Проверьте, что для чисел выполняется $|a + b|^p + |a - b|^p \geqslant 2|a|^p + 2|b|^p$ и проинтегрируйте.]]

Задача 7.118. Если $p > 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$2^{p-1}\|f\|_p^p + 2^{p-1}\|g\|_p^p \geqslant \|f - g\|_p^p + \|f + g\|_p^p.$$

[[Подставьте в предыдущее неравенство $f - g$ и $f + g$ вместо f и g.]]

Задача 7.119 (Неравенство Ханнера). * Если $1 < p < 2$, $f, g \in L_p(X)$, то
$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p.$$

[[Проверьте, что функция $\zeta(a,b) = (a^{1/p}+b^{1/p})^p+|a^{1/p}-b^{1/p}|^p$ является выпуклой 1-однородной функцией от неотрицательных чисел, то есть для любых двух точек $A, B \in [0,+\infty)^2$ и положительных коэффициентов u, v получается $\zeta(uA+vB) \leqslant u\zeta(A) + v\zeta(B)$. Выведите отсюда по индукции неравенство Йенсена для положительных комбинаций точек
$$\zeta(u_1A_1 + \dots + u_NA_N) \leqslant u_1\zeta(A_1) + \dots + u_N\zeta(A_N),$$
а предельным переходом получите неравенство Йенсена для интегралов от функций $A : X \to [0,+\infty)^2$
$$\zeta\left(\int_X A(x)\, dx\right) \leqslant \int_X \zeta(A(x))\, dx.$$
Распишите последнее неравенство покоординатно
$$\zeta\left(\int_X a(x)\, dx, \int_X b(x)\, dx\right) \leqslant \int_X \zeta(a(x), b(x))\, dx$$
и подставьте в него $a(x) = |f(x)|^p, b(x) = |g(x)|^p$.]]

Задача 7.120. Если $1 < p < 2$, $f, g \in L_p(X)$, то
$$2^p\|f\|_p^p + 2^p\|g\|_p^p \geqslant (\|f-g\|_p + \|f+g\|_p)^p + |\|f-g\|_p - \|f+g\|_p|^p.$$

[[Подставьте в предыдущее неравенство $f-g$ и $f+g$ вместо f и g.]]

Задача 7.121. Докажите существование и единственность метрической проекции на замкнутое подпространство в пространствах L_p при $1 < p < +\infty$.

[[Действуйте аналогично доказательству для гильбертова пространства с использованием приведённых выше неравенств.]]

Задача 7.122. Выясните устройство непрерывных линейных функционалов в L_p.

[[Действуйте аналогично доказательству для гильбертова пространства, найдя среди
$$\{f : \lambda(f) = 1\}$$
элемент минимальной нормы, проверьте, что $g(x) = |f(x)|^{p-1}\operatorname{sgn} f(x)$ обладает свойством
$$\forall h \in L_p(X), \int_X h(x)g(x)\, dx = \lambda(h)\|f\|_p^p$$
и лежит в L_q, $1/p + 1/q = 1$, так что с точностью до константы g реализует функционал λ.]]

7.24. **Компактные подмножества в банаховых пространствах.** Введём некоторые определения. Сначала напомним, что подмножество K топологического пространства называется *компактным*, если из всякого его открытого покрытия можно выбрать конечное подсемейство, которое всё ещё покрывает K.

Определение 7.123. Подмножество K топологического пространства X называется *предкомпактным*, если его замыкание компактно.

Определение 7.124. Подмножество X банахова пространства E называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в нём можно выбрать конечную *ε-сеть* $N \subseteq X$, для которой X лежит в ε окрестности $U_\varepsilon(N)$. Иначе говоря, X покрывается конечным набором открытых шаров с центрами в N и радиусами ε.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ мы знаем, что множество предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено. Также нетрудно убедиться, что в евклидовом пространстве понятие ограниченности совпадает с понятием вполне ограниченности.

Задача 7.125. Докажите, что в бесконечномерном банаховом пространстве E единичный шар не является вполне ограниченным.

[[Постройте по индукции систему единичных векторов с попарными разностями длины не менее единицы.]]

Теорема 7.126. *Подмножество X банахова пространства E предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограниченно.*

Доказательство. Если множество предкомпактно, то покроем его замыкание набором ε-шаров. Из этого набора можно оставить только конечное число, которые всё ещё будут покрывать его замыкание.

В обратную сторону, пусть X вполне ограничено и $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ — открытое покрытие его замыкания Y. Предполагаем противное: $\mathcal{U}$ нельзя уменьшить до конечного покрытия Y.

Будем действовать как в доказательстве для евклидова пространства, строя последовательность замкнутых подмножеств $Y_k \subset Y$, каждое из которых не покрывается конечным подсемейством $\mathcal{U}$. На k-м шаге возьмём $\varepsilon = 2^{-k}$ и покроем X конечным набором $\varepsilon/2$-шаров $B_{x_1}(2^{-k-1}), \dots, B_{x_N}(2^{-k-1})$. Увеличенные шары $B_{x_1}(2^{-k}), \dots, B_{x_N}(2^{-k})$ тогда покроют и Y. Для одного из множеств $Y_k \cap B_{c_k}(2^{-k})$ мы тоже не сможем выбрать из $\mathcal{U}$ конечное покрытие (иначе смогли бы для Y_k). Положим тогда $Y_{k+1} = Y_k \cap B_{c_k}(2^{-k})$.

Так как все Y_k не пусты, последовательность центров выбранных шаров c_k является фундаментальной и стремится к некоторой точке $c \in Y$. Эта точка лежит в одном из $U_\alpha \in \mathcal{U}$ вместе со своей окрестностью, в которую при достаточно большом k попадает и всё множество Y_k — противоречие с выбором Y_k. ☐

Для пространства непрерывных функций на компакте мы можем более точно описать предкомпактные подмножества. Пусть M — компактное метрическое пространство, $C(M)$ — пространство непрерывных функций на нём с нормой

$$\|f\|_C = \sup_{x \in M} |f(x)|.$$

Определение 7.127. Множество функций $X \subset C(M)$ *равностепенно непрерывно*, если

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ : \forall f \in X\ \forall x, y \in X, \operatorname{dist}(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Теорема 7.128 (Теорема Арцела–Асколи)**.** *Множество $X \subset C(M)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда X равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Определим общий модуль непрерывности множества функций X:

$$\omega_X(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in X,\ x, y \in M,\ \operatorname{dist}(x, y) < \delta\},$$

он неотрицателен и может принимать значение $+\infty$. Равностепенная непрерывность означает, что $\omega_X(\delta) \to 0$ когда $\delta \to +0$.

Мы будем понимать предкомпактность как вполне ограниченность в силу предыдущей теоремы. Допустим множество функций X ограничено и равностепенно непрерывно, докажем его вполне ограниченность. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $\omega_X(\delta) < \varepsilon$. Выберем δ-сеть $N_\delta \subset M$ из компактности M. Значения функций на N_δ образуют ограниченное множество в конечномерном $\mathbb{R}^{N_\delta}$, значит в нём есть ε-сеть $X_\varepsilon \subseteq X$, то есть всякая $f \in X$ может быть с точностью ε приближена на конечном множестве N_δ функцией $g \in X_\varepsilon$.

Но так как N_δ является δ-сетью в M и $\omega_X(\delta) < \varepsilon$, то при переходе от N_δ ко всему M точность приближения f функцией g может упасть максимум до 3ε, то есть X_ε является 3ε-сетью для X в норме $C(M)$.

Обратно, пусть X предкомпактно, то есть вполне ограниченно в $C(M)$. Возьмём для него ε-сеть $X_\varepsilon \subseteq X$. Приближая функцию $f \in X$ функциями $g \in X_\varepsilon$, мы получим неравенство

$$\omega_X(\delta) \leqslant \sup_{g\in X_\varepsilon} \omega_g(\delta) + 2\varepsilon.$$

Так как супремум берётся по конечному набору (равномерно) непрерывных функций, то при достаточно малом δ мы сможем утверждать $\omega_X(\delta) < 3\varepsilon$. Это означает равностепенную непрерывность X, ограниченность очевидно следует из вполне ограниченности. □

Задача 7.129. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, а функция $K : X \times X \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что интегральный оператор $I : C(X) \to C(X)$, заданный по формуле

$$I[f](x) = \int_X K(x,y)f(y)\,dy$$

отображает единичный шар $C(X)$ в предкомпактное множество в $C(X)$.

[[Докажите равностепенную непрерывность образа единичного шара при этом операторе через равномерную непрерывность K.]]

7.25. **Теорема Хана–Банаха, лемма Цорна и трансфинитная индукция.** Мы уже выяснили, что двойственное (определение 7.97) к гильбертову пространству устроено довольно простым образом. В этом разделе мы обсудим более общий случай, в основном приводя результаты без доказательства. Первое утверждение уточняет само существование двойственного пространства:

Теорема 7.130 (Теорема Хана–Банаха). *Пусть E — банахово пространство, E' — его двойственное. Тогда для всякого $x \in E$ найдётся ненулевой $\lambda \in E'$, такой что*

$$\lambda(x) = \|x\| \cdot \|\lambda\|.$$

Доказательство. Идея доказательства этой теоремы сводится к тому, что мы можем продолжать функционал с подпространства $F \subset E$ так, что его норма при этом не увеличивается. В одномерном случае утверждение очевидно, далее надо продолжить функционал с одномерного пространства $\langle x\rangle$ на всё E, не увеличивая его норму. Задача продолжения достаточно легко решается в случае, если $F \subset E$ имеет коразмерность 1, тогда канонический изоморфизм $E/F = \mathbb{R}$ и функционал λ (продолженный как-нибудь), как пара координат, дают двумерную картинку, на которой ситуация достаточно понятна и вопрос решается элементарно (проверьте это).

Конечно, продолжения функционала по шагам коразмерности 1 не доведут нас за конечное количество шагов до всего E, и даже не доведут до E за счётное количество шагов. Но тут на помощь приходит *лемма Цорна* (теорема 7.131 ниже) из теории множеств. Мы рассмотрим все пары (F, λ_F), состоящие из подпространства $F \subset E$, $F \ni x$, и продолженного на него с $\langle x\rangle$ функционала λ_F с нормой $\lambda(x)$. Введём на парах отношение частичного порядка

$$(F, \lambda_F) \leqslant (G, \lambda_G) \Leftrightarrow F \subseteq G \text{ и } \lambda_G|_F = \lambda_F.$$

Тогда для всякой *цепи*, то есть множества пар

$$\mathcal{C} = \{F_\alpha, \lambda_\alpha\}_\alpha,$$

в котором любые два элемента сравнимы этим частичным порядком, мы имеем пару, состоящую из объединения $F = \bigcup_\alpha F_\alpha$ и естественно заданного на нём линейного функционала λ_F, такого что для любого α имеем $\lambda_F|_{F_\alpha} = \lambda_\alpha$. Построенная пара (F, λ_F) обладает тем свойством, что она «не меньше» любого элемента $\mathcal{C}$.

В таких условиях (существование верхней грани любой цепи) лемма Цорна утверждает, что найдётся пара (F, λ_F), для которой не существует строго большей пары в нашей системе. Так как мы умеем продолжать на один шаг в коразмерности 1, то в такой паре обязательно $F = E$, иначе бы мы продолжили с F на какое-то F' ($F \subset F' \subseteq E$) с $\dim F'/F = 1$ и получили противоречие с максимальностью. $\square$

Как видно из приведённого рассуждения, нам потребуется познакомиться с некоторыми фактами теории множеств. Сформулируем явно использованную выше в доказательстве лемму Цорна:

Теорема 7.131 (Лемма Цорна). *Пусть X — частично упорядоченное множество, у которого любая цепь (линейно упорядоченное подмножество) $C \subseteq X$ имеет* верхнюю грань, *то есть элемент $s \in X$ такой что для любого $x \in C$ выполняется $x \preccurlyeq s$. Тогда в X есть максимальный элемент m, то есть элемент, для которого нет большего в этом множестве.*

Чтобы убедиться в верности леммы Цорна, сформулируем сначала *аксиому выбора*: У всякого семейства множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (индексированного некоторым множеством A) декартово произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ не пусто, иначе говоря, мы можем выбрать по одному $f(\alpha) \in X_\alpha$ для любого $\alpha \in A$. Эта аксиома звучит как некоторое очевидное утверждение, но на самом деле оказывается, что при бесконечном A она не следует из других аксиом теории множеств и должна быть постулирована отдельно, если мы хотим иметь возможность содержательно работать с бесконечными множествами.

Далее мы рассмотрим некоторое усиление понятия линейного порядка:

Определение 7.132. Множество X называется *вполне упорядоченным*, если на нём введён линейный порядок, в котором всякое подмножество $Y \subseteq X$ имеет минимальный элемент.

Например, множество $\mathbb{N}$ вполне упорядоченно своим естественным порядком, а $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ не являются вполне упорядоченными своим естественным порядком.

Теорема 7.133 (Теорема Цермело). *Всякое множество можно вполне упорядочить.*

Набросок доказательства. Пусть наше множество — X. Используя аксиому выбора, выберем элемент $f(Y) \in X \setminus Y$ для всякого $Y \subset X$, $Y \neq X$, включая пустое Y. Будем рассматривать вполне упорядоченные подмножества $S \subseteq X$, такие что

$$\forall x \in S,\ x = f\left(\{y \in S : y < x\}\right).$$

Неформально говоря, f предписывает выбор следующего элемента в X при наличии некоторого множества уже выбранных элементов, в качестве S мы рассматриваем множества, выбранные в соответствии с f.

Аккуратно используя вполне упорядоченность (проделайте это в качестве упражнения), можно показать, что любые два таких вполне упорядоченных S и T устроены так, что одно является подмножеством другого и начальным интервалом другого в смысле порядка; значит объединение U всех таких S несёт порядок, согласованный с порядком на всех S, и является вполне упорядоченным (проверьте это). После этого остаётся заметить, что $U = X$, так как иначе множество $U \cup \{f(U)\}$ будет множеством типа S, которое по построению уже должно содержаться в U. $\square$

С понятием вполне упорядоченности связан *принцип трансфинитной индукции*: если для всякого элемента $x \in S$ вполне упорядоченного множества S можно определить некоторую функцию $f(x)$ при условии, что $f(y)$ определена при всех $y < x$, то f определена на всём S. Неформально говоря, достаточно рассмотреть минимальный из тех $x \in S$, для которых f определить нельзя, и получить противоречие.

Задача 7.134. Обоснуйте возможность трансфинитной индукции, рассмотрев частичные определения f на начальных отрезках $T \subseteq S$.

[[Докажите, что любые два частичных определения устроены так, что одно из них является продолжением другого. Потом объедините все частичные определения f и объясните, что получилось объединение f на всём S.]]

Вывод леммы Цорна из теоремы Цермело. Помимо частичного порядка $\preccurlyeq$ на X рассмотрим (не обязательно связанное с ним) отношение полного порядка $\leqslant$ на X, существующее по теореме Цермело.

Сделаем разбиение X на два множества A и B по трансфинитной индукции. Если для данного $x \in X$ все $y < x$ уже приписаны к одному из двух типов, то припишем x к типу по следующему правилу: $x \in A$, если x вместе с уже приписанными в A элементами образует $\preccurlyeq$-цепь. Иначе $x \in B$, тогда x не будет $\preccurlyeq$-сравним с одним из элементов A.

По окончании этого процесса A является $\preccurlyeq$-цепью, а всякий элемент из B не $\preccurlyeq$-сравним с одним из элементов A. Следовательно, верхняя грань A, $m \in X$, должна лежать в самом A. Если $x \in A$, то $x \preccurlyeq m$, а если $x \in B$, то $m \preccurlyeq x$ не может выполняться, так как тогда выполнялось бы $y \preccurlyeq m \preccurlyeq x$ для любого $y \in A$, что противоречило бы нахождению x в B. Следовательно, m является максимальным элементом X. $\square$

Доказательство теоремы Хана–Банаха также можно провести с помощью трансфинитной индукции и понятия *алгебраического базиса* (*базиса Гамеля*) пространства E, далее идёт набросок таких рассуждений.

Определение 7.135. *Алгебраическим базисом* векторного пространства V называется подмножество $B \subset V$, в котором нет линейных зависимостей между конечным числом векторов, и которое порождает пространство V своим конечными линейными комбинациями.

Название «алгебраический» мы используем, чтобы не путать это понятие, например, с ортогональными системами в гильбертовых пространствах, по которым каждый элемент раскладывается в (бесконечную) сумму. В алгебраическом смысле суммы рассматриваются только конечные.

Лемма 7.136. *Во всяком векторном пространстве есть вполне упорядоченный алгебраический базис.*

Доказательство. Возьмём вполне упорядоченное множество S, которое мощнее V, например, полностью упорядочив $S = 2^V$. Также вполне упорядочим V. Определим отображение $f : S \to V$ по трансфинитной индукции так: если $x \in S$, а $L_x = \{y \in S : y < x\}$, то возьмём в качестве $f(x)$ минимальный по полному порядку V элемент, линейно не зависимый от векторов множества $f(L_x)$. Если линейно независимых от $f(L_x)$ элементов нет, то мы на самом деле нашли вполне упорядоченный базис $f(L_x)$ в V и можно положить $f(x) = 0$.

Если вторая альтернатива в этом определении никогда не сработала, то мы инъективно отобразим S в V, что невозможно в силу выбранной мощности S. $\square$

При наличии вполне упорядоченного алгебраического базиса V теорема Хана–Банаха может быть доказана трансфинитной индукцией. Действительно, на каждом шаге трансфинитной индукции мы добавляем один вектор и расширяем линейную оболочку начального отрезка базиса так, что факторпространство новой линейной оболочки по старой будет иметь размерность 1, то есть вопрос опять сводится к двумерной картинке.

За подробностями предыдущих набросков и строгим изложением нужных фактов теории множеств читатель может обратиться к любой книге по теории множеств, имея в виду, что злоупотреблять этим не стоит. Если изложенное выше было не совсем понятно, можно просто принять лемму Цорна как аксиому.

Вернёмся к банаховым пространствам. Теорема Хана–Банаха показывает, что естественное отображение банахова пространства в его второе двойственное

$$E \to E'',\ x \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(x))$$

является вложением, сохраняющим норму. В случае гильбертова пространства это вложение оказалось биекцией, хотя в общем случае это не так. Некоторые любопытные сведения о случае $E = \ell_1$ будут приведены в разделе 7.28.

В следующих упражнениях читателю предлагается установить свойства конечномерных подпространств банахова пространства, замкнутых подпространств конечной коразмерности и фредгольмовых операторов.

Задача 7.137. Докажите, что конечномерное подпространство V в банаховом пространстве E имеет замкнутое дополнение $W \subseteq E$, такое что $E = V \oplus W$.

[[Постройте с помощью теоремы Хана–Банаха линейное непрерывное отображение $E \to \mathbb{R}^k$, ограничение которого на V будет биекцией.]]

Задача 7.138. Непрерывное линейное отображение банаховых пространств $A : E \to F$ называется *фредгольмовым*, если $\ker A$ и $F/A(E)$ конечномерны и $A(E)$ замкнуто. Пространство фредгольмовых отображений обозначим $\mathcal{F}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$. Докажите, что оно открыто в $\mathcal{L}(E, F)$

[[Разложите $E = \ker A \oplus W$ и докажите, что для близких к A операторов A' образ $A'(W)$ всё ещё будет замкнутым и $F/A'(W)$ останется конечномерным. Применяйте теорему об изоморфизме 7.108.]]

Задача 7.139. Для $A \in \mathcal{F}(E, F)$ положим

$$\operatorname{ind} A = \dim F/A(E) - \dim \ker A.$$

Докажите, что этот *индекс* локально постоянен на $\mathcal{F}(E, F)$.

[[Более внимательно проанализируйте предыдущее рассуждение.]]

7.26. **$*$-слабая топология в двойственном пространстве и теорема Тихонова.** На двойственно пространстве банахова пространства помимо топологии, определяемой нормой, существует и другая топология:

Определение 7.140. На пространстве E' можно задать *$*$-слабую топологию*, порождённую открытыми множествами

$$U_{x,a,b} = \{\lambda \in E' : a < \lambda(x) < b\}$$

для всяких $x \in E$ и $a < b \in \mathbb{R}$. Соответствующее этой топологии понятие сходимости соответствует поточечной сходимости линейных функционалов как функций на E.

При этом топология, связанная с нормой в пространстве E' (определение 7.97), называется *сильной*.

Оказывается, у $*$-слабой топологии есть некоторое свойство компактности, которое иногда позволяет находить линейные функционалы, минимизирующие некоторые (*полунепрерывные снизу в $*$-слабой топологии*) функции от функционала.

Теорема 7.141 (Теорема Банаха–Алаоглу)**.** *Всякий шар пространства E' компактен в $*$-слабой топологии.*

Доказательство. Пусть $B \subset E$ и $B' \subset E'$ — единичные шары, утверждение достаточно доказать для шара B'. Всякий линейный функционал $\lambda \in B'$ является функцией $\lambda : B \to [-1,1]$, то есть представляет элемент бесконечного декартова произведения

$$\mathcal{P} = [-1,1]^B = \prod_{x\in B}[-1,1].$$

В этом декартовом произведении можно ввести топологию, порождённую множествами $\prod_{x\in B} U_x$, такими что все U_x являются открытыми подмножествами $[-1,1]$ и все кроме конечного числа совпадают с $[-1,1]$. Можно проверить по определению, что тогда B' является замкнутым подмножеством $\mathcal{P}$ (так как отклонение от линейности данного отображения $B \to [-1,1]$ можно проверить в конечном наборе точек $x \in B$).

Теперь остаётся применить теорему Тихонова (теорему 7.142 ниже), тогда B' оказывается компактом как замкнутое подмножество компакта $\mathcal{P}$. Можно также проверить, что топология декартова произведения в $\mathcal{P}$ индуцирует именно $*$-слабую топологию на B'. □

Мы свели доказательство теоремы Банаха–Алаоглу к более фундаментальной теореме Тихонова, доказательство которой мы сейчас обсудим.

Теорема 7.142 (Теорема Тихонова). *Пусть A — некоторое множество, а $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство компактных топологических пространств, индексированное этим множеством. Тогда будет компактным и декартово произведение*

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

с топологией, порождённой всевозможными произведениями $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ открытых $U_\alpha \subseteq X_\alpha$, у которых только для конечного числа нарушается равенство $U_\alpha = X_\alpha$.

В следующих задачах даётся набросок элементарных рассуждений, доказывающих ослабленные версии теорем Тихонова и Банаха–Алаоглу, а потом идёт довольно длинное доказательство теоремы Тихонова в полном виде.

Задача 7.143. Докажите секвенциальную компактность декартова произведения отрезка с самим собой в счётном количестве. Топологии сходимости будет соответствовать покоординатная сходимость последовательностей чисел — элементов этого произведения.

[[Примените теорему Больцано–Вейерштрасса по очереди ко всех координатам, получив последовательность вложенных подпоследовательностей (S_n) исходной последовательности точек (p_k). Потом выберите подпоследовательность (p_{k_ℓ}), у которой для всякого фиксированного n при достаточно больших ℓ номер k_ℓ попадает в список номеров S_n.]]

Задача 7.144. Докажите, что если в единичном шаре E есть счётное всюду плотное множество, то секвенциальная компактность единичного шара E' следует из предыдущей задачи.

[[Добейтесь сходимости подпоследовательности (λ_n) в точках плотного $X \subset B$, потом докажите сходимость во всех точках, используя липшицевость всех $\lambda_n \in B'$.]]

Теперь приведём доказательство теоремы Тихонова в полной общности. Так как оно достаточно длинное, то читатель может принять эту теорему без доказательства и пропустить эти рассуждения.

Сначала заметим, что для доказательства компактности некоторого топологического пространства X нам нужно доказать, что всякое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Рассуждая от противного, мы начнём с некоторого открытого покрытия $\mathcal{U} \subseteq 2^X$ без конечных подпокрытий и поместим его в некоторое максимальное по включению открытое покрытие $\mathcal{I} \subseteq 2^X$, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Лемма 7.145. *Для всякого открытого покрытия $\mathcal{U} \subseteq 2^X$ без конечного подпокрытия найдётся некоторое открытое покрытие $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{I} \subseteq 2^X$, максимальное по включению среди тех, из которых тоже нельзя выбрать конечное подпокрытие.*

Доказательство. Рассмотрим всевозможные открытые покрытия $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}$, из которых нельзя выбрать конечное подпокрытие. Докажем, что к ним применима лемма Цорна (теоремы 7.131), а именно, докажем, что всякая линейно упорядоченная цепь $\mathcal{C}$ таких покрытий в объединении даёт покрытие такого же вида. Частичный порядок на семействах подмножеств здесь задан отношением включения одного семейства в другое, в этом смысле мы и применяем лемму Цорна.

В качестве кандидата на верхнюю грань цепи семейств $\mathcal{C}$ возьмём объединение элементов цепи. Предположим, что оно нам не годится, то есть в объединении элементов цепи $\mathcal{C}$ есть конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_N$ пространства X. Тогда открытое множество U_i принадлежит некоторому элементу цепи $\mathcal{U}_i$ и из определения цепи следует, что без ограничения общности выполняются включения

$$\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{U}_N.$$

Следовательно, $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{U}_N \in \mathcal{C}$ и мы выбрали из покрытия $\mathcal{U}_N$ конечное подпокрытие — это противоречие, так как цепь составлена из покрытий без конечных подпокрытий. Следовательно, наше предположение неверно, условия леммы Цорна выполнены и она даёт существование максимального по включению открытого покрытия без конечных подпокрытий. □

Изучим теперь более внимательно строение максимального по включению открытого покрытия, полученного в предыдущей лемме.

Лемма 7.146. *Если открытое покрытие $\mathcal{I}$ топологического пространства X максимально по включению среди открытых покрытий, не имеющих конечного подпокрытия, то выполняются свойства*

1) для всякого $U \in \mathcal{I}$ и открытого $V \subseteq U$ оказывается $V \in \mathcal{I}$;

2) для всяких открытых $U, V \notin \mathcal{I}$ оказывается $U \cap V \notin \mathcal{I}$.

Доказательство. Докажем первое свойство: если к семейству $\mathcal{I}$ добавить V, то конечных подпокрытий не появится, так как всякое конечное подпокрытие с участием V можно было бы заменить на конечное подпокрытие с заменой V на U. Так как семейство $\mathcal{I}$ максимально среди покрытий без конечного подпокрытия, то добавить V к нему на самом деле нельзя, а это означает $V \in \mathcal{I}$.

Для доказательства второго свойства заметим, что отсутствие U в $\mathcal{I}$ означает, что найдётся набор $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{I}$, такой что

$$X = U \cup U_1 \cup \dots \cup U_N.$$

Аналогично

$$X = V \cup V_1 \cup \dots \cup V_M$$

для некоторого конечного набора $V_1, \dots, V_M \in \mathcal{I}$. Тогда

$$X = (U \cap V) \cup U_1 \cup \dots \cup U_N \cup V_1 \cup \dots \cup V_M,$$

что означает отсутствие $U \cap V$ в $\mathcal{I}$. □

Завершение доказательства теоремы 7.142. Пусть теперь

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

с описанной в формулировке теоремы топологией, и в силу предыдущих рассуждений мы рассматриваем максимальное по включению открытое покрытие $\mathcal{I}$ пространства X, которое не имеет конечного подпокрытия. Рассмотрим некоторую точку $x \in X$ и содержащее его открытое $U \in \mathcal{I}$. По определению топологии на X открытость U означает, что оно содержит множество вида

$$\prod_{\alpha \in A} U_\alpha \ni x,$$

где $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ открыты и только для конечного числа индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ оказывается $U_\alpha \neq X_\alpha$.

Рассмотрим естественные проекции $p_\alpha : X \to X_\alpha$ и для этого конечного набора индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ положим

$$\widetilde{U}_{\alpha_i} = p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}),$$

это открытое подмножество X и у нас получается, что

$$\prod_{\alpha \in A} U_\alpha = \widetilde{U}_{\alpha_1} \cap \cdots \cap \widetilde{U}_{\alpha_N}.$$

По свойству 1 покрытия $\mathcal{I}$ (из леммы 7.146) мы имеем

$$\widetilde{U}_{\alpha_1} \cap \cdots \cap \widetilde{U}_{\alpha_N} \in \mathcal{I},$$

а по свойству 2 (применённому наоборот) оказывается, что для некоторого индекса i должно быть

$$\widetilde{U}_{\alpha_i} \in \mathcal{I}.$$

Мы доказали, что в $\mathcal{I}$ содержатся открытые множества вида

$$\widetilde{U}_\alpha = p_\alpha^{-1}(U_\alpha),$$

которые покрывают всё пространство X, так как в предыдущих рассуждениях мы можем начать с любой точки $x \in X$.

Теперь мы докажем, что уже из таких множеств можно выбрать конечное покрытие для X. Заметим, что всякому $\alpha \in A$ может соответствовать несколько таких множеств U_α с $\widetilde{U}_\alpha \in \mathcal{I}$, обозначим их всех $\{U_{\alpha,\xi}\}_{\xi \in \Xi_\alpha}$. Рассмотрим два случая:

1) для любого α оказывается $X_\alpha \neq \bigcup_{\xi \in \Xi_\alpha} U_{\alpha,\xi}$. Тогда мы выберем

$$x_\alpha \in X_\alpha \setminus \bigcup_{\xi \in \Xi_\alpha} U_{\alpha,xi}$$

как координаты некоторого $x \in X$ и тогда окажется, что x не принадлежит никакому $\widetilde{U}_{\alpha,\xi}$. Однако мы доказали, что последние множества покрывают всё X — противоречие.

2) для некоторого α оказывается $X_\alpha = \bigcup_{\xi \in \Xi_\alpha} U_{\alpha,xi}$. Тогда из компактности X_α оно покроется конечным набором $U_{\alpha,\xi_1}, \ldots, U_{\alpha,\xi_N}$, а произведение X тогда покроется соответствующими $\widetilde{U}_{\alpha,\xi_1}, \ldots, \widetilde{U}_{\alpha,\xi_N}$. Это то, что нам нужно. □

Мы уже рассмотрели две разные топологии на E' и хотим посмотреть более абстрактно, как надо сравнивать разные топологии на одном и том же пространстве. Пусть, как мы делали выше, на пространстве X топология состоит из всевозможных объединений множеств семейства $\mathcal{U}$, тогда последнее семейство называется *базой* этой топологии. Тогда окрестностью точки $x \in X$ называют любое открытое множество U в этой топологии, содержащее x. Всякая окрестность x по определению содержит в себе одно из множеств базы, содержащее x, что позволяет в рассуждениях с окрестностями рассматривать только базовые окрестности. Например, в метрическом пространстве в качестве базовых окрестностей можно рассматривать только ε-окрестности, причём можно ограничиться только рациональными ε. Пусть теперь вторая топология на том же множестве состоит из всевозможных объединений множеств базы $\mathcal{V}$.

Теорема 7.147. *Чтобы доказать, что две базы $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq 2^X$ соответствую одной и той же топологии на X, достаточно проверить, что для любой точки $x \in X$ всякая его базовая окрестность $U \in \mathcal{U}$ содержит некоторую базовую окрестность $V \in \mathcal{V}$, $x \in V$, и наоборот.*

Доказательство. Рассмотрим базовое множество $U \in \mathcal{U}$. Всякая его точка $x \in U$ по условию содержится в некотором базовом множестве $V_x \in \mathcal{V}$, которое содержится в U. Тогда объединение $\bigcup_{x\in U} V_x$ является открытым множеством второй топологии и совпадает с U. Таким образом всякое базовое множество первой топологии открыто во второй, а значит и вообще всякое открытое множество первой топологии открыто во второй. Если выполняется и обратное, то топологии просто совпадают. □

Задача 7.148. Докажите, что на счётномерном кубе $[0,1]^{\mathbb{N}}$ можно ввести метрику, задающую топологию декартова произведения.

[[Рассмотрите прямоугольный параллелепипед в гильбертовом пространстве, выбрав подходящие длины его сторон.]]

Задача 7.149. Докажите, что если множество A несчётно, то на кубе $[0,1]^A$ не может быть метрики, задающей его топологию декартова произведения.

[[Обратите внимание, что в топологии, порождённой метрикой, у каждой точки $x \in X$ должна найтись счётная система окрестностей $\mathcal{U}_x$, такая что всякая окрестность $V \ni x$ содержит некоторую $U \in \mathcal{U}_x$. Проверьте это свойство для топологии прямого произведения.]]

Задача 7.150. Функции на множестве $[0,1]^A$ можно рассматривать, как функции бесконечного числа действительных переменных $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $x_\alpha \in [0,1]$. Докажите, что такая функция непрерывна тогда и только тогда, когда её можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленами от конечного числа из данного набора переменных.

[[Надо проверить, что для компактного топологического пространства работают теоремы, которые мы доказывали для компактных метрических пространств: равномерность равномерного предела непрерывных функций и теорема Стоуна–Вейерштрасса, и применить их.]]

Следующие задачи показывают, что пространство, являющееся двойственным к некоторому банахову пространству, автоматически обладает некоторыми полезными свойствами.

Задача 7.151. Докажите, что при фиксированном $y \in E'$ (в двойственном к некоторому банахову пространству) функция расстояния $f(x) = |x - y|$ полунепрерывна снизу в $*$-слабой топологии.

[[Рассмотрите множества $\{f(x) \leqslant c\}$.]]

Задача 7.152. Докажите, что замкнутое (в топологии нормы) выпуклое множество $K \subseteq E'$ является замкнутым и в $*$-слабой топологии.

[[Пусть $x_0 \notin K$ и без ограничения общности $x_0 = 0$. Тогда по замкнутости K относительно нормы некоторый шар $B_0(r)$ положительного радиуса не пересекается с K. Рассуждая аналогично доказательству теорему Хана–Банаха, найдите линейный функционал, который не более 1 на $B_r(0)$ и не менее 1 на K и получите $*$-слабую окрестность нуля, не пересекающую K.]]

Задача 7.153. Докажите, что расстояние между точкой $x \in E'$ и выпуклым замкнутым в топологии нормы $K \subset E'$ достигается на некотором $y \in K$, то есть $\rho(x, y) = \mathrm{dist}(x, K)$.

[[Можно пересечь K с шаром и использовать компактность в $*$-слабой топологии и полунепрерывность снизу функции расстояния.]]

Задача 7.154. Докажите, что $*$-слабо сходящаяся последовательность (сходимость определяется через систему базовых окрестностей) в E' является ограниченной (в смысле нормы E').

[[Используйте принцип равномерной ограниченности.]]

7.27. **Двойственное к пространству непрерывных функций на отрезке.** Чтобы понять, что двойственные пространства бывают на практике достаточно нетривиальными и содержательными, попытаемся дать описание пространства, двойственного к хорошо известному нам $C[a, b]$.

Теорема 7.155 (Теорема Рисса). *Всякий непрерывный линейный функционал $\lambda : C[a, b] \to \mathbb{R}$ является борелевской мерой со знаком на $[a, b]$, имеющей ограниченную вариацию и наоборот, при этом норма функционала равна полной вариации меры.*

Борелевские меры со знаком на отрезке понимаются в смысле раздела 7.6. Доказательство теоремы Рисса в одну сторону сравнительно очевидно: всякая мера со знаком ограниченной вариации даёт линейный функционал интеграла по этой мере

$$f \mapsto \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

и можно проверить, что его норма как линейного функционала равна вариации μ (задача 7.24).

В обратную сторону доказательство теореме Рисса более технично, мы наметим лишь основные идеи. Сначала для непрерывного линейного $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ можно определить для открытых $U \subseteq [a, b]$

$$|\mu|(U) = \sup\{\lambda(f) : \operatorname{supp} f \subset U, \|f\|_C \leqslant 1\}$$

и проверить, что $|\mu|$ даст борелевскую меру на отрезке. Потом попытаться определить меру со знаком, например для открытого U рассмотреть последовательность компактов $K_n \subset U$, таких что $U = \bigcup_n K_n$ и функций f_n, которые имеют носитель в U, $\|f_n\|_C \leqslant 1$ и $f_n \equiv 1$ на K_n. После этого надо доказать, что предел

$$\mu U = \lim_{n \to \infty} \lambda(f_n)$$

существует и не зависит от выбора K_n и f_n. Потом нужно будет проверить свойства μ, продолжить её до борелевской меры на отрезке, и потом установить, что именно она даёт функционал λ. Детали рассуждений читатель может восстановить самостоятельно, или посмотреть какой-нибудь учебник по функциональному анализу.

Один из таких непрерывных линейных функционалов на $C[a, b]$ очень легко определить. Для точки $x \in [a, b]$ положим

$$\delta_x : C[a, b] \to \mathbb{R} \quad \delta_x(f) = f(x).$$

С точки зрения теоремы Рисса этот функционал («дельта-функция») соответствует единичной мере, сосредоточенной в одной точке x, его норма очевидно равна 1.

Теорема Рисса вместе с теоремой Банаха–Алаоглу показывают, что борелевские меры со знаком или без знака на отрезке обладают некоторым свойством слабой компактности: множество мер M предкомпактно в $*$-слабой топологии, если вариация всех $\nu \in M$ ограничена одним и тем же числом.

Задача 7.156. Докажите, что слабая сходимость $\delta_{x_n} \to \delta_{x_0}$ эквивалентна обычной сходимости $x_n \to x_0$.

[[Примените определение.]]

Задача 7.157 (Описание слабой топологии без функций). * Докажите, что на множестве борелевских вероятностных мер (неотрицательных с полной мерой 1) на отрезке $[a, b]$, $*$-слабая топология порождается открытыми множествами, соответствующими открытым $V \subseteq [a, b]$

$$U_{V,a} = \{\nu : \nu(V) > a\}.$$

[[В одну сторону, при условии $\nu(V) > a$ найдите непрерывную $f : [a, b] \to [0, 1]$, у которой $\operatorname{supp} f \subseteq V$ и

$$\int_a^b f(x) d\nu(x) > a.$$

В обратную сторону докажите, что последнее неравенство для фиксированной непрерывной функции гарантируется принадлежностью ν пересечению конечного набора множеств U_{V_i,a_i}.]]

Задача 7.158. Докажите, что множества вероятностных борелевских мер на отрезке вида $\{\nu : \nu(V) < a\}$ не открыты в слабой топологии.

[[Сделайте контрпример из дельта-функций.]]

Задача 7.159. Пусть последовательность функций (f_n) на отрезке $[a, b]$ поточечно сходится к функции f и для некоторой константы M вариация удовлетворяет неравенству $\|f_n\|_B \leqslant M$ для любого n. Докажите, что f тоже имеет вариацию не более M.

[[Вспомните определение вариации.]]

Задача 7.160. * Рассмотрим борелевскую меру со знаком μ ограниченной вариации на $(-\pi, \pi]$, которую можно рассмотреть как 2π-периодическую меру на прямой. Для неё можно определить коэффициенты Фурье

$$c_n(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi,\pi]} e^{-ixn}\, d\mu,$$

соответствующие суммы Фурье и Фейера, рассматриваемые как плотности меры (со знаком). Докажите, что суммы Фейера меры сходятся к ней в $*$-слабой топологии. Обязаны ли слабо сходиться к мере её суммы Фурье?

[[Утверждение про суммы Фейера можно доказывать по определению слабой сходимости неотрицательных мер, используя неотрицательность ядра Фейера. Иначе, можно использовать описание меры из варианта теоремы Рисса для $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ и интерпретировать сумму Фейера $S_n(\mu)$ как функционал

$$S_n(\mu)(f) = \mu\left(S_n(f)\right).$$

При рассмотрении сумм Фурье можно написать аналогичные формулы и подставить $\mu = \delta_0$.]]

В этом разделе наше изложение было совсем схематичным, более подробные сведения по изложенной в этом разделе теме можно найти, например, в книге [8].

7.28. **Конечно-аддитивные меры и ультрафильтры.** В этом разделе мы рассмотрим ещё один пример, имеющий отношение к двойственности банаховых пространств, но также интересный сам по себе. В качестве упражнения читатель может проверить, что $(\ell_1)' = \ell_\infty$, но изучение структуры $(\ell_\infty)'$ не так просто. Говоря в более элементарных терминах, мы хотим изучить способы линейно и непрерывно сопоставить ограниченным последовательностям действительных чисел действительное число. Оказывается, удобно рассуждать о таких сопоставлениях в терминах интегрирования, чем мы и займёмся.

Рассмотрим бесконечное множество S (в интересующем нас частном случае это будет $\mathbb{N}$), чтобы интегрировать по нему функции, нам надо сначала ввести на нём меру. Оказывается, если отказаться от условия счётной аддитивности и ограничиться *конечной аддитивностью*,

$$m(X \cup Y) + m(X \cap Y) = mX + mY,$$

то можно будет придумать такие ненулевые меры, относительно которых будут измеримы *все подмножества* S. Далее в этом разделе, говоря о конечно-аддитивных мерах на S, мы будем подразумевать измеримость любого подмножества S. Кроме того, мы будем подразумевать конечность mS, нетривиальным случаем является $mS > 0$.

Конструирование конечно-аддитивных мер мы начнём с мер, которые принимают лишь два значения: 0 и 1, причём $mS = 1$. Такую меру можно задать, задав множество $\mathcal{F} = \{X \subseteq S : mX = 0\}$. Из конечной аддитивности следуют свойства $\mathcal{F}$: это семейство множеств (1) замкнуто относительно объединения пары множеств, (2) замкнуто относительно перехода к подмножеству, (3) не содержит S и (4) для любого $X \subseteq S$ ровно одно из множеств X и $S \setminus X$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Семейства $\mathcal{F} \subset 2^S$, удовлетворяющие первым трём свойствам, будем называть *фильтрами*, а всем четырём свойствам — *ультрафильтрами*. Прежде чем описывать нетривиальные ультрафильтры, опишем тривиальные: для всякого $x \in S$ множество

$$\mathcal{F}_x = \{X \subseteq S : x \notin X\}$$

называется *главным ультрафильтром*. Соответствующая мера mX равна единице тогда и только тогда, когда $x \in X$, иначе она равна нулю. Понятно, что это действительно конечно-аддитивная мера (даже счётно-аддитивная на самом деле), но она не очень интересна. Например, в рассматриваемом нами примере $(\ell_\infty)'$ она соответствует базисным элементам ℓ_1, то есть последовательностям, в которых один элемент равен единице, а остальные равны нулю.

Задача 7.161. Докажите, что на конечном множестве S все ультрафильтры главные.

[[Можно рассуждать комбинаторно, а можно использовать развиваемую далее небольшую теорию.]]

Нетривиальным утверждением про ультрафильтры является следующее:

Теорема 7.162. *На бесконечном множестве S существуют неглавные ультрафильтры и каждый фильтр содержится в некотором ультрафильтре.*

Доказательство. Доказательство будет похоже на рассуждения в доказательстве теоремы Тихонова 7.142 с использованием леммы Цорна. Сначала мы заметим, что максимальный по включению фильтр $\mathcal{F}$ является ультрафильтром, для этого надо проверить свойство (4) для $\mathcal{F}$.

Пусть $X \subseteq S$. Если $X \in \mathcal{F}$ и $S \setminus X \in \mathcal{F}$, то $S \in \mathcal{F}$ как объединение по свойству (1), что исключено свойством (3). Тогда мы можем предположить (при необходимости меняя местами X и $S \setminus X$), что $X \notin \mathcal{F}$. Предположение максимальности означает, что X (вместе со всевозможными конечными объединениями подмножеств X и элементов $\mathcal{F}$)

нельзя добавить в $\mathcal{F}$ с сохранением свойства фильтра. Это означает нарушение свойства (3) при добавлении — найдётся некоторая конечная система $Y_1, \dots, Y_N \in \mathcal{F}$, такая что

$$S = X \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_N.$$

Но тогда выполняется

$$S \setminus X \subseteq Y_1 \cup \dots \cup Y_N \Rightarrow S \setminus X \in \mathcal{F},$$

то есть свойство (4) для $\mathcal{F}$ выполнено. Проверка того, что всякий ультрафильтр является максимальным по включению фильтром, проста, мы оставляем её читателю в качестве упражнения.

Посмотрим теперь на цепь фильтров C и её объединение

$$\bigcup C = \bigcup_{\mathcal{F} \in C} \mathcal{F}.$$

Рассмотрим объединение нескольких множеств $X_1, \dots, X_N \in \bigcup C$, каждое содержалось в каком-то фильтре цепи, $X_i \in \mathcal{F}_i$. Из свойства цепи мы можем переупорядочить фильтры так, чтобы выполнялось

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N.$$

Тогда $X_1, \dots, X_N \in \mathcal{F}_N \subseteq \bigcup C$. Следовательно, объединение цепи фильтров $\bigcup C$ замкнуто относительно конечных объединений своих элементов. То, что оно замкнуто относительно перехода к подмножеству и не содержит X, очевидно.

Исходя из описанных свойств и леммы Цорна мы можем заключить, что всякий фильтр содержится в максимальном ультрафильтре. Для доказательства первого утверждения теоремы мы рассмотрим фильтр $\mathcal{F}$, состоящий из конечных подмножеств S. Если S бесконечно, то $\mathcal{F}$ действительно является фильтром. Погрузив его в некоторый ультрафильтр $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ мы можем заметить, что $\mathcal{F}'$ не главный, так как он содержит все конечные подмножества S. $\square$

Имея в своём распоряжении неглавный ультрафильтр $\mathcal{F}$ и соответствущую меру m, или просто конечную и конечно-аддитивную меру на S, мы можем определить интеграл конечно-ступенчатой функции $f : S \to \mathbb{R}$ очевидным образом, с выполнением свойств линейности и монотонности. Для произвольной ограниченной f мы можем рассмотреть её приближения ступенчатыми, более конкретно, если f ограничена и $f(S)$ содержится в конечном промежутке Δ, то разбив

$$\Delta = \Delta_1 \sqcup \dots \sqcup \Delta_N$$

с мелкостью не более $\varepsilon > 0$, мы можем рассмотреть разбиение X на множества $X_i = f^{-1}(\Delta_i)$ и оценить f снизу и сверху конечно-ступенчатыми функциями, определёнными как

$$g(X_i) = \inf \Delta_i, \quad h(X_i) = \sup \Delta_i.$$

Разность между ними не более ε и следовательно

$$\int_S h\, dm - \int_S g\, dm = \int_S (h - g)\, dm < \varepsilon \cdot mS,$$

что означает возможность приблизить f сколь угодно близко с точки зрения интеграла и определить таким образом её интеграл.

В случае, если конечно-аддитивная мера m соответствует ультрафильтру, это определение интерпретируется следующим образом. Из множеств X_i в данной конструкции ровно одно будет иметь меру 1, а остальные будут иметь меру 0. Значение интеграла при этом будет лежать в соответствующем Δ_i. Разбивая это Δ_i на ещё более мелкие части и рассматривая их прообразы мы опять увидим, что только один прообраз имеет меру 1 и только на соответствующем ему промежутке лежит значение интеграла.

В ещё более частном случае, когда $S = \mathbb{N}$, мы видим, что интеграл по мере m, соответствующей ультрафильтру $\mathcal{F}$, выбирает один из частичных пределов ограниченной последовательности $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. В таком случае интеграл уместно назвать *пределом последовательности по ультрафильтру*. Предел последовательности по ультрафильтру, таким образом, даёт способ выбрать один из частичных пределов последовательности в линейной зависимости от последовательности f. Говоря неформально, в процедуре половинного деления при доказательстве теоремы Больцано–Вейерштрасса 1.95 ультрафильтр выбирает одну из половин исходя из номеров элементов, попадающих в ту или иную половину, предпочитая множество номеров, имеющее меру 1. Такое «волшебное свойство» показывает, что несмотря на доказанное уже существование ультрафильтра описать хотя бы один из них сравнительно явно не получается.

Задача 7.163. Докажите, что если мера m на S соответствует ультрафильтру, то интеграл ограниченных функций $f, g : S \to \mathbb{R}$ по ней обладает свойством мультипликативности:

$$\int_S fg\, dm = \left(\int_S f\, dm\right) \cdot \left(\int_S f\, dm\right).$$

[[Интерпретируйте неравенство $a < \int_S f\, dm < b$ как $m\{x \in S : a < f(x) < b\} = 1$.]]

Задача 7.164. * Опишите все гомоморфизмы алгебры ограниченных функций на множестве S (с поточечным умножением) в $\mathbb{R}$.

[[Заметьте, что если функция принимает значения в $\{0, 1\}$, то гомоморфизм отправляет её в 0 или 1. Считая такие функции характеристическими функциями подмножеств S сравните это с определением ультрафильтра. Для рассмотрения произвольных функций обратите внимание, что неотрицательная функция является квадратом другой функции и следовательно при гомоморфизме в $\mathbb{R}$ переходит в неотрицательное число.]]

Задача 7.165. Докажите секвенциальную компактность «куба» $[-1, 1]^A$ для любого множества A с помощью ультрафильтров.

[[Имея последовательность точек этого пространства, постройте новую точку, переходя в каждой координате к пределу по одному и тому же ультрафильтру.]]

Задача 7.166. Продемонстрируйте, что предел по ультрафильтру может поменяться, если у последовательности отбросить первый элемент, сдвинув нумерацию на единицу.

[[Посмотрите, какие числа предпочитает ультрафильтр — чётные или нечётные.]]

Предыдущая задача намекает, что ультрафильтры не могут быть инварианты относительно сдвига индексов, чтобы говорить о сдвиге корректно, давайте рассмотрим для примера множество целых чисел $\mathbb{Z}$ в качестве S, и покажем, что можно придумать конечно-аддитивные меры на $\mathbb{Z}$, которые будут инвариантны относительно сдвигов. Например, можно положить

$$\rho X = \lim \frac{|X \cap [-n, n]|}{2n + 1},$$

где предел будет пониматься в смысле какого-то фиксированного ультрафильтра. При сдвиге X на k элементов выражение под знаком предела меняется не более чем на $2k/(2n + 1)$, что стремится к нулю при $n \to \infty$; таким образом устанавливается инвариантность такой меры относительно сдвигов.

Задача 7.167. Проверьте конечную аддитивность построенной так меры.

Построенная нами мера принимает значения в диапазоне $[0, 1]$, неформально говоря, это один из способов определить «плотность» подмножества целых чисел. Соответствующий этой мере интеграл «усредняет» ограниченную функцию $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ инвариантным относительно сдвигов образом, её «среднее значение» будет лежать между её точной нижней и точной верхней гранью.

Задача 7.168. Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на группе целочисленных векторов $\mathbb{Z}^n$.

[[Модифицируйте описанную выше конструкцию.]]

Задача 7.169. Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на рациональных числах $\mathbb{Q}$.

[[Представьте группу $\mathbb{Q}$ по сложению в виде объединения групп, изоморфных $\mathbb{Z}$, переходя к пределу по ультрафильтру.]]

Задача 7.170. * Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на действительных числах $\mathbb{R}$.

[[Рассматривайте $\mathbb{R}$ как $\mathbb{Q}$-векторное пространство со вполне упорядоченным базисом. Докажите утверждение для его подпространств, соответствующих начальным интервалам базиса, с помощью трансфинитной индукции. Шаг индукции выполняется либо с помощью предела мер по ультрафильтру на вполне упорядоченном множестве, содержащему все его собственные начальные интервалы, либо с помощью прямого умножения $\mathbb{Q}$-векторного пространства на $\mathbb{Q}$, что можно свести к умножению на $\mathbb{Z}$ и перехожу к пределу по ультрафильтрам, как в предыдущих задачах.]]

Задача 7.171. * Докажите, что $\mathbb{R}^2$ нельзя разрезать на конечное число частей и сдвинуть их так, чтобы каждая точка покрывалась сдвинутыми частями не менее двух раз.

[[Используйте утверждение, аналогичное утверждению предыдущей задачи, для плоскости вместо прямой.]]

Задача 7.172. ** Докажите, что сферу $\mathbb{S}^2$ можно разрезать на конечное число частей и повернуть их так, чтобы каждая точка покрывалась повёрнутыми частями не менее двух раз.

[[Используйте результат задачи 8.88, представляя себе свободную группу из двух элементов в виде бесконечного дерева.]]

7.29. **Распределения (обобщённые функции).** Рассмотрим функции на действительной прямой, обобщения на функции нескольких переменных будет достаточно прямолинейным. Для пространства $L_2(\mathbb{R})$ мы установили, что двойственное ему пространство можно идентифицировать с ним самим, сопоставляя функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ линейный функционал

$$\lambda_f(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx.$$

Пример с двойственным пространством к $C[a, b]$ и теоремой Рисса намекает на то, что для расширения двойственного пространства мы можем рассмотреть какое-либо «меньшее» функциональное пространство $\mathcal{F}$, для которого вложение $\mathcal{F} \to L_2(\mathbb{R})$ непрерывно с точки зрения топологии $\mathcal{F}$. Возникает естественное отображение двойственных пространств $L_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}'$ и получится, что мы расширили пространство $L_2(\mathbb{R})$ до пространства $\mathcal{F}'$; инъективность этого отображения будет обеспечена плотностью $\mathcal{F}$ в $L_2(\mathbb{R})$ в топологии L_2.

Достаточно удобно выбрать пространство $\mathcal{F}$ нормированным или даже гильбертовым. Например, гильбертовым пространством будет пространство Соболева $W^{k,2}(\mathbb{R})$, состоящие из функций с k-й обобщённой производной (при локально абсолютно непрерывной $(k-1)$-й производной) и с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 + \dots + \|f^{(k)}\|_2^2\right)^{1/2}.$$

Можно проверить (сделайте это в качестве упражнения), что эти пространства на самом деле гильбертовы, определяя

$$W^{-k,2} = (W^{k,2})'$$

мы получим целую последовательность пространств, связанных непрерывными инъективными отображениями

$$\dots \to W^{k,p} \to W^{k-1,p} \to \dots \to W^{1,2} \to W^{0,2} = L_2 \to W^{-1,2} \to \dots W^{-k+1,2} \to W^{-k,2} \to \dots$$

В итоге можно будет определить пространство $W^{\infty,2}$ как пересечение всех пространств Соболева с топологией, заданной счётным семейством соболевских норм, все эти функции уже будут бесконечно гладкие. Также можно определить $W^{-\infty,2}$ как объединение всех пространств Соболева, на самом деле окажется, что

$$W^{-\infty,2} = (W^{\infty,2})'.$$

Доказательство этого равенства (структура двойственного пространства к пространству с бесконечным семейством норм) аналогично приведённым ниже рассуждениям про пространство $\mathcal{E}'$.

Другие варианты введения обобщённых функций — использовать в качестве базового пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (функции, у которых все производные убывают быстрее некоторой степени x) или $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$. В первом случае топология пространства задаётся ранее определённым счётным семейством полунорм, во втором топология определяется семейством полунорм

$$\|f\|_{K,k} = \sup_{x\in K} |f^{(k)}(x)|$$

по всем компактам $K \subset \mathbb{R}$ и неотрицательным целым k. На самом деле не нужно рассматривать все компакты, а достаточно рассмотреть только отрезки $[-m, m]$, получив таким образом также счётное семейство полунорм.

Аналогично банаховым пространствам, в пространствах с топологией, порождённой счётным семейством полунорм, можно указать критерий непрерывности функционала через его ограниченность. Допустим, мы рассматриваем непрерывный линейный функционал $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Определение непрерывности заключается в том, что прообраз интервала $\lambda^{-1}(-1,1)$ является открытым множеством, и в частности содержит открытую окрестность нуля. Базовая открытая окрестность нуля в пространстве со счётным семейством полунорм задаётся конечным числом условий вида $\|x\|_{K,k} < \varepsilon$ (с разными k и K). В текущей ситуации это означает, что найдётся один отрезок $[-m, m]$ (все отрезки в определениях норм можно объединить) и целое число k (максимум из всех производных в определениях норм), такие что

$$|\lambda(f)| \leqslant \sup_{x\in[-m,m]} \sup_{0\leqslant \ell\leqslant k} |f^{(\ell)}(x)|. \tag{7.5}$$

Отсюда видно, что λ обнуляется на всех функциях, которые равны нулю за пределами $[-m, m]$, поэтому $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ называется пространством *распределений с компактным носителем*, подробнее понятие носителя распределения будет обсуждаться далее, см. определение 7.179.

С помощью теоремы Рисса тогда можно заключить, что $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ задаётся интегрированием производных f по борелевским мерам на отрезке:

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^{m} \varphi(x) d\mu_0(x) + \int_{-m}^{m} \varphi'(x) d\mu_1(x) + \dots + \int_{-m}^{m} \varphi^{(k)}(x) d\mu_k(x). \tag{7.6}$$

Собственно, можно даже не задействовать теорему Рисса, а заметить, что линейный функционал, удовлетворяющий условиям (7.5), является линейным функционалом на гильбертовом $W^{k+1,2}[-m, m]$ и представляется в виде (7.6) после увеличения k на единичку с мерами, задаваемыми интегрированием плотностей, то есть $d\mu_i = g_i dx$.

Самое ходовое пространство распределений оказывается более технически сложным по сравнению с двумя уже рассмотренными примерами. Сначала мы рассмотрим пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на прямой. В нём мы не будем вводить нормы и топологию, а определим понятие сходимости следующим образом:

Определение 7.173. Последовательность $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ сходится к $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, если носители всех этих функций содержатся в одном отрезке $[-m, m]$ и на нём, для любого $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $\varphi_k^{(\ell)} \to \varphi_0^{(\ell)}$ равномерно.

Используя понятие сходимости мы можем определить непрерывные (по Гейне) линейные функционалы, они образуют пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Чтобы пояснить понятие «обобщённая функция», надо сделать определение:

Определение 7.174. Локально интегрируемая (по Лебегу) функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт элемент $\lambda_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ по формуле

$$\lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Такие элементы $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называются *регулярными функциями*.

Заметим, что если изменить функцию f на множестве меры нуль, то соответствующая ей регулярная функция в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ не изменится. Можно придумать и более экзотические функционалы из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, например с помощью интегрирования в смысле главного значения

$$\lambda(\varphi) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\delta \to +0} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right).$$

Можно заметить, что это выражение всегда конечно и непрерывно зависит от φ в смысле сходимости в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, часто пишут $\lambda = v.p.\frac{1}{x}$.

Определим самую знаменитую обобщённую функцию (которую мы уже видели в качестве борелевской меры)

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0).$$

Иногда пишут $\delta(x - x_0)$, но это выражение не имеет прямого смысла, так как δ_{x_0} не является функцией, его можно понимать лишь так, что мы взяли дельта-функцию в нуле и сдвинули её на x_0. Заметим, что δ_{x_0} лежит не только в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, но и в $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и даже в $W^{-\infty,2}$ (проверьте последнее утверждение в качестве упражнения).

Можно заметить, что дельта-функция не является регулярной. Действительно, пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет значения в $[0, 1]$, носитель в $[-1, 1]$ и $\varphi(0) = 1$. Тогда для всякой локально интегрируемой f

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(kx)\, dx \right| \leqslant \left| \int_{-1/k}^{+1/k} |f(x)|\, dx \right| \to 0,$$

тогда как

$$\delta(\varphi(kx)) \equiv 1 \not\to 0.$$

С помощью сопряжения и сравнения с регулярными функциями можно определить разнообразные операции с распределениями. Будем для удобства записывать $\lambda(\varphi) = \langle \lambda, \varphi \rangle$. Тогда мы можем определить производную как

$$\langle \lambda', \varphi \rangle = -\langle \lambda, \varphi' \rangle,$$

можно проверить, что это определение совпадает со стандартным для регулярных распределений, соответствующих локально абсолютно непрерывным функциям. Так как взятие производной очевидно непрерывно в $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{S}, W^{\infty,2}$, то сопряжённая ему операция корректно определена на двойственном пространстве. Вообще для любой непрерывной операции $A : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ сопряжённая операция действует по формуле

$$A^*(\lambda)(x) = \lambda(A(x))$$

и является непрерывной по x как композиция непрерывных отображений.

Зависит ли λ' непрерывно от λ? Для ответа на этот вопрос нам нужно определение топологии в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ в духе $*$-слабой топологии:

Определение 7.175. В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ используется топология поточечной сходимости: $\lambda_n \to \lambda_0$, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет место

$$\lambda_n(\varphi) \to \lambda_0(\varphi).$$

Можно проверить по определению (сделайте это в качестве упражнения), что операция взятия производной λ' в таком смысле непрерывно зависит от λ. Можно также привести достаточные условия сходимости последовательности регулярных функций к дельта-функции:

Теорема 7.176. *Пусть последовательность регулярных (локально интегрируемых) функций (f_n) обладает свойствами*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx = 1$$

возможно в несобственном смысле, $\left|\int_a^b f_n(x)\, dx\right|$ *ограничены некоторой константой C независимо от a, b, n и для всякого $\delta > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{-\delta} f_n(x)\, dx = 0.$$

Тогда $f_n \to \delta_0$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Доказательство. Положим

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\, dt.$$

Условия на f можно переформулировать так: $F_n(-\infty) = 0$, $F_n(+\infty) = 1$, F_n равномерно ограничены константой C и поточечно (кроме может быть точки 0)

$$F_n(x) \to \vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Посмотрим тогда на

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\, dx = F_n(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x)\varphi'(x)\, dx =$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x)\varphi'(x)\, dx.$$

Так как $\varphi'(x)$ ограничена и отлична от нуля только на некотором отрезке, а F_n ограничена константой C, то по теореме об ограниченной сходимости 5.69 можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) - \varphi(+\infty) = \varphi(0).$$

то есть поточечно (в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) $f_n \to \delta_0$. ☐

В качестве следствия предыдущей теоремы и известных нам свойств интеграла Дирихле можно получить, что

$$\frac{\sin \lambda x}{\pi x} \to \delta_0 \quad (\lambda \to \infty)$$

в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

По сопряжению можно определить умножение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ как

$$\langle \lambda f, \varphi\rangle = \langle \lambda, f\varphi\rangle,$$

аналогично можно сделать в $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, а в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ придётся позаботиться о не слишком быстром росте f и её производных (не быстрее степени x).

Заметим, что если $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а функция f имеет компактный носитель, то произведение λf оказывается элементом $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. С учётом представления (7.6) (и того, что всякая мера со знаком конечной вариации является производной своей функции распределения) можно сказать, что локально всякий $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ представляется как комбинация конечного числа производных некоторого порядка от регулярных функций. Например, $\delta_0 = \vartheta'$.

Задача 7.177. Докажите, что всякое распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такую $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что

$$\mu' = \lambda$$

в смысле дифференцирования распределений. Докажите, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

[[Обратите внимание, что взятие первообразной определено не для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и опишите, для каких φ оно определено и как. Потом примените сопряжение.]]

Для $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и открытого $U \subseteq \mathbb{R}$ будем говорить, что $\lambda|_U = 0$ (ограничение λ на U равно нулю), если $\lambda(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем в U.

Лемма 7.178. *Пусть дан $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}$, такое что $\lambda|_{U_\alpha} = 0$ для любого α. Тогда если рассмотреть объединение $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, то $\lambda|_U = 0$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset U$. Из множеств $\{U_\alpha\}$, покрывающих $\operatorname{supp}\varphi$, достаточно оставить конечное число по компактности. Выберем разбиение единицы, то есть неотрицательные функции $\psi_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, такие что

$$\operatorname{supp}\psi_\alpha \subset U_\alpha,\ \sum_\alpha \psi_\alpha \equiv 1 \text{ в окрестности } \operatorname{supp}\varphi.$$

Тогда

$$\lambda(\varphi) = \lambda\left(\sum_\alpha \varphi\psi_\alpha\right) = \sum_\alpha \lambda(\varphi\psi_\alpha) = 0.$$

$\square$

Определение 7.179. Для $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ положим

$$Z_\lambda = \bigcup\{U : \lambda|_U = 0\}$$

и введём *носитель* λ как

$$\operatorname{supp}\lambda = \mathbb{R} \setminus Z_\lambda.$$

Из леммы следует, что $\lambda|_{Z_\lambda} = 0$ и Z_λ является максимальный открытым множеством, в ограничении на которое λ равно нулю.

Задача 7.180. Докажите, что $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ с компактным носителем можно интерпретировать как элемент $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

[[Умножьте λ на гладкую f с компактным носителем, равную 1 в окрестности $\operatorname{supp}\lambda$, проверьте что $\lambda f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ и не зависит от выбора f.]]

Задача 7.181. * Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leqslant 1$ и пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$. Положим

$$\varphi_k(x) = k\varphi(kx),$$

эти функции тоже имеют единичные интегралы и φ_k отлична от нуля только при $|x| \leqslant 1/k$. Для всякого $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определим свёртку

$$f_k(y) = \langle \lambda, \varphi_k(y - x)\rangle,$$

где в правой части мы применяем λ к функции от x. Докажите, что $f_k \to \lambda$ в смысле (поточечной) сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

[[Докажите, что $\langle f_k, \psi\rangle = \langle \lambda, \varphi_k * \psi\rangle$ для всякой $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, если для функций свёртка определена стандартным образом $(\varphi_k * \psi)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x)\psi(y - x)\, dx$. Вспомните теоремы 6.18 и 6.19.]]

Задача 7.182. * Докажите, что всякое распределение $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ можно приблизить линейными комбинациями дельта-функций в смысле сходимости $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

[[Вспомните, что интеграл непрерывной функции на отрезке можно приблизить суммами Римана и покажите, что производную дельта-функции можно приблизить линейными комбинациями дельта-функций.]]

Задача 7.183. * Докажите, что всякое линейное отображение $\xi : \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, непрерывное в смысле сходимости $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, представляется в виде $\xi(\lambda) = \lambda(\varphi)$ для некоторой $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.

[[Определите $\varphi(x) = \xi(\delta_x)$ и продолжите формулу $\lambda(\varphi) = \xi(\lambda)$ с дельта-функций на все $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.]]

Задача 7.184. * Распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называется *неотрицательным*, если $\lambda(\varphi) \geqslant 0$ для всякой всюду неотрицательной $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Докажите, что у неотрицательного распределения есть регулярная первообразная.

[[Можно действовать аналогично доказательству теоремы Рисса, строя меру, соответствующую данному распределению.]]

7.30. **Распределения из $\mathcal{S}'$ и преобразование Фурье.** Если мы хотим определять и изучать преобразование Фурье распределений, то нам стоит заметить, что $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ для этого не подходит. Одна из причин этого описана в следующем упражнении:

Задача 7.185. Докажите, что если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f \equiv 0$.

[[Установите аналитичность преобразования Фурье функции с компактным носителем.]]

Пространство $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ тем более не переходит в себя при преобразовании Фурье, для него даже неясно, как преобразование Фурье определить. А пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет замечательное свойство — по теореме 7.81 оно переходит в себя непрерывно в своей топологии при преобразовании Фурье.

Следовательно, можно определить по сопряжению для $\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\langle F[\lambda], \varphi\rangle = \langle \lambda, F^{-1}[\varphi]\rangle.$$

Проверим это определение на дельта-функции:

$$\langle F[\delta_0], \varphi\rangle = \langle \delta_0, F^{-1}[\varphi]\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx,$$

то есть преобразование Фурье дельта-функции оказалось регулярной функцией, равной константе $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Можно проверить, что преобразование Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ делает из оператора умножения на x оператор $\pm i\frac{\partial}{\partial y}$, это проверяется по определению с помощью сопряжений.

Далее приведём несколько упражнений для самостоятельного решения:

Задача 7.186. Пусть для функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ можно указать такое целое N, что для всякого целого $k \geqslant 0$

$$f^{(k)}(x) = O(|x|^{N-k}),\quad x \to \infty.$$

Докажите, что f можно считать элементом из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, а преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ при $y \neq 0$ тоже можно считать функцией от y и при любом M

$$\hat{f}(y) = o(|y|^{-M}),\quad y \to \infty.$$

[[Примените преобразование Фурье производной.]]

Задача 7.187. * Докажите, что преобразования Фурье элементов $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ являются аналитическими функциями.

[[Заметьте, что для $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ оказывается $\hat{\lambda}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda(e^{-iyx})$.]]

7.31. **Многомерные распределения и распределения на многообразиях.** На самом деле большинство предыдущих рассуждений проходят для функций нескольких переменных, а те что не проходят — проходят после небольшой доработки. Таким образом определяются пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Первые два можно определять не только для всего $\mathbb{R}^n$, но и для всякого открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и делать в U произвольные гладкие замены координат (для $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ замены координат можно делать далеко не все, лучше ограничиться линейными заменами).

В определении $\mathcal{D}'(U)$ можно начать с пространства $\mathcal{D}(U)$ гладких функций с компактными носителями в U, сходимость последовательности которых (φ_n) к φ_0 определена требованием, чтобы носители всех функций содержались в одном и том же компакте K и для всякого $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ имела место равномерная на K сходимость

$$\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}\varphi_n}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}} \to \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}\varphi_0}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}}.$$

В определении $\mathcal{E}(U)$ можно начать с пространства $\mathcal{E}(U)$ гладких функций с полунормами, равными

$$\|\varphi\|_{K,\mathbf{k}} = \sup_{x\in K}\left|\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}\varphi(x)}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}}\right|$$

для компактов $K \subset U$. Далее определить пространство распределений как пространство двойственных линейных функционалов. Можно показать, что эти два определения не зависят от выбора криволинейной системы координат в U, так как при замене координат производная данного порядка выражается через производные такого и меньшего порядков с ограниченными на компактах коэффициентами.

Задача 7.188. Докажите, что всякий элемент $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ определяет непрерывное линейное отображение $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

[[Используйте формулу $f(\varphi)(\psi) = \Lambda(\varphi \otimes \psi)$, где функция двух переменных $\varphi \otimes \psi$ определена на паре (x, y) как $\varphi(x)\psi(y)$. Докажите непрерывность определённого так отображения f.]]

Задача 7.189. Для всякого включения $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ имеют место включение $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(V)$ и отображение ограничения $\mathcal{E}(V) \to \mathcal{E}(U)$. Определите по сопряжению соответствующие отображения

$$\mathcal{D}'(V) \to \mathcal{D}'(U), \quad \mathcal{E}'(U) \to \mathcal{E}'(V).$$

Проверьте, что есть проблемы с определением отображений в другую сторону

$$\mathcal{D}'(V) \leftarrow \mathcal{D}'(U), \quad \mathcal{E}'(U) \leftarrow \mathcal{E}'(V).$$

Для всякого гладкого многообразия можно определить пространства $\mathcal{D}(M)$ и $\mathcal{E}(M)$ и двойственные к ним $\mathcal{D}'(M)$ и $\mathcal{E}'(M)$. При этом надо действовать аккуратно, так как понятие частной производной сильно зависит от координат. Однако это определение можно сделать инвариантным, взяв вместо частных производных φ выражения вида

$$X_1(X_2(\dots X_k(\varphi)\dots)),$$

где $X_1, \dots, X_k$ — произвольные гладкие векторные поля на M. В обоих определениях супремум модуля таких выражений будет браться по компакту, поэтому в координатной записи стремление к нулю всех таких выражений будет эквивалентно стремлению к нулю частных производных. Собственно говоря, определение через векторные поля даже проще.

Результат предыдущей задачи можно интерпретировать так, что на всяком многообразии можно корректно говорить об ограничении распределения из $\mathcal{D}'(M)$ на координатную карту U, но работать с элементами пространства $\mathcal{E}'(M)$ через координатные карты как с элементами из $\mathcal{E}'(U)$ не получится, разве что можно элемент из $\mathcal{E}'(M)$ ограничить до элемента $\mathcal{D}'(U)$ карты U.

Следующие две задачи показывают, что распределения на многообразии ведут себя аналогично функциям с точки зрения возможности изучать их локально. В математике про такое говорят, что распределения $\mathcal{D}'$ образуют *пучок* на M.

Задача 7.190. Пусть M покрыто своими координатными картами $\{U_\alpha\}$. Докажите, что $\lambda \in \mathcal{D}'(M)$ однозначно определяется ограничениями $\lambda|_{U_\alpha}$.

[[Если нет, и у $\mu \in \mathcal{D}'(M)$ все ограничения те же, то у разности $\lambda - \mu$ все ограничения нулевые. Далее используйте рассуждения из леммы 7.178.]]

Задача 7.191. Пусть M покрыто своими координатными картами $\{U_\alpha\}$. Докажите, что набор $\lambda_\alpha \in \mathcal{D}'(U_\alpha)$, такой что на всяком пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ ограничения $\lambda_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ и $\lambda_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ совпадают, определяет однозначно некоторый элемент $\lambda \in \mathcal{D}'(M)$.

[[Единственность доказана в предыдущей задаче. Рассмотрите разбиение единицы $\sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1$, подчинённое покрытию $\{U_\alpha\}$, и докажите, что $\sum_\alpha \lambda_\alpha \rho_\alpha$ (если эту формулу правильно понимать), даст элемент $\mathcal{D}'(M)$, ограничение которого на каждую U_α даст соответствующий λ_α.]]

8. Комплексный анализ

8.1. **Дифференцируемость в комплексном смысле.** Мы будем рассматривать *функции комплексного переменного*, то есть отображения $f : U \to \mathbb{C}$ для открытых $U \subseteq \mathbb{C}$. При естественном отождествлении комплексного числа $z = x + iy$ с парой действительных чисел (x, y) возникает отождествление $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, так что пока функция комплексного переменного выглядит просто как отображение открытого множества на плоскости в плоскость.

Чтобы придать смысл этому понятию, мы будем задействовать комплексную структуру и будем рассматривать только функции, *дифференцируемые в каждой $z_0 \in U$ в комплексном смысле*, то есть такие что

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad z \to z_0,$$

где умножение $f'(z_0)$ на $z - z_0$ понимается как умножение комплексных чисел.

Понятие комплексной дифференцируемости можно переписать разными способами. Например, записав всё через действительную и мнимую часть, $f(z) = u(x, y) + iv(x, u)$, мы можем заметить, что дифференциал в точке

$$df = du + idv = u'_x dx + u'_y dy + iv'_x dx + iv'_y dy = \partial f dz + \bar\partial f d\bar z,$$

где

$$dz = dx + idy, d\bar z = dx - idy, \partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \bar\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Тогда, при наличии дифференцируемости f как отображения на вещественной плоскости, условие комплексной дифференцируемости записывается как

$$\bar\partial f = 0,$$

или в чисто действительном виде (*условия Коши–Римана*)

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x.$$

Теорема 8.1. *Дифференцируемость в комплексном смысле сохраняется при сложении, вычитании, умножении, делении (не на нуль) и композиции.*

Доказательство. Доказательства аналогичны доказательствам для функции действительного переменного. ☐

С геометрической точки зрения дифференцируемость в комплексном смысле и условия Коши–Римана означают, что дифференциал отображения Df является $\mathbb{R}$-линейным оператором, коммутирующим с умножением на мнимую единицу. Такой оператор является *поворотной гомотетией*, то есть композицией поворота и гомотетии с некоторым коэффициентом. В частности, если Df не нулевой, то он сохраняет углы между касательными векторами, то есть является *конформным*. Собственно, всякий конформный линейный оператор на плоскости либо является поворотной гомотетией, либо является композицией комплексного сопряжения и поворотной гомотетии. Говоря о комплексной плоскости, мы будем называть первый случай конформным, а второй — *антиконформным*.

Задача 8.2. Считая fdz комплекснозначной дифференциальной формой на $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, докажите, что из условия Коши–Римана $\bar\partial f = 0$ следует $d(fdz) = 0$.

Задача 8.3. Проверьте, что $\mathbb{C}$-линейный оператор $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ уже не обязательно сохраняет углы между векторами, определённые по отождествлению $\mathbb{C}^2$ с евклидовым пространством $\mathbb{R}^4$.

8.2. **Криволинейный интеграл функции комплексного переменного и интегральная теорема Коши.** Пусть $f : U \to \mathbb{R}$ — функция комплексного переменного и пусть $\gamma : [t_0, t_1] \to U$ — кусочно-гладкая ориентированная кривая. Тогда интеграл

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (vdx + udy)$$

определён как интеграл от дифференциальной формы по кривой. Мы собираемся установить *интегральную теорему Коши*, у нас это будет несколько утверждений, связывающие понятие дифференцируемости в комплексном смысле с поведением этого интеграла. Начнём с рассмотрения интеграла по треугольнику:

Лемма 8.4. *Если треугольник T содержится в U, а f дифференцируема в комплексном смысле в U, то*

$$\int_{\partial T} f\, dz = 0.$$

Доказательство. Заметим, что на самом деле это утверждение последует из условий Коши–Римана и формулы Грина, если f является непрерывно дифференцируемой. Смысл этой леммы в том, что мы не требуем непрерывности производной f'.

Предположим противное,

$$\left| \int_{\partial T} f\, dz \right| \geqslant Cp(T)^2,$$

где C — некоторая положительная константа, а $p(T)$ означает периметр треугольника T. Далее мы будем уменьшать треугольник так, чтобы это условие сохранялось. Действительно, разрежем T на четыре подобных ему треугольника его средними линиями. Интеграл по границе T равен сумме интегралов по границам каждого из треугольников, значит один из меньших треугольников, T_1, обладает свойством

$$\left| \int_{\partial T_1} f\, dz \right| \geqslant \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f\, dz \right| \geqslant \frac{C}{4} p(T) = Cp(T_1)^2.$$

Продолжая такое деление на четыре треугольника, мы получим последовательность вложенных треугольников (T_k), для которых

$$\left| \int_{\partial T_k} f\, dz \right| \geqslant Cp(T_k)^2.$$

Эта последовательность имеет общую точку z_0, из определения комплексной дифференцируемости мы знаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что в δ-окрестности z_0 имеет место

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leqslant \varepsilon |z - z_0|.$$

Пусть теперь k достаточно большое, чтобы T_k содержался в $U_\delta(z_0)$. Легко проверить вручную (или по формуле Грина, что интеграл комплексно-линейной функции $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ по ∂T_k будет равен нулю. Следовательно, по сути мы должны интегрировать лишь $o(z - z_0)$ для получения значения интеграла, то есть

$$\left| \int_{\partial T_k} f\, dz \right| \leqslant \left| \int_{\partial T_k} \varepsilon |z - z_0|\, |dz| \right| \leqslant \varepsilon p(T_k)^2.$$

Очевидно, что при выборе $\varepsilon < C$ мы получим противоречие. $\square$

Используя уже замеченное в доказательстве свойство аддитивности интеграла по границе области относительно разбиения области на части кусочно-гладкими кривыми, можно заметить, что для всякого не обязательно выпуклого многоугольника $P \subset U$ интеграл

$$\int_{\partial P} f(z)\, dz = 0.$$

Действительно, многоугольник можно разбить на треугольники, читатель может убедиться в этом самостоятельно, решая следующие задачи (может понадобиться лемма Жордана о замкнутых кривых на плоскости 6.154). Собственно, не обязательно выпуклый многоугольник определяется с помощью замкнутой ломаной P без самопересечений как объединение P и ограниченной части плоскости из двух компонент связности $\mathbb{R}^2 \setminus P$.

Задача 8.5. Докажите, что в необязательно выпуклом многоугольнике P, если он не треугольник, можно провести диагональ, которая соединяет две его вершины, находится в его внутренности вся, кроме своих концов.

[[Попробуйте провести из одной вершины и посмотрите, что может этому помешать.]]

Задача 8.6. Докажите, что необязательно выпуклый многоугольник P можно разрезать на треугольники.

[[Проводите диагонали до тех пор, пока это возможно.]]

Теперь мы докажем ещё более содержательное утверждение:

Теорема 8.7. *Если кусочно-линейная кривая γ_0 гомотопна внутри U кусочно-линейной кривой γ_1 с сохранением концов, а f дифференцируема в U в комплексном смысле, то*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.$$

Доказательство. В этой теореме гомотопия — это такое непрерывное отображение

$$h : [t_0, t_1] \times [0, 1] \to U,$$

что $h(t, 0) \equiv \gamma_0(t)$, $h(t, 1) \equiv \gamma_1(t)$, $h(t_0, s) \equiv z_0$, $h(t_1, s) \equiv z_1$. Образ h компактен и содержится в U вместе со своей ε-окрестностью. Используя равномерную непрерывность h разобьём $[t_0, t_1] \times [0, 1]$ на прямоугольники настолько мелко, чтобы образ каждого прямоугольника был диаметра не более ε. Будем также считать, что образы вершин прямоугольников разбиения содержат все вершины γ_0 и γ_1.

Для каждого прямоугольника разбиения $R_k \subseteq [t_0, t_1] \times [0, 1]$ рассмотрим четырёхугольник Q_k (возможно с самопересечениями), образованный образами вершин R_k при отображении h; из-за выбранной мелкости $Q_k \subset U$. Тогда разность интегралов

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz - \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

выразится как сумма интегралов по границам четырёхугольников Q_k. Но всякий четырёхугольник можно ещё разбить на два треугольника в U и после применения леммы 8.4 получить, что интеграл по границе Q_k равен нулю, а значит и искомая разность интегралов равна нулю. □

Предыдущая теорема позволяет, при условии комплексной дифференцируемости $f : U \to \mathbb{C}$, определить интеграл

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz$$

по любой непрерывной кривой $\gamma : [t_0, t_1] \to U$. Действительно, из равномерной непрерывности кривая содержится в U вместе со своей ε-окрестностью. Тогда достаточно мелко вписанные в неё ломаные тоже содержатся в U и гомотопны друг другу, следовательно интеграл по любой из них можно считать интегралом по γ по определению. Понимая интеграл по непрерывной кривой в таком смысле, мы можем сформулировать:

Следствие 8.8 (Интегральная теорема Коши)**.** *Если f дифференцируема в комплексном смысле в $U \subseteq C$, а кривая $\gamma \subset U$ замкнута и стягиваема (гомотопна тождественной) в U, то*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Задача 8.9 (Лемма Жордана в общем случае). ** Докажите, что замкнутая кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений делит плоскость на две части, внутреннюю и внешнюю.

[[Нужно приближать γ ломаной всё ближе и ближе и при этом очень аккуратно обходить технические сложности.]]

8.3. **Первообразная функции комплексного переменного и универсальное накрытие области.** Продолжим рассматривать дифференцируемую в комплексном смысле $f : U \to \mathbb{C}$ и дополнительно предположим, что U связно, то есть является областью. Тогда мы можем фиксировать $p \in U$ и для всякой $z \in U$ определить

$$F(z) = \int_p^z f(\zeta)\, d\zeta,$$

где интеграл берётся по некоторой кривой от p до z. Конечно не все такие кривые гомотопны друг другу и определение может не быть корректным. Первый случай, когда определение корректно, соответствует случаю *односвязной* области U, в которой всякая замкнутая кривая гомотопна постоянной. Тогда для всяких двух кривых γ_0 и γ_1 от p до z конкатенация $\gamma_0 \diamond \gamma_1^{-1}$ (возведение в степень -1 означает обращение ориентации) будет замкнутой, гомотопной постоянной, и интегральная теорема Коши даст нам равенство

$$\int_{\gamma_0 \diamond \gamma_1^{-1}} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_1} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Пусть теперь $U_\delta(z) \subseteq U$ и $z' \in U_\delta(z)$. Рассмотрев кривую γ из p в z и дополнив её до кривой из p в z' отрезком $z' - z$, мы получим равенство

$$F(z') - F(z) = \int_{[z_0, z_1]} f(\zeta)\, d\zeta = f(z)(z' - z) + o(|z' - z|).$$

Следовательно, F является первообразной f в комплексном смысле. Эти наблюдения можно сформулировать так:

Теорема 8.10. *Если $f : U \to \mathbb{C}$ дифференцируема в комплексном смысле в односвязной U, то у неё существует первообразная в комплексном смысле $F : U \to \mathbb{C}$ и*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0)$$

для любых двух $z_0, z_1 \in U$ для интеграла по любой соединяющей их в U кривой.

Что делать, если область U не является односвязной? Тогда можно зафиксировать точку $p \in U$ и рассмотреть её *универсальное накрытие*

$$\widetilde{U} = \{\gamma : \gamma \subset U \text{ выходит из } p\}/\sim,$$

где $\sim$ — отношение гомотопии с сохранением концов. Это определение подобрано так, чтобы первообразная F оказалась корректно определённой на $\widetilde{U}$ по теореме 8.7.

Чтобы понять структуру универсального накрытия $\widetilde{U}$, надо определить естественную проекцию

$$\pi : \widetilde{U} \to U, \quad p(\gamma) = \text{конец } \gamma.$$

Тогда прообраз $z \in U$ состоит из классов гомотопии кривых, соединяющих p и z. Более того, рассмотрев некоторую окрестность $U_\delta(z) \subseteq U$, можно заметить, что для любой $z' \in U_\delta(z)$ и $\gamma \in \pi^{-1}(z)$ кривая $\gamma \diamond [z, z']$ даёт элемент $\pi^{-1}(z')$ и на самом деле таким образом строится взаимно однозначное соответствие между $\pi^{-1}(z)$ и $\pi^{-1}(z')$ (докажите это в качестве упражнения). Отсюда следует, что прообраз $\pi^{-1}(U_\delta(z))$ состоит из объединения некоторого количества копий $U_\delta(z)$, соответствующих разным классам гомотопии путей из p в z. Это позволяет ввести на $\widetilde{U}$ структуру гладкого двумерного многообразия, более того, это будет *одномерное комплексное многообразие*, то есть двумерное в действительном смысле многообразие с некоторой системой координатных карт, функции перехода между которыми, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, будут дифференцируемыми в комплексном смысле функциями одной комплексной переменной.

Полезно рассмотреть следующий пример, который немного проясняет приведённые выше абстрактные определения. Пусть $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и функция задана по формуле

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Эта функция дифференцируема в комплексном смысле как частное 1 и z, которые очевидно дифференцируемы в комплексном смысле. Посчитаем её интеграл по единичной окружности, обходящей начало координат против часовой стрелки, параметризуя её как $\{e^{it}\}_{[0,2\pi]}$,

$$\int_S f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} de^{it} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Это уже показывает, что область U не является односвязной. Найти первообразную можно по аналогии с действительным случаем, она должна соответствовать логарифму комплексного числа. Вспомним определение комплексной экспоненты:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

её дифференцируемость в комплексном смысле можно проверить по определению или воспользовавшись её разложением в сходящийся степенной ряд. Тогда логарифм комплексного числа можно определить примерно как

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где действительная часть определена однозначно, а мнимая часть $\operatorname{Arg} z$ (аргумент комплексного числа) определена только с точностью до прибавления числа кратного 2π. В данном случае универсальное накрытие $\widetilde{U}$ оказывается равным $\mathbb{C}$, а отображение $\pi : \widetilde{U} \to U$ соответствует экспоненте $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В частности, это означает, что число

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}$$

полностью описывает класс гомотопии замкнутой кривой $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Более глубокое изучение универсальных накрытий произвольных многообразий мы откладываем до раздела 8.12.

Задача 8.11. Докажите, что если для области $U \subset \mathbb{C}$ любая функция $\operatorname{Ln}(z - a)$ при $a \notin U$ допускает однозначное определение на U, то область U односвязна.

[[Предполагая неодносвязность, найдите в U простую замкнутую ломаную, которая не стягивается в U в точку, используйте лемму Жордана.]]

8.4. **Интегральная формула Коши и аналитичность.** Сейчас мы обнаружим свойства дифференцируемой в комплексном смысле функции, которые радикально отличают её от дифференцируемой функции действительного переменного. Первое свойство, неформально говоря, позволяет найти её значение в точки только по её значениям на окружающей эту точку кривой.

Теорема 8.12 (Интегральная формула Коши)**.** *Пусть замкнутая простая кривая γ лежит в области определения U дифференцируемой в комплексном смысле функции f, область V, ограниченная γ, лежит слева от γ в смысле ориентации γ, $V \subseteq U$ и $z \in V$. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Доказательство. Рассмотрим также кривую $\gamma_r \subset V$, которая является окружностью радиуса r вокруг точки z, ориентированная против часовой стрелки. Рассмотрим пару точек $a \in \gamma_r$ и $b \in \gamma$, которая реализует расстояние между γ_r и γ. Из условия минимальности отрезок $[a, b]$ полностью лежит в V, кроме его конца b. Тогда мы можем сделать кривую Γ, которая является конкатенацией отрезка $[a, b]$, одного обхода кривой γ, отрезка $[b, a]$, и одного обхода γ_r против часовой стрелки.

Можно доказать, что такая кривая Γ стягивается в $U \setminus U_r(z)$. Мы оставляет полное рассуждение читателю и заметим, что в установлении аналитичности f это утверждение будет использоваться только в тех случаях, когда оно непосредственно очевидно; а после установления аналитичности мы сформулируем теоремы 8.15 и 8.16, которые уже не будут требовать проверки стягиваемости.

Теперь, функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ переменной ζ определена и дифференцируема в комплексном смысле в $U \setminus \{z\}$, а значит по интегральной теореме Коши

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Отрезок $[a, b]$ в интеграле проходится туда и обратно и сокращается; следовательно мы получаем равенство

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

При стремлении $r \to +0$ правый интеграл можно записать как

$$(f(z) + o(1)) \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i (f(z) + o(1))$$

по уже найденному нами интегралу от $\frac{1}{z}$, в пределе $r \to +0$ мы получим требуемую формулу. $\square$

Теорема 8.13 (Ряд Тейлора аналитической в круге функции)**.** *Если функция f дифференцируема в комплексном смысле в открытом круге $U_R(z_0)$, то она раскладывается в нём в степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

причём

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

для любой окружности γ с центром в z_0 радиуса менее R, ориентированной против часовой стрелки.

Доказательство. Пусть γ — некоторая окружность с центром z_0, лежащая в области определения f и ориентированная против часовой стрелки. Рассмотрим также точку z, лежащую внутри неё. Тогда в подынтегральном выражении формулы Коши для z мы можем написать по формуле геометрической прогрессии

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

причём ряд будет сходится равномерно по ζ. Переставляя интеграл с суммой ряда, получим требуемое представление

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \right) (z - z_0)^n.$$

Далее по известным свойствам степенных рядов мы утверждаем, что f имеет производные в комплексном смысле любого порядка в $U_R(z_0)$, их степенные ряды получаются почленным дифференцированием её степенного ряда, и после этого коэффициенты её степенного ряда находятся через значения её производных. □

Задача 8.14. Докажите, что формула бинома Ньютона

$$(1 + z)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

выполняется с радиусом сходимости не менее 1. Здесь для логарифма выбирается значение аргумента в пределах $(-\pi/2, \pi/2)$.

[[Это утверждение было тяжело доказать средствами действительного анализа, а в комплексном анализе достаточно проверить аналитичность левой части в круге радиуса 1.]]

Теорема о разложении функции комплексного переменного в ряд Тейлора показывает, что из условия наличия производной в комплексном смысле на самом деле следует существование любых производных и даже аналитичность. Поэтому с этого момента мы вместо «дифференцируемая в комплексном смысле» будем говорить «аналитическая». Также это знание позволяет нам уточнить интегральную теорему Коши и формулу Коши.

Теорема 8.15 (Общая интегральная теорема Коши). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной так, что U при обходе остаётся слева. Если $f : U \to \mathbb{C}$ аналитическая и непрерывно продолжается на границу U, то*

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = 0.$$

Доказательство. Исходя из кусочной гладкости границы ∂U и непрерывности f, мы можем немного сдвинуть ∂U (как набор замкнутых кривых) внутрь U так, что интеграл изменится не более чем на наперёд заданное $\varepsilon > 0$. После этого мы имеем бесконечную гладкость f и получаем нуль в интеграле по формуле Грина, так как при $\bar\partial f = 0$

$$d(f\, dz) = \partial f dz \wedge dz = 0.$$

Далее можно перейти к пределу $\varepsilon \to +0$. □

Теорема 8.16 (Общая интегральная формула Коши). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной так, что U при обходе остаётся слева. Если $f : U \to \mathbb{C}$ аналитическая и непрерывно продолжается на границу U, то для любой $z \in U$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Доказательство. Рассмотрим окрестность $U_r(z) \subset U$. Применив общую интегральную формулу Коши к области $U \setminus \operatorname{cl} U_r(z)$, мы сведём утверждение к случаю, когда интеграл справа берётся по $\gamma_r = \partial U_r(z)$. Далее как и в доказательстве уже имеющегося случая интегральной формулы Коши мы получаем требуемое в пределе $r \to +0$. $\square$

Задача 8.17. Пусть аналитическая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такова, что $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \to \infty$. Докажите, что она является многочленом от z степени не более N. В частности, ограниченная аналитическая на $\mathbb{C}$ функция является константой.

[[Посчитайте коэффициенты её ряд по степеням z по интегральной формуле, взяв интеграл по окружностям всё большего и большего радиуса.]]

Задача 8.18. Найдите значение условно сходящегося интеграла $\int_0^{+\infty} e^{iz^2}\, dz$.

[[Сначала докажите, что этот интеграл является пределом интегралов e^{iz^2} по лучам $\{re^{i\varphi} : r \geqslant 0\}$ при $\varphi \to +0$, используйте для этого признак равномерной сходимости Абеля. Потом докажите, что интеграл по лучу не зависит от выбора луча с $0 < \varphi < \pi/2$, используя интегральную теорему Коши для области, ограниченной двумя отрезками и дугой. Потом рассмотрите луч с $\varphi = \pi/4$.]]

Задача 8.19. Докажите, что если $f = u + iv$ аналитическая, то u и v являются *гармоническими*, то есть для оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ выполняется

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

[[Используйте условия Коши–Римана.]]

Задача 8.20. Докажите, что всякая дважды непрерывно дифференцируемая гармоническая $u : U \to \mathbb{R}$ в односвязном U является действительной частью некоторой аналитической в U функции.

[[Используйте условия Коши–Римана и достаточные условия наличия потенциала в односвязной области для нахождения подходящей v.]]

8.5. **Ряд Лорана и особенности функции в точке.** Для функций комплексного переменного есть обобщение ряда Тейлора на случай, когда функция аналитична в *кольце* между двумя окружностями вида

$$A_{r,R}(z_0) = \{z : r < |z - z_0| < R\}.$$

Теорема 8.21 (Ряд Лорана). *Если f аналитическая в кольце $A_{r,R}(z_0)$, то в нём она представляется в виде абсолютно сходящегося ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторую точку $z \in A_{r,R}(z_0)$. Возьмём две окружности с центрами в z_0 в этом кольце, γ и Γ, так чтобы z лежала вне γ и внутри Γ. Между этими окружностями заключено меньшее кольцо и они составляют его границу. Считая ориентацию обеих окружностей против часовой стрелки, получим по обобщённой интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Первое слагаемое превращается в ряд Тейлора, давая компоненты $c_n(z-z_0)^n$ с $n \geqslant 0$. Второе преобразуем, помня что в нём $|z - z_0| > |\zeta - z_0|$,

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

С учётом того, что интегралы любой аналитической в $A_{r,R}(z_0)$ функции по γ и Γ совпадают (обобщённая интегральная теорема Коши), мы приходим в точности к требуемому разложения и требуемым формулам. □

Заметим, что ряд Фурье выглядит похоже на ряд Лорана. Если мы рассмотрим 2π-периодическую функцию действительной переменной t, то её также можно считать функцией на единичной окружности $\{z = e^{it}\}$. В этом случае её ряд Фурье в точности имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

Конечно, он не обязан абсолютно сходится, так как f может и не продолжаться до аналитической функции на каком-либо кольце. Даже гладкость функции f на окружности гарантирует лишь оценки её коэффициентов Фурье вида

$$c_n = O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

тогда как её аналитичность в некотором кольце давала бы (например, по формуле Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда) более сильную оценку вида

$$c_n = O(\rho^{|n|}),$$

где $r, 1/R < \rho < 1$. Эти оценки можно рассматривать как количественные способы различить гладкость и аналитичность.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда функция аналитическая в окрестности точки z_0, но не в самой точке z_0, это будет называться *изолированная особенность*. Будем говорить, что f определена в *проколотой окрестности* точки z_0. Рассмотрим следующие случаи:

Теорема 8.22 (Устранимая особенность). *Если f аналитическая и ограничена в проколотой окрестности z_0, то её особенность в z_0 устранима и она на продолжается до аналитической функции в окрестности z_0.*

Доказательство. Из формулы для коэффициентов Лорана

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}\,d\zeta$$

с интегралом по окружности радиуса ρ мы получаем оценку

$$|c_{-n}| \leqslant |\rho|^n \sup_{z\in\gamma} |f(z)|,$$

которая стремится к нулю при $\rho \to +0$, если $n \geqslant 1$. Это означает, что ряд Лорана на самом деле является рядом Тейлора и функция может считаться аналитической в z_0. ☐

Теорема 8.23 (Полюс). *Если f аналитическая в проколотой окрестности z_0 и $|f(z)| \to \infty$ при $z \to z_0$, то в этом кольце f имеет вид*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

для некоторого $k \geqslant 1$ и аналитической g с $g(z_0) \neq 0$, натуральное число k называется порядком полюса.

Доказательство. В этой ситуации $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ ограничена в проколотой окрестности z_0, а значит является аналитической в z_0. Рассмотрев первый ненулевой коэффициент разложения h в ряд Тейлора, мы получим

$$h(z) = (z - z_0)^k s(z),$$

где $s(z_0) \neq 0$. Тогда требуемая формула выполняется для $g(z) = 1/s(z)$. ☐

Теорема 8.24 (Существенная особенность). *Если f аналитическая в проколотой окрестности z_0 и её особенность в z_0 не устранима и не является полюсом, то всякое число $a \in \mathbb{C}$ является её частичным пределом при $z \to z_0$.*

Доказательство. Предположим противное, что число $a \in \mathbb{C}$ не является частичным пределом f в z_0. Тогда функция

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

ограничена в некоторой проколотой окрестности z_0, следовательно она аналитическая в этой окрестности. Тогда

$$f(z) = a + \frac{1}{h(z)} = \frac{1 + ah(z)}{h(z)}$$

и из этой формулы видно, что особенность f либо устранима (если $h(z_0) \neq 0$), либо является полюсом. ☐

Иначе можно описать существенную особенность как такую, в которой ряд Лорана по степеням $z - z_0$ содержит бесконечно много ненулевых слагаемых с отрицательными степенями, полюс — как ситуацию, когда имеется конечное число ненулевых слагаемых с отрицательными степенями, устранимую особенность — как отсутствие слагаемых с отрицательными степенями.

Если функция определена в окрестности ∞, то есть определена для достаточно больших $|z|$, то мы можем говорить о её особенности в бесконечности. По сути, изучение особенности в бесконечности сводится к изучению особенности в нуле после замены $z = 1/\zeta$.

Задача 8.25. Пусть функция f имеет лишь изолированные особенности и все они — полюса, в том числе и в бесконечности. Докажите, что f — рациональная функция.

[[Из компактности особенностей конечное число. Умножив f на многочлен, можно добиться исчезновения полюсов в конечных точках. Далее используйте задачу 8.17.]]

8.6. **Контурные интегралы и вычеты.** Как мы уже заметили, интеграл аналитической функции по некоторому контуру равен нулю, если внутри этого контура функция является аналитической. Если же внутри этого контура есть особенности, то мы можем выразить интеграл через некоторые числа, соответствующие этим особенностям.

Определение 8.26. *Вычетом* в изолированной особой точке z_0 аналитической функции f называется интеграл

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$$

по достаточно маленькой окружности с центром в z_0, ориентированной против часовой стрелки. Иначе говоря, вычет равен коэффициенту c_{-1} в разложении f в ряд Лорана по $z - z_0$ в проколотой окрестности z_0.

Для нахождения вычета в полюсе первого порядка достаточно посчитать предел

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Для полюсов большего порядка вычисления могут быть посложнее, один из вариантов — написать для полюса k-го порядка

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z)\right).$$

В точках существенной особенности вычисление вычета может оказаться весьма трудной задачей.

Определение 8.27. *Вычетом в бесконечности* называется

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$$

по достаточно большой окружности с центром в нуле, ориентированной против часовой стрелки. Иначе говоря, вычет равен $-c_{-1}$ в разложении f в ряд Лорана по степеням z в окрестности бесконечности.

Теорема 8.28 (Формула вычетов). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной так, что U при обходе остаётся слева. Если $f : U \to \mathbb{C}$ аналитическая в U кроме конечного числа изолированных особых точек и непрерывно продолжается на границу U, то*

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname*{res}_{z_k} f(z),$$

где сумма берётся по изолированным особым точкам в U.

Доказательство. Выкинем из области U объединение маленьких кругов с центрами в z_k и применим интегральную формулу Коши, должен получиться нулевой интеграл. Это означает, что интеграл по границе U равен сумме интегралов по маленьким окружностям вокруг особых точек, то есть равен $2\pi i$ умножить на сумму вычетов, по определению вычетов. ☐

В этой теореме можно рассматривать и неограниченные области, содержащие окрестность бесконечности, тогда в формулу надо будет добавить вычет в бесконечности.

Задача 8.29. Пусть многочлены P и Q таковы, что $\deg P + 2 \leqslant \deg Q = n$, а многочлен Q имеет n различных корней $z_1, \ldots, z_n$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = 0.$$

[[Используйте формулу вычетов.]]

Иногда в интегральных формулах возникает ситуация, когда например часть границы области U имеет вид отрезка I, окружённого этой областью. Тогда может оказаться, что продолжение по непрерывности на I будет разным с одной стороны отрезка и с другой стороны. Так как доказательство интегральной теоремы Коши у нас опирается на сдвиг контура интегрирования с границы внутрь области, то становится ясно, как рассматривать такой случай: интеграл по отрезку I, как по части границы ∂U, надо брать отдельно по двум его «сторонам» и значения f на каждой стороне брать соответственно.

В качестве примера можно рассмотреть функцию

$$f(z) = z^{p-1}(1-z)^{-p}$$

при действительном $p \in (0, 1)$. Будем считать, что по этой формуле функция определена на верхней стороне отрезка $[0, 1] \subset \mathbb{C}$. Имея в виду формулу

$$z^{p-1} = e^{(p-1)\operatorname{Ln} z}$$

мы можем понять, как выражение z^{p-1} меняется при обходе нуля с верхней стороны отрезка до нижней, оно при этом умножится на $e^{2\pi(p-1)i} = e^{2\pi pi}$ и не изменяется по модулю. Аналогично, при обходе 1 с верхней стороны отрезка до нижней выражение $(1-z)^{-p}$ по модулю не поменяется, но умножится на $e^{2\pi pi}$. Это позволяет заключить, что вся функция f аналитически продолжается на $\mathbb{C} \setminus I$. Тогда формула вычетов даёт:

$$\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{-p}\, dz - e^{2\pi pi} \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{-p}\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z).$$

Значение действительного интеграла — это $B(p, 1-p)$, а вычет в бесконечности находится из того, что при выбранном нами продолжении с верхней части отрезка $f(z) \sim e^{\pi pi}/z$ при $z \to \infty$, то есть

$$B(p, 1-p)(1 - e^{2\pi pi}) = -2\pi i e^{\pi pi},$$

что после тривиального преобразования даёт нам *формулу дополнения*:

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

Формула вычетов также позволяет узнать количество нулей аналитической функции внутри данного контура (с учётом кратности).

Теорема 8.30 (Принцип аргумента). *Пусть f аналитическая в области U кроме может быть конечного количества полюсов и непрерывно продолжается на её кусочно-гладкую границу так, что на границе f не обращается в нуль. Тогда (ориентация границы стандартная)*

$$\int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_{f(z')=0} k_{z'} - \sum_{f(z'')=\infty} k_{z''} \right),$$

где $k_{z'}$ — это кратность нуля в z', а $k_{z''}$ — порядок полюса в z''.

Доказательство. Всё сводится к вычислению вычета логарифмической производной $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в нуле или полюсе f. Например, если z' является нулём кратности k, тогда в окрестности z'

$$f(z) = (z - z')^k g(z),$$

где $g(z)$ аналитическая и $g(z') \neq 0$, тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z'} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

у первого слагаемого вычет k, а второе аналитическое в точке z' и не имеет вычета. □

В принципе, достаточно корректно в этой формуле писать $\frac{f'(z)}{f(z)}dz = d\,\mathrm{Ln}\, f(z)$. Вспоминая определение логарифма и его неоднозначность, мы могли бы даже без формулы вычетов заметить, что интеграл этого выражения по замкнутому контуру должен быть кратен $2\pi i$, так как неоднозначность в логарифме может быть только такой. Говоря неформально, количество нулей и полюсов внутри контура с учётом кратности и порядка равно *числу вращения* вектора $f(z)$ при обходе z по данному контуру.

Принцип аргумента даёт ясное представление о том, почему всякий комплексный многочлен степени n должен иметь n корней с учётом кратности. Действительно, при большом $|z|$ мы имеем выражение

$$P(z) = az^n(1 + o(1)),$$

которое показывает, что $P(z)$ при движении z по окружности достаточно большого радиуса делает ровно n оборотов вокруг начала координат.

Задача 8.31. Пусть аналитическая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ не имеет нулей. Докажите, что тогда она представляется в виде $f(z) = e^{g(z)}$ для некоторой аналитической $g(z)$.

[[Заметьте, что интеграл $d\,\mathrm{Ln}\, f(z)$ по любому контуру равен нулю.]]

Задача 8.32. Пусть f аналитическая в области U кроме может быть конечного количества полюсов и непрерывно продолжается на её кусочно-гладкую границу так, что на границе f не обращается в нуль. Докажите, что сумма k-х степеней корней уравнения $f(z) = 0$ с учётом кратностей будет равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} z^k d\,\mathrm{Ln}\, f(z).$$

[[Рассуждайте так же, как при доказательстве принципа аргумента.]]

8.7. **Аналитические продолжения функций.** Явные формулы для рядов Тейлора дают нам возможность продолжить элементарные функции до аналитических функций на $\mathbb{C}$ или его подмножество, например, так можно продолжить синус, косинус, тангенс и т.п. Собственно, тригонометрические функции на самом деле определяются через уже изученную нами экспоненту, например

$$\mathrm{tg}\, z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Первый вопрос, который при этом возникает — это единственность такого продолжения, и на него отвечает теорема:

Теорема 8.33 (Единственность аналитического продолжения). *Если две аналитические функции $f, g : U \to \mathbb{C}$ на области U совпадают на множестве, имеющем бесконечное пересечение с каким-то компактом $K \subset U$, то они совпадают на всей U.*

Доказательство. В условиях теоремы функция $h = f - g$ аналитическая. Из представления непостоянной аналитической функции в окрестности её нуля $h(z_0) = 0$

$$h(z) = (z - z_0)^k m(z)$$

с $m(z_0) \neq 0$ следует, что её нуль изолирован, так как $m(z)$ также будет ненулевой в некоторой окрестности z_0.

По предположению противного, множество нулей h имеет предельную точку $z_0 \in K \subset U$, а значит по замечанию об изолированности нуля обращается в нуль в некоторой её окрестности. Обозначим $V \subseteq U$ внутренность множества нулей h, по нашим предположениям V не пусто. Если h не везде равна нулю, то из связности U найдётся точка $z \in \partial V \cap U$. По непрерывности h мы имеем $h(z) = 0$, причём по выбору z этот нуль не изолирован, следовательно, h обращается в нуль в окрестности z и на самом деле $z \in V$, противоречие с выбором z. □

Доказанная теорема показывает, что с интервала в $\mathbb{R}$ функция аналитически продолжается однозначно. Но могут быть некоторые нюансы. Мы уже видели примеры аналитического продолжения функции действительного аргумента на $\mathbb{C}$ или его открытое подмножество. В случае логарифма нам приходилось рассматривать «многозначную функцию», точнее говоря функцию на универсальном накрытии $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, которая уже оказывается единственным продолжением логарифма. Аналогично, для функции

$$f(z) = z^{1/n} = e^{\frac{\operatorname{Ln} z}{n}}$$

аналитическое продолжение возможно в универсальное накрытие $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (и по непрерывности в 0). Если n — натуральное число, то для такой функции не обязательно брать универсальное накрытие, а достаточно рассмотреть n-кратное накрытие

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto z^n.$$

Заметим, что для разложения аналитической функции по формуле Тейлора с центром в z_0 достаточно проверить её аналитичность в круге $|z - z_0| < R$. Если же функция продолжена на круг с некоторыми особыми точками (полюсами, существенными особенностями или даже точками, при обходе вокруг которых аналитическое продолжение меняется), то радиус сходимости будет в точности равен расстоянию от z_0 до ближайшей существенной особенности r. Действительно, по теореме 8.13 он не менее r, а по теореме о единственности продолжения он и не более r. Это позволяет находить радиус сходимости без использования формул типа Коши–Адамара и вообще без особых вычислений.

Задача 8.34. Найдите радиус сходимости ряда для $\operatorname{tg} z$ с центром в нуле.

[[Найдите ближайшую особенность.]]

В общем случае нет какого-то однозначного рецепта продолжения аналитической функции с одной области на большую область, в каждом конкретном случае используются разные методы. При этом, и при рассмотрении конформных отображений, иногда бывает полезно следующее утверждение.

Теорема 8.35 (Склеивание аналитических функций). *Если функция $f : U \to \mathbb{C}$ непрерывна на области U и аналитична на U, кроме быть может множества $X \subset U$, состоящего из конечного объединения гладких кривых, пересекающихся в конечном числе точек, то f на самом деле аналитична на всей U.*

Доказательство. Потеря аналитичности на конечном множестве гладких кривых не влияет на действительность интегральной теоремы Коши и интегральной формулы

Коши, так как контур интегрирования можно сдвинуть так, чтобы он пересекал X лишь конечное число раз. Непрерывность f при этом позволяет заключить, что интеграл измениться на произвольно малое число и утверждения теорем будут получатся предельным переходом.

При этом, например, для доказательства интегральной теоремы Коши можно разрезать область, ограниченную контуром интегрирования, на конечное число частей кривыми из X, применить теорему для каждой части и собрать нуль на исходном контуре, используя сокращение значений интегралов на разрезах. $\square$

В следующих задачах мы обсудим некоторые конкретные аналитические продолжения.

Задача 8.36. Проверьте, что

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}\,dx$$

корректно определяет гамма-функцию при $\operatorname{Re} z > 0$ как аналитическую функцию, если мы считаем $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$. Докажите, что она продолжается до аналитической функции, определённой для всех комплексных чисел, кроме полюсов в неположительных целых числах.

[[Используйте верную при $\operatorname{Re} z > 0$ формулу $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, чтобы последовательно строить продолжение на области $\operatorname{Re} z > -n$; или используйте формулу дополнения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$.]]

Задача 8.37. Проверьте, что

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

корректно определяет дзета-функцию при $\operatorname{Re} z > 1$ как аналитическую функцию, если мы считаем $n^z = e^{z\ln n}$. Докажите, что её можно продолжить на область $\operatorname{Re} z > 0$ так, что у неё будет только один полюс в $z = 1$.

[[Рассмотрите разность $\zeta(z) - \int_1^{+\infty} x^{-z}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-z} - \int_n^{n+1} x^{-z}\,dx\right)$ и докажите, что она сходится к аналитической при $\operatorname{Re} z > 0$ функции.]]

Знаменитая *гипотеза Римана* предполагает, что продолженная на полосу $0 < \operatorname{Re} z < 1$ дзета-функция имеет нули только с $\operatorname{Re} z = 1/2$; но у нас сейчас нет возможности обсуждать её важность и правдоподобность.

Задача 8.38. Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет компактный носитель, то её преобразование Фурье аналитически продолжается на $\mathbb{C}$.

[[Проверьте абсолютную сходимость и комплексную дифференцируемость для интеграла в определении преобразования Фурье.]]

Задача 8.39. Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$ обращается в нуль при $x > 0$, то её преобразование Фурье даёт аналитическую в верхней полуплоскости $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ функцию, которая непрерывно продолжается до $\partial H = \mathbb{R}$ и стремится к нулю, когда $z \to \infty$.

[[Проверьте абсолютную сходимость и комплексную дифференцируемость для интеграла в определении преобразования Фурье, также вспомните лемму Римана об осцилляции.]]

8.8. **Открытость и принцип максимума.**

Теорема 8.40 (Локальная структура аналитического отображения). *Если у аналитической в окрестности z_0 функции производные $f'(z_0), \dots, f^{(k-1)}(z_0)$ равны нулю, а $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, то ограничение f на некоторую окрестность $V \ni z_0$ образует накрытие $V \setminus \{z_0\} \to f(V) \setminus f(z_0)$ кратности k.*

Доказательство. Условия теоремы означают, что первый после $f(z_0)$ ненулевой коэффициент ряда Тейлора f стоит при $(z - z_0)^k$, то есть в окрестности z_0 имеет место представление

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k g(z),$$

где g аналитическая и $g(z_0) \neq 0$. После сдвига будем считать, что $z_0 = f(z_0) = 0$, это упростит формулы. Так как $g(0) \neq 0$, то в некоторой окрестности нуля однозначно определена

$$h(z) = g(z)^{1/k} = e^{\frac{\operatorname{Ln} g(z)}{k}},$$

тогда мы можем написать

$$f(z) = z^k g(z) = z^k h(z)^k = (zh(z))^k.$$

Так как $h(0) \neq 0$, то $\varphi(z) = zh(z)$ имеет ненулевую производную в нуле и по теореме об обратном отображении взаимно однозначно отображает некоторую $V \ni 0$ на $V' \ni 0$, при этом f является композицией $\psi \circ \varphi$, где $\psi : z \mapsto z^k$. Очевидно, ψ на всяком проколотом круге с центром в нуле даёт накрытие другого проколотого круга с центром в нуле кратности k. Если мы сузим V' до открытого круга с центром в нуле и соответственно изменим $V = \varphi^{-1}(V')$, то мы поймём, что на $V \setminus \{0\}$ и $f = \psi \circ \varphi$ даёт накрытие кратности k. ☐

Заметим, что теорема о структуре аналитических отображений может быть обобщена на случай, когда f имеет в z_0 полюс порядка k. Тогда применение уже доказанного варианта к функции $1/f(z)$ показывает, что образ некоторой проколотой окрестности z_0 покрывает некоторую проколотую окрестность ∞ (то есть множество вида $|z| > R$) с кратностью k.

Теорема 8.41 (Принцип сохранения области). *Непостоянная аналитическая функция переводит область в область.*

Доказательство. Теорема о локальной структуре показывает, что непостоянная аналитическая функция переводит открытое множество в открытое. Также всякое непрерывное отображение переводит связное множество в связное, в итоге получаем утверждение. ☐

Теорема 8.42 (Принцип максимума). *Для аналитической функции f на области U локальный максимум $|f|$ может находиться в U только если f постоянна. Аналогично с заменой $|f|$ на $\operatorname{Re} f$ или $\operatorname{Im} f$.*

Доказательство. Предположим противное, что f непостоянна и $z_0 \in U$ даёт локальный максимум $|f|$. Пусть $f(z_0) = a$; из открытости f мы знаем, что для всякой $U_\delta(z_0)$ найдётся

$$U_\sigma(a) \subseteq f(U_\delta(z_0)).$$

Это значит, что в произвольно малой окрестности z_0 функция принимает, в частности, значения с $|f(z)| > |a| = |f(z_0)|$. Доказательство для мнимой и вещественной частей f аналогично. ☐

Задача 8.43. Докажите, что для аналитической $f : U \to \mathbb{C}$ локальный минимум $|f(z)|$ может достигаться только при $f(z) = 0$.

[[Действуйте аналогично доказательству принципа максимума.]]

Задача 8.44. Докажите, что для аналитической $f : U \to \mathbb{C}$ функция $|f(z)|$ *субгармоническая*, то есть для оператора Лапласа выполняется

$$\Delta|f(z)| \geqslant 0.$$

[[Можно заметить для начала, что $\ln|f(z)|$ является гармонической.]]

Задача 8.45. Пусть $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z| < R$. Докажите, что функция действительного аргумента

$$g(x) = \ln \sup_{|z|=e^x} |f(z)|$$

выпукла на $(\ln r, \ln R)$.

[[Заметьте, что функция $\ln|z|^\alpha|f(z)|$ гармоническая и примените для неё принцип максимума при подходящих $\alpha \in \mathbb{R}$.]]

8.9. **Свойство компактности для аналитических функций.** Докажем, что оценка на модуль аналитической функции влечёт оценку на модуль её производной.

Теорема 8.46 (Лемма Шварца)**.** *Если аналитическая функция ограничена в круге $U_R(z_0)$ по модулю числом M и $f(z_0) = 0$, то выполняется*

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{R}$$

с равенством только в случае, если $f(z) = a(z - z_0)$ с $|a| = M/R$.

Доказательство. Заметим, что

$$f(z) = (z - z_0)g(z),$$

где $g(z)$ аналитическая и удовлетворяет неравенству

$$|g(z)| \leqslant \frac{M}{|z - z_0|}.$$

Значит верхний предел $|g(z)|$ при $|z - z_0| \to R$ равен M и на самом деле по принципу максимума $|g|$ не может быть больше M/R в $U_R(z_0)$, так как иначе $|g|$ имел бы локальный максимум в этом круге. Тогда мы получаем

$$|f'(z_0)| = |g(z_0)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

В случае равенства $|g(z_0)| = M/R$ является локальным максимумом и g должна быть постоянной, то есть f должна быть линейной указанного в формулировке теоремы вида. ☐

Задача 8.47. Докажите, что условие $f(z_0) = 0$ в формулировке теоремы не требуется.

[[Можно взять композицию f с конформным преобразованием круга $U_M(0)$, переводящим $f(z_0)$ в 0, см. раздел 8.10.]]

Теорема 8.48 (Компактность в пространстве аналитических функций)**.** *Пусть множество X аналитических на области U функций равномерно ограничено, то есть выполняется $|f(z)| \leqslant M$ для любой $f \in X$ и $z \in U$. Тогда в этом множестве можно выбрать последовательность (f_n), которая сходится к аналитической $f_0 : U \to \mathbb{C}$ равномерно на любом компакте $K \subset U$ и для всякого $k \in \mathbb{Z}^+$ последовательность производных $(f_n^{(k)})$ тоже сходится к $f_0^{(k)}$ равномерно на любом компакте $K \subset U$.*

Из доказательства будет ясно, что вместо равномерной ограниченности достаточно требовать равномерной ограниченности на каждом компакте $K \subset U$ (константой M_K, зависящей только от K), мы не пишем это в формулировке теоремы, так как она и так получилась достаточно тяжеловесной.

Доказательство. Представим U в виде объединения счётной последовательности компактов (K_m), в которой каждый следующий компакт содержит предыдущий в своей внутренности. Рассмотрим один из них. Так как расстояние от K_m до дополнения $\mathbb{C} \setminus U$ положительно, то K_m лежит в U вместе со своей ε-окрестностью. Тогда по лемме Шварца производные всех $f \in X$ на K_m ограничены по модулю M/ε. Значит, ограничения $f \in X$ на K_m равностепенно непрерывны и по теореме Арцела–Асколи 7.128 мы можем составить из них последовательность, сходящуюся равномерно на K_m.

Таким образом для K_1 мы можем найти последовательность $(f_n) \subseteq X$, равномерно сходящуюся на K_1. Переходя к K_2, мы найдём в ней подпоследовательность σ_2, сходящуюся и на K_2. Далее, мы получим последовательность вложенных подпоследовательностей

$$\sigma_1 = (f_n) \supseteq \sigma_2 \supseteq \sigma_3 \supseteq \dots$$

такую что подпоследовательность σ_m равномерно сходится на K_m.

Теперь сделаем «диагональную процедуру», выберем f_{n_m} в подпоследовательности σ_m так, чтобы номера n_m возрастали, получим подпоследовательность исходной последовательности (f_n), обладающую тем свойством, что для достаточно больших m'(а именно $m' \geqslant m$) её элементы $f_{n_{m'}}$ являются элементами подпоследовательности σ_m. Следовательно, эта подпоследовательность сходится к некоторой непрерывной f равномерно на каждом из K_m. Обозначим эту подпоследовательность опять (f_n) для простоты.

Любой другой компакт $K \subset U$ покрыт внутренностями $\operatorname{int} K_m$, а значит содержится полностью внутри одного из K_m, следовательно, построенная последовательность сходится равномерно на любом компакте в U. Во всякой формуле Коши

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

можно перейти к равномерному пределу и убедиться, что для предельной функции f_0 эта формула также верна, следовательно f_0 является аналитической. Рассматривая формулы

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

и переходя к равномерному пределу в правой части мы увидим, что и k-е производные $f_n^{(k)}$ тоже стремятся к некоторому значению равномерно на компактах, и оно обязано оказаться равным $f_0^{(k)}$. $\square$

8.10. **Конформные отображения.** Будем рассматривать *конформные отображения* между областями $f : U \to V$, то есть аналитические биективные отображения U на V. Необходимо пояснить обратимость таких отображений:

Теорема 8.49. *Обратная для аналитической инъективной функции тоже аналитическая.*

Доказательство. Если в какой-то точке производная f' обращается в нуль, то теорема о локальной структуре 8.40 показывает, что в окрестности этой точки отображение не инъективно. Тогда по теореме об обратном отображении обратная функция является бесконечно гладкой, а рассмотрение его производной показывает, что обратное отображение дифференцируемо в комплексном смысле и следовательно аналитично. □

Также иногда полезно знать, что происходит с границей области при конформном отображении, если оно непрерывно и инъективно продолжается на границу.

Теорема 8.50. *Если область U ограничена простой кусочно гладкой кривой и конформное отображение $f : U \to V$ непрерывно продолжается до инъективного $f : \partial U \to \mathbb{C}$, то $V = f(U)$ является областью, ограниченной кривой $f(\partial U)$.*

Доказательство. Для $a \notin f(\partial U)$ можно найти количество решений уравнения $f(z) = a$ из принципа аргумента

$$n_a = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz.$$

Правая часть этого выражения непрерывно зависит от $a \in \mathbb{C} \setminus f(\partial U)$, а так как это всегда целое число, то оно локально постоянно зависит от a. По теореме Жордана (мы её не доказывали, но в конкретных случаях её всегда можно проверить непосредственно), множество $\mathbb{C} \setminus f(\partial U)$ имеет неограниченную компоненту связности, на которой рассмотрение очень больших a и компактность $f(U \cup \partial U)$ гарантирует $n_a \equiv 0$, а также имеет одну ограниченную компоненту связности, для которой остаётся вариант $n_a \equiv 1$. □

Задача 8.51. Докажите, что если аналитическая функция $f : U \to V$ биективна, то можно взять замкнутый контур $\gamma \subset V$ и на внутренности $f(\gamma)$ будет верна формула

$$f^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z) - \zeta}\, dz,$$

[[Это на самом деле обобщение принципа аргумента для решения уравнений $f(z) = \zeta$; иначе эту формулу можно рассматривать как формулу Коши для f^{-1} с заменённой переменной.]]

Теперь мы займёмся описанием конкретных конформных отображений. Для начала опишем конформные преобразования $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Из их обратимости и биективности следует, что при $z \to \infty$ должно выполняться $f(z) \to \infty$. Следовательно, особенность такого f в бесконечности является не более чем полюсом, а значит его ряд Тейлора (Лорана) является конечной суммой, то есть f — это многочлен. По принципу аргумента (или по «основной теореме алгебры») только многочлен первой степени может быть биективным, то есть остаются только варианты

$$f(z) = az + b, \quad a \neq 0.$$

У комплексной плоскости оказалось не слишком много конформных преобразований. Часто комплексную плоскость расширяют до *сферы Римана* S, добавляя бесконечно удалённую точку ∞. Для функций без существенных особенностей (в том числе на бесконечности) можно корректно говорить о случаях $f(z) = \infty$ (полюс) и о значении $f(\infty)$. Можно построить дробно-линейные конформные преобразования $S \to S$ по формулам

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0,$$

и доказать, что других на самом деле нет. Действительно, для всякого конформного преобразования $f : S \to S$ можно взять его композицию с дробно-линейным

$$g(z) = \varphi(f(z))$$

так, что $g(\infty) = \infty$. После этого g даёт конформное преобразование $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, и значит является линейным. Явная подстановка показывает, что

$$f(z) = \varphi^{-1}(g(z))$$

тоже оказывается дробно-линейным.

Определение 8.52. Группа конформных преобразований S называется *группой Мёбиуса*.

Полезно рассмотреть антиконформные отображения сферы Римана, заданные по формуле

$$f(z) = z_0 + \frac{R^2}{\overline{\overline{z - z_0}}}.$$

При таком отображении всякая точка окружности $|z - z_0| = R$ остаётся на месте и в целом отображение выглядит как «отражение» относительно окружности. Такое отображение называется *инверсия относительно окружности*. Инверсия является антиконформным отображением, но композиция двух инверсий уже будет сохранять ориентацию, то есть будет конформным отображением.

Задача 8.53. Докажите, что конформные преобразования $f : S \to S$ могут перевести любую упорядоченную тройку попарно различных точек $\{a, b, c\} \subset S$ в любую другую упорядоченную тройку попарно различных точек $\{a', b', c'\} \subset S$, и что конформное преобразование $f : S \to S$ однозначно определяется упорядоченным набором

$$\{\{a, b, c\}, \{f(a), f(b), f(c)\}\}.$$

[[Переведите одну точку в нуль, другую в бесконечность, и посмотрите, что делать с оставшейся точкой, если нуль и бесконечность уже нельзя двигать.]]

Задача 8.54. Докажите, что конформные преобразования $f : S \to S$ сохраняют *двойное отношение* (*ангармоническое отношение*) упорядоченной четвёрки попарно различных точек

$$D(a, b, c, d) = \frac{(d - a)(b - c)}{(b - a)(d - c)}.$$

[[Заметьте, что это достаточно доказать для преобразований вида $z \mapsto az + b$ (выражение очевидно сохраняется) и отображения $z \mapsto 1/z$. Заметьте также, что $D(a, b, c, d) \in S$ по непрерывности можно определить для случаев $d = a$, $d = b$, $d = c$, если a, b, c остаются попарно различными.]]

Задача 8.55. Докажите, что при фиксированных попарно различных $a, b, c \in S$ условие

$$D(a, b, c, z) \in \mathbb{R}$$

определяет прямую или окружность, проходящую через a, b, c. Выведите, что конформные преобразования S переводят прямую или окружность в прямую или окружность.

[[Можно посчитать в координатах, а можно для начала перевести a, b, c на действительную прямую.]]

Задача 8.56. Пусть конформное отображение переводит кольцо $r < |z| < R$ в другое кольцо на комплексной плоскости и продолжается до непрерывного отображения границы кольца в границу нового кольца. Докажите, что отношение R/r при таком отображении сохраняется.

[[С помощью инверсий и теоремы о склеивании продолжите f на всю сферу Римана S.]]

Введём ещё одну интересную для нас область — открытый единичный круг D. Рассмотрение сферы Римана уже даёт соображения о том, как построить конформные преобразования $f : D \to D$. Надо рассмотреть дробно-линейные отображения, оставляющие на месте окружность ∂D, то есть

$$f(z) = b\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1, |b| = 1.$$

Как видно из формулы, такое отображение переводит точку $a \in D$ в нуль, а значит может перевести любую точку D в любую другую (так как композиция двух отображений такого вида является отображением такого же вида).

Покажем, что все конформные преобразования $f : D \to D$ имеют такой вид. Действительно, взяв композицию f с подходящим дробно-линейным φ можно считать, что

$$g(z) = \varphi(f(z))$$

переводит нуль в нуль. Тогда по лемме Шварца для g и g^{-1}

$$|g'(0)| \leqslant 1, \quad \left|(g^{-1}(0))'\right| \leqslant 1.$$

Так как левые части этих неравенств взаимно обратны, то на самом деле выполняется равенство и по описанию случая равенства в лемме Шварца мы получаем

$$g(z) = az, \quad |a| = 1.$$

Значит, исходное f тоже было дробно-линейным.

Задача 8.57. Докажите, что найденные конформные отображения $D \to D$ сохраняют риманову метрику

$$g(X, Y) = \frac{(X, Y)}{(1-|z|^2)^2},$$

если вектора X, Y находятся в точке z.

[[Выпишите производную дробно-линейного f и найдите её детерминант как действительно-двумерного линейного оператора.]]

Задача 8.58. * Пусть при конформном отображении $f : Q \to \mathbb{C}$ образ единичного квадрата Q (мы считаем отображение непрерывно продолженным на границу) имеет площадь S, и пусть I и J — две его противоположные стороны. Докажите, что $\operatorname{dist}(f(I), f(J)) \leqslant \sqrt{S}$

[[Заметьте, что за изменение длины кривой при конформном отображении отвечает $|f'(z)|$, а за изменение площади — $|f'(z)|^2$.]]

Задача 8.59. * Пусть f — аналитическая функция на единичном круге. Докажите, что длина кривой $\Gamma_r = \{f(re^{i\varphi})\}_{\varphi=0}^{2\pi}$ монотонно возрастает с ростом $r \in [0, 1)$.

[[Выпишете явную формулу для длины и заметьте, что $|f'(z)|$ является субгармонической.]]

8.11. **Теорема Римана об отображении.** В этом разделе мы коснёмся вопроса об униформизации областей $U \subseteq \mathbb{C}$, то есть о нахождении некоторого канонического конформного образа данной области. Вопрос об униформизации неодносвязных областей достаточно сложен, тем более что у неодносвязной области может быть как счётное, так и несчётное количество «дырок» (если, например, выкинуть из $\mathbb{C}$ канторово множество). К тому же задача 8.56 показывает, что у неодносвязных областей есть некоторые численные конформные инварианты.

Далее мы рассматриваем односвязные области. Заметим, что $\mathbb{C}$ и D не являются конформно эквивалентными хотя бы потому, что на $\mathbb{C}$ всякая ограниченная аналитическая функция является постоянной, а на D существует огромное количество ограниченных аналитических функций. Оказывается, других примеров конформно неэквивалентных односвязных областей в $\mathbb{C}$ нет:

Теорема 8.60 (Теорема Римана об отображении)**.** *Для всякой односвязной $U \subset \mathbb{C}$ не равной $\mathbb{C}$ существует конформное отображение U на D.*

Доказательство. Построим сначала хотя бы инъективное отображение $f : U \to D$. По предположению существует точка $\mathbb{C}$, не принадлежащая U, без ограничения общности пусть это 0. Тогда $\operatorname{Ln} z$ в силу односвязности может быть однозначно определён на U, иначе говоря, найдётся $U' \subset \mathbb{C}$ такое, что экспонента $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ даёт биективное отображение $U' \to U$.

Если a лежит в U' вместе со своей δ-окрестностью, то из инъективности экспоненты на U' следует, что $b = a + 2\pi i$ и её δ-окрестность не пересекаются с U'. Тогда функция

$$g(z) = \frac{\delta}{z - b}$$

даёт инъективное отображение U' в D, а

$$f(z) = g(\operatorname{Ln} z)$$

даёт инъективное отображение $U \to D$.

С помощью конформного преобразования D можно добиться, что найдётся $p \in U$, такая что $f(p) = 0$. Теперь зафиксируем точку $p \in U$ и для всех инъективных аналитических $f : U \to D$, таких что $f(p) = 0$, рассмотрим $\sup_f |f'(p)|$. По неравенству Шварца для некоторой окрестности p этот супремум конечен.

По свойству компактности мы можем выбрать последовательность (f_n) таких инъективных отображений, которая будет сходиться к некоторой аналитической $f_0 : U \to D$ и при этом будет выполняться

$$|f_0'(p)| = \sup_f |f'(p)|.$$

Докажем, что f_0 на самом деле тоже инъективна, будем обозначать её просто f. Если это не так и имеет место $f(z') = f(z'') = a$, то для количества решений уравнения $f(z) = a$ в некотором контуре $\gamma \subset U$ мы будем иметь

$$n_a = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz \geqslant 2.$$

Так как правая часть этого равенства является пределом соответствующих выражений для f_n, то и для какой-то из f_n мы будем иметь $n_a > 1$, что противоречит её инъективности; значит f инъективна.

Итак, теперь у нас есть инъективное аналитическое отображение $f : U \to D$ с максимально возможным $|f'(p)|$ и $f(p) = 0$. Используем свойство максимальности чтобы доказать, что оно должно быть сюръективным. Предположим $a \notin f(U)$, но $a \in D$. Рассмотрим дробно-линейное

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

которое переводит a в нуль. Область $\varphi(f(U))$ односвязна и не содержит начала координат. На ней можно некоторым образом однозначно определить $\operatorname{Ln} z$, а значит и один из вариантов квадратного корня

$$\sigma(z) = e^{\frac{\operatorname{Ln} z}{2}}.$$

Найдём дополнительно дробно-линейное $\psi : D \to D$ так, чтобы композиция $\varkappa = \psi \circ \sigma \circ \varphi$ переводила нуль в нуль. Эта композиция определена и инъективна на образе $f(U)$, а вот обратное к ней отображение

$$\varkappa^{-1} = \varphi^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \psi^{-1}$$

определено на всём D, аналитически переводит его в себя и не является инъективным, так как σ^{-1} — это просто возведение в квадрат. По лемме Шварца для $\varkappa^{-1}$ имеет место строгое неравенство

$$\left|(\varkappa^{-1}(0))'\right| < 1 \Rightarrow |\varkappa'(0)| > 1.$$

Следовательно, композиция $\varkappa \circ f$ имеет большую производную в точке p, чем f, продолжая при этом инъективно отображать U в D и отображать p в нуль. Противоречие доказывает, что $f(U) = D$. □

Задача 8.61. Найдите какое-нибудь конформное отображение $H \to D$, где H — верхняя полуплоскость $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

[[Поищите среди дробно-линейных.]]

Задача 8.62. Найдите какое-нибудь конформное отображение для полукруга, $H \cap D \to D$.

[[Дробно-линейным образом превратите полукруг в квадрант $\{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$. Примените $\sqrt{z}$ и далее действуйте дробно-линейно.]]

Задача 8.63. Докажите, что конформные преобразования верхней полуплоскости H имеют вид

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0.$$

[[Можно воспользоваться тем, что H конформно эквивалентна D.]]

8.12. **Универсальное накрытие и фундаментальная группа.** Давайте более систематически изучим накрытия многообразий вообще. На самом деле накрытия можно изучать не только для многообразий, но и дли многообразий с краем или даже более общих (локально стягиваемых) топологических пространств. Однако уже для областей в $\mathbb{C}$ эти утверждения нетривиальны, поэтому читатель может представлять себе такие области и их накрытия.

Определение 8.64. Гладкое отображение непустых многообразий $\pi : M \to N$ называется *накрытием*, если у всякой $p \in N$ есть окрестность $V \ni p$, прообраз которой $\pi^{-1}(V)$ является несвязным объединением открытых множеств $\{U_\alpha\}$, каждое из которых диффеоморфно N с помощью $\pi : U_\alpha \to V$. В комплексном случае мы будем требовать, чтобы диффеоморфизмы были аналитическими.

Определение 8.65. *Универсальным накрытием* связного многообразия N с выделенной точкой $p \in N$ называется множество кривых $\gamma \subset N$ с началом в p, с точностью до сохраняющей концы гомотопии. Отображение $\pi : \widetilde{N} \to N$ ставит в соответствие кривой её конец.

Теорема 8.66. *Универсальное накрытие многообразия является многообразием той же размерности и отображение $\pi : \widetilde{N} \to N$ является накрытием. Комплексно-аналитическая структура также наследуется накрытием.*

Доказательство. Действительно, для точки $p' \in N$ можно рассмотреть координатную окрестность $V \subset N$, которая вместе с каждой $y \in V$ содержит и отрезок $[p', y]$. Тогда для каждой $\gamma \in \pi^{-1}(p')$ можно построить гомеоморфную V окрестность как

$$U_\gamma = \{\gamma \diamond [p', y] : y \in V\}.$$

Две такие окрестности не пересекаются, так как из гомотопности кривых $\gamma \diamond [p', y]$ и $\gamma' \diamond [p', y]$ следует гомотопность

$$\gamma \diamond [p', y] \diamond [y, p'] \sim \gamma' \diamond [p', y] \diamond [y, p'],$$

но легко доказать, что также имеет место гомотопность

$$\gamma \sim \gamma \diamond [p', y] \diamond [y, p'], \quad \gamma' \sim \gamma' \diamond [p', y] \diamond [y, p'],$$

так как кривая $[p'y] \diamond [y, p']$ легко стягивается в точку (проверьте самостоятельно). Построенные окрестности U_γ на самом деле дают гладкую (или даже комплексную) структуру на M, так как функции перехода между окрестностями такого вида те же, что и между исходными $V \subset N$; и π тогда даёт диффеоморфизмы $U_\gamma \to V$, которые при наличии комплексной структуры будут аналитическими. □

Теорема 8.67. *Универсальное накрытие $\widetilde{N}$ односвязно.*

Доказательство. Посмотрим, что такое замкнутая кривая в $\widetilde{N}$ с началом и концом в тождественной кривой $\gamma_0 \equiv p$ по определению. Если мы парамеризуем кривые отрезком $[0, 1]$, то это непрерывное отображение

$$\lambda : [0, 1] \times [0, 1] \to N,$$

такое что $\lambda(0, s) \equiv p$, $\lambda(t, 0) \equiv p$ и $\lambda(t, 1) \equiv p$. Тогда для $u \in [0, 1]$ ограничение

$$\lambda_u(t, s) = \lambda(ut, s)$$

тоже даёт петлю в $\widetilde{N}$, эта петля непрерывно зависит от u и при u равном 0 является тождественным отображением в p. Таким образом петля в $\widetilde{N}$ стянута в одну точку. □

Теорема 8.68. *Для накрытия $\pi : M \to N$, всякой кривой γ в N с началом p и данной $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ однозначно определено* поднятие *кривой γ в M как кривая $\widetilde{\gamma}$ в M, такая что её начало в $\widetilde{p}$ и $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$.*

Доказательство. Если кривая не выходит из небольшой окрестности $V \ni p$, взятой из определения накрытия, то существование и единственность накрытия очевидны. Произвольную кривую можно поднимать за несколько шагов, покрыв её (из компактности) конечным числом таких окрестностей. □

Задача 8.69. Докажите, что для накрытия $\pi : M \to N$ при связном N кратность накрытия над всеми точками N одна и та же.

[[Постройте биекцию между $\pi^{-1}(p)$ и $\pi^{-1}(p')$ с помощью поднятия какого-то пути γ из p в p'.]]

Теорема 8.70. *Если отображение связных многообразий $\pi : M \to N$ является накрытием и N односвязно, то это накрытие имеет кратность 1, то есть является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Зафиксируем $p \in N$ и возьмём некоторую $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(M)$. Поднятие кривых с началом в p в M и взятие их конца даёт отображение $\sigma : \widetilde{N} \to M$. Отображение σ само по себе является накрытием. Действительно, если $\tilde{q} \in M$ имеет окрестность U из определения накрытия и $V = \pi(U)$ является соответствующей окрестностью $\pi(\tilde{q}) = q$, то мы можем уменьшить V до того, чтобы она стала содержать вместе со всякой $y \in V$ и отрезок $[q, y]$. Тогда $\sigma^{-1}(V)$ состоит из объединения некоторого количества соответствующих окрестностей в $\widetilde{N}$.

В условиях теоремы $N = \widetilde{N}$, то есть σ является накрытием $N \to M$ и образ $\sigma(N)$ должен оказаться связной компонентой M. Так как M связно, то $\sigma(N) = M$, а так как по построению $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_N$, то π и σ взаимно обратны и являются диффеоморфизмами. □

Теорема 8.71. *Если отображение связных многообразий $\pi : M \to N$ является накрытием и M односвязно, то оно гомеоморфно универсальному накрытию $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Опять возьмём накрытие $\sigma : \widetilde{N} \to M$, построенное в предыдущем доказательстве. Так как M односвязно, то предыдущая теорема говорит о том, что σ является диффеоморфизмом. □

Для понимания дальнейшего материала от читателя будет требоваться знакомство с алгебраическим понятием «группа».

Определение 8.72. *Фундаментальной группой* $\pi_1(M)$ связного многообразия M с выделенной точкой p называется группа петель $\gamma \subset M$ с началом и концом в точке p, с точностью до гомотопии с фиксированными концами. Групповое произведение петель γ_1 и γ_2 определяется как их конкатенация $\gamma_1 \diamond \gamma_2$, единица группы определяется как постоянная петля, а групповое обратное — с помощью прохода той же петли в обратном порядке.

Можно проверить, что определения групповых операций согласованы с отношением гомотопности петель, то есть при деформации γ_1 и γ_2 из конкатенация $\gamma_1 \diamond \gamma_2$ тоже непрерывно деформируется, то же для обратного γ^{-1}.

Теорема 8.73. *Пусть M — связное многообразие с выделенной точкой p и $q \in M$ — ещё одна его точка. Прообразы $\pi^{-1}(q)$ точки q при универсальном накрытии $\pi : \widetilde{M} \to M$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\pi_1(M)$. Более того, $\pi_1(M)$ вполне разрывно действует на $\widetilde{M}$ диффеоморфизмами и M является фактором $\widetilde{M}$ по этому действию. Если M является областью в $\mathbb{C}$, то эти диффеоморфизмы аналитические.*

Напомним, что действие группы является свободным, если $gx \neq x$ при условии $g \neq e$ (e — единица группы). Иначе говоря, действие свободно, если всякая орбита $\{gx : g \in G\}$ этого действия находится (не канонически) во взаимно однозначном соответствии с G; также можно сказать, что всякий нетривиальный элемент группы действует без неподвижных точек.

В сформулированной теореме мы требуем ещё более сильное свойство, чем свободное действие, сформулируем соответствующее определение:

Определение 8.74. $G = \pi_1(M)$ действует на $\widetilde{M}$ *вполне разрывно*, если у всякой $\tilde{q} \in \widetilde{M}$ есть окрестность U, образы которой при действии G, $\{gU\}_{g \in G}$, попарно не пересекаются.

Набросок доказательства теоремы 8.73. Теорема является стандартным фактом алгебраической топологии и заинтересованный читатель может более глубоко изучить соответствующие понятия, например, по книге [11], мы же приводим краткое изложение.

Действие $\pi_1(M)$ на $\widetilde{M}$ определим так. Для представителя λ (петли с началом и концом в p) и представителя γ (кривой с началом в p) определим действие одного на другое как конкатенацию $\lambda\diamond\gamma$. Читатель может проверить, что это определение совместимо с отношением гомотопности в определениях $\pi_1(M)$ и $\widetilde{M}$.

Для двух кривых с одним и тем же концом γ_1 и γ_2 рассмотрим петлю $\lambda = \gamma_2\diamond\gamma_1^{-1}$. Можно заметить, что
$$\lambda\diamond\gamma_1 = \gamma_2\diamond\gamma_1^{-1}\diamond\gamma_1 \sim \gamma_2,$$
так как $\gamma_1^{-1}\diamond\gamma_1$ является стягиваемой петлёй. Следовательно, $\pi_1(M)$ действует транзитивно на множестве $\pi^{-1}(q)$.

Рассмотрим координатную окрестность $V \ni q$, такую что при $y \in V$ отрезок $[q, y]$ тоже лежит в V. Для всякого пути γ из p в q окрестность поднимается до окрестности γ в $\widetilde{M}$,
$$U(\gamma) = \{\gamma\diamond[q, y] : y \in V\}/\sim.$$
Можно заметить, что при замене γ на $\lambda\diamond\gamma$ с $\lambda \neq e \in \pi_1(M)$ мы получим другую окрестность $U(\lambda\diamond\gamma)$, не пересекающуюся с исходной, так как наличие пересечения означало бы, что
$$\lambda\diamond\gamma\diamond[q, y] \sim \gamma\diamond[q, y] \Rightarrow \lambda\diamond\gamma \sim \gamma \Rightarrow \lambda \sim e.$$
Приведённые построения означают вполне разрывное действие $\pi_1(M)$ на $\widetilde{M}$ и тот факт, что M является фактормножеством $\widetilde{M}$ по отношению эквивалентности, заданному действием группы $\pi_1(M)$ как
$$\tilde{q} \sim g\tilde{q}, \quad \tilde{q} \in \widetilde{M}, g \in \pi_1(M).$$
Что касается аналитичности действия G при наличии комплексной структуры у M, то отождествления $\pi : U(\gamma) \to V$ задают карты на U с аналитическими функциями перехода между картами, а действие $\pi_1(M)$ этим карты просто переставляет. □

Изложенные выше факты позволяют свести нахождение фундаментальной группы многообразия к нахождению его односвязного накрытия. В следующих задачах читателю предлагается это проделать.

Задача 8.75. Докажите, что сфера $\mathbb{S}^n$ односвязна при $n \geqslant 2$. Что происходит при $n = 1$?

[[Приблизьте произвольную петлю гладкой, или даже ломаной, а потом стяните её.]]

Задача 8.76. Найдите фундаментальную группу проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ при $n \geqslant 2$.

[[Вспомните его определение и накройте его сферой.]]

Задача 8.77. Найдите фундаментальную группу тора $T^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n}$.

[[Придумайте универсальное накрытие для тора.]]

Задача 8.78. * Докажите, что группа собственных вращений трёхмерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(3)$ имеет фундаментальную группу $\pi_1(\mathrm{SO}(3))$ из двух элементов.

[[Рассмотрите группу единичных кватернионов
$$\mathrm{Sp}(1) = \{a + bi + cj + dk : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\},$$
умножение в которой определяется с помощью продолженных по линейности формул
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j.$$
Заметьте, что $\mathrm{Sp}(1)$ односвязна и для $q \in \mathrm{Sp}(1)$ отображение $v \mapsto qvq^{-1}$ является собственным ортогональным вращением пространства мнимых кватернионов $\{xi + yj + zk\}$.]]

Задача 8.79. * Докажите, что группа собственных вращений четырёхмерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(4)$ тоже имеет фундаментальную группу $\pi_1(\mathrm{SO}(4))$ из двух элементов.

[[Определите действие $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$ на всех кватернионах как $v \mapsto q_1 v q_2^{-1}$ и докажите, что так получаются все собственные четырёхмерные вращения. Определите неоднозначность такого представления вращений.]]

Задача 8.80. ** Чтобы универсальное накрытие $\widetilde{M}$ связного гладкого многообразия M можно было считать абстрактным многообразием по определению, необходимо доказать, что $\pi_1(M)$ счётна. Сделайте это.

[[Покройте M счётным числом координатных карт, каждая из которых диффеоморфна шару и пересечения каждой пары которых тоже диффеоморфно шару. Далее в каждом классе гомотопии петель найдите представителя, который описывается в терминах порядка прохождения этих окрестностей и пересечений между ними.]]

8.13. **Общая теорема Римана и теорема Пикара.** В этом разделе мы схематично обсудим некоторые методы, которые имеют развитие в теории комплексных кривых (многообразий, локально диффеоморфных $\mathbb{C}$ с аналитическими функциями перехода между картами) и не только. Мы возвращаемся к работе с областью $U \subseteq \mathbb{C}$ и рассматриваем её универсальное накрытие. Про универсальное накрытие $\widetilde{U}$ известно, что оно является односвязным одномерным (в комплексном смысле) комплексным многообразием. Общая теорема Римана об отображении классифицирует такие многообразия:

Теорема 8.81 (Общая теорема Римана)**.** *Односвязные одномерные комплексные многообразия аналитически диффеоморфны одному из трёх вариантов:* $\mathbb{C}$, S *и* D.

Доказательство общей теоремы Римана находится за пределами наших возможностей, так как оно довольно длинное и использует разнообразные свойства оператора Лапласа и гармонических функций. Трудность заключается в том, что рассматриваемое в ней многообразие не лежит в $\mathbb{C}$ и строить на нём аналитические функции явно не получается. Один из вариантов доказательства этой теоремы содержится в [10, глава 10].

Принимая общую теорему Римана без доказательства, мы можем в каждом конкретном случае понять, к какому из трёх типов относится универсальное накрытие нашей области. Для этого надо описать группу $\pi_1(U)$ и посмотреть, может ли эта группа вполне разрывно действовать на S и $\mathbb{C}$, если нет, то тогда для универсального накрытия останется только вариант D.

Если мы выбросили из $\mathbb{C}$ одну точку, получив $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то универсальное накрытие задаётся экспонентой $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Теорема 8.73 тогда показывает, что $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$, и образующая $\pi_1(U)$ — это любая окружность с центром в нуле.

Если мы выбросили две точки, $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, то ситуация становится интереснее. Ясно, что $\pi_1(U)$ содержит два экземпляра $\mathbb{Z}$, C' и C'', соответствующих обходам вокруг нуля и вокруг единицы. Оказывается, $\pi_1(U)$ является *свободным произведением*, $\pi_1(U) = C' * C''$, то есть группой, состоящей из всех строк (пустая строка даёт единичный элемент)

$$a_1 b_1 \dots a_n b_n,\ a_1 b_1 \dots b_{n-1} a_n,\ b_1 a_2 \dots a_n b_n,\ b_1 a_2 \dots a_n, \quad a_i \in C' \setminus \{e\}, b_i \in C'' \setminus \{e\}, \tag{8.1}$$

которые перемножаются так: сначала берётся конкатенация строк, потом делаются замены стоящих рядом элементов одной и той же группы на их групповое произведение $aa' \mapsto (aa')$ или $bb' \mapsto (bb')$ и удаления получающихся единичных элементов, пока это возможно. Более подробные сведения о свободных произведениях и свободных группах читатель может найти в учебниках по алгебре или алгебраической топологии, или может поразмышлять самостоятельно в рамках следующей задачи:

Задача 8.82. * Докажите, что $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ можно непрерывно деформировать в «восьмёрку» E, которая является парой окружностей, склеенных по одной точке. Фундаментальная группа, являющаяся гомотопическим инвариантом, при этом не изменится, проверьте явно, что $\pi_1(E)$ описывается так, как мы описали свободную группу $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

[[Для описания $\pi_1(E)$ посмотрите, в каком порядке петля идёт по двум окружностям восьмёрки E, получив запись в виде строки типа (8.1). Проверьте, как может меняться этот порядок при гомотопии петли, получив из этого описанные выше преобразования строк и обратные к ним.]]

Можно резюмировать, что $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0,1\})$ является *свободной группой на двух элементах* F_2. На самом деле нам от группы $\pi_1(U) = F_2$ потребуется только отсутствие коммутативности умножения, которое проверить несколько проще, чем свободность этой группы.

Теорема 8.83. *Некоммутативная группа G не может вполне разрывно и конформно действовать на $\mathbb{C}$; и следовательно универсальное накрытие $\widetilde{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}$ аналитически диффеоморфно D.*

Доказательство. Заметим, что для $U = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ универсальное накрытие $\widetilde{U}$ содержит бесконечное замкнутое множество $\pi^{-1}(z)$, в котором в силу вполне разрывности каждая точка покрыта своей индивидуальной окрестностью и из этого покрытия очевидно нельзя оставить конечное подпокрытие. Следовательно $\pi^{-1}(z)$ не компактно и всё $\widetilde{U}$ тоже. Это исключает случай S в общей теореме Римана и остаётся исключить случай $\mathbb{C}$.

Используем классификацию аналитических диффеоморфизмов (конформных преобразований) $\mathbb{C}$ как $z \mapsto az + b$. Можно заметить, что те из них, которые не имеют неподвижных точек, являются сдвигами. Так как вполне разрывное действие исключает неподвижные точки, то G должна действовать сдвигами, но всякие два сдвига коммутируют между собой. $\square$

Теорема 8.84 (Теорема Пикара)**.** *Непостоянная аналитическая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является сюръекцией кроме может быть одной точки.*

Доказательство. Если f не принимает какие-то два значения, то взяв её композицию с линейной функцией мы добьёмся того, что эти значения — 0 и 1, и

$$f : \mathbb{C} \to U = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}.$$

Рассмотрев для всякой $z \in \mathbb{C}$ отрезок $[0,z]$, мы получим для неё элемент $f([0,z]) \in \widetilde{U}$, то есть отображение $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \widetilde{U}$, такое что $f = \pi \circ \tilde{f}$. Отображение $\tilde{f}$ тоже аналитическое, а так как существует аналитический диффеоморфизм $u : \widetilde{U} \to D$, то мы получаем аналитическое отображение $u \circ \tilde{f} : \mathbb{C} \to D$.

Но ограниченная и определённая на всём $\mathbb{C}$ аналитическая функция $u \circ \tilde{f}$ должна быть константой, следовательно $\tilde{f}$ константа и сама f тоже константа. $\square$

Существует другой подход к доказательству теорему Пикара, с помощью сравнительно явного построения функции $\pi : D \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, которая является является универсальным накрытием. Рассуждения с использованием общей теоремы Римана показывают, что такая функция должна быть инвариантна относительно некоторого вполне разрывного действия свободной группы F_2 на D. Конформно заменив D на верхнюю полуплоскость H, мы можем отождествить группу всех конформных преобразований H с

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Задача 8.85. * Докажите, что $z \mapsto z+2$ и $z \mapsto \frac{z}{2z+1}$ порождают свободную группу из двух элементов.

[[Для этого достаточно описать какую-нибудь орбиту действия порождённой этими элементами группы.]]

Далее возникает вопрос о построении *мероморфных функций* (аналитических кроме дискретного множества точек, в котором они имеют полюса), инвариантных относительно действия F_2 на H. На самом деле обычно рассматривают группу

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc \neq 0 \right\}.$$

и её подгруппы и изучают мероморфные функции на H, инвариантные относительно её действия или действия её подгрупп, они называются *модулярные функции*. При этом возникают интересные идеи и методы, которые уже не влезают в этот раздел, но читатель может прочитать про это и многое другое, например, в книге [9]. Мы оставляем пару задач для развития интуиции по рассмотренному в этом разделе кругу вопросов.

Задача 8.86. * Докажите, что группа $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ не может вполне разрывно конформно действовать на D или H.

[[Классифицируйте конформные преобразования $H \to H$, которые не имеют неподвижных точек, потом опишите пары коммутирующих преобразований.]]

Задача 8.87. * Докажите, что всякая комплексная структура на торе T^2 (декартовом произведении двух окружностей) происходит из комплексной структуры $\mathbb{C}$ после взятия фактора по некоторой решётке $L \subset \mathbb{C}$, то есть дискретной подгруппы, изоморфной $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

[[Заметьте, что $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и выведите утверждение из общей теоремы Римана об отображении и предыдущей задачи.]]

Задача 8.88. ** Докажите, что группа $\mathrm{SO}(3)$ содержит свободную группу F_2.

[[Можно строить такую F_2 вручную, можно использовать рациональные кватернионы, можно заметить, что комплексификации $\mathrm{SO}(3)$ и $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ совпадают и поэтому в обеих группах нет нетривиальных соотношений на пару элементов.]]

Учебники для более глубокого изучения затронутых в этом тексте тем

[1] T. Tao. *An Introduction to Measure Theory.* Graduate Studies in Mathematics 126, 2011.
[2] С. Ленг. *Алгебра.* Мир, 1968.
[3] Ш. Стернберг. *Лекции по дифференциальной геометрии.* Мир, 1970.
[4] Ф. Уорнер. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли.* Мир, 1987.
[5] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.* Физматлит, 2004.
[6] S. Sternberg. *Curvature in Mathematics and Physics.* Dover Publications, 2012.
[7] Г. Х. Харди, В. В. Рогозинский. *Ряды Фурье.* Москва, 1959.
[8] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Физматлит, 2006.
[9] Г. Клеменс. *Мозаика теории комплексных кривых.* М.: Мир, 1984.
[10] S. Donaldson. *Riemann Surfaces.* Oxford University Press, 2011.
[11] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии.* М.: Наука, 1989.

Email address: `r_n_karasev@mail.ru`