МФТИ

А. А. Пухов

ЛЕКЦИИ ПО КОЛЕБАНИЯМ И ВОЛНАМ

Часть 2. ВОЛНЫ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

А. А. Пухов

ЛЕКЦИИ ПО КОЛЕБАНИЯМ И ВОЛНАМ

Часть 2. ВОЛНЫ

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
2019

УДК 532+539(075)
ББК 22.33я73
П88

Рецензенты:

Член-корреспондент РАН, профессор *Л. А. Максимов*

Доктор физико-математических наук, профессор *А. А. Коньков*

Пухов, Александр Александрович

П88 **Лекции по колебаниям и волнам** : учеб. пособие. В двух частях. **Ч. 2. Волны** / А. А. Пухов. – Москва : МФТИ, 2019. – 206 с.

ISBN 978-5-7417-0698-5 (Ч. 2)

Учебное пособие представляет собой курс лекций по теории колебаний и волн, читаемый доктором физико-математических наук, профессором А. А. Пуховым, в Физтех-школе фундаментальной и прикладной физики МФТИ. Вторая часть курса посвящена систематическому изложению основ теории волн и ее применению к разнообразным задачам физики, химии и биологии. Существенной особенностью курса является наличие большого числа задач и упражнений, тесно связанных с основным изложением.

Предназначено для студентов старших курсов, изучающих курс теории колебаний и волн, обучающихся по направлению подготовки «Прикладные математика и физика», а также для аспирантов и преподавателей МФТИ.

УДК 532+539(075)
ББК 22.33я73

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского физико-технического института (*национального исследовательского университета*)

ISBN 978-5-7417-0698-5 (Ч. 2)
ISBN 978-5-7417-0696-1

Оглавление

Список обозначений

a_m – максимальная амплитуда вынужденных колебаний
$a(t)$ – нормальное колебание
$a(\omega)$ – амплитуда вынужденных колебаний, поглощение
$b(\omega)$ – дисперсия
C_y – коэффициент подъемной силы
c – скорость звука, света, фазовая скорость волны
D – коэффициент диффузии, размерность задачи
E – модуль Юнга, энергия взрыва
$f(t)$ – внешняя вынуждающая сила
G – утечка
g – гравитационная постоянная
H – постоянная Хаббла
I – интенсивность звука, момент инерции
J – матрица Якоби
$K(x)$ – полный эллиптический интеграл первого рода
k – волновой вектор, волновое число, теплопроводность
L – индуктивность
$\mathcal{L}$ – плотность лагранжиана
M – число Маха
$n(\omega)$ – коэффициент преломления
p_0 – давление воздуха
p' – вариация давления
p_m – звуковое давление
Q – добротность осциллятора, $Q = \omega_1 / 2\gamma$
q – заряд, энергия возмущения
r – радиус инерции поперечного сечения
T – период колебаний
$U(x)$ – потенциальная энергия
$u(x,t)$ – смещение частиц среды в эйлеровых переменных
v – скорость среды
v_0 – начальная скорость
$v_{\text{г}}$ – групповая скорость
$v_{\text{ф}}$ – фазовая скорость

w – удельная энтальпия
$X(\omega)$ – фурье-преобразование сигнала $x(t)$
$x(t)$ – координата (смещение) осциллятора
x_0 – начальная координата
Γ – громкость звука
β – параметр нелинейности уравнения Дуффинга
γ – скорость диссипации, показатель адиабаты
δ – ширина фронта ударной волны
δT – вариация периода колебаний
$\delta U(x)$ – возмущение потенциальной энергии
$\mathcal{E}$ – электрическое поле
ε – параметр акустической нелинейности
ζ – вторая вязкость
η – динамическая вязкость
κ – коэффициент теплопроводности, жесткость пружины
κ_s – адиабатический модуль объемной упругости
λ – длина волны, инкремент нарастания возмущения
ν – частота циклическая, частота изменения параметра
ξ – автомодельная переменная, $\xi = x - vt$
$\xi(x,t)$ – смещение частиц среды в лагранжевых переменных
ρ_0 – плотность воздуха
ρ' – вариация плотности
ρ – плотность среды
σ – коэффициент поверхностного натяжения
τ – диффузионное время
φ_m – максимальное отклонение маятника
φ, ψ – сдвиг фаз вынужденных колебаний
χ – температуропроводность
ω – частота вынужденных колебаний, частота круговая
ω_0 – собственная частота осциллятора
ω_1 – частота собственных затухающих колебаний
ω_2 – частота максимума резонанса
$\omega(k)$ – дисперсионное соотношение для волны

Предисловие

То, что вообще может быть
сказано, должно быть сказано ясно;
о том же, что сказать невоз-
можно, следует молчать.
Людвиг Витгенштейн.
Логико-философский трактат

Данное пособие представляет собой вторую часть «Лекций по колебаниям и волнам», посвященную волнам. Смысл данного курса лекций прежде всего в компактном и самосогласованном изложении физики волновых явлений.

Лекции предназначены студентам младших курсов. Поэтому возникает потребность в небольшом и понятном для новичка руководстве по волнам, которое позволило бы ему сориентироваться в структуре и содержании этого важного раздела физики, а также в огромной литературе, посвященной предмету. Тем более что для этого младшекурсник располагает совсем небольшими вычислительными навыками и весьма ограниченным временем.

Для нормального усвоения материала нужен регулярный цикл занятий. Лекции и семинары раз в неделю, общение с живым преподавателем и задачник повышенного типа. Необходимо делать и сдавать много заданий и письменных работ, проводить коллоквиумы, и тогда все будет нормально. Для осуществления этой программы и нужен предлагаемый курс лекций.

Автор приложил значительные усилия к тому, чтобы лекции были написаны простым и понятным, а не «мистическим языком, создающим тягостное ощущение присутствия некоего супермена». Таким образом, суммируя идеи понятности и первого ознакомления с предметом, мы приходим к адресации этих лекций. Эти лекции предназначены в основном для студентов, собирающихся стать экспериментаторами, и тех теоретиков, которые не боятся, что их застанут врасплох за чтением чего-то легкого.

Автор старался познакомить с фундаментальными идеями теории волн студента Физтеха с минимальными познаниями в математической технике. Фактически его оснастка может ограничиваться линейной алгеброй и началами анализа. Вместо обычного для учебников стремления к наибольшей общности автор старался придерживаться обратного. Каждая идея должна быть сначала ясно понята в простейшей ситуации, и только потом развитый метод можно обобщать и переносить на более сложные случаи. Поэтому именно примеры и идеи, а не общие теоремы и доказательства, составляют основу этих лекций.

Особое внимание в пособии уделено взаимосвязи предмета с другими областями физики: квантовой механикой, электродинамикой и гидродинамикой. Поэтому автор рассчитывает, что не только студенту, но и профессионалу другой специальности будет интересно познакомиться с основными идеями теории волн.

Общефизический кругозор профессионала формируется курсом общей физики, где его учат «задачам». Курс же теоретической физики призван учить «методам». Следуя этой установке по существу, мы тем не менее будем формулировать качественные результаты и иллюстрировать важные моменты теории при помощи «задач». В этом смысле язык изложения промежуточный между общей и теоретической физикой. При отборе материала пришлось достичь некоторого компромисса. С одной стороны, необходимо отразить наиболее важные моменты из широчайшего круга теоретических аспектов физики волн. С другой стороны, следует ограничиться подбором материала в рамках отведенного объема учебного курса. Автор приложил усилия к тому, чтобы подбор тем был релевантным и репрезентативным.

Таким образом, курс предназначен для новичка, впервые обозревающего физику волн «с высоты птичьего полета». В каждой лекции после соответствующего материала приводятся контрольные вопросы для самопроверки. Кроме того, приводятся задачи, иллюстрирующие изложенный материал и предназначенные для домашних заданий и семестровых письменных работ. Некоторые из них представляют собой исследовательские задачи. В конце текста приведен список литературы, необходимый для всестороннего изучения предмета. Многие из процитированных в нем книг были использованы при подготовке этих лекций.

Автор признателен коллегам и студентам МФТИ, сделавшим множество ценных замечаний по поводу электронного варианта этих лекций. Особенно хотелось бы отметить Е. С. Андрианова, А. С. Антонова, А. Л. Барабанова, Ю. М. Белоусова, С. Н. Бурмистрова, И. В. Быкова, В. Г. Веселаго, А. П. Виноградова, И. В. Доронина, А. В. Дорофеенко, А. А. Зябловского, С. С. Иванова, В. В. Киселева, В. Н. Киселя, И. П. Коваль, А. А. Конькова, В. П. Крайнова, Ю. Е. Лозовика, А. М. Мерзликина, Н. Е. Нефедкина, М. И. Пергамента, М. В. Седову, В. Р. Соловьева, М. В. Суслова, А. И. Тернова, О. И. Толстихина, В. Ю. Шишкова, И. О. Щеголева. Автор благодарен им за полезные обсуждения структуры курса и корпуса иллюстрирующих его задач. Кроме того, автор признателен А. Г. Леонову за поддержку этого проекта и предложение прочесть лекции, приведшие к появлению данного учебного пособия.

Лекция 0. Синопсис: что такое волны?

Философия – это злоупотребление специально разработанной терминологией.
В. Дубислав. Современная философия математики. 1932

1. Что такое волны? 2. Общий волновой язык и волновая интуиция. 3. Чем волны отличаются от колебаний? 4. Волны линейные и нелинейные. 5. Математическое описание волновых процессов. 6. Теория волн и динамика распределенных систем. 7. Теория волн и синергетика.

1. Что такое волны?

С волнами, так же как и с колебаниями, мы сталкиваемся и в повседневной жизни, и при изучении физических явлений. Трудно определить, что следует называть волновым процессом вообще. Попытка описать явление типом уравнения или перечислением физических свойств приводит к неудаче, так как всегда удается найти пример, не укладывающийся в схему. При изучении широкого круга волновых явлений разумно опереться на интуитивные представления и ограничиться общими утверждениями. В окружающем нас мире происходит множество явлений, проявляющих черты волновых процессов. Представление о них имеется у каждого, кто наблюдал волны, бегущие на поверхности воды. Несмотря на многообразие ситуаций и различие в способах описания, можно выделить общие черты протекания волновых процессов различной физической природы. Изучение этих общих закономерностей и составляет предмет теории волн.

Волны обычно служат наиболее быстрым механизмом переноса энергии, позволяющим осуществить в системе переход к равновесному состоянию. При этом не происходит существенного перемещения вещества, сопровождающего распространение волны. Волновой процесс − одна из важнейших форм движения материи, в той или иной мере волновые движения присущи всем физическим объектам. Эксперименты по дифракции и рассеянию микрочастиц показали, что корпускулярно-волновой дуализм есть фундаментальное свойство материи и состояния квантовых систем необходимо описывать волновыми функциями.

Волной называется процесс передачи возбуждения среды от одной точки к другой. Иначе говоря, волна – это распространение колебаний в пространстве или в среде. Например, если в какой–либо точке упругой среды возбудить колебания, то они будут передаваться в другие места. Эта передача возбуждений возникает потому, что близкие участки среды связаны друг с другом упруго. При этом колебания, возбужденные в одном месте, распространяются в пространстве с определенной скоростью, которая называется *скоростью звука*. Для такого распространения необходимы упругость и инертность среды. Упругость необходима для передачи локального колебания в соседние точки среды. Инертность приводит к запаздыванию при перемещении частиц среды в соседние точки. В противном случае передача колебаний от одной частицы к другой во всей среде происходила бы мгновенно. Поскольку все среды являются деформируемыми и обладают инерцией, то во всех средах существуют механические волны.

Механизмы распространения возмущений отличаются друг от друга, то есть природа распространения волны может быть различной. Связь между участками в среде обусловлена силами упругости, которые возникают из-за деформаций среды. Упругие волны в жидкостях и газах существуют вследствие того, что коллективное движение частиц среды создает чередующиеся сжатия и разрежения, которые вызывают движение в следующем слое жидкости или газа. Возмущение передается от слоя к слою в направлении, вдоль которого происходят колебания частиц, т.е. волны в жидкостях и газах являются продольными. Твердые тела обладают сдвиговой упругостью, и в них могут распространяться поперечные волны.

Иная природа у распространения электромагнитных волн, передача которых происходит из-за колебаний электрического и магнитного полей. Электромагнитная волна распространяется вследствие того, что появляющееся в какой-либо точке пространства переменное электрическое поле возбуждает в соседних точках магнитное поле и наоборот. Поэтому электромагнитные волны, в отличие от упругих, могут распространяться в пустоте. Скорость распространения таких волн одинакова и для рентгена, и для радиоволн и равна скорости света.

2. Общий волновой язык и волновая интуиция

Различие физических механизмов волнового процесса приводит к различным способам их описания, основанным на отличающихся друг от друга уравнениях. Однако для понимания наиболее фундаментальных волновых явлений дисперсии, диссипации, нелинейности и т.д. часто нет необходимости анализировать полученные из первых принципов сложные системы уравнений. Простые эффекты, как правило, описываются простыми и универсальными математическими моделями. В лекциях мы приведем иллюстративный и простой вывод этих базовых уравнений для важнейших с точки зрения приложений типов волн. Это волновое уравнение, уравнение Гельмгольца, уравнение Шредингера, уравнение Хопфа, уравнение Бюргерса и т.д. Их рассмотрение позволяет выработать набор ключевых понятий, развить волновую интуицию. Для этого главное внимание будет уделено анализу вытекающих из этих уравнений эффектов.

В системах самой различной природы (физической, химической, биологической, социологической, экономической и т.д.) распространяются гармонические и негармонические волны. Почему волны столь фундаментальны? Практически везде встречаются и используются такие понятия, как фазовая и групповая скорости, волновой пакет, закон дисперсии, интерференция, дифракция, коэффициенты отражения и прохождения, рассеяние и т.д. Единство волновых процессов самой различной природы основано на их общих механизмах. Их свойства не зависят от деталей устройства системы, связанных с проявлениями ее природы. Это формирует общий волновой язык со своим характерным набором образов и понятий и развитой для анализа своеобразной волновой интуицией. При этом поведение привычной, часто встречающейся волновой системы (например, гидродинамической) помогает понять поведение системы, не столь комфортной с точки зрения наглядности (квантово-механической).

Теорию волн можно рассматривать как своего рода общий “язык”, который будет понятен и полезен представителям различных конкретных наук. Существование такого “языка” опирается на присущую различным областям знания “волновую общность”. Наличие общего “языка” открывает замечательные перспективы для взаимного обогащения путем обмена представлениями, сформированными в различных областях. При этом возникает возможность “волновой взаимопомощи” различных дисциплин. Обнаруживая волновые закономерности в системах различной природы и представляя их в терминах общего волнового “языка”, мы не просто выявляем свойства исследуемых систем, но и обогащаем конкретным содержанием теорию волн в целом.

Таким образом, теория волн выступает как научная дисциплина, объединяющая различные разделы физики. Ее содержание формируется материалом из разных областей знания, а ее методы находят приложения в этих областях. Аналогичную природу имеет и математика. Но математика в гораздо большей степени подчиняется своей собственной внутренней логике развития, нежели связям с приложениями и контактами с естествознанием. Теория волн отличается от математики тем, что необходимая для нее интуиция базируется не на математических моделях, а на физическом понимании сходства волновых явлений. Прикладная математика исследует уже построенные модели явления. Задача теории волн – конструирование модели, основанное на правильной идеализации волновой системы. Выбор такой идеализации часто не тривиален и требует глубокого понимания физической сущности явления.

Цель этих лекций – показать единство волновых процессов совершенно различной природы, интересуясь свойствами этих процессов, а не деталями, связанными с физической, биологической, химической и т.д. природой системы. Общие свойства волновых процессов устанавливаются на основе моделей, главная из которых связана с линейным волновым уравнением.

3. Чем волны отличаются от колебаний

В окружающем нас мире происходит множество явлений, проявляющих как колебательные, так и волновые черты. Несмотря на различие в способах описания, можно выделить много общего в протекании как колебаний, так и волн в системах различной физической природы. Эти общие закономерности и составляют предмет теории колебаний и волн. Но чем отличаются колебания и волны?

Колебаниями называют ограниченные повторяющиеся движения в окрестности некоторого среднего положения устойчивого равновесия. О колебательном процессе можно говорить, когда состояние системы описывается конечным набором изменяющихся по времени параметров. Поэтому колебательные процессы описываются одним или несколькими обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Волна – это распространение колебаний в пространстве, происходящее с конечной скоростью. *Волновой процесс* – более сложное движение распределенных систем, состояние которых зависит уже не только от времени, но и от пространственных переменных. Поэтому такие процессы описываются уравнениями в частных производных.

Критерием перехода от колебательного движения к волновому может служить условие квазистационарности. Если характерные размеры системы малы $L < cT$ (c – скорость распространения возмущения, T – время его заметного изменения), о процессе можно говорить как о колебательном в системе с сосредоточенными параметрами. В случае протяженной системы $L > cT$ процесс нужно считать волновым, а систему – распределенной.

Условие квазистационарности можно также назвать критерием запаздывания. Как один случай переходит в другой? Как колебания превращаются в волны? Наглядным образом этого превращения является цепочка взаимодействующих осцилляторов. Осциллятор, два осциллятора, цепочка осцилляторов, континуальная среда. При таком переходе уравнения Ньютона для системы с конечным числом переменных наглядным образом превращаются в волновое уравнение для среды.

4. Волны линейные и нелинейные

Широкий класс волновых процессов в однородных средах различной природы описывается линейным волновым уравнением. Оно описывает распространение незатухающих волн с постоянной скоростью c, удовлетворяющих принципу суперпозиции. Справедливость этого уравнения опирается на три основных предположения. Во-первых, считается, что пренебрежимо мала диссипация, что выражается в инвариантности волнового уравнения относительно обращения времени $t \to -t$. Во-вторых, полагаются малыми амплитуды волн, что позволяет пренебречь нелинейными по амплитуде поправками к волновому уравнению. Наконец, в-третьих, пренебрегается дисперсией, т.е. зависимостью скорости распространения от длины волны. Обычно это соответствует пределу больших длин волн.

Однако многие волны не удовлетворяют принципу суперпозиции. Это нелинейные волны, для описания которых требуются более сложные математические средства. Излагая современную теорию волн, необходимо особо остановиться на таких нелинейных волновых процессах. Это новый круг вопросов, в последнее время нашедших ряд важных практических применений. Нелинейные волны интенсивно изучаются во всех областях физики: электродинамике, физике плазмы, оптике, радиофизике, акустике, гидродинамике и т.д.

Универсальность волнового уравнения связана с тем, что его вид не зависит от свойств конкретной среды. Эти свойства отражаются только в величине скорости звука c в ней. Если отказаться от пренебрежения диссипацией, нелинейностью и дисперсией, то эта общность исчезнет. Каждая среда будет описываться своим уравнением. Однако если не пренебрегать полностью указанными эффектами, но считать их малыми, то снова можно получить универсальные уравнения, подходящие для широкого класса сред. Эти уравнения описывают ударные волны (уравнение Хопфа), солитоны (уравнения Кортевега–де Вриза и синус-Гордона) и автоволны (уравнение «реакция–диффузия»).

Хотя описанные выше поправки малы, они приводят к новым качественным эффектам, которые могут существенно изменить решение. Действительно, даже малая диссипация энергии приведет за достаточно большое время к затуханию волны. Дисперсия приводит к расплыванию волнового пакета, что также может исказить решение до неузнаваемости. Что касается нелинейных эффектов, то они приводят к укручению фронтов в решении. Поэтому универсальные уравнения могут правильно уловить большие эффекты малых поправок.

Такими важными эффектами являются возникновение ударных волн, солитонов и автоволн. Ударные волны в нелинейных гидродинамических средах отличаются как от линейных волн, так и от солитонов. Если среда описывается линейными уравнениями, то для распространяющихся в ней волн выполняется принцип суперпозиции: при встрече двух волн наблюдается простое наложение их амплитуд и связанные с этим явления интерференции. Для нелинейных сред принцип суперпозиции всегда нарушен, волны сильно взаимодействуют между собой.

Характер такого взаимодействия, однако, существенно отличается для солитонов и ударных волн. Солитоны возникают в консервативных нелинейных средах без затухания и подвода энергии от внешних источников. Солитон способен распространяться без изменения формы и без потерь энергии. При столкновении двух солитонов они восстанавливают свою форму и продолжают двигаться с теми же скоростями и в тех же направлениях. В отличие от этого при столкновении двух ударных волн в гидродинамической среде происходит их взаимная аннигиляция.

Нелинейные автоволны распространяются с постоянной скоростью без изменения формы в различных физических, биологических и химических системах. Автоволны возникают в большинстве нелинейных неравновесных систем, описываемых нелинейным уравнением теплопроводности. Автоволны отличаются как от линейных волн, так и от солитонов. Характер сильного взаимодействия нелинейных волн между собой различен для солитонов и автоволн.

При столкновении двух солитонов принцип суперпозиции не выполняется. Способность сохранять свою структуру после нелинейного взаимодействия с себе подобными означает, что солитоны в определённом смысле ведут себя как частицы. В отличие от этого при столкновении двух автоволн в возбужденной неравновесной среде происходит их полное взаимное погашение (аннигиляция). Аннигиляцией при столкновениях автоволн объясняются разнообразные эффекты синхронизации в возбудимых средах.

В солитоне эффекты дисперсии сбалансированы нелинейными эффектами. Эффекты дисперсии заключаются в распределении энергии солитона, а нелинейные эффекты – в связывании этих двух эффектов в единый процесс. При этом дисперсия растаскивает, а нелинейность укручает фронт волны. Таким образом, солитон представляет собой аналог материальной частицы, в которой поддерживается баланс между дисперсией и нелинейностью. Подобного же рода баланс между нелинейностью и диссипацией поддерживает форму движущихся ударных волн. А баланс между диссипацией и выделением энергии не дает расплываться движущимся автоволнам.

5. Математическое описание волновых процессов

О колебательном процессе можно говорить, когда состояние системы можно описать конечным набором параметров, изменяющихся во времени. Поэтому колебательные процессы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. *Волна* − это распространение колебаний в пространстве, происходящее с конечной скоростью. Волновой процесс требует более сложной модели движения распределенных систем, состояние которых зависит уже не только от времени, но и от пространственных переменных. Поэтому такие процессы описываются уравнениями в частных производных. Критерий перехода от колебательного движения к волновому мы сформулировали выше.

Итак, в качестве математической модели при описании волн необходимо использовать уравнение в частных производных, поскольку возбуждение среды зависит как от времени, так и от расстояния до источника. Простейшее одномерное волновое уравнение имеет вид $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, где c – постоянная скорость волны. Роль u может играть плотность воздуха, напряженность электрического или магнитного поля, смещение струны и т.д. Общее решение волнового уравнения $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, где функции f и g находятся из начальных условий, получил еще Даламбер. Будучи линейным, волновое уравнение удовлетворяет принципу суперпозиции. В частности, скорость волн не зависит от их амплитуды, волна может распространяться без изменения формы. Важным частным решением волнового уравнения является монохроматическая волна $u(x,t) \propto \exp(ikx - i\omega t)$, для которой закон дисперсии имеет вид $\omega = ck$. Основными инструментами исследования линейных волн являются принцип суперпозиции и принцип Гюйгенса. За пределами этих двух свойств линейных волн находятся два важных волновых явления. Дисперсия, когда из-за нелинейной зависимости ω от k фазовая скорость ω / k отличается от групповой $\partial\omega / \partial k$ и волновой пакет раскрывается. И нелинейность, когда скорость распространения волны $c(u)$ зависит от ее амплитуды u, что приводит к опрокидыванию фронта волны.

Несмотря на различие физических механизмов, реализующих волновой процесс, способы описания нелинейности, дисперсии и диссипации можно проанализировать исходя из простых и поэтому универсальных математических уравнений. Это уравнение Хопфа $u_t + uu_x = 0$ для ударных волн, уравнения Кортевега–де Вриза $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ и синус-

Гордона $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$ для солитонов и уравнение «реакции–диффузии» $u_t = u_{xx} + f(u)$ для автоволн.

Нелинейные эффекты играют особую роль в современной теории волн. Они приводят к возникновению таких важных нелинейных явлений, как ударные волны, солитоны и автоволны. Их свойства в последнее время нашли ряд важных практических применений. Поэтому такую важную роль в теории волн играет исследование описанных выше универсальных базовых нелинейных уравнений.

6. Теория волн и динамика распределенных систем

Переходя от теории колебаний к теории волн, мы включаем в рассмотрение наряду с временными еще и пространственные зависимости динамических переменных. В этом случае говорят о распределенных системах, в отличие от сосредоточенных или конечномерных колебательных систем. Примеры распределенных систем доставляют задачи гидро- и газодинамики, когда мгновенное состояние системы задается непрерывным распределением скорости и плотности в пространстве. Сводить динамику такого рода систем к колебаниям ограниченного числа переменных допустимо лишь в очень грубом приближении. Распространяющийся в пространстве или среде колебательный процесс есть не что иное, как волна. Поэтому, обращаясь к рассмотрению колебаний в распределенных системах, мы приходим к теории волн. Переход к анализу распределенных систем сопровождается радикальным усложнением математических задач, с которыми приходится иметь дело. Однако методологическая основа теории колебаний и волн, подразумевающая единый язык описания систем разной физической природы, остается в силе.

Одна из фундаментальных проблем, имеющая теоретическое и прикладное значение, состоит в объяснении и описании пространственно-временного хаоса в распределенных системах различной природы. Обобщение представлений об автоколебаниях на распределенные системы привело к концепции автоволн – самоподдерживающихся колебательно-волновых процессов, характеристики которых в значительной мере не зависят от начальных или граничных условий. Теория автоволн интенсивно развивалась в связи с приложениями в химии, биологии и т.д. Благодаря широкому использованию компьютерного моделирования и новых математических методов, в понимании колебательно-волновой динамики распределенных систем достигнуты значительные успехи. Их основой является единый волновой язык и интуиция, выработанные теорией волн.

Одним из результатов такого синтеза является возникновение нового раздела физики – синергетики.

7. Теория волн и синергетика

Полвека назад была обнаружена аналогия между процессами возникновения генерации в лазере и формированием структур в неравновесных системах различной природы. Эта аналогия привела к возникновению новой синтетической научной дисциплины – *синергетики*. Синергетика объединила и придала общность постановкам задач в различных науках, от физики и химии до экономики и социологии. Предмет синергетики во многом совпадает с предметом теории нелинейных колебаний и волн, но ее специфика состоит в особом внимании к явлению самоорганизации. Речь идет о процессах формирования и эволюции упорядоченных диссипативных структур, которые могут возникать во многих нелинейных активных средах. Такую среду можно представлять как совокупность большого числа точечных элементов, каждый из которых определенным образом взаимодействует со своими соседями в пространстве. Каким образом динамика индивидуальных элементов и характер связи между ними проявляются в свойствах среды, ее способности к образованию пространственных структур – это главные вопросы синергетики. Термин *синергетика* означает такое согласованное действие и самоорганизацию (гр. synergia – совместное действие).

Исследования кооперативного поведения различных по своей природе физических, химических, биологических и других неравновесных систем выявили большое сходство между ними. Главная черта этого сходства – эффекты самоорганизации и образования диссипативных структур в открытых системах вдали от равновесия. Возможны различные типы упорядоченного поведения сильнонеравновесных открытых систем (активных сред). Прежде всего в таких средах могут возникать стационарные диссипативные структуры. В отличие от равновесных структур (например, кристаллов), диссипативные структуры образуются и сохраняются благодаря обмену энергией и веществом с внешней средой в неравновесных условиях. Иным типом регулярного поведения активных сред являются периодические автоколебания (реакция Белоусова, брюсселятор) или их распространение в виде автоволн переключения.

Подобно теории волн, синергетика рассматривает единство описываемых ею явлений, концепций, моделей применительно к системам самой разной физической природы. В гидродинамике примером самоорганизации может служить образование структур при конвекции Рэлея–Бенара в слое жидкости, подогреваемой снизу, в химии и биологии – формирование структур Тьюринга, условием возникновения которых оказывается различие коэффициентов диффузии для участвующих в реакции компонентов, в космологии – возникновение спиральных галактик, в экологии – организация сообществ и т.д. Поэтому существует альтернативное название синергетики – теория диссипативных структур. Все перечисленные выше системы распределенные, поэтому теория волн в их анализе играет главную роль.

8. Контрольные вопросы к лекции 0

1. Что такое волна?
2. Сформируйте принцип суперпозиции.
3. Сформулируйте принцип Гюйгенса.
4. Сформулируйте критерий отличия колебаний от волн.
5. Что такое монохроматическая волна?
6. В чем заключается механизм распространения волн в среде?
7. В чем заключается механизм распространения волн в вакууме?
8. Как связаны теория волн и динамики распределенных систем?
9. Как связаны теория волн и синергетика?
10. Чем линейные волны отличаются от нелинейных?
11. Что такое закон дисперсии волн?
12. Запишите волновое уравнение.
13. Запишите решение Даламбера волнового уравнения.

9. Задачи к лекции 0

1. **Коронация императрицы.** В день своей коронации (1742) Елизавета Петровна пожелала, чтобы после возложения патриархом на ее голову венца в Успенском соборе Кремля выстрелила пушка в Петропавловской крепости. Способ реализации соответствовал доэлектронной эпохе. На всем протяжении от собора до крепости на расстоянии прямой видимости выставили солдат с флажками. В момент коронации первый солдат взмахнул флажком, следующий повторил его движение, так же последовательно поступили все остальные. a). Если это волна, то что же она перенесла от собора к крепости? b). За какое время, по Вашей оценке, волна достигнет пункта назначения?
2. **Эффект домино.** На полу первого этажа ГК от лестницы до лестницы выстроены в линию параллельно друг другу на равных расстояниях костяшки домино. Каждая костяшка поставлена вертикально так, что при падении может повалить соседнюю. Запустив этот процесс, мы получим бегущую вдоль линии волну. а) Оцените скорость волны и время, которое

ей потребуется, чтобы пробежать всю дистанцию. b) Оцените отношение выделившейся в этом процессе энергии к затравочной энергии, необходимой для того, чтобы его запустить. Оправдывает ли Ваша оценка название этой задачи?

3. **Пробка на светофоре.** На светофоре скопилась длинная вереница автомобилей. Когда зажёгся зелёный, первая машина тронулась и поехала, за ней вторая и т.д. С какой скоростью бежит назад волна тронувшихся машин? Сколько, по Вашей оценке, машин успеют тронуться за 60 с? Для реалистичности оценки время реакции трезвого человека 0,2 с можно смело увеличить в несколько раз.

4. **Скорость упругих волн.** Используя соображения размерности, найдите зависимость фазовой скорости продольных упругих волн c в стержне от модуля Юнга E и плотности стержня ρ.

5. **Автомобильная пробка как ударная волна.** Напряженный трафик на дороге привел к образованию границы, до которой автомобили двигаются со скоростью v_1 и плотностью n_1, а после которой – со скоростью v_2 и плотностью n_2. a) С какой скоростью и в какую сторону движется эта граница? b) Воспользовавшись уравнением Хопфа, опишите динамику образования этой границы.

6. **Волна распространения слухов.** Предложите модель распространения слухов в кампусе или большом городе. Носит ли этот процесс волновой или диффузионный характер? Зависит ли Ваша модель от использования гаджетов или СМИ?

Лекция 1. Цепочка осцилляторов. Переход к сплошной среде

Спорить гораздо легче, чем понимать.
Г. Флобер

1. Чем сосредоточенные системы отличаются от распределенных? 2. Цепочка идентичных атомов. 3. Гармоническая волна. 4. Дисперсионное соотношение. 5. Цепочка математических маятников. 6. Переход от цепочки к сплошной среде. 7. Решение волнового уравнения. 8. Откуда возникает дисперсия в среде? Пространственная и временная дисперсия.

1. Чем сосредоточенные системы отличаются от распределенных?

Колебательные системы являются сосредоточенными (или точечными). Это значит, что они описываются одной, двумя или несколькими динамическими переменными, координатами $x_i(t)$, зависящими от времени. Сплошная среда представляет собой распределенную систему, т.е. описывается функциями нескольких переменных. Ее динамические переменные зависят не только от времени, но и от координат среды. Например, для упругой деформации $u(x,t)$ координата x играет роль непрерывно распределенного индекса i. Переход от точечной к распределенной системе легко проследить на примере цепочки связанных осцилляторов. Пусть это будут расположенные линейно одинаковые шарики, связанные одинаковыми пружинками. Увеличивая число шариков (два, три, четыре, много…), мы в пределе получаем одномерную сплошную среду. В такой сплошной среде возможно не только возникновение колебаний, но и распространение волн. Рассмотрим этот переход подробнее.

2. Цепочка идентичных атомов

Волновое движение можно увидеть уже на простейшем примере одномерной цепочки идентичных осцилляторов. Система связанных осцилляторов, в которой каждый из них связан только с двумя соседями, называется *цепочкой осцилляторов*. Исследование таких цепочек имеет не только теоретическое, но и прикладное значение. Такие цепочки удачно моделируют радиотехнические фильтры и LC-элементы, электронные приборы СВЧ, распределенные электродинамические линии, кристаллы, гетероструктуры и другие физические системы. При этом важно то, что в таких цепочках теоретический анализ можно провести аналитически до конца.

Пусть цепочка из идентичных шариков массой m связана пружинками с одинаковыми жесткостями κ, a – расстояние между шариками в равновесии. Тогда для смещения n-го шарика из положения равновесия u_n получаем уравнения движения $m\ddot{u}_n = +\kappa(u_{n+1} - u_n) - \kappa(u_n - u_{n-1})$ или, что то же,

$$\ddot{u}_n = (\kappa / m)(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}). \tag{1.1}$$

Модель одномерной цепочки (1.1) проста и примитивна. Однако почти все закономерности, полученные для такой схематической одномерной модели, оказываются верными и для трехмерных решеток настоящих кристаллов. Это связано с тем, что при высоких температурах (выше температуры Дебая) движение атомов в кристалле подчиняется законам классической механики.

На первый взгляд решение бесконечной системы «зацепляющихся» уравнений (1.1) должно представлять большие трудности. Действительно, это матричное уравнение, содержащее бесконечномерные трехрядные матрицы. Поэтому удивительно, посредством какой элементарной подстановки она может быть решена. Дело в том, что наша цепочка напоминает натянутую струну или упругую среду. Поэтому можно ожидать, что и в ней существует простой тип движения в виде бегущей монохроматической волны $u(x,t) = A\exp(i\omega t - ikx)$. При этом в $u(x,t)$ вместо непрерывной координаты x стоит дискретная величина an. Амплитуда же волны A от номера узла не зависит. Бесконечную цепочку упруго взаимодействующих атомов можно уподобить струне или резиновому жгуту, на который через равные промежутки насажены бусинки. Это наводит на мысль, что решением уравнений движения будет бегущая гармоническая волна. Поскольку координаты атомов принимают дискретные значения $x = n \cdot a$, то решение следует искать в виде $u_n(t) \propto \exp(-i\omega t + ikna)$. Простая подстановка показывает, что решение в виде такой бегущей волны удовлетворяет системе (1.1) при любом n.

3. Гармоническая волна

Гармонические колебания среди других колебаний выделены тем, что это колебания линейного осциллятора. Точно также гармоническая волна выделена среди других волн тем, что это решение для цепочки осцилляторов. Поскольку система дифференциальных уравнений (1.1) имеет постоянные коэффициенты, то ищем ее решения в виде

$$u_n(t) = Ae^{-i\omega t + ikan}. \qquad (1.2)$$

Накладывая для удобства периодические граничные условия на крайние атомы цепочки, получаем, что k принимает значения $k = (2\pi / Na)\cdot m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$ Учитывая периодичность цепочки, получаем, что при замене $k \to k + 2\pi / a$ получается то же значение для смещения любого атома $u_n(k) = u_n(k + 2\pi / a)$. Таким образом, вся информация о положениях атомов укладывается в одну (например, первую) зону Бриллюэна $-\pi / a < k < +\pi / a$. В этом смысле k представляет собой не импульс, а квазиимпульс. Подставляя решение в уравнения движения, получаем $m\omega^2 = \kappa(2 - e^{ika} - e^{-ika})$, или

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m}\sin^2\frac{ka}{2}. \qquad (1.3)$$

4. Дисперсионное соотношение

Таким образом, по цепочке атомов бегают гармонические волны, частота и волновой вектор которых связаны дисперсионным соотношением $\omega = \omega(k)$. После квантования этим волнам соответствуют фононы – кванты элементарных возбуждений цепочки. В дискретной цепочке наблюдается дисперсия $(\omega / k \neq \text{const})$, чего нет в континуальном пределе $(ka \ll 1)$ в непрерывной среде. Максимально достижимая частота волн в цепочке равна $\omega_m = 2\sqrt{\kappa / m}$. Интересно отметить поведение плотности числа мод (собственных колебаний), фазовой и групповой скоростей в основной зоне Бриллюэна. Плотность числа мод

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{N}{\pi}\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\left|\cos\frac{ka}{2}\right|^{-1} \propto \frac{1}{\sqrt{\omega_m^2 - \omega^2}} \qquad (1.4)$$

при максимальной частоте ω_m обращается в ∞. Групповая $v_г = d\omega / dk$ и фазовая $\omega_ф = \omega / k$ скорости совпадают $v_г = v_ф = a\sqrt{\kappa / m}$ в континуальном пределе длинных волн $ka \ll 1$. Эта величина представляет собой скорость звука в цепочке. А для наиболее коротких волн на границе зоны $ka = \pi$ получаем $v_г = 0$ и $v_ф = 2a\sqrt{\kappa / m} / \pi$.

Рассмотрим более сложный случай, такой же одномерной цепочки, но состоящей из атомов двух видов с разными массами m и M. Четные узлы заняты атомами m, нечетные – атомами M. В кристаллографии в таком случае говорят, что в элементарной ячейке решетки находятся два атома. Если обозначить их смещения u_n для m и v_n для M в n-й ячейке, то уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_n &= \kappa(v_{n-1} + v_n - 2u_n) \\ M\ddot{v}_n &= \kappa(u_n + u_{n+1} - 2v_n). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Как и прежде, разыскивая решение (1.5) в виде $\sim \exp(i\omega t - ikan)$, получаем дисперсионное соотношение

$$\begin{vmatrix} 2\kappa - m\omega^2 & -2\kappa\cos ka \\ -2\kappa\cos ka & 2\kappa - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{1.6}$$

приводящее к закону дисперсии:

$$\omega_{\pm}^2 = \kappa\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \pm \kappa\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM}\sin^2\frac{ka}{2}}\,. \tag{1.7}$$

Таким образом, у такой цепочки имеется две дисперсионные ветви, принимающие разные значения в нуле $\omega_+(0) = \sqrt{2\kappa(1/M + 1/m)}$ и $\omega_-(0) = 0$ и на границе зоны Бриллюэна $\omega_+(\pi/a) = \sqrt{2\kappa/m}$ и $\omega_-(\pi/a) = \sqrt{2\kappa/M}$. Первая ветвь называется *оптической*, в ней атомы m и M колеблются навстречу друг другу (в противофазе). Вторая ветвь называется *акустической*, в ней атомы m и M колеблются в одном направлении (в фазе). Поэтому частота оптических мод велика, а акустические моды соответствуют упругим звуковым волнам континуума.

Есть еще одно качественное отличие дисперсионного соотношения (1.7) для двухатомной цепочки. Границы первой зоны Бриллюэна одноатомной цепочки есть $\pm\pi/a$, тогда как для двухатомной они равны $\pm\pi/2a$. Это связано с тем, что период двухатомной цепочки равен $2a$. Граничная максимальная частота акустической ветви $\omega_-(\pi/2a) = \sqrt{2\kappa/M}$ не зависит от массы легкого атома, а граничная минимальная частота оптической ветви $\omega_+(\pi/2a) = \sqrt{2\kappa/m}$ не зависит от массы тяжелого атома. Действительно, при колебаниях цепочки с $k = \pi/2a$ в первом случае легкие атомы покоятся, а во втором случае покоятся тяжелые. Отметим также, что при $k = 0$ оптические колебания выглядят так: подрешетки легких и тяжелых атомов движутся без деформаций, синхронно, но в противоположных направлениях. Иначе говоря, двухатомная молекула в каждой ячейке колеблется независимо от своих соседей. Если (как это бывает в ионных кристаллах) атомы разных масс имеют еще и заряды противоположных знаков, то возникает оптически активный осциллирующий дипольный момент.

Это открывает возможность гибридизации электромагнитных и оптических фононных возбуждений и образования поляритонов.

Интересно проследить также непрерывный переход от одноатомной к двухатомной цепочке. Для этого возьмем одноатомную цепочку, а элементарную ячейку в ней выберем так, чтобы она содержала два атома и пренебрежем тем, что их массы тождественны. Тогда оптическая и акустическая ветви соединяются на границах зоны Бриллюэна, в точках $k = \pm\pi / 2a$. Может показаться, что число типов колебаний решетки при таком способе удвоилось. Однако это не так. Дело в том, что, удваивая длину элементарной ячейки, мы, очевидно, уменьшили вдвое размер зоны Бриллюэна. С помощью трансляции на расстояние π / a, то есть на вектор обратной решетки сдвоенной ячейки, мы можем развернуть наш график $\omega(k)$ так, чтобы получить обычный график акустической ветви одноатомной цепочки. Акустическая и оптическая ветви сдвоенной (двухатомной) цепочки при этом непрерывно переходят друг в друга. Таким образом, размеры приведенной (первой) зоны Бриллюэна возвращаются к истинному (удвоенному) размеру.

5. Цепочка математических маятников

Немного усложним задачу и рассмотрим цепочку математических маятников, связанных пружинками. Все маятники и пружинки одинаковы и расположены на одинаковых расстояниях a друг от друга. Тогда уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{u}_n = -\frac{mg}{l}u_n + \kappa(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}), \tag{1.8}$$

где m – масса, l – длина маятника, κ – жесткость пружинок. Решение системы (1.8), как и ранее, будем искать в виде $u_n(t) = A\exp(i\omega t + ikx)$, где $x = na$, $k = 2\pi m / a$, m, n – целые числа. Эта подстановка тождественно удовлетворяет системе (1.8), что означает распространение по цепочке гармонических волн с дисперсионным соотношением

$$\omega^2(k) = \omega_0^2 + \frac{4\kappa}{m}\sin^2\frac{ka}{2}, \tag{1.9}$$

где $\omega_0^2 = g / l$. Совокупность всех собственных частот системы цепочки называется ее спектром. Из (1.9) видно, что спектр цепочки маятников лежит в интервале между собственной частотой их колебаний ω_0 и максимальной частотой $\sqrt{\omega_0^2 + 4\kappa / m}$.

6. Переход от цепочки к сплошной среде

Переход к континуальному пределу осуществляется, если длина распространяющейся волны в дискретной цепочке много больше расстояния между осцилляторами $ka \ll 1$. Тогда можно считать смещения осцилляторов непрерывной функцией $u_n(t) = u(x,t)$ и воспользоваться ее разложением в ряд $u_{n+1} = u(x+a) + u_x a + u_{xx} a^2 / 2 + \ldots$ Тогда

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{a^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \qquad (1.10)$$

При таком переходе от дискретных переменных к непрерывным цепочка уравнений (1.8) переходит в одно уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 u = 0 , \qquad (1.11)$$

где $c^2 = \kappa a^2 / m$ имеет смысл квадрата уже знакомой нам фазовой скорости волн в этой среде при $ck \gg \omega_0$. Уравнение (1.11) называется *уравнением Клейна–Гордона*. Если в (1.11) устремить ω_0 к нулю, то получаем обычное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 . \qquad (1.12)$$

Вообще говоря, любая одномерная волна малой амплитуды может быть описана линейным волновым уравнением (1.12).

7. Решение волнового уравнения

Общее решение волнового уравнения можно получить, переходя к характеристикам $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$. В результате такой замены мы ищем решение в виде $u = u(\xi,\eta)$. Тогда $u_x = u_\xi + u_\eta$; $u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$; $c^{-1}u_t = u_\eta - u_\xi$; $c^{-2}u_{tt} = u_{\eta\eta} - 2u_{\eta\xi} + u_{\xi\xi}$. Подставляя в (1.12), получаем новую форму волнового уравнения в характеристиках:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\xi \partial \eta} = 0 . \qquad (1.13)$$

Интегрируя (1.13), получаем, что его общее решение есть $u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$, где f и g – произвольные функции. Таким образом, решение волнового уравнения

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \qquad (1.14)$$

представляет собой линейную комбинацию двух волн, бегущих направо и налево со скоростью c, не изменяя своей формы. Этот факт выражает собой сразу два важных свойства решений волнового уравнения: принцип суперпозиции и отсутствие дисперсии. Если задано начальное состояние среды $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$, то есть мы решаем задачу Коши, то из (14) получаем формулу Даламбера:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\psi(x')dx'. \qquad (1.15)$$

Важным свойством среды, описываемой волновым уравнением, является отсутствие дисперсии, то есть то, что волновые пакеты не расплываются. Они распространяются не изменяя своей формы (см. (1.14)). Это связано с тем, что гармонические решения $u(x,t)\sim\exp(i\omega t-ikx)$, являющиеся составляющими любого волнового пакета, обладают дисперсионным соотношением $\omega=ck$, что легко проверяется подстановкой. При такой связи между k и $\omega(k)$ говорят, что дисперсия (лат. dispersia = разброс) у среды отсутствует. Название возникло именно в силу сохранения формы пакета при движении.

8. Откуда возникает дисперсия в среде? Пространственная и временная дисперсия

Полученное выше уравнение Клейна–Гордона (1.11) имеет отношение не только к цепочке маятников. Оно описывает также распространение плазмонов в нейтральной плазме, волновую функцию релятивистской бесспиновой частицы, сильные напряжения в кристалле и прочее. Подставляя в него решение в виде гармонической волны $u(x,t)\sim\exp(i\omega t-ikx)$, получаем дисперсионное соотношение в виде

$$\omega^2(k)=\omega_0^2+c^2k^2. \qquad (1.16)$$

Этот закон дисперсии отличается от линейного, в таких случаях говорят о дисперсии среды. Дисперсия приводит к важным физическим следствиям, таким как расплывание волновых пакетов, возникновение предвестников и т.д. Попытаемся понять причины возникновения дисперсии.

Все предыдущее рассмотрение показывает, что дисперсия в цепочке маятников исчезает в двух случаях. При $\omega_0\to 0$, когда длина маятников так велика, что у них нет собственных, не зависящих от соседей колебаний. Пусть при этом также справедлив континуальный предел $a\ll\lambda$, а дисперсионная кривая становится линейной $\omega=ck$. В данном случае дисперсия исчезла потому, что исчез собственный временной масштаб среды

$\sim \omega_0^{-1}$. Действительно, когда у каждого маятника имеется собственный период колебаний $\sim \omega_0^{-1}$, то среда из таких маятников не будет воспринимать частоту меньше собственной. На этой критической частоте все маятники будут колебаться синфазно, и возникновение волн невозможно. Таким образом, одной из причин возникновения дисперсии является существование внутреннего временного масштаба среды.

Рассмотрим теперь другой предельный случай. Пусть $\omega_0 = 0$, но соотношение между a и λ может быть произвольным. Тогда из (1.9) видно, что дисперсия в такой среде существенна, пока величина ak не мала. В цепочке осцилляторов дисперсия определяется собственным пространственным масштабом среды – периодом решетки a. Таким образом, можно сказать, что существование дисперсии в среде связано с наличием у нее собственных пространственных и временных масштабов, независимых от параметров волны. С физической точки зрения частотная и пространственная дисперсии отражают запаздывание и нелокальность среды, по которой распространяется волна. Если в среде нет никаких характерных пространственных или временных масштабов, то распространяющаяся в ней негармоническая волна искажаться не будет. Дисперсия в такой среде отсутствует, в качестве примеров можно привести звук, свет в вакууме, волны в длинных линиях и т.д.

9. Контрольные вопросы к лекции 1

1. Запишите уравнение гармонической волны в действительном и комплексном виде.
2. Чему равна фазовая скорость гармонической волны?
3. Что такое дисперсионное соотношение?
4. Запишите закон дисперсии для цепочки осцилляторов.
5. Что такое континуальный предел?
6. Запишите волновое уравнение.
7. Что такое волновое число?
8. Запишите уравнение Клейна–Гордона.
9. Запишите общее решение одномерного волнового уравнения.
10. Запишите формулу Даламбера решения задачи Коши для одномерного волнового уравнения.
11. При каких размерностях задачи выполняется принцип суперпозиции?
12. При каких размерностях задачи выполняется принцип Гюйгенса?
13. Что такое пространственная дисперсия?
14. Что такое временная дисперсия?

10. Задачи к лекции 1

1. **Продольные волны в упругой среде**. Получите волновое уравнение для продольных волн в твердом теле с плотностью ρ и модулем Юнга E. Найдите их фазовую скорость.

2. **Уравнение распространения продольной волны по сжимаемой среде.** Получите уравнение одномерного распространения продольной волны по сжимаемой среде. Обсудите возможность считать, что сжимаемость среды – адиабатическая. Например, для звуковых волн в газе.

3. **Дисперсионная поправка к волновому уравнению.** Одномерная цепочка образована шариками массой m, связанными пружинками жёсткости κ и расположенными на расстоянии a друг от друга. Найдите поправку к волновому уравнению, описывающему волны в этой цепочке и учитывающую дискретность цепочки в континуальном пределе $ka \ll 1$. Вычислите дисперсию волн $\omega(k)$, описываемых уравнением с поправкой. Сравните с точным ответом $\omega(k) = 2\sqrt{(\kappa / m)} \sin ka$. Подсказка: при переходе от конечно-разностных уравнений цепочки к континуальному пределу сохраните в разложении члены до $(ka)^4$ включительно.

4. **Цепочка связанных маятников.** Цепочка идентичных математических маятников с массой m и длиной l, связанных между собой пружинками жесткости k, совершает малые колебания в одной плоскости. Маятники подвешены на одной высоте и одинаковом расстоянии a друг от друга. Найдите частоты и пространственные распределения собственных мод цепочки. Покажите, что в континуальном пределе $ka \ll 1$ моды цепочки представляют собой бегущие гармонические волны, описывающиеся уравнением Клейна–Гордона. Найдите для них дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$.

5. **Сложение перпендикулярных волн.** В среде распространяются две гармонические поперечные волны одинаковой поляризации: u_1 вдоль оси x и u_2 вдоль оси y. Найти и описать суперпозицию этих волн на плоскости (x, y): a). $u_1 = a\cos(\omega t - kx)$, $u_2 = a\cos(\omega t - ky)$; b) $u_1 = a\cos(\omega t - kx)$, $u_2 = -a\cos(\omega t - ky)$; c). $u_1 = a\sin(\omega t - kx)$, $u_2 = a\sin(\omega t - ky)$. То же для продольных волн.

6. **Сложение волн «крест-накрест».** Найдите суперпозицию двух плоских поперечных гармонических волн с одинаковыми амплитудами a, частотами ω и длинами волн λ, бегущих «крест-накрест», то есть с волно-

выми векторами $\mathbf{k_1} = k_x\mathbf{e_x} + k_y\mathbf{e_y}$ и $\mathbf{k}_2 = k_x\mathbf{e_x} - k_y\mathbf{e_y}$. Считайте для простоты, что сдвиг фаз этих волн равен нулю. То же для продольных волн.

7. **Кристалл с двумя атомами в ячейке.** Та же цепочка, что и в предыдущей задаче, но с двумя атомами в элементарной ячейке. Это значит, что в цепочке чередуются атомы с массами m и M. Найдите дисперсионные соотношения $\omega = \omega(k)$. Покажите, что при $m = M$ на границе зоны Бриллюэна акустическая и оптическая ветви смыкаются, а зонная структура становится такой же, как для цепочки одинаковых атомов.

8. **Линеаризованное уравнение Буссинеска.** Найдите дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$, групповую $v_{\text{гр}}$ и фазовую $v_{\text{ф}}$ скорости волны, описываемой линеаризованным уравнением Буссинеска: $u_{tt} - c^2 u_{xx} - \beta u_{xxtt} = 0$. Покажите, что в такой среде не могут распространяться волны с частотой выше $\omega_{\max} = c/\sqrt{\beta}$.

9. **Ударная волна в кристалле.** Одномерный кристалл представляет собой цепочку шариков массой m, расположенных на расстоянии a друг от друга и соединенных одинаковыми нелинейными пружинками. Благодаря пружинкам каждый шарик взаимодействует только с двумя ближайшими соседями с силой $f(x) = \kappa x - \mu x^3$, где x – растяжение пружинки, $\mu > 0$. В континуальном пределе $ka \ll 1$ получите уравнение Буссинеска, описывающее смещение $u(x, \mathrm{t})$ цепочки. Найдите его решение типа доменной стенки (кинка) при $u_x(-\infty, t) = u_x(+\infty, t) = 0$. Покажите, что распределение деформации в кристалле $u_x(x, t)$ представляет собой солитон, движущийся со скоростью v. Как его амплитуда и ширина зависят от скорости v?

Лекция 2. Упругие волны

Бросая в воду камешки, смотри на
круги, ими образуемые; иначе такое
бросание будет пустою забавою.
Козьма Прутков Плоды раздумий

1. Продольные волны в упругой среде. 2. Факторизация волнового уравнения. 3. Энергия упругой волны. Вектор Умова–Пойнтинга. 4. Картина деформаций и смещений в бегущей и стоячей волне. 5. Моды колебаний стержня. 6. Отражение и прохождение упругих волн. 7. Поперечные упругие волны. 8. Принцип Гюйгенса. Почему наш мир трехмерен?

1. Продольные волны в упругой среде

В этой лекции мы рассмотрим волны в упругой среде. Получим волновое уравнение для продольных волн в твердом теле и найдем их фазовую скорость. Будем для простоты пренебрегать поперечными натяжениями в твердом теле, то есть решим задачу в приближении нулевого коэффициента Пуассона. Выделим в среде элемент длины dx и запишем для него уравнение Ньютона $\rho dx \cdot u_{tt} = \sigma_x dx$. В соответствии с законом Гука, напряжение растяжения σ линейно зависит от деформации u_x, то есть $\sigma = Eu_x$, где E – модуль Юнга. Полагая в этом же приближении твердое тело несжимаемым, получаем волновое уравнение $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ с фазовой скоростью $c = \sqrt{E/\rho}$. Для типичных металлов при нормальных условиях скорость звука c составляет порядка нескольких км/с.

2. Факторизация волнового уравнения

Распространение возмущения в упругой среде происходит за счет совместного действия инерционных и упругих сил, описанных в лекции 0. При этом частицы среды могут совершать продольные или поперечные колебания около своего положения равновесия. Их смещения $u(x,t)$ описываются волновым уравнением, полученным в предыдущей лекции. В одномерном случае волновое уравнение имеет вид

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \qquad (2.1)$$

Его гиперболичность и линейность определяют главные черты волновых процессов: принцип суперпозиции и принцип Гюйгенса. А вот постоянство скорости распространения определяется возможностью факторизовать (2.1). Поскольку это уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами, то волновой оператор Даламбера допускает факторизацию $\partial^2/\partial t^2 - c^2\partial^2/\partial x^2 = (\partial/\partial t + c\,\partial/\partial x)(\partial/\partial t - c\,\partial/\partial x)$. Это означает, что можно понизить порядок уравнения, описывающего отдельно волны, движущиеся направо $u_t + cu_x = 0$ и налево $u_t - cu_x = 0$. Соответственно распаривается и общее решение. Например, из уравнения характеристики первого из них $x - ct = \text{const}$, получаем решение $u(x,t) = f(x - ct)$, движущееся направо, не изменяя формы. Для второго получаем аналогично $u(x,t) = g(x + ct)$. Это в сумме дает общее решение (2.1), полученное в предыдущей лекции.

3. Энергия упругой волны. Вектор Умова–Пойнтинга

Плотность энергии упругой среды w складывается из кинетической $\rho u_t^2/2$ и потенциальной $Eu_x^2/2$ энергии:

$$w = \rho(u_t^2 + c^2u_x^2)/2. \tag{2.2}$$

Из факторизованного волнового уравнения следует, что $u_t = \pm cu_x$, так что оба этих слагаемых одинаковы (плотности кинетической и упругой энергии равны), т.е. $w = \rho u_t^2$. Плотность потока этой энергии представляет собой вектор Умова $\mathbf{j} = w\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ – скорость переноса энергии. Для гармонической волны это фазовая $v = v_\text{ф} = c$, а для волнового пакета – групповая скорость $v = v_\text{г}$. Закон сохранения переносимой в среде энергии выражается соответствующим уравнением непрерывности $\partial w/\partial t + \nabla\mathbf{j} = 0$. В важном частном случае гармонической волны $u(x,t) = a\cos(\omega t - kx)$ для средней по времени плотности энергии получаем $\langle w \rangle = \rho a^2\omega^2/2$. Среднее по времени значение плотности потока энергии $\langle j \rangle$ называется *интенсивностью волны*: $I = \langle j \rangle = \rho a^2\omega^2 c/2$.

Выражению для плотности потока энергии можно придать другой эквивалентный вид. Поскольку $w = \rho u_t^2$, то $j = wc = \rho u_t(u_t \cdot c) =$ $= -\rho u_t u_x c^2 = -Eu_t u_x$. Здесь мы воспользовались тем, что для волны, бегущей в положительном направлении оси x, ее уравнение есть $u_t + cu_x = 0$. Физический смысл этого выражения в том, что переносимая энергия $j = -\sigma u_t$ есть работа сил упругости (напряжение) σ над частицами среды, движущимися со скоростью u_t. Из полученных выражений также сразу ясно, что амплитуда цилиндрической волны убывает как $a \propto r^{-1/2}$, а сферической – как $a \propto r^{-1}$. Эти зависимости следуют из сохранения потока энергии $j \cdot 4\pi r^2 = \mathrm{const}$ через волновую поверхность радиуса r. Если энергия не поглощается средой, то $a^2 r = \mathrm{const}$.

Важную роль при распространении упругих волн играют граничные условия. Если граница $x = a$ среды «заделана», т.е. жестко зафиксирована, то $u(a,t) = 0$. Если граница среды свободна, то в ней отсутствует напряжение: $\sigma = Eu_x = 0$, т.е. $u_x(a,t) = 0$.

4. Картина деформаций и смещений в бегущей и стоячей волне

При распространении продольной волны $u(x,t) = a\cos(\omega t - kx)$ скорости смещения частиц среды $u_t = -a\omega \sin(\omega t - kx)$ сдвинуты по фазе на $\pi/2$ вперед по отношению к смещению волны. Деформация же среды $u_x(x,t) = +ak\sin(\omega t - kx)$ сдвинута по фазе на $\pi/2$ назад по отношению к смещению волны. Это можно увидеть также из уравнения волны $u_t + cu_x = 0$, движущейся направо.

Стоячая волна возникает при наложении двух гармонических волн одинаковой амплитуды a с волновыми числами разных знаков k и $-k$. Это является прямым следствием принципа суперпозиции. Уравнение стоячей волны, таким образом, имеет вид $u(x,t) = 2a\cos\omega t \cdot \cos kx$. Интервалы между пучностями и узлами в ней равны половине длины волны $\lambda/2 = \pi/k$. Деформации $u_x(x,t)$ и скорости частиц $u_t(x,t)$ среды также представляют собой стоячие волны. При этом узлы и пучности скорости частиц среды совпадают с узлами и пучностями их смещения. Узлы же и пучности деформации совпадают, наоборот, с пучностями и узлами смещения. Узлы смещения как бы разделяют среду на автономные области, в которых гармонические колебания совершаются независимо. Никакой передачи движения и перетекания энергии через узлы не происходит. Нет никакого распространения возмущения среды, именно поэтому такая ситуация называется *стоячей волной*. В процессе колебаний происходит перетекание энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний же по времени поток энергии в любом сечении стоячей волны равен нулю. Воспользуемся формулой $j = -Eu_t u_x \sim \sin 2kx \sin 2\omega t$, из которой видно, что j периодически меняет знак. Но при любых x средний поток $<j>=0$, а в точках $2kx = n\pi$ нулевой поток энергии не меняется со временем.

5. Моды колебаний стержня

Рассмотрим в качестве конкретного примера возникновение собственных колебаний (мод) в стержне или струне. Моды представляют собой типичные стоячие волны, а их частоты определяются граничными условиями. В математической физике нахождение мод называют *задачей Штурма–Лиувилля*. Если границы стержня закреплены $u(0,t) = u(a,t) = 0$, то они должны быть узлами стоячей волны моды. Отсюда следует, что на длине стержня a должно укладываться целое число n длин полуволн $\lambda_n = 2a/n$. Следовательно, частоты мод $\nu_n = cn/2a$. Частота основной моды (гармоники) равна $\nu_1 = c/2a$, остальные гармоники называются *обертонами*. В общем случае колебания стержня представляют собой суперпозицию (ряд Фурье) различных гармоник. Таким образом, гармоники определяют спектр стержня.

Моды колебаний стержня (или струны) доставляют нам необычный для классической физики пример возникновения дискретного спектра одной из величин. Такая дискретность для классической физики является исключением, в отличие от квантовой физики.

Действуя аналогично, можно найти моды стержня или трубы с воздухом, концы которой открыты. На открытом конце граничное условие имеет вид $u_x(a,t) = 0$, а стоячая волна должна иметь в нем пучность. Именно, если открыт один конец, то собственные частоты равны $\nu_n = c(2n+1)/4a$. Если открыты оба конца, то частоты мод равны $\nu_n = cn/2a$, как у закрепленной струны.

6. Отражение и прохождение упругих волн

Рассмотрим прохождение продольной упругой волны через границу раздела двух упругих сред. Для простоты будем считать падение волны на эту границу нормальным. Пусть падающая волна подходит к этой границе слева со скоростью $c_1 = \sqrt{E_1/\rho_1}$, по среде с модулем Юнга E_1 и плотностью ρ_1. На границе раздела эта волна частично отражается назад, а частично проходит во вторую среду с модулем Юнга E_2 и плотностью ρ_2, и скоростью звука $c_2 = \sqrt{E_2/\rho_2}$. Для смещений падающей, отраженной и прошедшей волн можно записать:

$$u_1(x,t) = a_i \sin(\omega t - k_1 x) + a_r \sin(\omega t + k_1 x),$$
$$u_2(x,t) = a_t \sin(\omega t - k_2 x). \qquad (2.3)$$

Волновые числа $k_1 = \omega / c_1$ и $k_2 = \omega / c_2$ в средах 1 и 2 разные, а вот частота одна. Она не может измениться, иначе нельзя достичь условий сшивки на границе раздела сред. Подчеркнем, что фазы падающей и отраженной волн при $x = 0$ совпадают. Условий сшивки на границе раздела два: условие неразрывности вещества $u_1(0,t) = u_2(0,t)$ и условие равенства напряжений $E_1 u_{1x}(0,t) = E_2 u_{2x}(0,t)$. Они определяют соотношение между амплитудами трех волн, характеризующее степень «прозрачности» границы раздела:

$$a_i + a_r = a_t,$$
$$-E_1 k_1 a_i + E_1 k_1 a_r = -E_2 k_2 a_t. \qquad (2.4)$$

Важной характеристикой среды является акустический импеданс z, или удельное волновое сопротивление вещества. Оно определяется как $z = -\sigma / v$ отношение сжимающего напряжения к скорости колебаний частиц вещества, $z = -E u_x / u_t$. Воспользовавшись волновым уравнением $u_t + c u_x = 0$, получаем для импеданса $z = \rho c$. С использованием этой величины для амплитуд отраженной и прошедшей волн получаем

$$a_r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} a_i,$$
$$a_t = \frac{2 z_1}{z_1 + z_2} a_i. \qquad (2.5)$$

Отсюда следует, что коэффициенты отражения $R = (a_r / a_i)^2$ и прохождения $T = \; z_2 a_t^2 / z_1 a_i^2$, характеризующие отношение соответствующих интенсивностей волн, равны

$$R = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2, \quad T = \frac{4 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}. \qquad (2.6)$$

Здесь мы учли, что интенсивность бегущей волны $I = z\omega^2 a^2 / 2$ зависит от волнового сопротивления z. Коэффициенты отражения и прохождения удовлетворяют, естественно, закону сохранения энергии $R + T = 1$.

Из (2.6) видно, что при $z_1 = z_2$ отражения не происходит. Поэтому для уменьшения отражения стараются согласовывать акустические импедансы двух сред. Заметим также, что при $z_2 \ll z_1$ (прохождение в пустоту, случай «свободного конца») или при $z_2 \ll z_1$ (отражение от закрепленного конца, прохождение в очень плотную среду) происходит практически полное отражение волны. Подумайте о том, является ли это обстоятельство причиной того, что рыбы в водоеме слышат нас, а мы их нет.

7. Поперечные упругие волны

Волны в ограниченных упругих телах. В твердых средах, в отличие от жидкости и газа, могут распространяться как продольные, так и поперечные (сдвиговые) упругие волны. В безграничной среде эти волны так же, как электромагнитные волны в вакууме и звуковые волны в газе, не обладают дисперсией. Дисперсия упругих волн появляется в ограниченных телах (стержнях, пластинах и т.д.), когда длина волны становится сравнимой с их поперечными размерами. Этот тип дисперсии связан с наличием границ. Общее решение уравнений теории упругости, описывающих колебания тел ограниченной формы с учетом всех граничных условий, часто сталкивается с непреодолимыми математическими трудностями. Поэтому рассмотрим для простоты упругие волны в стержне. Продольные волны мы рассмотрели в предыдущем пункте. Изгибные волны проще всего изучить вариационным методом.

Изгибные волны в стержне. Рассмотрим круглый стержень радиуса a, в котором возбуждается поперечная волна. В силу конечного радиуса стержня ее можно назвать изгибной. Изгибные волны возникают, например, при ударе по стержню в поперечном направлении. Они представляют собой изгиб, бегущий от места возбуждения. Пусть стержень совершает колебания в плоскости x, y. При малых поперечных к оси x смещениях плоские сечения стержня, перпендикулярные его срединной линии в покое, остаются плоскими и перпендикулярными срединной линии и во время изгиба. Поперечные смещения срединной линии малы по сравнению с длиной волны, что позволяет пренебречь растяжением стержня.

В этом приближении поперечное движение стержня складывается из двух составляющих: перемещения его центра масс в направлении y на величину $u(x,t)$ и поворота на угол $\varphi(x,t) \simeq u_x$ относительно центра масс. Погонная плотность кинетической энергии изгиба стержня состоит из суммы кинетической энергии поступательного движения элемента стержня и энергии его вращения вокруг оси, проходящей через срединную линию перпендикулярно плоскости колебаний:

$$w_{\text{К}} = \frac{1}{2}\rho S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{J}{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)^2\right]. \tag{2.7}$$

Погонная плотность потенциальной энергии изгиба равна работе восстанавливающих упругих сил:

$$w_{\text{П}} = \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 . \tag{2.8}$$

Здесь $I = \int y^2 dS$ – геометрический момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, перпендикулярной плоскости колебаний, EI – изгибная жесткость стержня, E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения, $u_{xt} \simeq \dot{\varphi}$ – угловая скорость поворота поперечного сечения стержня.

Уравнение изгибных волн в стержне легче всего получить из вариационного принципа (см. лекцию 5). Для плотности лагранжиана стержня $\mathcal{L} = w_{\text{К}} - w_{\text{П}}$ уравнение Эйлера–Лагранжа (5.8) дает

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r^2 c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - r^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 , \tag{2.9}$$

где $c = \sqrt{E / \rho}$ – скорость продольной упругой волны, $r = (I / S)^{1/2}$ – осевой радиус инерции, равный $a / 2$ для цилиндрического стержня.

Дисперсионная зависимость для изгибной волны достаточно необычна:

$$\omega(k) = c \frac{rk^2}{\sqrt{1 + r^2 k^2}} . \tag{2.10}$$

На плоскости (ω, k) эта зависимость изображается кривой, выходящей из начала координат по параболе и асимптотически приближающейся к прямой $\omega = ck$ при $k \to \infty$. Фазовая и групповая скорости изгибной волны равны

$$v_{\text{ф}} = c \frac{rk}{\sqrt{1 + r^2 k^2}} , \quad v_{\text{г}} = 2 v_{\text{ф}} \left(1 - \frac{v_{\text{ф}}^2}{2c^2} \right) . \tag{2.11}$$

Из (2.11) видно, что групповая скорость всегда больше фазовой, т.е. дисперсия изгибных волн является аномальной $(dv_{\text{ф}} / dk > 0)$ (см. лекцию 7). Для длинных изгибных волн $ka \gg 1$ можно пренебречь кинетической энергией вращения элементов стержня и вместо (2.10) использовать упрощенное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r^2 c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 . \tag{2.12}$$

В этом случае дисперсионная кривая является параболой, а фазовая и групповая скорости линейно зависят от волнового числа.

Колебания стрелы в полете. Яркий пример изгибных колебаний стержня доставляет нам летящая стрела. Замедленная съемка показывает, что вылетающая из лука стрела совершает изгибные поперечные колебания. Их возникновение тесно связано с парадоксом лучника: несимметричностью приложенного к стреле тетивой начального импульса возбуждает изгибные колебания. Выше мы убедились, что изгибные колебания длинного узкого стержня описываются уравнением (2.9).

С точки зрения теории упругих волн стрела, вылетающая из лука, представляет собой длинный цилиндрический стержень длины l с радиусом инерции $r = a/2$, плотностью ρ и модулем Юнга E. Его поперечные (изгибные) колебания можно приближенно описывать уравнением (2.12):

$$u_{tt} + r^2c^2u_{xxxx} = 0\,. \qquad (2.13)$$

Концы стрелы совершенно свободны, поэтому граничные условия на концах стрелы $x = 0$ и $x = a$ имеют вид

$$u_{xx} = 0, \quad u_{xxxx} = 0\,. \qquad (2.14)$$

Первое из них означает равенство нулю момента упругих сил на поперечном сечении свободного конца стрелы. Второе связано с равенством нулю на сечении свободного конца перерезывающей силы, представляющей собой сумму касательных напряжений в сечении стрелы при ее изгибе.

Будем искать решение (2.13) в виде $u(x,t) = y(x)\cos\omega t$. Для $y(x)$ это дает уравнение

$$y'''' - \kappa^4 y = 0\,, \qquad (2.15)$$

где $\kappa^4 = \omega^2 / r^2c^2$. Общее решение уравнения (2.15) имеет вид

$$y(x) = A\cos\kappa x + B\sin\kappa x + C\mathrm{ch}\kappa x + D\mathrm{sh}\kappa x = 0\,. \qquad (2.16)$$

Постоянные в (2.16) определяются из граничных условий (2.14) для свободных концов балки $y''(0) = y''(l) = y'''(0) = y'''(l) = 0$. Это дает для частот собственных колебаний трансцендентное уравнение:

$$\cos\kappa l \cdot \mathrm{ch}\kappa l = 1\,. \qquad (2.17)$$

Учитывая, что первый ненулевой корень трансцендентного уравнения $\mathrm{ch}x\cos x = 1$ равен 4.73, для наименьшей из собственных частот колебаний стрелы получаем

$$\omega_0 = 22,4\frac{cr}{l^2}\,. \qquad (2.18)$$

Форма изгиба основной моды колебаний стрелы имеет вид выгнутой дуги с одним горбом. Для тонкой цилиндрической стрелы длиной

$l = 70$ см, плотностью $\rho = 1$ г/см^3 с радиусом инерции поперечного сечения $r = 5$ мм и модулем Юнга $E = 5 \cdot 10^7$ Па основная мода изгибных колебаний имеет частоту 50 Гц. Частоту высших гармоник можно приближенно оценить по формуле $\omega_n \approx cr(\pi n / l)^2$, однако в случае общего положения они практически не возбуждаются.

8. Принцип Гюйгенса. Почему наш мир трехмерен?

Вообще, ремесло пространственных построений,
Будь то Вселенная или пустой коробок для спичек,
Часто не требует предварительных измерений,
Во многом являясь проекцией наших привычек.
И. О. Щеголев, 2008

Почему наше пространство трехмерно? Какие экспериментальные доказательства трехмерности мы можем предъявить? И электромагнитное, и гравитационное поля подчиняются волновому уравнению. Поскольку волновое уравнение линейно, то его решение удовлетворяет принципу суперпозиции. Поскольку волновое уравнение гиперболическое, то его решение удовлетворяет принципу Гюйгенса. Принцип Гюйгенса говорит о форме волны, распространяющейся от области финитного начального возбуждения. Если начальное возмущение локализовано в пространстве, то волна в каждой точке пространства будет локализована во времени. Это означает, что распространяющаяся волна имеет резкий передний и задний фронт. Принцип Гюйгенса выполняется не при всех размерностях пространства. В противном случае за прошедшей волной имеется длительное последействие, происходит диффузия волн.

Свойства решений волнового уравнения тесно связаны с вопросом о физических способах установить реальную размерность пространства. Это позволяет сформулировать экспериментально проверяемые критерии трехмерности пространства. Фактически имеются следующие способы выяснить этот вопрос опытным путем.

1. Фундаментальное решение оператора Лапласа $\propto 1/r^{D-2}$ дает потенциал точечного заряда. Его экспериментальное измерение позволяет установить отклонение от $\mathrm{D} = 3$.

2. Замкнутость планетарных орбит имеет место только в потенциалах $\sim r^2$ и $\sim r^{-1}$, только в трехмерном пространстве $\mathrm{D} = 3$.

3. Спектры атомов ограничены и не уходят неограниченно в ультрафиолет только при $\mathrm{D} = 3$.

4. Принцип Гюйгенса выполняется только при $\mathrm{D} = 3, 5, 7\ldots$

5. Свойства оператора Даламбера таковы, что электромагнитные сигналы не искажаются в дальнем космосе только при $\mathrm{D}=1,3$.

Действительно, для сферически симметричного случая в D измерениях волновое уравнение имеет вид

$$u_{tt}=\frac{c^2}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{D-1}\frac{\partial u}{\partial r}. \qquad (2.19)$$

После подстановки $u=v/r^a$ оно приобретает простой вид $v_{tt}=c^2 v_{rr}$ только в двух случаях: одномерном $\mathrm{D}=1$, $a=0$ и трехмерном $\mathrm{D}=3$, $a=1$. Вследствие этого удается сразу же написать общее решение (2.19) в трехмерном случае $u(r,t)=r^{-1}[f(r-ct)+g(r+ct)]$. При всех остальных размерностях пространства D волновой пакет при движении на больших расстояниях искажается.

9. Контрольные вопросы к лекции 2

1. Что такое акустический импеданс (волновое сопротивление)?
2. Запишите скорость звука в упругой среде плотности ρ с модулем Юнга E.
3. Что такое коэффициент прохождения и отражения звука?
4. Что такое гармоническая волна?
5. Чему равна фаза гармонической волны?
6. Запишите дисперсионное соотношение для гармонической волны.
7. Как связаны частота, скорость и длина волны?
8. Запишите лапласиан в цилиндрических и сферических координатах.
9. Сформируйте принцип Гюйгенса.
10. Как зависит от расстояния амплитуда плоской цилиндрической и сферической волны?
11. Запишите радиальную часть лапласиана Δ_r в пространстве размерности D.

10. Задачи к лекции 2

1. **Волновое уравнение.** Получите уравнение распространения для a) волны по одномерной струне с натяжением F и линейной плотностью ρ; b) продольной волны по сжимаемой среде, процесс сжатия которой происходит адиабатически $p = p(\rho)$; c) продольных волн в твердом теле, с модулем Юнга E. Обсудите возможность считать, что сжимаемость среды – адиабатическая. Найдите фазовую скорость волн.

2. **Подвешенный стержень.** Стержень длиной L, сечением S с модулем Юнга E и массой m жестко прикреплен (заделан) своим торцом к потолку. a) На какую величину ΔL удлиняется стержень под действием собственного веса? b) Опишите моды вертикальных колебаний стержня, вычислите их частоты. c) То же для вертикального стержня, жестко прикрепленного своим торцом к столу.

3. **Колебания заделанной балки.** В отличие от поперечных колебаний струны, при поперечных (изгибных) колебаниях тонкой балки (стержня) она оказывает сопротивление изгибу и подчиняется уравнению $u_{tt} + r^2c^2u_{xxxx} = 0$, где r – радиус инерции поперечного сечения стрелы, $c^2 = E/\rho$ – скорость звука. Граничными условиями для заделанного конца $x = 0$ является неподвижность балки $u(0,t) = 0$ и горизонтальность касательной к ней $u_x(0,t) = 0$. А на свободном конце $x = l$ должны равняться нулю изгибающий момент и тангенциальная (перерезывающая) сила, то есть $u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0$. Вычислите основную частоту ω_0 собственных колебаний горизонтальной заделанной в стену балки.

4. **Дребезжащая линейка.** Пластиковую или железную линейку прижмите к столу так, чтобы большая ее часть свисала за краем. Если оттянуть и отпустить линейку, то раздастся дребезжащий звук. Оцените его основную частоту ω_0, считая линейку тонким стержнем с длиной $l = 30$ см, модулем Юнга $E = 100$ ГПа, плотностью $\rho = 8$ тонн/м^3, моментом инерции сечения $I = 60$ мм^4 и площадью поперечного сечения $S = 20$ мм^2.

5. **Парадокс лучника.** Когда лучник прицеливается, то он совмещает цель с плоскостью дуги лука. При этом стрела может отклоняться от линии прицеливания на угол в несколько градусов. Это связано с конечностью толщины стрелы, лежащей на дуге лука. Парадокс лучника заключается в том, что, несмотря на это отклонение, правильно нацеленная стрела все равно попадает в цель. Объясните механизм этого явления. Оцените максимально возможный угол отклонения стрелы от линии прицеливания.

6. **Колебания стрелы в полете.** Замедленная съемка показывает, что вылетающая из лука стрела совершает изгибные поперечные колебания. Их возникновение тесно связано с парадоксом лучника: несимметричностью приложенного тетивой к стреле импульса. Для тонкой цилиндрической стрелы длиной $l = 0.7$ м, плотностью $\rho = 1$ г/см^3 и модулем Юнга $E = 5\cdot10^7$ Па определите частоту основной моды поперечных колебаний стрелы. Подсказки: изгибные колебания длинного узкого стержня описываются уравнением $u_{tt} + r^2c^2u_{xxxx} = 0$, где $r = 7$ мм – радиус инерции

поперечного сечения стрелы, $c^2 = E/\rho$. Первый корень уравнения $\operatorname{ch} x \cos x = 1$ равен $x_1 = 4.73$.

7. **Колебания подвешенной нити.** Тяжелая однородная гибкая нить длиной l с линейной плотностью ρ подвешена за верхний конец. Получите уравнение малых колебаний нити в поле тяжести g. Найдите собственные моды колебаний нити. Чему равна частота основного тона?

8. **Вращающаяся подвешенная нить.** Как изменится уравнение, описывающее малые поперечные колебания вертикально подвешенной нити (см. предыдущую задачу), если точка ее подвеса будет вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω? Исследуйте его решение в приближении ВКБ. Найдите собственные моды колебаний нити.

9. **Почему на рыбалке нельзя шуметь?** Оцените коэффициенты прохождения звука T из воздуха в воду и из воды в воздух. Объясните, почему мы не слышим рыб, а они нас слышат.

Лекция 3. Звук. Акустика

Есть вещи настолько серьезные, что
говорить о них можно только в шутку.
Нильс Бор

1. Продольные волны в сжимаемой среде. 2. Адиабатический звук. 3. Энергия, переносимая звуком. Звуковое давление 4. Закон Вебера–Фехнера. 5. Бинауральный эффект. 6. Моды колебаний трубы. 7. Трехмерные акустика и звук.

1. Продольные волны в сжимаемой среде

Получим уравнение одномерного распространения продольной волны по сжимаемой среде и обсудим возможность полагать сжимаемость среды адиабатической. Будем считать изменения смещения $u(x,t)$, плотности $\rho(x,t)$ и давления $p(x,t)$ одномерными вдоль оси x. Например, речь может идти о звуковых волнах в газе или жидкости. В жидкостях и газах возможны лишь деформации сжатия и растяжения, поэтому в них могут распространяться только продольные волны. Рассмотрим элемент среды длиной dx и единичного сечения, расположенный вдоль распространения волны. Тогда его уравнение движения $dx\rho u_{tt} = -dp$ определяется разностью давлений, приложенных к торцам. Волны с большим отклонением полного давления $p = p_0 + p'$ от атмосферного p_0 называются *ударными*. У звука же это отклонение мало $|p'| \ll p_0$. Чтобы из уравнения движения получить волновое, необходимо знать уравнение состояния среды $p = p(\rho)$. При малых отклонениях вблизи атмосферного давления можно ввести величину размерности квадрата скорости $c^2 = (\partial p / \partial \rho)_{\rho_0}$. Тогда для волн малой амплитуды получаем $dp' = c^2 d\rho'$.

Поскольку число частиц при сжатии элемента не изменяется, уравнение непрерывности $\rho_0 dx = \rho\left(dx + du\right)$ можно записать в виде $\rho_0 dx = (\rho_0 + \rho')(dx + du)$. При малых отклонениях плотности $|\rho'| \ll \rho_0$ получаем $\rho' = -\rho_0 u_x$ и соответственно $p'_x = -\rho_0 c^2 u_{xx}$. Подставляя это в уравнение движения, в том же приближении получаем волновое уравнение среды:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \tag{3.1}$$

Таким образом, в выбранном нами приближении фазовая скорость волны c не зависит от частоты – дисперсия звука отсутствует. Разумеется, приближение верно, пока длина волны λ превышает длину свободного пробега молекул газа или межатомное расстояние в жидкости l. В этом случае жидкость и газ могут рассматриваться как сплошные среды. Для более высоких частот, когда $\lambda \sim l$, возникает дисперсия, а волны с $\lambda < l$ распространяться вообще не могут.

2. Адиабатический звук

Материальное уравнение среды $p = p(\rho)$ не задано однозначно. Для изотермического идеального газа оно имеет вид $p \sim \rho$, а для адиабатического $p \sim \rho^{\gamma}$, где γ – показатель адиабаты. Именно адиабатически распространяется звук в воздухе в широком диапазоне параметров. Тогда $c = \sqrt{\gamma T / m}$, где T – температура, m – масса молекулы воздуха. Видно, что по порядку величины скорость звука совпадает со скоростью теплового движения молекул.

Итак, $c^2 = \partial p / \partial \rho$ действительно является скоростью звука. Теперь нужно установить, какую производную здесь следует использовать, изотермическую или адиабатическую. Адиабатическое уравнение состояния верно тогда, когда в звуковой волне можно пренебречь теплообменом между теплыми областями сжатия и холодными областями расширения. Для этого необходимо, чтобы расстояние, на которое распространяется тепло за период колебания волны $\sim \sqrt{\chi \omega^{-1}}$ (χ – температуропроводность среды), было существенно меньше длины волны $\lambda \sim c\omega^{-1}$. Это условие выполняется для достаточно больших длин волн $\lambda > \chi c^{-1}$. Вспоминая, что в газах $\chi \approx v_{\text{т}} \cdot l_{\text{проб}} / 3$, а скорость звука c порядка тепловой скорости молекул $v_{\text{т}}$, получаем, что для адиабатичности звука в газе достаточно, чтобы длина волны была больше длины свободного пробега. В газах это практически всегда выполняется, поэтому звук следует считать адиабатическим. Например, для воздуха при нормальных условиях $\chi \approx 2 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, $c \approx 340$ м/с это дает условие $\lambda > 1000$ Å. В жидкостях ситуация может быть еще более жесткой. Для воды $\chi \approx 10^{-7}$ м^2/с, $c \approx 1500$ м/с получаем $\lambda > 1$ Å, что сравнимо с межмолекулярным расстоянием.

Уже Ньютон знал, что $c^2 = \partial p / \partial \rho$. Но современные ему экспериментальные данные Бойля по сжимаемости были получены изотермически ($p \sim \rho$), что давало для воздуха значение $c = \sqrt{p / \rho} \approx 290$ м/с. Это заметно отличалось от измеренного при $20\,^{\circ}$C значения $c = 340$ м/с. Ньютон был очень щепетилен в вопросах экспериментального подтверждения его теорий, но все-таки включил этот результат в «Математические начала натуральной философии». Только через сто лет Лаплас разгадал загадку адиабатичности и получил правильное значение c, используя $\gamma = 7/5$ двухатомных газов. Для идеального невырожденного газа $p \sim \rho^{\gamma}$, $p = nT$ адиабатическая скорость звука $c = \sqrt{\gamma T / m}$, при нормальных условиях в воздухе это составляет как раз около 340 м/с.

3. Энергия, переносимая звуком. Звуковое давление

Плотность потока энергии (интенсивность) звуковой волны дается усредненным вектором Умова $I = c\rho_0\omega^2 a^2 / 2$ и пропорциональна квадрату частоты. Поэтому при переходе к ультразвуку облегчается задача получения больших интенсивностей, необходимых для глубокого проникновения в вещество и наблюдения нелинейных эффектов. Представляется интересным выразить интенсивность I через амплитуду возмущения давления $\max|p'| = p_m$, которое имеет смысл вариации давления в звуковой волне. Для этого воспользуемся волновым уравнением $\rho_0 u_{tt} = -\partial p' / \partial x$ и подставим туда уравнение звуковой волны $u(x,t) = a\cos(\omega t - kx)$. То же самое можно получить, воспользовавшись соотношениями $p'_x = c^2 \rho'_x$ и $\rho' = -\rho_0 u_x$, подставив туда $p(x,t) = p_m \cos(\omega t - kx)$. В итоге для амплитуды звукового давления p_m получаем $p_m = \rho_0 c\omega a$. Соответственно интенсивность звука равна

$$I = \frac{p_m^2}{2\rho_0 c}. \tag{3.2}$$

Сделаем некоторые простые численные оценки. Порог болевого ощущения соответствует звуковому давлению $p_m \approx 300$ Па. Это все еще много меньше атмосферного давления $p_0 = 10^5$ Па. Акустический импеданс воздуха $z = \rho_0 c$ составляет примерно $z \approx 40$ см$^{-2}$с$^{-1}$, поэтому скорость колебаний частиц воздуха на пороге болевого ощущения ωa составляет ≈ 70 см/с. На частоте $\nu = \omega / 2\pi \approx 10^3$ Гц амплитуда смещения частиц воздуха $a \approx 0{,}01$ см. Таким образом, смещение воздуха даже при таком сильном звуке мало.

На пределе слышимости уха и частоте $\nu \approx 10^3$ Гц амплитуда звукового давления составляет $p_m \approx 2 \cdot 10^{-5}$ Па. Аналогичный расчет показывает, что смещение частиц воздуха при этом равно $a \approx 10^{-9}$ см. Это невообразимо маленькое расстояние, в десять раз меньше ангстрема Å. Из (3.2) следует, что рассмотренным выше двум случаям соответствуют интенсивности $I \approx 10$ Вт/м^2 (болевой порог) и $I = 10^{-12}$ Вт/м^2 (порог слышимости).

Помимо энергии, звук переносит и импульс. Плотность потока импульса $j_{\text{p}} = \rho_0 u_t^2$, усредненная по времени, равна $\left\langle j_{\text{p}} \right\rangle = \rho_0 a^2 \omega^2 / 2$. Мы видим, что $\left\langle j_{\text{p}} \right\rangle = I / c = \bar{w}$. Эта величина определяет радиационное давление, оказываемое звуком на стенку. Если звуковая волна нормально падает на стенку, то давление звука на нее возникает в результате отражения потока импульса и равно $p = \bar{w}(1 + R - T)$. Если стенка непроницаема для звука $(T = 0,\ R = 1)$, то давление на нее равно

$$p = \rho_0 a^2 \omega^2 = \frac{p_m^2}{\rho_0 c^2}. \tag{3.3}$$

Поскольку $\rho_0 c^2 \sim p_0$, то радиационное давление звука p в p_m / p_0 раз меньше вариации давления в звуковой волне p_m.

4. Закон Вебера–Фехнера

В акустике принято характеризовать громкость звука логарифмом его интенсивности. Это определение основано на психофизическом законе Вебера–Фехнера (1846), с которого началась «психометрия» как наука о количественном измерении ощущений. Поскольку наши ощущения субъективны, то абсолютные измерения силы ощущения невозможны. Веберу пришло в голову измерять относительные величины и поискать минимальные различия в ощущениях, которые можно зафиксировать. Суть закона Вебера–Фехнера заключается в том, что минимальное изменение интенсивности звука ΔI, которое может различить человеческое ухо, пропорционально самой интенсивности I и составляет приблизительно 10% от ее величины:

$$\frac{\Delta I}{I} \approx 10^{-1}. \tag{3.4}$$

Точно такая же закономерность обнаруживается также для осязания и зрения. Тот же Вебер установил, что минимальное различие в ощущении тяжести груза составляет $\approx 1/100$ от его веса. А для зрения минимальная воспринимаемая глазом разница в интенсивности света составляет $\approx 1/100$ от ее величины.

Исходя из этого закона, удобно построить логарифмическую шкалу уровня ощущения звука, которую принято называть громкостью Γ. Тогда из (3.4) $dI / I = C_1 d\Gamma$ получаем $\ln I = C_1\Gamma + C_2$, где две константы определяют масштаб и начало отсчета шкалы. Они устанавливаются из следующих соображений. Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, звук должен обладать некоторой минимальной интенсивностью I_0, соответствующей порогу слышимости $I_0 \approx 10^{-12}$ Вт/м^2. Естественно, что при $I = I_0$ громкость равна нулю $\Gamma = 0$. Коэффициент C_1 выбирается так, чтобы Γ измерялась в дБ (децибелах), десятых долях увеличения на порядок. Окончательно получаем

$$\Gamma = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (3.5)$$

Это соотношение и называется законом Вебера–Фехнера. Оно отражает тот факт, что чувствительность уха человека к звуку меняется как логарифм его интенсивности. Фехнер определял «психофизику» как точную науку о функциональных зависимостях (подобных (3.5)) между телом и душой, общими связями между материальным и духовным, физическим и психическим мирами.

В принципе, величина Γ безразмерна, но по установившейся традиции для единиц Γ используют название децибел, в честь изобретателя телефона А. Белла. Точно такую же логарифмическую шкалу можно установить и для ощущения звукового давления p_m. При этом стандартному порогу слышимости в воздухе $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2 соответствует пороговое звуковое давление $p_m = 2 \cdot 10^{-5}$ Па. Поскольку диаграмма слышимости реального уха зависит от частоты, то часто громкость нормируется на уровень звукового давления в децибелах для звука с частотой 1 кГц, воспринимаемого как звук той же громкости.

5. Бинауральный эффект

Это еще одно психофизическое явление, заключающееся в слитном восприятии звуков, принимаемых правым и левым ухом. Бинауральный эффект дает возможность человеку определять направление на источник звука. Он играет существенную роль в жизни, музыкальной акустике и стереофонии.

Пусть фронт звуковой волны падает под углом α к линии, соединяющей оба уха человека, расстояние между которыми $\approx 2R$ (R – радиус головы). Тогда волна достигнет одного уха позднее другого, а время задержки составит $\approx 2R\sin\alpha / c$. Эта задержка дает человеку возможность определить направление на источник звука, если период колебаний звуковой волны T больше двух времен задержки $4R\sin\alpha / c < T$. В этом случае звуковые волны, падающие под углом α, вызывают колебания барабанных перепонок левого и правого уха со сдвигом фаз в интервале $(0, \pi)$, по которому человек и определяет направление, с которого пришла волна. В противном случае разные уши воспринимают свои сигналы как дефазированные. Если для оценки положить $R \approx 10$ см, $\sin\alpha \approx 1$, $c = 330$ м/с, то получается, что для звука с частотой, большей 1кГц, определить направление на источник звука по сдвигу фаз становится затруднительно. Человеку кажется, что звук высокой частоты обступает его со всех сторон.

6. Моды колебаний трубы

Рассмотрим в качестве конкретного примера возникновение собственных колебаний (мод) в ограниченной системе – длинной узкой трубе с воздухом. Моды представляют собой типичные стоячие волны, а их частоты определяются граничными условиями. В математической физике нахождение мод называют задачей Штурма–Лиувилля. Если границы трубы закрыты $u(0,t) = u(a,t) = 0$, то они должны быть узлами стоячей волны моды. Отсюда следует, что на длине трубы a должно укладываться целое число n длин полуволн $\lambda_n = 2a / n$. Следовательно, частоты мод трубы $\nu_n = cn / 2a$. Частота основной моды (гармоники) $\nu_1 = c / 2a$, остальные гармоники называются *обертонами*. В общем случае колебания воздуха в трубе представляют собой суперпозицию (ряд Фурье) различных гармоник. Таким образом, гармоники определяют спектр трубы.

Моды колебаний трубы доставляют нам необычный для классической физики пример возникновения дискретного спектра одной из величин. Такая дискретность спектра для классической физики является исключением, в отличие от квантовой физики, для которой это норма.

Действуя аналогично, можно найти моды трубы с воздухом, концы которой открыты. На открытом конце трубы давление равно атмосферному, поэтому на открытом конце граничное условие имеет вид $u_x(a,t) = 0$, а стоячая волна должна иметь в нем пучность. Именно, если открыт один конец, то собственные частоты равны $\nu_n = c(2n+1)/4a$. Если открыты оба конца, то частоты мод равны $\nu_n = cn/2a$, как у трубы с закрытыми концами.

7. Трехмерные акустика и звук

Есть люди, которые не могут освободиться от мнения,
что всякая материя протяженна в длину, ширину и глубину.
Это предрассудок, вытекающий из нашего опыта над
телами, состоящими из безмерного множества атомов.
Дж. К. Максвелл

Акустика – это круг нестационарных волновых явлений в воздухе, связанный с конечностью скорости распространения в нем звука c. Линейную акустику составляют явления, в которых скорость возмущения среды v мала. Эти явления рассматриваются в первом порядке теории по v/c. Слабая нелинейность и учет трения приводит к уравнению Бюргерса и возникновению слабых разрывов. Наконец, явления, когда v превышает c, связаны с образованием ударных волн (см. лекцию 9).

Распространяющиеся малые возмущения плотности среды ρ' представляют собой звуковые волны. В идеальной жидкости уравнения непрерывности и Эйлера, линеаризованные относительно возмущений $|p'| \ll p_0$, $|\rho'| \ll \rho_0$ имеют вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p' = 0\,. \qquad (3.6)$$

Для замыкания системы (3.6) следует связать вариации плотности ρ' и давления p', то есть задать уравнение состояния. Производная давления по плотности представляет собой квадрат скорости звука $\partial p/\partial \rho = c^2$, так что $p' = c^2 \rho'$. При малых колебаниях среды ее течение потенциально. Отсутствие завихрённостей радикально упрощает описание движений среды. Если амплитуда колебаний a мала по сравнению с масштабом изменения скорости λ, то $\partial \mathbf{v}/\partial t \approx v^2/a$ и $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \approx v^2/\lambda$. Это значит, что в уравнении движения среды Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} \qquad (3.7)$$

можно пренебречь нелинейным членом в его левой части. Кроме того, при малых колебаниях в линейном приближении правую часть можно заменить на полный градиент $-\nabla(p/\rho_0)$. Таким образом, взяв ротор от соотношения $\partial\mathbf{v}/\partial t = -\nabla(p/\rho_0)$, получаем сохранение завихрённости $\nabla\times\mathbf{v} = \mathrm{const}$. Для осцилляционного движения среды средняя завихрённость должна отсутствовать, так что окончательно заключаем, что $\nabla\times\mathbf{v} = 0$. Для потенциального движения удобно ввести потенциал скорости $\mathbf{v} = \nabla\phi$. В итоге из (3.6) получаем волновое уравнение:

$$\phi_{tt} - c^2\Delta\phi = 0\,. \tag{3.8}$$

Давление, плотность и компоненты скорости удовлетворяют тому же волновому уравнению (3.8), что и потенциал. Частным решением этого уравнения является плоская монохроматическая волна $\phi(\mathbf{r},t) = \cos(i\mathbf{kr} - i\omega t)$. Соотношение между ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ называется *законом дисперсии*. Для звуковых волн он линеен $\omega = ck$. Как говорят в таких случаях, дисперсии нет. Общее решение волнового уравнения имеет особенно простой вид в одномерном случае:

$$\phi(x,t) = f(x-ct) + g(x-ct)\,. \tag{3.9}$$

Функции f и g задаются начальными условиями $\phi(x,0)$ и $\phi_t(x,0)$ (см. лекцию 1). Заметим, что при $\mathbf{k}\parallel\hat{x}$ только $v_x = \partial\phi/\partial x$ отлична от нуля, так что звуковые волны в жидкостях и газах только продольные. Любое локализованное возмущение (плотности, давления или скорости) вдоль оси x распадается на два одномерных волновых пакета, движущихся в противоположных направлениях без изменения формы. В этом их свойстве и проявляется отсутствие дисперсии. В каждом из пакетов $\partial/\partial t = \pm c\partial/\partial x$, так что второе уравнение (3.6) дает $v = p'/\rho_0 c = c\rho'/\rho_0$. Амплитуда звука мала тогда, когда $\rho' \ll \rho_0$, что требует $v \ll c$. Амплитуда быстрых колебаний давления в звуковой волне равна $p' = \rho_0 vc$, что намного превышает амплитуду медленной вариации давления при движении среды, которую можно оценить из теоремы Бернулли как $\rho v^2/c \gg p'$.

8. Контрольные вопросы к лекции 3

1. Чем отличается поток энергии от интенсивности звука?
2. Запишите вектор Умова.
3. Как зависит от расстояния амплитуда цилиндрической и сферической волны?
4. Чему равна плотность энергии звуковой волны?
5. Чему равна интенсивность, плотность потока энергии звуковой волны?

6. Какие частоты воспринимает ухо?
7. Чему равны порог слышимости и болевой порог?
8. Что такое бинауральный эффект?
9. Что такое закон Вебера–Фехнера?
10. Чему равна плотность потока энергии волны?
11. Чему равна интенсивность волны?
12. В каких единицах измеряется громкость звука?

9. Задачи к лекции 3

1. **Изотермический звук.** При каких условиях в среде с температуропроводностью χ и адиабатической скоростью c звук распространяется изотермически для: a) воздуха $\chi = 2{,}8\cdot 10^{-5}$ м^2/с, $c = 330$ м/с, b) воды $\chi = 10^{-7}$ м^2/с, $c = 1500$ м/с, c) стали $\chi = 10^{-5}$ м^2/с, $c = 5200$ м/с?

2. **Закон Вебера–Фехнера.** Это психофизический закон, заключающийся в том, что минимальное изменение интенсивности звука ΔI, которое способно различить человеческое ухо, составляет 10% от исходной интенсивности I. На сколько дБ должна измениться громкость звука, чтобы это изменение можно было заметить.

3. **Бинауральный эффект.** Это психофизическое явление, заключающееся в способности левого и правого уха улавливать временную задержку приходящего звукового сигнала по разности фаз и определять направление на источник звука (акустическая стереофония). Оцените, при каких частотах из диапазона слышимости этот эффект перестает работать, считая расстояние между ушами 20 см, а скорость звука 340 м/с.

4. **Резонатор Гельмгольца.** Это акустический резонатор в виде сферической колбы объема V с открытой горловиной в форме трубки длиной L и площадью сечения S. Найдите собственную частоту ν колебаний резонатора, учитывая, что скорость звука в воздухе c. Вычислите ν для типичного лабораторного резонатора Гельмгольца с $V = 1$ л, $S = 1$ см^2, $L = 1$ см при $c \approx 330$ м/с. Убедитесь, что эта частота значительно меньше частоты стоячей акустической волны в колбе.

5. **Резонатор Гельмгольца с дыркой.** Это резонатор в виде колбы объема V, у которого вместо горловины небольшая дырка площадью S. Размер дырки тем не менее значительно больше толщины стенок колбы. Оцените собственную частоту ν колебаний резонатора. Скорость звука в воздухе c. Вычислите ν для типичных значений $V = 1$ л, $S = 1$ см^2. Убедитесь, что эта частота значительно меньше частоты стоячей акустической волны в колбе.

6. **Добротность резонатора Гельмгольца.** Оцените добротность Q резонатора Гельмгольца с объемом колбы V и горловиной длины L с площадью сечения S, полагая доминирующими потери, связанные с излучением звука. Вычислите Q для $V = 1$ л, $S = 1$ см^2, $L = 1$ см при $c = 330$ м/с и $\nu = 500$ Гц.

7. **Давление звука на стенку.** На стенку нормально падает гармоническая волна с частотой ω и амплитудой смещения a. Плотность среды ρ, скорость звука c. a). Чему равно среднее по времени давление звука на стенку в условиях его полного отражения? b). То же, если акустический импеданс стенки $\rho_1 c_1$.

8. **Колебания частиц воздуха.** Человек с хорошим слухом может еще слышать звук с колебанием давления $\approx 10^{-3}$ дин/см^2 при частоте 2000 Гц. Оцените амплитуду смещения частиц воздуха при таком звуке. Ответ выразите в $\mathring{A}$. Сделайте ту же оценку при интенсивности звука ноль дБ.

9. **Акустические скорости в воздухе.** Для воздуха при комнатной температуре ($T = 300$ K, $\rho = 1.3$ кг/м^3, μ =28 г/моль) вычислите: скорость звука c, среднюю скорость молекул $\langle v \rangle$ и скорость колебаний частиц воздуха $\langle \dot{u} \rangle$ в звуковой волне с интенсивностью 60 дБ.

10. **Океан.** Сжимаемость воды $5 \cdot 10^{-5}$ атм$^{-1}$. На сколько плотность воды на глубине 10 км больше, чем на поверхности? Считая, что глубина океана ≈ 5 км, оцените изменение его глубины, если бы вода стала несжимаемой.

11. **Адиабатический модуль объемной упругости.** Как связаны адиабатический модуль объемной упругости $\kappa_S = v(\partial p / \partial v)_S$ и адиабатическая скорость звука c? Вычислите адиабатический модуль объемной упругости для воздуха ($c = 330$ м/с, $\rho_0 = 1.3$ кг/м^3) и воды ($c = 1500$, $\rho_0 = 1.3$ кг/м^3) при нормальных условиях ($\rho_0 = 1$ атм).

12. **Сжимаемость.** Сжимаемость ртути, воды и воздуха $4 \cdot 10^{-6}$, $5 \cdot 10^{-5}$ и 0.7 атм$^{-1}$, а плотности 13.6, 1 и $1.2 \cdot 10^{-3}$ г/см^3. Определите скорости звука в этих средах.

10. **Проникновение волны в другую среду.** Упругая волна переходит из среды, в которой ее фазовая скорость c_1, в среду, в которой ее фазовая скорость c_2. Что при этом происходит с ее частотой ω и длиной волны λ?

Лекция 4. Эффект Допплера. Конус Маха

Для успешного развития технологий реальность
важнее пиара, ибо природу обмануть нельзя.
Р. Ф. Фейнман

1. Акустика движущейся среды. 2. Конус Маха. 3. Допплеровский сдвиг. 4. Эффект Допплера. 5. Физический смысл и практическое применение эффекта Допплера. 6. Аномальный эффект Допплера. 7. Двойной эффект Допплера. 8. Релятивистский эффект Допплера. 9. Гравитационное красное смещение. 10. Теории эфира.

1. Акустика движущейся среды

Малые возмущения плотности среды распространяются как звуковые волны. Сжимаемость среды приводит к конечной скорости распространения звука. Поэтому возникает вопрос о распространении возмущений в среде, движущейся относительно неподвижной системы отсчета со скоростью как больше, так и меньше скорости звука. Эквивалентная задача касается распространения в неподвижной среде возмущений от движущегося в ней тела. Если в среде распространяется монохроматическая волна с определенной частотой ω и в определенном направлении, то в движущейся системе та же волна будет иметь другую частоту ω' и распространяться в другом направлении. Изменение частоты волны при переходе от одной системы отсчета к другой называется *эффектом Допплера*, а изменение направления – *аберрацией звука*.

Изменение частоты и направления распространения волны проще всего можно определить из условия равенства фаз одной и той же волны в обеих системах отсчета. Предполагая, что волна плоская, это условие можно записать в виде

$$\omega t - \mathbf{kr} = \omega' t' - \mathbf{k}'\mathbf{r}', \tag{4.1}$$

где $\mathbf{r}, t$ и $\mathbf{r}', t'$ – координаты и время одного и того же события в рассматриваемых системах отсчета, причем начало отсчета времени выбрано так, что в момент совмещения начал координат обеих систем $t = t' = 0$.

2. Конус Маха

Рассмотрим среду, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$. Если создать малое возмущение в точке О, оно будет распространяться относительно среды со скоростью c. В неподвижной же системе отсчета скорость распространения во всех возможных направлениях $\mathbf{n}$ (единичный вектор) равна

$\mathbf{v}+c\mathbf{n}$. Картина распространения существенно зависит от соотношения скоростей v и c. В дозвуковом течении ($v<c$) возмущение распространяется во всех направлениях вокруг источника и в конце концов проходит через все точки среды. В сверхзвуковом же потоке векторы $\mathbf{v}+c\mathbf{n}$ все время лежат внутри конуса (конуса Маха) с углом раствора 2α, где $\sin\alpha = c/v = M^{-1}$. Здесь введено безразмерное число Маха $M = v/c$. Снаружи этого конуса среда остается невозмущенной.

Если возбуждать в движущейся среде периодические пульсации, то есть звук, исходящий из точки среды О, то характер принимаемого в неподвижной системе сигнала снова зависит от числа Маха M. Если среда движется с дозвуковой скоростью вправо, то линии постоянной фазы представляют собой вложенные друг в друга круги. При этом расстояние между этими кругами (длина волны) меньше слева от источника. Для случая движущегося воздуха это значит, что длина волны короче с наветренной стороны. Для случая движущегося источника это же значит, что длина волны короче перед источником и длиннее позади него. Частота звука, регистрируемого приемником, различается в следующих двух случаях.

Если излучатель и приемник покоятся, а движется среда, то излучаемая и принимаемая частоты одинаковы. Длина же волны с наветренной стороны в $(1-v/c)$ раз меньше потому, что звук сносится ветром, так что его скорость распространения $c-v$. Когда источник движется, а приемник и среда неподвижны, то скорость распространения звука c, так что меньшая длина волны соответствует большей в $(1-v/c)^{-1}$ раз принимаемой частоте. Изменение частоты вследствие относительного движения источника и приемника называется *эффектом Допплера*. Этот эффект используется для измерения скорости тел и частиц путем рассеяния на них звука или света. Рассмотрим это явление подробнее.

3. Допплеровский сдвиг

Когда среда движется относительно приемника со скоростью v, он регистрирует частоту, отличающуюся от частоты ck звука относительно среды. Как же соотносятся частота и волновой вектор звука, распространяющегося в движущейся среде и принимаемого в неподвижной системе отсчета? В системе движущейся среды монохроматическая волна задается формулой $\exp(i\mathbf{kr}'-ck\cdot t)$. Частота волны ck и ее волновой вектор $\mathbf{k}$ связаны дисперсионным соотношением. Координаты в движущейся $\mathbf{r}'$ и неподвижной $\mathbf{r}$ системе связаны преобразованием Галилея $\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{v}t$, так что эта волна в неподвижной системе задается формулой

$\exp(i\mathbf{kr} - ck \cdot t - \mathbf{kv} \cdot t)$. Это значит, что в неподвижной системе длина волны звука такая же. А вот частота, измеряемая приемником в неподвижной системе отсчета, ω_k есть

$$\omega_k = ck + \mathbf{kv}, \qquad (4.2)$$

или $\omega_k = \omega(1 + v\cos\varphi / c)$, где φ – угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}$. Сдвиг частоты $\mathbf{kv}$ называется допплеровским. Когда звук распространяется против ветра $\mathbf{kv} < 0$, то неподвижный приемник с наветренной стороны регистрирует более низкий тон, чем с подветренной. Это происходит потому, что с наветренной стороны временной период волны больше, потому что требуется больше времени, чтобы сносимый ветром цуг волны данной длины прошел приемник.

4. Эффект Допплера

Пусть звук в среде испускается неподвижным источником с частотой $\omega_0 = ck$, а наблюдатель движется относительно среды со скоростью $\mathbf{v}$. В системе наблюдателя среда движется со скоростью $-\mathbf{v}$. Частота принимаемого наблюдателем звука равна

$$\omega = \omega_0 - \mathbf{kv}. \qquad (4.3)$$

Рассмотрим теперь излучатель, который испускает звук с частотой ω_0 и движется со скоростью $\mathbf{u}$ относительно среды. Частота волны в неподвижной среде $\omega = ck$ зависит от направления движения $\mathbf{u}$. Чтобы выразить ω через ω_0 и $\mathbf{u}$, пересядем в систему отсчета, движущуюся вместе с источником, где $\omega_k = \omega_0$, а среда движется со скоростью $-\mathbf{u}$. Тогда из (4.2) получаем

$$\omega_0 = ck - \mathbf{ku}, \qquad (4.4)$$

или $\omega_0 = \omega(1 - u\cos\theta / c)$, где θ – угол между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{k}$.

Теперь объединим оба эти случая. Если и приемник, и излучатель движутся относительно среды со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ соответственно, то выражения (4.3) и (4.4) можно объединить в одну формулу:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1 - \mathbf{kv}/ck}{1 - \mathbf{ku}/ck}. \qquad (4.5)$$

Из (4.5) видно, что в акустике невозможен поперечный эффект Допплера. Если источник и наблюдатель движутся перпендикулярно к направлению распространения звука, то изменения частоты не происходит.

5. Физический смысл и практическое применение эффекта Допплера

Если приемник покоится $\mathbf{u} = 0$, а источник движется с малой скоростью $v / c \ll 1$, то из (4.5) получаем сдвиг частоты $\Delta\omega / \omega = v / c$. На этом основано большинство акустических и оптических устройств, использующих эффект Допплера для определения скорости движущегося объекта. Наблюдая за проходящим мимо поездом, мы замечаем, что высота тона издаваемого им звука постоянно меняется. В этом и заключается акустический эффект Допплера, состоящий в изменении частоты звука при относительном движении источника и приемника.

Рассмотрим физический смысл акустического эффекта Допплера. Пусть неподвижный источник излучает монохроматическую гармоническую акустическую волну частоты ω_0. Длина этой волны, распространяющейся в воздухе со скоростью c, равна $\lambda_0 = c / \omega_0$. Если источник будет двигаться со скоростью $v < c$ в направлении распространения волны, то волна будет отрываться от источника со скоростью $c - v$. Это значит, что и ее длина уменьшится до $\lambda = (c - v) / \omega_0$. Достигнув неподвижного приемника, это волна будет воздействовать на него с частотой $\omega = c / \lambda = \omega_0 c / (c - v)$, то есть принимаемая частота

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - v / c} \qquad (4.6)$$

больше исходной. При движении источника в противоположном направлении эта частота уменьшится. Именно это изменение частоты мы ощущаем при приближении и удалении поезда.

Частота будет изменяться и при движении приемника. Причина этого изменения в том, что волна с длиной $\lambda_0 = c / \omega_0$ будет поступать в приемник со скоростью $v + c$, где v – скорость движущегося навстречу волне приемника. Следовательно, частота воздействия волны на приемник $\omega = (c + v) / \lambda_0 = \omega_0 (c + v) / c$ возрастет

$$\omega = \omega_0 (1 + v / c) \qquad (4.7)$$

и превысит исходную частоту. Из (4.5) видно, что эффект связан с уплотнением или разряжением периодов звука вследствие движения источника и приемника.

При одновременном движении вдоль одной прямой источника со скоростью $v_{\text{и}}$ и приемника со скоростью $v_{\text{п}}$ обе формулы можно объединить в одну:

$$\omega = \omega_0 \frac{1 - v_\text{п} / c}{1 - v_\text{и} / c}. \tag{4.8}$$

При удалении источника или приемника в формуле (4.8) следует изменить знак соответствующей скорости. При скоростях $v_\text{и}$, $v_\text{п} > c$ формируются ударные волны, и изменение частоты звука требует отдельного рассмотрения. Это составляет предмет аномального эффекта Допплера.

6. Аномальный эффект Допплера

Когда истина всплывает наружу,
ее называют парадоксом.
В. Босс

Наличие минусов в формуле (4.5) показывает, что при определенных условиях частота, регистрируемая приемником, может изменять знак. Что это означает? Частоту другого знака можно интерпретировать как изменение порядка звуков. Для иллюстрации этого рассмотрим случай, когда приемник движется со сверхзвуковой скоростью $v > c$ в направлении x. Тогда частота звука в системе, связанной со средой, обращается в ноль на конусе Маха. Действительно, условие (4.2) $\omega_k = 0$ определяет в $\mathbf{k}$-пространстве коническую поверхность $ck = -\mathbf{kv}$ или, что то же, в любой плоскости сечения соотношение $v^2 k_x^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2)$. Фронты распространения возмущений в плоскости (x, y) определяются условием постоянства фазы $k_x x + k_y y = \text{const}$, так что образующая конуса перпендикулярна вектору (k_x, k_y), то есть $x / y = -k_x / k_y = \pm c / \sqrt{v^2 - c^2}$. Это как раз и соответствует огибающим волн с углом $\sin\alpha = c / v$, формирующим конус Маха. Таким образом, возмущение стационарно на конусе Маха, внутри которого распространяются звуковые волны, а снаружи остается невозмущенная среда.

Проще всего понять смысл аномального эффекта Допплера на следующем наглядном примере. Пусть неподвижный относительно Вас кот орет: «Мяу, мяу, мяу…». Среда движется относительно Вас и кота вправо со скоростью v. Что Вы услышите? Если скорость среды меньше скорости звука $v < c$, то Вы услышите то же «мяу», но с учащенными звуками. Если же $v > c$, то звуки, издаваемые котом, образуют относительно Вас конус Маха. Фонограмма мяукания кота «вывернется», и Вы услышите «уям, уям, уям…».

7. Двойной эффект Допплера

Из формул (4.5), (4.8) следует, что при движении источника и приемника вдоль одной линии со скоростями $v_\text{п}$ и $v_\text{и}$ их частоты звука связаны как

$$\omega_\text{п} = \omega_\text{и} \frac{c - v_\text{п}}{c - v_\text{и}}. \quad (4.9)$$

Теперь рассмотрим отражение от движущегося тела. Пусть приемник и источник покоятся. Тогда движущееся тело играет роль приемника и «ловит» частоту:

$$\omega_\text{т} = \omega_\text{и} \frac{c - v_\text{т}}{c}. \quad (4.10)$$

Тело отражает и переизлучает звук с частотой $\omega_\text{т}$. Тогда покоящийся приемник фиксирует частоту:

$$\omega_\text{п} = \omega_\text{т} \frac{c}{c + v_\text{т}} = \omega_\text{и} \frac{c - v_\text{т}}{c + v_\text{т}}. \quad (4.11)$$

Этот способ применяется для определения скорости автомобилей по биениям излученного и принимаемого электромагнитных сигналов. Частота биений $\Delta\omega$ равна

$$\Delta\omega = \omega_\text{п} - \omega_\text{и} = -\frac{2v_\text{т}}{c + v_\text{т}} \omega_\text{и}. \quad (4.12)$$

При $v_\text{т} \ll c$ это примерно составляет $\Delta\omega / \omega_\text{и} \approx -2v_\text{т} / c$, что в два раза превышает обычный эффект Допплера.

8. Релятивистский эффект Допплера

Теперь нам понадобится все наше умение
отличать то, что легко, от того, что верно.
проф. Альбус Дамблдор

Рассмотрим теперь эффект Допплера для света. Если в неподвижной системе отсчета распространяется монохроматическая волна с частотой ω, то в движущейся системе та же волна будет иметь другую частоту ω'. Изменение частоты волны при переходе от одной системы отсчета к другой и для света называется *эффектом Допплера*, а изменение его направления – *аберрацией*. Изменение частоты и направления распространения волны в релятивистской теории проще всего определить из условия инвариантности ее фазы $\omega t - \mathbf{kr}$ в разных системах отсчета. Физический смысл фазы заключается в ее пропорциональности числу волн (гребней). А это число не может зависеть от системы отсчета.

Для того чтобы получить формулу преобразования частоты и направления распространения волны, воспользуемся преобразованием Лоренца вдоль оси x:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad t = \frac{t' + vx' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \tag{4.13}$$

и условием равенства фаз в штрихованной (движущейся со скоростью v) и нештрихованной (неподвижной) системах:

$$\omega t - kx = \omega' t' - k' x' . \tag{4.14}$$

Из (4.13), (4.14) получаем формулы эффекта Допплера:

$$k = \frac{k' + v\omega' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \qquad \omega = \frac{\omega' + vk'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} . \tag{4.15}$$

Если световая волна движется под углом θ к оси x (θ' к оси x'), то в формулах (4.14), (4.15) следует k' заменить на $k' \cos\theta'$. Полученные выражения одновременно и одинаково ловко описывают эффект Допплера и аберрацию света.

Рассмотрим сначала распространение света вдоль оси x. В силу принципа относительности $\omega = ck$ и $\omega' = ck'$, что дает

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + v / c}{1 - v / c}} \tag{4.16}$$

– формулу изменения частоты при продольном эффекте Допплера. Частота света ω, наблюдаемая в неподвижной системе, увеличивается по сравнению с частотой источника ω', когда этот источник движется в направлении распространения волны (навстречу нам). И наоборот. Этот вывод совпадает с эффектом Допплера в акустике. При медленных движениях $v / c \ll 1$ предсказания сдвига частоты акустики и оптики совпадают:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c} . \tag{4.17}$$

Эта формула одинаково успешно объясняет увеличение частоты звука приближающегося поезда и красное смещение при разбегании галактик. Она помогает объяснить парадокс Ольберса и допплеровское уширение спектральных линий газа.

При распространении и наблюдении света перпендикулярно движению источника (4.16) предсказывает существование поперечного эффекта Допплера, чего нет в акустике. Подставляя в (4.15) $k' = 0$, получаем

$$\omega' = \omega\sqrt{1 - v^2 / c^2} \approx \omega\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right). \qquad (4.18)$$

Это означает, что при наблюдении света в штрихованной системе в направлении, перпендикулярном движению источника, будет наблюдаться квадратичное по скорости уменьшение частоты света. Происходит смещение частоты в длинноволновую область спектра, во втором порядке по скорости $\Delta\omega / \omega = v^2 / 2c^2$. Это чисто релятивистский эффект, связанный с замедлением времени. Он невозможен в классической физике (акустике). Поперечный эффект Допплера есть проявление релятивистского замедления хода движущихся часов: движущиеся часы идут медленнее, поэтому наблюдаемая частота света, даже без изменения расстояния, меньше частоты источника.

9. Гравитационное красное смещение

Смещение частоты света может вызывать также гравитационное поле. Рассмотрим источник монохроматического света с частотой ω_0. Именно такую частоту и будет воспринимать наблюдатель, находящийся в той же инерциальной системой отсчета. Если же наблюдатель начнет двигаться навстречу световым лучам с постоянным ускорением a, то частота воспринимаемого света увеличивается вследствие эффекта Допплера. С точностью до членов порядка $(v / c)^2$ относительное изменение частоты равно $(\omega - \omega_0) / \omega_0 = v / c$, где v – текущая скорость наблюдателя. За положительное направление v и a мы примем направление на источник света. Если наблюдатель двигался в течение времени t, то $v = at$. За это время свет проходит расстояние $l = ct = cv / a$, поэтому изменение частоты за то же время равно $(\omega - \omega_0) / \omega_0 = al / c^2$.

Пусть теперь вместо этого наблюдатель неподвижен в инерциальной системе отсчета, но в ней имеется гравитационное поле с напряженностью $-a$. Тогда в соответствии с принципом эквивалентности гравитационное поле вызовет такие же сдвиги частоты света, как и в случае ускоренного движения. Это значит, что при распространении света по направлению гравитационного поля g частота света будет возрастать, а против поля – убывать. Это и есть гравитационное красное смещение, предсказанное Эйнштейном (1916). Величина смещения равна $(\omega - \omega_0) / \omega_0 = +gl / c^2$, если считать расстояние, пройденное «по полю», положительным. Это выражение допускает обобщение и на неоднородное поле. Заменяя l на dr, а $\omega - \omega_0$ на $d\omega$, получаем $d\omega / \omega = +\mathbf{g} \cdot \mathbf{dr} / c^2$.

С учетом того, что $-\mathbf{g}\cdot\mathbf{dr} = d\varphi$, получаем $d\omega/\omega = -d\varphi/c^2$. Это соотношение можно и проинтегрировать, но гравитационные смещения, как правило, очень малы. Поэтому можно ограничиться формулой для малых смещений $\Delta\varphi/c^2 \ll 1$:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{-\Delta\varphi}{c^2}. \tag{4.19}$$

Это выражение означает, что при удалении света от гравитирующего объекта его частота уменьшается. Поэтому такой сдвиг называется *красным гравитационным смещением*. С использованием эффекта Мёссбауэра гравитационное красное смещение фотона удается с уверенностью наблюдать в поле тяжести Земли. На перепаде высот 20 м ожидаемое смещение $\Delta\omega/\omega \sim 2\cdot 10^{-14}$ подтверждает с той же точностью принцип эквивалентности.

Полученному соотношению (4.19) можно дать простое качественное объяснение. Фотон представляет собой частицу массой $\hbar\omega/c^2$. Его энергия, равная сумме кинетической $\hbar\omega$ и потенциальной $m\varphi = \hbar\omega\varphi/c^2$, при движении фотона сохраняется, что означает $\Delta(\hbar\omega + \hbar\omega\varphi/\mathrm{c}^2) = 0$. Учитывая, что изменения гравитационного потенциала крайне малы $\Delta\varphi/c^2 \ll 1$, получаем (4.19).

10. Теории эфира

Reality is just an approximation to theory.
D.I. Zhukhovitskii

Эффект Допплера был открыт самим Допплером в 1842 г. для акустических волн. В дальнейшем теория этого эффекта была перенесена без всяких изменений в оптику. При этом предполагалась справедливость волновой эфирной теории света. Место воздуха, в котором распространяются звуковые волны, в оптике занял световой эфир. В остальном все рассуждения в акустике и оптике были абсолютно тождественны. Эфирная теория безвозвратно ушла в область истории физики. Но акустический эффект Допплера полностью сохраняет свое значение. Таким образом, акустика является типичной эфирной теорией. Рассмотрим теорию эфира в оптике. Мы по-прежнему будем говорить о световых волнах в эфире. Для перехода к акустике слово *эфир* надо заменить словом *воздух*, а световые волны – волнами звука.

В эфирной теории, помимо источника и наблюдателя, в явлении принимает участие промежуточная среда – световой эфир. С этим связаны усложнение и неопределенность эфирной теории эффекта Допплера, поскольку в каждом конкретном случае мы не можем сказать, как движутся источник и наблюдатель относительно «неуловимого» эфира. Различные теории эфира отличались друг от друга прежде всего тем, как они выбирали систему отсчета, в которой эфир покоится и, следовательно, ведет себя как оптически изотропная среда.

Пусть в эфире распространяется плоская монохроматическая волна. Ее частоту в системе отсчета, в которой эфир покоится, обозначим через ω, а волновой вектор – через $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны. Фаза волны в указанной системе отсчета равна $\varphi = \omega t - \mathbf{kr}$. Пусть относительно эфира равномерно движутся источник со скоростью $\mathbf{v_и}$ и наблюдатель со скоростью $\mathbf{v_н}$. Их радиусы-векторы будут соответственно $\mathbf{r_и} = \mathbf{v_и}t$ и $\mathbf{r_н} = \mathbf{v_н}t$. Фазы колебаний в этих движущихся точках определятся выражениями $\varphi_{и} = (\omega - \mathbf{kv_и})t$ и $\varphi_{н} = (\omega - \mathbf{kv_н})t$. Отсюда следует, что источник в системе отсчета, где он покоится, излучает волны с частотой $\omega_{и} = \omega - \mathbf{kv_и}$, а частота, воспринимаемая наблюдателем, определяется выражением $\omega_{н} = \omega - \mathbf{kv_н}$. Почленным делением с учетом соотношения $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$ исключаем промежуточную частоту ω и находим

$$\frac{\omega_{н}}{\omega_{и}} = \frac{1 - \mathbf{nv_н}/c}{1 - \mathbf{nv_и}/c}. \qquad (4.20)$$

Мы снова приходим к выражению (4.5). Это основная формула, определяющая допплеровское изменение частоты в теории эфира и в акустике. В этих теориях частота $\omega_{и}$ определяется движением как источника, так и наблюдателя относительно эфира, а также направлением распространения волны $\mathbf{n}$ в самом «неподвижном» эфире. В этом их отличие от теории относительности, в которой эфира нет, а поэтому эффект Допплера зависит только от скорости источника относительно наблюдателя $(\mathbf{v_и} - \mathbf{v_н})$. В частности, при одной и той же относительной скорости $(\mathbf{v_и} - \mathbf{v_н})$ формула (4.20) приводит к разным результатам, в зависимости от того, что движется: источник или наблюдатель. Когда движется источник, а наблюдатель неподвижен, она дает

$$\omega_{н} = \frac{\omega_{и}}{1 - \mathbf{nv_и}/c}. \qquad (4.21)$$

Если же движется наблюдатель, а источник остается в покое, то

$$\omega_{н} = \omega_{и}(1 - \mathbf{nv_н}/c). \qquad (4.22)$$

В линейном приближении, когда в формуле (4.20) можно пренебречь квадратами обоих отношений $\mathbf{v}_{\text{и}} / c$ и $\mathbf{v}_{\text{н}} / c$, она переходит в

$$\frac{\omega_{\text{н}}}{\omega_{\text{и}}} = 1 + \frac{\mathbf{n}}{c}(\mathbf{v}_{\text{и}} - \mathbf{v}_{\text{н}})\,. \qquad (4.23)$$

В эту формулу входит лишь относительная скорость $(\mathbf{v}_{\text{и}} - \mathbf{v}_{\text{н}})$, а не скорости $\mathbf{v}_{\text{и}}$ и $\mathbf{v}_{\text{н}}$ в отдельности. Однако формула еще не определяет изменения частоты, поскольку в нее входит также направление распространения волны $\mathbf{n}$ в «неподвижном» эфире. Действительно, хотя волна и посылается источником к наблюдателю, ее направление из-за аберрации будет изменяться с изменением движения эфира. Только в частном случае, когда источник или наблюдатель покоятся относительно эфира, эта неопределенность исчезает, а формула (4.23) совпадает с тем, что дает в первом порядке теория относительности (4.17). Тогда ей можно придать вид $\omega_{\text{н}} = (1 + v_{\text{отн}} / c)\,\omega_{\text{и}}$, где $v_{\text{отн}}$ – скорость источника относительно наблюдателя по лучу зрения. Она считается положительной, когда источник приближается к наблюдателю, и отрицательной, когда он удаляется.

Из приведенных выражений видно, какие существенные упрощения и ясность внесла теория относительности в теорию эффекта Допплера и аберрации света.

11. Контрольные вопросы к лекции 4

1. Чему равно число Маха?
2. Чему равен угол раствора конуса Маха?
3. Чем отличается конус Маха от излучения Вавилова–Черенкова и критерия сверхтекучести?
4. Чему равен допплеровский сдвиг?
5. Как связаны частоты излучателя $\omega_И$ и приемника $\omega_П$?
6. Что такое аномальный эффект Допплера?
7. Что такое гравитационное красное смещение?
8. Что такое релятивистский эффект Допплера?
9. Что такое поперечный эффект Допплера?
10. Что такое аберрация звука?
11. Что такое теория эфира?

12. Задачи к лекции 4

1. **Опыт Белопольского.** Экспериментальное наблюдение оптического эффекта Допплера удалось благодаря многократному отражению света от движущихся зеркал. Источник света с длиной волны λ расположен между параллельными зеркалами, каждое из которых удаляется от него со скоростью v. После n отражений луч от источника выводится из системы зеркал в спектроскоп. Каков сдвиг длины волны света $\Delta\lambda$, регистрируемый спектроскопом? Вычислите $\Delta\lambda$ для условий опыта Белопольского (1895) $v = 30$ м/с, $n = 10$.

2. **Звук в движущейся среде.** a). По неподвижной среде распространяется гармоническая звуковая волна с амплитудой a, волновым вектором $\mathbf{k}$, частотой ω и скоростью c. Найдите уравнение этой волны, ее частоту ω', амплитуду a' и длину волны λ' в системе, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно среды. b). Найдите уравнение звуковой волны в системе отсчета, связанной с неподвижной средой, ее частоту ω, амплитуду a и длину волны λ, если источник гармонического звука движется со скоростью $\mathbf{v}$ относительно среды. В системе источника волна имеет частоту ω', амплитуду a' и волновой вектор $\mathbf{k}'$. c). Найдите уравнение звуковой волны в системе, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно неподвижной среды. Источник звука с частотой ω' и амплитудой a' движется относительно среды со скоростью $\mathbf{u}$.

3. **Вращение Солнца.** Длина волны водородной линии H_α составляет $\lambda = 656$ нм. При наблюдении этой линии в излучении от диаметрально противоположных краев солнечного диска было обнаружено различие длин волн $\Delta\lambda = 0.088$Å. Найдите период вращения Солнца T (в сутках). Радиус Солнца $R \approx 700\,000$ км. Нужно ли в Вашем расчёте учитывать гравитационное красное смещение $\Delta\lambda_{\text{грав}}$?

4. **Допплеровское уширение.** Что больше: допплеровское или ударное уширение линии излучения газа при нормальных условиях? Для оценок считайте, что сечение и молекулярная масса газа того же порядка, что и у воздуха.

5. **Гравитационное красное смещение.** Гамма-квант с энергией 15 кэВ, испущенный ядром железа, летит вертикально вверх в однородном гравитационном поле $g = 10$ м/с^2. На высоте 23 м его частотный сдвиг регистрируется при помощи эффекта Мёссбауэра на таком же ядре. Согласуется ли результат такого эксперимента $\Delta\nu/\nu = 2.5\cdot10^{-15}$ с Вашей теоретической оценкой?

6. **Постоянная Хаббла.** В спектре удаленнной галактики линия водорода с длиной волны 4870 Å регистрируется с длиной волны 7300 Å. Независимые данные дают для расстояния до исследуемой галактики 5 миллиардов световых лет. Оцените, исходя из этих данных, постоянную Хаббла H и время жизни Вселенной H^{-1}.

7. **Плотность спутника Сириуса.** Самая яркая звезда неба Сириус (альфа Большого Пса) имеет в качестве спутника белый карлик с массой порядка массы Солнца $\approx 2\cdot 10^{33}$ г. Спектроскопические исследования показали, что линии его химических элементов сдвинуты по частоте на $\Delta\nu/\nu \approx 7\cdot 10^{-4}$ в красную сторону. Считая, что это гравитационное красное смещение, оцените среднюю плотность белого карлика.

8. **Эффект Допплера в отраженном звуке.** Неподвижный относительно воздуха источник испускает звук частоты ν_0. Найти частоту звука ν', отраженного от стенки, которая удаляется от источника с постоянной скоростью v.

9. **Истребитель и радар.** Истребитель летит на радар, работающий на длине волны $\lambda = 20$ см. Какова скорость самолета v (в км/ч), если регистрируемая радаром частота биений между посылаемым и принимаемым сигналами составляет $\Delta\nu = 2778$ Гц?

Лекция 5. Вариационный принцип для волн

Нелегко найти человека, который проучился
бы три года, не рассчитывая на вознаграждение.
Конфуций

1. Как решать более сложные многомерные и многополевые волновые задачи? 2. Вариационный принцип в теории волн. 3. Обобщение на случай нескольких независимых переменных, нескольких полевых функций и высших производных 4. Гамильтонов формализм. 5. Лагранжианы конкретных сред. 6. Вариационный принцип Уизема. 7. Волновое действие. Энергия и импульс волн. 8. Энергия и импульс линейных волн. 9. Энергия и импульс волнового пакета.

1. Как решать более сложные многомерные и многополевые волновые задачи?

До сих пор мы успешно справлялись с одномерными волновыми задачами. Однако даже в простейшей ситуации распространения продольной упругой волны вдоль длинного стержня его поперечные размеры изменяются в силу поперечных сдвигов (ненулевых коэффициентов Пуассона). Задача становится неодномерной и не поддается простому рассмотрению. При попытке рассмотреть колебания двумерной мембраны мы сталкиваемся с непростой задачей вычислить результирующую сил, действующих на элемент ее поверхности. Такие же проблемы возникают при рассмотрении изгибных колебаний балок, упругих волн в объеме среды и т.д. Мы даже не можем пока описать дребезжание линейки, прижатой к краю стола. Для того чтобы разобраться, как получать волновые уравнения в сложных случаях, нам на помощь приходит вариационный принцип.

Вариационный принцип содержит информацию о структуре динамических уравнений системы. Его математическая формулировка позволяет получить уравнения Эйлера–Лагранжа и Гамильтона, которые являются фундаментом не только классической механики, но и механики сплошных сред, квантовой механики и квантовой теории поля. Достоинством вариационного принципа является его большая предсказательная сила и универсальность при выводе уравнений движения и законов сохранения системы. Этот принцип обладает большой эвристической ценностью. Он дает представление о свойствах системы даже без решения соответствующих уравнений Эйлера–Лагранжа. Вариационный принцип широко применяется также при описании волновых процессов.

2. Вариационный принцип в теории волн

Я больше всего дорожу аналогиями,
Моими самыми верными учителями.
Иоганн Кеплер

Сейчас мы покажем, что с уравнениями движения распределенных непрерывных систем можно обращаться точно так же, как с уравнениями сосредоточенных систем. В основе этого наблюдения, позволяющего использовать для непрерывных сред лагранжев и гамильтонов формализм, лежит вариационный принцип. Дело заключается в выборе в качестве отправного пункта теории соответствующим образом обобщенного для сред лагранжиана.

При переходе от сосредоточенной системы, описываемой конечным набором переменных $x_i(t)$, к непрерывной среде мы получаем одну непрерывную функцию $u(x,t)$. Типичным примером является смещение среды $u(x,t)$, для которого роль нумерующего дискретного индекса i играет непрерывная координата среды x. Можно представлять себе, что среда состоит из кубиков размера a, так что $x = ia$. Основные идеи такого метода легко проиллюстрировать на примере звуковых и электромагнитных волн (см. лекции 1 и 2).

Перспективы, которые здесь открываются перед нами, заключаются в следующем. Для удовлетворительного описания интересующих нас явлений в непрерывных средах мы можем подбирать не адекватные случаю дифференциальные уравнения в частных производных для $u(x,t)$, а подходящим образом подобранную из общих эвристических соображений плотность лагранжиана системы $\mathcal{L}(u,u_x,u_t)$. Это позволит записывать уравнение движения среды сразу в канонической форме. Вариационный принцип дает нам лагранжев и гамильтонов формализм для динамических переменных, являющихся непрерывными функциями, а не дискретным набором переменных.

Итак, уравнения движения среды могут быть получены из вариационного принципа $\delta\int Ldt = 0$, который с учетом распределенности среды $L = \int \mathcal{L}\, dx$ следует записать в виде

$$\delta\int\int \mathcal{L}\,(u,u_x,u_t)dxdt = 0\,. \qquad (5.1)$$

Отметим, что u_x и u_t входят в плотность лагранжиана равноправно, поэтому (5.1) вполне удобен и для релятивистских полей. Варьируя (5.1) и учитывая, что δu_x и δu_t не являются независимыми вариациями, получаем

$$\delta\int\int\mathcal{L}\,dxdt=\int\delta\mathcal{L}\,dxdt=\int\int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x}\delta u_x\right)dxdt=\ldots \quad (5.2)$$

Далее, воспользовавшись тем, что варьирование и дифференцирование можно переставлять местами $\delta u_t=\partial(\delta u)/\partial t$ и $\delta u_x=\partial(\delta u)/\partial x$, имеем

$$\ldots=\int\int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x}\right)\delta u\,dx\,dt+\int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\,dx+\int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x}\delta u\,dt\,. \quad (5.3)$$

Учитывая, что по самому определению принципа (5.1) вариация поля $\delta u(x,t)$ обращается в ноль на границах как временного, так и пространственного интервалов интегрирования, мы видим, что два последних интеграла в (5.3) обращаются в ноль. Поскольку вариация $\delta u(x,t)$ произвольна, из (5.3) получаем уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=0\,. \quad (5.4)$$

Видно, что (5.4) является простым обобщением уравнения Эйлера–Лагранжа аналитической динамики на случай непрерывных сред. Действительно, вводя функциональную производную

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} \quad (5.5)$$

от плотности лагранжиана, сводим (5.4) к уравнению движения Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}-\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}=0\,. \quad (5.6)$$

Тогда единственное отличие (5.6) от соответствующего уравнения движения сосредоточенных систем заключается в том, что в (5.6) входит не лагранжиан, а плотность лагранжиана.

3. Обобщение на случай нескольких независимых переменных, нескольких полевых функций и высших производных

Если хочешь быть скучным – говори все.
Вольтер

Из рассмотренного выше вывода уравнения Эйлера–Лагранжа (5.4) совершенно ясны его обобщения. Если имеется несколько полевых функций $u,v,w\ldots$ (например, векторное поле $\mathbf{u}$), то из независимости их вариаций друг от друга следует, что каждая из них должна удовлетворять (5.4). Если имеется несколько независимых переменных $x, y, z, \ldots$, то очевидным обобщением (5.4) является уравнение

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} = 0 . \qquad (5.7)$$

И, наконец, совершенно очевидным представляется обобщение (5.4) на случай зависимости $\mathcal{L}$ также и от высших производных u_{xx}, u_{xxx} и т.д. Продолжая интегрировать,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - \ldots = 0 . \qquad (5.8)$$

4. Гамильтонов формализм

Следуя аналогии с аналитической динамикой сосредоточенных систем, введем плотность канонического импульса

$$\pi(x,t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} , \qquad (5.9)$$

а также плотность гамильтониана

$$\mathcal{L}\mathcal{H} = \pi \cdot u(t) - \mathcal{L} . \qquad (5.10)$$

Из вариационного принципа (5.1) получаем

$$\delta \int\int (\pi u_t - \mathcal{H}) dxdt = 0 . \qquad (5.11)$$

Исходя из того, что $\mathcal{H}$ есть функция π, u и u_x (в отличие от $\mathcal{L}$, которая есть функция u_t, u и u_x), и действуя аналогично тому, как при выводе формулы (5.3), получаем

$$\int\int [(u_t - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi})\delta\pi - (\dot{\pi} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u})\delta u] dxdt = 0 . \qquad (5.12)$$

Отсюда следуют канонические уравнения, обобщающие уравнения Гамильтона на случай непрерывных систем:

$$u_t = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi}, \quad \pi_t = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} . \qquad (5.13)$$

Отметим, что здесь фигурируют именно функциональные производные (5.5). Теперь все готово, чтобы подобрать подходящие лагранжианы и гамильтонианы, дающие различные волновые уравнения.

5. Лагранжианы конкретных сред

В качестве примера рассмотрим плотность лагранжиана упругой струны. Для этого вычтем из кинетической энергии единицы длины струны ее потенциальную энергию

$$\mathcal{L}(u_t u_x) = \rho u_t^2 / 2 - E u_x^2 / 2 . \qquad (5.14)$$

Тогда уравнение (5.4) дает волновое уравнение струны $\rho u_{tt} - E u_{xx} = 0$. Плотность лагранжиана трехмерной упругой среды для продольных волн получается совершенно аналогично.

Еще один пример доставляет нам уравнение мембраны. Наглядным образом мембраны, натянутой на рамку, является барабан. Лагранжиан фиксированной по краям мембраны представляет собой разность ее кинетической и потенциальной энергий:

$$L = \int dS(\rho_{2D} u_t^2 / 2 - \sigma) , \qquad (5.15)$$

где ρ_{2D} – поверхностная плотность, σ – натяжение мембраны. Элемент площади поверхности мембраны равен $dS = dxdy / \cos\theta$, где θ – угол наклона элемента поверхности к горизонтали в направлении градиента ∇u. Поскольку $\mathrm{tg}\theta = |\nabla u|$, то $1/\cos\theta = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$. Считая колебания мембраны малыми $u_x, u_y \ll 1$ (мембрана слабо отклоняется от горизонтальной плоскости), можем разложить подкоренное выражение до первого члена. Это дает для лагранжиана выражение

$$L = \int dxdy(\rho u_t^2 / 2 - \sigma u_x^2 / 2 - \sigma u_y^2 / 2) . \qquad (5.16)$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа (5.4) для (5.16) представляет собой волновое уравнение мембраны:

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 , \qquad (5.17)$$

где скорость звука $c = \sqrt{\sigma / \rho_{2D}}$. Ясно, что получить это уравнение напрямую, записывая уравнение Ньютона для элемента мембраны, было бы затруднительно.

Наконец, получим плотность лагранжиана для поля бесспиновой клейн-гордоновской частицы. Энергия ε и импульс p частицы связаны соотношением $\varepsilon^2 = c^2 p^2 + (mc^2)^2$. Переходя к квантовой механике этой частицы, заменяем $\varepsilon = i\hbar\partial / \partial t$ и $p = -i\hbar\partial / \partial x$ и получаем для волновой функции u уравнение Клейн–Гордона:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + c^2 \lambda^{-2} u = 0 , \qquad (5.18)$$

где c – скорость света, $\lambda = \hbar / mc$ – комптоновская длина. Из (5.18) видно, что плотность лагранжиана, приводящая к этому уравнению, имеет вид

$$\mathcal{L}v(u,u_t,u_x) = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}c^2 u_x^2 - \frac{1}{2}c^2\lambda^{-2}u \,. \qquad (5.19)$$

Точно такое же уравнение и лагранжиан описывают распространение поперечных волн в плазме.

6. Вариационный принцип Уизема

Эффективным методом описания квазигармонических волн в консервативных системах является усредненный вариационный принцип. Он позволяет получать по известному лагранжиану системы уравнения для медленно меняющихся в пространстве и времени параметров квазигармонической волны, ее амплитуды и фазы.

Пусть плотность лагранжиана системы зависит лишь от одной полевой переменной $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u,u_t,u_x)$, а соответствующее ей уравнение движения Эйлера–Лагранжа имеет вид (5.4). Пусть уравнение (5.4) имеет решение, описывающее бегущую стационарную волну:

$$u(x,t) = \tilde{u}(\varphi, a)\,, \qquad (5.20)$$

где $\tilde{u}$ – периодическая, не обязательно синусоидальная, функция фазы $\varphi = \omega t - kx$, ω и k – постоянные величины, частота и волновое число, а a – постоянная амплитуда волны. Для семейства таких решений (5.4) уравнение в частных производных (5.4) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{u}_\varphi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{u}} = 0\,, \qquad (5.21)$$

которое соответствует плотности лагранжиана:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tilde{u}, \omega\tilde{u}_\varphi, -k\tilde{u}_\varphi)\,. \qquad (5.22)$$

Здесь введены обозначения $\tilde{u}_\varphi = d\tilde{u} / d\varphi$ и $d / d\varphi = \omega\partial / \partial u_t - k\partial / \partial u_x$.

Теперь перейдем к квазистационарной волне, у которой параметры медленно изменяются во времени и пространстве. Тогда в первом приближении волна по-прежнему описывается выражением (5.20), но ее фаза $\varphi(x,t)$ уже не является линейной функцией x и t. Теперь локальная частота $\omega(x,t)$ и волновое число $k(x,t)$ связаны с фазой соотношениями

$$\omega(x,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad k(x,t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,. \qquad (5.23)$$

Наша дальнейшая задача заключается в том, чтобы избавиться в волне $u(x,t)$ от быстрых периодических осцилляций и найти приближенные уравнения, описывающие медленные изменения ее параметров, амплитуды $a(x,t)$, частоты $\omega(x,t)$ и волнового числа $k(x,t)$. С этой целью введем в рассмотрение усредненный лагранжиан. Для этого подставим (5.20), (5.23) в (5.22) и усредним по фазе, считая параметры ω, k и a постоянными на периоде усреднения:

$$\bar{\mathcal{L}}(a,\varphi_t,\varphi_x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{L}(\tilde{u},\omega\tilde{u}_\varphi,-k\tilde{u}_\varphi)d\varphi\,. \qquad (5.24)$$

В усредненном лагранжиане $\bar{\mathcal{L}}$ независимыми полевыми переменными являются амплитуда a и фаза φ.

Теперь можно сформулировать усредненный вариационный принцип Уизема:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \bar{\mathcal{L}}(a,\varphi_t,\varphi_x)dxdt = 0\,, \qquad (5.25)$$

т.е. первая вариация функционала равна нулю, если $a(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ описывают изменения параметров квазипериодической волны (5.20).

Динамические уравнения, получающиеся из вариационного принципа (5.25), имеют вид

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial a} = 0\,, \qquad (5.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\varphi_t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\varphi_x} = 0\,. \qquad (5.27)$$

К ним необходимо добавить условие

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0\,, \qquad (5.28)$$

вытекающее из определения локальной частоты и волнового числа (5.23).

При анализе модулированных волн удобнее работать не с фазой φ, а с частотой ω, волновым числом k и амплитудой a. Перепишем уравнения (5.26), (5.27), (5.28) в виде

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial a} = 0\,, \qquad (5.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\omega} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial k} = 0\,, \qquad (5.30)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial \omega}{\partial x}=0\,. \tag{5.31}$$

Здесь под производными $\partial\bar{\mathcal{L}}/\partial\omega$ и $\partial\bar{\mathcal{L}}/\partial k$ понимаются усредненные величины

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\omega}=\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\varphi_t}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}_\varphi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}d\varphi\,, \tag{5.32}$$

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial k}=-\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\varphi_x}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}_\varphi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x}d\varphi\,. \tag{5.33}$$

Уравнение (5.29) – это нелинейное дисперсионное уравнение. Оно определяет функциональную связь между мгновенной частотой ω, локальным волновым числом k и амплитудой волны a. Уравнение (5.30) описывает медленные пространственно-временные изменения амплитуды, а (5.31) выражает условие непрерывности фазы волны. Уравнения (5.29) – (5.31) описывают квазистационарные волны с медленно меняющимися параметрами.

7. Волновое действие. Энергия и импульс волн

Сформулированный нами усредненный вариационный принцип позволяет получить уравнение переноса плотности энергии для волнового пакета в диспергирующей среде. Волны, как и всякий движущийся объект, переносят энергию при распространении. Энергия эта самая разная в зависимости от природы волн. Весьма значительная – у морских волн, перемещающих при шторме огромные каменные глыбы, сравнительно небольшая – у электромагнитных световых волн, доходящих до Земли от Солнца. Их мощность на 1 м^2 поверхности составляет около 1 кВт. Подобно движущимся частицам, волны обладают импульсом. Хотя существование импульса у волны не может вызвать сомнений, проявляется он менее заметно, чем энергия волны. Например, световое давление потока излучения Солнца на орбите Земли составляет очень малую величину, всего $4{,}5\cdot 10^{-7}$ Па. В этом разделе мы получим уравнения, описывающие перенос энергии и импульса волн в диспергирующих средах.

Из лекции 6 (Ч. 1. Колебания) мы узнали, что квазипериодическому движению системы с частотой ω соответствует адиабатический инвариант:

$$J=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq=\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right)d\varphi\,. \tag{5.34}$$

Он имеет очевидное обобщение на распределенные системы. Для волны (5.20) адиабатический инвариант дается выражением

$$J = \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}u_t\right)d\varphi = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega}, \tag{5.35}$$

которое получило название *плотности волнового действия*. Значит, вариационное уравнение (5.30) можно рассматривать как уравнение непрерывности (закон сохранения) для волнового действия:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial j_J}{\partial x} = 0, \tag{5.36}$$

где $j_J = -\partial\mathcal{L}/\partial k$ играет роль плотности потока волнового действия. Из (5.36) вытекает, что для локализованных волновых пакетов сохраняется интегральная величина

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J dx = \mathrm{const}, \tag{5.37}$$

имеющая смысл полного волнового действия локализованного возмущения.

Уравнение непрерывности (закон сохранения) для плотности энергии в стационарной ($\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$) среде следует из (5.4) (см. задачу 4). После его усреднения по периоду фазы получаем

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{j}_w}{\partial x} = 0, \tag{5.38}$$

где средняя плотность энергии $\bar{w}$ и ее поток $\bar{j}_w$ равны

$$\bar{w} = \omega\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega} - \bar{\mathcal{L}}, \tag{5.39}$$

$$\bar{j}_w = -\omega\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial k}. \tag{5.40}$$

Аналогичным образом, после усреднения уравнения непрерывности (закона сохранения) для плотности импульса (см. задачу 5), получаем для усредненной плотности импульса квазистационарной волны в однородной ($\partial\mathcal{L}/\partial x = 0$) среде

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{j}_g}{\partial x} = 0. \tag{5.41}$$

Здесь средняя плотность импульса $\bar{g}$ и его поток $\bar{j}_g$ даются выражениями

$$\bar{g} = k\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega}, \tag{5.42}$$

$$\bar{j}_g = -k\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial k} + \bar{\mathcal{L}} . \qquad (5.43)$$

Оказывается, что в стационарной ($\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$) среде закон сохранения средней энергии (5.38) эквивалентен закону сохранения волнового действия (5.36). Действительно, подставив (5.39), (5.40) в (5.38), после дифференцирования получаем

$$\omega\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial k}\right)\right] + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega}\omega_t - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial k}\omega_x - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial t} = 0 . \qquad (5.44)$$

Здесь последние три члена обращаются в нуль, так как

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega}\omega_t + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial k}k_t = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega}\omega_t - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial k}\omega_x , \qquad (5.45)$$

а оставшиеся слагаемые в квадратных скобках (5.44) дают уравнение (5.30). Аналогичное соответствие имеет место и для среднего волнового импульса (5.42).

Таким образом, для среды с постоянными параметрами законы сохранения усредненной энергии и волнового импульса вытекают из закона сохранения волнового действия. В системах с переменными параметрами подобного соответствия уже нет. Для систем с изменяющимися во времени параметрами не выполняется закон сохранения энергии (5.38), а если параметры системы зависят от координаты, то не выполняется закон сохранения волнового импульса (5.41). Закон же сохранения волнового действия (5.36) выполняется во всех случаях.

8. Энергия и импульс линейных волн

В свете полученных нами законов сохранения важно обсудить соотношения, которые существуют между усредненными значениями энергии (5.39) и импульса (5.42), с одной стороны, и их потоков (5.40) и (5.43), с другой стороны. Рассмотрим квазигармоническую волну

$$u(x,t) = a(x,t)\cos\varphi(x,t) , \qquad (5.46)$$

распространяющуюся в линейной среде с постоянными параметрами $(\partial \bar{\mathcal{L}} / \partial t = \partial \bar{\mathcal{L}} / \partial x = 0)$.

В линейных задачах лагранжиан $\mathcal{L}$ является квадратичной функцией полевой переменной и ее производных. Поэтому усредненный лагранжиан $\bar{\mathcal{L}}$ должен быть квадратичной функцией амплитуды волны:

$$\bar{\mathcal{L}}(a,\omega,k) = D(\omega,k)a^2 , \qquad (5.47)$$

где $D(\omega,k)$ – функция частоты и волнового числа. Подставляя (5.47) в (5.29), получаем дисперсионное уравнение для линейных волн:

$$D(\omega, k) = 0 . \qquad (5.48)$$

При этом $\bar{\mathcal{L}}$ равно нулю, что соответствует теореме вириала о равенстве средних значений кинетической и потенциальной энергий в линейной колебательной системе (см. лекцию 2. Ч. 1. Колебания).

Уравнение сохранения волнового действия (5.36) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(D_\omega a^2) - \frac{\partial}{\partial x}(D_k a^2) = 0 . \qquad (5.49)$$

Поскольку дисперсионное соотношение (5.48) может быть разрешено относительно частоты $\omega = \omega(k)$, то из тождества $D[\omega(k), k] \equiv 0$ получаем $D_\omega d\omega / dk + D_k = 0$. В результате выражение для групповой скорости волны имеет вид

$$v_\text{г} = \frac{d\omega}{dk} = -\frac{D_k}{D_\omega} . \qquad (5.50)$$

Подставляя (5.50) в (5.49), приходим к равенству

$$D_\omega \left[\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_\text{г} a^2) \right] + a^2 D_{\omega k} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + v_\text{г} \frac{\partial k}{\partial x} \right) = 0 . \qquad (5.51)$$

Учитывая, что выражение во второй скобке равно нулю в силу (5.31), получаем уравнение переноса для амплитуды волны:

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_\text{г} a^2) = 0 . \qquad (5.52)$$

Таким образом, в линейных средах с постоянными параметрами исследование эволюции модулированной волны (5.46) сводится к совместному решению уравнений (5.48), (5.52) и (5.31).

Связь между средними плотностями энергии линейной модулированной волны и ее потоком следует из выражений (5.39), (5.40), (5.47) и (5.50):

$$\bar{j}_w = -\frac{\bar{\mathcal{L}}_k}{\bar{\mathcal{L}}_\omega} \bar{w} = v_\text{г} \bar{w} . \qquad (5.53)$$

Мы видим, что энергия квазигармонических волн переносится с групповой скоростью, как и энергия волнового пакета. Из (5.42) и (5.43) вытекает связь между средней плотностью волнового импульса и его потоком:

$$\bar{j}_g = -\frac{\bar{\mathcal{L}}_k}{\bar{\mathcal{L}}_\omega} \bar{g} = v_\text{г} \bar{g} . \qquad (5.54)$$

А средняя плотность энергии модулированной волны равна произведению волнового импульса на фазовую скорость:

$$\overline{w} = v_{\text{ф}} \overline{g} \ . \tag{5.55}$$

Выражения (5.53), (5.54) и (5.55) полностью характеризуют соотношения между энергетическими характеристиками квазигармонических волн.

9. Энергия и импульс волнового пакета

В линейных системах $\overline{\mathcal{L}} = 0$ и волновое действие равно отношению энергии к частоте $J = \overline{w} / \omega$ (см. (5.39). Тогда уравнение (5.36) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{w}}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{j}_w}{\omega}\right) = 0 \, , \tag{5.56}$$

а интегральная величина (5.37)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{w}}{\omega} \, dx = \text{const} \tag{5.57}$$

определяет адиабатический инвариант для модулированной волны. Для волновых пакетов с постоянной несущей частотой это приводит к соотношению $\overline{W} / \omega = \text{const}$, где $\overline{W} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{w} dx$ – полная энергия пакета. В квантовой теории энергию можно записать в виде $\overline{W} = N\hbar\omega$ или $\overline{W} / \omega = N = \text{const}$. В рассматриваемом волновом пакете сохраняется полное число квантов (квазичастиц) с энергией $h\omega$, хотя частота ω может изменяться. Аналогичное соотношение получается и для волнового импульса, поскольку $\overline{g} / k = \partial \mathcal{L} / \partial \omega$. Оно соответствует сохранению в волне числа квантов с импульсом, равным $p = \hbar k$.

10. Контрольные вопросы к лекции 5

1. Чем отличается лагранжиан от плотности лагранжиана?
2. Запишите уравнение движения Лагранжа для сосредоточенной системы.
3. Запишите уравнения Эйлера–Лагранжа для многокомпонентной среды $u, v, w\ldots$
4. Запишите уравнения Эйлера–Лагранжа для случая нескольких независимых переменных x, y, z.
5. Запишите уравнения Эйлера–Лагранжа для случая высших производных $u_{xx}, u_{xt}, u_{tt} \ldots$
6. Чему равна плотность канонического импульса?
7. Запишите уравнения Гамильтониана для среды.

8. Запишите плотность лагранжиана струны.
9. Запишите плотность лагранжиана мембраны.
10. Чему равна вариационная производная?
11. Сформулируйте вариационный принцип Уизема.
12. Чему равно волновое действие?
13. Как связаны средняя плотность энергии и ее поток для модулированной волны?
14. Как связаны средняя плотность импульса и ее поток для модулированной волны?
15. Как связаны средняя плотность энергии и импульса для модулированной волны?
16. Чему равны энергия и импульс волнового пакета?

11. Задачи к лекции 5

1. **Плотность лагранжиана.** Подберите подходящую плотность лагран-жиана $\mathcal{L}(u, u_x, u_t, \ldots)$, дающую a) звуковое волновое уравнение $\rho_{tt} - c^2 \Delta\rho = 0$, b) уравнение мембраны $u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$, c) уравнение Клейн–Гордона $u_{tt} - u_{xx} + u = 0$, d) уравнение синус-Гордона $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$, e) уравнение струны $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, f) уравнение Шредингера $iu_t + u_{xx} - U(x)u = 0$, g) уравнение балки $u_{tt} + c^2 r^2 u_{xxxx} = 0$, h) уравнение Буссинеска $u_{tt} - u_{xx} + (uu_x)_x + u_{xxxx} = 0$, i) уравнение Кортевега–де Вриза $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$.

2. **Вариационный принцип.** Получите из вариационного принципа: a) уравнение продольных упругих волн среды с плотностью ρ и модулем Юнга E, b) звуковое уравнение среды с $(\partial P / \partial\rho)_S = c^2$, c) струны с линейной плотностью ρ_1 и натяжением T, d) мембраны с поверхностной плотностью ρ_2 и натяжением σ, e) уравнение Шредингера частицы с массой m в потенциале $U(x)$, f) уравнение Клейн–Гордона релятивистской частицы с массой m.

3. **Уравнения Эйлера–Лагранжа для среды.** Обобщите уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} = 0$$

для среды $u(x,t)$ с плотностью лагранжиана $\mathcal{L}(t,u,u_t,u_x)$ на случаи: a) многомерной среды $u(x,y,z,t)$; b) многокомпонентной среды $\mathbf{u}(x,t)$; c) плотности лагранжиана с высшими производными $\mathcal{L}(t,u,u_t,u_x,u_{xx},\ldots)$.

4. **Закон сохранения плотности энергии.** Из уравнения Эйлера–Лагранжа для плотности лагранжиана $\mathcal{L}(t,x,u,u_t,u_x)$ получите уравнение непрерывности $\partial w + \partial j_w / \partial x = -\partial \mathcal{L} / \partial t$ для плотности энергии $w = -(\partial \mathcal{L} / \partial u_t) u_t - \mathcal{L}$ и плотности потока энергии $j_w = (\partial \mathcal{L} / \partial u_x) u_t$.

5. **Закон сохранения плотности импульса.** Из уравнения Эйлера–Лагранжа для плотности лагранжиана $\mathcal{L}(t,x,u,u_t,u_x)$ получите уравнение непрерывности $\partial g / \partial t + \partial j_g / \partial x = -\partial \mathcal{L} / \partial x$ для плотности импульса $g = -(\partial \mathcal{L} / \partial u_t) u_t$ и плотности потока импульса $j_g = \mathcal{L} - (\partial \mathcal{L} / \partial u_x) u_x$.

6. **Усредненная плотность гамильтониана волны.** Полагая, что усредненная по периоду фазы плотность гамильтониана равна $\bar{\mathcal{H}} = \overline{(\mathcal{L} + u_t) \cdot u_t} - \bar{\mathcal{L}}$, а усредненная плотность потока энергии $S = \overline{u_{tx} \mathcal{L}_{u_x}}$, для квазигармонической волны $u(x,t) = a(x,t) \cos \theta(x,t)$ докажите следующие соотношения: $\bar{\mathcal{H}} = \omega \bar{\mathcal{L}}_\omega - \bar{\mathcal{L}}, S = -\omega \bar{\mathcal{L}}_k$.

Лекция 6. Резонаторы и волноводы

В действительности всё обстоит
не так, как на самом деле.
Станислав Ежи Лец

1. Колебания ограниченных объемов. 2. Колебания прямоугольной мембраны. 3. Фигуры Хладни. 4. Колебания круглой мембраны. 5. Вариационный принцип для собственных частот. 6. Волноводы. 7. Двухпроводная линия, коаксиальный кабель и акустический канал. 8. Очевидные физические аналогии.

1. Колебания ограниченных объемов

Если волну запереть в ограниченном объеме, то возникает резонатор. Резонатор – это колебательная система, в которой возбуждены стоячие волны. Они представляют собой собственные колебания, моды резонатора. Обычно резонатор обладает дискретным набором собственных частот. В резонаторе происходит накопление энергии колебаний за счет резонанса с вынуждающими источниками. Чем выше добротность резонатора, тем сильнее его можно накачать.

Задача о колебании ограниченных объемов встречается при изучении собственных мод мембран, акустических и электромагнитных резонаторов, волноводов и т.д. Основным приемом решения таких задач является метод Фурье, сводящий их к задаче Штурма–Лиувилля на собственные функции и собственные значения. Физически полученные решения представляют собой стоячие волны внутри этих ограниченных объемов. Общее решение представляется в виде бесконечной суммы таких стоячих волн. В качестве простейшего примера рассмотрим мембрану.

2. Колебания прямоугольной мембраны

Механиком является не тот, кто пишет уравнения,
а тот, кто пишет их так, что они интегрируются.
Н. Е. Жуковский

Простейшим двумерным резонатором является прямоугольная мембрана. Волновое уравнение мембраны имеет вид (см. лекцию 5):

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0\,, \tag{6.1}$$

где $c^2 = \sigma / \rho_{2D}$, σ – натяжение, ρ_{2D} – поверхностная плотность мембраны. Граничными условиями для (6.1) является зафиксированность ее границ на прямоугольнике (a, b):

$$\begin{aligned} u(0,y,t) &= u(a,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) &= u(x,b,t) = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Метод разделения переменных Фурье советует искать решение в виде

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t). \tag{6.3}$$

Подставляя (6.3) в (6.1) и разделяя переменные, убеждаемся, что такое решение существует только при условии, что каждое слагаемое в

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} \tag{6.4}$$

является константой, то есть не зависит от переменных t, x, y. Все три константы должны быть положительными. С учетом граничных условий получаем, что решения существуют при дискретном наборе значений собственных частот

$$\omega_{m,n}^2 = c^2 \pi^2 (m^2 / a^2 + n^2 / b^2) \tag{6.5}$$

и собственных длин волн $\lambda_{m,n} = 2\pi c / \omega_{m,n}$. Нормированные собственные моды имеют вид

$$u_{m,n}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{\pi m x}{a} \sin\frac{\pi n y}{b}. \tag{6.6}$$

Но (6.6) представляет собой всего лишь частное решение (6.1). А вдруг есть много других? Ответ на этот вопрос заключается в том, что такие решения образуют полный базис. Моды $u_{m,n}(x,y)$ образуют полную, ортогональную и нормированную систему собственных функций задачи (6.1), (6.2). Поэтому ясно, что общее решение при произвольных начальных условиях представляет собой суперпозицию собственных мод (6.6):

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n} (a_{m,n} \cos\omega_{m,n} t + b_{m,n} \sin\omega_{m,n} t) u_{m,n}(x,y). \tag{6.7}$$

Что будет, если посыпать мембрану песочком и возбудить в ней чистую моду (6.6)? Песок скопится в узловых линиях, образуя красивые фигуры, которые называются *фигурами Хладни*.

3. Фигуры Хладни

Очень часто упрощенная модель проливает больше света на то, как в действительности устроена природа, чем любое число вычислений ab initio.
Ф. В. Андерсон

Фигуры Хладни образуются скоплением мелких частиц (например, песка) вблизи узловых линий на поверхности упругой колеблющейся пластинки. Экспериментально они были обнаружены немецким физиком Эрнстом Хладни. В реальном эксперименте установившееся колебание возбуждается скрипичным смычком, которым проводят по краю пластины. Образующиеся при этом фигуры красивы и разнообразны. Все это разнообразие может быть описано линейными комбинациями полученных нами решений (6.7). Рассмотрим некоторые из них.

Для чистой моды $u_{m,n}$ прямоугольной пластинки узловыми линиями являются прямые, параллельные осям: $m-1$ линия параллельна оси y и $n-1$ линия параллельна оси x. Если пластинка квадратная, для данной частоты $\omega_{m,n}$ существует несколько собственных мод $u_{m,n}$, то есть имеет место вырождение. Кратность вырождения в соответствии с (6.5) равна числу способов, которыми целое число можно представить как сумму двух квадратов целых чисел. Это позволяет составлять линейные комбинации $u_{m,n}$, соответствующие колебанию квадратной мембраны на одной частоте. Например, узловая линия моды $u_{1,2}+u_{2,1}$ представляет собой диагональ прямоугольника, идущую из левого верхнего в правый нижний угол. Узловая линия моды $u_{1,3}+u_{3,1}$ представляет собой почти не сплющенный эллипс в центре прямоугольника. Узловая линия моды $u_{1,4}+u_{4,1}$ представляет собой такой же эллипс, перечеркнутый описанной выше диагональю.

4. Колебания круглой мембраны

Колебания круглой мембраны удобно описывать в полярных координатах. Волновое уравнение мембраны имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,. \tag{6.8}$$

Мембрана закреплена по периметру, поэтому граничное условие имеет вид

$$u(a,\theta,t)=0\,. \tag{6.9}$$

Ищем решение методом разделения переменных в виде

$$u(r,\theta,t) = R(r)\theta(\theta)e^{i\omega t} \tag{6.10}$$

и, действуя аналогично предыдущему пункту, получаем уравнение Гельмгольца. В полярных координатах оно имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0\,, \tag{6.11}$$

где $k = \omega / c$ – волновое число моды. Ищем его решение в виде $u(r,\theta) = R(r)\Phi(\varphi)$. Разделяя переменные, получаем

$$\begin{gathered} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi = 0, \\ r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + (k^2r^2 - n^2)R = 0, \end{gathered} \tag{6.12}$$

где n^2 – константа разделения. Решение первого из этих уравнений $\Phi \sim \cos(n\varphi + \varphi_0)$. Из требования однозначности решения следует, что n должно быть целым числом. Фаза φ_0 показывает, что по φ имеется два линейно независимых решения. Второе уравнение представляет собой уравнение Бесселя n-го порядка. Если мембрана закреплена при $r = a$, то должно быть $J_n(ka) = 0$. Это условие однозначно определяет частоты мод мембраны $\omega_{n,m} = c\mu_{n,m} / a$. Решение существует при дискретном наборе частот:

$$\omega_{n,m} = \frac{c\mu_{n,m}}{a}\,, \tag{6.13}$$

где $\mu_{n,m}$ – m-й по счету корень функции Бесселя n-го порядка $J_n(\mu_{n,m}) = 0$. Собственные функции имеют вид

$$u_{n,m}(r,\theta) = J_n(\mu_{n,m} r / a)\sin n\theta\,, \tag{6.14}$$

где фаза синуса подходящим выбором отсчета угла обращена в ноль. Общее решение для колебаний мембраны при произвольных начальных условиях представляет собой суперпозицию собственных мод. Они образуют полную, ортогональную и нормированную систему собственных функций задачи (6.8), (6.9).

Приведем несколько первых корней функции Бесселя: $\mu_{0,1} = 2{,}4$, $\mu_{0,2} = 5{,}5$, $\mu_{0,3} = 8{,}7$; $\mu_{1,1} = 3{,}8$, $\mu_{1,2} = 7{,}0$, $\mu_{1,3} = 10{,}1$; $\mu_{2,1} = 5{,}1$, $\mu_{2,2} = 8{,}4$, $\mu_{2,3} = 11{,}6$. Функция Бесселя похожа на затухающую синусоиду. Кроме того, все функции, начиная с первой, $n = 1, 2, \ldots$, имеют еще нулевой корень $\mu_{n,1} = 0$. Отметим, что все моды при $n \neq 0$ двукратно вырождены.

5. Вариационный принцип для собственных частот

На свете есть вещи поважнее самых
прекрасных открытий – это знание
метода, которым они были сделаны.
Готфрид Вильгельм Лейбниц

Оказывается, для нахождения собственного значения λ не обязательно решать задачу Штурма–Лиувилля, т.е. дифференциальное уравнение $\hat{L}u = \lambda u$ с соответствующими граничными условиями. Существует гораздо более эффективный приближенный метод, основанный на вариационном принципе. Достаточно минимизировать функционал $\lambda = (u, \hat{L}u)/(u,u)$. В качестве примера докажем вариационный принцип Рэлея–Ритца для частоты собственных колебаний резонатора ограниченного объема. Например, для мембраны $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ с волновым числом $k^2 = \omega^2 / c^2$ он означает

$$k^2 = \min_{u(x,y)} \frac{\int (\nabla u)^2 dxdy}{\int u^2 dxdy}. \qquad (6.15)$$

Здесь нам понадобится умение интегрировать по частям, но не на прямой, а на плоскости. Для этого пригодится $2\mathrm{D}$-теорема Грина. Ее легко получить из весьма популярной $3\mathrm{D}$-теоремы Гаусса–Остроградского:

$$\oint \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \int \nabla \mathbf{a}\, dV. \qquad (6.16)$$

Если в качестве поверхности выбрать цилиндр вдоль оси z, то ее можно применить и к $2\mathrm{D}$-векторному полю $\mathbf{a}(x, y)$:

$$\oint \mathbf{a}\, d\mathbf{n} = \int \nabla \mathbf{a}\, dS. \qquad (6.17)$$

Здесь $dS = dxdy$ – элемент $2\mathrm{D}$-площади, а $d\mathbf{n}$ – нормаль к элементу замкнутого $2\mathrm{D}$-контура. Подставим в (6.17) в качестве векторного поля $\mathbf{a} = u(x, y)\nabla v(x, y)$. Это и дает нам $2\mathrm{D}$-формулу Грина:

$$\oint u \nabla v\, d\mathbf{n} = \int (\nabla u \nabla v + u \Delta v)\, dS. \qquad (6.18)$$

Прямое варьирование правой части (6.15) дает выражение

$$-\int \nabla^2 u \delta u dS \cdot \left(\int u^2 dS\right) - \int (\nabla u)^2 dS \int u \delta u dS, \qquad (6.19)$$

пропорциональное

$$\propto \int \delta u dS[-\nabla^2 u - k^2 u] = 0\ . \qquad (6.20)$$

С учетом произвольности вариации $\delta u(x,y)$ это приводит к исходному уравнению Гельмгольца для мембраны.

Применим принцип Рэлея–Ритца (6.15) для оценки наинизшей частоты круглой мембраны радиуса a. В качестве подходящей пробной функции возьмем первое, что придет в голову, например, $u = 1 - r/a$. Тогда, поскольку $(|\nabla u| = 1/a)$, оценка частоты имеет вид

$$k^2 \le \pi / (\pi a^2 / 6) = 6 / a^2\ . \qquad (6.21)$$

Правильное наинизшее значение равно $k^2 = (2,4/a)^2 = 5,78/a^2$, что весьма близко к нашему предсказанию (6.21). Комментарии излишни.

Еще одна иллюстрация вариационного метода. Оценим наинизшую собственную частоту гитарной струны единичной длины. Соответствующее ей уравнение Гельмгольца $u'' + k^2 u = 0$ имеет граничные условия $u(0) = u(1) = 0$. Вариационный принцип в этом случае имеет вид

$$k^2 \le \frac{\int_0^1 u'^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}, \qquad (6.22)$$

а в качестве пробной функции возьмем $u(x) = x(1-x)$. Тогда $k^2 \le (1/3)/(1/30) = 10$, что весьма близко к истинному значению π^2.

И наконец, в качестве последнего примера применим вариационный принцип Ритца для определения наинизшего собственного значения энергии E в уравнении Шредингера: $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$. Соответствующая вариационная задача состоит в нахождении минимума функционала:

$$E \le \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}\ . \qquad (6.23)$$

Действительно, прямое варьирование правой части (6.23) приводит к уравнению Шредингера. Например, попытаемся найти энергию основного состояния для одномерного гармонического осциллятора. Его уравнение Шредингера получается из гамильтониана:

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2, \qquad (6.24)$$

а в качестве пробной функции возьмем $\psi = (1 + \alpha x^2)\exp(-x^2)$. Тогда из (6.23) получаем

$$E \le \frac{5/4 - \alpha/8 + 43\alpha^2/64}{1 + \alpha/2 + 3\alpha^2/16}. \qquad (6.25)$$

Минимум (6.25) находится с помощью решения квадратного уравнения $23\alpha^2 + 56\alpha - 48 = 0$, т.е. $\alpha = 0,67$. Это дает $E = 1,03$, при правильном ответе $E = 1$.

В заключение уместно сделать два замечания. Все полученные результаты справедливы, и вариационный метод применим, если операторы $\hat{L}, \hat{H}$ и т.д. эрмитовы. Следующие по счету собственные значения находятся, если использовать пробные функции, ортогональные к предыдущей.

6. Волноводы

Под волноводом мы понимаем любую, не обязательно прямолинейную, цилиндрическую трубку с сечением произвольной формы. Поле заключено внутри этой трубки и практически ее не покидает благодаря высокому импедансу стенок трубки. Для электромагнитного поля это полый металлический цилиндр любой формы. Поле может распространяться в волноводе и эффективно переносить энергию, если частота превосходит критическую. Если вместо частоты говорить о длине волны, соответствующей данной частоте в свободном пространстве, то можно сказать, что распространение в волноводе возможно только при условии, что длина волны короче критической длины. Критическая длина волны имеет порядок поперечного размера волновода. Поэтому использование таких волноводов для электромагнитных волн рационально в диапазоне сантиметровых и более коротких волн. Для более длинных волн критическая длина играет роль длины отсечки: такие волны просто не пролазят через трубку. Для коротких же волн через волновод «видно». В результате фазовая скорость волны, распространяющейся в волноводе, зависит от частоты, даже если стенки волновода не являются идеально отражающими. При этом фазовая скорость волны оказывается больше, а групповая – меньше, чем скорость волн в свободном пространстве.

Таким образом, волновод – это направляющий канал, в котором может распространяться волна. При этом поток энергии, переносимой волной, сосредоточен внутри этого канала. Чаще всего под термином *волновод* подразумеваются металлические трубки, предназначенные для передачи электромагнитной энергии волнами микроволнового диапазона. Однако при выполнении тех же условий возможны акустические и световые волноводы.

7. Двухпроводная линия, коаксиальный кабель и акустический канал

Переменные электрические токи передают по двухпроводным линиям. Потери таких линий на излучение при бытовой частоте 50 Гц малы (они пропорциональны четвертой степени частоты). При частотах в тысячи мегагерц потери на излучение становятся ощутимыми. Чтобы этого избежать, используется не двухпроводная, а коаксиальная линия: один провод заключен в цилиндрическую оплетку другого. При дальнейшем повышении частоты из коаксиального кабеля можно убрать и центральный провод. Полая металлическая труба-волновод начинает передавать высокочастотный сигнал ничуть не хуже. Внутри пустой металлической трубы может распространяться электромагнитная волна – волновая мода. Если труба не слишком искривлена, то в электромагнитных волнах больших частот через нее «видно», можно смотреть на просвет. То же самое можно сказать и об акустических волнах.

Рассмотрим в качестве простейшей модели плоский акустический волновод с непроницаемыми стенками. Он располагается полосой $0<y<a$ на плоскости (x,y). Волновое скалярное уравнение в этом волноводе $u_{tt}-c^2\Delta u=0$ будем решать методом разделения переменных Фурье:

$$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t), \tag{6.26}$$

что дает

$$X_{xx}/X+Y_{yy}/Y=T_{tt}/c^2T. \tag{6.27}$$

Это равенство можно удовлетворить при любых x,y и t, только если каждое слагаемое в (6.27) – константа. Граничные условия по y и условие невозрастания по x требуют, чтобы все три константы были положительны. Следовательно,

$$\begin{aligned} &X_{xx}+k_x^2X=0,\\ &Y_{yy}+k_y^2Y=0,\\ &T_{tt}+\omega^2T=0, \end{aligned} \tag{6.28}$$

где $k_x^2+k_y^2=\omega^2/c^2$. Будем считать, что в волновом решении (6.27), которое мы ищем, заданным параметром является частота ω. Условие непроницаемости границ волновода $Y(0)=Y(a)=0$ однозначно определяет положительность k_y^2 и величину $ak_y=m\pi$, где $m=1,2,\dots$ Из ограниченности решения в волновой моде вдоль x и его колебательного характера по

t следует также положительность величин k_y^2 и ω^2. Таким образом, распространяющаяся вдоль волновода мода имеет вид

$$u = \sin\frac{m\pi x}{a} e^{-i\omega t + ik_x x}, \tag{6.29}$$

где волновое число k_x в направлении x равно

$$k_x = \pm\sqrt{(\omega / c)^2 - (m\pi / a)^2}. \tag{6.30}$$

Соотношение (6.30), переписанное в виде

$$\omega^2 = c^2 k_x^2 + (m\pi c / a)^2, \tag{6.31}$$

является законом дисперсии волноводной моды. Волны разной частоты распространяются с разной фазовой скоростью. Дисперсия волн в волноводе связана с наличием в нем собственного пространственного масштаба – поперечного размера a. Если $a \to \infty$, то дисперсия исчезает, сигналы любой формы распространяются без искажения с одинаковой скоростью, равной c. Длина волны $\lambda = 2\pi / k_x$ отличается от длины волны той же частоты, распространяющейся в свободном пространстве $\lambda_0 = 2\pi c / \omega$, а именно $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{1-(m\lambda_0 / 2a)^2}$. То есть волна, попавшая в волновод, как бы растягивается по сравнению с волной в свободном пространстве. Из (6.30) видно, что существует частота отсечки волновой моды $\omega_c = m\pi c / a$. При частотах ниже $\omega < \omega_c$ волна вдоль волновода распространяться не может. Осциллирующее поле проникает в волновод лишь на расстояние порядка $|k_x|^{-1}$. При $\omega \ll \omega_c$ поле проникает только на глубину $\sim a / m\pi$, что составляет менее трети ширины волновода.

Фазовая скорость волноводной моды $v_ф = \omega / k_x$ равна

$$v_ф = c / \sqrt{1-(\omega_c / \omega)^2}, \tag{6.32}$$

то есть превышает скорость в свободном пространстве c. Групповая скорость волноводной моды $v_г = d\omega / dk_x$ равна

$$v_г = c\sqrt{1-(\omega_c / \omega)^2}. \tag{6.33}$$

С этой скоростью в волноводе движутся сигналы и перемещается энергия. Как и следует ожидать, вблизи частоты отсечки групповая скорость обращается в ноль и передача энергии прекращается. Для рассмотренной здесь типичной волноводной ситуации можно говорить, что волноводная мода удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона, а групповая и фазовая скорости связаны соотношением $v_ф v_г = c^2$

8. Очевидные физические аналогии

Итак, мы убедились, что распространение волны вдоль волновода можно рассматривать как некоторый одномерный процесс $\exp(i\omega t - ik_x x)$, характеризуемый дисперсионным соотношением $\omega = \omega(k_x)$ вида (6.31). Поле в волноводе представляет собой комбинацию стоячей волны (поперек волновода) и бегущей волны (вдоль волновода). При этом для волноводной моды возникают очевидные ассоциации с массивной релятивистской частицей и плазменной волной.

Действительно, домножая дисперсионное соотношение (6.31) на постоянную Планка $\hbar$ и вспоминая, что для массивной частицы $\varepsilon^2 = (cp)^2 + (mc^2)^2$, мы можем воспринимать его как массовую поверхность фотона с энергией $\varepsilon = \hbar\omega$ и импульсом $p = \hbar k_x$. При этом для массы волноводного фотона получаем

$$m_\phi = \hbar\omega_c / c^2 = m\pi\hbar / ac\,. \tag{6.34}$$

К этому же выводу можно прийти, если выразить из (6.31) частоту волны ω через ее групповую скорость:

$$\omega = \frac{\omega_c}{\sqrt{1-(v_г / c)^2}}\,. \tag{6.35}$$

Это соотношение в точности соответствует релятивистской зависимости энергии частицы E от ее скорости v, причем роль массы играет величина, пропорциональная частоте отсечки. Отсюда снова получаем, что масса волноводного фотона связана с частотой отсечки как $m_\phi = \hbar\omega_c / c^2$. Эта аналогия объясняется тем, что закон дисперсии (6.31) совпадает с соотношением между энергией, импульсом и массой релятивистской частицы.

Эта аналогия не является формальной, поскольку энергия фотона согласно квантовой электродинамике пропорциональна частоте поля, а его импульс – волновому числу. Каков физический смысл такого «тяжелого» фотона? Дело в том, что закон дисперсии (6.31) описывает движение фотона только вдоль оси x, а координату y можно рассматривать как некоторую внутреннюю степень свободы «двумерного» фотона. Энергия поперечных колебаний поля (стоячей волны вдоль y) и есть внутренняя энергия «тяжелого» фотона, то есть его масса.

Если переписать соотношение (6.31) для фазовой скорости в виде $v_ф = c / n(\omega)$, то мы увидим, что эффективный показатель преломления волновода как среды с дисперсией в точности совпадает с коэффициентом преломления плазмы:

$$n(\omega) = 1 - \omega_c^2 / \omega^2, \qquad (6.36)$$

причем роль плазменной частоты играет частота отсечки. Отсюда следует, в частности, что фотон в плазме (плазмон) также является «тяжелым», причем его масса определяется энергией плазменных колебаний частиц плазмы в поле волны. Заметим, что «тяжелый» фотон, обретающий массу в двумерном односвязном волноводе или плазме, является классическим аналогом частицы, движущейся в гипотетическом поле Хиггса, ограничивающем ее движение по внутренним степеням свободы. Взаимодействие с полем Хиггса проявляется в виде появления массы у частицы.

9. Контрольные вопросы к лекции 6

1. Чем отличается лагранжиан от плотности лагранжиана?
2. Что такое стоячие волны?
3. Что такое узлы и пучности стоячей волны?
4. Какие возможны граничные условия для стоячей воды?
5. Что такое моды, гармоники, собственные колебания, обертона?
6. Чем отличается волновод от резонатора?
7. Что такое частота отсечки?
8. Чему равна фазовая и групповая скорость волноводной моды?
9. На какую глубину в волновод проникает волна при $\omega < \omega_c$?
10. Чему равна масса фотона в волноводе?

10. Задачи к лекции 6

1. **Отклонение луча света.** Вычислите угол отклонения луча света, прошедшего вблизи диска Солнца. Масса Солнца $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{33}$ г, радиус Солнца $R_\odot \approx 6{,}960 \cdot 10^8$ м.

2. **Движение в волноводе.** Закон дисперсии в длинном цилиндрическом волноводе имеет вид $(\omega^2 - \omega_0^2)k^{-2} = \mathrm{const}$. Каков закон дисперсии в системе, движущейся вдоль оси волновода со скоростью v для: a) электромагнитных волн; b) звуковых волн?

3. **Формула Эйнштейна для фотона волноводной моды.** Найдите групповую скорость $v_г$ для волноводной моды с дисперсионным соотношением $\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_c^2$, где k – продольное волновое число, ω_c – частота отсечки. Получите зависимость частоты от групповой скорости $\omega = \omega(v_г)$. Сравнив ее с формулой Эйнштейна для релятивистской частицы

$E = mc^2 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$, покажите, что масса фотона волноводной моды равна $m_{\text{ф}} = \hbar\omega_c / c^2$, а его скорость $v = v_{\text{г}}$.

4. **Фотон в волноводе.** При распространении в волноводе с поперечным размером a фотон приобретает массу m. Оцените ее характерную величину в тракте Вашей домашней микроволновки.

5. **Рабочая частота микроволновки.** Ширина камеры домашней микроволновки, в которой Вы разогреваете пищу, составляет ≈ 30 см. Оцените частоту поля в камере ν . Чему на самом деле равна эта частота ν' , если принять во внимание, что СВЧ-мощность к камере еще нужно как-то подвести. Вернувшись домой, сравните Ваши оценку с данными, выбитыми на задней стенке микроволновки.

6. **Акустический канал в океане.** На глубинах между 500 м и 1000 м существует горизонтальный слой воды, в котором скорость звука $c = 1.5$ км/с существенно отличается от скорости звука выше и ниже этого слоя. В какую сторону она отличается по величине, если известно, что звук в этом слое распространяется на аномально большие расстояния (волноводный эффект). При каких частотах звука возможно наблюдение этого эффекта?

Лекция 7. Волновые пакеты

Спасибо тебе, Господи, что Ты создал все
нужное нетрудным, а все трудное – ненужным.
Григорий Саввич Сковорода, 1772

1. Распространение волнового пакета. 2. Расплывание волнового пакета. 3. Формула Рэлея. 4. Соотношение неопределенностей. 5. Гауссовский волновой пакет. 6. Дебройлевский волновой пакет. 7. Несколько примеров. 8. Расплывание дебройлевских пакетов и принципиальная тождественность квантовых частиц. 9. Эволюция фазы квазигармонической волны. 10. Предвестники Зоммерфельда и Бриллюэна.

1. Распространение волнового пакета

До сих пор мы рассматривали только гармонические волны. Однако экспериментально реализовать бесконечную гармоническую волну невозможно. В действительности волны распространяются в виде волновых пакетов. Волновой пакет представляет собой суперпозицию группы гармонических волн, частоты $\omega(k)$ и волновые числа k которых заключены в достаточно узком интервале. Он может быть представлен в виде

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(k) e^{-i\omega(k)t + ikx} \frac{dk}{2\pi}, \tag{7.1}$$

где амплитуда $u(k)$ отлична от нуля лишь в узком интервале значений $\Delta k \ll k_0$ вблизи k_0. Принцип суперпозиции подсказывает нам, что поскольку каждая гармоническая волна является решением волнового уравнения, то и весь пакет (7.1) будет таковым. Как всегда, мы рассматриваем простейший случай скалярной одномерной волны. Амплитуда $u(k)$ характеризует распределение волн по волновым числам и может быть найдена из начального условия к (7.1) при $t = 0$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$u(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0) e^{-ikx} dx. \tag{7.2}$$

Зачем в (7.1) нужно делить на 2π? Это связано с условием нормировки базиса плоских волн $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k)$, то есть $u(k)$ является фурье-образом функции $u(x,0)$.

Если распределение амплитуд волнового пакета $u(k)$ локализовано вблизи k_0, то функцию $\omega(k)$ можно вблизи k_0 разложить в ряд Тейлора:

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0)\omega_0' + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 \omega_0'' + \ldots, \tag{7.3}$$

где $\omega_0 = \omega(k_0)$, $\omega_0' = (d\omega / dk)_{k_0}$, $\omega_0'' = (d^2\omega / dk^2)_{k_0}$. Ограничиваясь в (7.3) первыми двумя слагаемыми, из (7.1) получаем

$$u(x,t) = e^{+i(k_0\omega_0' - \omega_0)t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(k) e^{ik(x - \omega_0' t)} dk\,. \tag{7.4}$$

Сравнивая (7.4) с (7.2), находим форму волнового пакета:

$$u(x,t) = e^{i(k_0\omega_0' - \omega_0)t} u(x - \omega_0' t, 0)\,. \tag{7.5}$$

Отсюда видно, что в сделанном приближении волновой пакет движется без изменения формы $u(x,0)$ огибающей с групповой скоростью $v_г = \omega_0'$. При этом внутренность «конверта» огибающей заполнена волной высокой частоты $\omega_0 - k_0 v_г$. Для того чтобы убедиться в этом, нужно вынести из интеграла (7.4) множитель $\exp(ik_0 x)$. Учет следующих членов разложения (7.3) для $\omega(k)$ показывает, что в процессе распространения волновой пакет расплывается.

Проанализируем применимость приближения, при котором мы ограничились в (7.3) первыми двумя членами. В этом приближении может случиться, что групповая скорость в веществе (например, в области аномальной дисперсии) окажется больше скорости света в вакууме. Это невозможно, поскольку с групповой скоростью переносятся энергия и масса, а их движение со сверхсветовыми скоростями недопустимо, запрещено принципами инвариантности и причинности. Разрешение этого противоречия состоит в недостаточности нашего приближения для рассмотрения таких случаев.

2. Расплывание волнового пакета

Вернемся к нашему разложению закона дисперсии (7.3). Итак, в первом приближении мы получили, что узкополосный $\Delta k \ll k_0$ пакет в произвольный момент представляет собой модулированную гармоническую волну (7.5). Ее фазовая скорость равна $v_ф = \omega_0 / k_0$, а огибающая, не меняя формы, перемещается с групповой скоростью $v_г = (d\omega / dk)_0$. Ясно, что так будет происходить лишь на ограниченном интервале времени, пока отброшенные в разложении (7.3) члены дают лишь малый набег фазы.

Оценим разброс фаз для времени t и главного (первого по счету) отброшенного в (7.3) слагаемого. Время t, до которого справедлива формула (7.5), определяется как

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k_0} \cdot \Delta k^2 t \ll \pi \ . \qquad (7.6)$$

Здесь $\Delta k \approx |k - k_0| \ll k_0$ – характерная ширина волнового распределения пакета. Таким образом, через характерное время

$$\tau \approx \left(\Delta k^2 \cdot \frac{d^2\omega}{dk^2}\right)^{-1} \qquad (7.7)$$

волновой пакет расплывется, то есть полностью утратит свою первоначальную форму.

Итак, основные особенности распространения волнового пакета связаны с тем, что среда, по которой он распространяется, обладает дисперсией, но при этом линейна. Это позволяет проанализировать эволюцию линейной суперпозиции волн с различными частотами аналитически до конца. В диспергирующей среде волны, имеющие разные частоты, распространяются с различными фазовыми скоростями. В результате изменяются взаимные фазы различных компонент пакета. Это приводит к изменению формы пакета по мере его распространения. Рассмотрим это изменение формы подробнее. Сначала выясним связь групповой и фазовой скоростей.

3. Формула Рэлея

Если известен закон дисперсии среды $\omega = \omega(k)$, то групповая $v_{\text{г}}$ и фазовая $v_{\text{ф}}$ скорости связаны соотношением Рэлея. Запишем $v_{\text{ф}} = \omega / k$ и $v_{\text{г}} = d\omega / dk$. Тогда

$$v_{\text{г}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_{\text{ф}} k)}{dk} = v_{\text{ф}} + k\frac{dv_{\text{ф}}}{dk} \ . \qquad (7.8)$$

Если закон дисперсии задан в виде зависимости фазовой скорости от длины волны $\lambda = 2\pi / k$, то формула Рэлея (7.8) имеет вид

$$v_{\text{г}} = v_{\text{ф}} - \lambda\frac{dv_{\text{ф}}}{d\lambda} . \qquad (7.9)$$

Эта формула доставляет нам простой графический способ сравнения величин фазовой и групповой скорости. Касательная к закону дисперсии $v_{\text{ф}} = v_{\text{ф}}(\lambda)$ в данной точке отсекает на оси ординат величину групповой скорости $v_г$. Таким образом, в области нормальной дисперсии $dv_ф / d\lambda > 0$ фазовая скорость больше групповой $v_ф > v_г$. В области аномальной дисперсии $dv_ф / d\lambda < 0$ получаем, что групповая скорость больше фазовой $v_г > v_ф$. Кроме того, из (7.9) видно, что групповая скорость может быть отрицательной. Это значит, что энергия переносится в сторону, противоположную волновому вектору. Такая волна называется *обратной*.

4. Соотношение неопределенностей

Если в начальный момент времени $t = 0$ огибающая пакета представляет собой функцию общего вида с характерной шириной Δx, то ширина ее фурье-образа (распределение пакета по волновым числам) Δk определяется соотношением неопределенности $\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$. Это чисто математический факт, выражающий соотношение между характерными ширинами любых двух функций x и k, связанных преобразованием Фурье. По мере эволюции пакета его ширина увеличивается. Компоненты пакета с разными k движутся с различными фазовыми скоростями. Это приводит к тенденции потери первоначальной когерентности и искажению формы пакета.

Можно ожидать, что пакет будет распространяться со скоростью, отличающейся от средней фазовой скорости составляющих его волн. Выше мы убедились, что пакет с не слишком широким спектром волновых чисел в интервале $\Delta k \sim (\Delta x)^{-1}$, а также в предположении не слишком быстрого изменения частоты $\omega(k)$ в этом интервале волновых чисел распространяется в этом приближении, в среднем с групповой скоростью $v_г = d\omega / dk$. Механизм расплывания пакета связан с тем, что в интервале Δk существует разброс групповых скоростей $\Delta v_г \sim \omega'' \Delta k$, что приводит за время t к расширению пакета на величину $\sim v_г \cdot t$.

Время жизни τ волнового пакета ширины Δx, таким образом, можно оценить как $\Delta v_г \cdot \tau \sim \Delta x$ или $\tau^{-1} \sim (\Delta k)^2 \cdot \omega''(k)$. За это время пакет расплывается до полной потери первоначальной формы. Полученная оценка, естественно, совпадает с (7.7). Отсюда видно, что узкий импульс расплывается быстро, поскольку он характеризуется широким спектром волновых чисел. И наоборот, широкий импульс расплывается медленно. Эти оценки применимы и в волновой механике, они лежат в основе принципа неопределенности Гейзенберга.

5. Гауссовский волновой пакет

В качестве конкретного примера, иллюстрирующего приведенные выше рассуждения, рассмотрим эволюцию пакета гауссовской формы. Его начальная форма

$$u(x,0) = u_0 \exp(ik_0 x - x^2 / l_0^2) \tag{7.10}$$

представляет собой «колпачок» ширины $\sim l_0$, заполненный несущей синусоидой с длиной волны $2\pi / k_0$. Поскольку каждая гармоника пакета $\exp(ikx - i\omega(k)t)$ распространяется независимо, с постоянной фазовой скоростью $\omega(k)/k$, для анализа удобно использовать представление Фурье. Фурье-образ (7.10) в k-пространстве также гауссов:

$$u(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 dx \cdot e^{i(k_0-k)x - x^2/l_0^2} = u_0 l_0 \sqrt{\pi} \cdot e^{-l_0^2 (k_0-k)^2/4} \tag{7.11}$$

с шириной распределения $\Delta k \approx l_0^{-1}$. Для достаточно широкого пакета, т.е. почти квазимонохроматической волны с $k_0 l_0 \gg 1$ можно использовать разложение (7.3). Удерживая в нем первые три слагаемых

$$\omega(k) = \omega_0 + (k-k_0)\omega_0' + (k-k_0)^2 \omega_0'' / 2 \tag{7.12}$$

и подставляя (7.12), (7.11) в (7.1), для формы пакета в произвольный момент времени t получаем

$$u(x,t) = u_0 l_0 \cdot e^{ik_0 x - i\omega_0 t} \cdot \frac{e^{-\frac{(x-\omega_0' t)^2}{(l_0^2 + 2it\omega_0'')}}}{\sqrt{l_0^2 + 2it\omega_0''}}. \tag{7.13}$$

Мы видим, что пакет представляет собой модулированную почти монохроматическую волну $u(x,t) = \exp(ik_0 x - i\omega_0 t)\psi(x,t)$ с комплексной огибающей, модуль которой равен

$$|\psi(x,t)| = \frac{u_0 l_0}{l(t)} \cdot \exp[-(x-\omega_0' t)^2 / l^2(t)]. \tag{7.14}$$

Ширина этого пакета составляет

$$l^2(t) = l_0^2 + (2t\omega_0'')^2 / l_0^2. \tag{7.15}$$

Фазовый множитель волны (7.13), заполняющей пакет, распространяется с фазовой скоростью $v_ф = \omega_0 / k_0$, тогда как огибающая (и энергия $|\psi|^2$ вместе с ней) распространяется с групповой скоростью $v_г = \omega_0'(k_0)$. Максимум пакета находится в точке $x = \omega_0' t$, потому что здесь происходит конструктивная интерференция волн с близкими частотами. Вдали же от этой точки волны гасят друг друга, и амплитуда пакета спадает.

Для звуковых и световых волн закон дисперсии линеен $\omega = ck$, так что групповая и фазовая скорости совпадают и одинаковы для всех гармоник. Волновой пакет не расплывается в пространстве, поскольку $\omega_0'' = 0$. Напротив, если $\omega_0'' \neq 0$, волны называются *диспергирующимися* (расплывающимися), поскольку разные гармоники распространяются с разными скоростями, что приводит к их разбеганию в пространстве. В частности, гауссовский пакет расплывается (диспергирует), его амплитуда со временем уменьшается вследствие роста $l(t)$.

6. Дебройлевский волновой пакет

Применим полученные выводы о расплывании пакета к дебройлевским волнам. Прежде всего обратим внимание на то, что амплитуда пакета заметно отлична от нуля лишь в небольшой области пространства, которую можно связать с местоположением квантовой частицы. Дебройлевская волна имеет вид

$$u(x,t) = e^{ikx - i\omega(k)t}, \tag{7.16}$$

где $k = p/\hbar$, $\omega(k) = \varepsilon(p)/\hbar$, p – импульс, $\varepsilon(p)$ – энергия частицы. Дебройлевская групповая скорость перемещения частицы как целого $v_{\text{г}} = \partial\omega/\partial k = \partial\varepsilon/\partial p = c^2 p/\varepsilon = v$ точно равна скорости v самой частицы. Благодаря этому возникает соблазн сопоставить движение главных максимумов волновых пакетов движению отдельных частиц. Положение частицы в пространстве можно характеризовать квадратом амплитуды волны $|u(x,t)|^2$, являющимся одновременно квадратом модуля волновой функции частицы.

Теперь выясним, можно ли связать дебройлевские волны (7.16) со структурой самой частицы, или же они описывают лишь её движение? Точка зрения, утверждающая, что можно, была предложена Э. Шредингером вскоре после открытия им фундаментального уравнения квантовой механики. Он предположил, что частица должна представлять собой сгусток волн, размазанный в пространстве, причём плотность его в данной точке равна $|u(r,t)|^2$. Однако такая интерпретация оказалась несостоятельной: как было показано выше, фазовые скорости волн, образующих волновой пакет, различны, и с течением времени он начинает энергично расплываться.

Оценим время расплывания волнового пакета из дебройлевских волн $\Delta t \approx m_0 (\Delta x)^2/\hbar$. В случае макроскопической частицы, имеющей массу 1 грамм и область локализации $\Delta x = 0{,}1$ см, время расплывания окажется $\Delta t = 10^{25}$ с. Это значительно больше времени жизни Вселенной $3 \cdot 10^{17}$ с, то есть такой волновой пакет фактически не будет расплываться. В случае же квантовой микрочастицы вроде электрона, чья масса порядка 10^{-27} грамм, если он локализован в области атомных размеров $\Delta x \sim 10^{-8}$ см, его волновой пакет расплывется почти мгновенно $\Delta t \sim 10^{-16}$ с. Из-за того, что волновой пакет дебройлевской частицы в общем случае расплывается весьма быстро, для их успешного описания как частиц следует составлять волновой пакет из волн, разброс значений волновых чисел которых невелик $\Delta k \ll k_0$. Это значит, что такой пакет нельзя локализовать в области $\sim k_0^{-1}$. Таким образом, если бы электрон был пакетом дебройлевских волн, то он не мог бы представлять собой устойчивое образование. Кроме того, невозможно было бы объяснить явление дифракции, заменив пучок электронов множеством волновых пакетов.

В настоящее время принята другая статистическая интерпретация, предложенная Борном. Согласно этой интерпретации, величина $|u|^2$ имеет смысл плотности вероятности нахождения частицы в данной точке пространства. Статистическая интерпретация не связывает дебройлевскую волну со структурой частицы. В частности, электрон вообще является точечным. При изменении волновой функции $u(x,t)$ изменяется лишь вероятность обнаружения частицы в какой-то точке пространства. В предельном случае монохроматической волны частица равновероятно может быть обнаружена в любой точке пространства. В классическом пределе $\hbar \to 0$ эффект расплывания отсутствует.

7. Несколько примеров

Выше мы обсудили поведение частицы на макро- и микроскопических расстояниях. Если макроскопическое тело величиной с дробинку имеет массу $m = 1$ г и размер $\Delta x \sim 1$ см, то из (7.1) получаем $\tau \sim 10^{14}$ лет. Это значительно превышает возраст Вселенной 10^{10} лет. Таким образом, объекты макромира не успевают расплыться за время своего существования. Перейдём к объектам микромира. Проверим, может ли электрон удержаться внутри области, размер которой равен боровскому радиусу a_B

В этом случае $\tau \sim 10^{-16}$ с, электрон практически мгновенно «уплывет» в другое место. Атомный электрон локализован внутри области $\Delta x \sim a_B \sim 10^{-8}$ см, откуда время расплывания 10^{-16} с оказывается сравнимым с периодом обращения электрона на орбите вокруг ядра. Теперь обсудим движение электрона в масштабах домашнего телевизора и околоземной орбиты.

Электрон в кинескопе телевизора, пройдя разность потенциалов ~ 20 кэВ, разгоняется до скорости ~ 10^{10} см/с. Пусть чёткость изображения удовлетворительна при его локализации на экране с точностью до $\Delta x \sim 0.1$ мм. Если размер пакета принять равным этой величине, то время расплывания получается равным 10^{-4} с. За это время электрон пролетит 10 км — расстояние, значительно превышающее размер телевизора. Итак, в трубке кинескопа не происходит расплывания электрона как волнового пакета.

В космофизическом эксперименте в Южном полушарии вблизи Северного магнитного полюса в атмосферу инжектировался пучок электронов с энергией примерно 10 кэВ. Электроны летели вдоль силовых линий магнитного поля Земли и были зарегистрированы в Северном полушарии вблизи Южного магнитного полюса. Длина пути была около 10^9 см. При скорости 10^{10} см/с такое расстояние электрон проходит примерно за десятую долю секунды. Отсюда следует величина расплывания пакета порядка нескольких миллиметров, что в 10^9 раз меньше длины пути электрона. Следовательно, в случае микроскопической частицы, двигающейся в макроскопических масштабах, расплывания волнового пакета не происходит.

Таким образом, расплывание волнового пакета может оказаться существенным только при движении микроскопической частицы в микроскопических масштабах, то есть там, где законы классической механики уже неприменимы. Уширение пакета $\Delta x = \hbar t / m\Delta x_0$ растет пропорционально t и складывается с начальной шириной Δx_0. Оценим количественно скорость расплывания волнового пакета в случае свободной частицы. Рассмотрим свободный электрон, локализованный в начальный момент времени в области атомных размеров $\Delta x_0 = 10^{-10}$ м. Спустя одну секунду $\Delta x \approx \hbar t / m\Delta x_0 = 1100$ км. Электронное облако окажется по своим размерам сравнимым с радиусом Луны. Подобного «расплывания» волнового пакета можно избежать, только поместив частицу в потенциальную яму.

Хотя квантовая теория позволяет точно определить поведение волновой функции в будущем, если она известна в начальный момент времени, однако это мало чем может помочь, поскольку волновая функция очень быстро расплывается по всему пространству. Тот факт, что центр масс локализованного в пространстве волнового пакета, составленного из волн де Бройля, перемещается со скоростью классической частицы, явился иллюстрацией предельного перехода квантово-механических законов движения к законам движения классической частицы по классической траектории. Аналогично, расплывание волнового пакета со временем способствовало принятию статистической интерпретации квантовой механики, поскольку из него следовало, что квадрат модуля волновой функции нельзя рассматривать как плотность частицы.

8. Расплывание дебройлевских пакетов и принципиальная тождественность квантовых частиц

Система квантовых частиц обладает свойствами, не имеющими аналога не только в классической физике, но и в квантовой механике одной частицы, если в состав системы входят одинаковые частицы, т.е. частицы с одинаковыми массами, зарядами и всеми другими внутренними характеристиками. Одинаковы, например, все электроны и все фотоны.

Специфическая особенность квантовой теории систем частиц заключается в принципиальной неразличимости или тождественности одинаковых частиц. У этого свойства нет аналога в классической физике, поскольку для неквантовой частицы всегда имеет смысл понятие ее состояния, которое в каждый момент времени задается координатами и импульсом этой частицы в данный момент времени. Поэтому одинаковые классические частицы в любых ситуациях отличимы друг от друга по их состояниям. Рассортировав частицы по их начальным состояниям, в дальнейшем за каждой из них можно проследить по ее траектории. Таким образом, одинаковые классические частицы обладают индивидуальностью, и поэтому классическая механика систем одинаковых частиц принципиально ничем не отличается от классической механики систем, состоящих из различных частиц.

В квантовой физике одинаковые частицы теряют свою индивидуальность, так как движутся не по траекториям, и, следовательно, проследить за каждой из них в принципе невозможно. Проиллюстрируем это на примере системы из двух одинаковых частиц, движущихся только вдоль одной оси x. Предположим, что в начальный момент времени $t=0$ частицы удалось рассортировать по их координатам, которые были определены с неперекрывающимися неточностями, соответственно $\Delta x_1(0)$ и $\Delta x_2(0)$. При этом, согласно соотношению неопределенностей импульс–координата $\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$, начальный импульс первой частицы можно определить только с точностью $\hbar / \Delta x_1(0)$, а второй – только с точностью $\hbar / \Delta x_2(0)$. Поэтому в момент времени t, достаточно близкий к начальному, неопределенности в значениях координат возрастут до величин порядка $\Delta x_1(t) = \Delta x_1(0) + \hbar t / \Delta x_1(0)m$ и $\Delta x_2(t) = \Delta x_2(0) + \hbar t / \Delta x_2(0)m$, если масса каждой частицы равна m. Возрастая, неопределенности в значениях координат частиц в конце концов перекроются, что произойдет тем скорее, чем точнее были определены положения частиц в начальный момент времени. Очевидно, что при регистрации какой-то одной частицы в области перекрывания неопределенностей координат частиц невозможно определить, какую именно из частиц зафиксировало регистрирующее устройство. Индивидуальность частиц таким образом утрачивается.

Из принципиальной неразличимости одинаковых частиц следует, что перестановка любых двух одинаковых частиц не влияет ни на одну из физических величин, характеризующих систему. Это означает, что при перестановке квантовых частиц не изменяется ни одна из квантовомеханических вероятностей. Таким образом, квантовые частицы принципиально тождественны.

9. Эволюция фазы квазигармонической волны

Итак, групповая скорость представляет собой скорость распространения огибающей волнового пакета. Если в дисперсионном уравнении связь между ω и k линейная и однородная $d\omega / dk = \omega / k$, то $v_{\text{г}} = v_{\text{ф}}$ и волновой пакет распространяется так же, как и отдельная монохроматическая волна. Это отличительный признак среды без дисперсии. Такое представление остается в силе и для сигнала с непрерывным спектром, занимающим узкий интервал около некоторой фиксированной частоты $\omega = \omega_0$. При таком подходе понятие групповой скорости справедливо, пока пакет не исказился, т.е. для сравнительно малых промежутков времени и для сигналов с узким спектральным диапазоном.

Введем теперь понятие групповой скорости из более общих соображений для квазигармонической волны, которая плавно модулирована и по амплитуде, и по частоте. Волна имеет вид $u(x,t) = a(x,t)\exp[i\varphi(x,t)]$, где φ – быстро осциллирующая фаза. Теперь помимо узкого пакета мы можем рассмотреть широкий, для которого изменения Δk имеют порядок самого k. Мгновенные частота $\omega(x,t)$ и волновое число $k(x,t)$ определяются производными фазы

$$\omega(x,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad k(x,t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad (7.17)$$

и удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial \omega}{\partial x}=0\,. \qquad (7.18)$$

Если разложить $\varphi(x,t)$ в ряд около какой-либо точки (x_0,t_0), то ω и k совпадут с локальными частотой и волновым числом, когда характерный масштаб изменений $\Delta\omega$ и Δk велик по сравнению с ω и k. Предположим, что на пространственных интервалах, много больших периода модуляции, но меньших характерного масштаба ее изменений, локальная частота близка к частоте синусоидальной волны с данным «локальным» значением k. Тогда ω и k связаны дисперсионным уравнением $\omega=\tilde{\omega}(k)$. Подставляя его в (7.18), получаем

$$\frac{\partial k}{\partial t}+v_{\text{г}}(k)\frac{\partial k}{\partial x}=0\,, \qquad (7.19)$$

где $v_{\text{г}}(k)=\partial\tilde{\omega}/\partial k$. Таким образом, можно дать еще одно важное для понимания кинематики волнового движения определение. Групповая скорость $v_{\text{г}}(k)$ есть скорость распространения возмущений волнового числа k. Уравнение (7.19) для k является гиперболическим нелинейным уравнением даже тогда, когда исходная задача линейна. Из этого уравнения следует постоянство k вдоль кривых – характеристик на плоскости (x,t), для которых $dx/dt=v_{\text{г}}$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что и $v_{\text{г}}=\text{const}$, т.е. характеристики – это прямые, определяемые уравнением $x-v_{\text{г}}t=\text{const}$.

Ясно, что вместо (7.19) можно использовать уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+v_{\text{г}}(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial x}=0\,, \qquad (7.20)$$

которое также нелинейно. О дисперсии, следовательно, можно говорить как о «частотной нелинейности». Левая часть (7.20) есть полная производная $d\omega/dt$, взятая вдоль линии $dx/dt=v_{\text{г}}$ на плоскости (x,t). Это означает, что вдоль указанной линии $\omega=\text{const}$. Но тогда $v_{\text{г}}(\omega)=\text{const}$ вдоль характеристик $t-x/v_{\text{г}}(\omega)=f(\omega)$, где $f=\text{const}$ для данного ω. Зависимость $f(\omega)$ определяется модуляцией частоты при $x=0$. Таким образом, общее решение уравнения (7.20) имеет вид

$$\omega=F[t-x/v_{\text{г}}(\omega)], \qquad (7.21)$$

где $F(f)$ – функция, обратная к $f(F)$. Решение (7.21) мы подробно обсудим в лекции 9 в связи с теорией простых волн. Их поведение определяется тем, что каждая точка профиля простой волны движется со скоростью $v(\omega)$ – постоянной, но разной для разных ω. Поэтому можно представить модулированную волну как совокупность независимых групп волн, движущихся каждая со своей скоростью.

10.Предвестники Зоммерфельда и Бриллюэна

Для удачной догадки недостаточно просто удачи.
Джейн Остин

Интересное явление наблюдается при распространении электромагнитных пакетов с резким передним фронтом по диэлектрической среде. На больших расстояниях впереди рассматриваемого фронта ему предшествуют так называемые «предвестники», распространяющиеся со скоростью света c. Они формируются фурье-компонентами с большими частотами ω, для которых диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(\omega)\approx 1$.

Проанализируем применимость приближения, при котором мы ограничились в (7.3) первыми двумя членами. В этом приближении может случиться, что групповая скорость в веществе (например, в области аномальной дисперсии) окажется больше скорости света в вакууме. Это невозможно, поскольку с групповой скоростью переносятся энергия и масса, а их движение со сверхсветовыми скоростями недопустимо, запрещено принципами инвариантности и причинности. Разрешение этого противоречия состоит в недостаточности нашего приближения для таких случаев.

Будем для определенности говорить о свете в веществе. Дисперсия приводит к интерференции более быстрых и более медленных волн. Поэтому передний фронт волнового пакета (импульса) распространяется в среде со скоростью света в вакууме, поскольку вторичные, более медленные волны не могут его догнать. Эта часть импульса прибывает в точку наблюдения первой, а амплитуда ее мала. Таким образом, необычным свойством коротких импульсов, распространяющихся в среде с частотной дисперсией, является то, что высокочастотная составляющая импульса распространяется со скоростью света в вакууме. Это явление было предсказано Зоммерфельдом и Бриллюэном в 1914 г. и называется *оптическим предвестником*. Зоммерфельд и Бриллюэн асимптотическим методом седловой точки рассмотрели распространение синусоидального импульса, умноженного на функцию Хевисайда (резкий передний фронт импульса), в среде с одним резонансом Лоренца. Они нашли, что раньше всех в точку наблюдения приходит высокочастотный предвестник (предвестник Зоммерфельда), который распространяется со скоростью света в вакууме, следом за ним приходит другой предвестник (предвестник Бриллюэна) с низкочастотной составляющей сигнала, который распространяется с фазовой скоростью сигнала, а за ним уже приходит основной сигнал с групповой скоростью.

Физический смысл такого распространения связан с резкой ограниченностью переднего фронта пакета, перед которым никакого возмущения нет. Скорость такого фронта точно совпадает со скоростью света в вакууме c. В этом легко убедиться, рассмотрев среду как вакуум, в который вкраплены молекулы и атомы вещества. Свет распространяется в вакууме между атомами и молекулами вещества всегда со скоростью c. Когда световое возмущение достигает какого-либо атома, электроны и атомные ядра приходят в колебания и сами становятся центрами излучения новых электромагнитных волн. И вторичные волны накладываются на первичную волну и тем самым определяют все волновое поле в среде. Но из-за инерции электроны и ядра не сразу приходят в колебания. Пока электроны и ядра не пришли в колебания, они не излучают вторичные волны, а поэтому не оказывают влияния на распространение возмущения. Поэтому ясно, что передовой фронт должен распространяться в среде с той же скоростью, что и в вакууме. Но почему же при измерении скорости света получается не c, а другая величина? Дело в том, что передовой фронт несет слишком малую энергию, а приемники недостаточно чувствительны, чтобы ее обнаружить.

11. Контрольные вопросы к лекции 7

1. Что такое волновой пакет?
2. Запишите соотношение неопределенности для ширины пакета.
3. Что такое дисперсионное соотношение и дисперсия?
4. Чему равна фазовая скорость?
5. Чему равна групповая скорость?
6. Запишите формулу Рэлея, связывающую $v_ф$ и $v_г$.
7. Запишите время расплывания волнового пакета.
8. Запишите время расплывания гауссовского волнового пакета.
9. Запишите время расплывания дебройлевского волнового пакета.
10. Запишите время расплывания клейн-гордоновского волнового пакета.
11. Каково условие отсутствия дисперсии в среде с $\omega = \omega(k)$?
12. Чему равна фазовая скорость в среде с показателем преломления $n(\omega)$?
13. В каких случаях групповая скорость может быть больше фазовой?
14. Как тождественность частиц связана с расплыванием волновых пакетов?
15. Что такое предвестник Зоммерфельда, какова его скорость?

16. Что такое предвестник Бриллюэна, какова его скорость?

12. Задачи к лекции 7

1. **Ортонормированность плоских волн.** Докажите, что условие ортонормированности плоских волн имеет вид $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x)$.

2. **Гауссовский пакет.** Вычислите зависимость ширины $l(t)$ гауссовского волнового пакета от времени.

3. **Заполнение конверта.** Покажите, что огибающую волнового пакета заполняет быстропробегающая волна с фазовой скоростью $v_{ф} > v_{г}$.

4. **Аномальная дисперсия.** При каком условии в среде с дисперсией $\omega = \omega(k)$ групповая скорость больше фазовой?

5. **Скорости $v_{г}$ и $v_{ф}$.** Найдите групповую и фазовую скорости дебройлевских волн $(\varepsilon(p) = p^2/2m)$, клейн-гордоновских волн $(\varepsilon(p) = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4})$, плазменных волн $(\omega^2(k) = \omega_p^2 + c^2k^2)$.

6. **Нелокальное волновое уравнение** В первой среде волна описывается интегродифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x - x') \cdot u(x',t)\, dx' = 0 .$$

Во второй среде закон дисперсии $\omega = \Omega(k)$ известен, причем $\Omega(k)$ – фурье-образ функции ядра $\Omega(x)$ первой среды:

$$\Omega(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x) e^{-ikx} dx .$$

В какой среде фазовая скорость $v_{Ф}$ волны $u(x,t) = a\exp(ikx - i\omega t)$ больше? Вынесите Ваше суждение о связи дисперсии с пространственной и временной нелокальностью.

7. **Дисперсия неполярного диэлектрика.** Простейшим представлением об однородном неполярном диэлектрике служит модель Лоренца. Электроны, связанные в нейтральных неподвижных молекулах, совершают собственные колебания с частотой ω_0. Концентрация электронов такова, что их продольные длинноволновые колебания в диэлектрике имеют частоту $\omega_e > \omega_0$. Тогда в пренебрежении диссипацией показатель преломления диэлектрика равен

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_e^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \, .$$

Нарисуйте дисперсионные зависимости $\omega(k)$ электромагнитных волн в таком диэлектрике. Укажите окна прозрачности, найдите длинноволновые и коротковолновые групповые скорости.

8. **Неявное дисперсионное соотношение.** Вычислите групповую скорость $v_{\text{гр}}$, если дисперсионное соотношение задано в неявной форме $D(\omega, k) = 0$.

9. **Групповая скорость.** Найдите групповую скорость $v_{\text{г}}$, если дисперсия среды задана соотношениями a) $v_{\text{ф}} = v_{\text{ф}}(k)$; b) $v_{\text{ф}} = v_{\text{ф}}(\lambda)$; c) $v_{\text{ф}} = c / n(\omega)$; d) $v_{\text{ф}} = a\lambda^b$; e) $v_{\text{ф}} = c / n(\lambda)$.

10. **Коллапсы и возрождения волнового пакета.** Плоский волновой пакет распространяется в среде, в которой фазовая скорость линейно зависит от длины волны $v_{\text{ф}} = a + b\lambda$, где a и b – положительные постоянные. Покажите, что форма пакета будет периодически восстанавливаться через промежуток времени $\tau = b^{-1}$.

11. **Формула Рэлея.** Докажите формулу Рэлея: $v_{\text{г}} = v_{\text{ф}} - \lambda dv_{\text{ф}} / d\lambda$. Используя её, придумайте геометрическое построение, позволяющее сравнить групповую и фазовую скорости. При каких условиях групповая скорость больше фазовой?

12. **Предвестники Зоммерфельда и Бриллюэна.** Короткий одномерный импульс (волновой пакет) распространяется в среде с частотной дисперсией, показатель преломления которой $n(\omega)$. Покажите, что высокочастотная составляющая импульса распространяется в среде со скоростью, большей групповой. Раньше всех в точку наблюдения приходит высокочастотый предвестник Зоммерфельда, который распространяется со скоростью света в вакууме c. Следом за ним приходит предвестник Бриллюэна с низкочастотной составляющей сигнала, распространяющегося с фазовой скоростью $v_{\text{ф}}$. И уже следом за ними приходит основной сигнал с групповой скоростью $v_{\text{г}}$. Воспользуйтесь асимптотическим методом седловой точки. Рассмотрите для простоты среду с одним резонансом Лоренца.

Лекция 8. Температурные волны

Мастерство – это умение
скрывать его отсутствие.
Один известный альтист

1. Уравнение теплопроводности. 2. Температурные волны. 3. Запаздывание прогревания Земли. 4. Вечная мерзлота. 5. Скин-эффект при быстропеременном токе. 6. Нелинейная теплопроводность. 7. Режимы с обострением. 8. Температурная ударная волна. 9. Нелинейное горение. 10. Взрывной режим развития тепловой неустойчивости.

1. Уравнение теплопроводности

Процессы теплопроводности и диффузии описываются одним и тем же уравнением в частных производных. Уравнение теплопроводности (диффузии) представляет собой уравнение непрерывности для плотности внутренней энергии (числа частиц) сплошной среды:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int cTdV = -\oint \mathbf{j}d\mathbf{S}\,, \qquad (8.1)$$

где c – удельная теплоемкость при постоянном давлении, T – температура (плотность числа частиц). Плотность потока тепла (частиц) $\mathbf{j}$ при не слишком больших градиентах температуры (плотности числа частиц) дается законом Фурье (Фика): $\mathbf{j} = -\kappa\nabla T$, где κ – теплопроводность среды. Полагая c и κ постоянными, получаем

$$T_t = \chi\Delta T, \qquad (8.2)$$

где $\chi = \kappa / c$ – температуропроводность (коэффициент диффузии) среды.

Уравнение теплопроводности (8.2) является параболическим и не имеет волновых решений. Проиллюстрируем это обстоятельство, найдя автомодельное решение одномерного уравнения теплопроводности. Будем искать решение задачи Коши:

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = \delta(x)\,, \qquad (8.3)$$

где для единообразия с другими лекциями для температуры введено обозначение $u(x,t)$. Задача (8.3) инвариантна относительно преобразований растяжения:

$$t \to \lambda^{\alpha}t, \quad x \to \lambda x, \quad u \to \lambda^{\beta}u. \qquad (8.4)$$

Для того чтобы относительно (8.4) было инвариантно уравнение (8.3), необходимо, чтобы $\alpha = 2$. Для инвариантности начального условия необходимо $\beta = -1$. Здесь следует отметить, что при преобразовании (8.4) $u'(x') = \lambda^{\beta} u(x)$. У преобразований (8.4) есть два инварианта $u\sqrt{t}$ и $x/\sqrt{t}$, следовательно, один из них является функцией другого. Таким образом, из симметрии (8.4) задачи (8.3) следует автомодельная подстановка:

$$u(x,t) = t^{-1/2} f(\xi), \quad \xi = xt^{-1/2}. \tag{8.5}$$

Подставляя (8.5) в уравнение теплопроводности, получаем для функции $f(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$2f'' + \xi f' + f = 0. \tag{8.6}$$

Эта функция должна при $\xi = \pm\infty$ обращаться в ноль вместе со своей производной. Это следует из закона сохранения тепла (вещества):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi = 1, \tag{8.7}$$

который, в свою очередь, является прямым следствием (8.3). Интегрируя с учетом этого обстоятельства (8.6), получаем $2f' + \xi f = 0$. Это дает $\ln f = -\xi^2/4 + \mathrm{const}$, а константа определяется из закона сохранения (8.7). Полученное автомодельное решение

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \tag{8.8}$$

описывает «диффузионное» расплывание тепла. Характерная ширина решения (8.8) растет как $\propto t^{1/2}$, а максимальное значение $u(0,t)$ убывает как $\propto t^{-1/2}$. Соответственно, площадь (8.7) под кривой сохраняется.

Полученный закон расплывания верен не только для начального распределения в виде δ-функции. Он верен для любого начального распределения и является следствием общего интегрального соотношения для среднего квадрата ширины распределения тепла:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x,t)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx}. \tag{8.9}$$

Знаменатель (8.9) представляет собой сохраняющуюся величину – полное количество тепла (8.7). В этом легко убедиться, проинтегрировав уравнение теплопроводности $u_t = u_{xx}$ по всем x. Если уравнение теплопроводности умножить на x^2 и проинтегрировать по всем x, то получим временную динамику среднего квадрата ширины распределения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle x^2 \right\rangle = 2\,. \tag{8.10}$$

Отсюда следует, что средний квадрат ширины распределения тепла растет диффузионным образом: $\left\langle x^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle_0 + 2t$.

Полученное выше автомодельное решение, в силу выбранного начального условия (8.3), представляет собой функцию Грина:

$$G(x-x',t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4t} \right) \tag{8.11}$$

для уравнения теплопроводности. Его решение при произвольном начальном условии $u(x,0)$ имеет вид

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-x',t)u(x',0)dx' . \tag{8.12}$$

Это следует из линейности уравнения теплопроводности и очевидного равенства

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x')u(x',0)dx' . \tag{8.13}$$

Итак, однородное уравнение теплопроводности (8.3) не имеет волновых, нерасплывающихся решений. Тем не менее возможны ситуации, когда распространяются температурные волны.

2. Температурные волны

Температурные волны можно сформировать только при периодическом воздействии на среду. Если в каком-либо месте среды температура периодически меняется во времени, то это приводит к периодическим изменениям температуры и в остальных областях среды.

Пусть среда однородна и заполняет полупространство $x > 0$. Температура на поверхности среды $x = 0$ задана и меняется во времени по гармоническому закону $T(0,t) = T_0 + T_1 \cos\omega t$. Она колеблется вокруг некоторого среднего стационарного значения для всего полупространства $T_0 = \text{const}$. Задача о температуре Земли впервые была решена Фурье. Именно для этих целей он и придумал свой знаменитый метод. Будем искать решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{8.14}$$

в полупространстве с температуропроводностью $\chi = \text{const}$ в виде волны

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-i\omega t + ikx} . \tag{8.15}$$

Подставляя (8.15) в (8.14), получаем закон дисперсии в виде

$$i\omega = +\chi k^2 . \tag{8.16}$$

Поскольку частота ω задана граничным условием положительной и вещественной, волновое число будет комплексным $k = \pm\sqrt{\omega / 2\chi}(1+i)$. Поскольку колебания температуры должны затухать вглубь среды, решение с верхним знаком следует отбросить. Таким образом, решение в действительной форме имеет вид

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\sqrt{\omega/2\chi}\cdot x} \cos(\omega t - \sqrt{\omega / 2\chi} \cdot x) . \tag{8.17}$$

С волновой точки зрения полученное решение представляет собой эванесцентную (затухающую) температурную волну. Фазовая скорость этих волн $v_{\text{ф}} = \sqrt{2\chi\omega}$ говорит об их сильной дисперсии. Глубина затухания температурных волн вглубь среды $\delta = \sqrt{2\chi / \omega}$ падает с ростом частоты их возбуждения как $\propto \omega^{-1/2}$. Это служит основанием называть возбуждение таких волн тепловым скин-эффектом.

Ярким примером таких температурных волн являются волны, возбуждаемые в поверхностном слое Земли суточными и годовыми колебаниями температуры ее поверхности. Периодами таких колебаний являются, очевидно, год и сутки. Таким образом, глубины проникновения суточных и годовых температурных волн относятся как $\delta_{\text{год}} / \delta_{\text{сут}} \approx 20$. Из опыта известно, что колебания температуры от нагревания земной поверхности днем и охлаждения ночью не влияют на температуру грунта уже на глубине $\sim 0{,}2$ м. Годовые же колебания температуры земной поверхности, связанные с нагреванием ее летом и охлаждением зимой, перестают чувствоваться на глубине $\sim 1{,}5$ м. Глубже температура грунта совершенно не зависит от температурных колебаний поверхности Земли.

3. Запаздывание прогревания Земли

Температура поверхности Земли является периодической функцией времени (годовая или суточная вариация). Формула (8.17) показывает, что амплитуда температурной волны убывает экспоненциально, так что глубина прогрева $\delta \approx \sqrt{2\chi / \omega}$. Одновременно происходит отставание волны по фазе от температуры поверхности, тем больше, чем глубже x. Рассмотрим численные данные. Температуропроводность обычного грунта средней полосы России составляет $\chi \approx 2 \cdot 10^{-3}$ см^2/с. Для годичной вариации $2\pi/\omega \approx 3\cdot 10^7$ с глубина прогрева около $\delta \approx 1{,}5$ м, а глубина, на которой температурное колебание отстает на полпериода (на полгода зима-лето) около 4 м. На этой глубине лето тогда, когда на поверхности зима. Сдвиг фаз на полпериода (π) происходит на глубине δ' такой, что $\delta'\sqrt{\omega/2\chi} = \pi$. То есть эта глубина $\delta' = \pi\delta$ в три раза глубже глубины прогревания δ. Картина становится более резко выраженной, если от годичной перейти к суточной вариации температуры. Глубина прогрева уменьшается тогда в $\sqrt{365} \approx 20$ раз. Поэтому затухание и отставание по фазе для суточной вариации наступает в 20 раз раньше. Например, отставание по фазе на половину суток наступает на глубине ≈ 20 см.

4. Вечная мерзлота

При каких условиях возникает вечная мерзлота? Тогда, когда средняя температура на поверхности Земли T_0 меньше температуры замерзания воды, то есть $0\,^\circ\mathrm{C}$. В соответствии с нашими расчетами это значит, что в высоких широтах глубже полутора метров все заморожено навсегда. Из века в век, из тысячелетия в тысячелетие. Именно поэтому в мерзлоте возможно сохранение останков доисторических животных.

Вследствие теплового скин-эффекта температура в глубине грунта остается практически постоянной и равной приближенно средней годовой температуре на поверхности в этом месте. Это обстоятельство можно использовать для простого измерения средней годовой температуры. Если последняя оказывается ниже $0\,^\circ\mathrm{C}$, образуется упомянутая выше вечная мерзлота. В этом случае почва оттаивает лишь на глубине $\sim\delta$. Из-за сдвига фазы тепловой волны оттаивание отстает, более или менее значительно, от температуры на поверхности. Этот же эффект приводит к запаздыванию таяния толстого льда. Например, в Арктике он тает только в сентябре.

Для некоторых долгосрочных прецизионных измерений необходима высокая стабильность температуры, которую проще всего достигнуть, «закопавшись» в землю. При глубине ~ 10 м годовые колебания температуры снижаются до $0{,}1\,^\circ\mathrm{C}$. Это явление издревле использовалось людьми для создания естественных холодильников – погребов. Интересно отметить, что из-за сдвига фазы летняя температура воздуха в погребе на глубине $\pi\delta \approx 5$ м ниже зимней, хотя эта разница и невелика: $(T_З - T_Л) \approx (\Delta T)_0 e^{-\pi} \approx 3\,^\circ\mathrm{C}$. Здесь $(\Delta T)_0 \approx 80\,^\circ\mathrm{C}$ – годовые колебания температуры, например, в Сибири.

5. Скин-эффект при быстропеременном токе

Совершенно аналогичное тепловому скин-эффекту явление имеет место и при протекании переменного тока в металлах. Переменный ток, в отличие от постоянного, не распределяется равномерно по сечению проводника, а имеет большую плотность у его поверхности. Поэтому это явление также получило название скин-эффекта.

В металлах из-за их высокой проводимости $\sigma \gg \varepsilon\omega$ основную роль играет ток проводимости $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, по сравнению с которым током смещения $\mathbf{j} = \varepsilon\dot{\mathbf{E}} / 4\pi$ можно пренебречь. Благодаря этому проникновение магнитного поля в металл вполне аналогично процессу теплопроводности тепла при прогревании грунта, рассмотренному выше. В пренебрежении током смещения уравнения Максвелла в металле имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{8.18}$$

где $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Применяя ко второму уравнению (8.18) операцию ротор и учитывая, что $\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - \Delta\mathbf{a}$ и $\nabla\mathbf{H} = 0$, для магнитного и электрического полей получаем уравнение теплопроводности. Запишем его для магнитного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \chi \cdot \Delta\mathbf{H}, \tag{8.19}$$

в котором роль коэффициента температуропроводности (диффузии) играет величина $\chi = c^2 / 4\pi\sigma\mu$. В переменном поле с частотой ω зависимость всех величин от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$, уравнение (8.19) принимает вид

$$\Delta\mathbf{H} + \frac{4\pi\gamma\mu\omega i}{c^2}\mathbf{H} = 0. \tag{8.20}$$

Ясно, что при высоких частотах магнитное поле проникает лишь в тонкий поверхностный слой проводника. Исследование распределения поля в этом поверхностном слое можно привести в общем виде при любой форме сечения, рассматривая небольшой участок поверхности как плоский. Тогда необходимо решить (8.20) для проводящей среды, ограниченной плоской поверхностью, вне которой поле имеет заданное значение $\mathbf{H_0}\exp(-i\omega t)$, где $\mathbf{H_0}$ параллелен поверхности проводника. Искомое поле $\mathbf{H}$ зависит только от координаты z, направленной вглубь проводника перпендикулярно поверхности. Уравнение (8.20) перепишем в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{H} = 0\,, \qquad (8.21)$$

где $k = \sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}(1+i)/c$. Из двух корней следует выбрать тот, при котором поле обращается в ноль вдали от поверхности:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H_0} e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)}\,. \qquad (8.22)$$

Здесь глубина проникновения $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ и определяет толщину скин-слоя. Вместе с магнитным и электрическим (перпендикулярным магнитному) полем по такому же закону убывает вглубь проводника плотность токов Фуко $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

Мы видим полную аналогию электродинамического скин-эффекта явлению затухания температурных волн. Здесь также глубина проникновения δ убывает с частотой как $\omega^{-1/2}$. Например, для меди $\sigma \sim 5 \cdot 10^{+17}$ с$^{-1}$, $\mu \approx 1$ для тока промышленной частоты $\nu = 50$ Гц получаем $\delta \approx 1$ см. Это значит, что бытовые токи в наших домах текут по всему сечению проводки. Однако уже при $\nu = 500$ кГц получаем $\delta \approx 0{,}01$ см. Это значит, что при протекании токов столь высокой частоты сердцевина провода не нужна, она оказывается просто не задействованной в переносе зарядов. Это и послужило основанием для перехода к коаксиальным кабелям.

Можно дать и качественное объяснение скин-эффекта. При протекании по проводнику переменного тока последний наводит вблизи поверхности переменное же магнитное поле, перпендикулярное току. Будучи переменным, это магнитное поле, в свою очередь, наводит в проводнике замкнутые кольцевые токи Фуко. Эти кольца располагаются в плоскостях, перпендикулярных поверхности и параллельных току. Кольцевые токи «убивают» друг друга всюду в объеме проводника, за исключением области вблизи поверхности. Только по этому скин-слою протекает ток.

6. Нелинейная теплопроводность

Суть же метода, мной применённого тут,
Объяснить я подробней готов,
Если есть у вас пара свободных минут
И хотя бы крупица мозгов.
Л. Кэрролл. Охота на Снарка

При сильной зависимости теплоемкости и теплопроводности от температуры уравнение теплопроводности (8.2) становится нелинейным. Важной особенностью его решений является наличие режимов с обострением и взрывных режимов. Для возникновения таких режимов необходима сильная зависимость теплоёмкости $c(u)$, теплопроводности $k(u)$ и тепловыделения $f(u)$ среды от температуры u. Используя такой «тепловой» язык, уравнение (8.2) можно записать в виде

$$c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + f(u)\,. \tag{8.23}$$

Подобные сильные зависимости характерны для нелинейного горения среды, высокотемпературных процессов в плазме, эффектов локализации и инерции тепла и т.д. Режимы с обострением характеризуются обращением $u(x)$ в ноль при конечном значении x. Физический смысл такого обострения заключается в том, что решение $u(x)$ локализовано на конечном интервале координаты, и у него отсутствует «диффузионный» хвост. В таких случаях говорят об обострении по координате. Кроме того, возможны режимы с обострением по времени. В этом случае решение $u(t)$ неограниченно растет и обращается в бесконечность за конечное время. Такие режимы, называемые также *взрывными*, возникают при резкой зависимости тепловыделения в среде от её температуры. Например, в задачах о динамике народонаселения Земли и химическом взрыве. Они описывают процессы нелинейного горения и теплопроводности в активных средах.

Основные особенности диссипативных процессов в активных средах связаны с их нелинейностью. Первое следствие нелинейности – нарушение принципа суперпозиции, свойственного линейным однородным задачам. Это обеспечивает неисчерпаемое множество возможных направлений эволюции, а также определяет возникновение в среде дискретного набора пространственно-временных масштабов. Они характеризуют автономные свойства среды, не зависящие от внешних воздействий. Второе следствие – нелинейные диссипативные среды могут проявлять некоторую внутреннюю упорядоченность, связанную со спонтанным нарушением симметрии. Она проявляется в спонтанном возникновении в среде сложных диссипативных структур, устойчивых к возмущениям. В ходе эволюции, таким образом, происходит процесс самоорганизации среды.

Особое место среди таких нелинейных процессов занимают неограниченные решения, иначе называемые *режимами с обострением*. Такие решения неограниченно возрастают в течение конечного промежутка времени. То, что такие сингулярные по времени решения имеют физический смысл, было известно еще из задач теплового взрыва, кумуляции ударных волн, самофокусировки световых пучков в нелинейных средах, нестационарных структур в магнитной гидродинамике, нелинейных задачах лазерной термохимии и т.д. До настоящего времени до конца не ясно, какие свойства нестационарных диссипативных процессов они описывают. Свойства эти очень необычны и парадоксальны с позиций обычных взглядов на нестационарные диссипативные процессы.

7. Режимы с обострением

Сформулируем критерии возникновения режимов с обострением. Обострение по времени (взрывной режим) возникает при достаточно быстром возрастании $f(u)$ с ростом u. Рассмотрим однородную среду $\partial u/\partial x = 0$. Тогда, интегрируя (8.23), получаем $\int_{u_0}^{u_1} c(u')du/f(u) = t + \text{const}$, то есть «температура» среды u обращается в бесконечность за конечное время при выполнении условия

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{c(u)du}{f(u)} < \infty, \qquad (8.24)$$

где u_0 – некоторое фиксированное значение $u(t_0) = u_0$. При выполнении условия (8.24) «тепловой взрыв» среды наступает в момент времени обострения: $\tau = t_0 + \int_{u_0}^{\infty} c(u)du/f(u)$.

Вопрос о пространственном обострении касается формы профиля температурной волны. Обычно холодный хвост фронта волны простирается до бесконечности (диффузионное «размытие», бесконечная скорость диффузионного распространения). Но при определённых условиях фронт имеет резкую границу, т.е. температура u обращается в ноль с конечной производной u_x, и далее перед фронтом u равна нулю (финитное решение). Возникает обострение по координате. Для этого необходимо, чтобы $k(u)$ достаточно быстро возрастала с ростом u.

Рассмотрим температурную волну, описываемую уравнением (8.23) при $f(u) \equiv 0$. Считая, что на коротких временах фронт описывается автомодельным решением $u(\xi)$ с $\xi = x - vt,\ v = \text{const}$, и интегрируя $(k(u)u_\xi)_\xi + vc(u)u_\xi = 0$, с учетом $u(+\infty) = u_\xi(+\infty) = 0$ получаем $\int^u k(u)du/w(u) = -v\xi + \text{const}$, где $w(u) = \int_0^u c(u')du'$ – удельная энтальпия среды. Таким образом, финитное решение с резким краем фронта (температурная ударная волна) получается при выполнении условия

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{k(u)du}{w(u)} < \infty, \qquad (8.25)$$

или, что то же самое, $\int_{u_0}^{\infty} \chi(w) w^{-1} dw < \infty$ (см. задачу 4).

И, наконец, в условиях нелинейного горения ($f(u) \neq 0$) могут возникать конечные домены с резкими границами (локализация горения, инерция тепла). Рассмотрим такую покоящуюся границу ($u_t = 0$), описываемую уравнением $\left(k(u)u_x\right)_x + f(u) = 0$. Интегрируя его с учётом $u(+\infty) = u_x(+\infty) = 0$, получаем $\left(k(u)u_x\right)^2 + 2\int^u k(u) f(u) du = \text{const}$. Постоянная интегрирования равна нулю из-за граничных условий, так что $k(u)u_x = \sqrt{-2V(u)}$, где $V(u) = \int_0^u k(u') f(u') du'$ – тепловое обобщение механического потенциала (см. лекцию 12). Таким образом, резкая граница области локализованного горения возникает при условии

$$\int_0^{u_0} \frac{k(u)du}{\sqrt{-2V(u)}} < \infty. \tag{8.26}$$

Рассмотрим возникновение таких режимов с обострением на нескольких конкретных примерах.

8. Температурная ударная волна

Процесс линейной теплопроводности обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения распространяется мгновенно на все пространство. Например, тепло из точечного источника распространяется так, что уже в следующий момент времени температура среды обращается в ноль лишь асимптотически на бесконечности. Это свойство сохраняется и для среды с зависящей от u теплопроводностью $k(u)$, если она не слишком быстро возрастающая функция u. Если же теплопроводность возрастает достаточно быстро, то это приводит к замедлению процесса диффузии тепла. В результате влияние любого теплового возмущения будет простираться в каждый момент времени лишь на некоторую конечную область пространства. Вне этой области температура среды u строго равна нулю. Возникает режим обострения по координате в соответствии с критерием (8.26). Таким образом, речь идет о распространении температурной ударной волны с резким фронтом.

В качестве примера рассмотрим среду с $f(u) = 0$ и степенными зависимостями теплоёмкости и теплопроводности от u. Тогда решение задачи сводится к уравнению для внутренней энергии w (см. задачу 9); далее, для единообразия изложения сохраним за ней обозначение u:

$$u_t = (u^n u_x)_x. \tag{8.27}$$

Будем искать его симметричное решение $u(-x,t)=u(x,t),$ удовлетворяющее начальному условию $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)dx=1.$ Обратимся к теоретико-групповым соображениям. Уравнение (8.27) инвариантно относительно группы растяжений:

$$t'=Lt,\ x'=L^{\alpha}x,\ u'=L^{\beta}u\ . \qquad (8.28)$$

Показатели α и β однозначно фиксируются требованием инвариантности относительно группы (8.28) как уравнения, так и начального условия: $L^{\alpha}L^{\beta}=1$ и $L^{\beta-1}=L^{\beta(n+1)-2\alpha}.$ Отсюда $\alpha=1/(n+2),$ $\beta=-1/(n+2).$ Инвариантами группы являются две величины $ut^{1/(n+2)}$ и $xt^{-1/(n+2)},$ так что автомодельное решение (8.27) следует искать в виде

$$u(x,t)=t^{-1/(n+2)}\cdot f(xt^{-1/(n+2)})\ . \qquad (8.29)$$

Автомодельная подстановка (8.29) приводит уравнение (8.27) к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$(f^n f')'+(n+2)^{-1}\cdot(\xi f')=0, \qquad (8.30)$$

где $\xi=xt^{-1/(n+2)}.$ Уравнение (8.30) легко интегрируется:

$$f^n f'+(n+2)^{-1}\cdot\xi f=C_1. \qquad (8.31)$$

Поскольку мы рассматривали симметричное решение, то $f'(0)=0$ и $C_1=0.$ Интегрируя еще раз, получаем

$$u(x,t)=t^{-\frac{1}{n+2}}\left[C-\frac{nx^2}{2(n+2)t^{2/n+2}}\right]^{1/n} \qquad (8.32)$$

при $x^2<x_{\phi}^2=2C(n+2)t^{2/n+2}/n$ и $u(x,t)=0$ при $x^2>x_{\phi}^2.$ Константа интегрирования находится из начального условия $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)dx=1:$

$$C=\left[\frac{n(n+2)}{8\pi}\cdot\frac{\Gamma^2(1/n+1/2)}{\Gamma^2(1/n)}\right]^{\frac{n}{n+2}}, \qquad (8.33)$$

где $\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx$ – гамма-функция Эйлера. В частности, при $n=2$ получаем $C=\pi^{-1}.$ Данное решение соответствует температурной ударной волне при $n>0.$ Действительно, вблизи от края фронта $u\sim[x_{\phi}^2-x^2]^{1/n}$ или $u\sim\left|x-x_{\phi}\right|^{1/n}$. При $n=0$ решение (8.32), (8.33) переходит в диффузионный *хвост* и остается инфинитным и при $n<0$.

9. Нелинейное горение

Некоторые процессы в плазме, ряд эффектов в биологических системах, химические реакции на определенной стадии описываются нелинейным уравнением вида (8.23). В важном для физики плазмы и теории горения частном случае $k(u)$ и $f(u)$ являются степенными функциями температуры u: $k(u) = k_0 u^{\sigma}$, $f(u) = q_0 u^{\beta}$, $\sigma > 0$, $\beta > 1$. Решения этого уравнения доставляют нам такие необычные явления, как локализация и инерция тепла, и режимы с обострением, когда температура в локальной области возрастает до бесконечности за конечное время. Возникают *диссипативные структуры*, для образования которых нелинейная теплопроводность и тепловыделение играют ключевую роль. «Рассасывание» тепла вдоль нелинейной среды действует совместно с горением и формирует эту структуру. Иными словами, диффузия тепла согласует процессы роста температуры u, обусловленные нелинейностью горения, в разных точках среды.

Будем искать решение (8.23) методом разделения переменных $u(x,t) = g(t)\,f(\xi)$; $\xi = x/\varphi(t)$. Тогда

$$g(t) = A\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-\frac{1}{1-\beta}},$$
$$\varphi(t) = B\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}. \qquad (8.34)$$

Здесь $A = \left(q_0\sigma(\sigma+2)/2(\sigma+1)\right)^{-1/\sigma}$ и $B = \sqrt{\delta^2 q_0 / 4k_0(1+\sigma)}$ [41], а $f(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{(\beta-1)\tau} f + \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)\tau} f_{\xi}\xi = (f^{\sigma} f_{\xi})_{\xi} + f^{\beta}. \qquad (8.35)$$

Качественно решения (8.35) имеют схожий вид при произвольных σ и β, но особенно просто они выглядят при $\beta = \sigma + 1$, когда $f(\xi)$ можно представить в аналитическом виде:

$$f(\xi) = \left(\cos^2\left(\frac{\pi\xi}{L}\right) \cdot \frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\right)^{\frac{1}{\sigma+1}}. \qquad (8.36)$$

Здесь $L = 2\pi\sqrt{(\sigma+1)k_0} \big/ \sigma\sqrt{q_0}$ – длина области локализации горения, а τ – время обострения горения. Таким образом, в нелинейной среде на конечное время возникают устойчивые области горения с фиксированным размером.

10. Взрывной режим развития тепловой неустойчивости

Высокотемпературные сверхпроводники с током характеризуются быстрым ростом электрического сопротивления с температурой. Это приводит к неограниченному джоулеву саморазогреву сверхпроводника при достаточно высоком токе, т.е. моностабильности таких сред и особому характеру развития тепловой неустойчивости в них. Она может быть описана уравнением $u_t = u_{xx} + f(u)$ с функцией источника вида $f(u) = (au - b)\theta(u - b/a)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, а постоянные a, b зависят от тока. Неограниченный разогрев нормальной области сверхпроводника является причиной особого характера развития неустойчивости. Оно осуществляется за счет двух параллельно идущих процессов: вытеснение сверхпроводящего участка нормальным и быстрый разогрев нормального участка. Отсутствие стационарной нормальной зоны и ее экспоненциально быстрый разогрев могут служить основанием для названия «взрывная» неустойчивость. Автомодельное решение отсутствует, однако холодные хвосты границ нормальной области распространяются с постоянной скоростью v. Распределение температуры в холодном хвосте имеет вид $u(x,t) = u(x - vt)$ и при $u \ll 1$ асимптотически удовлетворяет уравнению

$$u_{xx} + vu_x + f(u) = 0, \qquad (8.37)$$

где x – координата в сопутствующей системе.

Уравнение (8.37) не имеет решения типа бегущей волны в силу неограниченного разогрева нормального участка $(u > b/a)$. Однако границы саморазогревающегося участка разбегаются с постоянной скоростью v. Установившаяся скорость не зависит от выбора начального профиля температуры, что свидетельствует об устойчивости такой волны. Отсутствие автомодельного решения (8.37) не позволяет определить величину скорости v стандартными методами теории распространения автоволн конечной амплитуды как собственное значение уравнения (8.37). Для нахождения величины v в этом случае можно воспользоваться теоретико-групповыми соображениями.

Уравнение (8.37) инвариантно относительно группы преобразований координат и переменных вида:

$$\xi = L^p \xi',\ u = L^q u',\ v = L^{-p} v',\ a = L^{-2p} a',\ b = L^{q-2p} b', \qquad (8.38)$$

представляющей собой группу растяжений с масштабным фактором L. Степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (8.37) относительно преобразований (8.38) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тому же уравнению (8.37). Это приводит к тому, что свободные параметры L, p и q могут принимать произвольные значения.

Из физических соображений ясно, что величина скорости $v = F(a,b)$ в (8.37) есть функция только a и b. Это соотношение должно быть инвариантно относительно группового преобразования (8.38), то есть $v' = F(a',b')$. Будем искать решение в виде $v \propto a^r b^s$, где степени r и s подлежат определению. Тогда $v/(a^r b^s) = L^{-p+2pr+2ps-2qs} v'/(a'^r b'^s)$, и из условия инвариантности $v/(a^r b^s) = v'/(a'^r b'^s)$ получаем $p(2r+2s-1) - qs = 0$. Воспользовавшись произвольностью величин p и q в (8.38), получаем однозначные выражения для степеней $r = 1/2$, $s = 0$. Таким образом, скорость хвоста имеет вид $v \sim a^{1/2} b^0 \sim \sqrt{a}$.

Неизвестный коэффициент пропорциональности в $v \sim a^{1/2} b^0 \sim \sqrt{a}$ не может быть получен с помощью теории групп. Для его определения требуется привлечение дополнительных соображений. Рассмотрим случай $a = 1$, $b = 0$, когда уравнение (8.37) соответствует известной задаче Колмогорова–Петровского–Пискунова. В этом случае скорость распространения есть $v = 2\sqrt{df(u)/du}\Big|_{u=0} = 2$. Для скорости распространения волны «взрывной» неустойчивости получаем выражение $v = 2\sqrt{a}$.

Развитие неустойчивости, как правило, инициируется внешними тепловыми возмущениями. Этот процесс имеет пороговый характер, то есть существуют критические возмущения, «запускающие» неустойчивость. Величина энергии критических возмущений e_c также может быть найдена при помощи групповых соображений, аналогичных использованным для нахождения скорости v.

Действие локального импульсного критического возмущения в активной среде описывается уравнением

$$u_t = \Delta u + f(u) + e_c \delta^D(r)\delta(t)\,, \tag{8.39}$$

где $\Delta = r^{-(D-1)}\,\partial(r^{D-1}\,\partial/\partial r)/\partial r$ – радиальная часть лапласиана, r и t – безразмерные координата и время, $\delta^D(r) = (k_D r^{D-1})^{-1}\delta(r)$, k_D – геометрический фактор ($k_1 = 1$, $k_2 = 2\pi$, $k_3 = 4\pi$). Уравнение (8.39) инвариантно относительно группы преобразования переменных вида

$$\begin{gathered} t = L^{2p}t',\ r = L^p r',\ u = L^q u',\ e_c = L^{q+p}e_c', \\ a = L^{-2p}a',\ b = L^{q-2p}b'. \end{gathered} \tag{8.40}$$

Как и при вычислении скорости, степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (8.39) относительно преобразования (8.40) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тому же уравнению (8.39). Используя процедуру, описанную выше, для критической энергии возмущений e_c, достаточной для инициации неустойчивости, получаем выражение

$$e_c \propto ab^{(D+2)/2} . \qquad (8.41)$$

Таким образом, теоретико-групповой анализ уравнения (8.39) позволяет получить функциональную зависимость e_c от управляющих параметров при любой размерности задачи.

11. Контрольные вопросы к лекции 8

1. Запишите нелинейное уравнение теплопроводности в общем виде.
2. Почему скин-эффект возникает и в параболическом (теплопроводности), и гиперболическом (Максвелла) уравнениях?
3. Зачем водопроводные трубы закапывают в землю?
4. Чему равна глубина прогревания грунта?
5. Чему равна глубина скин-слоя в металле?
6. Что такое эванесцентные волны?
7. На какой глубине в грунте годовые колебания температуры отстают от поверхности на полгода?
8. Запишите критерий возникновения режима с обострением по времени.
9. Запишите критерий возникновения режима с обострением по координате.
10. Что такое температурная ударная волна?
11. Что такое нелинейное горение?
12. Что такое взрывной режим тепловой неустойчивости?

12. Задачи к лекции 8

Работая над решением задачи,
всегда полезно знать ответ.
Законы Мёрфи

1. **Температурные волны.** Вследствие годовых колебаний температуры земля в данном месте промерзает на глубину 2 м. На какую глубину она промерзла бы a) вследствие суточных колебаний такой же амплитуды; b) в месте, где температуропроводность грунта в 4 раза меньше? При каких условиях возникает вечная мерзлота?

2. **Смена сезонов в грунте.** На какой глубине в грунте лето, в то время как на поверхности зима? Температуропроводность грунта $\chi =$ $= 2\cdot 10^{-3}$ см^2/с. Во сколько раз сезонная вариация температуры на этой глубине меньше, чем на поверхности?

3. **Автомодельное решение уравнения теплопроводности.** Покажите, что уравнение $u_t = u_{xx}$ с граничными $u(\pm\infty) = 0$ и начальным $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)dx = 1$ условиями инвариантно относительно группы растяжений $t' = L^\alpha t,\;\; x' = L^\beta x,\;\; u' = L^\gamma u$ с масштабным фактором L. Найдите α, β и γ. Используя инварианты группы $x/\sqrt{t}$ и $u\sqrt{t}$, найдите автомодельное решение задачи $u(x,t) = e^{-x^2/4t} / \sqrt{4\pi t}$.

4. **Нелинейное уравнение теплопроводности.** Покажите, что в уравнении $c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + f(u)$ можно «избавиться» от теплоёмкости, приведя его к виду $w_t = (\chi(w)w_x)_x + F(w)$. Для этого сделайте замену $dw = c(u)du$ и перейдите от температуры u к удельной энтальпии $w =$ $= \int_0^u c(u')du'$ и температуропроводности $\chi(w) = k(u)/c(u)$.

5. **Степенные теплоемкость и теплопроводность.** Теплоемкость $c(u) = c_0 u^p$, теплопроводность $k(u) = k_0 u^q$ и функция источника среды $f(u) = f_0 u^r$ являются степенными функциями u. Совершая переход к удельной энтальпии w (см. предыдущую задачу), покажите, что $\chi \sim w^s$ и $F \sim w^t$ – также степенные функции. Определите s, t.

6. **Температурная ударная волна.** Для среды со степенными зависимостями теплоёмкости и теплопроводности от температуры u уравнение теплопроводности имеет вид $u_t = (u^n u_x)_x$ Найдите его симметричное решение: $u(-x,t) = u(x,t)$, удовлетворяющее начальному условию $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)dx = 1$. Покажите, что при $n > 0$ это решение соответствует температурной ударной волне.

7. **Нелинейное горение.** В важном для физики плазмы и теории горения частном случае нелинейное уравнение «реакция–диффузия» имеет вид $c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + f(u)$, где $c(u) = \text{const}$, а $k(u)$ и $f(u)$ являются степенными функциями температуры $k(u) = k_0 u^\sigma$, $f(u) = q_0 u^\beta$, $\sigma > 0$, $\beta > 1$. Покажите, что решения этого уравнения описывают локализацию тепла и режим с обострением – температура в локальной области возрастает до

бесконечности за конечное время. Опишите возникающую диссипативную структуру, когда «рассасывание» тепла вдоль нелинейной среды действует совместно с горением и формирует области локализации горения.

8. **Высокотемпературные сверхпроводники.** Для таких сверхпроводников с током характерен быстрый рост электрического сопротивления с температурой. Это приводит к неограниченному джоулеву саморазогреву сверхпроводника при достаточно высоком токе, т.е. его моностабильности. Сверхпроводник описывается уравнением «реакция–диффузия» с функцией источника вида $f(u) = (au - b)\theta(u - b/a)$, где постоянные a, b зависят от тока. Неограниченный разогрев нормальной области сверхпроводника является причиной особого характера развития неустойчивости. Оно осуществляется за счет двух параллельно идущих процессов: вытеснение сверхпроводящего участка нормальным и быстрый разогрев нормального участка. Отсутствие стационарной нормальной зоны и ее экспоненциально быстрый разогрев могут служить основанием для названия *взрывная* неустойчивость. Автомодельное решение типа кинка отсутствует, однако холодные хвосты границы нормальной области распространяются с постоянной скоростью v. С помощью теоретико-групповых соображений найдите зависимость v от a и b.

Лекция 9. Ударные волны

В действительности всё обстоит не так,
как на самом деле.
Станислав Ежи Лец

1. Гидродинамика. 2. Уравнения Эйлера и непрерывности. 3. Движение бесстолкновительной среды. 4. Время опрокидывания фронта волны. 5. Образование разрыва в простой волне. 6. Слабая ударная волна. 7. Механизм образования стационарного фронта волны.

1. Гидродинамика

Движение сплошной среды и уравнения, описывающие это движение, существенно отличаются для упругих тел и жидкостей и газов. В последнем случае мы говорим о гидродинамике. Главное общее свойство жидкостей и газов – это текучесть. В жидкости нет стационарных касательных деформаций. Это значит, что силы трения возможны, но стремятся к нулю вместе со скоростью деформации. Это экспериментальное наблюдение составляет основу гидродинамики. Если приложена сила, тангенциальная к поверхности, то слои жидкости начинают скользить друг относительно друга параллельно этой плоскости. При этом возникает трение между слоями, которое стремится затормозить это скольжение. Если бы силы между слоями были чисто нормальными, то скольжение длилось бы вечно. Для описания движения жидкости получим основные уравнения гидродинамики: уравнение Эйлера и уравнение непрерывности.

2. Уравнения Эйлера и непрерывности

Поскольку тангенциальные силы (вязкое трение) отсутствуют для состояния покоя или равномерного прямолинейного движения, попробуем сначала рассмотреть такие течения, где эти силы пренебрежимо малы. В отсутствие трения сила, действующая на некоторый объем, равна интегралу от давления по его поверхности $-\oint p d\mathbf{S}$, где элемент поверхности $d\mathbf{S}$ направлен по нормали наружу. С учетом теоремы Гаусса–Остроградского $-\oint p d\mathbf{S} = -\int \nabla p \cdot dV$ получаем, что сила на единицу объема равна $-\nabla p$. В лагранжевых переменных, когда мы описываем движение выделенной частички среды, ее уравнение Ньютона имеет вид $d\mathbf{v}/dt = -\nabla p/\rho$, где ρ – плотность среды. Здесь стоит полная (материальная) производная по времени. В эйлеровых переменных следует перейти к величинам, заданным в фиксированных пространственных точках. При этом полная производная по времени равна локальной плюс переносовое слагаемое:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} . \tag{9.1}$$

Таким образом, ускорение частиц среды может быть не равно нулю $d\mathbf{v}/dt \neq 0$ даже для стационарного течения $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$. Закон Ньютона, записанный в эйлеровых переменных, называется *уравнением Эйлера* (1757):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{v} . \tag{9.2}$$

Сюда добавлена также внешняя сила, действующая на единичную массу жидкости $\mathbf{f}$. Второе слагаемое в (9.2) описывает инерцию и делает уравнение Эйлера нелинейным. Если в (9.2) добавлена также сила вязкого трения $\nu\Delta\mathbf{v}$, то оно называется *уравнением Навье–Стокса* для несжимаемой жидкости. Здесь $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость, η – сдвиговая вязкость.

Для описания движения среды уравнение Эйлера (9.2) следует дополнить уравнением непрерывности. Оно представляет собой закон сохранения вещества. Масса среды, содержащаяся в некотором объеме $\int \rho dV$, изменяется только за счет двух причин. Во-первых, за счет изменения плотности среды $\partial\rho/\partial t$, во-вторых, за счет вытекания вещества из объема с плотностью потока $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Приравнивая $\partial(\int \rho dV)/\partial t$ и $-\int \mathbf{j} d\mathbf{S}$ и используя теорему Гаусса–Остроградского, получаем уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0 . \tag{9.3}$$

3. Движение бесстолкновительной среды

Начнем наш анализ с простейшего случая бесстолкновительной среды. В роли бесстолкновительной среды может быть облако невзаимодействующих пылинок, звезд, автомобилей на шоссе до тех пор, пока они не начали сталкиваться, разреженный газ заряженных частиц и т.д. Все они описываются уравнением Эйлера (9.2) с нулевой правой частью. В одномерном случае $\mathbf{v} = (u(x,t), 0, 0)$ такое уравнение называется *уравнением Хопфа*:

$$u_t + u \cdot u_x = 0\,, \tag{9.4}$$

где $u(x,t)$ имеет смысл одномерной скорости среды. В начальный момент времени $t = 0$ распределение скоростей задано

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \tag{9.5}$$

таким образом, (9.4), (9.5) представляют собой задачу Коши. Здесь мы покидаем твердую землю линейной теории и переходим на зыбкую почву нелинейных задач. Там, где раньше все было каноническим законом, теперь, в значительной мере, становится искусством. Уравнение (9.4) представляет собой квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка и может быть решено методом характеристик. Уравнения для характеристик (9.4) имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = u\,, \tag{9.6}$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \tag{9.7}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $u(0) = u_0(x_0)$. Таким образом, x является эйлеровой, а x_0 лагранжевой переменными (координатами) среды. Решение (9.6), (9.7)

$$x = u_0(x_0)t + x_0 \tag{9.8}$$

задает неявно связь $x_0 = x_0(x,t)$ между лагранжевыми и эйлеровыми координатами среды. Решение уравнения (9.6) имеет вид $u(x,t) = u_0(x_0)$. Подстановка (9.8) в это решение дает искомое решение $u(x,t)$ задачи Коши (9.4), (9.5) для уравнения Хопфа в неявном виде

$$u = u_0(x - ut)\,. \tag{9.9}$$

Чтобы представить себе эволюцию $u(x,t)$ наглядно, рассмотрим конкретный пример. Пусть при $t = 0$ распределение скоростей частиц среды имеет вид доменной стенки $u(x,0) = u_0(x) = v_0(1 - \mathrm{th}(x/l))$. Решение $u(x,t)$ записывается в неявном виде как $u = v_0(1 - \mathrm{th}((x - ut)/l))$. Тогда частная производная решения по x равна

$$u_x = -\frac{v_0 / l}{[\mathrm{ch}^2(x - ut) - vt / l]}\,. \tag{9.10}$$

Видно, что при $t < t^* = l / v_0$ решение однозначно. При $t \to t^*$ производная u_x стремится к бесконечности в точке, соответствующей лагранжевой координате $x_0 = x - ut$. Происходит опрокидывание волны (градиентная катастрофа), и при $t > t^*$ решение становится неоднозначным. Причина опрокидывания состоит в том, что быстрые частицы среды догоняют более медленные, что приводит к укручению профиля волны $u(x,t)$.

Плотность частиц $n(x,t)$ определяется уравнением непрерывности (9.3)

$$n_t + (un)_x = 0 \tag{9.11}$$

и может быть найдена явно. Градиентный вид уравнения непрерывности (9.11) говорит о сохранении числа частиц. Так, количество частиц, которое изначально содержалось в интервале dx_0, будет совпадать в момент времени t с числом частиц в интервале dx

$$n_0(x_0)dx_0 = n(x,t)dx\,. \tag{9.12}$$

Якобиан преобразования $|\partial x / \partial x_0|$ определяется траекторией характеристики (9.8), таким образом, получаем

$$n(x,t) = \frac{n_0(x_0)}{1 + t \cdot \partial u_0 / \partial x_0}\,. \tag{9.13}$$

Из (9.13) видно, что в момент времени $t = t^*$ в точке с максимальным наклоном (точке опрокидывания) $x_0 = 0$ плотность среды обращается в бесконечность. В этот момент в среде возникает разрыв плотности n и скорости u, который в дальнейшем увеличивается и формирует ударную волну.

Эти же результаты можно получить иначе. Уравнения характеристик для (9.4) можно записать в виде

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{u}{0}\,, \tag{9.14}$$

или

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = u, \quad \dot{u} = 0\,. \tag{9.15}$$

Первые интегралы (9.15) имеют вид

$$J_1 = x - ut, \quad J_2 = u\,. \tag{9.16}$$

Таким образом, общее решение (9.4) $u = g(J_1, J_2)$ можно записать в виде $u = f(x - ut)$. Вместе с начальным условием (9.5) это дает (9.9).

4. Время опрокидывания фронта волны

Для удачной догадки недостаточно просто удачи.
Джейн Остин

Получим теперь общее выражение для времени опрокидывания t^* простой волны. Волна называется *простой*, когда $(\partial p / \partial \rho) = c^2$ зависит только от одной переменной, например, от u. В этом случае уравнение среды имеет вид $u_t + c(u)u_x = 0$ и называется *уравнением Римана*. Простой заменой $u \to c(u)$ оно приводится к уравнению Хопфа (9.4) для бесстолкновительной среды $u_t + uu_x = 0$. Уравнения свободного движения отдельной частицы

$$\frac{dx}{dt} = u \,, \tag{9.17}$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \tag{9.18}$$

представляют собой уравнения характеристик для уравнения Хопфа (9.4). Начальным условием для (9.17), (9.18) будут $x(0) = x_0$ лагранжевы координаты среды и $u(x,0) = u_0(x_0)$ начальное распределение скоростей среды, что эквивалентно задаче Коши для уравнения (9.4). Таким образом, на плоскости (x,t) на линиях, удовлетворяющих уравнениям (9.17), (9.18), уравнения в частных производных (9.4) и в полных производных (9.18) эквивалентны. Поэтому такие линии называются *характеристиками*. Физический смысл характеристик прозрачен – это траектории частиц среды.

Совместное решение уравнений (9.17) и (9.18) приводит к одновременному построению как характеристики, так и решения на ней. Для задачи с начальными условиями

$$\begin{aligned} &x(0) = x_0, \\ &u(x(0),0) = u_0(x_0), \end{aligned} \tag{9.19}$$

где x_0 – лагранжева координата частицы, решение (9.17), (9.18) дает

$$\begin{aligned} &x(t) = x_0 + u_0(x_0)t, \\ &u(x(t),t) = u_0(x_0). \end{aligned} \tag{9.20}$$

Такой подход называется *описанием в переменных Лагранжа*, когда следят за движением отдельных частиц среды. Выбор в качестве независимых переменных x и t называют *описанием в переменных Эйлера*. В этом случае мы рассматриваем поток среды в данной фиксированной точке.

Переход от одного описания к другому осуществляется просто. Выражая из (9.20) x_0 через x и t, получаем решение уравнения Хопфа в неявном виде:

$$u(x,t) = u_0(x - u(x,t)\cdot t), \tag{9.21}$$

которое знал еще Риман. Такое же решение мы получили ранее, найдя интегралы движения уравнений характеристик. На лагранжевом языке описания возникновение перехлеста волны означает пересечение двух близлежащих характеристик, то есть

$$\frac{dx}{dx_0} = 1 + u_0{}'(x_0)\cdot t = 0\ . \tag{9.22}$$

Момент возникновения перехлеста можно изобразить графически, нарисовав мысленно функцию, обратную к $u = u_0(x)$. Это же условие означает обращение в бесконечность производной u_x (градиентная катастрофа), а значит, и плотности частиц среды. Следовательно, опрокидывание волны происходит впервые там, где $u_0{}' < 0$ и $|u_0{}'|$ принимает максимальное значение. Это происходит в момент времени

$$t^* = \left(\max_x \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|\right)^{-1}. \tag{9.23}$$

Теперь рассмотрим подробнее, что будет происходить после опрокидывания волны.

5. Образование разрыва в простой волне

Если мысленно изобразить характерную картину характеристик на плоскости (x,t), то окажется, что моменту времени t^* соответствует первое пересечение характеристик. Из этой точки выходят две линии каустики. Здесь имеет место полная аналогия с оптикой. При этом характеристики играют роль лучей, а нормальные поверхности к ним – волновых фронтов, соответствующих профилю волны. Ту же последовательность событий, как картину распространения волны, можно изобразить в виде мультфильма $u(x,t)$. Граничные точки на перехлесте волны соответствуют линиям каустики. Но реальная волна в среде не может, конечно, содержать никаких перехлестов. Возникает вопрос: что же произойдет с профилем фронта волны в действительности?

Простейшим выходом для устранения перехлеста является возникновение разрыва на фронте волны. Действительно, полученное нами выше решение $u(x,t)$, строго говоря, справедливо лишь до момента опрокидывания волны t^*. После него исходное уравнение в частных производных уже неприменимо, поскольку производные обращаются в бесконечность и решение неоднозначно. Поэтому и представляется логичным в пренебрежении вязкостью, формирующей конечную ширину ударной волны, тем не менее воспользоваться полученным решением с перехлестом. Для этого нужно исключить неоднозначность введением бесконечно быстрого скачка – разрыва на профиле волны. Фактически введение разрыва означает, что мы учитываем пренебрежимо малую диссипацию только там, где крутизна фронта бесконечна.

Как определить положение разрыва в области перехлеста? Для этого заметим, что у уравнения Хопфа (9.4) существует очевидный интеграл движения. Действительно, представим уравнение (9.4) в градиентной форме

$$u_t + (u^2/2)_x = 0\,. \qquad (9.24)$$

Рассмотрим, например, ограниченное в пространстве возмущение среды, т.е. будем считать, что $u(\pm\infty) = 0$. Тогда, проинтегрировав (9.24) по x от $-\infty$ до $+\infty$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = 0\,. \qquad (9.25)$$

Таким образом, площадь под кривой $u(x,t)$ сохраняется, является интегралом движения. Очевидно, что решение с перехлестом также сохраняет во времени эту величину. Значит, положение разрыва следует выбрать согласно правилу равных площадей: площади перехлеста слева и справа от разрыва должны быть одинаковы.

Правило равных площадей можно представить в более информативной форме. Поскольку разрыв бесконечно тонкий, его движение характеризуется единственной величиной – скоростью $v(t)$. Получим самосогласованное граничное условие на разрыве, связывающее величины u_1 и u_2 справа и слева от разрыва и скорость его движения. Перейдем в систему отсчета x', движущуюся вместе с разрывом:

$$x = x' + \int_0^t v(t')\,dt'\,. \qquad (9.26)$$

Таким образом, $u(x,t) = u(x',t)$ и уравнение (9.24) принимает вид

$$u_t - v u_{x'} + (u^2/2)_{x'} = 0\,. \qquad (9.27)$$

Выберем точки x_1 и x_2 слева и справа от разрыва x_0 и проинтегрируем (9.27) по x' от x_1 до x_2. Устремим x_1 к точке разрыва слева, а x_2 – справа. Тогда с учетом конечности величины u_t получаем

$$-v(u_1-u_2)+\frac{u_1^2-u_2^2}{2}=0\,, \tag{9.28}$$

где $u_1=u(x_0-0)$, $u_2=u(x_0+0)$. Итак, стационарная скорость распространения разрыва определяется скачком величины u на нем:

$$v=\frac{u_1+u_2}{2}\,. \tag{9.29}$$

Казалось бы, (9.29) полностью решает задачу о положении разрыва. Однако мы определили величины u_1 и u_2 из правила площадей, то есть исходя из закона сохранения (9.25). Однако легко убедиться, домножая (9.4) на u, u^2, …, что мы можем получить целую серию таких законов сохранения. Каждый из этих законов будет приводить к своему условию скачка на разрыве и соответственно будет предсказывать различные значения v (9.29). То, какой именно закон сохранения следует выбрать, определяется привлечением дополнительных физических соображений, которых нет в модели скачка. Наше уравнение Хопфа становится недостаточно точным для решения этой задачи. Для ее решения следует учесть диссипацию на фронте скачка и обратиться к более точному уравнению Бюргерса. Мы увидим, что учет вязкости однозначно определяет положение и ширину фронта ударной волны.

6. Слабая ударная волна

Описание образования разрыва (ударной волны) при помощи уравнения Хопфа страдает явным недостатком. Оно предсказывает, что у разрыва нет ширины – скорость частиц среды на фронте ударной волны меняется скачком. Попробуем устранить этот недостаток и вскрыть физический механизм, формирующий ширину фронта. Для этого вспомним, что в правой части уравнения Эйлера (9.2) имеется еще сила вязкого трения. В одномерном случае оно имеет вид

$$u_t+uu_x=\nu u_{xx} \tag{9.30}$$

и называется *уравнением Бюргерса*.

Исследуем форму фронта ударной волны подробнее. Стационарно движущейся со скоростью v ударной волне соответствует автомодельное решение уравнения Бюргерса вида $u(x,t)=u(x-vt)$. Переходя в систему, движущуюся вместе с ударной волной, из (9.30) получаем

$$(u-v)u' = \nu u'', \qquad (9.31)$$

где штрих означает дифференцирование по автомодельной переменной $\xi = x - vt$ в движущейся системе отсчета.

Граничные условия, соответствующие профилю ударной волны $u(\xi)$ имеют вид $u(-\infty)=u_2$, $u(+\infty)=u_1$, $u_x(\pm\infty)=0$. Интегрируя (9.31) на фронте волны, получаем

$$\frac{u^2}{2} - vu = \nu u' + C. \qquad (9.32)$$

Граничные условия однозначно фиксируют величины скорости $v = (u_1+u_2)/2$ и $C = -u_1 u_2/2$. Тогда (9.32) можно представить в виде уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{(u-v)^2 - (a/2)^2} = \frac{dx}{2\nu}. \qquad (9.33)$$

Это позволяет получить его аналитическое решение в явном виде

$$u(x,t) = u_1 + \frac{a}{1+\exp\dfrac{a(x-vt)}{2\nu}}, \qquad (9.34)$$

где $a = u_2 - u_1$ – амплитуда, а $v = (u_1+u_2)/2$ – скорость ударной волны. Из (9.34) ясно, что ударная волна представляет собой типичную волну переключения, т.е. имеет структуру кинка (доменной стенки). При этом ширина фронта ударной волны равна

$$\delta = \frac{2\nu}{a}. \qquad (9.35)$$

Это выражение можно получить из качественных соображений.

7. Механизм образования стационарного фронта волны

Итак, при формировании слабой ударной волны нелинейность опрокидывает, а диффузия размывает. На балансе этих двух эффектов возникает стационарный фронт кинка. При описании ударной волны уравнением (9.30) становится ясно, как именно стабилизируется опрокидывание фронта волны. Действительно, в (9.30) содержится гидродинамическая нелинейность $\sim uu_x$. Как мы видели выше, нелинейность приводит к опрокидыванию профиля волны. Кроме того, в (9.30) содержится диффузия $\sim u_{xx}$, которая приводит к расплыванию профиля волны. Таким образом, эти две тенденции конкурируют. Конкуренция нелинейности и диффузии может приводить к образованию стационарных волн, движущихся не изменяя своей формы с постоянной скоростью. В нашем случае это движущийся фронт ударной волны.

Еще до всяких вычислений ясно, какова будет установившаяся в результате такой конкуренции ширина фронта ударной волны. Ширина фронта устанавливается в результате взаимной компенсации эффектов нелинейности и диссипации. При этом нелинейный и диссипативный члены должны быть одного порядка, т.е. $uu_x \approx \nu u_{xx}$. Если ввести амплитуду ударной волны $u_2 - u_1$ (перепад скоростей на ее фронте) и характерную ширину фронта δ, то получаем $(u_2 - u_1)\delta \approx \nu$. Это значит, что ширина фронта δ пропорциональна вязкости среды и обратно пропорциональна амплитуде ударной волны (9.35). При стремлении вязкости к нулю профиль волны приобретает вид ступеньки.

Волны в нелинейных гидродинамических средах отличаются как от линейных волн, так и от солитонов. Если среда описывается линейными уравнениями, то для распространяющихся в ней волн выполняется принцип суперпозиции: при встрече двух волн наблюдается простое наложение их амплитуд и связанные с этим явления интерференции. Для нелинейных сред принцип суперпозиции всегда нарушен, волны сильно взаимодействуют между собой. Характер такого взаимодействия, однако, существенно отличается для солитонов и ударных волн. Солитоны возникают в консервативных нелинейных средах без затухания и подвода энергии от внешних источников. Солитон способен распространяться без изменения формы и без потерь энергии. При столкновении двух солитонов они восстанавливают свою форму и продолжают двигаться с теми же скоростями и в тех же направлениях. В отличие от этого при столкновении двух ударных волн в гидродинамической среде происходит их полная взаимная аннигиляция.

8. Контрольные вопросы к лекции 9

1. Запишите уравнение Эйлера.
2. Запишите уравнение Навье–Стокса.
3. Запишите уравнение Хопфа.
4. Запишите уравнение Бюргерса.
5. Запишите уравнения характеристик для уравнения Хопфа.
6. Какова связь между лагранжевыми и эйлеровыми переменными (координатами) среды?
7. Запишите условие опрокидывания фронта волны.
8. Запишите законы сохранения для уравнений градиентного типа.

9. Как связаны амплитуда и ширина ударной волны в уравнении Бюргерса?
10. Чему равно время до опрокидывания фронта волны?
11. Чем слабая ударная волна отличается от сильной ударной волны в воздухе?

9. Задачи к лекции 9

1. **Ширина фронта кинка Бюргерса.** Найдите ширину и скорость ударной волны, представляющей собой перепад между скоростями u_1 и u_2 среды с кинематической вязкостью ν, описываемой уравнением Бюргерса $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$.

2. **Столкновение кинков Бюргерса.** Покажите, что две попутные слабые ударные волны сталкиваются по закону абсолютно неупругого удара двух частиц; при этом аналогом массы частицы m является величина скачка $(u_2 - u_1)$, а аналогом скорости частицы v – скорость движения фронта кинка $(u_1 + u_2)/2$.

3. **Уравнение простой волны.** Подберите простую замену переменных, сводящую уравнение простой волны Римана $u_t + c(u)u_x = 0$ к уравнению Хопфа $u_t + uu_x = 0$.

4. **До первого ДТП.** Посмотрим на трафик на шоссе как на движение одномерной бесстолкновительной среды. В начальный момент распределение скоростей автомобилей вдоль шоссе $u_0(x)$ имеет вид: a) $U_0(1 - \mathrm{th} x / L_0)$; b) $U_0(\pi/2 - \mathrm{arctg}(x/L_0))$; c) $U_0/(1+(x/L_0)^2)$; d) $U_0 \exp(-x^2/L_0^2)$, где $U_0 = 60$ км/ч, $L_0 = 500$ м. Через какое время τ произойдёт первое ДТП? e) Что при этом будет с плотностью числа автомобилей на шоссе $n(x,t)$?

5. **Метод характеристик.** Используя метод характеристик, решите задачу Коши $u(x,0) = u_0(x)$ для следующих уравнений: a) $u_t + uu_x = 0$; b) $u_t + uu_x = 1$; c) $u_t + uu_x \pm \nu u = 0$.

6. **Интегралы движения.** Найдите один-два интеграла движения для уравнения с граничными условиями $u(\pm\infty) = u_x(\pm\infty) = \ldots = 0$: a) диффузии $u_t = \nu u_{xx}$; b) Бюргерса $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$; c) Кортевега–де Вриза $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$; d) Шредингера $iu_t + u_{xx} = v(x)u$; e) Римана $u_t + c(u)\cdot u_x = 0$; f) Хопфа $u_t + uu_x = 0$.

7. **Бесстолкновительная диссипативная среда.** Найдите момент опрокидывания волны в нелинейной диссипативной среде, описываемой уравнением $u_t + uu_x + \nu u = 0$. Скорость диссипации ν определяется, например, столкновением частиц. Начальное распределение скоростей среды $u(x,t) = u_0(x)$.

8. **Возмущение среды движущимся источником.** Генерация волн источником, движущимся с постоянной скоростью v в бесстолкновительной среде, описывается уравнением $u_t + uu_x = f(x - vt)$. Покажите, что при условии $v^2 > 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy$ источник «убегает» от генерируемых им волн и разрывов не возникает. Получите условие образования разрывов для точечного источника $f(x) = f_0\delta(x)$.

9. **Термооптическая генерация звука.** Оптическое излучение падает на среду, по которой распространяется звуковая волна $u(x,0) = a\sin kx$. Волна изменяет коэффициент поглощения света и соответственно тепловыделение в ней. Возникает положительная обратная связь так, что распространение волны описывается уравнением активной среды $u_t + uu_x = \nu u$. Найдите условие опрокидывания волны и критерий стабилизации неустойчивости диссипацией энергии на разрыве.

Лекция 10. Струи, капли и пузыри

Трагедия науки заключается в умерщвлении прекрасной теории мерзким фактом.
Томас Гекли.

1. Распад жидкой струи на капли. 2. Капиллярные волны на струе. 3. Неустойчивость струи. 4. Динамика пузырька в жидкости. 5. Капиллярные колебания капли. 6. Гравитационно-капиллярные волны. 7. Неустойчивость Рэлея–Тейлора. 8. Волны Фарадея.

В предыдущих лекциях мы рассмотрели стационарное распространение волн в различных средах. Волновой характер имеет также развитие неустойчивостей в распределенных системах. Волновые неустойчивости возникают, как правило, на поверхностях раздела сред. В этой лекции мы рассмотрим примеры таких неустойчивостей, как абсолютных, так и конвективных.

1. Распад жидкой струи на капли

Почему вытекающая из водопроводного крана струя воды, на которую, казалось бы, не действует ничего, кроме силы тяжести, самопроизвольно распадается на капли? Очевидно, распад жидкости на капли должен вызываться каким-то периодическим процессом. Что-то похожее на волну должно образовываться на струе и приводить к ее распаду на примерно одинаковые капли. Почему такие волны могут распространяться вдоль струи? За счет какого механизма? Наиболее реальным кандидатом являются капиллярные силы. Попробуем создать возмущение на струе и проверить, верна ли наша догадка.

Откроем водопроводный кран так, чтобы из него вытекала слабая ровная, как спица, струя воды. Возьмем иголку или спичку и прикоснемся к поверхности струи. Сверху и снизу от точки возмущения на гладкой поверхности струи появятся характерные капиллярные морщинки. Это и есть капиллярные волны. Они распространяются навстречу течению воды со скоростью, равной скорости струи. Поэтому относительно возмущающей иголки возникает стоячая капиллярная картинка.

2. Капиллярные волны на струе

Капиллярные волны возникают за счет поверхностного натяжения жидкости. Деформация поверхности жидкости приводит к увеличению ее поверхностной энергии. Поверхность стремится вернуться в исходное положение, в результате чего потенциальная энергия деформации превращается в кинетическую энергию жидкости. В месте деформации возникают колебания, возбуждающие бегущую по поверхности волну.

Итак, на поверхности струи могут возбуждаться капиллярные волны. Они образуются за счет различных внешних возмущений: колебания или шероховатости выходного сопла, изменение скорости течения жидкости, внешних воздействий на струю и т.д. Но возникновение таких волн на поверхности струи еще не означает, что именно они приводят к распаду струи на капли. Действительно, волна на струе может затухнуть, не приведя ни к каким серьезным последствиям. Следовательно, нужно еще изучить динамику и устойчивость капиллярных волн с тем, чтобы установить, являются ли именно они причиной распада струи на капли.

3. Неустойчивость струи

Поставить правильную задачу
гораздо труднее, чем ее решить.
Георг Кантор

Мы склонны предполагать, что достаточно длинный жидкий цилиндр неустойчив и обязательно распадается на капли. Причина распада струи на капли, скорее всего, заключается в появлении и возрастании на поверхности цилиндра капиллярных волн. Почему жидкий цилиндр распадается на капли?

Прежде всего ясно, что длинному жидкому цилиндру энергетически выгодно распасться на капли. В этом легко убедиться, поместив небольшую капельку слюны между большим и указательным пальцами. Если теперь развести пальцы друг от друга, то слюна сначала растянется в длинную нить, а потом эта нить на наших глазах распадется на капельки. Оценим, на сколько капель может распасться такая нить. Она представляет собой тонкий цилиндр длины l и радиуса r. В начальном состоянии поверхностная капиллярная энергия такого цилиндра $\approx \sigma l r^2$, а после развала на n капель $\approx \sigma n^{1/3}(lr^2)^{2/3}$. Отсюда видно, что цилиндру энергетически выгодно развалиться не менее чем на $n \approx l/r$ капель.

Физической причиной, инициирующей такой развал, могут быть капиллярные волны малой амплитуды, распространяющиеся по поверхности цилиндра. Они могут возбуждаться внешними возмущениями, быть различной длины и частоты. Если инкремент нарастания такой волны при некоторой ее длине окажется положительным, то деформация поверхности цилиндра такой волной будет расти. Это в конце концов и приведет к распаду цилиндра на капли.

Задача о неустойчивости жидкого цилиндра была решена Рэлеем (1879). Мы приведем ее качественное решение, основанное на простых оценках. Пусть поверхность цилиндра подверглась слабому аксиально-симметричному возмущению $\delta r(x,t) = a\exp(\nu t + ikx)$. Здесь a – амплитуда, $2\pi / k$ – длина волны возмущения вдоль оси цилиндра x, ν – инкремент нарастания возмущения. При таком возмущении поверхности внутри жидкости возникает цилиндрически симметричное движение. Для единичного объема жидкости вблизи поверхности закон движения Ньютона заключается в том, что $\rho\delta\ddot{r}$ равно силе, действующей на этот объем. Величина силы определяется градиентом давления $\partial p / \partial r$ в радиальном направлении. Для типичных параметров рассматриваемой нами струи число Бонда $\mathrm{Bo} = \rho g r^2 / \sigma$ мало, поэтому вкладом гравитации в этот перепад давлений можно пренебречь и считать, что он определяется в основном капиллярными силами.

Давление, создаваемое искривленной поверхностью внутри жидкости сразу под поверхностью, отличается от давления над поверхностью невозмущенного цилиндра на величину $\Delta p = \sigma(r_1^{-1} + r_2^{-1} - r^{-1})$, где r_1 и r_2 – радиусы кривизны поверхности в двух взаимно перпендикулярных направлениях, например, вдоль и поперек цилиндра. Очевидно, что при смещении вдоль оси невозмущенного цилиндра на длину волны давление на поверхности изменится на ту же величину Δp. Это позволяет приближенно сделать качественную оценку $\partial p / \partial r \approx \Delta p / \lambda$.

Найдем теперь скачок давления Δp. Для рассматриваемого возмущения с амплитудой a в сечении, перпендикулярном цилиндру, для кривизны поверхности получаем $r_1^{-1} \approx r^{-1} - ar^{-2}$. Для кривизны поверхности в сечении, параллельном оси цилиндра, имеем $r_2^{-1} \approx ak^2$. Отсюда для скачка давления Δp получаем $\Delta p \approx \sigma a(k^2 - r^{-2})$. Теперь подставим полученные выше оценки в уравнение движения единичного объема. С учетом того, что для выбранного нами возмущения имеет место $\delta\ddot{r} = \nu^2 \delta r$, для инкремента нарастания возмущения получаем $\nu^2 \approx (\sigma / \rho r^2)\lambda^{-1}(1 - 4\pi^2 r^2 \lambda^{-2})$.

Если ν – действительное положительное число, то начальное возмущение жидкого цилиндра будет расти со временем и, в конце концов, развалит его на капли. Из нашей оценки видно, что условие роста возмущения выполнено для достаточно длинноволновых возмущений $\lambda > 2\pi r$, т.е. при $kr < 1$. Однако длинноволновые возмущения растут с разной скоростью, так как $\nu(\lambda)$ зависит от λ. Очевидно, что к распаду цилиндра на капли приведут в основном те возмущения, скорость роста которых максимальна. Из оценки для $\nu(\lambda)$ получаем значение длины волны λ_m возмущения, растущего с максимальной скоростью $\lambda_m = \sqrt{12}\pi r \approx 10r$.

Пользуясь полученным результатом, можно оценить радиус капель, на которые распадется цилиндр. Если длина капиллярной волны, вызывающей распад цилиндра, примерно равна λ_m, то цилиндр распадется на капли объема $\approx \pi r^2 \lambda_m$. Это значит, что образующиеся капли будут иметь радиус, сопоставимый по порядку величины с радиусом исходного цилиндра $\approx 2r$.

Если жидкий цилиндр движется, т.е. представляет собой истекающую из сопла струю, то механизм его распада на капли полностью аналогичен рассмотренному выше. При этом капли образуются не сразу, а на некотором удалении от отверстия сопла, из которого вытекает струя. Для развития неустойчивости требуется время $\approx \nu_m^{-1}$, за которое струя успеет убежать на определенное расстояние от сопла. После этого развившиеся «перетяжки» возмущения нарежут струю на капли, то есть произойдет то, что мы и наблюдаем у струи из крана, при поливе грядок из шланга и т.д.

Таким образом, длина сплошного участка струи определяется характером возмущений, сообщаемых струе в первый момент соплом. Чем больше амплитуда этих возмущений и ближе их длина волны на струе к значению λ_m, тем быстрее происходит распад струи на капли, то есть тем короче оказывается сплошной участок струи. Этот сплошной участок может быть значительно увеличен, если свести возмущения жидкости соплом к минимуму, например, отполировав его.

Длину сплошного участка струи l легко оценить из следующих соображений. Рассмотрим для определенности струю, падающую вертикально вниз. Если на протяжении сплошного участка l скорость струи существенно не увеличивается $gl \ll v^2$, то $l \approx v\nu_m^{-1}$ или, с учетом $\nu_m \approx (\sigma / \rho r^3)^{1/2}$, имеем $l \approx v(\rho r^3 / \sigma)^{1/2}$. Длина сплошного участка пропорциональна расходу воды, т.е. тому, насколько сильно открыт кран. Если же, напротив, $gl \gg v^2$, то струя разгоняется равноускоренно $l \approx g\nu_m^{-2}$, то есть $l \approx \rho g r^3 / \sigma$. В этом случае $l \approx r\,\mathrm{Bo}$ не зависит от напора воды. Скорость истечения воды из крана, разделяющая эти два случая, по порядку величины равна $v \approx g(\rho r^3 / \sigma)^{1/2} = \sqrt{gr}\,\mathrm{Bo}^{1/2}$. Например, для водопроводного крана с радиусом $r = 5$мм при $\sigma = 70$дин/см, $\rho = 1$ г/см^3 и $g = 10$ м/с^2 это составляет $v \approx 30$ см/с.

4. Динамика пузырька в жидкости

Теперь нам понадобится все наше умение
отличать то, что легко, от того, что верно.
проф. Альбус Дамблдор

Поверхность раздела жидкости и газа может быть устроена так, что газ находится не снаружи, а внутри жидкости. В этом случае речь идет о пузырьке газа. Рассмотрим динамику газовой полости в жидкости, возникшей в результате подводного взрыва, кавитации или пузырькового кипения. Здесь нам потребуется привлечь качественные соображения и приближенные оценки. Дело в том, что многие задачи гидродинамики крайне сложны. Сложилась даже шуточная максима о том, что все гидродинамики делятся на две группы. А именно, это экспериментаторы, которые успешно наблюдают то, что нельзя объяснить. И теоретики, которые виртуозно объясняют то, что нельзя наблюдать.

Будем для простоты считать полость сферической (пузырек), а окружающую его жидкость невязкой ($\eta = 0$) и несжимаемой $\rho(r,t) = \mathrm{const}$. Кроме того, в целях качественного анализа рассмотрим только сферически симметричные движения поверхности пузырька. Тогда поля скорости $v(r)$ и давления $P(r)$ в жидкости определяются уравнением непрерывности:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2 v = 0 \tag{10.1}$$

и уравнением Эйлера:

$$\dot{v} + v\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\ . \tag{10.2}$$

Уравнение (10.1) имеет очевидный интеграл движения $r^2 v = \mathrm{const}$, который через радиус пузырька $R(t)$ можно выразить как $r^2 v = R^2\dot{R}$. Подставляя в (10.2), получаем

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}(R^2\dot{R}) - \frac{2}{r^5}\dot{R}^4\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\ . \tag{10.3}$$

Интегрируя (10.3) с учетом условия на бесконечности $P(\infty) = P_\infty$, где жидкость не возмущена, имеем

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(R^2\dot{R})-\frac{1}{2r^4}R^4\dot{R}^2=\frac{P(r)-P_\infty}{\rho} \; . \tag{10.4}$$

Уравнение (10.4) определяет поле давления в жидкости, которое может быть немонотонным.

При типичных значениях параметров, характерных для практически важных случаев, давление внутри пузырька можно считать однородным. Это связано с тем, что $\dot{R}$, как правило, значительно меньше скорости звука в газе $c_{\text{г}}$. Следовательно, это однородное давление P_0, с точностью до лапласовского скачка $2\sigma / R$ (ничтожно малого по сравнению с динамическим перепадом давлений) равно давлению в жидкости на границе пузырька $P(R)$. Подставляя это условие в (10.4), получаем уравнение Рэлея:

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2=\frac{-\Delta P}{\rho} \; , \tag{10.5}$$

где $\Delta P = P_\infty - P_0$, $P_0 = P(R)$. Уравнение Рэлея однозначно связывает динамику радиуса пузырька $R(t)$ с изменением во времени перепада давлений $\Delta P(t)$. Этот перепад определяется инерцией жидкости при сферически симметричном движении.

Уравнению (10.5) можно придать другой эквивалентный вид. Если учесть, что кинетическая энергия жидкости равна $E=\int_R^\infty (\rho v^2/2)4\pi r^2 dr = 2\pi\rho R^3\dot{R}^2$ и то, что выбранное нами приближение бездиссипативно, закон сохранения энергии $dE=(\rho_0-\rho_\infty)\,d(4\pi R^3/3)$ можно представить в виде

$$\frac{1}{2R^2}\frac{d}{dR}(R^3\dot{R}^2)=\frac{P_0-P_\infty}{\rho} \; . \tag{10.6}$$

Теперь попробуем определить время схлопывания пузырька с начальным радиусом R_0. Сделаем еще одно предположение, позволяющее продвинуться в нашем качественном анализе. Будем считать, что давление внутри пузырька остается постоянным во времени $P_0 = \mathrm{const}$. В частности, если пузырек родился в результате кавитации, внутреннее давление может быть равно нулю. Под влиянием перепада давлений $\Delta P = P_\infty - P_0$ жидкость приходит в движение, и пузырек начинает схлопываться. Исследуем динамику этого процесса. В выбранном нами приближении уравнение (10.6) имеет первый интеграл. С учетом начального условия получаем

$$\dot{R} = -\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\Delta P}{\rho}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3/2}\left(1-\left(\frac{R}{R_0}\right)^3\right)^{1/2}, \qquad (10.7)$$

где знак минус означает, что пузырек схлопывается. Время схлопывания τ определяется из условия $R(\tau)=0$. Уравнение (10.7) легко интегрируется

$$\int_{R/R_0}^{1}\frac{x^{3/2}dx}{(1-x^3)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2\Delta P}{3\rho}}\frac{t}{R_0}, \qquad (10.8)$$

что для времени схлопывания пузырька τ дает

$$\tau = 0{,}92 R_0\sqrt{\frac{\rho}{\Delta P}}. \qquad (10.9)$$

Здесь учтено, что безразмерный интеграл в левой части (10.8) при $R(\tau)=0$ равен $(-1/2)!(-1/6)!/3(1/3)! = 0{,}75$. На начальной стадии процесса $R/R_0 - 1 \sim t^2$, а на конечной стадии непосредственно перед схлопыванием $R/R_0 \sim (\tau - t)^{2/5}$.

Представление о порядке величины времени схлопывания τ дают следующие оценки. Для пузырька с радиусом $R_0 = 1$ мм в воде $\rho = 10^3$ кг/м^3 при избыточных давлениях $\Delta P = 10^4$ н/м^2 (0,1 бар) и 10^5 н/м^2 (1 бар) получаем $\tau \approx 3\cdot 10^{-4}$ с и 10^{-4} с соответственно. Это отвечает частотам из верхней границы интервала слышимости. Для кавитационных пузырьков ($R_0 \approx 100$ мкм) соответствующие частоты достигают ультразвукового диапазона. Это показывает, что на финальной стадии схлопывание происходит с огромной скоростью. При этом в жидкости около пузырька развиваются большие давления. Оценим их величину.

Уравнения (10.4) и (10.6) позволяют полностью проанализировать распределение давления в жидкости $P(r)$. Легко показать, что оно является немонотонным, причем максимум перепада давления $P_* - P_\infty$ на финальной стадии схлопывания $R/R_0 \ll 1$ возрастает как

$$\frac{P_* - P_\infty}{P_\infty - P_0} \approx \frac{R_0^3}{4^{4/3}R^3} \propto R^{-3}. \qquad (10.10)$$

Также огромным на этой стадии становится ускорение границы схлопывающегося пузырька. Из (10.7) получаем $\ddot{R} \approx R_0^3\Delta P/\rho R^4$. Оценим порядки получающихся величин. Для пузырька с $R_0 = 1$ мм в воде $\rho = 10^3$ кг/м^3 при перепаде давлений $\Delta P = 0{,}1$ бар на завершающей стадии схлопывания, когда $R / R_0 = 5 \cdot 10^{-2}$, получаем огромные значения ускорения $\left|\ddot{R}\right| = 10^9$ м / с^2 и давления $P_* - P_\infty \approx 130$ бар. Этого достаточно для возникновения в воде ударных волн. Поэтому со схлопыванием кавитационных пузырьков связывают разрушение различных гидротехнических устройств.

При получении этих оценок мы сделали несколько допущений. Сформулируем их еще раз, чтобы охарактеризовать полностью наше приближение. Во-первых, мы рассмотрели только сферически симметричную моду схлопывания как основную. Во-вторых, мы полагали распределение давления внутри пузырька однородным, что верно при $\dot{R} \ll c_г$. В-третьих, мы пренебрегли сжимаемостью жидкости, что верно при $\dot{R} \ll c_ж$. В-четвертых, мы пренебрегли лапласовским скачком давления $\sigma / R_0 \ll \Delta P$, что тем более верно на заключительных стадиях схлопывания, когда $\sigma / R \ll P_* - P_\infty$. В-пятых, мы считали давление газа в пузырьке P_0 постоянным. Численное моделирование показывает, что время схлопывания τ слабо зависит от показателя политропы n при сжатии газа в пузырьке, изменяется всего на десять процентов при $0 < n < 5$. Это означает, что основным является перепад давлений $\Delta P(\infty)$ в начальный момент, а детали изменения $\Delta P(t)$ в процессе схлопывания несущественны.

Таким образом, конденсация, теплообмен на границе пузырька, растворение остаточного газа слабо влияют на схлопывание кавитационного пузырька. То же самое можно сказать о пренебрежении вязкостью жидкости, и это в-шестых. Численное моделирование показывает, что даже для высоковязких жидкостей (смазочные масла и т.д.) влияние диссипации на процесс схлопывания проявляется только на заключительной стадии схлопывания пузырька $R / R_0 \approx 10^{-3}$. Примерно до тех же величин радиуса пузырька верно пренебрежение сжимаемостью жидкости. Конечная сжимаемость несколько сглаживает пики максимального перепада давления. Однако решение Рэлея (10.10) дает правильные по порядку величины оценки значения перепада давления.

Итак, внушительный список сделанных допущений не умаляет верности качественной модели Рэлея. При этом ее неоспоримыми достоинствами являются высокая предсказательная сила и прозрачный физический смысл. Поскольку в рассматриваемом приближении процесс схлопывания бездиссипативен, то после окончательного коллапса пузырька начнется его обратное расширение. Таким образом, процесс схлопывания и расширения будет повторяться периодически, представляя собой колебания пузырька с периодом 2τ. Учет перечисленных выше факторов и выбор более реалистических приближений не изменяет ни общего характера колебаний, ни характерного масштаба их частоты. Полученные выше оценки находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

5. Капиллярные колебания капли

Я больше всего дорожу аналогиями,
моими самыми верными учителями.
Иоганн Кеплер

Поверхность раздела жидкости и газа может ограничивать небольшой объем жидкости. В этом случае речь идет о капле. Свободно подвешенная в невесомости капля может совершать капиллярные колебания. При этих колебаниях форма поверхности капли отклоняется от сферической. Найдем период собственных колебаний капли при малых амплитудах отклонений, то есть когда радиальное смещение поверхности ζ мало по сравнению с радиусом капли R.

Будем полагать, что вязкость жидкости мала и затуханием собственных капиллярных колебаний можно пренебречь. Тогда, для потенциального движения идеальной жидкости $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению Лапласа (см. лекцию 3):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0. \quad (10.11)$$

Давление в жидкости равно $p = -\rho\partial\varphi/\partial t$. Граничное условие на поверхности капли при $r = R$ имеет вид $p = 2\sigma K$, где $2K = 1/R_1 + 1/R_2$ – кривизна поверхности в данной точке. Атмосферное давление внутри и вне капли мы опускаем. Тогда на поверхности капли получаем

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2\sigma\zeta}{R^2} + \frac{\sigma}{R^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\psi^2}\right]. \quad (10.12)$$

Выражая потенциал скорости φ через смещение $v_r = \partial\varphi/\partial r = \partial\zeta/\partial t$ и дифференцируя (10.12) по времени, находим при $r = R$:

$$\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{2\sigma}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\sigma}{R^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^3\zeta}{\partial\psi^2\partial t}\right]. \quad (10.13)$$

Колебания капли описываются решением (10.13) в виде стоячих волн $\varphi = e^{i\omega t} f(r,\theta,\varphi)$, где $f(r,\theta,\varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta f(r,\theta,\psi) = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2} = 0 \quad (10.14)$$

Решением уравнения (10.14) являются объемные шаровые функции:

$$f_{lm} = r^l Y_{lm}(\theta,\psi). \qquad (10.15)$$

Число l принимает целочисленные значения $l = 0, 1, 2, \ldots$, а число m принимает значения $m = \pm l, \ldots, \pm 1, 0$. Шаровая функция Y_{lm} удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\psi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0. \qquad (10.16)$$

Таким образом, каждому значению чисел l и m отвечает определенное собственное капиллярное колебание капли.

Подставляя (10.15) в граничное условие (10.13) и учитывая (10.16), находим $-R'\rho\omega^2 = 2\sigma l R^{l-1}/R^2 - \sigma l R^{l-1} l(l+1)/R^2$, откуда получаем собственные частоты колебаний капли:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{\sigma l(l-1)(l+2)}{\rho R^3}}. \qquad (10.17)$$

Частота собственных капиллярных колебаний зависит только от числа l. Это означает, что собственные колебания капли $(2l+1)$-кратно вырождены.

Из (10.17) следует, что минимальной возможной частоте собственных колебаний соответствует значение $l = 2$. Этот факт имеет ясный физический смысл. Выражение (10.17) обращается в ноль при $l = 0$ и $l = 1$. При $l = 0$ имели бы место сферически-симметричные, не зависящие от углов θ и φ смещения поверхности капли. В силу несжимаемости жидкости такие колебания невозможны. При $l = 1$ происходит поступательное движение капли как целого. Такое движение не имеет колебательного характера при отсутствии внешних сил, действующих на каплю. И только при $l = 2$ получаем минимальную частоту колебаний капли:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3}}. \qquad (10.18)$$

Частота собственных колебаний быстро убывает с ростом радиуса капли R. Для водяной капли объемом 0.8 мл период основной моды капиллярных колебаний составляет около 0.11 с.

6. Гравитационно-капиллярные волны

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.
Козьма Прутков. Плоды раздумий

Теперь рассмотрим волны, которые могут распространяться по плоской поверхности раздела жидкости и газа. Поле скоростей жидкости является безвихревым $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ в силу малых амплитуд движения (см. лекцию 3). Потенциал поля скоростей φ, таким образом, удовлетворяет уравнению Лапласа (10.11) $\nabla^2\varphi = 0$. Нелинейное слагаемое $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении Эйлера (3.9) можно записать как

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathbf{v}^2 - [\mathbf{v}, \operatorname{rot}\mathbf{v}]. \tag{10.19}$$

Тогда с учетом (10.19) и потенциальности поля скоростей из уравнения (3.9) получаем уравнение Бернулли:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}, \tag{10.20}$$

где z – вертикальная координата, отсчитываемая от невозмущенной поверхности жидкости $z = 0$. Учитывая, что на поверхности жидкости давление равно атмосферному p_0, можно переписать уравнение (10.20) в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{p - p_0}{\rho} + gz = 0. \tag{10.21}$$

Дополненное граничным условием

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=\infty} = 0 \tag{10.22}$$

в глубине жидкости, это уравнение определяет закон дисперсии гравитационно-капиллярных волн.

Если поверхность раздела двух сред искривлена, то из-за действия сил поверхностного натяжения давление вблизи этой поверхности подчиняется закону Лапласа $p_1 - p_2 = 2\sigma / r$, где p_1 и p_2 – давления в различных средах вблизи границы раздела, $2/r$ – кривизна поверхности раздела. Рассмотрим случай, когда профиль поверхности зависит только от одной пространственной координаты и времени. Тогда отклонение поверхности жидкости от невозмущенной поверхности $z = 0$ описывается уравнением $\xi = \xi(x,t)$. Учитывая, что $1/r = \partial^2\xi / \partial x^2$, получим

$$p - p_0 = -\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{10.23}$$

С учетом (10.23) линеаризованное уравнение Бернулли (10.21) для поверхности жидкости будет иметь вид

$$\rho g \xi + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \tag{10.24}$$

Дифференцируя (10.24) по t и учитывая, что $\partial\varphi / \partial z = v_z = \partial\xi / \partial t$, получаем

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \tag{10.25}$$

Полагая, что вдоль раздела сред распространяется гармоническая волна $\varphi(x,z,t) = u(z)e^{i(\omega t - kx)}$, перепишем $\nabla^2 \varphi = 0$ в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - k^2 u = 0. \tag{10.26}$$

Отсюда следует, что удовлетворяющая граничному условию (10.22) волна имеет вид

$$\varphi(x,z,t) = zxAe^{-kz}e^{i(\omega t - kx)}. \tag{10.27}$$

Подставляя (10.27) в (10.25), получаем дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн:

$$\omega^2 = kg + \frac{\sigma k^3}{\rho}. \tag{10.28}$$

Если в (10.28) преобладает слагаемое, связанное с гравитацией, $kg \gg \sigma k^3 / \rho$ (длина волны больше капиллярной постоянной $\sqrt{2\sigma / \rho g}$), говорят о гравитационных волнах, если же преобладает слагаемое, связанное с поверхностным натяжением, $kg \ll \sigma k^3 / \rho$ (длина волны меньше капиллярной постоянной $\sqrt{2\sigma / \rho g}$), то употребляется термин *капиллярные волны*. Если же оба слагаемых в дисперсионном соотношении (10.28) одного порядка, то такие волны называются *гравитационно-капиллярными*.

7. Неустойчивость Рэлея–Тейлора

Все устойчивые системы похожи друг на друга,
Каждая неустойчивая система неустойчива по-своему.
Я. Г. Пановко

Описанные выше гравитационно-капиллярные волны могут приводить к неустойчивости Рэлея–Тейлора. Этот вид неустойчивости имеет место, если над менее плотной жидкостью находится несмешивающаяся с ней более плотная. Тогда малые возмущения могут приводить к возникновению нарастающих волн на плоской границе раздела этих жидкостей. Если длина волны возмущения λ превышает критическое значение λ_*, то система становится неустойчивой, и находящаяся сверху тяжелая жидкость во впадинах волны проваливается вниз.

Для того чтобы рассмотреть развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора, не нужно проводить дополнительных вычислений. Считая, что вверху находится тяжелая жидкость, а внизу – легкая с пренебрежимо малой плотностью, достаточно в уже полученном уравнении (10.28) изменить знак g на противоположный. Тогда вместо уравнения (10.28) получаем

$$\omega^2 = -kg + \frac{\sigma k^3}{\rho}. \qquad (10.29)$$

Это означает, что все возмущения, для которых выполняется условие $k^2 < \rho g / \sigma$, или

$$\lambda > \lambda_* = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}, \qquad (10.30)$$

вследствие неустойчивости Рэлея–Тейлора будут экспоненциально возрастать. Из (10.29) следует, что наиболее быстро возрастают возмущения с длиной волны $\lambda_m = 2\pi\sqrt{3\sigma / \rho g}$. В конечном итоге именно они и приводят к формированию периодической структуры на поверхности раздела.

Неустойчивость Рэлея–Тейлора легко продемонстрировать на простом опыте. В сосуд с машинным маслом погрузим край вертикально расположенной металлической линейки и поднимем линейку над сосудом. Масло, стекая по линейке вниз, образует на ее нижнем торце слой, поверхность которого неустойчива. В результате на этой поверхности возникает и растет гравитационно-капиллярная волна, выпуклости которой превращаются в капли, отрывающиеся от линейки. Длина образующейся масляной волны определяется оценкой $\lambda \approx \lambda_m$.

8. Волны Фарадея

Работая над решением задачи,
всегда полезно знать ответ.
Законы Мёрфи

Волны Фарадея, или рябь Фарадея, – это стоячие волны на поверхности жидкости, появляющиеся при вибрации сосуда на резонансной частоте. Если кювету, в которую налит слой жидкости, периодически «трясти» в вертикальном направлении, то на поверхности жидкости могут образовываться структуры, напоминающие по форме прямоугольники. Такие волны могут создавать разнообразные узоры из полосок, квадратов и даже шестиугольников. Эти характерные структуры, формируемые капиллярными волнами, возбуждаются на поверхности жидкости в кювете только при определенных частотах. Колебания кюветы параметрически соответствуют изменениям с определенной частотой ускорения свободного падения. Частота этих волн кратна половине частоты колебаний сосуда с жидкостью.

Подобные структуры первым наблюдал Фарадей еще в 1831 году. Его эксперименты являются первыми наблюдениями самоорганизации в гидродинамических системах. Как писал Фарадей: «Если поместить ртуть на вибрирующую оловянную тарелку, то получается очень красивая картина в отраженных солнечных лучах». Фарадей проводил эти эксперименты с различными жидкостями (водой, чернилами, молоком, яичным белком), в кюветах различной формы (круглой, квадратной, прямоугольной) и выяснил, что практически всегда рябь образует квадратную решетку, которая слегка деформируется у границы кюветы из-за взаимодействия жидкости с краями кюветы, а пространственная структура не зависит ни от начальных условий, ни от сорта жидкости.

Фарадей отметил поразительный для того времени факт, что частота возникающих на поверхности волн вдвое меньше частоты колебаний пластины. Рэлей (1895) разгадал параметрический характер возбуждаемых в экспериментах Фарадея волн.

Рассмотрим свойства параметрически возбуждаемой капиллярной ряби количественно. Когда слой жидкости со свободной верхней границей совершает вертикальные колебания, на его поверхности возбуждаются поверхностные капиллярные волны. Рассмотрим случай, когда кювета колеблется вертикально с частотой Ω. В системе отсчета, связанной с кюветой, можно считать, что периодически изменяется величина ускорения свободного падения g. Возникает осциллирующая добавка к ускорению свободного падения:

$$g = g_0(1+\beta\cos\Omega t), \tag{10.31}$$

где $g_0 = 9.8$ м/с^2, Ω – частота вертикальных колебаний и $\beta = \Omega^2 a / g_0$ – модуляция ускорения свободного падения при амплитуде колебаний кюветы a.

Представим потенциал поля скоростей поверхностных волн в виде суммы пространственных гармоник с волновыми числами $k_n = 2\pi n / l$:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) e^{2\pi n x / l}, \tag{10.32}$$

где l – длина кюветы. Подставляя (10.32) в уравнение (10.25), с учетом (10.21), для каждой пространственной гармоники k_n получаем уравнение Матье:

$$\ddot{\varphi}_n + \left(\frac{\sigma k_n^3}{\rho} + g k_n + \beta g \cos\Omega t \right) \varphi_n = 0. \tag{10.33}$$

Уравнение Матье (10.33) удобно представить в стандартном виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \omega^2 (1+\mu\cos\Omega t)\varphi_n = 0, \tag{10.34}$$

где $\omega = (\sigma k_n^3 / \rho + g k_n)^{1/2}$ – частота капиллярных волн (10.28), $\mu = \beta g \rho / \sigma k_n^3$. Следовательно, имеет место параметрическое возбуждение ряби Фарадея, и частоты поверхностных волн, которые могут реализовываться при параметрическом возбуждении, будут находиться с частотой внешнего воздействия в соотношении $\omega = n\Omega / 2$, где n – целое число.

В реальной жидкости всегда есть потери, обусловленные вязким трением. Если учесть вязкость, то неустойчивость возникает, только если амплитуда внешнего воздействия превышает некоторый порог $\beta > \beta_{cr}$. Мы подробно обсудили его вычисление в лекции 7 (Ч. 1. Колебания). Для бесконечно глубокой жидкости и основного резонанса $n = 1$:

$$\beta_{cr} = \frac{4\Omega \nu k_*}{g}, \tag{10.35}$$

где в пренебрежении гравитационного вклада $kg \ll \sigma k^3 / \rho$:

$$k_* = \left(\frac{\Omega^2 \rho}{4\sigma} \right)^{1/3}. \tag{10.36}$$

Здесь ν – кинематическая вязкость жидкости, связанная с динамической вязкостью η соотношением $\nu = \eta / \rho$. Учет конечной глубины жидкости приводит к увеличению значения β_{cr}, так как возрастают потери, связанные с трением о дно. Напомним, что приведенное здесь соотношение для β_{cr} соответствует основному резонансу $n = 1$, $\omega = \Omega / 2$.

Именно этот резонанс реализуется в большинстве экспериментов с капиллярными волнами. В то же время теоретически возможно возбуждение ряби Фарадея на частотах высших резонансов $\omega = n\Omega / 2$, $n > 1$. Почему в эксперименте реализуется именно первый резонанс, легко понять, учитывая, что при резонансах более высокого порядка затухание капиллярных волн увеличивается, а частотный интервал сужается (см. лекцию 7. Ч. 1. Колебания).

9. Контрольные вопросы к лекции 10

1. Что такое кавитация?
2. Что такое куммулятивный эффект?
3. Что такое капиллярные волны?
4. К чему приводит развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора?
5. К чему приводит развитие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца?
6. Чему равно время схлопывания пузырька?
7. Чему равна частота колебаний жидкой капли?
8. Чему равно число Бонда?
9. Чему равен инкремент нарастания капиллярных колебаний струи?
10. Каких величин может достигать скорость схлопывания пузырька в жидкости?
11. Запишите уравнение непрерывности.
12. Запишите дисперсионное уравнение для гравитационно-капиллярных волн.
13. Что такое волны Фарадея?
14. Запишите уравнение Эйлера.

10. Задачи к лекции 10

1. Глубинные подводные взрывы. Защищая секретную морскую базу, противолодочный крейсер атакует подводную лодку. Гидроакустическая станция подводной лодки способна зарегистрировать не только взрыв глубинной бомбы, но и колебания газового пузыря, образовавшегося в результате глубинного подводного взрыва. Пузырь быстро осциллирует (т.е. периодически изменяет свой радиус) с периодом $T \propto \rho^a P^b E^c$, величина которого зависит от давления P, плотности воды ρ и полной энергии взрыва E, при этом a, b и c – постоянные безразмерные величины. Используя метод размерностей, оцените период колебаний объема газового пузыря, образовавшегося в результате глубинного подводного взрыва. Определите, во сколько раз изменится частота колебаний пузыря, если полная энергия взрыва увеличится в 2,2 раза.

2. Схлопывание кавитационного пузырька. Найдите время схлопывания кавитационного пузырька радиусом R, образовавшегося в жидкости плотности ρ с избыточным давлением ΔP. Оцените характерные частоты шума кавитационных пузырьков радиусом ≈ 1 мм, схлопывающихся в воде при избыточном давлении $0.1-1$ атм. Оцените скорость схлопывания и давление в таких пузырьках на финальной стадии схлопывания. Достаточно ли этих условий для образования ударных волн в воде?

3. Неустойчивость Джинса. Однородный и изотропный гравитирующий газ простирается во всех направлениях и находится при постоянных плотности ρ_0, гравитационном потенциале φ_0 и давлении p_0. Уравнение состояния газа $p = p(\rho)$. Найдите закон дисперсии $\omega = \omega(k)$ малых возмущений плотности и потенциала этого газа. Покажите, что система неустойчива относительно длинноволновых возмущений с $\lambda > \lambda_c$. Оцените размер и массу гравитационных сгустков, планет, звезд, возникающих в системе на нелинейной стадии развития неустойчивости. Оцените массу Джинса звездного скопления (в массах Солнца), образовавшегося в результате развития такой неустойчивости из среды с $\rho_0 = 0.025\,\mathrm{M}_\odot \cdot \text{пс}^{-3}$, $T = 10\,\mathrm{K}$.

4. Неустойчивость Рэлея–Тейлора. Это неустойчивость горизонтальной поверхности раздела двух жидкостей в поле тяжести, когда более плотная жидкость лежит в неустойчивом равновесии на менее плотной.

Найдите закон дисперсии $\omega = \omega(k)$ малых возмущений формы поверхности раздела.

5. **Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца.** Это неустойчивость поверхности раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2, которые скользят относительно поверхности со скоростями v_1 и v_2. Найдите закон дисперсии $\omega = \omega(k)$ малых возмущений формы поверхности раздела. Оцените время развития неустойчивости, разрушающей плоскую поверхность раздела.

6. **Неустойчивость Тонкса–Френкеля.** Это неустойчивость плоской горизонтальной поверхности жидкого проводника (металла) с поверхностным натяжением σ, заряженной до определенного поверхностного поля $\mathcal{E}$. Получите дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ для гравитационно-капиллярных волн в присутствии электрического поля. Найдите критическое поле $\mathcal{E}_c$ развития неустойчивости поверхности.

7. **Гравитационные и капиллярные волны.** Найдите дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ для волн, распространяющихся по горизонтальной поверхности жидкости с плотностью ρ и поверхностным натяжением σ в поле тяжести g.

8. **Капиллярная неустойчивость жидкой струи.** Струя жидкости плотности ρ вытекает из круглого отверстия радиусом r со скоростью v. Найдите дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ для возмущений поверхности струи с поверхностным натяжением σ. Оцените размер капель, на которые распадется струя вследствие развития капиллярной неустойчивости. На каком расстоянии от отверстия произойдет распад на капли?

9. **Колебания жидкой капли.** Капля жидкости радиусом r с поверхностным натяжением σ и плотностью ρ совершает колебания в невесомости. Опишите моды ее колебаний и найдите их частоты ω_l. Начиная с каких размеров капли следует учитывать гравитационные силы?

10. **Неустойчивость заряженной капли.** Жидкая капля радиусом r с поверхностным натяжением σ заряжена до заряда q. Исследуйте устойчивость ее поверхности. Найдите максимальный заряд q_c, до которого ее можно зарядить.

11. **Неустойчивость Рэлея–Бенара.** Слой жидкости с положительным коэффициентом объемного расширения подогревается снизу в поле тяжести. Жидкость вблизи дна нагревается и расширяется, за счет дополни-

тельной подъемной силы стремится подняться вверх. Холодная жидкость сверху стремится опуститься вниз. Этим движениям препятствует вязкое трение жидкости и теплопроводность в ней. Вязкие силы тормозят движение жидкости. Медленно поднимаясь вверх, она за счет теплопроводности остывает и сжимается обратно. Так что дополнительная подъемная сила исчезает, и движение жидкости прекращается. В результате при малой разности температур ΔT конвекции в слое нет, и тепло переносится за счет обычной теплопроводности жидкости. Локально жидкость при этом покоится, т.е. среднее значение скорости в любой точке жидкости равно нулю. При превышении критической разности температур ΔT_c это состояние равновесия становится неустойчивым. В жидкости появляется конвекция, макроскопическое движение. В определенных местах слоя нагретая внизу жидкость поднимается вверх, в других, наоборот, холодные верхние слои опускаются вниз. В слое возникает упорядоченная конвективная структура.

Лекция 11. Солитоны

В действительности всё обстоит
не так, как на самом деле.
Станислав Ежи Лец

1. Солитоны. 2. Взаимодействие солитонов. 3. Солитон Кортевега–де Вриза 4. Солитон синус-Гордона. 5. Устойчивость солитонов.

1. Солитоны

Как мы выяснили в предыдущих лекциях, широкий класс волновых процессов в однородных средах различной природы описывается волновым уравнением (1.12). Оно описывает распространение незатухающих волн с постоянной скоростью c. При выводе этого уравнения мы опирались на три основных предположения. Во-первых, считали, что пренебрежимо мала диссипация, что выражается в инвариантности (1.12) относительно обращения времени $t \to -t$. Во-вторых, полагали малыми амплитуды волн, что позволяет пренебречь нелинейными по амплитуде поправками к (1.12). Наконец, в-третьих, пренебрегали дисперсией, т.е. зависимостью скорости распространения от длины волны. Обычно это соответствует пределу больших длин волн.

Универсальность уравнения (1.12) связана с тем, что его вид не зависит от свойств конкретной среды. Эти свойства отражаются только в величине скорости звука c в ней. Если отказаться от пренебрежения диссипацией, нелинейностью и дисперсией, то эта общность исчезнет. Каждая среда будет описываться своим уравнением. Однако если не пренебрегать полностью указанными эффектами, но считать их малыми, то снова можно получить универсальные уравнения, подходящие для широкого класса сред. Эти уравнения имеют имена собственные: уравнение Кортевега–де Вриза, синус-Гордона и т.д. Это связано с тем, что хотя эти поправки малы, они приводят к новым качественным эффектам, которые могут существенно изменить решение. Действительно, даже малая диссипация энергии приведет за достаточно большое время к затуханию волны. Дисперсия приводит к расплыванию волнового пакета, что также может исказить решение до неузнаваемости. Что касается нелинейных эффектов, то они приводят к укручению фронтов в решении. Поэтому универсальные уравнения могут правильно уловить большие эффекты малых поправок. Одним из таких важных эффектов является возникновение солитонов.

Солитон – это устойчивая уединенная волна в нелинейной диспергирующей среде, которая ведет себя во многом подобно частице. После первого наблюдения этого феномена на воде солитон обнаружил себя в астрофизических системах, твердом теле, на поверхности жидкостей, в биологических объектах, цепочках LC-элементов с нелинейными диодами, волоконных линиях передачи информации и во многих других средах – там, где могут распространяться волны и поддерживается баланс между нелинейностью и дисперсией.

Первое наблюдение уединенной волны было сделано в 1834 г. шотландским ученым Скоттом Расселом на воде. И только к концу этого века два голландца, Кортевег и де Вриз, получили свое знаменитое уравнение для волн на мелкой воде, имеющее решение в виде солитона. Термин *солитон* (от английского solitary wave – уединенная волна) был придуман в 1965 г. Забуски и Крускалом, которые занимались численным исследованием уравнения Кортевега–де Вриза. После этого стало ясно, что уединенная волна является важным устойчивым типом движения в нелинейных средах.

Особый интерес к солитонам обусловлен тем, что это стационарная волна, энергия которой заключена в конечной области пространства. Кроме того, при взаимодействии друг с другом они не разрушаются и не искажаются. Важное значение также имеет то, что самые различные нестационарные возмущения в нелинейной дисперсионной среде распадаются на устойчивые солитоноподобные волны.

С математической точки зрения основные результаты в теории солитонов получены численными или приближенными методами решения уравнений Кортевега–де Вриза, синус-Гордона, Буссинеска, нелинейного уравнения Шредингера и др. Среди аналитических методов решения этих уравнений наиболее действенным является метод обратной задачи рассеяния. Экспериментально уединенные волны наблюдаются в плазме, на поверхности жидкости, в оптических средах, в нелинейных дисперсионных линиях передачи и т.д.

2. Взаимодействие солитонов

Все научные модели неверны,
но некоторые полезны.
Джордж Бокс

Отличие солитонов от других уединенных волн проявляется в их взаимодействии. Пусть две уединенные волны с различными амплитудами движутся друг за другом в одну сторону в нелинейной среде с дисперсией.

Скорость движения таких волн тем выше, чем больше их амплитуда, а ширина волны понижается с ростом амплитуды, то есть более высокие волны уже и движутся быстрее. Поэтому волна с большей амплитудой перемещается быстрее и через некоторое время догонит движущуюся впереди волну с меньшей амплитудой. После этого в течение некоторого времени волны будут двигаться как единое целое, активно взаимодействуя между собой, а затем вновь разъединятся.

Замечательным свойством солитонов является то, что после взаимодействия их форма и скорость полностью восстанавливаются. Обе волны лишь немного смещаются относительно того положения, которое они заняли бы при движении в отсутствие взаимодействия. Сохранение формы и скорости волн после взаимодействия плюс локализация их в пространстве напоминают свойства элементарных частиц и их упругих столкновений. Поэтому такие уединенные волны и назвали *солитонами*. Это специальное название уединенных волн, созвучное электрону, протону и названиям других элементарных частиц, в настоящее время стало общепринятым.

Уединенные волны и в самом деле ведут себя как частицы. Большая волна не проходит через малую при их взаимодействии. Когда уединенные волны соприкасаются, то большая волна замедляется и уменьшается, а волна, которая была малой, наоборот, ускоряется и подрастает. И когда малая волна дорастает до размеров большой, а большая уменьшается до размеров малой, солитоны разделяются и более мощный уходит вперед. В этом смысле солитоны ведут себя как упругие теннисные мячи.

Итак, *солитоном* называется нелинейная уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость при собственном движении и при столкновении с себе подобными уединенными волнами, то есть представляет собой устойчивое образование. Единственным результатом взаимодействия солитонов может быть некоторый сдвиг фаз. В нелинейных средах далеко не все уединенные волны обладают свойствами солитонов. Сосуществование нелинейности и дисперсии – признак необходимый, но не достаточный, нужна еще компенсация эффектов нелинейности и дисперсии.

Уединенные волны могут существовать и в линейной среде. В силу отсутствия нелинейных эффектов, диссипации энергии и дисперсии уединенная бегущая волна будет распространяться в линейной среде без изменения формы и скорости. При возникновении в такой среде двух и более уединенных волн их столкновение друг с другом не приводит к изменению формы и скорости вследствие линейной суперпозиции волн. Но называть подобные линейные волны солитонами нельзя. При наличии дисперсии, но в отсутствие нелинейности возникновение солитонов невозможно в силу расползания волн. При наличии нелинейности, но без дисперсии возможность существования солитонов также исключена из-за непрерывного перехода энергии первоначально возбужденной уединенной волны в энергию волн более высоких частот. Эта особенность в нелинейных средах проявляется как опрокидывание фронта и формирование ударной волны. Появление солитонов возможно только при наличии и дисперсии, и нелинейности. Важно отметить, что настоящие солитоны могут существовать лишь в тех системах, где диссипация энергии отсутствует.

Первые классические наблюдения солитонов связаны с волнами на воде. В дальнейшем оказалось, что солитоноподобные решения существуют у большого числа нелинейных волновых уравнений, которые были хорошо известны раньше как в классической, так и в квантовой физике. Солитоны встречаются при распространении волн в плазме и в нелинейных линиях передачи электромагнитных волн, в полупроводниках и сверхпроводниках, в цепочках последовательно связанных атомов и при взаимодействии элементарных частиц. В качестве примера рассмотрим два из них.

3. Солитон Кортевега–де Вриза

С математической точки зрения солитоны представляют собой стационарные нелинейные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью и с сохранением профиля. При этом уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые иногда могут иметь аналитические решения. Эти стационарные решения (солитоны, ударные волны и т.д.) играют роль своеобразных собственных мод нелинейной среды. Рассмотрим уравнение Кортевега–де Вриза:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0\,. \qquad (11.1)$$

Уравнение Кортевега–де Вриза имеет универсальный характер. Оно описывает слабонелинейные волны в длинноволновом приближении. Это гравитационные волны на мелкой воде, ионно-акустические волны в плазме, волны Россби во вращающейся жидкости, волны в нелинейных электрических цепях и т.д. Это уравнение впервые возникло в связи с волнами на поверхности мелкой воды. Коэффициент β определяется соотношением $\beta = \sqrt{gh^5}/6$, где h – толщина слоя воды, а $2u\sqrt{h}/3\sqrt{g}$ представляет собой смещение частиц жидкости от горизонтального положения равновесия.

Стационарное распространяющееся решение уравнения (11.1) имеет вид $u = u(x - vt)$, где v – постоянная скорость волны. Для этого автомодельного решения уравнение (11.1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-vu' + uu' + \beta u''' = 0\,, \qquad (11.2)$$

где штрих означает дифференцирование по автомодельной переменной $\xi = x - vt$. Однократное интегрирование (11.2) дает уравнение консервативного нелинейного осциллятора с единичной массой

$$u'' = -\frac{dU}{du}\,, \qquad (11.3)$$

в котором ξ играет роль времени, а $U(u)$ – потенциальной энергии:

$$U(u) = -\frac{vu^2}{2\beta} + \frac{u^3}{6\beta}\,. \qquad (11.4)$$

Зависимость $U(u)$ имеет вид кубической параболы. В соответствии с этим фазовый портрет нелинейного осциллятора (11.3) имеет два состояния равновесия, одно из которых $u = 0$ является седлом, а другое $u = 2v$ – центром. Фазовый портрет позволяет заключить, что физический смысл имеют только траектории, лежащие внутри сепаратрисной петли, где движение финитно. Только тогда выполняются граничные условия стационарной автомодельной волны $u'(\pm\infty) = 0$.

Вблизи устойчивого состояния равновесия, на дне потенциальной ямы $U(u)$, колебания осциллятора являются слабо нелинейными. Решение (11.3) представляет собой квазигармоническую стационарную волну. Вблизи сепаратрисы движение носит характер сильнонелинейных периодических волн, которые в гидродинамике называются *кноидальными*. Наконец, движению по сепаратрисе соответствует решение в виде уединенной волны – солитона. Амплитуда солитона равна $u_0 = 3v$, т.е. чем быстрее движется солитон, тем он выше. Бесконечно долгому приближению к седловой точке по сепаратрисе и удалению от нее соответствуют протяженные хвосты впереди и сзади солитона.

Мы можем найти явный вид профиля солитона. Первый интеграл уравнения (11.3) является законом сохранения энергии:

$$\frac{(u')^2}{2} = E - U(u)\,, \qquad (11.5)$$

где E – полная энергия осциллятора (11.3). Отсюда с учетом (11.4) находим

$$u' = \pm\sqrt{2E - \frac{u^3}{3\beta} + \frac{Uu^2}{\beta}}\,. \qquad (11.6)$$

Знак плюс соответствует движению в верхней фазовой полуплоскости, а знак минус – в нижней. Запишем условия в центре солитона в виде $u(0)=u_0$, $u'(0)=0$. Тогда значение полной энергии равно

$$E=U(u_0)=\frac{1}{2\beta}\left(vu_0^2-\frac{u_0^3}{3}\right). \qquad (11.7)$$

Таким образом,

$$\sqrt{\beta}u'=\pm\sqrt{v(u^2-u_0^2)-\frac{u^3-u_0^3}{3}}\ . \qquad (11.8)$$

Находящийся под знаком корня многочлен третьего порядка удобно представить в виде

$$\sqrt{3\beta}\,\frac{du}{d\xi}=\sqrt{(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)}\ , \qquad (11.9)$$

где

$$u_{1,2}=\frac{1}{2}[3v-u_0\pm\sqrt{3(v+u_0)(3v-u_0)}]\,. \qquad (11.10)$$

Уравнение (11.9) определяет форму профиля стационарной бегущей волны. Как отмечалось выше, из фазового портрета системы следует, что эти волны могут быть двух качественно разных типов. Если фазовая траектория осциллятора (11.3) близка к дну потенциальной ямы, когда $E\approx-2v^3/3\beta$, $u_0\approx u_1$, то решение представляет собой гармоническую волну:

$$u\approx 2v+\frac{u_0-u_1}{2}\cos\sqrt{\frac{v}{4\beta}}(x-vt)\,. \qquad (11.11)$$

Если фазовая траектория близка к сепаратрисе, когда $E=0$, то $u_{1,2}=0$ и $u_0=3v$. В этом случае решение имеет вид уединенной волны в виде солитона

$$u=\frac{3v}{\operatorname{ch}^2\sqrt{\dfrac{v}{4\beta}}(x-vt)} \qquad (11.12)$$

с амплитудой $3v$ и характерной шириной $\approx 2\sqrt{\beta/v}$. Таким образом, чем выше солитон Кортевега–де Вриза, тем он уже и тем больше его скорость.

Такой гидродинамический солитон представляет собой результат конкуренций двух эффектов. С одной стороны, свойственная уравнениям гидродинамики нелинейность приводит к возрастанию крутизны фронта волны и ее опрокидыванию. С другой стороны, дисперсия является причиной того, что локализованные возмущения начинают расползаться. Конкуренция нелинейности и дисперсии приводит к равновесию, в результате которого и возникает солитон.

Будучи довольно сложными нелинейными образованиями, солитоны при взаимодействии друг с другом должны были бы вести себя сложно. Однако, судя по физическим и численным экспериментам, солитоны при взаимодействии ведут себя очень просто – отталкиваются, притягиваются или колеблются друг относительно друга как классические частицы. Солитоны сохраняют свою форму и скорость при взаимодействии с другими уединенными волнами, можно сказать, что они взаимодействуют упруго. Солитоны встречаются во многих областях физики, таких как гидродинамика, нелинейная оптика, физика плазмы, сверхпроводимость, магнетизм, теория поля и физика элементарных частиц, биофизика и т.д. Таким образом, солитон очень востребованный персонаж в современной физике.

4. Солитон синус-Гордона

Найдем теперь стационарные автомодельные решения уравнения синус-Гордона:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 \sin u = 0 . \tag{11.13}$$

Уравнение синус-Гордона имеет универсальный характер. Оно является типичным для сред с дисперсией в области низких частот. Уравнение (11.13) описывает распространение волн в цепочке связанных математических маятников, цепочке индуктивно связанных LC-контуров, при движении дислокаций в кристалле, движение доменных стенок в ферромагнетиках, волны в распределенных джозефсоновских контактах, распространение оптических импульсов в среде двухуровневых атомов и т.д. Автомодельная замена $\xi = x - vt$, $u(x,t) = u(\xi)$ приводит его к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u'' + \frac{\omega_0^2}{v^2 - c^2} \sin u = 0 , \tag{11.14}$$

где штрихи снова означают дифференцирование по ξ . Очевидно, что (11.14) является уравнением маятника. Рассмотрим случай $v^2 < c^2$. Тогда уравнение (11.14) описывает инвертированный маятник вблизи неустойчивого положения равновесия, потенциальную энергию которого примем за нуль. Потенциальная энергия данного маятника равна

$$U(u) = \frac{\omega_0^2 \gamma^2}{c^2} (\cos u - 1) , \tag{11.15}$$

где $\gamma = (1 - v^2 / c^2)^{-1/2}$ – множитель, возникающий из-за релятивистской инвариантности уравнения синус-Гордона (см. задачу 9). Инвариантность уравнения (11.13) относительно преобразования Лоренца приводит к тому, что солитонные решения (11.13) подобно релятивистским частицам испытывают лоренцевское сокращение. Их ширина сокращается с ростом скорости солитона v.

Фазовый портрет осциллятора (11.14), естественно, совпадает с фазовым портретом инвертированного математического маятника. Траектории внутри сепаратрисных петель соответствуют периодическим стационарным волнам, а движения по сепаратрисе, идущей из седла в седло, соответствуют солитонам. Точно так же, как это было сделано в предыдущем разделе для солитона Кортевега–де Вриза, запишем первый интеграл уравнения (11.14):

$$\frac{(u')^2}{2} = E - U(u), \qquad (11.16)$$

где E – полная энергия осциллятора.

Солитонному решению (11.14) соответствует полная энергия $E = 0$. Тогда из (11.16) получаем

$$u' = \pm \frac{\omega_0 \gamma}{c} \sqrt{2(1 - \cos u)}\,. \qquad (11.17)$$

Дифференциальное уравнение (11.17) интегрируется. Получается решение, соответствующее движению маятника по сепаратрисе (мы подробно рассмотрели его в лекции 2. Ч. 1. Колебания):

$$u = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\pm \frac{\omega_0 \gamma}{c} u\right)\right]. \qquad (11.18)$$

Такие солитоны называются *кинками* (англ. kink – перегиб). Здесь знак плюс соответствует солитону (кинку), для которого u возрастает от нуля до 2π, знак минус – антисолитону (антикинку), для которого u, наоборот, убывает от 2π до нуля. Внешний вид солитонов и антисолитонов напоминает ударную волну, но они являются именно солитонами. В частности, они упруго взаимодействуют друг с другом. При этом производная от (11.18) имеет колоколообразный профиль, как и солитон Кортевега–де Вриза.

При столкновении кинка и антикинка происходит их аннигиляция. При этом величина суммарного перепада решений $u(+\infty, t) - u(-\infty, t)$ (топологический заряд) остается постоянной. Это и означает упругое столкновение солитоноподобных решений в виде производных от (11.18). Когда кинк аннигилирует с антикинком, происходит высвобождение энергии в виде излучения волн, описываемых линеаризованным уравнением (11.13), представляющим собой уравнение Клейн–Гордона (1.11). Этот процесс аналогичен аннигиляции частиц и античастиц.

Существуют решения уравнения (11.14) в виде кинков и при $v^2 > c^2$. Однако они оказываются неустойчивыми. Такие решения соответствуют своим электромагнитным аналогам в виде тахионов, гипотетических частиц, скорость движения которых больше скорости света.

5. Устойчивость солитонов

Помимо получения солитонных решений (11.12), (11.18), важно также исследовать их устойчивость по отношению к малым возмущениям. Неустойчивые решения не реализуются в природе. Устойчивость солитонов доказывается множеством численных и натурных экспериментов. Аналитическая теория устойчивости солитонов, процедура линейного анализа их устойчивости, к сожалению, довольно сложна. Поэтому ее нельзя изложить на качественном простом языке, принятом в этих лекциях. Аналогичное исследование устойчивости автоволн, напротив, допускает простое и прозрачное изложение. Оно приведено в следующей лекции.

6. Контрольные вопросы к лекции 11

1. Что такое стационарная распространяющаяся волна?
2. Что такое солитон?
3. Как взаимодействуют солитоны между собой?
4. Чем солитоны отличаются от нерасплывающихся волновых пакетов в линейных средах без дисперсии?
5. Запишите уравнение Кортевега–де Вриза.
6. Запишите уравнение синус-Гордона.
7. Чему равна ширина и высота солитона Кортевега–де Вриза, движущегося со скоростью v?
8. Чему равна ширина и высота солитона синус-Гордона, движущегося со скоростью v?
9. Какие значения может принимать скорость солитона v?
10. Устойчивы ли солитоны Кортевега–де Вриза и синус-Гордона по отношению к малым возмущениям?

7. Задачи к лекции 11

1. **Солитон в кристалле.** Одномерный кристалл представляет собой цепочку шариков массой m, расположенных на расстоянии a друг от друга и соединенных одинаковыми нелинейными пружинками. Благодаря пружинкам каждый шарик взаимодействует только с двумя ближайшими соседями с силой $f(x) = \kappa x - \mu x^3$, где x – растяжение пружинки, $\mu > 0$. В континуальном пределе $ka \ll 1$ получите уравнение Буссинеска, описывающее смещение $u(x, \mathrm{t})$ цепочки. Найдите его решение типа доменной стенки (кинка) при $u_x(-\infty, t) = u_x(+\infty, t) = 0$. Покажите, что распределение деформации в кристалле $u_x(x, t)$ представляет собой солитон, движущийся со скоростью v. Как его амплитуда и ширина зависят от скорости v?

2. **Солитон Кортевега–де Вриза.** Уравнение Кортевега–де Вриза $u_t +$ $+ uu_x + \beta u_{xxx} = 0$ описывает гравитационные волны на мелкой воде, ионно-звуковые волны в плазме, волны Россби во вращающейся жидкости. Найдите его решение в виде солитона $u(\pm\infty, t) = 0,$ движущегося со скоростью $v.$ Определите амплитуду и ширину солитона.

3. **Солитон синус-Гордона.** Уравнение синус-Гордона $u_{tt} - c^2 u_{xx} +$ $+ \omega_0^2 \sin u = 0$ описывает волны в джозефсоновской среде, динамику дислокаций в кристалле, ультракороткие лазерные импульсы в двухуровневой среде. Найдите его решение в виде кинка $u_x(\pm\infty, t) = 0,$ движущегося со скоростью v. Определите амплитуду и ширину кинка. Покажите, что деформация $u_x(x, t)$ имеет вид солитона.

4. **Солитон Буссинеска.** Уравнение Буссинеска $u_{tt} - u_{xx} + (uu_x)_x +$ $+ u_{xxxx} = 0$ описывает волны в нелинейном кристалле и на мелкой воде. Найдите его решение в виде кинка $u_x(\pm\infty, t) = 0,$ движущегося со скоростью v. Определите амплитуду и ширину кинка. Покажите, что деформация $u_x(x, t)$ имеет вид солитона.

5. **Устойчивость солитонов.** Исследуйте устойчивость солитонов Кортевега–де Вриза, синус-Гордона и Буссинеска. Получите критерии стабильности.

6. **Инвариантность уравнения синус-Гордона.** Покажите, что уравнение синус-Гордона $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 \sin u = 0$ инвариантно относительно преобразований Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \qquad t' = \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

7. **Гамильтоновость уравнения Кортевега–де Вриза.** Покажите, что уравнение Кортевега–де Вриза описывает распределенную гамильтонову систему. Укажите ее гамильтониан и скобки Пуассона.

Лекция 12. Автоволны

Спасибо тебе, Господи, за то, что Ты создал все
нужное нетрудным, а все трудное – ненужным.
Г. С. Сковорода, 1772

1. Что такое синергетика? 2. Чем автоволны отличаются от солитонов? 3. Движущаяся автоволна – кинк. 4. Механическая аналогия. 5. Точно решаемые модели. 6. Медленные кинки. 7. Быстрые кинки. 8. Критический зародыш стабильной фазы (домен). 9. Устойчивость автоволн. 10. Вариационный принцип. Градиентная форма уравнения «реакция–диффузия». 11. Эволюция начальных распределений. 12. Единое математическое описание автоволн.

1. Что такое синергетика?

Физика автоволновых процессов – важный раздел синергетики. Основой описания автоволн является уравнение «реакция−диффузия». Можно без преувеличения сказать, что это уравнение играет для синергетики ту же всеобъемлющую роль, что и уравнения Максвелла для электродинамики или уравнение Фоккера−Планка для физической кинетики. Столь важная роль приводит к тому, что такие уравнения приобретают имена собственные, обозначающие определенные области теоретической физики. Именно с этим обстоятельством связано то, что все свойства автоволн можно вывести из этого уравнения.

Исследования кооперативного поведения различных по своей природе физических, химических, биологических и других неравновесных систем выявили черты большого сходства между ними. Главная черта этого сходства – эффекты самоорганизации и образования диссипативных структур в открытых системах вдали от равновесия. Это обстоятельство позволило выделить круг таких явлений в самостоятельную дисциплину – синергетику (гр. synergia – совместное действие). Возможны различные типы упорядоченного поведения сильно неравновесных открытых систем (активных сред). Прежде всего в таких средах могут возникать стационарные структуры, которые принято называть *диссипативными*. В отличие от равновесных структур (например, кристаллов), диссипативные структуры образуются и сохраняются благодаря обмену энергией и веществом с внешней средой в неравновесных условиях. Иным типом регулярного поведения активных сред являются периодические автоколебания (реакция Белоусова, брюсселятор) или их распределенные аналоги – автоволновые процессы, распространение волн переключения (кинков) и доменов (автосолитонов).

Базовой математической моделью среды, где возможны процессы пространственно-временной самоорганизации, является нелинейное уравнение «реакция–диффузия» вида

$$u_t = u_{xx} + f(u), \qquad (12.1)$$

в которое входит всего одна переменная среды $u(x,t)$, изменяющаяся в одном измерении, а x и t – безразмерные координата и время. Возможные однородные состояния такой среды определяются корнями уравнения

$$f(u) = 0. \qquad (12.2)$$

Основной интерес представляют системы, в которых имеется несколько устойчивых стационарных состояний. Ниже будут рассмотрены бистабильные среды, для которых существуют два устойчивых u_1 и u_3 и одно неустойчивое u_2 состояния среды, так что нелинейная функция (12.2) имеет вид кубической параболы.

В уравнении (12.1) u может иметь смысл температуры, концентрации реагента, плотности популяции и т.д. Уравнением бистабильной среды (12.1) описываются волны горения, кинетика ферментативных реакций, распространение волн популяций, автоволны в среде с реакцией Белоусова, распространение возбуждения по нейрону, волны в сообществах одноклеточных организмов, волны гетерогенного катализа, волны кипения на тепловыделяющих элементах, волны переключения сверхпроводников в нормальное состояние, распространение температурных доменов в нормальных металлах, локализация автоволн различной природы и т.д.

Несмотря на различную природу равновесных и неравновесных явлений, существует глубокая аналогия в описании равновесных фазовых переходов и эффектов самоорганизации в открытых системах. Из-за этого последние часто называют *неравновесными фазовыми переходами*. С формальной точки зрения, если отвлечься от причин, обуславливающих природу этих явлений, мы имеем дело в обоих случаях с процессами перестройки и возникновения порядка. Если уточнить интуитивное понимание, то можно сказать, что порядок есть нарушение симметрии. Например, возникновение любой пространственной или временной структуры нарушает однородность среды, то есть её трансляционную инвариантность.

Автоволна – один из самых красивых и универсальных объектов современной теоретической физики. Нелинейная автоволна, способная распространяться с постоянной скоростью без изменения формы, открытая первоначально для далеких друг от друга биологических и химических систем, обрела новую жизнь в последние десятилетия, когда выяснилось, что такие автоволны возникают в большинстве нелинейных неравновесных систем.

2. Чем автоволны отличаются от солитонов?

Omnia disce, videbis postea nihil esse superfluum.
Все штудируйте, после увидите – нет ничего лишнего.
Каноник Хью, аббатство Сен-Виктор, XII в.

Волны в возбудимых (активных) средах отличаются как от линейных волн, так и от солитонов и солитоноподобных решений. Если среда описывается линейными уравнениями, то для распространяющихся в ней волн выполняется принцип суперпозиции: при встрече двух волн наблюдается простое наложение их амплитуд и связанные с этим явления интерференции. Для нелинейных сред принцип суперпозиции всегда нарушен – волны сильно взаимодействуют между собой. Характер такого взаимодействия, однако, существенно отличается для солитонов и автоволн (автосолитонов). Солитоны (англ. solitary wave – уединенная волна) возникают в консервативных нелинейных средах без затухания и подвода энергии от внешних источников. Солитон – это нелинейная уединенная волна в виде импульса, способного распространяться без изменения формы и без потерь энергии. При столкновении двух солитонов принцип суперпозиции не выполняется. Однако после столкновения волны восстанавливают свою форму и продолжают двигаться с теми же скоростями и в тех же направлениях. Способность сохранять свою структуру после нелинейного взаимодействия с себе подобными означает, что солитоны в определённом смысле ведут себя как частицы. В отличие от этого при столкновении двух плоских автоволн в возбужденной неравновесной среде происходит их полное взаимное погашение (аннигиляция). Аннигиляцией при столкновениях автоволн объясняются также разнообразные эффекты синхронизации в возбудимых средах: быстрые периодические источники автоволн подавляют низкочастотные источники. Например, ревербераторы могут уничтожать соседний с ними ведущий центр.

В солитоне эффекты дисперсии сбалансированы нелинейным эффектом на непрерывном промежутке значений скоростей: дисперсия $\rightleftarrows$ нелинейность. Эффекты дисперсии заключаются в распределении энергии солитона, а нелинейные эффекты – в связывании этих двух эффектов в единый процесс: дисперсия растаскивает, а нелинейность укручает фронт. Таким образом, уединённая волна (солитон) проявляется как независимая (консервативная) сущность, в которой поддерживается баланс между «Инь» дисперсии и «Янь» нелинейности. Этот баланс представляет собой замкнутую причинно-следственную связь и подобен древней мифологической змее Уроборос, кусающей свой хвост.

На языке этой аналогии для уравнения «реакция–диффузия» «Инь» термальной диффузии находится в состоянии баланса с «Янь» нелинейного высвобождения энергии: диффузия $\rightleftarrows$ нелинейность. Это представляет собой другую замкнутую причинно-следственную связь, которая приводит к возникновению новой сущности – автоволны переключения. Состояние баланса эффектов диффузии и нелинейности позволяет автоволне переключения распространяться с постоянной скоростью без изменения формы.

3. Движущаяся автоволна – кинк

В каждый данный момент существует лишь
тонкий слой между тривиальным и недостижимым. В этом-то слое и делаются открытия.
А. Н. Колмогоров

Автоволновые режимы являются аналогом автоколебаний для распределенных сред, описывающихся уравнением «реакция–диффузия» (12.1). Основными типами автоволновых режимов является распространение одиночных волн переключения (кинков) и одиночных бегущих импульсов (автосолитонов). Распространение с постоянной скоростью волны стационарного профиля с не изменяющейся формой фронта в нелинейном уравнении – довольно неожиданный результат, впервые установленный независимо для волн популяций и генов (Колмогоров–Петровский–Пискунов, 1937; Фишер, 1938) и для волн горения (Зельдович, Франк–Каменецкий, 1938).

Основным типом структуры, возникающей в бистабильных средах, является автоволна переключения (кинк). При её распространении среда из состояния $u = u_1$ переходит в состояние $u = u_3$. Кинк (англ. kink – изгиб, перегиб), движущийся со скоростью v, представляет собой автомодельное решение уравнения (12.1) вида $u(x,t) = u(\xi)$, где $\xi = x - vt$ – автомодельная переменная. Величина ξ представляет собой координату в сопутствующей системе, двигающейся вместе с фронтом кинка. Граничными условиями для решения типа кинка являются $u(-\infty) = u_3$, $u(+\infty) = u_1$.

Для $u(\xi)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$u_{\xi\xi} + vu_{\xi} + f(u) = 0. \qquad (12.3)$$

Фактически (12.3) представляет собой нелинейную краевую задачу на собственное значение v. Несмотря на нелинейность уравнения (12.3) эта задача имеет единственное решение.

4. Механическая аналогия

Механиком является не тот, кто пишет уравнения,
а тот, кто пишет их так, что они интегрируются.
Н. Е. Жуковский

Для качественного анализа уравнения (12.3) удобно воспользоваться следующей «механической» аналогией. Если ввести функцию потенциальной энергии

$$V(u) = \int_0^u f(u')du', \qquad (12.4)$$

то уравнение (12.3) приобретает вид уравнения Ньютона для *частицы* единичной массы с *координатой* u, зависящей от *времени* ξ. Частица движется в потенциале $V(u)$ при наличии вязкого трения:

$$u_{\xi\xi} = -\frac{\partial V}{\partial u} - vu_{\xi}. \qquad (12.5)$$

Для бистабильной среды в точках $u = u_1$ и $u = u_3$ функция $V(u)$ имеет максимумы, а в промежуточной точке $u = u_2$ она имеет локальный минимум. Предположим, что $V(u_3) > V(u_1)$, то есть согласно (12.4) алгебраическая площадь под кривой $f(u)$ положительна: $\int_{u_1}^{u_3} f(u)du$.

Решение типа кинка с его граничными условиями тогда приобретает наглядный физический смысл. Оно соответствует ситуации, когда *частица* скатывается с горки *высотой* $V(u_3)$ из положения $u = u_3$ с нулевой начальной скоростью при $-\infty$ начальном *времени* и забирается на горку высотой $V(u_1)$. При этом существует единственное значение коэффициента трения v, при котором потеря энергии *частицы* на трение в точности компенсируется разницей потенциалов $V(u_3) - V(u_1)$. Тогда *частица* попадает в положение $u = u_1$ так же с нулевой скоростью при $+\infty$ конечном времени. Это условие однозначно определяет как скорость распространения v, так и форму фронта $u(\xi)$ кинка. Скорость v положительна при $V(u_3) > V(u_1)$ и отрицательна при $V(u_3) < V(u_1)$ (фаза $u = u_1$ среды вытесняет фазу $u = u_3$). Скорость кинка обращается в ноль (волна переключения покоится, имеет место фазовое равновесие) при выполнении условия $V(u_3) = V(u_1)$, аналогичного *теореме равных площадей* Максвелла:

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u')du' = 0. \qquad (12.6)$$

Если нелинейность $f(u, \beta)$ среды зависит от какого-либо управляющего параметра β (тока, температуры охладителя, скорости реакции и т.д.), то условие (12.6) определяет значение параметра распространения β_p, при котором кинк покоится:

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u', \beta_p)du' = 0. \qquad (12.7)$$

5. Точно решаемые модели

> Основное оружие нелинейно мыслящего физика – математические модели, описываемые нелинейными уравнениями. Найти их аналитические решения удается лишь в исключительных случаях. Поэтому точно решаемые модели заботливо коллекционируют, чтобы отработать на них стратегию и тактику штурма нерешаемых точно задач.
>
> *Ю. А. Данилов. Нелинейность*

Точных аналитических методов, позволяющих решить нелинейную краевую задачу (12.3) и рассчитать скорость кинка при произвольной $f(u)$, не существует. Поэтому представляют большой интерес частные случаи, которые допускают точное решение. Они приведены в качестве задач в конце пособия. Здесь укажем только случай, когда $f(u)$ представляет собой кубический полином:

$$f(u) = -\alpha(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3). \qquad (12.8)$$

Нетрудно показать, что в этом случае сепаратриса представляет собой параболу:

$$u_\xi = \text{const}(u - u_1)(u - u_3). \qquad (12.9)$$

В этом легко убедиться прямой подстановкой (12.9) в (12.3), которая позволяет найти константу (12.9). Профиль фронта при этом имеет вид гиперболического тангенса, а скорость кинка равна

$$v = \sqrt{\alpha/2}\left(u_1 + u_3 - 2u_2\right). \qquad (12.10)$$

Несколько других примеров, допускающих точное решение, приведены в конце лекции в качестве задач.

6. Медленные кинки

Поскольку задача (12.3) определения собственного значения v нелинейна, обычно при расчете скорости волн переключения приходится использовать приближенные и асимптотические методы. Рассмотрим сначала приближение медленных волн, когда параметр β близок к параметру распространения β_p. Вблизи параметра распространения $v(\beta) \sim (\beta - \beta_p)$, а профиль фронта кинка близок к покоящемуся $u(\xi) = u_0(\xi) + \delta u(\xi)$, $|\delta u| \ll u_0$. Задача на собственное значение может быть решена по теории возмущений методом итераций. Нулевое приближение: $v = 0$, $u = u_0(\xi)$, удовлетворяющее уравнению

$$u_{0\xi\xi} + f(u_0, \beta) = 0, \tag{12.11}$$

может быть решено в квадратурах:

$$\xi = \int_{u_1}^{u(\xi)} \frac{du}{\sqrt{2\left[V(u_1) - V(u)\right]}}. \tag{12.12}$$

Домножая (12.3) на u_ξ и интегрируя по координате ξ от $-\infty$ до $+\infty$ для скорости, получаем

$$v = \frac{V(u_3, \beta) - V(u_1, \beta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_\xi^{\,2} d\xi}. \tag{12.13}$$

Варьируя (12.13) по β, имеем

$$v = \frac{\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\int_{u_1}^{u_3} f(u, \beta) du\right)\Big|_{\beta_p}}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_\xi^{\,2} d\xi}(\beta - \beta_p). \tag{12.14}$$

Таким образом, вблизи параметра распространения $\beta \approx \beta_p$ скорость кинка меняется линейно $v(\beta) \sim (\beta - \beta_p)$.

7. Быстрые кинки

При стремлении управляющего параметра к границам интервала бистабильности $\left[\beta_-, \beta_+\right]$ скорость кинка достигает своих максимальных положительного $v(\beta_+)$ и отрицательного $v(\beta_-)$ значений. Их величина будет оценена ниже при исследовании устойчивости кинка. Кроме того, приближенный способ её расчета может быть дан в важном частном случае (Зельдович, Франк–Каменецкий, 1938), когда функция $f(u)$ достигает больших положительных значений в узком интервале $u_2 < u < u_3$, $|u_3 - u_2| < u$ и является отрицательной, малой по модулю в интервале $u_1 < u < u_2$. Такая ситуация характерна для волн горения. Обратимся к механической аналогии. На участке $u_2 < u < u_3$ происходит быстрый разгон *частицы*; потенциальная сила $f(u)$ велика по сравнению с силой вязкого трения $-\nu u_\xi$, которой можно пренебречь:

$$u_{\xi\xi} + \frac{\partial V}{\partial u} \approx 0. \tag{12.15}$$

Тогда, интегрируя (12.15), понимаем, что при u_2 скорость частицы достигает значения

$$u_\xi\Big|_{u_2} \approx -\sqrt{2\left[V(u_3) - V(u_2)\right]}. \tag{12.16}$$

На участке же $u_1 < u < u_2$, наоборот, основное влияние на движение *частицы* оказывает сила вязкого трения, тогда как потенциальной силой можно пренебречь:

$$u_{\xi\xi} + \nu u_\xi \approx 0. \tag{12.17}$$

Уравнение (12.17) описывает торможение *частицы*, имеющей в точке u_2 начальную скорость (12.16). Собственное значение определяется из условия, что в конце длины торможения $u_2 - u_1$ *частица* остановится с нулевой скоростью через *время* $\xi \to \infty$, $u(+\infty) = u_1$, $u_\xi(+\infty) = 0$. Интегрируя (12.17) по ξ, получаем

$$u_2 - u_1 = \nu^{-1} u_\xi\Big|_{u_2}. \tag{12.18}$$

Приравнивая (12.18) и (12.16), находим скорость быстрых кинков в приближении Зельдовича:

$$\nu \approx (u_2 - u_1)^{-1}\sqrt{2\left[V(u_3) - V(u_2)\right]}. \tag{12.19}$$

Вспоминая теперь, что согласно сделанным выше предположениям о свойствах функции $f(u)$ величина $\nu(u_2)$ близка к $\nu(u_1)$, а значение u_2 мало отличается от u_3, для скорости кинка получаем

$$v \approx (u_3 - u_1)^{-1} \sqrt{2\int_{u_1}^{u_3} f(u')du'}. \qquad (12.20)$$

То же рассуждение можно провести и на фазовой плоскости. Ниже мы увидим, что (12.20) является хорошей оценкой максимальной скорости кинка по порядку величины и в случае произвольного вида нелинейной функции $f(u)$.

8. Критический зародыш стабильной фазы (домен)

Всё стоящее уже давно придумано, надо только
не бояться попробовать придумать это ещё раз.
Иоганн Вольфганг Гёте

Проведенное выше рассмотрение показывает, что из двух устойчивых фаз бистабильной среды u_1 и u_3 одна является метастабильной, а другая – абсолютно стабильной. Критерием метастабильности является знак скорости v (направление движения кинка), т.е. метастабильна та фаза, у которой ниже *горка* потенциала $V(u)$. Абсолютно стабильной является та фаза среды, которая при данных параметрах вытесняет метастабильную.

Поскольку метастабильная фаза, тем не менее, устойчива по отношению к малым возмущениям, возникает проблема расчета критического зародыша, которого достаточно, чтобы инициировать переход всей распределенной системы из метастабильного в абсолютно устойчивое однородное состояние. Форме критического зародыша (домена, лат. domen – область) ставится в соответствие стационарное решение (12.2), то есть решение уравнения (12.1) с граничными условиями $u(\pm\infty) = u_1$ при $v = 0$. На языке механической аналогии это означает, что *частица* спускается без трения с горки $V(u_1)$, достигает точки поворота u_m при $\xi = 0$ и возвращается обратно.

Для нахождения формы критического зародыша с центром в точке $\xi = 0$ можно воспользоваться решением в квадратурах (12.12), причем величина $u(0) = u_m$ в центре зародыша определяется равенством

$$\int_{u_1}^{u_m} f(u,\beta)du = 0. \qquad (12.21)$$

Это соотношение также представляет собой *правило площадей*, модифицированное на случай критического зародыша. В случае $\beta < \beta_p$, когда метастабильной является горячая фаза $u = u_3$, форма критического зародыша находится аналогично. Ниже мы увидим, что критический зародыш представляет собой стационарное, но абсолютно неустойчивое решение уравнения «реакция–диффузия». Это значит, что энергия его образования может служить оценкой величины критического возмущения, достаточного для инициации нелинейной стадии развития неустойчивости и разрушения метастабильного состояния.

9. Устойчивость автоволн

Усложнять – просто, упрощать – сложно.
Законы Мёрфи

Рассмотрим теперь важный вопрос об устойчивости автомодельных решений уравнения «реакция–диффузия». Начнем с однородных стационарных состояний. Линейный анализ устойчивости производится следующим образом. Исходное состояние $u_i (i = 1, 2, 3)$ слабо возмущается $u(x,t) = u^i + \delta u(x,t)$. Если любое малое возмущение затухает, то состояние устойчиво. Подставляя возмущенное решение в (12.1) и учитывая $u_t^i = \; = u_{xx}^i + f(u^i) = 0$, получаем *уравнение в вариациях*:

$$\delta u_t = \delta u_{xx} + \frac{\partial f}{\partial u}(u_i)\delta u. \tag{12.22}$$

Решение (12.22) пишется в стандартном виде: $\delta u(x,t) = e^{\lambda t}\psi(x)$ где, λ – инкремент. Однако, учитывая, что (12.1) – уравнение с постоянными коэффициентами, $\psi(x)$ можно разложить в интеграл Фурье и сразу исследовать устойчивость фурье-гармоники $\sim e^{\lambda(k)t}e^{ikx}$. Подставляя разложение $\delta u(x,t)$ в (12.22), получаем дисперсионное соотношение:

$$\lambda(k) = -k^2 + \frac{\partial f}{\partial u}(u_i), \tag{12.23}$$

из которого видно, что наиболее «опасными» в этом случае являются однородные возмущения с $k = 0$. При этом состояния $u = u_1$ и $u = u_3$ ($\partial f / \partial u(u_i) < 0$) устойчивы, а состояние $u = u_2$ ($\partial f / \partial u(u_i) > 0$) – нет. Этот вывод совпадает с качественным рассмотрением, данным выше.

Теперь рассмотрим устойчивость движущегося кинка $u(x,t) = u_k(x - vt)$. Перейдем в систему отсчёта, движущуюся вместе с кинком $t \to t,\; x \to \xi + vt$. Тогда уравнение (12.1) приобретает вид

$$u_t = u_{\xi\xi} + v u_\xi + f(u), \tag{12.24}$$

а *уравнение в вариациях* для малого возмущения $\delta u(\xi, t)$:

$$\delta u_t = \delta u_{\xi\xi} + v\delta u_\xi + \frac{\partial f\left[u_k(\xi)\right]}{\partial u}\delta u. \tag{12.25}$$

Так же, как и для (12.22), решение (12.25) ищется в виде $\sim e^{\lambda(k)t}e^{ikx}$, однако теперь (12.25) представляет собой уравнение с переменными коэффициентами. Это значит, что (12.25) представляет собой задачу Штурма–Лиувилля с граничными условиями $\delta u(\pm\infty, t) = 0$ и оператором $L = \partial^2 / \partial\xi^2 + vW(\xi)\partial / \partial\xi$, где $W(\xi) = -\partial f\left[u_k(\xi)\right] / \partial u$. Сразу отметим, что оператор L не является самосопряженным. Поэтому сначала для того, чтобы качественно разобраться в вопросе об устойчивости, рассмотрим простейший случай покоящегося кинка: $v = 0$.

В этом случае оператор L – самосопряженный, а уравнение (12.25) полностью аналогично уравнению Шредингера. При этом $-\lambda$ играет роль энергии, а $W(\xi)$ – потенциальной энергии частицы. Легко видеть, что в случае кинка потенциал $W(\xi)$ представляет собой несимметричную яму с $W(-\infty) = -\partial f(u_3) / \partial u$ и $W(+\infty) = -\partial f(u_1) / \partial u$. Глубина ямы равна $\max\left|\partial f / \partial u\right|$, найденному на участке $\partial f / \partial u < 0$. Дискретный набор уровней этой ямы и будет определять устойчивость кинка. Сразу отметим, что в яме всегда есть уровень $\lambda = 0$. Действительно, (12.25) удовлетворяется тождественно, если в качестве волновой функции взять $\psi = \partial u_k / \partial\xi$. Этот факт не чувствителен к небольшим «шевелениям» функции $f(u)$ при сохранении её качественного вида. Наличие собственного значения $\lambda = 0$ имеет ясный физический смысл и связано с трансляционной инвариантностью уравнения (12.25), т.е. отсутствием явной зависимости от x. Действительно, решение уравнения «реакция–диффузия» можно сместить на любое расстояние a, так что $u_k(\xi + a)$ также будет решением (12.25). Если a мало, то

$$u_k(\xi + a) = u_k(\xi) + a\frac{\partial u_k}{\partial\xi}. \tag{12.26}$$

Таким образом, $\partial u_k / \partial\xi$ является решением *уравнения в вариациях* при $\lambda = 0$. Это позволяет вынести суждение о знаке остальных собственных значений λ_k в полном решении уравнения (12.25):

$$\delta\psi(\xi) = \sum_k \psi_k(\xi)e^{\lambda_k t}. \tag{12.27}$$

Действительно, при $v=0$ оператор L эрмитов, и к задаче может быть применена осцилляционная теорема. Наименьшему собственному значению (основному состоянию) соответствует собственная функция без узлов. Поскольку $u_k(\xi)$ имеет вид *доменной стенки*, то $\partial u_k/\partial\xi$ имеет вид *гауссова колпачка*! Это означает, что все остальные значения λ_k отрицательны и кинк устойчив.

Особо следует рассмотреть случай движущегося кинка $v\neq 0$. Оператор L можно привести к самосопряженному виду при помощи замены:

$$\psi(\xi)=e^{-v\xi/2}\varphi(\xi). \qquad (12.28)$$

Тогда для новой собственной функции $\varphi(\xi)$ мы получаем ту же задачу Штурма–Лиувилля, но с потенциалом $W(\xi)\to W(\xi)+v^2/4$. Эффективно это сводится к тому, что с ростом скорости кинка v потенциальная яма сдвигается вверх на величину $v^2/4$. Это обстоятельство позволяет дать качественную оценку максимально возможной скорости кинка. Действительно, поскольку из-за наличия уровня $\lambda_0=0$ дно ямы не может подняться выше нуля, максимальная скорость кинка приблизительно равна

$$\frac{v^2}{4}\approx\max\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|, \qquad (12.29)$$

где производная берется на участке положительного наклона функции $f(u)$. Легко убедиться, что эта оценка совпадает с приближенным выражением для скорости кинка (12.20) в пределе больших скоростей (приближение Зельдовича).

В заключение этого раздела рассмотрим устойчивость критического зародыша стабильной фазы (домена) $u_d(\xi)$. Действуем совершенно аналогично. Форма домена $u_d(\xi)$ имеет вид колпачка, то есть $\partial u_d(\xi)/\partial\xi$ имеет один узел. В соответствии с осцилляционной теоремой это означает, что выше уровня $\lambda_1=0$ существует еще один положительный уровень $\lambda_0>0$. Таким образом, критический зародыш абсолютно неустойчив: он либо «рассасывается», либо эволюционирует в участок новой фазы, распространяющейся затем на весь образец. Время разрушения домена $\approx\lambda_0^{-1}$ можно оценить в пределе домена большой длины $\beta\to\beta_p$. В этом случае потенциал $W(\xi)$ можно представить себе как совокупность двух ям, разделенных большим расстоянием $R\gg 1$. Каждая яма локализована возле одной из двух стенок домена, где $\partial u_d(\xi)/\partial\xi$ велико. Тогда уровни представляют собой расщепленную пару близких уровней λ_1 и λ_0, где по-прежнему $\lambda_1 = 0$:

$$\lambda_0 \sim e^{-R}. \qquad (12.30)$$

Это означает, что при $\beta \to \beta_p$ домен эквивалентен двум удаленным $R \gg 1$ и покоящимся доменным стенкам (кинку и антикинку) и практически стабилен. Такую ситуацию на языке температурных доменов в металлах принято называть стабильностью в «режиме постоянного тока». Следует отметить, что в «режиме постоянного напряжения» температурный домен практически всегда стабилен.

10. Вариационный принцип. Градиентная форма уравнения «реакция–диффузия»

Важно не то, что строго,
а то, что верно.
А. Н. Колмогоров

Проведенный в предыдущем параграфе анализ устойчивости однородных и неоднородных решений уравнения «реакция–диффузия» по отношению к малым возмущениям оставляет открытыми ряд важных вопросов. Являются ли волны переключения единственным возможным типом установившегося волнового режима в бистабильной среде? Что происходит при столкновении двух таких волн? Какова последующая эволюция произвольного начального распределения $u(x,0)$? Ответы на эти вопросы помогает получить подходящим образом сформулированный для уравнения «реакция–диффузия» вариационный принцип. Это можно сделать, придав уравнению «реакция–диффузия» (12.1) градиентную форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta u}, \qquad (12.31)$$

подобрав соответствующий функционал Ляпунова $F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, u_x)dx$ (см. задачу 1). Здесь вариационная производная определяется обычным образом: $\delta F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta F}{\delta u}\right) \delta u dx$ или, что то же самое,

$$\frac{\delta F[u]}{\delta u(x)} = \lim_{\int \delta u dx' \to 0} \frac{F[u + \delta u] - F[u]}{\int \delta u(x')dx'}, \qquad (12.32)$$

где вариация $\delta u(x')$ локализована вблизи точки $x' = x$. Нетрудно показать, что для уравнения «реакция–диффузия» следует выбрать

$$F[u]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}(u_x)^2-V(u)\right]dx, \qquad (12.33)$$

где потенциал $V(u)$ определяется выражением $V(u)=\int_0^u f(u')du'$.

Из (12.31) следует, что величина F не возрастает с течением времени независимо от выбора исходного состояния среды – начального распределения $u(x,0)$. Действительно, полная производная функционала Ляпунова по времени равна

$$\frac{dF}{dt}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta F[u]}{\delta u(x,t)}\frac{\partial u}{\partial t}dx \qquad (12.34)$$

или, с учетом (12.31):

$$\frac{dF}{dt}=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\delta F}{\delta u}\right)^2 dx\,. \qquad (12.35)$$

Видно, что в любой момент времени (12.35) является неположительной величиной. Это означает, что выбранная в форме (50) величина F действительно является функционалом Ляпунова. Или, в терминах теории фазовых переходов, F представляет собой термодинамический потенциал для параметра порядка $u(x,t)$. В соответствии с этим стационарным состоянием среды соответствуют минимумы функционала F, а эволюция системы с течением времени заключается в приближении к одному из таких стационарных состояний. Этот вариационный принцип позволяет ответить на вопросы, сформулированные в начале этого параграфа.

11. Эволюция начальных распределений

Работая над решением задачи,
всегда полезно знать ответ.
Законы Мёрфи

Стационарные однородные состояния среды. Отметим прежде всего, что состояния $u=u_1$ и $u=u_3$ всегда устойчивы по отношению к малым возмущениям. В самом деле, слабое возмущение одного из этих состояний $\delta u(x)$ приводит к изменению функционала δF, складывающегося из двух частей. Во-первых, из-за изменения *u* становится отличным от нуля первое слагаемое в (12.33), пропорциональное $(u_x)^2$, и поэтому положительное. Во-вторых, из-за изменения $u(x)$ возрастает и второе слагаемое в (12.33), поскольку выбранные нами однородные решения u_1 и u_3 отвечают максимумам $V(u)$. Видно, что обе возникающие добавки к

F положительны, и, следовательно, любое малое неоднородное возмущение $\delta u(x)$ может приводить лишь к возрастанию функционала Ляпунова. Это и означает устойчивость однородных состояний $u = u_1$ и $u = u_3$ по отношению к малым возмущениям.

Начальное распределение в форме кинка. Пусть начальное распределение имеет форму волны переключения из метастабильной $u = u_1$ в стабильную $u = u_3$ фазу среды. Распределение такого типа «глобально» неустойчиво, поскольку всегда можно понизить значение функционала F, сдвигая границу между областями в сторону метастабильной фазы. Действительно, если сдвинуть фронт волны на величину a, не изменяя его формы, то вклад первого слагаемого в (12.33), очевидно, не из-за второго слагаемого будет отрицательным: $-aV(u_3)$. В результате последовательности таких сдвигов (распространение кинка), в конце концов, установится стационарное однородное распределение $u = u_3$.

Особой является ситуация, когда оба минимума F при $u = u_1$ и $u = u_3$ имеют одинаковую глубину: $V(u_1) = V(u_3)$, то есть выполняется условие неподвижности кинка: $\beta = \beta_p$. В этом случае в среде возможно стационарное сосуществование двух фаз, разделенных плоским переходным слоем. Такое фазовое равновесие не отвечает абсолютному минимуму функционала F из-за наличия неоднородности переходного слоя между фазами. Тем не менее мы не можем понизить значение F, сдвигая границу. Это означает, что фазовое равновесие является «безразличным», т.е. обладает нейтральной устойчивостью.

Начальное распределение в форме кинка и антикинка. Аннигиляция кинков. Пусть в тех же условиях, $V(u_3) > 0$, начальное распределение представляет собой участок фазы $u = u_3$ на фоне фазы $u = u_1$ или наоборот. С точки зрения примера, рассмотренного в предыдущем пункте, такое распределение соответствует паре кинк–антикинк. Проведя аналогичные рассуждения, можно убедиться, что оно релаксирует к однородному распределению $u = u_3$. Это, в частности, означает, что две столкнувшиеся автоволны переключения всегда полностью гасят друг друга.

Начальное распределение в форме критического зародыша. Выше мы отмечали, что оба однородных состояния $u = u_1$ и $u = u_3$ устойчивы относительно малых возмущений. Абсолютному же минимуму функционала F соответствует, однако, лишь одно из них, с наибольшим значением $V(u_i)$. Другое состояние при этом будет метастабильным. Если система первоначально находилась в метастабильном состоянии, то, создав достаточно большое возмущение, её можно перевести в наиболее устойчивое состояние, отвечающее более глубокому (абсолютному) минимуму функционала F. Одной из возможных форм таких критических возмущений и является критический зародыш.

Действительно, существует значительная аналогия между рассматриваемыми явлениями и фазовыми переходами I рода. В соответствии с этой аналогией однородные распределения u_1 и u_3, которым соответствует минимум F, являются фазами системы. Если данная фаза соответствует лишь локальному, а не абсолютному минимуму F, её называют *метастабильной*. Метастабильная фаза неустойчива по отношению к достаточно большим возмущениям: если внутри неё возник достаточно большой зародыш устойчивой фазы, то он начинает расти и формирует две разбегающиеся волны переключения (пара кинк–антикинк), после расхождения которых среда переходит в наиболее однородное устойчивое состояние.

Размер и форма критического зародыша определяются конкуренцией двух факторов. С одной стороны, образование зародыша, внутри которого $u(x)$ близко к u_3, выгодно для системы, поскольку это уменьшает второе слагаемое в (12.33). С другой стороны, неоднородность $u(x)$ внутри зародыша приводит к возрастанию первого слагаемого в (12.33) и появлению положительного вклада в F. Это означает, что форма критического зародыша соответствует стационарному, но абсолютно неустойчивому неоднородному решению уравнения (12.1). Это возможно только при $F[u(x)]=0$, что как раз и соответствует профилю критического зародыша $u=u_d(x)$.

В заключение этого параграфа укажем достаточное условие разрушения метастабильного состояния $u=u_1$ начальным возмущением $u(x,0)$. Нетрудно убедиться, что $F[u_1]=0$ и $F[u_3]<0$. Таким образом, если $F[u(x,0)]>0$, то дальнейшую эволюцию возмущения однозначно предсказать невозможно. Однако если $F[u(x,0)]<0$, то, в силу $dF/dt<0$, финальной стадией такой эволюции может быть только однородное состояние $u=u_3$. Это условие доставляет нам достаточное, но не необходимое условие перехода среды из «холодного» в «горячее» состояние.

12. Единое математическое описание автоволн

Математика – это язык.
Дж. У. Гиббс

Итак, автоволны являются распределёнными аналогами автоколебаний в сосредоточенных системах. Их примерами являются волны горения, нервные импульсы, волны распространения популяций, фибрилляции сердечной ткани и т.п. Автоволновые процессы лежат в основе большинства процессов управления и передачи информации в биологических системах. Интересной особенностью активных сред является то, что в них могут возникать автоволновые структуры. Такие структуры могут осуществляться в системах любой физической природы, динамика которых описывается уравнениями типа уравнение «реакция–диффузия». Это новый тип динамических процессов, порождающих макроскопический линейный масштаб за счёт локальных взаимодействий, каждое из которых линейным масштабом не обладает. Автоволновые процессы являются основой морфогенеза в биологических системах, а также доставляют новый механизм возникновения турбулентности в активных средах.

Рассмотренные в лекции явления самоорганизации не могут не удивлять теми глубокими аналогиями, которые появляются между совершенно различными системами различной природы, когда эти системы проходят точки возникновения неустойчивостей. Разгадка такой универсальности заключается в том, что основным уравнением для адекватного математического описания таких систем является одно и то же для всех уравнений «реакция–диффузия».

13. Контрольные вопросы к лекции 12

1. Что такое автоволна?
2. Чем автоволны отличаются от солитонов?
3. Запишите уравнение «реакция–диффузия».
4. Запишите уравнение «реакция–диффузия» в градиентном виде.
5. При каком условии автоволна покоится?
6. Чему равна максимальная скорость автоволны?
7. Устойчива ли автоволна?
8. Что такое механическая аналогия для уравнения «реакция–диффузия»?
9. Что такое теорема равных площадей для автоволны?
10. Устойчив ли критический зародыш стабильной фазы?
11. В чем заключается вариационный принцип для уравнения «реакция–диффузия»?
12. Запишите функционал Ляпунова для уравнения «реакция–диффузия».

14. Задачи к лекции 12

1. **Мультистабильная среда. Вытеснение фаз.** В 1D-уравнении «реакция–диффузия» функция $f(u) = 0$ имеет пять корней, т.е. существуют три устойчивые фазы среды u_1, u_3 и u_5. Известно, что фаза u_1 вытесняется фазой u_3 кинком со скоростью υ_{13}, а фаза u_3 вытесняется фазой u_5 кинком со скоростью υ_{35}. На основании механической аналогии вынесите суждение о том, всегда ли существует кинк, переводящий среду из фазы u_1 в фазу u_5. В каком соотношении его скорость υ_{15} находится с υ_{13} и υ_{35}?

2. **Предельная скорость кинка.** Найдите профиль фронта $u(\xi)$ и скорость распространения кинка $v(\beta)$ в модели, когда нелинейная функция $f(u)$ имеет вид: a) кубического полинома: $f(u) = -\alpha u(u-1)(u-\beta)$, b) скачковой функции: $f(u) = -u + \theta(u-\beta)$, где $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда, Найдите предельную скорость кинка $v_{\max}$ в этих моделях.

3. **Устойчивость движущегося кинка.** Покажите, что оператор L Штурма–Лиувилля задачи об устойчивости кинка $L = \partial^2/\partial\xi^2 + {}$ $+ v\partial/\partial\xi + W(\xi)$, где $W(\xi) = -\partial f\left[u_k(\xi)\right]/\partial u$ с граничными условиями $\delta u(\pm\infty, t) = 0,$ не является самосопряжённым. Укажите способ приведения его к самосопряжённому виду. Исходя из этого, качественно оцените максимальную скорость кинка $v_{\max}$. Подсказка: в данной задаче оператор L самосопряженный, если для любых интегрируемых с квадратом $\psi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, удовлетворяющих граничным условиям, выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)(L\varphi(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(L\psi(x))dx.$$

4. **Градиентный вид уравнения «реакция–диффузия».** Приведите уравнение «реакция–диффузия» к градиентному виду $u_t = -\delta F/\delta u$, указав явный вид функционала $F[u]$. Сформулируйте и докажите вариационный принцип (принцип минимальности функционала Ляпунова) для полной производной $F[u]$ по времени. Покажите, что для бистабильной среды функционал достигает локальных минимумов в стационарных состояниях $u(x,t) = u_1$ и $u(x,t) = u_3$. Вычислите его значение $F[u_1]$ для метастабильного и $F[u_3]$ для стабильного состояний 1D-среды длины L. Вынесите

суждение об эволюции начального распределения $u(x,0)$ в зависимости от величины $F[u(x,0)]$.

5. **Динамика фазы бистабильной среды.** Пусть фаза $u = u_3$ стабильна, а фаза $u = u_1$ метастабильна. Покажите, что любое начальное распределение $u(x,0)$, для которого $F\left[u(x,0)\right] < 0$, будет релаксировать к однородному состоянию $u = u_3$.

6. **Оптика автоволн. Закон преломления Морнева.** Плоский фронт кинка, описываемого уравнением «реакция–диффузия», распространяется по 2D активной среде со скоростью v_1. Подходя к линейной границе раздела с областью с другой скоростью распространения v_2, кинк испытывает преломление. Как связаны углы падения θ_1 и преломления θ_2 фронта кинка? Используя полученный закон преломления (закон Морнева), обсудите вопрос о возможности полного внутреннего отражения автоволн.

Лекция 13. Квантовые волны

Человек, который знает квантовую механику,
отличается от того, кто ее не знает сильнее,
чем последний от человекообразной обезьяны.
Марри Гелл-Манн

1. Оптико-механическая аналогия. 2. Волновое уравнение Шредингера. 3. Преломление квантовых волн. 4. Туннелирование квантовых волн. 5. Туннелирование света. 6. Стоячие квантовые волны. 7. Заключительные замечания. 8. Приложение. Принцип Мопертюи и принцип Ферма.

Со всеми частицами вещества связаны их волны де Бройля, которые наблюдаются в интерференционных и дифракционных экспериментах. Материя в целом есть и вещество, и излучение, она обладает и корпускулярными, и волновыми свойствами. В этом и заключается корпускулярно-волновой дуализм. Отметим, что в классической физике имеются два основных персонажа: частицы и волны, но они всегда представляют собой разные физические объекты. В квантовой физике корпускулы и волны относятся к одному и тому же физическому объекту, например, электрону или фотону. Сочетание этих понятий у одной и той же частицы противоречит классической физике. Их единство достигается только в квантовой теории.

Объединение корпускулярной и волновой картин материи в рамках классической физики невозможно, поскольку требуется пересмотр представлений о свойствах движения. Главным здесь является введение новой, несвойственной классической физике концепции вероятности в применении к элементарным процессам. Введение концепции вероятности без каких-либо случайных процессов, отказ от детерминизма классической механики – плата за требуемый экспериментом корпускулярно-волновой дуализм. Вероятность приобретает в волновой механике фундаментальный характер. Чтобы объяснить эту ситуацию, начнем с оптико-механической аналогии как основного свойства волновой механики.

1. Оптико-механическая аналогия

Между механикой и оптикой существует глубокая аналогия. Это аналогия между траекторией частицы и лучом света, основанная на аналогии между импульсом $\mathbf{p}$ в механике и волновым вектором $\mathbf{k}$ в оптике. Более того, существует аналогия между механическим вариационным принципом Мопертюи и оптическим вариационным принципом Ферма, которые позволяют единым образом определять форму траекторий частиц в механике и форму световых лучей в оптике. Эта аналогия позволяет сопоставить основные понятия механики и оптики. В рамках такого сопоставления материальная частица – это волновой пакет, траектория частицы – это луч света, скорость частицы v – это групповая скорость света $v_г$, энергия частицы E пропорциональна частоте света в диспергирующей среде ω и т.д. Для того чтобы получить количественные выражения этих соответствий, нужно сопоставить два вариационных принципа Мопертюи и Ферма.

В механике траектория частицы массы m, двигающейся в потенциале $U(\mathbf{r})$, определяется принципом Мопертюи:

$$\int \sqrt{E - U(\mathbf{r})}\, dr = \min , \tag{13.1}$$

а в оптике форма оптического луча в среде с фазовой скоростью света $v_ф(\mathbf{r}, \omega)$ определяется принципом Ферма:

$$\int \frac{dr}{v_ф(\mathbf{r}, \omega)} = \min \tag{13.2}$$

(см. Приложение). Из сопоставления принципов (13.1) и (13.2) следует, что соответствие траектория–луч верно, если выполняется соотношение

$$\frac{1}{v_ф(\mathbf{r}, \omega)} = f(\omega)\sqrt{E(\omega) - U(\mathbf{r})} , \tag{13.3}$$

где $f(\omega)$ и $E(\omega)$ – подлежащие определению функции частоты. Вид $f(\omega)$ и $E(\omega)$ однозначно определяется из того условия, что скорость материальной частицы $\sqrt{2(E - U(\mathbf{r}))/m}$ равна групповой скорости волнового пакета $v_г = (d(\omega / v_ф)/d\omega)^{-1}$. Записывая это условие в виде

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{v_ф(\mathbf{r}, \omega)}\right) = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E(\omega) - U(\mathbf{r})}} \tag{13.4}$$

и используя равенство (13.3), получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E - U(\mathbf{r})}} &= \frac{d}{d\omega}\{\omega f(\omega)\sqrt{E - U(\mathbf{r})}\} = \\ &= \frac{d(\omega f(\omega))}{d\omega}\sqrt{E - U(\mathbf{r})} + \frac{\omega f(\omega)}{2\sqrt{E - U(\mathbf{r})}}\frac{dE}{d\omega}. \end{aligned} \tag{13.5}$$

Функция $U(\mathbf{r})$ изменяется от точки к точке независимо от ω, следовательно, величину $\sqrt{E-U(\mathbf{r})}$ также можно рассматривать как независимую переменную. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{E-U(\mathbf{r})}$ в уравнении (13.5), находим два условия

$$\frac{d}{d\omega}(\omega f(\omega))=0, \quad \sqrt{\frac{m}{2}}=\frac{\omega f(\omega)}{2}\frac{dE}{d\omega}. \tag{13.6}$$

Первое из них дает $\omega f(\omega)=\mathrm{const}$, из второго следует $dE/d\omega=\mathrm{const}$.

Введем обозначение $dE/d\omega=\mathrm{const}=\hbar$. Выбрав подходящим образом начало отсчета энергии, из (13.6) получаем формулу Планка:

$$E=\hbar\omega \tag{13.7}$$

и выражение для фазовой скорости частицы:

$$v_{\text{ф}}(\mathbf{r},\omega)=\frac{E}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{E-U(\mathbf{r})}}. \tag{13.8}$$

Фазовая скорость (13.8) определяет во всех точках $\mathbf{r}$ значения показателя преломления и его дисперсию. Для групповой скорости и длины волны частицы в рамках оптико-механической аналогии получаем

$$v_{\text{г}}=\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-U(\mathbf{r})}, \tag{13.9}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{v_{\text{ф}}}{\omega}=\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{E-U(\mathbf{r})}}=\frac{\hbar}{mv_{\text{г}}}. \tag{13.10}$$

Соотношения между импульсом и волновым вектором (13.10), а также между энергией и частотой (13.7) и выражают аналогию, существующую между механикой и геометрической оптикой. В механике рассматривается движение материальных частиц, а в оптике им соответствуют распространяющиеся волновые пакеты. Волновой пакет стягивается в светящуюся точку в предельном случае бесконечно малой длины волны света $\lambda\to 0$, т.е. в пределе геометрической оптики. Поэтому основное понятие геометрической оптики – *световой луч* – аналогично основному понятию механики – *траектории*.

2. Волновое уравнение Шредингера

Частицы материи обладают как корпускулярными, так и волновыми свойствами. Волновая природа материи проявляется в дифракции электронов на кристаллах подобно дифракции света. Длина связанной с частицей волны де Бройля обратно пропорциональна импульсу частицы $\lambda=2\pi\hbar/p$. Связанное с частицей волновое поле $u(x,t)$ описывает статистические свойства отдельной микрочастицы, вероятность ее обнаружения. Оптико-механическая аналогия позволяет получить основное уравнение квантовой механики – волновое уравнение Шредингера. Фазовая скорость волны, соответствующей частице с энергией E в потенциале $U(\mathbf{r})$, равна $v_{\text{ф}} = E/\sqrt{2m(E - U(\mathbf{r}))}$. Сама же монохроматическая волна частицы $u = u(x,t)$ описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v_{\text{ф}}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (13.11)$$

Частное решение (13.11), соответствующее монохроматической волне, имеет вид

$$u(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}, \qquad (13.12)$$

где монохроматическая частота соответствует энергии частицы (13.7) $\omega = E/\hbar$.

Подставляя (13.12) в волновое уравнение (13.11), получаем уравнение Гельмгольца:

$$u'' + \frac{\omega^2}{v_{\text{ф}}^2}u = 0, \qquad (13.13)$$

в которое входит только длина волны де Бройля частицы $\lambda = 2\pi v_{\text{ф}}/\omega$. Подставляя (13.7), (13.8) в уравнение Гельмгольца (13.3), получаем стационарное уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u'' + U(x) = Eu. \qquad (13.14)$$

Это знаменитое уравнение Шредингера для определения волновой функции частицы u, находящейся в заданном силовом поле.

Уравнение (13.14) является краеугольным камнем волновой механики. Оно не зависит от времени и описывает стационарное движение частицы в силовом поле. Уравнение (13.14) имеет смысл только для стационарных состояний с фиксированной энергией E. В волновой механике энергии частицы E соответствует оператор $E = i\hbar\partial/\partial t$. Отсюда приходим к зависящему от времени уравнению Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + U(x)u. \qquad (13.15)$$

Здесь важно подчеркнуть, что $u(x,t)$ – комплексная функция. В противном случае у уравнения Шредингера (13.15), которое первого порядка по производной по времени, не было бы волновых и колебательных решений.

В случае свободной частицы, обладающей определенным импульсом p, решением уравнения Шредингера (13.19) является плоская дебройлевская волна $u(x,t)=\exp(i(px-Et)/\hbar)$. Это решение находится в соответствии со статической интерпретацией волновой функции и принципом неопределенности. Действительно, величина $|u^2|dx$ равна вероятности того, что частица в момент времени t находится в элементе объема dx. Для дебройлевской волны эта величина не зависит ни от координаты, ни от времени. Иными словами, все положения свободной частицы в пространстве равновероятны. С другой стороны, из принципа неопределенности $\Delta p\Delta x\approx\hbar$ следует, что при точном знании импульса $\Delta p=0$ неопределенность в положении Δx равна бесконечности, т.е. все положения частицы равновероятны.

Справедливость уравнения Шредингера (13.15) доказывается его многочисленными успехами в объяснении закономерностей поведения квантовых объектов. Первые из них были связаны с расшифровкой атомных спектров, а также объяснением дифракции свободных электронов.

3. Преломление квантовых волн

Корпускулярной и волновой природой обладают не только частицы, но и свет. Поэтому рассмотрим преломление квантовых волн сначала на примере света. Эксперимент показал, что волновые и корпускулярные свойства представляют собой две равноправные стороны светового поля. Корпускулярно-волновой дуализм позволяет рассматривать оптические явления как с волновой, так и с корпускулярной точек зрения. Покажем, что экспериментально наблюдаемый закон преломления можно объяснить при помощи обеих точек зрения.

С волновой точки зрения преломление лучей (нормалей к фронту) света связано с изменением фазовой скорости волны при переходе из одной среды в другую. Пусть две среды с разными показателями преломления разделены плоской границей. Из первой среды под углом θ_1 к нормали падает плоская волна с фазовой скоростью v_1. После прохождения во вторую среду угол наклона к нормали становится равным θ_2, а фазовая скорость v_2. Точка пересечения фронта волны движется по поверхности раздела. В соответствии с принципом Гюйгенса ее скорость, с одной стороны, равна $v_1/\sin\theta_1$, а с другой стороны, $v_2/\sin\theta_2$. Таким образом, условие преломления волны принимает вид закона Снеллиуса:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}. \qquad (13.16)$$

С корпускулярной точки зрения преломление луча (траектории частицы) связано с изменением импульса частиц при переходе из одной среды в другую. Это изменение связано с тем, что у частиц разная потенциальная энергия по разные стороны границы раздела. Пусть импульс частиц в первой среде p_1, а во второй p_2. Поскольку сила, действующая при переходе на частицу, направлена по градиенту потенциала, то она перпендикулярна к границе раздела. Это значит, что тангенциальная компонента импульса сохраняется при переходе частицы через поверхность раздела $p_1 \sin\theta_1 = p_2 \sin\theta_2$. Во времена Декарта и Ньютона, в разгар споров о природе света, световые частицы мыслились как ньютоновы корпускулы с импульсом $p = mv$. Это приводит к закону преломления Декарта:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_2}{v_1}. \qquad (13.17)$$

Сравнение (13.16) и (13.17) показывает, что при той же угловой зависимости в корпускулярной интерпретации отношение скоростей обратное тому, которое имеет место при волновой интерпретации. Однако не следует торопиться утверждать, что это различие доставляет нам способ экспериментально установить – из частиц или волн состоит свет. Дело в том, что в волновом (13.16) и корпускулярном (13.17) законах преломления фигурируют существенно различные скорости. В законе Снеллиуса это фазовые скорости $v_{\text{ф}}$, а в законе Декарта – групповые скорости $v_{\text{гр}}$. Например, для релятивистской дебройлевской частицы $v_{\text{гр}} v_{\text{ф}} = c^2$, а для нерелятивистской $v_{\text{гр}} = 2v_{\text{ф}} = p/m$ (см. лекцию 7). В первом случае законы преломления (13.16) и (13.17) совпадают, а во втором – противоречат друг другу.

Таким образом, если в корпускулярной картине частицами являются фотоны с $cp = \hbar\omega$, то опыты Фуко по прямому измерению скорости света в среде не могут дать ответ на вопрос о том, какую именно природу – волновую или корпускулярную – имеет свет. Это связано с тем, что в выражении для импульса фотона $p = \hbar\omega / c$ фазовая скорость стоит не в числителе, а в знаменателе.

Итак, на основании сравнения (13.16) и (13.17) с оптическими опытами еще рано делать вывод в пользу волн или корпускул. Фотоны являются как релятивистскими, так и безмассовыми частицами. Кроме того, со времен Ньютона и Френеля сменилось несколько парадигм представлений о природе элементарных кирпичиков света. Эксперимент же явно и прямо указывает как на волновую (интерференция, дифракция), так и на корпускулярную (фотоэффект, эффект Комптона) природу света. Что же касается преломления волн де Бройля, то волновая механика дает однозначный ответ (см. задачу 4) – квантовые частицы преломляются как волны.

4. Туннелирование квантовых волн

При выводе уравнения Шредингера (13.14) мы негласно предполагали, что потенциальная энергия $U(x)$ всюду меньше энергии E. Посмотрим теперь, что произойдет в тех областях, где потенциал больше полной энергии. Согласно классической механике, такие области недоступны для частицы. Однако дебройлевская волна может проникать в эти области. В этом кардинальное отличие волновой механики от обычной.

В одномерном случае стационарное уравнение Шредингера (13.14) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с одной переменной. Проще всего его решить в квазиклассическом приближении. В качестве конкретного примера рассмотрим задачу о прохождении дебройлевской волны области конечной ширины (x_1, x_2), в которой потенциальная энергия частицы больше полной $U(x) > E$.

Квазиклассическое приближение мы подробно рассмотрели в лекции 6 (Ч. 1. Колебания). Воспользуемся полученным там решением. Для этого достаточно сообразить, что координата частицы там соответствует дебройлевской волновой функции, а время – координате. Ответ легко предугадать. Дебройлевская волна, падающая на такой барьер, частично отражается, а частично проходит через барьер, минуя запрещенную область. То есть частица может просочиться через барьер, абсолютно непрозрачный с классической точки зрения. Эта одна из главных особенностей волновой механики, которая называется туннельным эффектом.

Квазиклассическое приближение работает тем лучше, чем меньше длина волны по сравнению с шириной барьера. Тогда коэффициент прохождения T можно вычислить совершенно аналогично коэффициенту прохождения звука, рассмотренному в лекции 3. Это отношение квадратов амплитуд прошедшей и падающей на барьер дебройлевской волны равно

$$T \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar^2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x)-E)}\,dx \right). \qquad (13.18)$$

Величина T имеет ясный физический смысл вероятности прохождения барьера частицей при однократном наскоке. Выражение (13.18) является приближенным еще и потому, что в нем отброшен предэкспоненциальный множитель, мало влияющий на порядок величины T.

Коэффициент прохождения T очень сильно зависит от высоты и ширины барьера и от массы частицы. Он тем меньше, чем больше масса частицы. Коэффициент прохождения возрастает с увеличением полной энергии частицы и при уменьшении ширины барьера. Поясним сказанное конкретными примерами. Если мы запрем нейтрон, локализованный в области порядка ангстрема барьером высотой полэлектронвольта и шириной три ангстрема, то для того, чтобы убежать за счет туннелирования, ему понадобится время на много-много порядков больше времени жизни Вселенной. Но если бы вместо нейтрона мы в эти же условия поместили электрон, масса которого в две тысячи раз меньше, то он смог бы покинуть эту область всего за время оборота электрона вокруг ядра в атоме водорода. Возвращаясь к нейтрону, мы можем сказать, что даже уменьшив ширину барьера до ангстрема, его время жизни в яме все равно будет больше времени жизни Вселенной. А вот если сделать ширину барьера половиной ангстрема, то он убежит за десять минут.

5. Туннелирование света

Рассмотренный туннельный эффект для квантовых волн имеет прямую аналогию в классической электродинамике. Это туннелирование электромагнитной волны при полном внутреннем отражении. Оно возникает при отражении плоской электромагнитной волны от границы раздела двух сред с различными показателями преломления. Пусть, например, плоская волна света падает на границу раздела двух сред с разной оптической плотностью. Пусть волна падает из оптически более плотной среды в среду менее плотную, то есть в среду с меньшим показателем преломления. Предположим, что угол падения больше угла полного внутреннего отражения.

Полное отражение света не означает, что все излучение отражается от границы раздела. Действительно, фотон или пучок света, падающий из оптически менее плотной среды с показателем преломления n_1 на границу с оптически менее плотной средой с показателем преломления n_2 ($n_2 < n_1$) под углом, большим угла $\varphi_0 = \arcsin n_2 / n_1$, испытывает полное внутренне отражение. При этом вместо прошедшей волны в оптически менее плотной среде вдоль поверхности распространяется латеральная волна, амплитуда которой затухает по нормали от границы. И если за поверхностью раздела сред поместить другую оптически плотную среду с показателем преломления n_1, латеральная волна проникает в нее и превращается там в свободно распространяющуюся волну с тем же волновым вектором, что и падающая волна в исходной среде.

Этот известный оптический эффект обычно интерпретируется в терминах квантового туннельного эффекта. Говорят, что фотон туннелирует из одной среды в другую так же, как электрон из одной потенциальной ямы в другую. Здесь аналогами потенциальных ям для фотонов, как отмечено выше, служат оптически более плотные среды, а аналогом барьера между ними – оптически менее плотная среда. Туннельный эффект фотонов широко используется в интегральной оптике для обеспечения оптической связи между различными оптическими каналами.

Оценим коэффициент прохождения T количественно. При условии полного внутреннего отражения $\sin\varphi_1 > n_2 / n_1$ свет заперт в первой среде. Нормальная компонента волнового вектора во второй среде $k_{2n} = \pm i\,|\,k_{2n}\,|$ становится мнимой. Это означает, что волна экспоненциально затухает в глубь второй среды. Поле во второй среде можно представить в виде

$$E(x) = E_0 e^{ik_{2n}x} = E_0 e^{-|k_{2n}|x}\,, \qquad (13.19)$$

где x – координата вдоль нормали к поверхности раздела сред. Таким образом, при полном внутреннем отражении поле проникает во вторую среду на глубину

$$\Delta x = \frac{1}{|\,k_{2n}\,|} = \frac{\lambda_2}{2\pi\sqrt{\left(\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_0}\right)^2 - 1}}\,, \qquad (13.20)$$

где φ_0 – угол полного внутреннего отражения. Для φ_1, не слишком близких к φ_0, глубина проникновения оказывается порядка длины волны λ_2 во второй среде. Важно также отметить, что в запрещенной области, оптически менее плотном слое, неприменима лучевая картина распространения. Здесь нельзя рисовать лучи света как нормали к волновому фронту. В запрещенной области волны представляют собой эванесцентные фронты. В связи с этим возникают такие явления, как эффект Гуса–Хенкен, бездифракционная линза Веселаго, плащ-невидимка и т.д.

Проникновение волны во вторую среду в условиях полного внутреннего отражения приводит к ее туннелированию при наличии третьей среды. Пусть, например, две стеклянные пластинки разделены щелью шириной d. Если $d > \lambda$, граничные условия на второй пластинке будут слабо влиять на полное внутреннее отражение в первой. Поэтому для оценки можно воспользоваться выражением (13.19). Для коэффициента прохождения через щель получаем

$$T \approx e^{-2|k_{2n}|d} = e^{-\frac{4\pi d}{\lambda}\sqrt{n_1^2 \sin^2 \varphi_1 / n_2^2 - 1}}. \qquad (13.21)$$

Это явление и представляет собой оптический туннельный эффект. Физически он совершенно эквивалентен туннелированию квантовой частицы под потенциальным барьером. Туннельный эффект связан с важным понятием оптического контакта двух сред. Последний имеет место, если ширина щели $d \ll \lambda$, когда волна проходит из одной среды в другую без существенного отражения, независимо от угла падения. Для достижения оптического контакта требуется очень тщательная пришлифовка поверхностей. По этой причине наблюдение туннельного эффекта для света является очень тонким экспериментом. Однако его легко провести в диапазоне сантиметровых длин волн, используя, например, парафиновые пластинки.

6. Стоячие квантовые волны

Теперь попробуем запереть дебройлевские волны в каком-нибудь резонаторе. Посмотрим, каковы свойства стоячих квантовых волн. Резонаторами для дебройлевских волн могут служить атомы, квантовые точки, квантовые ямы и т.п. Таким образом, речь идет о движении частицы, запертой в области, размеры которой сравнимым с ее дебройлевской длиной волны.

При помощи стоячей волны де Бройля описывается поведение электрона в современной модели атома. Запертый в атоме электрон описывается такой же стоячей волной, как и закрепленная на концах гитарная струна. Это волна, которая никуда не распространяется. Сразу раскроем секрет: на этом пути мы воспроизведем основные результаты квантовой механики. Для их получения будем использовать размерные и качественные оценки. Идея качественных оценок состоит в рассмотрении предельных случаев и упрощенных вариантов задачи. При этом мы можем пользоваться нерелятивистской механикой. Чтобы в этом убедиться, оценим скорость частицы, скажем электрона, в квантовом резонаторе. Если это квантовая яма с шириной l, то энергия основного состояния частицы в ней $\approx \hbar / ml^2$. Это значит, что характерная скорость составляет $mv^2 \approx \hbar / ml^2$. Для атома с $l \approx a_B$ это дает $v \approx 10^{-2}$ с, а для ямы с $l \approx 10$ нм получаем $v \approx 10^{-4}$ с. Таким образом, в этих случаях дебройлевские волны нерелятивистские.

Рассмотрим движение частицы в потенциальной яме шириной l и найдем ее стационарные состояния. В классически доступной области потенциальная энергия $U(x)$ меньше полной энергии E. Следовательно, дебройлевская волна осциллирует в этой области. Вне ямы волна экспоненциально затухает. Энергию стационарных состояний можно оценить из того условия, что характерный размер области, в которой может двигаться частица, содержит целое число n полуволн де Бройля.

Стационарные уровни энергии E_n нельзя получить исходя из одних лишь размерных соображений, так как величина n безразмерна. Мы будем делать модельные оценки, заменяя потенциальную яму ящиком с длиной $l(E_n)$, зависящей от энергии частицы. Длина дебройлевской волны $\lambda = 2\pi\hbar / p$, где p – импульс частицы. Длина волны зависит от координаты x, но для оценки можно считать $\lambda \approx 2\pi\hbar / \sqrt{2mE}$, если E отсчитано от дна ямы. Таким образом, оценка стационарных уровней системы E_n получается из соотношения $l(E_n) \approx n\lambda / 2$, или

$$l(E_n) \approx 2\pi\hbar n / 2\sqrt{2mE_n}, \tag{13.22}$$

где $l(E_n)$ – характерная длина области, в которой может двигаться частица. Рассмотрим несколько примеров.

Прямоугольная квантовая яма. Для прямоугольной ямы величина $l(E_n) = a$ – длине ямы. Следовательно, $l = \pi\hbar n / \sqrt{2mE_n}$, откуда $E_n = \pi^2\hbar^2 n^2 / 2ma^2$. Это выражение удовлетворяет принципу соответствия Бора: при больших квантовых числах расстояние между соседними энергетическими уровнями должно равняться классической частоте движения (см. лекцию 6. Ч. 1. Колебания). Действительно,

$$\frac{dE_n}{dn} = 2\frac{\pi^2\hbar^2 n}{2ma^2} = \frac{2\pi}{2a / v_{\text{кл}}} = \frac{2\pi}{T_{\text{кл}}}, \tag{13.23}$$

где $T_{\text{кл}}$ – классический период движения.

Осциллятор. Следующий пример – одномерный осциллятор, потенциальная энергия которого $U(x) = m\omega^2 x^2 / 2$, где ω – частота классического осциллятора. Частота осцилляций волновой функции около начала координат больше, чем у краев ямы. Действительно, при $x = 0$ кинетическая энергия движения максимальна, следовательно, длина волны λ минимальна. При заданной энергии E_n характерная длина области l, в которой может двигаться частица, находится из условия $U(l) = E_n$. Итак, $m\omega^2 l_n^2 / 2 \approx E_n$, откуда $l_n \approx \omega^{-1}\sqrt{E_n / m}$. Условие квантования (13.22) имеет вид $\omega^{-1}\sqrt{E_n / m} \approx n\hbar / \sqrt{mE_n}$, откуда находим $E_n = Cn\hbar\omega$. Из принципа соответствия следует, что $C = 1$.

Как известно, точное решение задачи о спектре осциллятора $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ дает при $n=0$ отличную от нуля энергию колебаний. Это связано с соотношением неопределенностей. Частица, движущаяся в малой области l, не может иметь импульс, меньший $\sim 1/l$. Для энергии частицы E имеем оценку $E \approx \hbar^2/2ml^2 + m\omega^2 l^2/2$. Найдем минимум этого выражения. Эта минимизация соответствует вариационному принципу квантовой механики $E = \min\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ (см. лекцию 6). В данном случае волновая функция зависит от одного лишь параметра l, выражение для E минимально при $l \sim 1/\sqrt{\hbar\omega}$. При этом $E_{\min} = C\omega\hbar$, а величина $C = 1/2$ может быть найдена только из точного решения. Величина $l_{\min}^2 \approx \hbar/m\omega$ дает оценку квадрата амплитуды нулевых колебаний осциллятора.

Кулоновское поле. Аналогичным способом можно рассмотреть движение в кулоновском поле $U(r) = -e^2/r$. Ограничимся случаем нулевого момента импульса $l=0$. При энергии частицы E размер области ее локализации равен $l = e^2/|E|$, а длина дебройлевской волны порядка $\lambda \approx \hbar/\sqrt{m|E|}$. Условие квантования (13.22) имеет вид $e^2/|E| \approx$ $\approx n\hbar/\sqrt{m|E|}$, откуда находим

$$E_n = -\frac{C}{n^2}\mathrm{Ry}, \tag{13.24}$$

где $\mathrm{Ry} = me^4/2\hbar^2$. Безразмерную константу C найдем из принципа соответствия:

$$\frac{dE_n}{dn} = C\frac{2}{n^3} = \omega_{\text{кл}} = \frac{2\pi}{T_{\text{кл}}}. \tag{13.25}$$

Период классического движения равен

$$T_{\text{кл}} = 2\int_0^l \frac{dr}{v} = 2\int_0^{-1/E_n} \frac{dr}{\sqrt{2(E_n + e^2/r)}} = \frac{2\pi}{(-2E_n)^{3/2}}. \tag{13.26}$$

Итак, $C/n^3 = (2\pi/2\pi)(C/n^2)^{3/2}$, откуда $C=1$. Окончательно получаем $E_n = -\mathrm{Ry}/n^2$, что совпадает с точным решением задачи Кеплера в квантовой механике.

Частица в гравитационном поле. Рассмотрим частицы, например холодные нейтроны, прижатые гравитационным полем к столу. Потенциальная энергия в этом случае $U(x) = mgx$ над столом $x>0$ и $U(x) = \infty$

под ним $x < 0$. Уравнение стационарного состояния (13.22) $l = n\lambda / 2$ с учетом $E = mgl$ и $\lambda \approx \hbar / \sqrt{mE}$ дает

$$E_n = C(\hbar g)^{2/3} m^{1/3} n^{2/3} . \qquad (13.27)$$

Константа в (13.27) определяется из принципа соответствия. Классический период обращения частицы в данном потенциале равен

$$T_{\text{кл}} = \sqrt{2m} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{E - mgx}} = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{2E}{m}} . \qquad (13.28)$$

Отсюда, с учетом $dE_n / dn = 2\pi\hbar / T_{\text{кл}}$, для константы получаем $C = 3^{2/3} \pi^{2/3} / 2$.

Рассмотренные примеры показывают, что дискретные уровни энергии собственных состояний квантовой частицы представляют собой собственные частоты соответствующих квантовых резонаторов. А собственные состояния частицы представляют собой стоячие квантовые волны в этих резонаторах.

7. Заключительные замечания

В 1834 г. Вильям Гамильтон обнаружил аналогию между траекториями материальных частиц в потенциальных полях и траекториями световых лучей в средах с непрерывно изменяющимся показателем преломления. Благодаря своему математическому изяществу эта оптико-механическая аналогия позволила объяснить фокусирующее действие электрических и магнитных полей на электронные пучки. Шредингер в 1926 г. воспользовался аналогией Гамильтона для получения волнового уравнения, позволившего перейти от геометрической оптики к волновой механике частиц. При этом он использовал понятие длины волны частиц, предложенное в 1923 г. де Бройлем. Шредингер объединил идеи де Бройля и Гамильтона для волнового описания движения частиц, которое так же связано с механикой частиц, как волновая оптика с геометрической. Это была смелая догадка, поскольку, хотя геометрическая оптика логически следует из волновой, обратное утверждение неверно. Догадка оказалась настолько удачной, что привела к созданию квантовой механики.

Между открытием Гамильтоном эквивалентности механики и геометрической оптики и получения волновой функции и волнового уравнения де Бройлем и Шредингером прошло почти сто лет. Иногда высказывается мнение, что если бы Гамильтон пошел немного дальше, то он получил бы и уравнение Шредингера. Однако это не так. Для такой смелой экстраполяции он нуждался бы в достаточных для нее экспериментальных данных. Во времена Гамильтона классическая механика считалась абсолютно верной, и не было оснований для экспериментальной проверки ее с целью уточнения и создания более общей теории. Из формулы (13.10) видно, что длина волны прямо пропорциональна постоянной Планка $\hbar$. Поэтому чем меньше $\hbar$, тем меньше длина волны и тем теснее связь механики с геометрической оптикой. Другими словами, Гамильтон не имел основания считать, что длина волны отлична от нуля.

Тот факт, что классическая механика является лишь приближением волновой механики и что это приближение представляет своего рода «геометрическую оптику», стал ясен значительно позже, когда были обнаружены эффекты, зависящие от длины волны частицы. Это показали произведенные в 1927 г. Дэвиссоном и Джермером опыты по дифракции электронов. Только после этого можно было приписать определенный физический смысл постоянной Планка $\hbar$ как мере длины волны частицы. Аналогичное положение имело место и в волновой теории света. Пока не были обнаружены явления интерференции и дифракции, волновая теория Гюйгенса не имела преимуществ по сравнению с корпускулярной теорией Ньютона. В 1905 г. Эйнштейн выдвинул гипотезу о двойственной природе света. Свет распространяется как электромагнитная волна, но при взаимодействии с веществом ведет он себя так, как будто он состоит из фотонов, каждый из которых несет квант энергии $\hbar\omega$. Эта гипотеза получила подтверждение при наблюдениях фотоэлектрических и фотохимических процессов.

8. Приложение. Принцип Мопертюи и принцип Ферма

То, что Вы не узнаете, Вам не повредит.
Долорес Амбридж

Согласно вариационному принципу Мопертюи, если частица обладает заданной энергией E и движется в силовом поле с потенциальной энергией $U(\mathbf{r})$, то для нахождения траектории частицы, проходящей через заданные точки 1 и 2, необходимо найти кривую, вдоль которой минимален интеграл

$$S = \int_1^2 \sqrt{E - U(\mathbf{r})}dr = \min . \qquad (13.29)$$

Требование минимума этого интеграла эквивалентно уравнению движения Ньютона:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} . \qquad (13.30)$$

В этом легко убедиться, получив из (13.29) уравнение Эйлера–Лагранжа. Варьируя интеграл (13.29), найдем его экстремум:

$$\delta\int\sqrt{E-U(\mathbf{r})}dr=\int(\sqrt{E-U(\mathbf{r})}\delta dr-\frac{\delta U(\mathbf{r})}{2\sqrt{E-U(\mathbf{r})}}dr)=0\,. \quad (13.31)$$

Пользуясь равенствами $\delta dr=(d\mathbf{r}/dr)\delta d\mathbf{r}$, $\delta U=(\partial U/\partial\mathbf{r})\delta\mathbf{r}$, а затем проводя в первом слагаемом (13.31) интегрирование по частям, приходим ввиду произвольности вариаций $\delta\mathbf{r}$ внутри области интегрирования к уравнению экстремали:

$$\frac{d}{dr}\left[\sqrt{E-U(\mathbf{r})}\frac{d\mathbf{r}}{dr}\right]=-\frac{1}{2\sqrt{E-U(\mathbf{r})}}\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\,. \quad (13.32)$$

Используя равенства

$$v_{\text{г}}=\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-U(\mathbf{r})},\quad dt=\frac{dr}{v_{\text{г}}}=\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dr}{\sqrt{E-U(\mathbf{r})}}\,, \quad (13.33)$$

получаем уравнение Ньютона (13.30). Отсюда следует справедливость принципа (13.29), так как из него вытекает правильное уравнение движения частицы.

Вариационный принцип Ферма утверждает, что для искривленного луча света, проходящего через точки 1 и 2 в диспергирующей среде при заданной частоте ω, минимален интеграл

$$S=\int_1^2\frac{dr}{v_{\text{ф}}}=\min\,, \quad (13.34)$$

где $v_{\text{ф}}=c/n(\omega)$ – фазовая скорость света в среде. Это значит, что луч света – это такая кривая, двигаясь вдоль которой свету нужно минимальное время, чтобы попасть из точки 1 в точку 2.

Домножая (13.34) на постоянную частоту ω и учитывая, что $\omega/v_{\text{ф}}=2\pi/\lambda$, получаем

$$\int_1^2\frac{dr}{\lambda}=\min\,. \quad (13.35)$$

Последнее равенство констатирует минимальность числа длин волн, укладывающихся на протяжении луча. Истинный луч отличается от любой другой кривой, проходящей через те же точки 1 и 2 тем, что на нем укладывается наименьшее число длин волн света. Таким образом, определяемое принципом Ферма направление соответствует конструктивной интерференции, главному максимуму луча, т.е. действительному направлению распространения света. Тем самым подтверждается справедливость принципа Ферма (13.34).

Кривая луча в среде с $v_ф(\mathbf{r})$ аналогична траектории частицы, движущейся в силовом поле $U(\mathbf{r})$. Это позволяет проводить аналогию между потенциальной энергией в механике и показателем преломления в оптике.

9. Контрольные вопросы к лекции 13

1. В чем заключается принцип Мопертюи?
2. В чем заключается принцип Ферма?
3. В чем заключается оптико-механическая аналогия?
4. Чем отличаются законы преломления для волн и частиц?
5. Запишите стационарное уравнение Шредингера.
6. Запишите временное уравнение Шредингера.
7. Что такое туннелирование волн?
8. Запишите выражение для волны де Бройля частицы с массой m и энергией E.
9. Чему равна длина дебройлевской волны частицы с массой m и скоростью v?
10. Чему равна фазовая скорость $v_ф$ дебройлевской волны частицы с массой m и энергией E?
11. Чему равна групповая скорость $v_{гр}$ дебройлевской волны частицы с массой m и энергией E?
12. Что такое стоячая квантовая волна?
13. В чем заключается правило квантования стоячих волн?

10. Задачи к лекции 13

1. **Квантовые резонаторы.** Исходя из представления о том, что резонатор – это ограниченный объем, в котором возникает стоячая волна, рассмотрите a) 1D-квантовую яму шириной a; b) 1D-осциллятор с частотой ω; c) водородоподобный атом с зарядом ядра Ze и $l=0$; d) частицу в гравитационном поле над плоскостью $U(x)=Fx,\ x>0$; $U(x)=+\infty,\quad x<0$. Получите их спектры E_n из условия, что на характерной длине резонатора укладывается целое число длин полуволн де Бройля. Уточните численные множители в полученных Вами оценках E_n, используя принцип соответствия $(E_{n+1}-E_n)/\hbar = 2\pi/T_{кл}$ при $n \gg 1$. Сравните полученные результаты с предсказаниями квантовой механики.

2. **Спектр квантового барабана.** Известно, что собственные частоты круглой мембраны барабана радиуса a с натяжением σ и поверхностной плотностью λ равны $\omega_{mn}=\sqrt{\sigma}\mu_{mn}/\sqrt{\lambda}a$, где μ_{mn} – n-й по счёту

ненулевой корень функции Бесселя m-го порядка. Чему равны собственные значения энергии E бесспиновой квантовой частицы массой m, находящейся в цилиндрическом ящике с радиусом a и длиной L? Какова кратность вырождения этих уровней?

3. **Законы преломления Декарта и Снеллиуса.** Согласно корпускулярной теории Декарта частицы света свободно распространяются в среде 1 со скоростью v_1. Пересекая границу раздела со средой 2, они испытывают «преломление» в силу скачка потенциала так, что их скорость изменяется до v_2. Сформулируйте закон преломления Декарта, связывающий углы падения θ_1 и преломления θ_2 таких частиц. Согласно волновой теории плоская волна распространяется в среде 1 с фазовой скоростью v_1. Пересекая границу раздела со средой 2, она испытывает «преломление» в соответствии с принципом Гюйгенса и распространяется далее с фазовой скоростью v_2. Сформулируйте закон преломления Снеллиуса для такой волны. Сравните законы преломления для этих двух случаев. Нарисуйте графики зависимостей θ_2 от θ_1.

4. **Преломление дебройлевской волны.** На плоскую границу раздела двух однородных сред наклонно падает дебройлевская волна частицы с массой m и скоростью v. Потенциальная энергия частицы в средах отличается на величину U_0. Найдите законы отражения и преломления волны.

5. **Туннелирование света.** В стекле пропилена щель толщиной d (микронного масштаба), заполненная воздухом. На щель со стороны стекла под углом полного внутреннего отражения $\theta_{\text{пво}} = 45^o$ падает плоская монохроматическая волна с частотой $\omega \approx 10^{15}$ с$^{-1}$. При каких толщинах d между стеклянными полупространствами все еще будет сохраняться оптический контакт?

Заключение

То, что я понял, – прекрасно. Из этого я заключаю,
что и остальное, чего я не понял, – тоже прекрасно.
Сократ

Итак, наши лекции окончены, обзор физики колебаний и волн завершен. На протяжении всех этих лекций мы убеждались, что физика колебаний и волн внутри естествознания совершенно универсальна. Это наука о колебательных и волновых движениях в любых системах независимо от их природы. При этом выяснилось, что под колебаниями можно понимать любые происходящие длительное время многократные изменения состояния системы «туда и обратно». Под волнами – колебания, распространяющиеся в пространстве. Мы увидели, что общие закономерности колебательных и волновых процессов применимы к любым областям естествознания. В значительной мере эти аналогии основаны на математической эквивалентности описания разных задач. Так, все маятники совершенно эквивалентны с точки зрения их поведения, в идейном отношении это одна и та же система.

Эта эквивалентность огромного числа систем различной природы и послужила причиной того, что теория колебаний и волн стала самостоятельной наукой со своим собственным предметом исследований. Таким предметом стала динамическая система – математическая модель любой колебательной или волновой задачи. Это система, поведение которой задается простым правилом (алгоритмом), например, дифференциальным уравнением. После формулировки такого правила для получения следствий из этой модели физическая природа самого явления не играет никакой роли. Поэтому теория колебаний и волн, в отличие от физики, химии или биологии, изучает не конкретные системы, а их модели. Эта наука не является частью физики или механики. Она стоит над ними, являясь в каком-то смысле метанаукой. В этом отношении она ближе всего к математике.

Динамические системы первоначально изучались только в физике. Это механические задачи движения тел (уравнения Ньютона, Лагранжа, Гамильтона), акустические и электромагнитные задачи распространения звука и света (волновое уравнение). Постепенно предмет теории колебаний и волн распространился и на химию, биологию, социологию (модель «хищник–жертва», осциллятор Ван дер Поля). Дальнейшее развитие методов теории колебаний и волн дало возможность распространить ее результаты на явления самоорганизации и формообразования (синергетика). Другим важным развитием современных методов стало исследование возникновения и свойств хаоса. В теории волн стало возможным описание особого вида волн – солитонов. Эти волны обладают исключительной устойчивостью к возмущениям и не изменяют при распространении и столкновениях свою форму. Это роднит их с частицами, при взаимодействии они сталкиваются как упругие шарики.

Таким образом, теория колебаний и волн, будучи наукой о моделях, обладает и обратным предсказательным действием. Она открывает новые образы для дальнейшего развития естествознания. Рассмотренные в лекциях примеры убедительно показывают, какую важную роль играет универсальный подход теории колебаний и волн к различным явлениям природы. Зная основные колебательные и волновые закономерности, имея в руках набор характерных образов, развив колебательную и волновую интуицию, можно часто предсказать поведение системы без детального разбора ее конкретных особенностей. Можно установить характер поведения одной системы, зная черты другой, зачастую весьма далекой от нее. В этом смысле теория колебаний и волн обладает большой широтой охвата и огромной предсказательной силой.

Теория колебаний и волн представляет собой основу описания всех периодических процессов в природе. Основными математическими образами этой теории являются осциллятор и волна. С наглядностью и простотой этой теории связаны ее успех в объяснении экспериментов и огромная предсказательная сила.

Единство колебательных и волновых явлений позволяет строить простые модели сложных систем, рассматривать с единой точки зрения колебательные и волновые процессы в системах самой различной природы. Оказывается, что такие популярные и бурно развивающиеся области исследований, как нелинейная и хаотическая динамика, солитоны и синергетика, фактически являются составными частями теории колебаний и волн.

Облик современной физики колебаний и волн меняется очень быстро. Стремительное изменение ее «переднего края» исследований делает задачу учебного изложения физики колебаний и волн довольно трудной. В настоящее время это вполне развитая область исследований, тесно связанная методологически с теорией дифференциальных уравнений и хаоса. Быстрое развитие экспериментальной техники позволило вплотную приступить к исследованию явлений, в которых первостепенны хаотическое и даже квантовое поведение. Важная роль теории колебаний и волн теперь понятна не только с фундаментальной точки зрения, но и с точки зрения приложений.

В лекциях были рассмотрены проблемы теории колебаний и волн, которые являются фундаментальными и необходимыми будущим физикам вне зависимости от их конкретной научной специализации. Лекции отличаются по уровню сложности изложения. Отчасти это связано с их конкретной темой и содержанием и, конечно, с личными научными пристрастиями автора. Тем не менее автор надеется, что лекции будут полезны широкому кругу студентов и аспирантов, только начинающих свою научную карьеру и стремящихся найти свой путь в науке.

Изложенное показывает, сколь широк круг проблем физики колебаний и волн, и сколь трудны многие из них. Важно то, что изложенные в лекциях методы и приведенные результаты представляют достаточную основу для дальнейших исследований в самых различных областях физики. Приведенный в лекциях перечень методов теории колебаний и волн является, конечно, неполным. Чтобы заполнить пробелы, далее приводится список относящейся к этой области литературы. В него включены как основные учебники по колебаниям и волнам, так и монографии, позволяющие судить о разнообразии направлений развития современной теории колебаний и волн.

Настоящие лекции являются именно введением в современную физику колебаний и волн. Они помогают читателю составить представление о предмете и достичь минимального теоретического уровня, позволяющего не только разбираться в оригинальной литературе, но и проводить самостоятельные исследования. Именно этим определялся выбор материала для них и цитируемой литературы.

В заключение отметим, что целые области физики колебаний и волн, важные и интересные, не вошли в лекции. В силу ограниченности объема и задачи первоначального знакомства с предметом за пределами этих лекций остался целый ряд актуальных задач и вопросов. Это нелинейная акустика, интерференция и дифракция волн, волн в метаматериалах, стохастические автоволны и т.д. Для того чтобы изучить эти вопросы, следует обратиться к приведенному в тексте списку литературы. В него включены как основные учебники по колебаниям и волнам, так и монографии, позволяющие судить о разнообразии направлений развития современной физики колебаний и волн. Но это уже совсем другая история.

Литература

Основная

1. *Кузнецов А.П., Рожнев А.Г., Трубецков Д.И.* Линейные колебания и волны (сборник задач). – М.: Наука, 2006. – 312 с.
2. *Мин Чен*. Задачи по физике с решениями – М.: Мир, 1978. – 296 с.
3. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В.* Акустика в задачах. – М.: Физматлит, 2009. – 336 с.
4. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Хедберг К.М.* Нелинейная акустика в задачах. – М.: Физматлит, 2007. – 176 с.
5. *Капица П.Л.* Физические задачи. – М. : Знание, 1966 . – 16 с.
6. *Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И.* [*и др.*]. Задачи по математическим методам физики. – М.: Эдиториал УРСС, 2013. – 288 с.
7. *Рэлей Дж.* Теория звука. М.: Физматгиз, 1956. Т. 1. 503 с.; Т. 2. 475 с.
8. *Крауфорд Ф.* Волны. Берклеевский курс физики – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 511 с.
9. *Горелик Г. С.* Колебания и волны. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 573 с.
10. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. – М.: Физматлит, 2001. – 496 с.
11. *Виноградова М.Б. Руденко О.В. Сухоруков А.П.* Теория волн – М.: Наука, 1979. – 384 с.
12. *Филиппов А.Т.* Многоликий солитон. – М.: Наука, 1990. – 288 с.
13. *Трубецков Д.И., Рожнев А.Г.* Линейные колебания и волны. – М.: Физматлит, 2001. – 416 с.
14. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. – М.: Физматлит, 2005. – 272 с.
15. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
16. *Исакович М.А.* Общая акустика. – М.: Наука, 1973. – 496 с.
17. *Островский Л.А., Потапов А.И.* Введение в теорию модулированных волн. – М.: Физматлит, 2003. – 400 с.
18. *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
19. *Пухов А.А*. Уравнение «реакция–диффузия». – М.: МФТИ, 2014. – 72 с.
20. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 624 с.
21. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. – М.: Мир, 1981. – 598 с.
22. *Крайнов В.П.* Качественные методы в физической кинетике и гидрогазодинамике. – М.: Высшая школа, 1989. – 224 с.
23. *Крайнов В.П.* Лекции по избранным задачам гидродинамики. – Долгопрудный: Изд. дом "Интеллект", 2014. – 184 с.

Дополнительная

24. Колебания и бегущие волны в химических системах. – М.: Мир, 1988. – 720 с.
25. *Хакен Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980. – 404 с.
26. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
27. *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
28. *Кернер Б.С., Осипов В.В.* Автосолитоны. – М: Наука, 1991. – 200 с.
29. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 352 с.
30. *Марри Д.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. – М.: Мир, 1982. – 212 с.
31. *Мюррей Д.* Математическая биология. Введение. – М.: РХД, 2009. – 776 с.
32. *Мюррей Д.* Математическая биология. Пространственные модели и их приложения в биомедицине. – М.: РХД, 2011. – 1104 с.
33. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
34. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Сов. радио., 1977. – 378 с.
35. *Скотт Э.* Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. – М.: Физматлит, 2007. – 560 с.
36. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
37. *Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В.* Введение в теорию самоорганизации открытых систем. – М.: Физматлит, 2005. – 212 с.
38. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Колебания и волны. – М.: УРСС, 2003. – 224 с.
39. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. – М.: УРСС, 2004. – 240 с.
40. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. – М.: Наука, 1990. – 272с.
41. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Основы теории сложных систем. – М.–Ижевск, РХД, 2007. – 620 с.
42. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). – М.: Наука, 1982. – 336 с.
43. *Майер В.В.* Капли. Струи. Звук. – М.: Физматлит, 2008. – 376 с.
44. *Иванов Б.Н.* Мир физической гидродинамики: От проблем турбулентности до физики космоса. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 240 с.
45. *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
46. *Фалькович Г.* Современная гидродинамика. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2014. – 208 с.

Учебное издание

Пухов Александр Александрович

ЛЕКЦИИ ПО КОЛЕБАНИЯМ И ВОЛНАМ

В двух частях

Часть 2. ВОЛНЫ

Редактор *И. А. Волкова.* Корректор *Н. Е. Кобзева*
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*
Дизайн обложки *Е. А. Казённова*

Подписано в печать 25.03.2019. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 12,9.
Уч.-изд. л. 12,1. Тираж 100 экз. Заказ № 64.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования Московский физико-
технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригиналом-макетом
ООО «Печатный салон ШАНС»
127412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2
Тел. (495) 484-26-55

Пухов Александр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета). Главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной электродинамики РАН. Родился в Москве в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Автор (соавтор) более 100 научных статей и 5 монографий.

ISBN 978-5-7417-0698-5

9 785741 706985

А. А. Пухов ЛЕКЦИИ ПО КОЛЕБАНИЯМ И ВОЛНАМ. Часть 2. ВОЛНЫ