

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е. Н. Аристова, А. И. Лобанов

**ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ
ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
В МФТИ**

ЧАСТЬ II

*Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению «Прикладные математика и физика»*

МОСКВА
МФТИ
2015

УДК 519.7(075)

ББК 21.1я73

A81

Рецензенты:

Кафедра прикладной математики 1 Московского государственного
университета путей сообщения (МИИТ)

Зав. отделом ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
доктор физико-математических наук, профессор *М. П. Галанин*

Аристова, Е. Н., Лобанов, А. И.

A81 Практические занятия по вычислительной математике
в МФТИ : учеб. пособие / Е. Н. Аристова, А. И. Лобанов.
Часть II. – М. : МФТИ, 2015. – 310 с.

ISBN 978-5-7417-0568-1 (Ч. II)

Во второй части учебного пособия собраны задачи, соответствующие материалам второго семестра «Вычислительная математика», изучаемого в Московском физико-техническом институте (государственном университете). Материал включает темы: численное решение жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение линейных разностных уравнений, краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, общая теория устойчивости разностных схем, разностные схемы для решения уравнений в частных производных параболического, гиперболического и эллиптического типов. Все главы делятся на несколько подразделов и содержат краткую теоретическую справку, задачи на доказательство, задачи с решениями, теоретические задачи, практические задачи. К некоторым главам добавлен раздел «Задачи для самостоятельной реализации», где собраны задания, предлагаемые студентам для самостоятельной реализации на компьютере.

Пособие предназначено для студентов и преподавателей вузов, а также специалистов по численному моделированию.

УДК 519.7(075)

ББК 21.1я73

ISBN 978-5-7417-0568-1 (Ч. II)

ISBN 978-5-7417-0496-7

© Аристова Е. Н., Лобанов А. И., 2015

© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)», 2015

Оглавление

Предисловие	8
IX. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ	9
IX.1. Разностное уравнение с постоянными коэффициентами.....	9
IX.2. Общее решение разностного уравнения.....	9
IX.3. Общее решение системы линейных разностных уравнений	11
IX.4. Фундаментальные решения	12
IX.5. Задачи с решениями	13
IX.6. Задачи на доказательство	18
IX.7. Теоретические задачи.....	19
IX.6. Библиографический комментарий.....	22
X. ЖЕСТКИЕ ЗАДАЧИ	23
X.1. Жесткие системы	23
X.2. Одношаговые методы	25
X.2.1. Неявные методы Рунге–Кутты	25
X.2.2. Методы Розенброка	28
X.2.3. Семейство схем Розенброка–Ваннера.....	29
X.2.4. Схема Розенброка с комплексными коэффициентами второго порядка (CROS)	30
X.3. Многошаговые методы.....	31
X.3.1. Явные и неявные схемы Адамса	31
X.3.2. Формулы дифференцирования назад (ФДН-методы)	33
X.3.3. Смешанные многошаговые методы	34
X.3.4. Исследование устойчивости многошаговых методов	34
X.3.5. Порядок аппроксимации смешанных многошаговых методов.....	36
X.4. Многошаговые методы в представлении Нордсика.....	38

X.5. Задачи на доказательства	42
X.6. Задачи с решениями	43
X.7. Теоретические задачи	52
X.8. Практические задачи.....	56
X.9. Задачи для самостоятельной реализации	58
X.10. Библиографическая справка	65
XI. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА	66
XI.1. Введение.....	66
XI.2. Линейные краевые задачи	66
XI.2.1. Постановка краевой задачи для линейной системы ОДУ первого порядка	66
XI.2.2. Пример краевой задачи для уравнения второго порядка	68
XI.2.3. Линейная краевая задача	69
XI.2.4. Жесткие краевые задачи	69
XI.2.5. Метод численного построения общего решения	71
XI.2.6. Метод дифференциальной прогонки	72
XI.2.7. Конечно-разностный метод (метод прогонки).....	73
XI.3. Нелинейная краевая задача для уравнения второго порядка	76
XI.3.1. Метод стрельбы.....	76
XI.3.2. Метод линеаризации (метод Ньютона).....	78
XI.4. Аппроксимация граничных условий.....	79
XI.5. Задача Штурма–Лиувилля	82
XI.6. Задачи на доказательство	85
XI.7. Задачи с решениями.....	86
XI.8. Теоретические задачи	96
XI.9. Практические задачи	99
XI.10. Библиографическая справка	108

XII. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СХОДИМОСТИ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ	109
XII.1. Основные понятия теории разностных схем.....	109
XII.2. Исследование устойчивости	111
XII.2.1. Признак фон Неймана	111
XII.2.2. Энергетический признак устойчивости.....	114
XII.2.3. Сеточный принцип максимума.....	116
XII.2.4. Принцип замороженных коэффициентов.....	117
XII.2.5. Условие Куранта–Фридрихса–Леви	117
XII.2.6. Исследование устойчивости разностных схем непосредственно по определению	119
IX.3. Монотонность двухслойных схем	119
IX.4. Методы построения разностных схем	120
XII.4.1. Метод аппроксимации производных конечными разностями	120
XII.4.2. Метод неопределенных коэффициентов	120
XII.4.3. Интегро-интерполяционный метод и метод конечных объемов.	121
XII.4.4. Интерполяционно-характеристические методы	121
XII.4.5. Метод прямых	123
XII.4.6. Компактные разностные схемы	124
XII.4.7. Бикомпактные разностные схемы Б. В. Рогова.....	125
XII.5. Задачи на доказательство	127
XII.6. Задачи с решениями	128
XII.7. Теоретические задачи	133
XII.8. Библиографический комментарий.....	141
XIII. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.....	142
XIII.1. Введение.....	142
XIII.2. Основные сведения	142

XIII.3. Элементы теории А. А. Самарского устойчивости двухслойных разностных схем.....	143
XIII.4. Переменный коэффициент теплопроводности	146
XIII.4.1. Задачи с переменным коэффициентом теплопроводности.....	146
XIII.4.2. Задачи с разрывами коэффициента теплопроводности	147
XIII.5. Квазилинейное уравнение теплопроводности	147
XIII.6. Многомерное уравнение теплопроводности	149
XIII.7. Задачи на доказательство	150
XIII.8. Задачи с решениями	151
XIII.9. Теоретические задачи.....	156
XIII.10. Практические задачи	160
XIII.11. Задачи для самостоятельного исследования	165
XIII.12. Библиографическая справка	177
XIV. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	178
XIV.1. Введение	178
XIV.2. Линейное уравнение переноса.....	178
XIV.2.1. Характеристики	178
XIV.2.2. Разностные схемы	179
XIV.2.3. Монотонность.....	180
XIV.2.4. Аппроксимационная вязкость	180
XIV.2.5. Гибридные разностные схемы	183
XIV.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами.....	184
XIV.4. Квазилинейное уравнение Хопфа.....	185
XIV.5. Волновое уравнение. Система уравнений акустики	186
XIV.6. Некоторые нелинейные уравнения гиперболического типа	188
XIV.7. Задачи на доказательство	189
XIV.8. Задачи с решениями	191
XIV.9. Теоретические задачи	204

XIV.10. Практические задачи	219
XIV.11. Задачи для самостоятельного исследования.....	231
XIV.12. Библиографическая справка	242
XV. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.....	243
XV.1. Примеры эллиптических уравнений. Постановки краевых задач..	243
XV.2. Простейшая разностная схема «крест». Сеточный принцип максимума. Пример исследования схемы на устойчивость	244
XV.3. Об итерационных методах решения систем сеточных уравнений 248	
XV.3.1. О практической реализации итерационных методов	249
XV.3.2. Метод простых итераций.....	249
XV.3.3. Метод простых итераций с оптимальным параметром	252
XV.3.4. Чебышёвское ускорение метода простых итераций	252
XV.3.5. Трехслойный итерационный метод Чебышёва	255
XV.3.6. Метод верхней релаксации (SOR).....	258
XV.3.7. Метод переменных направлений.....	259
XV.3.8. Попеременно-треугольный итерационный метод (ПТИМ).....	262
XV.4. Сводка результатов по итерационным методам решения сеточных уравнений (на примере задачи Неймана в квадрате).....	264
XV.5. Задачи с решениями.....	265
XV.6. Задачи на доказательство.....	279
XV.7. Теоретические задачи	281
XV.8. Практические задачи.....	283
XV.9. Задачи для самостоятельной реализации	284
XV.10. Библиографический комментарий	291
Ответы к задачам.....	292
Литература.....	305

Предисловие

Дорогие читатели!

Вы держите в руках вторую часть учебного пособия «Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ». В пособии содержится материал, соответствующий части курса, обычно изучаемой в весеннем семестре. Данное издание является продолжением первой части, изданной в 2014 году.

Практическая работа на семинарах – важная часть курса.

Пособие строится следующим образом. В начале каждой темы приводятся справочные материалы, необходимые для решения задач. Некоторые необходимые разделы, традиционно не освещаемые в лекциях, изложены достаточно подробно. Здесь характер изложения соответствует первой части.

В каждой теме приводятся задачи с решениями. Задания для самостоятельной работы делятся на задачи на доказательства, теоретические задачи и практические задачи, предполагающие реализацию на компьютере. В отличие от первой части, во многих главах содержатся разделы «Задачи для самостоятельной реализации». Обычно это несложные по современным меркам нелинейные системы дифференциальных уравнений — ОДУ или в частных производных. В большинстве своем это реальные математические модели, представлявшие в свое время значительный научный интерес. При исследовании таких задач предполагается, что студент сам выбирает численный метод и стратегию реализации, проводит серию численных экспериментов. Задачи данных разделов могут являться темами для курсовых работ.

Многие из приведенных задач являются авторскими. Составители данного пособия выражают благодарность авторам задач — это В. С. Рябенький, А. С. Холодов, В. Б. Пирогов, И. Б. Петров, В. И. Косарев, Т. К. Старожилова, М. В. Мещеряков, Л. А. Чудов, О. А. Пыркова и другие коллеги по кафедре вычислительной математики МФТИ. Авторы учебного пособия считают своим долгом выразить благодарность Е. А. Погореловой, внимательно изучившей рукопись сборника.

Желаем всем читателям успехов в изучении курса!

IX. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ

IX.1. Разностное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим разностное уравнение:

$$ay_n + by_{n+1} = f_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для выделения единственного решения достаточно задать значение y в единственной точке, поэтому такое разностное уравнение имеет *первый порядок*.

Для выделения единственного решения уравнения вида

$$ay_{n-1} + by_n + cy_{n+1} = f_n$$

достаточно задать решение в двух последовательных точках, поэтому такое разностное уравнение называется *уравнением второго порядка*.

IX.2. Общее решение разностного уравнения

По аналогии с дифференциальными уравнениями рассмотрим однородное уравнение

$$a\tilde{y}_n + b\tilde{y}_{n+1} = 0.$$

Обозначим через Y_n решение этого однородного уравнения, удовлетворяющее условию $Y_0 = 1$. Разностная функция $\bar{y}_n = \alpha Y_n$ также будет являться решением однородного уравнения при произвольном выборе α . Каждое решение однозначно определяется своим значением при $n = 0$: $\bar{y}_n = \bar{y}_0 Y_n$ — решение, принимающее значение \bar{y}_0 при $n = 0$. Нетрудно видеть, что $Y_n = (-a/b)^n$.

Пусть $\left\{y_n^*\right\}, \left\{y_n^{**}\right\}$ — два каких-либо решения неоднородного разностного уравнения

$$ay_n + by_{n+1} = f_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда разность между этими двумя сеточными функциями $y_n^* - y_n^{**}$ будет удовлетворять однородному разностному уравнению, поэтому любое решение неоднородного разностного уравнения складывается из решения

неоднородного уравнения и решения однородного уравнения при подходящем выборе коэффициента α :

$$\tilde{y}_n = y_n^* + \alpha Y_n.$$

Аналогично для разностного уравнения второго порядка рассмотрим однородное

$$a\tilde{y}_{n-1} + b\tilde{y}_n + c\tilde{y}_{n+1} = 0.$$

Пусть Y_n, Z_n — частные решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям

$$Y_0 = 1, Y_1 = 0,$$

$$Z_0 = 0, Z_1 = 1.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$\tilde{y}_n = y_n^* + \alpha Y_n + \beta Z_n,$$

где $\{y_n^*\}$ — какое-либо решение неоднородного уравнения.

Однако для уравнения второго порядка искать решение разностных задач с заданными начальными условиями не слишком удобно. По аналогии с уравнением первого порядка будем искать решение однородного уравнения в виде $y_n = q^n$. Поиск нетривиального решения приводит к квадратному уравнению

$$a + bq + cq^2 = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим*.

При поиске его решений возможны три случая:

1. Корни действительны и различны — q_1, q_2 . Тогда общим решением однородного уравнения будет функция

$$\bar{y}_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n,$$

а для Y_n, Z_n имеем

$$Y_0 = 1, Y_1 = 0, \quad Y_n = \frac{q_2}{q_2 - q_1} q_1^n - \frac{q_1}{q_2 - q_1} q_2^n,$$

$$Z_0 = 0, Z_1 = 1, \quad Z_n = -\frac{1}{q_2 - q_1} q_1^n + \frac{1}{q_2 - q_1} q_2^n.$$

2. Кратный действительный корень. Тогда одно частное решение очевидно: $y_n = q_1^n$. Найдем второе подстановкой $y_n = z_n q_1^n$. Вспомним, что

условием кратности корней является $a/c = q_1^2, b/c = -2q_1$. Тогда для z_n после подстановки в характеристическое уравнение получим уравнение

$$cq_1^2 z_{n-1} - 2cq_1^2 z_n + cq_1^2 z_{n+1} = 0.$$

Поиск нетривиального решения приводит к уравнению $z_{n-1} - 2z_n + z_{n+1} = 0$, или $z_{n-1} - z_n = z_n - z_{n+1}$, что определяет произвольную арифметическую прогрессию, например, $z_n = n$. Таким образом,

$$\bar{y}_n = \alpha q_1^n + \beta nq_1^n, \quad Y_n = q_1^n - nq_1^n, \quad Z_n = \frac{1}{q_1} nq_1^n = nq_1^{n-1}.$$

3. Пара комплексно-сопряженных корней.

В этом случае $\bar{y}_n = \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{a}{c}} \right)^n \cos n\varphi + \gamma_2 \left(\sqrt{\frac{a}{c}} \right)^n \sin n\varphi$, $\cos \varphi = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$.

Действительно,

$$q_1 = \sqrt{\frac{a}{c}} \left(-\frac{b}{2\sqrt{ac}} + i \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\sqrt{ac}} \right)^2} \right),$$

$$q_2 = \sqrt{\frac{a}{c}} \left(-\frac{b}{2\sqrt{ac}} - i \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\sqrt{ac}} \right)^2} \right).$$

В обозначениях введенного угла

$$q_1 = \sqrt{a/c} (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$q_2 = \sqrt{a/c} (\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Подстановка $\alpha = \beta = 1/2$ даёт $y_n^{(1)} = \left(\sqrt{a/c} \right)^n \cos n\varphi$, а $\alpha = -\beta = 1/2$

соответственно $y_n^{(2)} = \left(\sqrt{a/c} \right)^n \sin n\varphi$.

IX.3. Общее решение системы линейных разностных уравнений

Рассмотрим однородную систему разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n, \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n. \end{cases}$$

Ее общее решение по аналогии с системами дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} q^n.$$

Подстановка в систему и поиск нетривиального решения приводит к характеристическому уравнению для нахождения q :

$$\begin{vmatrix} a-q & b \\ c & d-q \end{vmatrix} = 0,$$

при этом вектор \mathbf{e} является собственным вектором матрицы, соответствующим данному собственному значению q . Здесь также возможны три случая.

1. Корни действительны и различны.

Тогда общее решение однородной системы представляется в виде

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \end{pmatrix} q_1^n + c_2 \begin{pmatrix} e_1^{(2)} \\ e_2^{(2)} \end{pmatrix} q_2^n.$$

2. Корни кратные. Это самый сложный случай, для которого решение строится в зависимости от наличия двух линейно независимых векторов или одного с присоединенным вектором. Этот случай мы подробно рассматривать не будем.
3. Пара комплексно-сопряженных корней. В этом случае решение системы можно привести к явно действительному виду, аналогичному виду общего решения для системы разностных уравнений второго порядка.

IX.4. Фундаментальные решения

Фундаментальным решением G_k называют решение разностного уравнения

$$a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + \dots + a_n y_{k+n} = f_k$$

с правой частью специального вида

$$\delta_k^n = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n. \end{cases}$$

IX.5. Задачи с решениями

IX.5.1. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$ay_k + by_{k+1} = \delta^0_k.$$

Решение. Обозначим искомое фундаментальное решение через G_k . Для определения G_k имеем три группы уравнений:

$$\begin{cases} aG_k + bG_{k+1} = 0, & k \leq -1, \\ aG_k + bG_{k+1} = 1, & k = 0, \\ aG_k + bG_{k+1} = 0, & k \geq 1. \end{cases}$$

При $k \leq 0$ возьмем $G_k = 0$, тогда все уравнения первой группы выполнены. Из второго уравнения будем иметь $G_1 = 1/b$. Общее решение третьей группы уравнений имеет вид $G_k = c q^k$, где $q = -a/b$. Определив константу c из G_1 , получим частное решение неоднородного уравнения:

$$G_k^1 = \begin{cases} 0, & k \leq 0; \\ -\frac{1}{a} \left(-\frac{a}{b} \right)^k, & k \geq 1. \end{cases}$$

Сложив полученное частное решение с общим решением $\alpha (-a/b)^k$ однородного уравнения, получим фундаментальное решение

$$G_k = \begin{cases} \alpha \left(-\frac{a}{b} \right)^k, & k \leq 0; \\ \left(\alpha - \frac{1}{a} \right) \left(-\frac{a}{b} \right)^k, & k \geq 1. \end{cases}$$

Условие ограниченности выражается в виде зависимости постоянной α от величины $|a/b|$:

$$\alpha = 0 \text{ при } |a/b| < 1,$$

$$\alpha = 1/a \text{ при } |a/b| > 1,$$

$$\alpha - \text{любое} \text{ при } |a/b| = 1.$$

IX.5.2. Пусть $|a/b| \neq 1$, $|f_k| \leq F$, а G_k – ограниченное фундаментальное решение уравнения $ay_k + by_{k+1} = f_k$. Показать, что частным решением этого уравнения является сходящийся ряд

$$y_k^1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{k-n} f_n.$$

Решение. Пусть $|a/b| > 1$. Из решения предыдущей задачи следует, что

$$G_{k-n} = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(-\frac{a}{b} \right)^{k-n}, & k \leq n; \\ 0, & k \geq n+1. \end{cases}$$

Каждый член ряда может быть оценен сверху членом сходящейся геометрической прогрессии

$$\left| \frac{1}{a} \left(-\frac{a}{b} \right)^{k-n} f_n \right| < \frac{F}{|a|} \left| \frac{b}{a} \right|^{n-k}.$$

Поэтому ряд абсолютно сходится. Кроме того, сумма ряда является частным решением заданного уравнения, т.к.

$$a \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{k-n} f_n + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{k+1-n} f_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (aG_{k-n} + bG_{k+1-n}) f_n = f_k.$$

Для этого решения верна оценка

$$|y_k^1| \leq \frac{F}{|a|} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{b}{a} \right|^{n-k} = \frac{F}{|a|-|b|},$$

т.е. полученное частное решение является ограниченным.

IX.5.3. Найти собственные числа и собственные функции оператора второй разностной производной с нулевыми краевыми условиями:

$$-\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = \lambda y_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad y_0 = y_N = 0, \quad h = \frac{l}{N}.$$

Решение. Рассмотрим эту задачу как разностное уравнение второго порядка

$$-(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) = \lambda h^2 y_n, \tag{5.1}$$

$$\text{или } -y_{n+1} + (2 - \lambda h^2) y_n - y_{n-1} = 0.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее данному разностному, есть

$$q^2 - (2 - \lambda h^2) q + 1 = 0.$$

По теореме Виета имеем

$$q_1 = 1/q_2. \tag{5.2}$$

Тогда общее решение разностного уравнения имеет вид

$$\bar{y}_n = \alpha q_l^n + \beta q_l^{-n}.$$

Подстановка в левое граничное условие дает соотношение $\alpha + \beta = 0$, тогда

$$\bar{y}_n = \alpha \left(q_l^n - q_l^{-n} \right). \quad (5.3)$$

Теперь используем правое граничное условие $\alpha \left(q_l^N - q_l^{-N} \right) = 0$.

Если взять $\alpha = 0$, то получим тривиальное решение, которое нас не интересует. Тогда для того, чтобы удовлетворить этому уравнению, должно быть выполнено $q_l^N - q_l^{-N} = 0$ или $q_l^{2N} = 1$. Последнее равенство может быть удовлетворено с учетом (5.2) при $N - 1$ различных значениях параметра q_l :

$$q_l^{2N} = e^{2\pi k i}, \quad q_l = \exp\left(\frac{\pi k i}{N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Значения $k = 0$ и $k = N$ приводят к тривиальному решению, а значения k от $N + 1$ до $2N - 1$ мы не рассматриваем в силу того, что величины q_1 и q_2 являются взаимно обратными.

Подстановка полученного решения в (5.3) позволяет получить решение разностного уравнения

$$\bar{y}_n^{(k)} = \alpha \left(\exp\left(\frac{\pi k n i}{N}\right) - \exp\left(-\frac{\pi k n i}{N}\right) \right) = \alpha 2i \sin \frac{\pi k n}{N}.$$

Выбирая $\alpha = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}}$, получим собственные функции

$$\bar{y}_n^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k n}{N}.$$

Подстановка собственных функций в (5.1) позволяет после ряда тригонометрических преобразований найти спектр разностного оператора второй производной при нулевых краевых условиях для $k = 1, \dots, N - 1$:

$$\lambda_{(k)} = -\frac{y_{n+1}^{(k)} - 2y_n^{(k)} + y_{n-1}^{(k)}}{y_n^{(k)} h^2} =$$

$$= -\frac{1}{h^2} \left(\frac{\sin(\pi k(n+1)/N) - 2\sin(\pi k n/N) + \sin(\pi k(n-1)/N)}{\sin(\pi k n/N)} \right) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2N}.$$

Наименьшее собственное значение будет при $k = 1$. В предположении, что N достаточно велико, получим, что $\lambda_1 \approx \pi^2/l^2$, где $l = Nh$. Наибольшее

собственное значение получается при $k = N - 1$ и равно $\lambda_{N-1} \approx 4/h^2 - \pi^2/l^2$. Последним членом в выражении для максимального собственного значения часто пренебрегают в силу его малости по сравнению с первым, однако в некоторых случаях эту поправку бывает нужно учесть.

IX.5.4. Найти все значения параметра α , при котором все решения разностного уравнения

$$5y_{k+1} - y_k + (\alpha - 4)y_{k-1} - (\alpha - 2)y_{k-2} - y_{k-3} - y_{k-4} = 0$$

будут ограничены при $k \rightarrow \infty$.

Решение. Характеристический многочлен для разностного уравнения в данном случае есть

$$g(q) = 5q^5 - q^4 + (\alpha - 4)q^3 - (\alpha - 2)q^2 - q - 1 = 0.$$

Для ограниченности решения при $k \rightarrow \infty$ необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения были по модулю меньше или равны единице, а на границе единичного круга не было кратных корней. Преобразуем характеристический многочлен:

$$g(q) = (q - 1)(5q^4 + 4q^3 + \alpha q^2 + 2q + 1) = 0. \quad (5.4)$$

Один из корней равен единице. Для нахождения условий, при которых все остальные корни лежат внутри единичного круга, нужно воспользоваться результатами следующей теоремы.

Теорема [Шур, Кон]. Полином $f(z) = a_0z^n + \dots + a_n$ с вещественными коэффициентами имеет все свои корни лежащими внутри единичного круга тогда и только тогда, когда модуль старшего коэффициента в $f(z)$ большие модуля свободного члена $f(z)$, т.е. $|a_0| > |a_n|$, и полином

$$f_1(z) = \frac{a_0 f(z) - a_n f^*(z)}{z} \text{ при } f^*(z) = z^n f(1/z) \equiv a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

имеет все свои корни лежащими внутри единичного круга.

На первый взгляд, конструктивность этой теоремы не очевидна: исходная задача для полинома $f(z)$ сводится к аналогичной задаче для полинома $f_1(z)$. Обратим, однако, внимание на то, что полином

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z} \left(a_0(a_0 z^n + \dots + a_n) - a_n(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) \right) = \\ &= \frac{1}{z} \left((a_0^2 - a_n^2)z^n + (a_0 a_1 - a_{n-1} a_n)z^{n-1} + \dots + (a_0 a_{n-1} - a_1 a_n)z \right) = \\ &= (a_0^2 - a_n^2)z^{n-1} + (a_0 a_1 - a_{n-1} a_n)z^{n-2} + \dots + (a_0 a_{n-1} - a_1 a_n) \end{aligned}$$

имеет степень на единицу меньшую, чем степень f . Таким образом, алгоритм конструктивен в том смысле, что каждый шаг понижает степень многочлена, т.е. сводит исходную задачу к более простой. Применяя к полиному $f_1(z)$ снова критерий Шура–Кона, получим следующее необходимое условие: $|$ старший коэффициент $f_1(z)| > |$ свободный член $f_1(z)|$.

Продолжая эту процедуру рекурсивно, за конечное число шагов мы дойдем до многочлена первой степени.

Теперь применим теорему Шура–Кона для определения действительных значений параметра α , при которых полином $f(q) = 5q^4 + 4q^3 + \alpha q^2 + 2q + 1$ из (5.4) будет иметь все корни внутри единичного круга.

Первое из условий теоремы выполнено: $5 > 1$.

Найдем $f_1(z)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= 5z^4 + 4z^3 + \alpha z^2 + 2z + 1 \quad \boxed{\times 5}, \\ f^*(z) &= z^4 + 2z^3 + \alpha z^2 + 4z + 5 \quad \boxed{\times 1}, \\ f_1(z) &= z^{-1}(24z^3 + 18z^2 + 4\alpha z + 6z). \end{aligned}$$

Для $f_1(z) = 24z^3 + 18z^2 + 4\alpha z + 6$ первое условие теоремы выполнено. Снова применим рекурсивную процедуру понижения степени многочлена:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= 12z^3 + 9z^2 + 2\alpha z + 3 \quad \boxed{\times 12}, \\ f_1^*(z) &= 3z^3 + 2\alpha z^2 + 9z + 12 \quad \boxed{\times 3}, \\ f_2(z) &= z^{-1}(135z^3 + (108 - 6\alpha)z^2 + (24\alpha - 27)z). \end{aligned}$$

Для $f_2(z) = 135z^3 + (108 - 6\alpha)z^2 + (24\alpha - 27)z$ необходимое условие расположения всех его корней внутри единичного круга выполнено при $|8\alpha - 9| < 45$. Продолжим рекурсивную процедуру:

$$\begin{aligned} f_2(z) &= 45z^2 + (36 - 2\alpha)z + (8\alpha - 9) \quad \boxed{\times 45}, \\ f_2^*(z) &= (8\alpha - 9)z^2 + (36 - 2\alpha)z + 45 \quad \boxed{\times (8\alpha - 9)}, \\ f_3(z) &= z^{-1}\left((45^2 - (8\alpha - 9)^2)z^2 + (36 - 2\alpha)(45 - (8\alpha - 9))z\right). \end{aligned}$$

Единственный корень полинома

$$f_3(z) = (45^2 - (8\alpha - 9)^2)z + (36 - 2\alpha)(45 - (8\alpha - 9))$$

удовлетворяет неравенству $|z| < 1$ тогда и только тогда, когда

$$|45 - (8\alpha - 9)| \cdot |45 + (8\alpha - 9)| > |45 - (8\alpha - 9)| \cdot |36 - 2\alpha|.$$

Собираем полученные условия на α в систему неравенств

$$|8\alpha - 9| < 45, \quad 2|9 + 2\alpha| > |18 - \alpha|.$$

Ее решение представляет собой интервал $0 < \alpha < 27/4$. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы все корни $f(z)$ удовлетворяли условию $|z| < 1$. На границах получившегося интервала лежат значения параметра, при которых полином $f(z)$ будет обладать корнями с модулями, равными 1:

при $\alpha = 0$ $f(z) = (z + 1)(5z^3 - z^2 + z + 1)$ обладает корнем $q = -1$,

при $\alpha = 27/4$ $f(z) = (2z^2 + z + 2)(10z^2 + 3z + 2)/4$ обладает парой комплексно-сопряженных корней $q_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4}i$.

В обоих случаях выполнены условия теоремы Шура–Кона, поэтому ответ к задаче $0 \leq \alpha \leq 27/4$.

IX.6. Задачи на доказательство

IX.6.1. Доказать, что любое решение разностного уравнения

$$y_{k+1} - 4y_k + y_{k-1} + 6y_{k-2} = 0$$

однозначно представимо в виде суммы решений уравнений

$$y_{k+1} - 3y_k = 0 \text{ и } y_{k+1} - y_k - 2y_{k-1} = 0.$$

IX.6.2. Показать, что если $-1 < \lambda < 1$, то любое решение разностного уравнения

$$y_{k+1} - 2\lambda y_k + y_{k-1} = 0$$

ограничено при $k \rightarrow \infty$. Если λ — любое комплексное число, не принадлежащее интервалу действительной оси $-1 < \lambda < 1$, то среди решений этого разностного уравнения имеются неограниченные при $k \rightarrow \infty$.

IX.6.3. Пусть $I_k = \int_0^\infty x^k e^{-x} \sin x dx$, $k \geq 0$. Показать, что для целых

неотрицательных k справедливо равенство $I_{4k+3} = 0$.

IX.6.4. Доказать, что для многочленов Чебышева, задаваемых рекуррентным соотношением

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

справедливо представление

$$T_n(x) = 0.5 \left(\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right).$$

IX.7. Теоретические задачи**IX.7.1.** Найти общее решение уравнения

$$2y_n - y_{n+1} = 5^n.$$

IX.7.2. Подобрать частное решение уравнения в случае резонанса

$$2y_n - y_{n+1} = 2^n.$$

IX.7.3. Подобрать частное решение разностного уравнения $2y_n - y_{n+1} = f_n$ в следующих случаях:

1) $f_n = 1,$

2) $f_n = n,$

3) $f_n = n^2,$

4) $f_n = 1 + 2n - n^2.$

IX.7.4. Найти общее решение уравнений

1) $y_{n-1} - 5y_n + 6y_{n+1} = 0.$

2) $y_{n-1} - 5/2 y_n + y_{n+1} = 0.$

3) $9y_{n-1} + 3y_n + y_{n+1} = 0.$

IX.7.5. Найти ограниченное при $n \rightarrow +\infty$ решение уравнения $y_{n-1} - 5/2 y_n + y_{n+1} = 0$, принимающее значение $y_0 = 1$.**IX.7.6.** Выписать тысячный член последовательности Фибоначчи:

$$y_0 = y_1 = 1, \quad y_{n+1} = y_{n-1} + y_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

IX.7.7. Вычислить определитель Δ_k трехдиагональной матрицы размера $k \times k$, у которой все элементы на главной диагонали равны a , элементы диагонали под главной диагональю равны b , элементы диагонали над главной диагональю равны c , остальные элементы нулевые.

Указание. Разложением определителя по первой строке нетрудно получить разностное уравнение

$$\Delta_k = a \Delta_{k-1} - bc \Delta_{k-2}, \quad \Delta_1 = a, \quad \Delta_2 = a^2 - bc.$$

Теперь необходимо решить его.

IX.7.8. Найти какое-либо частное решение неоднородного разностного уравнения

$$y_{n-1} - 5/2 y_n + y_{n+1} = f_n$$

в следующих случаях:

$$1) f_n = 1, \quad 2) f_n = n, \quad 3) f_n = 3^n, \quad 4) f_n = \cos n,$$

IX.7.9. Найти все значения параметра α , при котором все решения разностного уравнения

$$7y_{k+1} - 2y_k - (8\alpha + 5)y_{k-1} + (8\alpha + 3)y_{k-2} - 2y_{k-3} - y_{k-4} = 0$$

будут ограничены при $k \rightarrow \infty$.

IX.7.10. Найти все значения параметра α , при котором все решения разностного уравнения

$$13y_{k+1} + (13 + \alpha)y_k + (\alpha + 7)y_{k-1} + (\alpha + 7)y_{k-2} + (\alpha + 1)y_{k-3} + y_{k-4} = 0$$

будут ограничены при $k \rightarrow \infty$.

IX.7.11. Найти все значения параметра α , при котором все решения разностного уравнения

$$y_{k+1} + (1 + \alpha)y_k + (\alpha + 5)y_{k-1} + (\alpha + 5)y_{k-2} + (\alpha + 9)y_{k-3} + 9y_{k-4} = 0$$

будут ограничены при $k \rightarrow -\infty$.

IX.7.12. Найти общее решение системы разностных уравнений (однородных и неоднородных):

$$1) \begin{cases} x_{n+1} = -2x_n - 4y_n, \\ y_{n+1} = -2x_n + 2y_n. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + n, \\ y_{n+1} = -2x_n + 2n. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n, \\ y_{n+1} = -5x_n + 3y_n. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x_{n+1} = 10x_n - 6y_n - 2^{n+1}, \\ y_{n+1} = 18x_n - 11y_n - 5 \cdot 2^n. \end{cases}$$

IX.7.13. Найти общее решение разностного уравнения

$$1) y_{n-1} - 9y_n + 14y_{n+1} = 39 \cdot 2^n.$$

$$2) -y_{n-1} + 2y_n + 15y_{n+1} = 4 \cdot 3^{-n}.$$

$$3) 3y_{n-1} - 10y_n + 3y_{n+1} = 5 \cdot 2^{-n}.$$

$$4) y_{n-1} - 7y_n + 12y_{n+1} = 5 \cdot 3^{-n}.$$

$$5) -y_{n-1} - 3y_n + 10y_{n+1} = 6n^2 + 4n.$$

IX.7.14. Найти общее решение однородной системы разностных уравнений

$$1) \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 4y_n, \\ y_{n+1} = 7x_n + 4y_n. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n, \\ y_{n+1} = -5x_n + y_n. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + y_n, \\ y_{n+1} = -4x_n - 4y_n. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + 4y_n, \\ y_{n+1} = -3x_n - 2y_n. \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x_{n+1} = -4x_n + 5y_n, \\ y_{n+1} = -2x_n - 2y_n. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n + 2y_n, \\ y_{n+1} = -2x_n + 2y_n. \end{cases}$$

IX.7.15. Найти общее решение неоднородной системы разностных уравнений

$$1) \begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + 3n^2 - 4n - 2, \\ y_{n+1} = 2x_n + 4y_n - 5n^2 + 6n + 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + 3y_n + 5 \cdot 2^n - 6, \\ y_{n+1} = -3x_n + 8y_n + 30 \cdot 2^n - 2. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_{n+1} = 5x_n - 3y_n + 2^{n+1}, \\ y_{n+1} = 6x_n - 4y_n + 2^{n+1}. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_{n+1} = x_n - 3y_n + 7 \cdot 3^n - 15, \\ y_{n+1} = 4x_n - 7y_n + 2 \cdot 3^n - 28. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n + (4 - 7\sqrt{2})\sin(\pi n/4) + \sqrt{2}\cos(\pi n/4), \\ y_{n+1} = x_n + 4y_n - 6\sqrt{2}\sin(\pi n/4) + (2 - 2\sqrt{2})\cos(\pi n/4). \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 2y_n + 4n, \\ y_{n+1} = 6x_n - 5y_n + 12n - 1. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_{n+1} = 5x_n - 2y_n - 8.5\cos(\pi n/3) - (\sqrt{3}/2)\sin(\pi n/3), \\ y_{n+1} = 4x_n - y_n - 7\cos(\pi n/3) + \sqrt{3}\sin(\pi n/3). \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n - 7n^2 - 4n + 3, \\ y_{n+1} = -2x_n - 5y_n + 14n^2 + 6n - 7. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n + 20 \cdot 3^n - 2, \\ y_{n+1} = -5x_n - 6y_n + 26 \cdot 3^n + 22. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 2y_n + 1.5\sin(\pi n/6) - (3 - \sqrt{3})\cos(\pi n/6), \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n 1.5\cos(\pi n/6) + (\sqrt{3}/2 - 2)\sin(\pi n/6). \end{cases}$$

IX.7.16. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$1) \quad y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = \delta_k^0.$$

$$2) \quad y_{k-1} - 5/2 y_k + y_{k+1} = \delta_k^0.$$

$$3) \quad 3y_{k-1} - 13/2 y_k + y_{k+1} = \delta_k^0.$$

4) $y_{k-1} - y_k - 12y_{k+1} = \delta_k^0.$

5) $y_{k-1} - y_k + y_{k+1} = \delta_k^0.$

6) $y_{k-1} - 5y_k + 6y_{k+1} = \delta_k^0.$

7) $1/8 y_{k-1} - 3/4 y_k + y_{k+1} = \delta_k^0.$

IX.7.17. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = \lambda y_k, \quad y_0 = y_N = 0.$$

IX.7.18. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \quad y_0 = y_1, \quad y_N = 0, \quad h = \frac{1}{N}.$$

IX.7.19. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = (2 - \lambda) y_k, \quad y_0 = 0, \quad y_N = y_{N-1}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

IX.7.20. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \quad y_0 = y_1, \quad y_N = y_{N-1}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

IX.7.21. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \quad \frac{2}{h^2}(y_1 - y_0) = -\lambda y_0, \quad y_N = 0, \quad h = \frac{1}{N}.$$

IX.6. Библиографический комментарий

Теоретическое изложение в данном разделе ведется в соответствии с [1]. Часть задач раздела взята из задачника [2], часть — из [3]. Одна из задач взята с ресурса [4].

X. ЖЕСТКИЕ ЗАДАЧИ

X.1. Жесткие системы

Для численного решения системы ОДУ первого порядка

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}) \quad (1.1)$$

помимо формальной корректности постановки дифференциальной задачи требуется еще и хорошая обусловленность: малые изменения начальных данных должны приводить к малым изменениям интегральных кривых.

Как пример плохой обусловленности можно рассмотреть решение уравнения $u' = u - x$, $0 \leq x \leq 100$ для двух начальных условий $u(0) = 1$ и $u(0) = 1,000001$. В первом случае решением будет $u(x) = 1 + x$, $u(100) = 101$, а во втором — $u(x) = 1 + x + 10^{-6} e^x$, $u(100) \approx 2.7 \cdot 10^{37}$ ³⁷. Небольшие изменения начальных данных приводят к очень сильному изменению траектории и большому изменению значения на правой границе, задача корректно поставлена, но плохо обусловлена.

Рассмотренная выше задача не очень показательная — ее решение суть неустойчивая траектория. Однако есть ряд задач, устойчивых и корректно поставленных, но в силу плохой обусловленности не поддающихся решению с помощью «стандартных» явных методов. Такие задачи или системы уравнений принято называть *жесткими*. Определение явления жесткости мы дадим ниже.

Жесткие системы ОДУ возникают в задачах химической кинетики, климатологии, при моделировании ядерных реакторов и во многих других приложениях. Характерной особенностью таких задач является наличие в системе двух (или более) разных по порядку величины масштабов времени, одни процессы протекают быстро, а другие — медленно. Попытка проводить расчет с шагом, определяемым быстрыми процессами, приведет к неоправданно большой трате машинного времени, расчет с шагами, определяемыми медленными процессами, не позволяет разрешить структуру начальных (пограничных) слоев, а в нелинейных задачах, возможно, и какие-то внутренние особенности решения.

Определение 1. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) называется жесткой, если спектр матрицы Якоби этой системы $\{\lambda_i, i=1, I\}$ распадается на две части: мягкую, включающую в себя

собственные числа $|\lambda_i| \leq \lambda$, $i = 1, \dots, I_1$, и жесткую, для которой $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\Lambda$, $|\operatorname{Im} \lambda_i| \leq \Lambda$, $i = I_0 + 1, \dots, I$. При этом отношение $\Lambda/\lambda \ll 1$ называют показателем жесткости системы.

Такая проверка осуществляется в какой-либо точке, принадлежащей траектории системы. Конечно, существуют примеры, когда одна и та же система в разных точках своего фазового пространства может быть и жесткой, и нежесткой.

Для жестких задач необходимо использование методов, позволяющих проводить расчет с шагами, определяемыми медленными, а не быстрыми процессами, при этом, естественно, численные методы должны быть устойчивыми.

Как было показано в теме VIII, именно матрица Якоби для ОДУ (в скалярном случае — производная правой части) df / di играет важнейшую роль в определении устойчивости численного метода. Проверку на устойчивость проводят для модельного уравнения (уравнения Далквиста):

$$u' = \lambda u . \quad (1.2)$$

Здесь λ играет роль какого-либо собственного значения матрицы Якоби исходной системы ОДУ и может принимать комплексные значения.

Пусть численный метод, применяемый к решению уравнения Далквиста, дает выражение решения в следующей точке через известное значение в предыдущей точке:

$$y_{n+1} = R(z) y_n, \quad z = \lambda h. \quad (1.3)$$

$R(z)$ называется разрешающим оператором и одновременно функцией устойчивости.

Определение 2. Численный метод для решения уравнения Далквиста является абсолютно устойчивым (при фиксированном z), если выполнено условие $|R(z)| \leq 1$.

Из этого определения следует, что $|y_{n+1}| \leq |y_n|$. Данное требование является естественным при $\operatorname{Re} z \leq 0$, так как модуль точного решения — невозрастающая функция.

Множество всех точек z , для которых $|R(z)| \leq 1$, называется областью абсолютной устойчивости.

Определение 3 (Далквист, 1963). Если область абсолютной устойчивости $|R(z)| \leq 1$ включает в себя левую полуплоскость комплексной плоскости $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, то метод называется А-устойчивым.

Определение 4. Если область абсолютной устойчивости включает в себя угол с полурасстоянием α , отсчитываемым от отрицательного направления действительной оси в плоскости z , то метод называется $A(\alpha)$ -устойчивым.

Метод является A(0)-устойчивым, если область устойчивости включает в себя бесконечно малый угол, и A₀-устойчивым, если граница области устойчивости пересекается с любым малым, но конечным углом, и область устойчивости захватывает отрицательную часть действительной оси.

Определение 5. Численный метод называется L-устойчивым (или асимптотически устойчивым), если он A-устойчив и выполнено условие $|R(z)| \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$.

Иногда в литературе можно встретить определение асимптотической устойчивости, не включающее в себя A-устойчивости. В этом случае численный метод должен быть, например, жестко устойчивым. Понятие жесткой устойчивости строго не определяется, но подразумевается, что для жесткой устойчивости метод будет абсолютно устойчивым на всем спектре рассматриваемой задачи. Кроме того, существует и альтернативная теория устойчивости численных методов для решения ЖС ОДУ.

Определение 6. Численный метод называется L_p-устойчивым, если он A-устойчив и функция устойчивости затухает как z^{-p} при $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$.

Решения уравнения Далквиста, полученные L-устойчивыми методами, будут затухающими.

Еще одним важным свойством разностных схем является их монотонность. Говорить о монотонности численного метода для решения систем ОДУ можно только в том случае, когда решение дифференциальной задачи также монотонно, т.е. только для действительных отрицательных z и, таким образом, для строго убывающих решений.

Определение 7. Если функция устойчивости положительна на отрицательной части действительной оси (т.е. $R(z) > 0$ при $\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z < 0$), то метод называется монотонным.

X.2. Одношаговые методы

X.2.1. Неявные методы Рунге–Кутты

Для решения жестких задач можно применять *неявные методы Рунге–Кутты*.

Определение 8. s-стадийным неявным методом Рунге–Кутты (НМРК) называется метод вида

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= \mathbf{f}(x_n + c_i h, \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{k}_j) \quad i = 1, 2 \dots s, \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где коэффициенты a_{ij}, b_i, c_i , $1 \leq i \leq s$, определяют конкретный вид метода.

Коэффициенты методов Рунге–Кутты принято записывать в виде таблиц Бутчера с заполненной матрицей коэффициентов

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{b}^T & c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ & \dots & \dots & & & \\ & c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} \quad (2.2)$$

В большинстве методов Рунге–Кутты используют необязательные условия Кутты, которые упрощают вывод условий порядка для методов высокого порядка аппроксимации:

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i. \quad (2.3)$$

Они показывают, что каждая точка, в которой вычисляются коэффициенты k , является приближением первого порядка к решению.

Функция устойчивости неявных методов Рунге–Кутты вычисляется применением метода (2.1) к уравнению Далквиста (1.2), в результате получается

$$R(z) = \frac{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\mathbf{e}\mathbf{b}^T)}{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A})}, \quad (2.4)$$

где вектор $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$. Подробнее смотри задачу с решением ниже.

Условия порядка аппроксимации для неявных методов Рунге–Кутты выводятся с помощью разложения в ряды Тейлора левой и правой частей разностной задачи в предположении, что и правая часть системы дифференциальных уравнений, и решение системы представляют собой бесконечно непрерывно дифференцируемые функции. Подробнее о выводе условий порядка см. [5]. Подстановка проекций точного решения в разностную задачу приводит к следующим результатам:

1) условие порядка аппроксимации не ниже первого:

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1; \quad (2.5)$$

2) условие по крайней мере второго порядка аппроксимации:

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = 1/2; \quad (2.6)$$

3) условий порядка аппроксимации не ниже третьего уже два:

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = 1/3, \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j = 1/6. \quad (2.8)$$

Условия более высоких порядков и способы их получения описаны в [5].

Для контроля точности вычислений и управления длиной шага используют **вложенные методы Рунге–Кутты** порядка $p(q)$. При этом в таблице Бутчера для методов двух различных порядков матрица **A** является общей, различаются коэффициенты окончательной сборки (веса квадратурной формулы) решения **b** и $\hat{\mathbf{b}}$. Расчет значения решения на новом временном слое ведется по формулам порядка p с набором весовых коэффициентов **b**. Формулы порядка аппроксимации q , за которые отвечает набор весовых коэффициентов $\hat{\mathbf{b}}$, в случае $q > p$ используются для оценки точности метода, а если $q < p$ — то для оценки величины последнего учтенного члена в разложении в ряд Тейлора. Вложенные методы представляются таблицами Бутчера вида

c	A
b ^T	
$\hat{\mathbf{b}}$ ^T	

(2.9)

Неявные методы Рунге–Кутты более трудоемки, требуют большего времени для нахождения решения на одном временном шаге и сложнее в реализации по сравнению с явными методами. Однако многие НМРК являются не только А-устойчивыми, но и L-устойчивыми. Это означает, что для сложных нелинейных задач трудоемкость реализации окупается возможностью значительно увеличить шаг численного интегрирования, а иногда принципиальной возможностью численно решить задачу.

При интегрировании системы n ОДУ неявный s -стадийный метод РК с полной матрицей $s \times s$ коэффициентов требует решения ns уравнений (в общем случае нелинейных) на каждом шаге по времени.

Один из способов обойти эту трудность состоит в использовании методов с нижней треугольной матрицей a_{ij} ($a_{ij} = 0$ при $i < j$). Тогда уравнения для определения вспомогательных векторов **K** могут быть решены за s последовательных стадий, причем на каждой стадии нужно решать только систему размерности n . Такие методы в литературе называются ДНРК — диагонально-неявные методы Рунге–Кутты.

При решении систем размерности n с помощью итераций ньютоновского типа на каждой стадии решаются линейные системы с матрицей коэффициентов вида $\mathbf{E} - h a_{ii} \mathbf{J}$ (\mathbf{J} — матрица Якоби). Если все a_{ii} равны между собой, то можно многократно использовать одну такую матрицу, хранимую в виде LU-разложения. Методы, позволяющие использовать этот прием, получили название ОДНРК — однократно диагонально-неявный метод Рунге–Кутты.

Приведем пример таблицы Бутчера для L -устойчивого ОДНРК 4(3):

$1/4$	$1/4$				
$3/4$	$1/2$			$1/4$	
$11/20$	$17/50$		$-1/25$	$1/4$	
$1/2$	$371/1360$	$-137/2720$	$15/544$	$1/4$	
1	$25/24$	$-49/48$	$125/16$	$-85/12$	$1/4$
y_1	$25/24$	$-49/48$	$125/16$	$-85/12$	$1/4$
\hat{y}_1	$59/48$	$-17/96$	$225/32$	$-85/12$	0
err	$-3/16$	$-27/32$	$25/32$	0	$1/4$

X.2.2. Методы Розенброка

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$y' = f(y). \quad (2.10)$$

Рассмотрение методов этого семейства обычно начинают с диагонально-неявного метода Рунге–Кутты (2.1), примененного к уравнению (2.10). Для облегчения дальнейшей записи все вспомогательные величины k сразу умножим на величину шага сетки:

$$k_i = hf(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + a_{ii} k_i), \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{i=1}^s b_i k_i. \quad (2.11)$$

Линеаризация ДНРК (2.11) дает

$$\begin{cases} k_i = hf(g_i) + hf'(g_i)a_{ii}k_i, \\ g_i = y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j. \end{cases} \quad (2.12)$$

Эта линеаризация ДНРК эквивалентна применению одной ньютоновской итерации с нулевыми начальными значениями для всех k на каждой стадии в ДНРК. Вместо продолжения итераций до сходимости можно рассмотреть последние формулы (2.12) как новый класс методов. (2.12) легко обобщается на случай сисем ОДУ.

Существенный вычислительный выигрыш получается при замене матриц Якоби $\mathbf{f}'(\mathbf{g}_i)$ на $\mathbf{J} = \mathbf{f}'(\mathbf{y}_0)$, так что метод требует ее вычисления только один раз (методы Розенброка–Ваннера).

Мы получим больше свободы, введя добавочные линейные комбинации членов $\mathbf{J}\mathbf{k}_j$ в последнюю систему. Правда, как правило, такое расширение поля коэффициентов приводит к некоторому ухудшению свойств устойчивости.

Определение 9. s -стадийный метод Розенброка задается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= h\mathbf{f}(\mathbf{y}_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{k}_j) + h\mathbf{J} \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} \mathbf{k}_j, \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{y}_0 + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $\alpha_{ij}, \gamma_{ij}, b_i$ — определяющие коэффициенты метода и $\mathbf{J} = \mathbf{f}'(\mathbf{y}_0)$.

На каждой стадии метода решается система линейных уравнений с неизвестными \mathbf{k}_i и с матрицей $\mathbf{E} - h\gamma_{ii}\mathbf{J}$. Особый интерес представляют методы, у которых все диагональные коэффициенты в новом наборе γ равны между собой (методы Розенброка–Ваннера), так что требуется лишь одно LU-разложение на каждом шаге по времени для решения систем линейных уравнений.

Для неавтономных задач уравнение $y' = f(x, y)$ может быть преобразовано в автономную систему ОДУ добавлением уравнения $x' = 1$.

Исключая компоненты, соответствующие переменной x , получим

$$k_i = hf(x_0 + \alpha_i h, y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) + \gamma_i h^2 J + h\mathbf{J} \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j, \quad i = 1, 2, \dots, s, \tag{2.14}$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}, \quad \gamma_i = \sum_{j=1}^i \gamma_{ij}, \quad \beta'_i = \sum_{j=1}^{i-1} (\alpha_{ij} + \gamma_{ij}). \tag{2.15}$$

X.2.3. Семейство схем Розенброка–Ваннера

Для автономных задач было построено интересное однопараметрическое *семейство схем Розенброка–Ваннера* порядка 4 с одним определяющим параметром.

На основе этого семейства был создан получивший широкое распространение программный пакет ROS4. Программный продукт доступен на сайте <http://www.unige.ch/~hairer/software.html>.

X.2.4. Схема Розенброка с комплексными коэффициентами второго порядка (CROS)

До сих пор неявно предполагалось, что все коэффициенты схем вещественны. Произвольные правые части систем ОДУ могут не быть аналитическими функциями своих аргументов. Поэтому коэффициенты, входящие под знаки функций, следует выбирать только вещественными. Вне функций стоят коэффициенты γ . Эти коэффициенты входят в линейную алгебраическую систему, которую всегда можно решать и при комплексных коэффициентах. Поскольку численное решение должно быть вещественным, то после решения линейной системы исключаем мнимую часть решения.

Одностадийную схему можно записать в виде

$$(\mathbf{E} - \gamma h \mathbf{J}) \mathbf{w} = \mathbf{f}(x_0 + \alpha_1 h, \mathbf{y}_0), \quad (2.16)$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h \operatorname{Re} \mathbf{w}. \quad (2.17)$$

Для обеспечения порядка аппроксимации не ниже первого уже выбрано $b = 1$.

Для схемы (2.16–2.17) доказаны следующие утверждения.

Схема имеет точность $O(h^2)$, если $\operatorname{Re} \gamma = \alpha_1 = 1/2$.

Эта схема А-устойчива, если $\operatorname{Re} \gamma \geq 1/2$.

Схема L1-устойчива на полуокружности $\gamma = (1 + e^{i\varphi})/2$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, на концах этой окружности, т.е. при $\gamma = (1 \pm i)/2$, схема L2-устойчива и монотонна.

Последний набор свойств является уникальным: одностадийная схема имеет второй порядок аппроксимации, рекордную L2-устойчивость и монотонность. Выбор знака перед мнимой единицей i при этом несуществен, для определенности выберем плюс, тогда схема CROS окончательно примет вид

$$\left(\mathbf{E} - \frac{1+i}{2} h \mathbf{J} \right) \mathbf{w} = \mathbf{f}\left(x_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_0 \right),$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h \operatorname{Re} \mathbf{w}. \quad (2.18)$$

Функция устойчивости метода может быть вычислена:

$$R(z) = 1 / (1 - z + z^2 / 2). \quad (2.19)$$

Это Паде–аппроксимация [0/2] функции e^z второго порядка точности. Схемы Розенброка четвертого порядка (ROS4) обладают заявленной точностью лишь для малых шагов, а в реальных расчетах имеются участки с плохой фактической точностью. В отличие от них схема Розенброка с комплексными коэффициентами всюду показывает хорошую точность. Ее одностадийность — тоже большое преимущество, схема по сложности реализации выгоднее неявной схемы Эйлера (безытерационность, хоть и комплексная арифметика). Однако безытерационность схем Розенброка является одновременно и их недостатком, т.к. для сильно нелинейных задач шаг численного интегрирования должен быть достаточно мал.

X.3. Многошаговые методы

X.3.1. Явные и неявные схемы Адамса

Строго говоря, методы Адамса хорошо использовать для нежестких задач. Однако принципы исследования аппроксимации и устойчивости являются общими для всего класса многошаговых методов, поэтому методы Адамса также помещены в этом разделе.

Уравнение (1) можно записать в эквивалентной форме

$$u_{n+1} = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, u(t)) dt \quad (3.1)$$

и аппроксимировать интеграл квадратурной формулой.

Явные методы строятся следующим образом. Зная несколько приближенных предыдущих значений y_{n-k+1}, \dots, y_n , можно построить интерполяционный многочлен и выразить интеграл через известные значения функции. Строго говоря, для интегрирования используется экстраполяция подынтегральной функции, что допустимо только на интервалах порядка шага сетки. Следствием некорректности задачи экстраполяции являются малые области устойчивости методов этого класса. Расчетные формулы явных методов Адамса следующие:

$$k=1: \quad y_{n+1} = y_n + hf_n,$$

$$k=2: \quad y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \right),$$

$$k=3: \quad y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{23}{12} f_n - \frac{16}{12} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_{n-2} \right),$$

$$k=4: \quad y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{55}{24} f_n - \frac{59}{24} f_{n-1} + \frac{37}{24} f_{n-2} - \frac{9}{24} f_{n-3} \right).$$

В этих формулах k — число последовательных интервалов, по которым ведется интегрирование в (3.1). Область устойчивости явных методов Адамса, и так небольшая при $k = 1$ (единичный круг в левой полуплоскости с центром в точке $z = -1$), становится еще меньше с увеличением k (рис. 1), так что эти методы непригодны для решения жестких задач.

Неявные методы Адамса для построения интерполяционного многочлена используют значение функции в неизвестной точке и соответственно требуют итерационного решения системы нелинейных алгебраических уравнений при нелинейной правой части дифференциальной задачи для нахождения искомого решения:

$$k=0: \quad y_{n+1} = y_n + hf_{n+1},$$

$$k=1: \quad y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{2}f_{n+1} + \frac{1}{2}f_n\right),$$

$$k=2: \quad y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{5}{12}f_{n+1} + \frac{8}{12}f_n - \frac{1}{12}f_{n-1}\right),$$

$$k=3: \quad y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{9}{24}f_{n+1} + \frac{19}{24}f_n - \frac{5}{24}f_{n-1} + \frac{1}{24}f_{n-2}\right).$$

Первые два из них являются А-устойчивыми, с ростом k область устойчивости уменьшается.

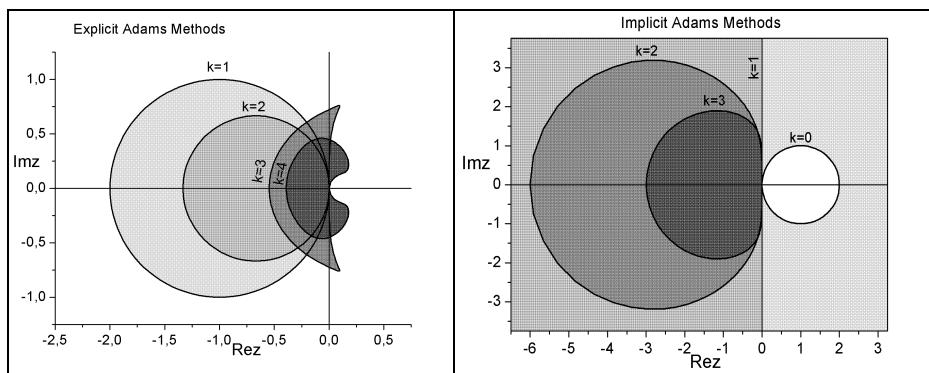


Рис. 1. Области устойчивости явных (слева) и неявных (справа) методов Адамса

X.3.2. Формулы дифференцирования назад (ФДН-методы)

Построим по значениям сеточной функции y_{n-k+1}, \dots, y_n интерполяционный многочлен $q(x)$ и потребуем, чтобы хоть в одной точке его производная совпала с правой частью ДУ: $q'(x_{n+1-r}) = f(x_{n+1-r}, y_{n+1-r})$.

Для $r = 1$ получим *явные* формулы

$$k = 1: \quad y_{n+1} = y_n + hf_n,$$

$$k = 2: \quad \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = f_n,$$

$$k = 3: \quad \frac{1}{3}y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n - y_{n-1} + \frac{1}{6}y_{n-2} = hf_n.$$

При $k = 3$ построенная схема неустойчива, поэтому непригодна для практических расчетов.

Для $r = 0$ получим *неявные* формулы

$$k = 1: \quad y_{n+1} = y_n + hf_{n+1},$$

$$k = 2: \quad \frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf_{n+1},$$

$$k = 3: \quad \frac{11}{6}y_{n+1} - 3y_n + \frac{3}{2}y_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-2} = hf_{n+1},$$

$$k = 4: \quad \frac{25}{12}y_{n+1} - 4y_n + 3y_{n-1} - \frac{4}{3}y_{n-2} + \frac{1}{4}y_{n-3} = hf_{n+1},$$

$$k = 5: \quad \frac{137}{60}y_{n+1} - 5y_n + 5y_{n-1} - \frac{10}{3}y_{n-2} + \frac{5}{4}y_{n-3} - \frac{1}{5}y_{n-4} = hf_{n+1},$$

$$k = 6: \quad \frac{147}{60}y_{n+1} - 6y_n + \frac{15}{2}y_{n-1} - \frac{20}{3}y_{n-2} + \frac{15}{4}y_{n-3} - \frac{6}{5}y_{n-4} + \frac{1}{6}y_{n-5} = hf_{n+1}.$$

Теорема. *k-шаговая ФДН устойчива при $k \leq 6$ и неустойчива при $k \geq 7$.*

X.3.3. Смешанные многошаговые методы

Для нежестких задач можно выбирать более простые методы Адамса (МА), для жестких следует выбрать ФДН из требований устойчивости. При этом для нежестких задач величина $h \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|$ мала, а для жестких — велика.

Тогда можно использовать взвешенное среднее двух методов

$$\{MA^{(k+1)}\} - \gamma^k \|hJ\| \{\Phi DN^{(k)}\} = 0,$$

построенных на числе последовательных интервалов $k + 1$. Множитель с нормой матрицы Якоби (большой или малый) определяет нужный вес.

X.3.4. Исследование устойчивости многошаговых методов

Несколько изменения нумерацию узлов шаблона многошагового метода, общий вид k -шагового метода можно записать как

$$\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y_n = h(\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_0 f_n). \quad (3.2)$$

При $\beta_k = 0$ формула (3.2) определяет явные методы, а при $\beta_k \neq 0$ — неявные.

Для исследования устойчивости введем $z = h\lambda$, и для модельного уравнения Далквиста (1.2) $y' = \lambda y$ получим

$$(\alpha_k - z\beta_k) y_{n+k} + (\alpha_{k-1} - z\beta_{k-1}) y_{n+k-1} + \dots + (\alpha_0 - z\beta_0) y_n = 0. \quad (3.3)$$

Это уравнение решаем методом Лагранжа с помощью подстановки

$$y_j = \zeta^j, \quad (3.4)$$

$$(\alpha_k - z\beta_k) \zeta^k + (\alpha_{k-1} - z\beta_{k-1}) \zeta^{k-1} + \dots + (\alpha_0 - z\beta_0) = 0. \quad (3.5)$$

Разностное уравнение (3.2) имеет устойчивые решения тогда и только тогда, когда все корни уравнения (3.5) по модулю меньше либо равны 1, а кратные корни строго меньше единицы по модулю.

Определение 10. Множество

$$S = \left\{ z \in C : \begin{cases} |\zeta(z)| \leq 1 & \text{для всех корней } \zeta_j(z), \\ |\zeta(z)| < 1 & \text{для кратных корней } \zeta_j(z) \end{cases} \right\} \quad (3.6)$$

называется областью устойчивости, или областью абсолютной устойчивости метода.

Для классов многошаговых методов все видоизменения понятия устойчивости, учитывающие специфику жесткой задачи, вводятся так же, как выше это было сделано для методов Рунге–Кутты.

Уравнение (3.6) можно переписать в виде

$$\rho(\zeta) - z\sigma(\zeta) = 0. \quad (3.7)$$

Исследовать поведение корней (3.7) в зависимости от параметра z — задача весьма непростая. Однако обратное отображение $\zeta \rightarrow z$ легко вычисляется и является однозначным

$$z = \frac{\rho(\zeta)}{\sigma(\zeta)}. \quad (3.8)$$

Внешность единичного круга в ζ -плоскости, будучи отображенной по этой формуле обратно в z -плоскость, дает запрещенные значения z , для которых хотя бы один из корней $\zeta_i(z)$ порождает неустойчивость.

Образ границы единичного круга $\zeta = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, называется кривой локуса корней (геометрическое место граничных значений корней). Ее следует рассматривать как ориентированную кривую, причем область устойчивости, если последняя не пуста, должна лежать слева от этой кривой.

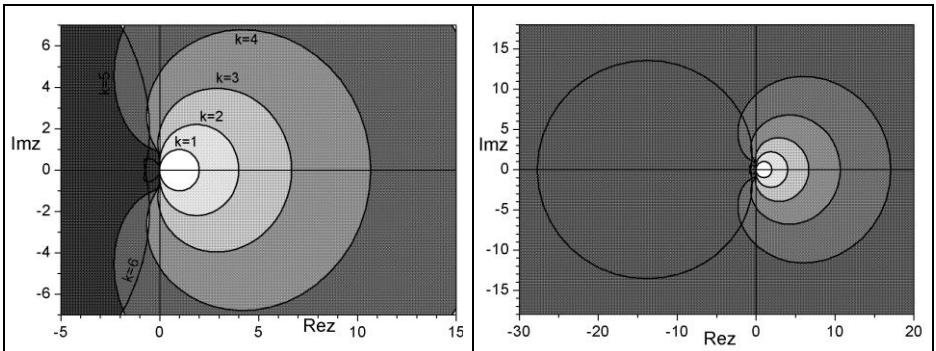


Рис. 2. Области устойчивости неявных методов ФДН. Для $k = 6$ метод ФДН не является A(a)-устойчивым, что видно из кривой локуса корней на правом рисунке

Теорема (второй барьер Далквиста). *Любой A-устойчивый многошаговый метод должен иметь порядок аппроксимации не выше второго. Если порядок равен 2, то константа погрешности метода удовлетворяет неравенству $C \leq -1/12$.*

Правило трапеций — это единственный А-устойчивый метод с константой погрешности $C = -1/12$.

X.3.5. Порядок аппроксимации смешанных многошаговых методов

Мы можем рассмотреть класс методов (3.2) не как комбинацию методов Адамса или ФДН, а как самостоятельный класс, зависящий от выбора коэффициентов $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$. В этом случае перед нами стоит задача найти порядок аппроксимации многошагового метода.

Вообще говоря, в формулах (3.2), (3.3) для удобства введено избыточное количество коэффициентов, без ограничения общности мы можем положить $\alpha_k = 1$:

$$y_{n+k} + \alpha_{k-1}y_{n+k-1} + \dots + \alpha_0y_n = h(\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_0 f_n). \quad (3.9)$$

Будем рассматривать алгебраический порядок точности, т.е. максимальную степень k многочлена $y(x) = P_k(x)$, для которого главная часть ошибки аппроксимации $y(x_{i+1}) - y_{i+1}$ обращается в нуль. Пусть $k = 0$, т.е. $y(x) \equiv 1$. Тогда $\forall i \quad y_i = 1, \quad y'(x) = f(x, y) \equiv 0$, в этом случае (3.9) превращается в равенство

$$1 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j = 0 \cdot h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j,$$

следовательно, для параметров любого метода из семейства (3.9) должно выполняться условие

$$\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j = -1. \quad (3.10)$$

Положим теперь $k = 1, \quad y(x) \equiv x$. Так как в этом случае $y'(x) = f(x, y) \equiv 1$, результат подстановки в (3.9) приведет к условию

$$x_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} x_{n+j} \alpha_j = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j.$$

Учитывая, что $x_{n+k} = (n+k)h$, а также условие (3.10), получим необходимое условие первого порядка аппроксимации (или условие согласованности параметров) семейства методов (3.9):

$$k + \sum_{j=0}^{k-1} j \alpha_j = \sum_{j=0}^k \beta_j \quad \text{или} \quad \sum_{j=0}^{k-1} (j-k) \alpha_j = \sum_{j=0}^k \beta_j. \quad (3.11)$$

Доказано, что эти условия являются и достаточными условиями аппроксимации первого порядка [5].

Для одношаговых методов мы имеем однопараметрическое семейство схем вида

$$y_{n+1} - y_n = h(\beta_1 f_{n+1} + (1-\beta_1) f_n), \quad (3.12)$$

включающее в себя как явный, так и неявный методы Эйлера.

Выбор параметра β_1 , обеспечивающего точность (3.9) для $y(x) \equiv x^2$, $y'(x) = f(x, y) \equiv 2x$, приводит к условию

$$(x+h)^2 - x^2 = h(\beta_1 2(x+h) + (1-\beta_1)2x).$$

Отсюда значение параметра $\beta_1 = 1/2$, т.е. получается хорошо известный метод трапеций.

Рассмотрим теперь всевозможные двухшаговые методы вида (3.9), т.е.

$$y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n). \quad (3.13)$$

Потребуем, чтобы такой метод имел по крайней мере второй порядок точности, т.е. был точен для всех многочленов $y(x) \equiv x^2$ и для всех возможных сдвигов этого многочлена вдоль оси x . В частности, возьмем $y_{n+k} \equiv (kh)^2$, $y'(x_{n+k}) = f_{n+k} \equiv 2(nk)$:

$$4h^2 + \alpha_1 h^2 = h(4h\beta_2 + 2h\beta_1).$$

Записывая для этого случая еще условия согласованности (3.10, 3.11) получим систему трех уравнений относительно пяти неизвестных:

$$\begin{cases} 1 + \alpha_1 + \alpha_0 = 0, \\ 2 + \alpha_1 = \beta_2 + \beta_1 + \beta_0, \\ 4 + \alpha_1 = 4\beta_2 + 2\beta_1. \end{cases}$$

Считая свободными параметрами $\alpha = -\alpha_1$, $\beta = \beta_2$, получим двухпараметрическое семейство методов по крайней мере второго порядка аппроксимации:

$$y_{n+2} - \alpha y_{n+1} - (1-\alpha) y_n = h \left(\beta f_{n+2} + \left(2 - 2\beta - \frac{\alpha}{2} \right) f_{n+1} + \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right) f_n \right). \quad (3.14)$$

Аналогично, потребовав, чтобы метод имел третий порядок аппроксимации, можно получить $\beta = 1/3 + \alpha/12$. Тогда мы приходим к

однопараметрическому семейству схем по крайней мере третьего порядка аппроксимации:

$$y_{n+2} - \alpha y_{n+1} - (1-\alpha) y_n = h \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{12} \right) f_{n+2} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2\alpha}{3} \right) f_{n+1} + \left(\frac{1}{3} - \frac{5\alpha}{12} \right) f_n \right).$$

Распоряжаться единственным оставшимся параметром можно из разных соображений. Например, можно строить явную схему, принадлежащую данному семейству, или повышать порядок точности еще на единицу. Чаще всего этот параметр используют для увеличения области устойчивости схемы.

X.4. Многошаговые методы в представлении Нордсика

Многошаговые методы обладают хорошими свойствами устойчивости при высоком порядке аппроксимации, однако у них есть два момента, усложняющих жизнь вычислителям: это проблема старта и проблема переменного шага интегрирования. Эти недостатки преодолеваются представлением многошаговых методов в виде одношаговых, но в пространстве большей размерности.

Нордсик отметил (1962): «...все методы численного интегрирования эквивалентны нахождению многочлена, аппроксимирующего $y(x)$...». Его идея состоит в том, чтобы представить этот многочлен через производные от нулевого до k -го порядка включительно, т.е. с помощью «вектора Нордсика»:

$$z_n = \left(y_n, hy'_n, \frac{h^2}{2!} y''_n, \dots, \frac{h^k}{k!} y_n^{(k)} \right). \quad (4.1)$$

Величины $y_n^{(j)}$ имеют смысл приближенных значений для производных $y^{(j)}(x_n)$, где $y(x)$ — точное решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y). \quad (4.2)$$

Чтобы определить процедуру интегрирования, необходимо задать правило вычисления z_{n+1} по известным значениям z_n и самому дифференциальному уравнению (4.2). Для $k = 3$ разложение в ряд Тейлора проекции на сетку точного решения дифференциальной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{h^4}{4!} e, \\ hy'_{n+1} &= hy'_n + 2 \frac{h^2}{2!} y''_n + 3 \frac{h^3}{3!} y'''_n + 4 \frac{h^4}{4!} e, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\frac{h^2}{2!} y''_{n+1} = \frac{h^2}{2!} y''_n + 3 \frac{h^3}{3!} y'''_n + 6 \frac{h^4}{4!} e,$$

$$\frac{h^3}{3!} y'_{n+1} = \frac{h^3}{3!} y'''_n + 4 \frac{h^4}{4!} e,$$

где значение e выбирается таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) во второе из соотношений (4.3), получим

$$4 \frac{h^4}{4!} e = h(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f_n^p), \quad (4.5)$$

где

$$h f_n^p = h y'_n + 2 \frac{h^2}{2!} y''_n + 3 \frac{h^3}{3!} y'''_n.$$

Велик соблазн подставить выражение для e (4.5) во все формулы (4.3), что приводит к следующему методу:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{1}{4} h(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f_n^p),$$

$$h y'_{n+1} = h y'_n + 2 \frac{h^2}{2!} y''_n + 3 \frac{h^3}{3!} y'''_n + h(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f_n^p), \quad (4.6)$$

$$\frac{h^2}{2!} y''_{n+1} = \frac{h^2}{2!} y''_n + 3 \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{3}{2} h(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f_n^p),$$

$$\frac{h^3}{3!} y'_{n+1} = \frac{h^3}{3!} y'''_n + h(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f_n^p).$$

Первое уравнение — неявное относительно y_{n+1} , а остальные — явные. Отметим, что если величины $y_n^{(j)}$ достаточно точно аппроксимируют $y^{(j)}(x_n)$, то значение e аппроксимирует $y^{(4)}(x_n)$. С точки зрения точности это свойство выглядит привлекательно. Но, к сожалению, метод (4.6) является неустойчивым. Чтобы показать это, подставим в (4.6) $f(x, y) = 0$. В этом случае метод превращается в линейное преобразование

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{z}_n \quad (4.7)$$

с матрицей

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 2 \ 3).$$

Легко показать, что собственные значения \mathbf{M} равны $1, 0, -2 \pm \sqrt{3}$, откуда следует неустойчивость метода, а потому и его практическая непригодность.

Чтобы преодолеть трудность, Нордсик предложил заменить постоянные $1/4, 1, 3/2, 1$, стоящие в (4.6) перед скобками, на произвольные значения (l_0, l_1, l_2, l_3) , и использовать эту дополнительную степень свободы для достижения устойчивости. Такую модификацию можно записать в компактной форме

$$\mathbf{z}_{n+1} = (\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{z}_n + (l \otimes \mathbf{I}) (h \mathbf{f}(x_{n+1}, y_{n+1}) - (\mathbf{e}_1^T \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{z}_n). \quad (4.8)$$

Здесь \mathbf{P} — треугольная матрица Паскаля, определяемая формулой

$$\mathbf{P}_{ij} = \begin{cases} C_i^j & 0 \leq i \leq j \leq k, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$l = (l_0, l_1, \dots, l_k)$, $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$ (индексы векторов и матриц начинаются с нуля). Через $\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}$ обозначено тензорное произведение Кронекера, т.е. блочная матрица размерности mk (m — размерность системы ОДУ), с $m \times m$ блоками $\mathbf{P}_{ij} \mathbf{I}$.

Для простоты обозначений далее рассмотрим скалярные дифференциальные уравнения, для которых метод (4.8) принимает вид

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{P} \mathbf{z}_n + l(h \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{e}_1^T \mathbf{P} \mathbf{z}_n). \quad (4.8')$$

Конечно, все результаты остаются верными и для систем ОДУ. Условие (4.4), связывающее этот метод с дифференциальным уравнением, фиксирует значение $l_1 = 1$. Анализируя устойчивость метода общего вида (4.8), как описано выше, мы придем к разностному уравнению (4.7) с матрицей

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} - l \mathbf{e}_1^T \mathbf{P}. \quad (4.9)$$

Например, для $k = 3$ эта матрица имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1-l_0 & 1-2l_0 & 1-3l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 & 1-2l_2 & 3-3l_2 \\ 0 & -l_3 & -2l_3 & 1-3l_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что 1 и 0 являются собственными значениями матрицы \mathbf{M} , а ее характеристический многочлен не зависит от l_0 . Нордсик определил l_2, \dots, l_k таким образом, чтобы остальные собственные значения \mathbf{M} были равны нулю. В случае $k = 3$ это выполняется при $l_2 = 3/4$, $l_3 = 1/6$. Коэффициент l_0 можно выбрать из условия обращения в нуль константы погрешности метода. В нашем случае получается $l_0 = 3/8$, а весь метод задается вектором $l = (3/8, 1, 3/4, 1/6)$.

Интересно отметить, что этот метод эквивалентен неявному 3-шаговому методу Адамса. Действительно, исключив с помощью формулы (4.8) с уменьшенными индексами члены $(h^3/3!)y_n'''$ и $(h^2/2!)y_n''$, придем к методу

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}).$$

В представлении Нордсика коэффициенты l_j k -шаговых неявных методов Адамса:

	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
$k = 1$	1/2	1					
$k = 2$	5/12	1	1/2				
$k = 3$	3/8	1	3/4	1/6			
$k = 4$	251/720	1	11/12	1/3	1/24		
$k = 5$	95/288	1	25/24	35/72	5/48	1/120	
$k = 6$	19087/60480	1	137/120	5/8	17/96	1/40	1/720

В представлении Нордсика коэффициенты l_j k -шаговых неявных ФДН-методов:

	$A(a)$ устойч.	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
$k = 1$	90°	1	1					
$k = 2$	90°	2/3	1	1/3				
$k = 3$	86°	6/11	1	6/11	1/11			
$k = 4$	73.35°	12/25	1	7/10	1/5	1/50		
$k = 5$	51.84°	60/137	1	225/274	85/274	15/274	1/274	
$k = 6$	—	20/49	1	58/63	5/12	25/252	1/84	1/1764

Отметим, что многошаговые методы в представлении Нордсика оказываются самостоятельно стартующими. При старте можно положить вектор Нордсика для данной задачи, например, равным $\mathbf{z}_0 = (y_0, 0, \dots, 0)$ или

$$\mathbf{z}_0 = (y_0, hf(x_0, y_0), 0, \dots, 0), \text{ или } \mathbf{z}_0 = \left(y_0, hf(x_0, y_0), \frac{h^2}{2}(f'_x + f'_y f), 0, \dots, 0 \right) \text{ и}$$

т.д., что позволит начать вычисления, но, возможно, приведет к уменьшению

порядка аппроксимации. Таким образом, стараясь как метод меньшего порядка аппроксимации, по завершении разгонного участка метод стремится к максимально возможному для данной формулы порядку.

Для методов с релаксационными колебаниями лучше использовать методы не очень высокого порядка аппроксимации.

X.5. Задачи на доказательства

X.5.1. Непосредственно из определения доказать сходимость численного решения, полученного по разностной схеме, к соответствующей задаче Коши:

- а) $y_{n+1} = y_n(1+3\tau)$, $y_0 = -1$; $u' = 3u$, $u(0) = -1$;
- б) $y_{n+1} = y_n + 2\tau(y_n + y_{n+1})$, $y_0 = 7$; $u' = 4u$, $u(0) = 7$;
- в) $y_{n+1} = y_n / (1+3\tau)$, $y_0 = 5$; $u' = -3u$, $u(0) = 5$;
- г) $y_{n+1} = y_n - \tau(y_n + y_{n+1})$, $y_0 = -2$; $u' = -2u$, $u(0) = -2$;
- д) $y_{n+1} = y_n(1-2\tau)$, $y_0 = 5$; $u' = -2u$, $u(0) = 5$.

X.5.2. Доказать, что многошаговый метод в представлении Нордсика

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{2}{3} h(f_{n+1} - f_n^p),$$

$$hy'_{n+1} = hy'_n + 2 \frac{h^2}{2!} y''_n + h(f_{n+1} - f_n^p),$$

$$\frac{h^2}{2!} y''_{n+1} = \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{1}{3} h(f_{n+1} - f_n^p),$$

где $hf_n^p = hy'_n + 2 \frac{h^2}{2!} y''_n$, является ФДН-методом порядка 2, т.е.

$$\frac{3}{2} y_{n+1} - 2 y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = hf_{n+1}.$$

Указание. Использовать формулы метода в представлении Нордсика со сдвигом индексов.

X.5.3. Доказать, что многошаговый метод в представлении Нордсика

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{3}{8} h(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f_n^p),$$

$$hy'_{n+1} = hy'_n + 2 \frac{h^2}{2!} y''_n + 3 \frac{h^3}{3!} y'''_n + h(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f_n^p),$$

$$\frac{h^2}{2!} y''_{n+1} = \frac{h^2}{2!} y''_n + 3 \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{3}{4} h(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f_n^p),$$

$$\frac{h^3}{3!} y_{n+1} = \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{1}{6} h(f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f_n^p),$$

где $hf_n^p = hy'_n + 2 \frac{h^2}{2!} y''_n + 3 \frac{h^3}{3!} y'''_n$, эквивалентен 3-шаговому неявному методу Адамса: $y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{9}{24} f_{n+1} + \frac{19}{24} f_n - \frac{5}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right)$.

Указание. Использовать формулы метода в представлении Нордсика со сдвигом индексов.

Х.6. Задачи с решениями

Х.6.1. Устойчивость методов Рунге–Кутты

Пусть известно, что таблица Бутчера задает метод Рунге–Кутты порядка аппроксимации p . С его помощью решается линейная система ОДУ

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \quad (5.1)$$

с начальным условием $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$.

Матрица \mathbf{Q} системы такова, что $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ для любого i . При каких шагах τ данный метод Рунге–Кутты будет устойчив?

Решение. Эволюция погрешности решения (5.1) описывается линейной однородной системой уравнений

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}\mathbf{v}. \quad (5.2)$$

Введем новые переменные

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{v}_n + \tau \sum_{k=1}^s a_{kp} \mathbf{f}(t_n + c_k \tau, \mathbf{Y}_k), \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \tau \sum_{p=1}^s b_p \mathbf{f}(t_n + c_p \tau, \mathbf{Y}_p).$$

Запишем метод Рунге–Кутты, примененный к системе (5.2), с использованием новых переменных:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \tau \mathbf{Q} \sum_{p=1}^s b_p \mathbf{Y}_p, \quad \mathbf{Y}_p = \mathbf{v}_n + \tau \mathbf{Q} \sum_{k=1}^s a_{kp} \mathbf{Y}_k.$$

Так как $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ для любого номера собственного числа, то $\det \mathbf{Q} \neq 0$ и существует набор собственных векторов матрицы \mathbf{Q} . Если все собственные векторы действительные, то они образуют базис в R^N . Случай, когда собственные числа и собственные векторы комплексные, принципиально от действительного случая не отличается. Пусть Ω — матрица перехода: $\mathbf{Q} = \Omega \Lambda \Omega^{-1}$, Λ — диагональная матрица из собственных значений \mathbf{Q} .

Делая замену $\mathbf{x} = \Omega^{-1}\mathbf{v}$, приходим к системе N уравнений вида $\dot{x}^i = \lambda_i x^i$. Теперь для i -й компоненты можно переписать предыдущие равенства в виде

$$x_{n+1}^i = x_n^i + \tau \sum_{p=1}^s b_p \lambda_i X_p^i, \quad (5.3)$$

$$X_k^i = x_n^i + \tau \sum_{p=1}^s a_{kp} \lambda_i X_p^i, \quad i=1, \dots, N. \quad (5.4)$$

Совокупность уравнений (5.3) – (5.4) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно новых переменных X_1, \dots, X_k, x_{n+1} следующего вида (индекс i опустим):

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 - za_{11} & -za_{12} & \dots & -za_{1s} & 0 \\ -za_{21} & 1 - za_{22} & \dots & -za_{2s} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -za_{s1} & -za_{s2} & \dots & 1 - za_{ss} & 0 \\ -zb_1 & -zb_2 & \dots & -zb_s & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ \dots \\ X_s \\ X_{n+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x_n \\ x_n \\ \dots \\ \dots \\ x_n \\ x_n \end{array} \right).$$

Нам необходимо выразить x_{n+1} (последнюю компоненту вектора неизвестных) через x_n . Для этого воспользуемся правилом Крамера. Ответ можно записать в следующей краткой форме:

$$x_{n+1} = \frac{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\mathbf{e}\mathbf{b}^T)}{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A})} x_n,$$

где \mathbf{E} — единичная матрица размера $S \times S$, \mathbf{A} — матрица коэффициентов a_{ij} , входящая в таблицу Бутчера, \mathbf{e} — единичный вектор размерности S (столбец), \mathbf{b}^T — строка коэффициентов, входящая в таблицу Бутчера.

Условием устойчивости метода будет

$$\left| \frac{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\mathbf{e}\mathbf{b}^T)}{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A})} \right| < 1,$$

выполненное для всех собственных чисел матрицы \mathbf{Q} . Обычно максимальное ограничение на устойчивость связано с самым большим по абсолютной величине собственным числом.

X.6.2. Исследовать на порядок аппроксимации, А- и L-устойчивость трехстадийные ДНМРК с таблицами Бутчера:

$$a) \frac{\mathbf{c} \mid \mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} = \begin{array}{c|cc} 1/3 & 1/3 \\ \hline 1 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3/4 & 3/4 & -1/2 \end{array}; \quad b) \frac{\mathbf{c} \mid \mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} = \begin{array}{c|cc} 1 & 1 \\ \hline 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -1/12 & 3/4 & 1/3 \\ \hline -1/12 & 3/4 & 1/3 \end{array};$$

$$b) \frac{\mathbf{c} \mid \mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} = \begin{array}{c|ccc} c_1 & a \\ \hline c_2 & a_{21} & a \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & a \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \quad — \text{однократно диагонально-неявный метод}$$

Рунге–Кутты (SDIRK):

$$a_{21} = -\frac{a-1/3}{2(a^2-2a+1/2)}, \quad b_1 = a_3 = 1-a-b, \quad b_2 = a_{32} = -\frac{2(a^2-2a+1/2)^2}{a-1/3},$$

$$b_3 = a, \quad \text{где } a = 1 + \sqrt{2} \cos((\varphi + 4\pi)/3), \quad \varphi = \arccos(2\sqrt{2}/3).$$

Коэффициенты c_1, c_2, c_3 получаются из условий Кутты: $c_i = \sum_j a_{ij}$.

Решение. Проверяя условия (2.5) – (2.8), получим, что все три метода имеют третий порядок аппроксимации.

Найдем функции устойчивости методов. Для случая а) функция устойчивости

$$R(z) = \frac{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\mathbf{e}\mathbf{b}^T)}{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A})} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{pmatrix} 1-z/3+3z/4 & 3z/4 & -z/2 \\ -z/3+3z/4 & 1-2z/3+3z/4 & -z/2 \\ 3z/4 & 3z/4 & 1-z-z/2 \end{pmatrix} \Bigg/ \det \begin{pmatrix} 1-z/3 & 0 & 0 \\ -z/3 & 1-2z/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-z \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1-z-5z^2/18+z^3/6}{(1-z/3)(1-2z/3)(1-z)}.
 \end{aligned}$$

Степени числителя и знаменателя совпадают, $R(-\infty) = 3/4$, то метод а) может быть А-устойчивым. Представление $|R(z)|$ на рис. 3 показывает, что метод действительно является А-устойчивым.

Для случая б) функция устойчивости

$$\begin{aligned}
 R(z) &= \det \begin{pmatrix} 1-z-z/12 & 3z/4 & z/3 \\ -z/12 & 1-z/3+3z/4 & z/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg/ \det \begin{pmatrix} 1-z & 0 & 0 \\ 0 & 1-z/3 & 0 \\ z/12 & -3z/4 & 1-z/3 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{18-12z-7z^2}{2(3-z)^2(1-z)}.
 \end{aligned}$$

Поскольку степень многочлена в числителе на единицу меньше, чем в знаменателе, диагонально-неявный метод РК из пункта б) может быть L1-устойчивым. Представление $|R(z)|$ на рис. 3 показывает, что метод действительно является L1-устойчивым.

Наконец, для случая в)

$$\begin{aligned}
 R(z) &= \frac{\det \begin{pmatrix} 1-az + \left(a-1-\frac{2(a^2-2a+1/2)^2}{a-1/3}\right)z & -\frac{2(a^2-2a+1/2)^2}{a-1/3}z & az \\ \frac{-(a-1/3)z}{2(a^2-2a+1/2)} + \left(a-1-\frac{2(a^2-2a+1/2)^2}{a-1/3}\right)z & 1-az - \frac{2(a^2-2a+1/2)^2}{a-1/3}z & az \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1-az & 0 & 0 \\ \frac{-(a-1/3)z}{2(a^2-2a+1/2)} & 1-az & 0 \\ \left(a-1-\frac{2(a^2-2a+1/2)^2}{a-1/3}\right)z & \frac{2(a^2-2a+1/2)^2}{a-1/3}z & 1-az \end{pmatrix}} = \\
 &= \frac{(1-az)^2 + (1-az)(1-a)z + z^2(a^2-2a+1/2)}{(1-az)^3}.
 \end{aligned}$$

Коэффициент при z^3 в числителе равен нулю, линии уровня $|R(z)|$ показывают, что метод является L1-устойчивым. По своим вычислительным свойствам методы б) и в) очень близки, что подтверждают рис. 3.

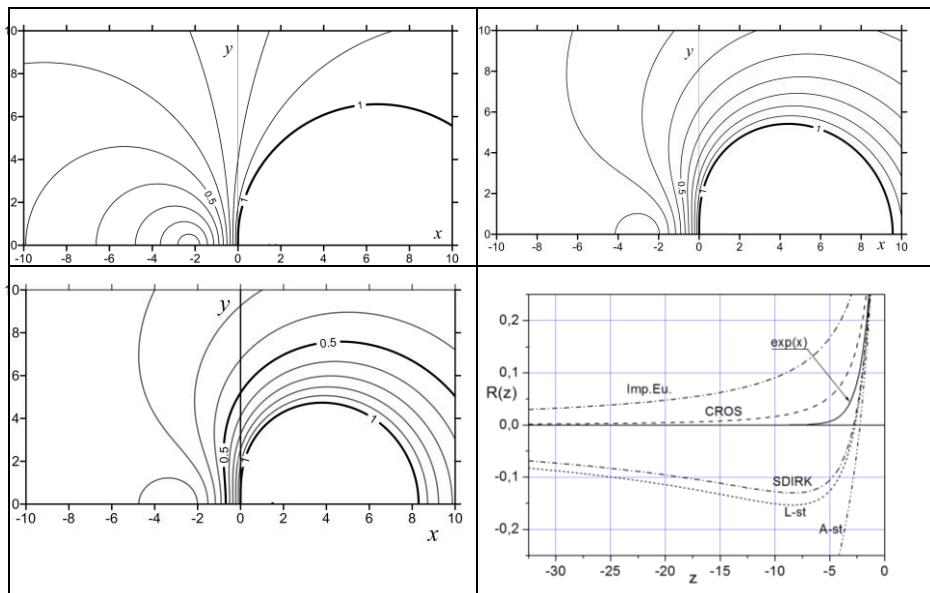


Рис. 3. Поведение абсолютной величины функций устойчивости для методов а), б) и в), а также функция устойчивости методов на отрицательной части действительной оси в сравнении с экспонентой и функцией устойчивости метода CROS

X.6.3. На отрезке $[-1, 1]$ заданы узлы квадратурной формулы Гаусса $-(1/3)^{0.5}$, $(1/3)^{0.5}$, веса соответствующей квадратурной формулы равны 1. Построить однопараметрическое семейство двухстадийных диагонально-неявных методов Рунге–Кутты, удовлетворяющих необязательным условиям Кутты.

1. Исследовать построенное семейство на устойчивость для решения жестких систем ОДУ.
2. Найти асимптотически устойчивые методы для решения жестких систем ОДУ.
3. Найти среди методов для решения жестких систем ОДУ метод с наивысшим порядком аппроксимации.

Решение. Отобразим отрезок $[-1, 1]$ на $[0, 1]$. Тогда сразу получим узлы и веса квадратуры, которые будут являться соответствующими

коэффициентами метода

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & ? \\ \hline \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & ? & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Условия Кутты позволяют ввести единственный параметр в таблицу:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \hline \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \gamma & \gamma \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Проверим условия порядка метода. Условия порядка 1 выполнены:
 $1/2 + 1/2 = 1$. Условия порядка 2 также выполнены:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{1}{2}.$$

Однопараметрическое семейство двухстадийных схем по крайней мере второго порядка аппроксимации построено. Найдем величину γ , обеспечивающую третий порядок аппроксимации.

Условиями третьего порядка аппроксимации являются два:

$$1) \sum_i^2 b_i c_i^2 = \frac{1}{3}, \text{ или тождество}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{1}{3},$$

что не влечет дополнительных условий на величину γ .

$$2) \sum_{i,j=1}^2 b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}, \text{ или}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \gamma \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right] = \frac{1}{6}.$$

Второе условие выполняется при $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Строим функцию устойчивости метода. Она есть

$$\begin{aligned}
 R(z) &= \frac{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\mathbf{e}\mathbf{b}^T)}{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A})} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} 1+z\sqrt{3}/6 & z/2 \\ -(\sqrt{3}/6-\gamma)z & 1-\gamma z + z/2 \end{pmatrix} \Bigg/ \det \begin{pmatrix} 1-(1/2-\sqrt{3}/6)z & 0 \\ -(1/2+\sqrt{3}/6-\gamma)z & 1-\gamma z \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}z^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \gamma \right) + \left(1 + z \frac{\sqrt{3}}{6} \right) (1 - z(\gamma - 1/2))}{\left(1 + z \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} \right) \right) (1 - z\gamma)}.
 \end{aligned}$$

Для асимптотической устойчивости необходимо, чтобы в числителе стоял полином первой степени по z , откуда имеем $\gamma = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

X.6.4. Среди всех явных двухшаговых методов решения уравнения $u' = f(x, u)$ вида

$$y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h (\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

найти метод наибольшего порядка аппроксимации и исследовать его на устойчивость.

Решение. 1 способ. Разложим проекцию точного решения на сетку в ряд Тейлора:

$$u_{n+2} = u_n + u_n' 2h + u_n'' (2h)^2/2 + u_n''' (2h)^3/6 + u_n'''' (2h)^4/24 + \dots ,$$

$$u_{n+1} = u_n + u_n' h + u_n'' (h)^2/2 + u_n''' (h)^3/6 + u_n'''' (h)^4/24 + \dots ,$$

$$u_n = u_n .$$

Для исследования порядка аппроксимации метода используем, что для сеточной проекции точного решения имеет место

$$f_n = u'_n,$$

$$f_{n+1} = u'_{n+1} = u_n' + u_n'' h + u_n''' h^2/2 + \dots$$

Сравним члены одинакового порядка по h слева и справа в разностном уравнении:

$$h^0: u_n(1 + \alpha_1 + \alpha_0) = \beta_1 \cdot 0 + \beta_0 \cdot 0 ,$$

$$h: u'_n(2 + \alpha_1 + \alpha_0 \cdot 0) = u'_n(\beta_1 + \beta_0) ,$$

$$h^2: u''_n(2 + \alpha_1/2 + \alpha_0 \cdot 0) = u''_n(\beta_1 + \beta_0 \cdot 0) ,$$

$$h^3 : u_n'''(4/3 + \alpha_1/6 + \alpha_0 \cdot 0) = u_n'''(\beta_1/2 + \beta_0 \cdot 0).$$

Отсюда получается линейная система уравнений для коэффициентов

$$1 + \alpha_1 + \alpha_0 = 0,$$

$$2 + \alpha_1 = \beta_1 + \beta_0,$$

$$2 + \alpha_1/2 = \beta_1,$$

$$4/3 + \alpha_1/6 = \beta_1/2,$$

решением которой являются значения параметров $\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = 4$, $\beta_0 = 2$, $\alpha_0 = -5$.

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = h (4f_{n+1} + 2f_n).$$

Поскольку полученный метод является методом третьего порядка аппроксимации, по второму барьери Далквиста сразу можно сказать, что метод не является А-устойчивым. Исследуем это уравнение на нестрогую устойчивость. Для этого найдем собственные значения ζ оператора перехода R ($y_{n+1} = \zeta y_n$) в применении к уравнению Далквиста:

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = \lambda h (4f_{n+1} + 2f_n),$$

что дает квадратное уравнение

$$\zeta^2 + 4\zeta - 5 = z(4\zeta + 2) \text{ или } \zeta^2 + 4(1-z)\zeta - 5 - 2z = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\zeta = 2(z-1) \pm \sqrt{4(z-3/4)^2 + 25/4}.$$

Для $z \in R^-$ модуль одного из корней $|\zeta| > |-2 - 5/2|$, следовательно, метод абсолютно (безусловно) неустойчив.

2 способ. Нахождение коэффициентов, обеспечивающих максимальный порядок аппроксимации, можно проводить исходя из алгебраического порядка, а именно, подставим в качестве сеточной проекции точного решения многочлены нулевого, первого, второго и т.д. порядков:

1) $u(x) = P_0(x) = 1$, $f = u' = 0$. Подстановка в разностное уравнение дает

$$1 + \alpha_1 + \alpha_0 = 0;$$

2) $u(x) = P_1(x) = x - x_n$, $f = u' = 1$, сеточная проекция

$y_{n+k} = kh$, $f_{n+k} = 1$. Подстановка в разностное уравнение дает

$$2 + \alpha_1 = \beta_1 + \beta_0;$$

3) $u(x) = P_2(x) = (x - x_n)^2$, $f = u' = x - x_n$, сеточная проекция

$y_{n+k} = (kh)^2$, $f_{n+k} = 2kh$. Подстановка в разностное уравнение дает

$$2 + \alpha_1/2 = \beta_1;$$

4) $u(x) = P_2(x) = (x - x_n)^3$, $f = u' = 3(x - x_n)^2$, сеточная проекция

$y_{n+k} = (kh)^3$, $f_{n+k} = 3(kh)^2$. Подстановка в разностное уравнение дает

$$4/3 + \alpha_1/6 = \beta_1/2,$$

т.е. ту же самую систему уравнений, которая возникала при первом способе решения.

Х.6.5. Пример Р. Э. Винограда

Является ли линейная неавтономная система ОДУ $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ с матрицей

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a + b \cos(2\omega t) & b \sin(2\omega t) + \omega \\ b \sin(2\omega t) - \omega & a - b \cos(2\omega t) \end{bmatrix}$$

где $a = -50$, $b = 61$, $\omega = 60$, жесткой?

Решение. Вычислим собственные значения матрицы коэффициентов задачи. Для этого запишем характеристическое уравнение

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = (a - \lambda)^2 - b^2 \cos^2(2\omega t) - b^2 \sin^2(2\omega t) + \omega^2 = 0.$$

Определитель этой матрицы оказался постоянным. Сами собственные значения легко находятся

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}.$$

Имеются два собственных значения, не зависящих от времени. Если бы сама матрица \mathbf{A} была постоянна, решение системы содержало бы две экспоненты $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$. В данном случае точное решение оказывается другим:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} e^{(a+b)t}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix} e^{(a-b)t}.$$

При заданных числовых значениях параметров задачи получим $\lambda_1 = -39$, $\lambda_2 = -61$. Если бы это была линейная система с постоянной матрицей, то таким λ соответствовали бы два быстро затухающих линейно независимых решения.

В данном случае $(a-b) = -111$, $(a+b) = 11$, одно из решений будет нарастающим, и задача оказывается плохообусловленной.

Этот пример показывает, что классифицировать задачи по спектру при непостоянной матрице, вообще говоря, уже нельзя. До сих пор математически строгого определения явления жесткости не дано. Ясно, что для нелинейных задач эта классификация также будет непригодной. Пример, приведенный выше, был построен Р. Э. Виноградом через пару лет после

появления первой работы о жесткости в 1952 г. [6] и позже минимизирован по количеству входящих коэффициентов Н.Н. Калиткиным.

X.7. Теоретические задачи

X.7.1. Уравнение Ван-дер-Поля записано в виде системы второго порядка:

$$y'_1 = 1000 \left(y_1 - \frac{y_1^3}{3} \right) + y_2,$$

$$y'_2 = -y_1.$$

Определить тип особой точки системы. Найти, в какой части фазового пространства задача является жесткой. Определить показатель жесткости системы.

X.7.2. Получить функции устойчивости всех явных методов Рунге–Кутты с порядком аппроксимации с первого до седьмого с минимальным числом стадий.

X.7.3. Вывести условия порядка для всех двухстадийных НМРК вплоть до четвертого.

X.7.4. Для системы ОДУ

$$\dot{x}_1 = 98x_1 + 198x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -99x_1 - 199x_2$$

численное решение задачи Коши с начальными данными

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$$

получают явными методами Рунге–Кутты 1, 2, 3 и 4 порядков аппроксимации с числом стадий, равным порядку аппроксимации. При каких шагах τ каждый из методов устойчив? Объяснить, почему для методов с числом стадий 1 и 3 и с числом стадий 2 и 4 развитие неустойчивости носит качественно различный характер.

X.7.5. Рассматривается следующее параметрическое семейство однократно диагонально-неявных методов Рунге–Кутты:

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

Найти все значения параметра, при которых

- 1) метод имеет третий порядок аппроксимации;
- 2) метод является асимптотически устойчивым;
- 3) метод является A-устойчивым.

X.7.6. Найти область устойчивости и определить, является ли метод A-устойчивым для следующих методов:

- a) $(y_{n+1} - y_n) / h = 0.36f_{n+1} + 0.64f_n,$
- б) $(y_{n+1} - y_n) / h = 0.6f_{n+1} + 0.4f_n,$
- в) $(y_{n+1} - y_n) / h = 0.3f_{n+1} + 0.7f_n.$

X.7.7. Исследовать на A-устойчивость метод ФДН 2-го порядка аппроксимации:

$$1.5y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}/2 = hf_n.$$

X.7.8. Покажите, что метод

$$y_{n+2} - y_{n+1} = 0.25h(f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n)$$

имеет область устойчивости, ограниченную параболой. Поэтому он A₀-устойчив но не A(0)-устойчивый.

X.7.9. Исследовать на устойчивость неявный метод Милна–Симпсона:

$$3(y_{n+1} - y_{n-1}) = h(f_{n+1} + 2f_n + f_{n-1}).$$

X.7.10. Исследовать на A-устойчивость метод трапеций, совпадающий с методом Адамса 2-го порядка аппроксимации.

X.7.11. Исследовать на A-устойчивость схему с центральной точкой:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n.$$

X.7.12. Исследовать на A(α)-устойчивость схему

$$4 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - 3 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f_n.$$

X.7.13. Для решения жестких систем ОДУ используется неявный метод Рунге–Кутты (НМРК), заданный таблицей Бутчера:

$1/2 - \sqrt{3}/6$...	0	
...	$\sqrt{3}/3$...	
	

а) Дополнить недостающие коэффициенты таблицы на основании условий Кутты и аппроксимации более чем первого порядка для **однократно** диагонально-неявного МРК. Проверить выполнение условий третьего и четвертого порядков аппроксимации.

б) Найти функцию устойчивости. Исследовать метод на А-, L-устойчивость и монотонность.

X.7.14. Дополнить недостающие клетки на основании условия аппроксимации более чем первого порядка и условия Кутты для однократно диагонально-неявного метода Рунге–Кутты:

$1/2 + \sqrt{3}/6$?	?	
?	$-\sqrt{3}/3$	γ	
	$1/2$	$1/2$	

Исследовать на аппроксимацию и $A(0)$ - и L -устойчивость полученный метод.

IX.7.15. Исследовать на аппроксимацию разностную схему решения задачи Коши для ЖС ОДУ:

$$y_{n+1} = y_n + \tau(0.5f_1 + f_2), \quad f_1 = f(x_n, y_n), \quad f_2 = f(x_n + \tau, y_n + 0.5\tau(f_1 + f_2)).$$

При отсутствии аппроксимации внести изменения в разностную схему. Определить тип устойчивости получившегося метода на действительной оси.

X.7.16. Исследовать на аппроксимацию метод решения задачи Коши для ЖС ОДУ:

$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	
$1/2 - \sqrt{2}/2$	$-1/2$	$1 - \sqrt{2}/2$
	$\sqrt{2}$	$1 - \sqrt{2}$

При необходимости внести изменения в таблицу Бутчера для повышения порядка аппроксимации метода. Определить тип устойчивости на действительной оси модифицированной схемы.

X.7.17. Дополнить недостающие клетки на основании условия аппроксимации более чем первого порядка и условия Кутты для диагонально-неявного метода Рунге–Кутты с таблицей Бутчера:

1	1	?
?	?	2/3
1/4	3/4	

Исследовать полученный метод на аппроксимацию $A(0)$ - и L -устойчивость.

X.7.18. Для решения линейной системы ОДУ

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1,01 & 0,98 \\ 1,02 & -0,99 \end{pmatrix}$$

с начальными условиями $\mathbf{y} = (1, 1)^T$ $t \in [0, 10\,000]$ используются:

1) явный метод Рунге–Кутты «правило 3/8». Таблица Бутчера метода есть

0				
1/3	1/3			
2/3	-1/3 1			
1	1 -1 1			
	1/8	3/8	3/8	1/8

2) метод трапеций.

Оценить показатель жесткости системы. Построить функцию устойчивости метода. Оценить максимальную величину шага, при котором метод будет устойчив.

X.7.19. Исследовать свойства монотонности следующих схем:

- а) формулы трапеций,
- б) явной и неявной схем Эйлера,
- в) схемы Розенброка с комплексными коэффициентами.

X.7.20. Пусть для решения жесткой задачи используется экстраполяция Ричардсона при вычислении решения методом Рунге–Кутты (или Розенброка) с порядком аппроксимации p и функцией устойчивости $R(z)$. Т.е. на каждом новом шаге находятся решение задачи y_1 с полным шагом h и решение y_2 , полученное двумя шагами величины $h/2$. Экстраполированное решение на новом шаге находится по формуле $y^* = (2^p y_2 - y_1) / (2^p - 1)$.

Найти общий вид функции устойчивости модифицированного метода.

Вычислить конкретный вид функции устойчивости и определить порядок аппроксимации метода с экстраполяцией Ричардсона при выборе следующих базовых схем:

- а) схемы Эйлера с пересчетом,
- б) метода трапеций,
- в) схемы CROS.

X.8. Практические задачи

X.8.1. Сведя задачу $y'' - 10y' - 11y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ к системе уравнений первого порядка, решить ее численно на интервале $[0, 10]$, воспользовавшись любым методом. Проанализируйте полученные результаты.

X.8.2. Решить дифференциальное уравнение $y'' = 2x + 3y$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 5\sqrt{3} \sin \sqrt{3}/2$ на интервале $[0, 10]$.

X.8.3. Решить систему дифференциальных уравнений на интервале $[0, 10]$

$$u' = 998u + 1998v,$$

$$v' = -999u - 1999v$$

с начальными значениями $u(0) = v(0) = 1$ явным и неявным методами Эйлера, решение сравнить с точным решением.

X.8.4. Решить систему дифференциальных уравнений на интервале $[0, 10]$

$$u' = 998u + 3996v,$$

$$v' = -499.5u - 1999v$$

с начальными значениями $u(0) = v(0) = 1$ явным и неявным методами Эйлера, решение сравнить с точным решением.

X.8.5. Материальная точка массой m закреплена на конце тонкого однородного стержня и может совершать свободные колебания. Выполнить расчет для полного цикла колебаний. Для этого следует воспользоваться следующими уравнениями движения и дополнительными условиями:

$$u'' + (g/L) \sin u = 0, \quad u(0) = \pi/4, \quad u'(0) = 0, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad L = 0.1 \text{ м.}$$

Если угол отклонения мал, то дифференциальное уравнение можно линеаризовать, приняв $\sin u \approx u$. Сравнить полученные результаты с результатами для линейного случая.

X.8.6. Какую дифференциальную задачу аппроксимирует метод

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h(-2y_n + 1),$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0.5 e^{-2h} + 0.5?$$

Проведите численные расчеты данным методом при различных значениях h . Проанализируйте полученные результаты.

X.8.7. Дифференциальное уравнение изгибной линии бруска с постоянным поперечным сечением имеет вид

$$y''/(1+(y')^2)^{3/2} = (P L^2/(E I)) (1/L - x/L^2) \quad (7.1)$$

с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ и $L = 1.0$ м, $P L^2/(E I) = 2.0$. Составить программу расчета изгибной линии бруска $y(x)$ и сравнить полученные результаты:

- если используется точное выражение для кривизны (7.1);
- если используется приближенное выражение для кривизны

$$y'' = (PL^2/(EI)) (1/L - x/L^2).$$

Х.8.8. Выберите значение y_1 таким образом, чтобы соответствующее решение разностного уравнения

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h (-2y_n + 1) \quad (7.2)$$

с $y_0 = 1$ стремилось к нулю при $n \rightarrow \infty$. Составьте программу, реализующую численное решение уравнения (7.2) как с найденным значением y_1 , так и со значением y_1 , задаваемым формулой $y_1 = 0.5 e^{-2h} + 0.5$. Проанализируйте получающиеся результаты.

Х.8.9. Рассмотрим электрический контур с последовательно соединенными элементами: индуктивностью $L = 1$ Гн, сопротивлением $R = 1000$ Ом и емкостью $C = 6.25 \cdot 10^{-6}$ Ф. Начальный заряд в контуре равен нулю, и в момент времени $t = 0$ к нему прикладывается постоянная ЭДС $E = 24$ В. Требуется определить величину тока в момент времени $t = 0.1$. Для этого нужно решить следующее дифференциальное уравнение:

$$d^2Q/dt^2 + R dQ/dt + Q/C = E$$

с начальными условиями $Q(0) = 0$, $dQ(0)/dt = 5$ и вычислить величину тока $i(0.1) = dQ(0.1)/dt$.

Х.8.10. Решить задачу распространения тепла в радиальном течении между параллельными круговыми дисками:

$$d^2q/ds^2 + s^2 dq/ds - 3asq = 0$$

с начальными условиями:

- $q(0) = 1$, $q'(0) = -0.77633$, $a = 0$.
- $q(0) = 1$, $q'(0) = -1.83778$, $a = 5$.

Х.8.11. Система

$$y' = z, \quad z' = -100y - 101z$$

является системой первого порядка, эквивалентной уравнению второго порядка $y'' + 101y + 100y = 0$. Примените метод Эйлера к этой системе с начальными условиями $y(0) = 2$, $z(0) = -2$ и определите экспериментально,

насколько малым должен быть шаг h , чтобы счет был устойчивым. Попытайтесь подтвердить выводы о необходимой величине шага h аналитически.

X.8.12 Решить систему дифференциальных уравнений

$$u' = 998u + 1998v,$$

$$v' = -999u - 1999v$$

с начальными значениями $u(0) = v(0) = 1$ на отрезке интегрирования $[0, 10]$ двумя методами второго порядка аппроксимации:

- методом трапеций,
- схемой CROS.

Проделать вычисления при следующих шагах интегрирования:

$$h = 10^{-4}, 10^{-3}, 2.5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}.$$

Решения сравнить между собой и с точным решением. Объяснить поведение метода трапеций при увеличении шага интегрирования.

X.9. Задачи для самостоятельной реализации

В практических задачах независимой переменной является время. Традиционное обозначение для динамических систем t . В условиях большинства задач решение нужно вычислить на отрезке от 0 до некоторого конечного времени, обозначенного T_k .

Математические модели электротехники

X.9.1. Уравнение Ван-дер-Поля

Типичным примером жесткой задачи малой размерности является уравнение Ван-дер-Поля [5, 7–9]. Это уравнение впервые встретилось в радиотехнике при описании электрических цепей. Его можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -a(y_2(y_1^2 - 1) + y_1) \end{aligned} \tag{8.1}$$

или в виде

$$\begin{aligned} y_1' &= -a\left(\frac{y_1^3}{3} - y_1\right) + y_2, \\ y_2' &= -ay_1 \end{aligned} \tag{8.2}$$

(представление Льенара). Считаем, что параметр a большой. В расчетах рассмотреть два случая: $a = 10^3$ и $a = 10^6$. Для тестов обычно полагают $y_1 = 2$, $y_2 = 0$. Конечное время интегрирования системы, записанной в виде (8.1), $T_k = 20$ [5, 6].

Периодические решения жестких систем ОДУ иногда называют релаксационными автоколебаниями [8, 9].

Дополнительный вопрос: указать преобразование, переводящее представление (8.1) в представление Льенара (8.2).

X.9.2. Система Ван-дер-Поля и траектории-утки

Рассмотрим неавтономную систему уравнений Ван-дер-Поля:

$$y'_1 = a \left(-\left(\frac{y_1^3}{3} - y_1 \right) + y_2 \right),$$

$$y'_2 = -y_1 + A \cos \omega t.$$

Как и в предыдущей задаче, считаем, что $a = 10^3$ и $a = 10^6$, $y_1 = 2$, $y_2 = 0$.

Рассмотреть численно случаи $0 < A < 1$ и $1 < A < \sqrt{1 + \frac{1}{64\omega^2}}$. $T_k = 200$.

О траекториях-утках в системе Ван-дер-Поля см. [9] (строгое математическое исследование) и [10] (популярное изложение).

X.9.3. Уравнение Релея

Уравнение Релея во многом похоже на уравнение Ван-дер-Поля [11]. Рассматривается задача вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu \left(1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Решить задачу, записав уравнение Релея в виде системы ОДУ. Начальные условия: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0,001$, $\mu = 1000$, $T_k = 1000$.

X.9.4. Сингулярно-возмущенная система — модель двухлампового генератора Фрюгауфа

Система более высокой размерности, имеющая решение в виде релаксационного цикла, приведена в [8] (см. также [11]). Она имеет вид

$$\varepsilon \dot{x}_1 = -\alpha(y_1 - y_2) + \phi(x_1) - x_2,$$

$$\varepsilon \dot{x}_2 = \alpha(y_1 - y_2) + \phi(x_2) - x_1,$$

$$\dot{y}_1 = x_1,$$

$$\dot{y}_2 = x_2.$$

Здесь $\alpha > 0$ — константа порядка единицы, функция $\phi(u) = -\operatorname{tg}(\pi u / 2)$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $T_k = 20$, $\varepsilon = 10^{-3}$, 10^{-6} .

Электрофизиология

X.9.5. Уравнение Бонгоффера–Ван-дер-Поля

Рассмотрим еще один пример жесткой задачи малой размерности, имеющей периодическое решение [9, 11]:

$$y'_1 = a\left(-\left(\frac{y_1^3}{3} - y_1\right) + y_2\right),$$

$$y'_2 = -y_1 - by_2 + c.$$

Здесь $a = 10^3$ и $a = 10^6$, $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$. Уравнение описывает протекание тока через клеточную мембрану. Постоянная компонента тока c в безразмерной записи системы такова, что $0 < c < 1$, $b > 0$, $T_k = 20$.

Химия атмосферы

X.9.6. Суточные колебания концентрации озона в атмосфере

Рассмотрим простейшую математическую модель колебаний концентрации озона в атмосфере [12]. Она описывается следующей неавтономной системой ОДУ:

$$\dot{y}_1 = -k_1 y_1 y_2 - k_2 y_1 y_3 + 2k_3(t) y_2 + k_4(t) y_3,$$

$$\dot{y}_2 = 0,$$

$$\dot{y}_3 = k_1 y_1 y_2 - k_2 y_1 y_3 - k_4(t) y_3.$$

Для упрощения системы второе уравнение можно игнорировать. В данной модели уравнения описывают изменение концентрации атомарного кислорода, молекулярного кислорода и озона соответственно. Считается, что изменения концентрации молекулярного кислорода невелики. Начальные значения для задачи таковы:

$$y_1(0) = 10^6 \text{ (см}^{-3}\text{)}, \quad y_2(0) = 3,7 \cdot 10^{16} \text{ (см}^{-3}\text{)}, \quad y_3(0) = 10^{12} \text{ (см}^{-3}\text{)},$$

значения констант скоростей химических реакций:

$$k_1 = 1,63 \cdot 10^{-16}, \quad k_2 = 4,66 \cdot 10^{-16}.$$

Две другие химические реакции зависят от локальной освещенности участка земной поверхности и приближаются следующим выражением:

$$k_i(t) = \begin{cases} \exp(-c_i / \sin \omega t), & \sin \omega t > 0, \\ 0, & \sin \omega t < 0, \end{cases}$$

где $\omega = \pi / 43200 \text{ с}^{-1}$, $c_3 = 22,62$, $c_4 = 7,601$. Значения констант скоростей обращаются в нуль ночью, резко возрастают на рассвете, достигают максимума в полдень и падают до нуля на закате. Конечное время интегрирования $T_k = 172\,800 \text{ с}$ (двое суток).

Данная система является жесткой ночью и умеренно жесткой в светлое время суток.

Химия

Х.9.7. Пример жесткой системы — модель химических реакций Робертсона

Один из первых и самых популярных примеров жесткой системы ОДУ принадлежит Робертсону (1966) и имеет вид, типичный для моделей химической кинетики — в правой части системы стоят полиномы второй степени от концентраций (сравните с «орегонатором», следующая задача).

Система Робертсона имеет вид [5]:

$$\dot{y}_1 = -0,04 y_1 + 10^4 y_2 y_3,$$

$$\dot{y}_2 = 0,04 y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2,$$

$$\dot{y}_3 = 3 \cdot 10^7 y_2^2.$$

Начальные условия для системы таковы: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 0$. Рассматриваются следующие величины отрезка интегрирования: $T_k = 40$ (в работе Робертсона рассматривался именно такой отрезок интегрирования), $T_k = 100, 1000, \dots, 10^{11}$. О свойствах задачи см. [5].

X.9.8. Модель Филда–Нойса «орегонатор»

Простейшая математическая модель периодической химической реакции Белоусова–Жаботинского состоит из трех уравнений:

$$\dot{y}_1 = 77,27(y_2 + y_1(1 - 8,375 \cdot 10^{-6} y_1 - y_2)),$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{77,27}(y_3 - (1 + y_1)y_2),$$

$$\dot{y}_3 = 0,161(y_1 - y_3).$$

На то, что система жесткая, указывают большие различия в константах скоростей реакций — есть процессы быстрые и есть медленные.

Так как переменные системы — концентрации (HBrO_2 , Br^- и Ce(IV) соответственно), то начальные условия для системы следует выбирать положительными, как правило, близкими к 0. Конечное время интегрирования системы $T_k = 800$.

О системе подробнее, например, в [5, 7, 13].

X.9.9. Задача E5

Еще одна модель химической реакции из [5], получившая свое название E5 в более ранних публикациях:

$$\dot{y}_1 = -Ay_1 - By_1y_3,$$

$$\dot{y}_2 = Ay_1 - MCy_2y_3,$$

$$\dot{y}_3 = Ay_1 - By_1y_3 - MCy_2y_3 + Cy_4,$$

$$\dot{y}_4 = By_1y_3 - Cy_4.$$

Начальные условия: $y_1(0) = 1,76 \cdot 10^{-3}$, а все остальные переменные равны 0. Значения коэффициентов модели следующие: $A = 7,89 \cdot 10^{-10}$, $B = 1,1 \cdot 10^7$, $C = 1,13 \cdot 10^3$, $M = 10^6$. Первоначально задача ставилась на отрезке $T_k = 1000$, но впоследствии было обнаружено, что она обладает нетривиальными свойствами вплоть до времени $T_k = 10^{13}$ (подробнее см. [5]).

Обратить особое внимание, что в процессе расчетов приходится иметь дело с очень малыми концентрациями реагентов (малы значения y_2 , y_3 и y_4). Как «подправить» постановку задачи E5?

Биохимия и биология

X.9.10. Простейшая модель гликолиза

Простейшая модель гликолиза описывается уравнениями следующего вида [11]:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= 1 - y_1 y_2, \\ \dot{y}_2 &= \alpha y_2 \left(y_1 - \frac{1 + \beta}{y_2 + \beta} \right),\end{aligned}$$

предложенными Дж. Хиггинсом. В системе $\beta = 10$, $\alpha = 100, 200, 400, 1000$. Начальные условия для системы: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0,001$, $T_k = 50$. Решение этой системы — релаксационные автоколебания (жесткий предельный цикл).

X.9.11. Модель дифференциации растительной ткани

Данный пример из [5] — типичный случай биохимической модели «умеренной» размерности (современные модели, например, фотосинтеза включают сотни уравнений подобного типа). Хотя данная модель является *умеренно жесткой*, тем не менее ее лучше решать с помощью методов, предназначенных для решения ЖС ОДУ:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -1.71y_1 + 0.43y_2 + 8.23y_3 + 0.0007, \\ \dot{y}_2 &= 1.71y_1 - 8.75y_2, \\ \dot{y}_3 &= -10.03y_3 + 0.43y_4 + 0.035y_5, \\ \dot{y}_4 &= 8.32y_2 + 1.71y_3 - 1.12y_4, \\ \dot{y}_5 &= -1.745y_5 + 0.43y_6 + 0.43y_7, \\ \dot{y}_6 &= -280y_6y_8 + 0.69y_4 + 1.71y_5 - 0.43y_6 + 0.69y_7, \\ \dot{y}_7 &= 280y_6y_8 - 1.87y_7, \\ \dot{y}_8 &= -\dot{y}_7.\end{aligned}$$

Начальные значения всех переменных системы равны 0, кроме $y_1(0) = 1$ и $y_8(0) = 0.0057$. Длина отрезка интегрирования $T_k = 421,8122$.

X.9.12. Экогенетическая модель

Рассмотрим пример системы уравнений, которая описывает изменения численности популяций двух видов и эволюцию некоего генетического признака α . Система ОДУ имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - 0,5x - \frac{2}{7\alpha^2}y), \\ \dot{y} &= y(2\alpha - 3,5\alpha^2x - 0,5y), \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon(2 - 7\alpha x).\end{aligned}$$

Параметры задачи таковы: $\varepsilon \leq 0,01$, $0 \leq x_0 \leq 3$, $0 \leq y_0 \leq 15$, $0 < \alpha_0 \ll 1$, $T_k = 1500$. Наличие малого параметра в третьем уравнении системы показывает, что генетический признак меняется медленнее, чем численность популяций. Решение системы — релаксационные колебания.

Задача описана в статье [14].

X.9.13. Экогенетическая модель 2

Еще один пример жесткой системы описан в статье [14]. Более интересный случай — численность двух популяций зависит от взаимодействия между ними и двух медленно меняющихся генетических признаков.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2\alpha_1 - 0,5x - \alpha_1^2\alpha_2^{-2}y), \\ \dot{y} &= y(2\alpha_2 - \alpha_1^{-2}\alpha_2^2x - 0,5y), \\ \dot{\alpha}_1 &= \varepsilon(2 - 2\alpha_1\alpha_2^{-2}y), \\ \dot{\alpha}_2 &= \varepsilon(2 - 2\alpha_1^{-2}\alpha_2x).\end{aligned}$$

Параметры задачи таковы: $\varepsilon \leq 0,01$, $0 \leq x_0 \leq 40$, $0 \leq y_0 \leq 40$, $\alpha_{10} \ll 1$, $\alpha_{20} = 10$, $T_k = 2000$.

Рассмотреть также модификацию предыдущей системы [14]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2\alpha_1 - 0,5x - \alpha_1^3\alpha_2^{-3}y), \\ \dot{y} &= y(2\alpha_2 - \alpha_1^{-3}\alpha_2^3x - 0,5y), \\ \dot{\alpha}_1 &= \varepsilon(2 - 3\alpha_1^2\alpha_2^{-3}y), \\ \dot{\alpha}_2 &= \varepsilon(2 - 3\alpha_1^{-3}\alpha_2^2x).\end{aligned}$$

Параметры задачи: $\varepsilon \leq 0,01$, $0 \leq x_0 \leq 40$, $0 \leq y_0 \leq 40$, $\alpha_{10} \ll 1$, $\alpha_{20} = 10$, $T_k = 2000$.

X.9.14. Математическая модель свертывания крови

В качестве модели рассматривается система уравнений, описывающая динамику свертывания крови [15]. Уравнения системы описывают изменение концентрации двух метаболитов — активатора процесса свертывания (тромбина) и ингибитора (предположительно, протеина С). При полном перемешивании, когда диффузией реагентов можно пренебречь, система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Она имеет следующий вид:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha \cdot \theta^2}{\theta + \theta_0} - \kappa_1 \cdot \theta - \gamma \cdot \theta \cdot \varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \beta \cdot \theta \cdot \left(1 - \frac{\varphi}{C}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2\right) - \kappa_2 \cdot \varphi,$$

где θ , φ — концентрации активатора и ингибитора свертывания соответственно, остальные входящие в систему параметры положительные. Характерные значения размерных постоянных, входящих в систему, приведены в таблице.

Таблица

Характерные значения параметров точечной модели

α , мин $^{-1}$	β , мин $^{-1}$	γ , мин $^{-1} \cdot \text{nM}^{-1}$	θ_0 , нМ	φ_0 , нМ	C , нМ	κ_1 , мин $^{-1}$	κ_2 , мин $^{-1}$
2,0	0,0015	5,0	3,0	0,0525	5,0	0,05	0,35

В широком диапазоне значений параметров выполняется условие $0 < \alpha - \kappa_1 < \gamma C$, при котором у системы существует не более трех стационарных состояний. Единственное устойчивое из них — тривиальное. Оно является устойчивым узлом при любых положительных значениях параметров модели. Два других стационарных состояния — седло и неустойчивый фокус. При изменении параметров математической модели система может быть и нежесткой, и жесткой. В системе наблюдаются практически все бифуркации, возможные для систем порядка 2.

X.10. Библиографическая справка

Основной рекомендованной книгой при углубленном изучении данного раздела, безусловно, является [5]. Математические модели, описываемые жесткими системами ОДУ, встречаются довольно часто. Необходимые ссылки на источники приведены при формулировке соответствующих задач. О многошаговых методах в представлении Нордсика см. также [12]. О методах Рунге–Кутты и теории В-устойчивости см. [16], в кратком изложении — [17]. О методе CROS можно прочитать в [18].

XI. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

XI.1. Введение

Отличие краевой задачи от задачи Коши (задачи с начальными условиями) состоит в том, что решение дифференциального уравнения (или системы ОДУ) должно удовлетворять граничным условиям, связывающим значения искомой функции более чем в одной точке.

Простейшим представителем краевой задачи является двухточечная граничная задача, для которой граничные условия задаются в двух точках, как правило, на концах того интервала, на котором ищется решение. Двухточечные граничные задачи встречаются во всех областях науки и техники. На примерах таких задач в основном рассматривается применение численных методов. Основное изложение будет касаться уравнений и систем второго порядка, о системах более высокого порядка упомянем вкратце.

XI.2. Линейные краевые задачи

XI.2.1. Постановка краевой задачи для линейной системы ОДУ первого порядка

Рассмотрим линейную систему ОДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f, \quad y \in R^n, \quad x \in [0, L] \quad (2.1)$$

с краевыми условиями

$$Ry(0) + Sy(L) = q,$$

где y, f, q — n -мерные векторы, $A(x), R(x), S(x)$ — матрицы размера $n \times n$.

Решение представляется в виде

$$y(x) = y(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k y^k.$$

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

Здесь $\mathbf{y}^k(x)$ есть полная фундаментальная система решений однородной задачи

$$\frac{d\mathbf{y}^k}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}^k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

с начальными данными, например,

$$\mathbf{y}^k(0) = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}^T,$$

где единица стоит на k месте, т.е. в качестве начальных данных используются векторы $\mathbf{y}^k(0) = \mathbf{e}_k$. Важно, чтобы решения однородной задачи составляли систему линейно независимых функций.

Пусть $\bar{\mathbf{y}}(x)$ — частное решение неоднородной системы

$$\frac{d\bar{\mathbf{y}}}{dx} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{f}(x)$$

с нулевыми начальными условиями. Тогда неопределенные коэффициенты α_k находятся с использованием краевых условий $\mathbf{R}\bar{\mathbf{y}}(0) + \mathbf{S}\bar{\mathbf{y}}(L) = \mathbf{q}$ или

$$\mathbf{R} \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{y}^k(0) \right] + \mathbf{S} \bar{\mathbf{y}}(L) + \mathbf{S} \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{y}^k(L) \right] = \mathbf{q}.$$

Последнее равенство представляет собой СЛАУ для определения коэффициентов α_k размера n . Для ее однозначной разрешимости требуется, чтобы матрица системы была бы невырожденной матрицей, то есть

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{y}^1(0) + \mathbf{S}\mathbf{y}^1(L) \\ \dots \\ \mathbf{R}\mathbf{y}^n(0) + \mathbf{S}\mathbf{y}^n(L) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Это условие не обязано всегда выполняться, то есть даже в линейном случае могут встретиться такие постановки задачи, что решение либо не существует, либо не единственное, если матрица СЛАУ для коэффициентов вырожденная.

С точки зрения вычислений также важно, чтобы матрица была хорошо обусловленной. Рассмотрим случай, когда матрица \mathbf{A} имеет n действительных собственных значений, из них:

$\lambda_i, i = 1, \dots, n_1$ больших положительных, т.е. $\min \lambda_i \cdot L >> 1$,

$\lambda_i, i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ больших по абсолютной величине отрицательных, т.е. $\max |\lambda_i| \cdot L << -1$,

$\lambda_i, i = n_1 + n_2 + 1, \dots, n$ умеренных, т.е. $|\lambda_i| \cdot L \approx 1$.

Это означает, что точное решение представляется в виде n_1 сильно затухающих экспонент и n_2 сильно возрастающих экспонент. Для корректности разрешения системы уравнений краевых условий необходимо, чтобы не менее n_1 условий были поставлены слева и не менее n_2 условий справа. Для слабо возрастающих или слабо убывающих компонент краевые условия могут быть поставлены на любом из концов отрезка.

Как и ранее, для приближенного решения задачи введем на отрезке интегрирования расчетную сетку $\{x_n: x_k = kh, k = 0, 1, \dots, N, h = L/N\}$ и за приближенное решение примем сеточную функцию $\{\mathbf{y}^n\}$.

Полную фундаментальную систему решений однородной задачи можно получить, используя какой-либо численный метод решения задач Коши, например, схему второго порядка аппроксимации (метод трапеций):

$$\frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{h} = \mathbf{A}^{n+1/2} \frac{\mathbf{y}^n + \mathbf{y}^{n+1}}{2}, \quad \mathbf{A}^{n+1/2} = \mathbf{A}(x_n + 0.5h),$$

$$\mathbf{y}^{n+1} = (\mathbf{E} - \frac{h}{2} \mathbf{A}^{n+1/2})^{-1} (\mathbf{E} + \frac{h}{2} \mathbf{A}^{n+1/2}) \mathbf{y}^n,$$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{e}_k.$$

Частное решение однородного уравнения получается аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mathbf{y}}_{n+1} - \bar{\mathbf{y}}_n}{h} &= \mathbf{A}_{n+1/2} \frac{\bar{\mathbf{y}}_{n+1} + \bar{\mathbf{y}}_n}{2} + \mathbf{f}_{n+1/2}, \quad \mathbf{f}_{n+1/2} = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\tau}{2}\right), \quad \bar{\mathbf{y}}_0(0) = 0, \text{ или} \\ \bar{\mathbf{y}}^{n+1} &= (\mathbf{E} - \frac{h}{2} \mathbf{A}^{n+1/2})^{-1} \left[(\mathbf{E} + \frac{h}{2} \mathbf{A}^{n+1/2}) \bar{\mathbf{y}}^n + h \mathbf{f}^{n+1/2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, даже при решении линейной системы ОДУ процедура построения решения сводится к решению $n + 1$ задачи Коши для системы ОДУ.

Часто речь о краевых задачах идет на примере одного дифференциального уравнения второго порядка.

XI.2.2. Пример краевой задачи для уравнения второго порядка

Примером двухточечной краевой задачи является задача

$$y'' = f(x, y, y'), \quad 0 < x \leq 1, \tag{2.2}$$

$$y(0) = Y_0, \quad y(1) = Y_1 \tag{2.3}$$

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

с граничными условиями на обоих концах отрезка $0 \leq x \leq 1$, на котором надо найти решение $y = y(x)$. Если функция $f(x, y, y')$ в (2.2) линейна по аргументам y и y' , то мы имеем линейную краевую задачу, иначе — нелинейную краевую задачу.

Для приведенной выше задачи поставлены условия первого рода — на конце отрезка интегрирования заданы значения функции. Для той же задачи могут быть заданы условия второго рода, когда на концах отрезка заданы первые производные

$$\frac{dy(0)}{dx} = Z_0, \quad \frac{dy(1)}{dx} = Z_1 \quad (2.4)$$

или условия третьего рода, связывающие значения функции и производной на концах отрезка:

$$A_1 \frac{dy(0)}{dx} + B_1 y(0) = U_1, \quad A_2 \frac{dy(1)}{dx} + B_2 y(1) = U_2. \quad (2.5)$$

XI.2.3. Линейная краевая задача

Рассмотрим частную, но довольно распространенную краевую задачу для уравнения второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} Ly &= y'' + q(x)y' - p(x)y = f(x), & 0 < x \leq 1, \\ y(0) &= Y_0, \quad y(1) = Y_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Конечно, вместо условий первого рода для этой задачи могут быть заданы и условия второго или третьего рода.

XI.2.4. Жесткие краевые задачи

Рассмотрим общую постановку жесткой линейной краевой задачи, неявно содержащую большой параметр. О жестких системах и задаче Коши для них речь шла выше. Рассмотрим линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad x \in [a, b], \quad (2.7)$$

и краевыми условиями, заданными в виде

$$(\mathbf{d}_i, \mathbf{u}(a)) = \sum_{s=1}^N d_{is} u_s(a) = q_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad k < N,$$

$$(\mathbf{d}_i, \mathbf{u}(b)) = \sum_{s=1}^N d_{is} u_s(b) = q_i, \quad i = k+1, \dots, N, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{q}_i, \mathbf{d}_i, \mathbf{f} \in R^n$, $\|\mathbf{d}_i\| \sim O(1)$, $i = 1, \dots, N$.

Здесь \mathbf{A} — постоянная матрица размером $N \times N$. Все дальнейшие рассуждения будут справедливы и для систем уравнений с переменными коэффициентами и для нелинейных систем. Определители систем линейных алгебраических уравнений, которыми являются краевые условия на обоих концах интервала интегрирования, полагаются отличными от нуля. Это необходимо для корректной постановки задачи.

Определение 1. Краевая задача (2.7), (2.8) является жесткой, если спектр собственных значений матрицы \mathbf{A} можно разделить на три части:

1. Левый жесткий спектр, для которого выполняется $\operatorname{Re} \Lambda_i^1 \leq -\Lambda_0$, $|\operatorname{Im} \Lambda_i^1| < \Lambda_0$, $\Lambda_0(b-a) \gg 1$, $\Lambda_0 \gg 1$, $i = 1, \dots, N_1$.
2. Правый жесткий спектр, для которого $\operatorname{Re} \Lambda_i^2 \geq \Lambda_0$, $|\operatorname{Im} \Lambda_i^2| < \Lambda_0$, $i = N_1 + 1, \dots, N_2$.
3. Мягкий спектр $|\lambda_i| \leq \Lambda_0$, $\Lambda_0(b-a) = O(1)$, $i = N_2 + 1, \dots, N$.

Отношение $\Lambda_0/\lambda_0 \sim 1$ называется параметром, характеризующим жесткость системы.

Общее решение жесткой линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{N_1} \gamma_i^1 e^{\Lambda_i^1 x} \Omega_i^1 + \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \gamma_i^2 e^{\Lambda_i^2 x} \Omega_i^2 + \sum_{i=N_2+1}^N \gamma_i^3 e^{\lambda_i x} \omega_i,$$

где Ω_i^1 , Ω_i^2 , ω_i — собственные векторы матрицы \mathbf{A} , соответствующие трем частям спектра. Понятна качественная структура этого решения, содержащего и левый, и правый пограничные слои. Для решений жестких линейных краевых задач выполнено неравенство $\|\mathbf{u}\| \leq C(\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{q}\|)$, $\|\mathbf{f}\|$ и $\|\mathbf{q}\|$ — нормы правых частей в системе ОДУ и краевых условиях соответственно. Рассматриваем класс вычислительно корректных задач, для которых $C = O(1) \ll \exp(\Lambda_0(b-a))$.

Важно отметить, что не все возможные постановки задач для жесткой системы приводят к вычислительно корректным алгоритмам. Показывается, что необходимыми (и почти достаточными) условиями корректности являются следующие неравенства: $k \geq N_1$, $(N-k) \geq N_2 - N_1$, т.е. число краевых условий на левом конце отрезка интегрирования не должно быть меньше быстро убывающих вправо решений, на правом конце — не меньше числа быстро убывающих решений влево.

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

В противном случае краевая задача оказывается вычислительно некорректной, так как $C = O(\exp(\Lambda_0(b - a)))$.

XI.2.5. Метод численного построения общего решения

Для нахождения решения краевой задачи (2.6) можно численно построить решение дифференциального уравнения, представимое в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x),$$

где $y_0(x)$ — какое-либо решение неоднородного уравнения

$$y'' + q(x)y' - p(x)y = f(x),$$

а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два любые линейно независимые решения однородного уравнения $y'' + q(x)y' - p(x)y = 0$. Постоянные C_1 и C_2 находятся из граничных условий.

Так как решения $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ произвольны, то их можно построить различными способами. Например, можно задать какие-то начальные условия и решить одну задачу Коши для неоднородного и две задачи Коши для однородного уравнений. Эти условия, как рассмотрено при описании общего случая, могут быть такими:

$$y_0(0) = 0, \quad y'_0(0) = 0 \quad \text{— для неоднородного уравнения};$$

$$y_1(0) = 1, \quad y'_1(0) = 0;$$

$$y_2(0) = 0, \quad y'_2(0) = 1 \quad \text{— для однородного уравнения}.$$

Однако при реализации этого способа, например, в случае $p(x) \gg 1$, для рассматриваемого уравнения могут возникнуть трудности, связанные с жесткостью. В этом случае можно попытаться построить $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ с помощью решения одной краевой задачи для неоднородного уравнения и двух краевых задач для однородного уравнения. Краевые условия для этих задач могут быть, например, следующими:

$$y_0(0) = 0, \quad y'_0(1) = 0 \quad \text{— для неоднородного уравнения};$$

$$y_1(0) = 1, \quad y'_1(1) = 0;$$

$$y_2(0) = 0, \quad y'_2(1) = 1 \quad \text{— для однородного уравнения}.$$

Эти задачи могут быть решены, например, методом прогонки. Метод будет описан ниже. Этот подход может оказаться полезным, если краевые условия таковы, что для исходной задачи (2.6) метод прогонки применен быть не может.

XI.2.6. Метод дифференциальной прогонки

Опишем метод дифференциальной прогонки без доказательства его устойчивости. Покажем, что с помощью этого метода можно решить поставленную краевую задачу.

Линейное уравнение второго порядка (2.6) всегда можно представить в виде системы

$$\frac{dy}{dx} = a(x)v + b(x), \quad \frac{dv}{dx} = c(x)y + g(x),$$

обычно такое представление оказывается неединственным.

Будем искать решение в виде

$$y(x) = \alpha(x)v(x) + \beta(x),$$

где α и β — пока неизвестные функции (*прогоночные коэффициенты*), для которых необходимо получить дифференциальные уравнения.

Продифференцируем это соотношение

$$y' = \alpha'v + \alpha v' + \beta'$$

и подставим в него уравнения системы $y' = av + b$, $v = cy + g$. В результате получим, что $av + b = \alpha'v + \alpha(cy + g) + \beta'$. Подставим в полученное равенство прогоночное соотношение $y = \alpha v + \beta$. Тогда

$$av + b = \alpha'v + \alpha^2cv + c\beta + \alpha g + \beta'v + \beta.$$

После приведения подобных членов имеем равенство

$$v(\alpha' + c\alpha^2 - a) + (\beta' + c\beta\alpha + \alpha g - b) = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при v и единице, получим два дифференциальных уравнения для прогоночных коэффициентов:

$$\alpha' + c\alpha^2 - a = 0,$$

$$\beta' + c\beta\alpha + \alpha g - b = 0.$$

Дополним их начальными условиями. Пусть заданы условия первого рода. Левое краевое условие вида $y(0) = U_0$ запишем в виде прогоночного соотношения $y(0) = \alpha(0)v(0) + \beta(0)$, полагая $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = U_0$. Таким образом, получаем начальные данные для двух задач Коши для $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, которые могут быть решены численно.

Теперь разрешим правое краевое условие. На правой границе отрезка интегрирования имеем условие $v(1) = 0$ и прогоночное соотношение при $x = 1$, $y(1) = \alpha(1)v(1) + \beta(1)$, откуда получаем $u(1) = \beta(1)$.

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

Далее воспользуемся уравнением $v' = cv + g$, подставим в него прогоночное соотношение $y = \alpha v + \beta$, получим дифференциальное уравнение для v :

$$\dot{v} = \alpha cv + c\beta + g, \quad v(1) = 0.$$

Интегрируя эту задачу Коши справа налево, попутно определяем $y(x)$:

$$y(x) = \alpha(x)v(x) + \beta(x).$$

Метод дифференциальной прогонки оказывается весьма эффективным при решении линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Очевидно, что все приведенные выше выкладки без изменения переносятся на системы линейных ОДУ произвольной размерности.

XI.2.7. Конечно-разностный метод (метод прогонки)

Рассмотрим линейную задачу

$$\frac{d}{dx} \left[g(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) \frac{dy}{dx} - p(x)y = f, \quad x \in [0, 1],$$

с граничными условиями третьего рода (2.5).

Коэффициент $g(x)$, вообще говоря, может не иметь первой производной. Такая задача возникает, например, в случае расчета установившегося распределения температуры в задаче стационарной теплопроводности с разрывом коэффициента теплопроводности. Чтобы получить разностную схему, пригодную и для этого случая, представим разностную задачу в виде

$$\frac{1}{h} \left(g_{n+1/2} \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - g_{n-1/2} \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \right) + q_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - p_n y_n = f_n,$$

$$n = 1, \dots, N-1,$$

$$g_{n+1/2} = g(x_n + 0.5h), \quad q_n = q(x_n),$$

$$A_1 \frac{y_1 - y_0}{h} + B_1 y_0 = U_1, \quad x = 0,$$

$$A_2 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} + B_2 y_N = U_2, \quad x = 1.$$

Здесь для аппроксимации производных в граничных условиях использована формула первого порядка аппроксимации. О недостатках такого подхода и способах их преодоления смотри ниже.

Для определения значений сеточной функции получается СЛАУ с трехдиагональной матрицей:

$$-b_0 y_0 + c_0 y_1 = d_0,$$

$$a_n y_{n-1} - b_n y_n + c_n y_{n+1} = d_n, \quad n = 1, \dots, N-1,$$

$$a_N y_{N-1} - b_N y_N = d_N,$$

где введены обозначения $a_n = g_{n-1/2} - \frac{q_n h}{2}$, $c_n = g_{n+1/2} + \frac{q_n h}{2}$,

$$b_n = a_n + c_n + h^2 p_n, \quad d_n = h^2 f_n, \quad b_0 = \frac{A_1}{h} - B_1, \quad c_0 = \frac{A_1}{h}, \quad d_0 = U_1,$$

$$b_N = \frac{A_2}{h} + B_2, \quad a_N = -\frac{A_2}{h}, \quad d_N = -U_2.$$

Эта СЛАУ записывается в матричном виде $\mathbf{A}'\mathbf{y} = \mathbf{d}$, где \mathbf{A}' — матрица специального вида (ленточная, трехдиагональная):

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & -b_1 & c_1 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_N \end{pmatrix},$$

\mathbf{y} , \mathbf{d} есть векторы-столбцы искомого сеточного решения и преобразованной правой части:

$$\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_N)^T, \quad \mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_N)^T.$$

Трехдиагональные матрицы часто возникают при численном решении краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных.

Рассмотрим экономичный вариант метода Гаусса, предназначенный для решения подобных систем. Решение ищется в виде прогоночного соотношения

$$y_{n-1} = P_n y_n + O_n, \quad n = 1, \dots, N, \tag{4.1}$$

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

где P_n и Q_n — прогоночные коэффициенты, подлежащие определению. Левое краевое условие также записывается в виде прогоночного соотношения

$$y_0 = \frac{c_0}{b_0} y_1 - \frac{d_0}{b_0},$$

откуда сразу получаем $P_1 = c_0/b_0$, $Q_1 = -d_0/b_0$.

Получим рекуррентные формулы, позволяющие последовательно вычислить все прогоночные коэффициенты.

Подставив равенство $y_{n-1} = P_n y_n + O_n$ в уравнение

$$a_n y_{n-1} - b_n y_n + c_n y_{n+1} = d_n,$$

получим

$$a_n(P_n y_n + Q_n) - b_n y_n + c_n y_{n+1} = d_n,$$

или

$$y_n = \frac{c_n}{b_n - a_n P_n} y_{n+1} + \frac{a_n Q_n - d_n}{b_n - a_n P_n}.$$

Сравнивая эту запись с видом прогоночного соотношения (4.1), мы видим, что для прогоночных коэффициентов должны выполняться равенства

$$P_{n+1} = \frac{c_n}{b_n - a_n P_n}, \quad Q_{n+1} = \frac{a_n Q_n - d_n}{b_n - a_n P_n}.$$

Эти формулы определяют прямой ход прогонки, при этом последовательно слева направо определяются коэффициенты P_n и Q_n .

Из краевого условия на правом конце отрезка интегрирования

$$a_N y_{N-1} - b_N y_N = d_N$$

и прогоночного соотношения

$$y_{N-1} = P_N y_N + Q_N$$

находим

$$Q_{N+1} = \frac{a_N Q_N - d_N}{b_N - a_N P_N} \text{ и } y_N = Q_{N+1}.$$

Далее последовательно справа налево вычисляются остальные неизвестные $y_n \quad n = N-1, \dots, 1$ с использованием прогоночных

соотношений и найденных при прямом ходе прогоночных коэффициентов. Это — обратный ход алгоритма прогонки.

Теорема. Пусть выполнены условия диагонального преобладания $|b_n| \geq |a_n| + |c_n|$ и хотя бы для одной строки матрицы системы имеет место строгое диагональное преобладание ($|b_n| > |a_n| + |c_n|$). Пусть, кроме того, $0 < P_1 < 1$. Тогда алгоритм прогонки устойчив.

XI.3. Нелинейная краевая задача для уравнения второго порядка

Краевая задача

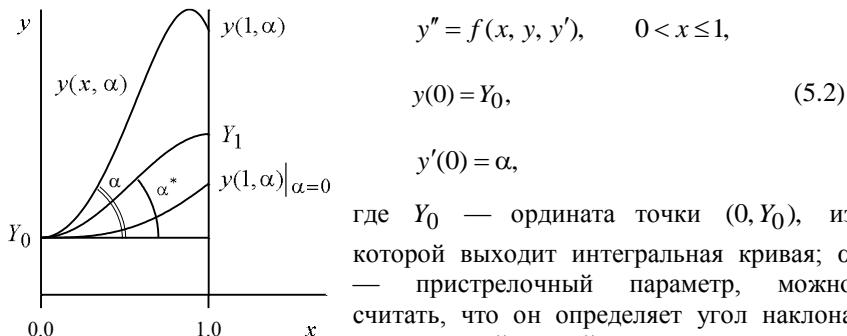
$$y'' = f(x, y, y'), \quad 0 < x \leq 1,$$

$$y(0) = Y_0, \quad y(1) = Y_1, \quad (5.1)$$

является нелинейной краевой задачей, если функция $f(x, y, y')$ нелинейна хотя бы по одному из аргументов y или y' .

XI.3.1. Метод стрельбы

Метод стрельбы для решения краевой задачи (5.1) базируется на том, что имеются удобные способы численного решения задачи Коши, т. е. задачи



где Y_0 — ордината точки $(0, Y_0)$, из которой выходит интегральная кривая; α — пристрелочный параметр, можно считать, что он определяет угол наклона интегральной кривой к оси x при выходе из точки $(0, Y_0)$ (рис. 5.1). При фиксированном Y_0 решение задачи (5.2) будет зависеть от

пристрелочного параметра, $y = y(x, \alpha)$. В дальнейшем будем считать такую зависимость непрерывной, хотя это не всегда так. При $x = 1$ решение $y(x, \alpha)$ зависит только от α :

$$y(x, \alpha)|_{x=1} = y(1, \alpha).$$

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

Задачу (5.2) тогда можно переформулировать следующим образом: найти такой параметр $\alpha = \alpha^*$, при котором интегральная кривая, выходящая из точки $(0, Y_0)$, попадет в точку $(1, Y_1)$:

$$y(1, \alpha) = Y_1. \quad (5.3)$$

Таким образом, дело сводится к решению уравнения (5.3). Это уравнение вида

$$F(\alpha) = 0,$$

где $F(\alpha) = y(1, \alpha) - Y_1$.

Оно отличается от привычных уравнений лишь тем, что функция $F(\alpha)$ задана не аналитическим выражением, а с помощью алгоритма численного решения задачи (5.3).

Для решения уравнения можно использовать любой метод решения нелинейного уравнения, например, метод деления отрезка пополам, метод Ньютона (касательных) и др. Метод Ньютона здесь предпочтительнее (если имеется достаточно хорошее начальное приближение) из-за высокой стоимости вычисления одного значения функции $F(\alpha)$ (нужно решить задачу Коши).

В случае использования для решения уравнения $F(\alpha) = 0$ метода Ньютона очевидная реализация опирается на приемы, связанные с численным дифференцированием. Например, задаем α_0 , а затем последующие α_n вычисляем по рекуррентной формуле:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Производная $F'(\alpha_n)$ может быть вычислена по одной из формул численного дифференцирования, например, первого порядка аппроксимации:

$$F'(\alpha_n) = \frac{F(\alpha_n + h) - F(\alpha_n)}{h}.$$

Заметим, что для численной оценки производной необходимо решать две задачи Коши. Такой способ является самым очевидным, но не самым лучшим из-за некорректности задачи численного дифференцирования. Второй способ заключается в следующем. Заметим, что (5.2) на самом деле задает равенство

$$y''(x, \alpha) = f(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)),$$

тогда после дифференцирования по параметру получаем тождество

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y''(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial y'} f(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{\partial y'}{\partial \alpha}.$$

Пусть решение нашей краевой задачи обладает достаточной гладкостью, и в последнем равенстве можно поменять порядок дифференцирования. Тогда мы получим

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)'' = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \frac{\partial y}{\partial \alpha}.$$

Если рассмотреть новую функцию $u = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$, то она определяется линейным уравнением в вариациях

$$u'' = \frac{\partial f}{\partial y} u + \frac{\partial f}{\partial y'} u', \quad (5.4)$$

которое определено вдоль траектории решения задачи (5.2). Для (5.4) необходимо задать начальные условия, которые получаются дифференцированием по параметру начальных условий для (5.2). Очевидно, они будут иметь вид

$$u(0) = 0, u'(0) = 1.$$

Заметим, что для определения производной нам и теперь необходимо решать две задачи Коши, но вторая задача легче – она линейная, может быть легко решена одновременно с нелинейной задачей Коши. Уравнение в вариациях довольно часто встречается при решении нелинейных задач. Еще одно линейное уравнение в вариациях (но с другой задачей для него) встретится нам в следующем пункте.

XI.3.2. Метод линеаризации (метод Ньютона)

Метод Ньютона сводит решение нелинейной краевой задачи к решению серии линейных краевых задач и состоит в следующем.

Пусть для нелинейной краевой задачи (5.1) известна функция $y_0(x)$, удовлетворяющая граничным условиям и грубо приближенно равная искомому $y(x)$. Положим

$$y(x) = y_0(x) + v(x), \quad (5.5)$$

где $v(x)$ — поправка к нулевому приближению $y_0(x)$. Подставим (5.5) в уравнение (5.1) и линеаризуем задачу:

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

$$y''(x) = y_0''(x) + v''(x),$$

$$f(x, y_0 + v, y'_0 + v') = f(x, y_0, y'_0) +$$

$$+ \frac{\partial f(x, y_0, y'_0)}{\partial y} v + \frac{\partial f(x, y_0, y'_0)}{\partial y'} v' + O(v^2 + |v'|^2).$$

Отбрасывая остаточный член $O(v^2 + |v'|^2)$, получим линейную краевую задачу для нахождения поправки $\tilde{v}(x)$ с нулевыми краевыми условиями:

$$\tilde{v}'' = p(x) \tilde{v}' + g(x) \tilde{v} + r(x),$$

$$\tilde{v}(0) = 0, \quad \tilde{v}(1) = 0, \tag{5.6}$$

где

$$p(x) = \frac{\partial f(x, y_0, y'_0)}{\partial y'}, \quad q(x) = \frac{\partial f(x, y_0, y'_0)}{\partial y},$$

$$r(x) = f(x, y_0, y'_0) - y_0''. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.6) — это уже знакомое нам уравнение в вариациях (5.4), но неоднородное. Роль правой части играет невязка нулевого приближения (5.7).

Решая линейную краевую задачу (5.6) каким-либо численным методом, найдем поправку \tilde{v} и примем за первое приближение

$$y_1(x) \equiv y_0(x) + \tilde{v}.$$

Аналогично, зная приближение $y_1(x)$, положим $y(x) = y_1(x) + \tilde{v}_1$ и найдем следующее приближение. Для него будем решать то же уравнение в вариациях, но с коэффициентами, вычисленными по первому приближению, и с правой частью — невязкой первого приближения. Продолжая процесс до тех пор, пока не будут выполнены неравенства

$$\max |\tilde{v}(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in [0, 1],$$

где ε — требуемая точность, найдем приближенное решение исходной нелинейной задачи.

XI.4. Аппроксимация граничных условий

Выше для простоты рассматривались краевые задачи, для которых задавались граничные условия первого рода, т.е. на границе рассматриваемой области задавалось значение функции. Тогда

трудностей с аппроксимацией граничных условий не возникало. Несколько сложнее обстоит дело при задании граничных условий второго и третьего рода (условий на производные и смешанные условия). В одном из пунктов выше производные в граничных точках были приближены односторонними разностями первого порядка аппроксимации. Это снизило порядок аппроксимации разностной схемы до первого (хотя во внутренних точках области схема имеет естественный для граничных задач второй порядок аппроксимации). Ограничимся описанием способов повышения порядка аппроксимации лишь для граничных условий второго рода. Для условий третьего рода все построения аналогичны, только несколько более громоздкие.

Рассмотрим вначале линейную задачу

$$\frac{d}{dx} \left[g(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) \frac{dy}{dx} - p(x)y = f,$$

$$y'(0) = a, \quad y'(1) = b,$$

и соответствующую ей разностную задачу

$$\frac{1}{h} \left(g_{n+1/2} \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - g_{n-1/2} \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \right) + q_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - p_n y_n = f_n,$$

заменив при этом производные в граничных условиях по формулам одностороннего дифференцирования первого порядка аппроксимации:

$$y_1 - y_0 = ha, \quad y_N - y_{N-1} = hb.$$

В результате получили разностную схему для аппроксимации дифференциальной задачи. Естественно было бы повысить порядок схемы до второго во всех точках, включая граничные.

Наиболее распространены три способа.

1. Использование формул одностороннего дифференцирования более высокого порядка аппроксимации. Подход очевиден, однако имеет недостаток — матрица системы уравнений для определения решения будет уже не трехдиагональной, следовательно, алгоритм прогонки неприменим. Можно избавиться от этого недостатка, проведя перед численным решением системы соответствующие алгебраические преобразования. Они в случае применения конкретной формулы численного дифференцирования для аппроксимации граничных условий свои, но достаточно очевидны.

2. Использование фиктивной ячейки (фиктивного узла). Рассмотрим расширение сеточной области. Введем в рассмотрение узлы с индексами 0 и $N + 1$, находящиеся формально за пределами рассматриваемой области. Пусть в них тоже определено значение сеточной функции. Тогда узел с индексом 0 выступает как внутренний узел, так как дифференциальное уравнение обязано выполняться во всех точках, включая точки, сколь угодно близкие к границе, то в нем может быть записана схема

$$\frac{1}{h} \left(g_{1/2} \frac{y_1 - y_0}{h} - g_{-1/2} \frac{y_0 - y_{-1}}{h} \right) + q_0 \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} - p_0 y_0 = f_0, \quad (6.1)$$

при этом можно для граничного условия использовать формулу для вычисления производной со вторым порядком аппроксимации по формуле центральных разностей $(y_1 - y_{-1})/2h = a$. Из этих двух уравнений осталось только исключить значение в фиктивном узле (фиктивной ячейке) $y_{-1} = y_1 - 2ha$. Подставляя это выражение для значения в фиктивном узле в (6.1), получим равенство

$$\frac{1}{h} \left(g_{1/2} \frac{y_1 - y_0}{h} - g_{-1/2} \frac{y_0 - (y_1 - 2ha)}{h} \right) + q_0 a - p_0 y_0 = f_0,$$

которое не нарушает трехдиагональной структуры матрицы.

Такой метод аппроксимации граничных условий очень хорошо зарекомендовал себя при решении нелинейных задач для уравнений в частных производных. В таком случае значения сеточной функции в фиктивных точках не исключаются из системы, а также находятся численно.

На правом конце отрезка формулы аналогичны. Не составляет труда обобщить этот подход и для граничных условий третьего рода.

3. Использование ряда Тейлора. Для формулы на левой границе области интегрирования $y_1 - y_0 = ha$ в явном виде выпишем главный член невязки:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = y'(0) + \frac{h}{2} y''(0) + o(h).$$

Используя само дифференциальное уравнение, можно выразить значение второй производной функции в окрестности границы:

$$y'' = \frac{p}{g} y - \frac{g' + q}{g} y' + \frac{f}{g},$$

$$y''(0) = \frac{p(0)}{g(0)} y_0 - \frac{g'(0) + q(0)}{g(0)} a + \frac{f(0)}{g(0)},$$

откуда следует

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = a + \frac{h}{2} \left(\frac{p(0)}{g(0)} y_0 - \frac{g'(0) + q(0)}{g(0)} a + \frac{f(0)}{g(0)} \right) + o(\tau).$$

В случае линейных уравнений с постоянными коэффициентами два последних способа приводят к одному и тому же выражению для значения сеточной функции в граничном узле. Для уравнений с переменными коэффициентами и нелинейных уравнений эти способы, как показано выше, будут различаться. Но каждый из них приводит к повышению порядка аппроксимации граничных условий и, следовательно, разностной схемы.

XI.5. Задача Штурма–Лиувилля

Краевые задачи на собственные значения достаточно часто встречаются в разнообразных физических приложениях — от нахождения уровней энергии водородоподобных атомов и задач устойчивости конструкций до определения критических размеров ядерных реакторов.

В качестве примера приведем задачу на собственные колебания струны

$$\frac{d}{dx} \left(q(x) \frac{du}{dx} \right) + \lambda r(x) u(x) = 0.$$

Краевые условия зависят от способа крепления струны, в частности, для жестко закрепленной струны краевые условия нулевые.

Для одного дифференциального уравнения ставится задача нахождения параметра λ , при котором существует решение задачи с условиями на двух концах:

$$\frac{du}{dx} + f(u, x, \lambda) = 0,$$

$$u(0) = u_1, \quad u(L) = u_2.$$

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

Второе краевое условие и определяет выбор λ .

Если при некотором значении параметра λ не учитывать второе краевое условие, то получается задача Коши; ее решение на правом конце, вообще говоря, не обязано удовлетворять второму краевому условию. Варьируя значение λ , как в методе стрельбы, добиваемся выполнения второго краевого условия.

Широкий круг физических приложений описывается задачей на собственные значения для уравнения второго порядка вида

$$-\frac{d}{dx} \left(q(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + b(x) \frac{du(x)}{dx} + (c(x) + \lambda r(x))u(x) = 0$$

с однородными краевыми условиями

$$\alpha u(0) + \beta u'(0) = \beta u(L) + \delta u'(L) = 0.$$

Заметим, что в данном случае дополнительным условием, определяющим выбор параметра λ , в силу линейности и однородности задачи неявно является условие произвольной нормировки решения. В частности, если в качестве левого условия задано $u(0) = 0$, то дополнительно подразумевается условие $u'(0) = 1$, а если задано условие $u'(0) = 0$, то дополнительно можно использовать $u(0) = 1$. Если оба коэффициента α и β отличны от нуля, то нормировать на 1 можно как саму функцию, так и её производную.

В этом уравнении в некоторых случаях хорошо работает **метод стрельбы**. При выбранных начальных условиях решаем задачу Коши. Затем подбираем параметр λ , при котором удовлетворяется правое краевое условие. Здесь может быть использован весь арсенал методов для построения решения нелинейной задачи. Самым простым решением может быть метод секущих для поиска собственного значения.

Трудности при использовании метода стрельбы возникают, если соответствующая задача Коши плохо обусловлена или в случае жестких краевых задач. В этих случаях появляется сильная зависимость численного решения от пристрелочного параметра λ . Грубо говоря, метод стрельбы пригоден для численного решения, если решения задачи близки к тригонометрическим функциям, и непригоден, если решения близки к паре растущей и затухающей экспонент.

В случае, когда метод стрельбы оказывается плохо обусловленным, применяют **метод дополненного вектора**. Рассмотрим его применение на примере задачи с нулевыми краевыми условиями для искомой функции

$$u(0) = u(L) = 0.$$

Как и для метода прогонки, приблизим дифференциальную задачу в виде конечно-разностной:

$$-\frac{1}{h} \left(q_{n+1/2} \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - q_{n-1/2} \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \right) + a_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + (b_n + \lambda r_n) y_n = 0,$$

$$n = 1, \dots, N-1, \quad y_0 = y_N = 0, \quad h = L/N.$$

Тогда вместо дифференциального уравнения и двух краевых условий получим систему из $N+1$ алгебраических уравнений вида

$$F_k(y_0, \dots, y_N, \lambda) = 0, \quad k = 0, \dots, N$$

относительно $N+2$ неизвестных. Расширим (дополним) вектор неизвестных, включив в него параметр λ .

Заметим, что даже если исходное уравнение линейно по u , задача для дополненного вектора неизвестных

$$\mathbf{Y} = (y_0, \dots, y_N, \lambda)^T$$

будет нелинейной из-за наличия в уравнениях произведений вида λy_n . Применим метод линеаризации Ньютона для решения системы уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = 0$$

относительно расширенного вектора неизвестных \mathbf{Y} :

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}^{(s)}) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}^{(s)})(\mathbf{Y}^{(s+1)} - \mathbf{Y}^{(s)}) = 0.$$

Т.к. нерасширенный вектор решения $(y_0, \dots, y_N)^T$ определен с точностью до произвольного множителя в силу линейности и однородности задачи, то уравнением, которое замыкает систему уравнений, можно считать

$$Y_i^{(s+1)} - Y_i^{(s)} = 0,$$

где i — любое, кроме тех, которые соответствуют краевым условиям или параметру λ ($i \neq 0, N, N+1$).

Для оценки правильности численного решения задачи на собственные значения бывает полезно применить следующую теорему Штурма.

Теорема (сравнения). Для задачи

$$\frac{d}{dx} \left(q(x) \frac{du(x)}{dx} \right) - c(x)u(x) = -\lambda u(x), \quad u(x_0) = u(x_1) = 0$$

при $0 < K_1 \leq q(x) \leq K_2$ и $0 < L_1 \leq c(x) \leq L_2$ справедливо соотношение

$$L_1 + K_1 \frac{j^2 \pi^2}{(x_1 - x_0)^2} \leq \lambda_j \leq L_2 + K_2 \frac{j^2 \pi^2}{(x_1 - x_0)^2}.$$

XI.6. Задачи на доказательство

XI.6.1. Рассмотрим несамосопряженную задачу теплопроводности с конвекцией

$$-u'' + v(x)u' + q(x)u = f(x)$$

на интервале $0 < x < l$, с краевыми условиями $u(0) = \mu_1$, $u(1) = \mu_2$.

Покажите, что разностная схема

$$-\frac{1}{1+r}y_{\bar{x}\bar{x}} + v^{\oplus}y_{\bar{x}} + v^{\odot}y_x + cy = \varphi,$$

$$\text{где } v(x) = v^{\oplus}(x) + v^{\odot}(x),$$

$$v^{\oplus}(x) = 0.5(v(x) + |v(x)|) \geq 0,$$

$$v^{\odot}(x) = 0.5(v(x) - |v(x)|) \leq 0,$$

$$r(x) = 0.5|v(x)|h,$$

является, безусловно, монотонной и имеет второй порядок аппроксимации.

Сравните эту схему с двумя другими:

1. $-y_{\bar{x}\bar{x}} + by_x^{\circ} + cy = \varphi$, $b_i = v(x_i)$ (схема второго порядка аппроксимации, но монотонная при очень малых h — каких?).

2. $-y_{\bar{x}\bar{x}} + v^{\oplus}y_{\bar{x}} + v^{\odot}y_x + cy = \varphi$ (безусловно, монотонная, но первого порядка аппроксимации).

Указание. Монотонность схемы означает, что оба корня метода Лагранжа положительны.

XI.6.2. Покажите, что на произвольной неравномерной сетке $x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$ разностное уравнение

$$-\frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) + q(\bar{x}) \frac{y_{i+1} + y_i + y_{i-1}}{3} = f(\bar{x}),$$

$\bar{x} = (x_{i+1} + x_i + x_{i-1})/3$ аппроксимирует уравнение $-u'' + qu = f(x)$ со вторым порядком в неузловой точке $x = \bar{x}$.

XI.6.3. При решении краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$-(k(x)u'_x)'_x = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0,$$

используется разностная схема

$$-k(x_i) \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{k(x_{i+1}) - k(x_{i-1})}{2h} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0.$$

Покажите, что эта схема расходится в классе разрывных коэффициентов.

XI.6.4. Докажите, что разностная схема

$$-\frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) = \varphi_i,$$

в которой

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1},$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h^2} \left(a_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_x f(s) ds \frac{dx}{k(x)} + a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_x f(s) ds \frac{dx}{k(x)} \right)$$

для приближенного решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$-(k(x)u'_x)'_x = f(x), \quad u(0) = u_0, \quad u(l) = u_N,$$

является точной.

XI.7. Задачи с решениями

XI.7.1. Пусть краевая задача имеет вид

$$y'' = f(x, y), \quad y(0) = a, \quad y(l) = b, \tag{7.1}$$

где нелинейная функция f не зависит явно от первой производной y'_x .

В 1924 г. Б. Нумеров предложил следующий метод аппроксимации задачи (7.1):

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \left[f_n + \frac{1}{12} (f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) \right], \tag{7.2}$$

где введено обозначение $f_k = f(x_k, y_k)$.

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

В чем отличие метода Нумерова (7.2) от аппроксимации вида

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f_n ? \quad (7.3)$$

Решение. Выпишем главный член погрешности аппроксимации разностного уравнения (7.2). Для этого подставим в разностное уравнение проекцию на сетку точного решения задачи (7.1). Следует отметить, что конкретный вид решения не важен, достаточно только, чтобы решение существовало. Предположим также, что оно четырежды непрерывно дифференцируемо.

Раскладывая проекции точного решения в правой части (7.2) в ряд Тейлора до четвертого порядка включительно, убедимся, что все нечетные производные взаимно уничтожаются, а четные дадут следующее выражение для главного члена погрешности аппроксимации:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = y''(x_n) + \frac{1}{12} h^2 \frac{d^4 u}{dx^4}(x_n) + O(h^4).$$

Из уравнения (7.1) следует, что во всех внутренних точках области выполняется равенство

$$y^{(4)} = \frac{d^2}{dx^2} f(x, y),$$

переходя в последнем равенстве к разностной аппроксимации правой части, можно учесть явно главный член погрешности аппроксимации в (7.2). Приводя подобные слагаемые в (7.2), получаем аппроксимацию Нумерова:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \frac{h^2}{12} (f_{n+1} + 10f_n + f_{n-1}),$$

которая приближает исходную задачу во внутренних точках сеточной области с четвертым порядком.

Такая идея разумного распоряжения правой частью для неоднородных и нелинейных задач приводит к *компактным* (возможно название не слишком удачное — термины *компакт* и *компактный* уже давно заняты в математике под совсем другое!) разностным схемам — схемам повышенного порядка точности на нерасширенном шаблоне. Действительно, и в элементарном шаге вычислений для (7.2), и для (7.3) участвуют только три точки. Вопросам построения компактных разностных схем для нелинейных уравнений в частных производных посвящена монография [19].

В случае, когда правая часть явно зависит от первой производной, либо не получается компактной схемы, либо схема перестает быть экономичной. Действительно, чтобы не ухудшить порядок аппроксимации, необходимо вычислять значение первой производной в соответствующих узлах со вторым порядком. Если во всех точках использовать формулу с центральной разностью, то расширится шаблон схемы — в каждом шаге элементарных вычислений должно теперь участвовать пять точек. Если для точки с индексом n использовать формулу с центральной разностью, а для точек с индексами $n+1$ и $n-1$ — соответствующие формулы для односторонней производной, то для каждой точки шаблона придется вычислять заново значения функции f . При использовании классического вида аппроксимации Нумерова при каждом элементарном вычислении производится лишь однократное обращение к функции вычисления правой части — лишь для f_{n+1} , значения f_n и f_{n-1} уже получены при вычислениях для точки с индексом $n-1$. Так как время вычислений, как правило, определяется в таких задачах именно количеством обращений к правой части, то вычисления замедляются в три раза.

Нелинейная система уравнений (7.2) решается обычно итерационным методом Ньютона.

XI.7.2. Для численного отыскания периодического с периодом единицы решения уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

где f, q, p — заданные функции, используется разностная схема второго порядка аппроксимации с центральной разностью

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = f_n.$$

Предложить модификацию метода прогонки (периодическая прогонка) для решения данной задачи.

Решение. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

с условиями периодичности

$$y^{(p)}(0) = y^{(p)}(1),$$

где p принимает значения 0 и 1.

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

Краевая задача с условиями периодичности решается методом циклической прогонки. Запишем дискретный аналог уравнения:

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = f_n.$$

Очевидно, что оно аппроксимирует дифференциальную задачу со вторым порядком на равномерной сетке. На случай неравномерной сетки рассматриваемый метод легко обобщается.

В силу периодичности дискретное уравнение должно выполняться во всех точках сетки, включая граничные. Кроме того, в силу граничного условия при $p = 0$ $y_0 = y_{N+1}$. Система сеточных соотношений примет вид

$$a_0 y_N - b_0 y_0 + c_0 y_1 = \Phi_0,$$

...

$$a_n y_{n-1} - b_n y_n + c_n y_{n+1} = \Phi_n,$$

...

$$a_N y_{N-1} - b_N y_N + c_N y_0 = \Phi_N,$$

где $a_k = 1 - 0.5p_k h$, $b_k = 2 - q_k h^2$, $c_k = 1 + 0.5p_k h$, $\Phi_k = f_k h^2$. Матрица системы линейных уравнений получается «почти трехдиагональной» — от трехдиагональной ее отличают всего два элемента в углах матрицы.

Обобщение стандартных прогоночных соотношений (для трехточечной прогонки) на периодический случай будет иметь вид

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n + \gamma_n y_N.$$

Из приведенного выше соотношения для y_0 сразу получаем, что

$$\alpha_1 = c_0/b_0, \quad \beta_1 = -\Phi_0/b_0, \quad \gamma_1 = a_0/b_0.$$

Теперь несложно получить рекуррентную зависимость для прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_{k+1} = \frac{c_k}{b_k - \alpha_k a_k}, \quad \beta_{k+1} = \frac{a_k \beta_k - \Phi_k}{b_k - \alpha_k a_k}, \quad \gamma_{k+1} = \frac{a_k \gamma_k}{b_k - \alpha_k a_k}.$$

По приведенным выше формулам получаются значения коэффициентов для всех уравнений с номерами меньше, чем N . Это уже известный прямой ход прогонки слева направо.

Подставим теперь прогоночные соотношения в последнее уравнение линейной системы. В итоге с учетом введенных выше обозначений получаем

$$a_N(\alpha_N y_N + \beta_N + \gamma_N y_N) - b_N y_N + c_N y_0 = \Phi_N,$$

а это соотношение, сгруппировав члены, можно переписать как

$$y_N = \mu_N y_0 + v_N,$$

где введены обозначения

$$\mu_N = \frac{-c_N}{a_N(\alpha_N + \gamma_N) - b_N}, \quad v_N = \frac{\varphi_N - a_N \beta_N}{a_N(\alpha_N + \gamma_N) - b_N}.$$

Теперь выражение для значения сеточной функции y_{n-1} подставляем в прогоночные соотношения. Получается выражение, связывающее y_{n-1} с y_0 :

$$y_{n-1} = \alpha_n (\mu_n y_0 + v_n) + \beta_n + \gamma_n (\mu_N y_0 + v_N).$$

Отсюда получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\mu_{n-1} = \alpha_n \mu_n + \gamma_n \mu_N, \quad v_{n-1} = \beta_n + \alpha_n v_n + \gamma_n v_N.$$

Отметим, что эти коэффициенты вычисляются в обратном порядке справа налево — аналог обратного хода прогонки. Последнее соотношение приводит к явному выражению для y_0 . В результате получаем

$$y_0 = \frac{v_0}{1 - \mu_0}.$$

Теперь информации для определения значений искомой функции во всех точках сетки (еще один ход прогонки) достаточно.

Алгоритм периодической прогонки был предложен А. А. Абрамовым [20].

XI.7.3. Оценить минимальное собственное значение решения краевой задачи:

$$-y'' = (\lambda - \sin(\pi x/2)) y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Решение. Заметим, что в силу теоремы Штурма оценка для минимального собственного значения лежит в интервале $\pi^2 < \lambda < \pi^2 + 1$.

Для решения задачи воспользуемся разностной аппроксимацией нашей задачи и экстраполяцией Ричардсона.

Аппроксимируем нашу задачу со вторым порядком аппроксимации на двух интервалах разностной сетки:

$$-\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = \left(\lambda - \sin \frac{\pi}{4} \right) y_1.$$

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

Подставляя краевые условия и величину шага $y_0 = y_2 = 0$, $h = 0.5$, из этого уравнения (т.к. мы ищем нетривиальное решение) имеем

$$\lambda^{(1)} = 8 + \sqrt{2}/2 \approx 8.707107.$$

Теперь аппроксимируем нашу задачу на трех интервалах разностной сетки:

$$-\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = \left(\lambda - \sin \frac{\pi}{6}\right)y_1,$$

$$-\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} = \left(\lambda - \sin \frac{\pi}{3}\right)y_2,$$

$$y_0 = y_3 = 0, \quad h = 1/3.$$

Подставляя краевые условия, получим однородную систему уравнений

$$(2 - h^2(\lambda - 1/2))y_1 - y_2 = 0,$$

$$-y_1 + (2 - h^2(\lambda - \sqrt{3}/2))y_2 = 0.$$

Для того чтобы у этой системы существовало нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю, что приводит к квадратному уравнению относительно λ :

$$(\lambda h^2)^2 - 4\lambda h^2 + 4 + (2 - \lambda h^2)(1/2 + \sqrt{3}/2)h^2 + \sqrt{3}/4 h^4 - 1 = 0.$$

Раскрывая скобки и подставляя значение шага $h = 1/3$, получим

$$\lambda^2 - (36 + 1/2 + \sqrt{3}/2)\lambda + 3 \cdot 81 + 9 + 37\sqrt{3}/4 = 0,$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 18 + \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \pm \sqrt{\left(18 + \frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)^2 - 3 \cdot 81 - 9 - \frac{37}{4}\sqrt{3}} = \\ &= 18 + \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \pm \sqrt{81 + \frac{\sqrt{3} - 2}{8}}, \end{aligned}$$

откуда $\lambda_{\min}^{(2)} = 9.681152$.

Аппроксимация уравнений проводилась со вторым порядком по пространственной переменной ($p = 2$), сгущение сеток было произведено в $r = (1/2) / (1/3) = 3/2$ раза, поэтому экстраполяция Ричардсона приводит к оценке минимального собственного значения:

$$\lambda_{\min}^{\text{экстр}} = \lambda_{\min}^{(2)} + \frac{\lambda_{\min}^{(2)} - \lambda_{\min}^{(1)}}{r^p - 1} = 9.681152 + \frac{9.681152 - 8.707107}{(3/2)^2 - 1} \approx 10.460388.$$

Указанное число лежит в интервале оценки для минимального собственного значения из теоремы Штурма.

Замечание. Если проделать аналогичные операции для нахождения минимального собственного значения уравнения $-y'' = \lambda y$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = y(1) = 0$, которое известно и равно $\pi^2 \approx 9.869604$, то получаются оценки на двух и трех интервалах соответственно $\lambda_{\min}^{(1)} = 8$, $\lambda_{\min}^{(2)} = 9$, а экстраполяция приводит к результату

$$\lambda_{\min}^{\text{экстр}} = \lambda_{\min}^{(2)} + \frac{\lambda_{\min}^{(2)} - \lambda_{\min}^{(1)}}{r^p - 1} = 9 + \frac{9 - 8}{(3/2)^2 - 1} = 9.8.$$

Даже оценка на очень грубой сетке с экстраполяцией Ричардсона дает результат с точностью выше одного процента. Это связано с тем, что в данном примере экстраполяция Ричардсона дает оценку не с третьим порядком аппроксимации, как можно было ожидать, а с четвертым. Такой высокий порядок достигается в силу точной аппроксимации краевых условий и структуры члена невязки уравнения, представленной только членами четного порядка по h .

XI.7.4. Оценить численно минимальное собственное значение решения краевой задачи:

$$-y'' = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

Решение. 1 способ. Для получения численной оценки и определения качества такой оценки в этом случае нам необходимо аппроксимировать со вторым порядком не только дифференциальное уравнение, но и выражение для производной. В этом способе решения задачи для аппроксимации производной используем формулы дифференцирования назад.

Для двух интервалов выбранные аппроксимации имеют вид

$$-\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = \lambda y_1, \quad y_0 = 0, \quad \frac{1}{h} \left(\frac{3}{2} y_2 - 2y_1 + \frac{1}{2} y_0 \right) = 0,$$

что приводит к оценке собственного значения на двух интервалах $\lambda_{\min}^{(1)} = 8/3 \approx 2.666667$. Для трех интервалов получаем систему уравнений

$$-\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = \lambda y_1,$$

$$-\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} = \lambda y_2,$$

$$y_0 = 0, \quad \frac{1}{h} \left(\frac{3}{2} y_3 - 2y_2 + \frac{1}{2} y_1 \right) = 0,$$

для существования нетривиального решения которой получается квадратное уравнение относительно величины $z = \lambda h^2$ вида

$$z^2 + 8z/3 + 2/3 = 0,$$

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

с меньшим корнем

$$\lambda_{\min}^{(2)} = h^{-2} z_{\min} = 12 - 3\sqrt{10} \approx 2.513167.$$

Экстраполяция Ричардсона приводит к результату

$$\lambda_{\min}^{\text{экстр}} = \lambda_{\min}^{(2)} + \frac{\lambda_{\min}^{(2)} - \lambda_{\min}^{(1)}}{r^p - 1} = 12 - 3\sqrt{10} + \frac{12 - 3\sqrt{10} - 8/3}{(3/2)^2 - 1} = 2.390367.$$

Точное решение задачи известно и равно $\lambda_{\min} = \pi^2/4 \approx 2.467401$. В данном случае экстраполяция Ричардсона не улучшает минимальное собственное значение. Это связано с тем, что в отличие от предыдущего примера, где экстраполяция Ричардсона приводит к вычислению собственного значения с четвертым порядком аппроксимации, в этом примере односторонняя аппроксимация первой производной краевого условия имеет в погрешности члены третьего порядка, поэтому и экстраполяция дает результат только с третьим. Кроме того, константа погрешности экстраполированного решения получается большой, так что экстраполированное значение получается хуже, чем оценка значения на трех интервалах.

Это утверждение верно и при решении задачи на четырех интервалах:

$$\begin{aligned} -\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} &= \lambda y_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ y_0 &= 0, \quad \frac{1}{h} \left(\frac{3}{2} y_4 - 2y_3 + \frac{1}{2} y_2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Требование существования нетривиального решения в данном случае приводит к кубическому уравнению относительно величины $z = \lambda h^2$:

$$-3z^3 + 14z^2 - 15z + 2 = 0,$$

решение которого может быть найдено, например, методом Ньютона, начиная от нулевого значения, что дает

$$\lambda_{\min}^{(3)} = h^{-2} z_{\min} = 2.480262.$$

Экстраполяция решения со сгущением сетки в $r = (1/3) / (1/4) = 4/3$ раза тоже не улучшает результат и дает

$$\lambda_{\min}^{\text{экстр}} = \lambda_{\min}^{(3)} + \frac{\lambda_{\min}^{(3)} - \lambda_{\min}^{(2)}}{r^p - 1} = 2.480262 + \frac{2.480262 - 2.513167}{(4/3)^2 - 1} \approx 2.437956.$$

2 способ. Относительная неудача с оценкой минимального собственного значения при использовании формул дифференцирования назад заставляет искать другие способы аппроксимации правого краевого условия. Для сравнения с точным решением задачи $\lambda_{\min} = \pi^2/4 \approx 2.467401$ построим другую аппроксимацию правого граничного условия второго

порядка с использованием самого уравнения. Разложим значение собственной функции в предпоследней точке в ряд Тейлора, тогда с учетом правого краевого условия и второй производной, выраженной из уравнения, имеем

$$y_{N-1} = y_N - y'_N h + y''_N h^2 / 2 = y_N (1 - \lambda h^2 / 2).$$

Решим задачу на двух интервалах:

$$-\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = \lambda y_1, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = y_2 (1 - \lambda h^2 / 2).$$

Требование существования нетривиального решения на этот раз приводит к квадратному уравнению относительно величины $z = \lambda h^2$:

$$z^2 - 4z + 2 = 0,$$

откуда $\lambda^{(1)\min} = h^{-2} z_{\min} = 4(2 - \sqrt{2}) \approx 2.34314575$.

Для трех интервалов с шагом $h = 1/3$ получаем систему уравнений

$$-\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = \lambda y_1,$$

$$-\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} = \lambda y_2,$$

$$y_0 = 0, \quad y_2 = y_3 (1 - \lambda h^2 / 2).$$

Обращение в ноль определителя для существования нетривиального решения приводит к легко решаемому кубическому уравнению:

$$(2 - z)^2(1 - z/2) - 3(1 - z/2) = 0,$$

минимальный корень которого $z_{\min} = 2 - \sqrt{3}$, тогда

$$\lambda^{(2)\min} = h^{-2} z_{\min} = 9(2 - \sqrt{3}) \approx 2.41154273,$$

и экстраполированное значение

$$\lambda_{\min}^{\text{экстр}} = \lambda_{\min}^{(2)} + \frac{\lambda_{\min}^{(2)} - \lambda_{\min}^{(1)}}{r^p - 1} = 2.41154273 - \frac{2.41154273 - 2.34314575}{(3/2)^2 - 1} = \\ = 2.4666260.$$

Как видим, второй способ аппроксимации краевого условия приводит к тому, что экстраполяция действительно уточняет оценку минимального собственного значения

Замечание. Тот же самый результат получается при использовании фиктивного интервала и симметричной аппроксимации производной. Это означает, что при таком способе аппроксимации краевого условия разложение ошибки аппроксимации идет только по четным степеням шага h , поэтому экстраполяция Ричардсона приводит снова к формулам четвертого порядка аппроксимации.

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

XI.7.5. Оценить минимальное собственное значение решения краевой задачи:

$$-y'' = (\lambda - \sin(\pi x/2)) y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

Решение. Аппроксимируем со вторым порядком уравнение и правое краевое условие. Как мы видели на примере предыдущей задачи, аппроксимация краевого условия с использованием самого уравнения (или введение дополнительного фиктивного интервала) и экстраполяция Ричардсона дают аппроксимацию четвертого порядка по шагу сетки, что приводит к значительно более точным результатам по сравнению с использованием формул дифференцирования назад для приближения производной.

Разложим значение собственной функции в предпоследней точке в ряд Тейлора, тогда с учетом правого краевого условия и второй производной, выраженной из уравнения, имеем

$$y_{N-1} = y_N - y'_N h + y''_N h^2 / 2 = y_N - y_N (\lambda - 1) h^2 / 2 = y_N \left(1 - (\lambda - 1) h^2 / 2\right).$$

На двух интервалах такая аппроксимация приводит к разностным уравнениям:

$$-\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = \left(\lambda - \sin \frac{\pi}{4}\right) y_1, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = y_2 \left(1 - (\lambda - 1) h^2 / 2\right).$$

Условием существования нетривиального решения системы уравнений относительно y_1 и y_2 является обращение в нуль определителя матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - h^2(\lambda - \sqrt{2}/2) & -1 \\ 1 & -(1 - h^2(\lambda - 1)/2) \end{vmatrix} = 0.$$

После подстановки значения шага $h = 1/2$ для λ получается квадратное уравнение

$$\lambda^2 - \lambda(17 + \sqrt{2}/2) + 40 + 5\sqrt{2} = 0$$

с меньшим корнем $\lambda^{(1)}_{\min} = 3,25763168$.

Для трех интервалов разбиения имеем аппроксимацию уравнения во внутренних точках интервала и аппроксимацию граничных условий:

$$-\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = \left(\lambda - \sin \frac{\pi}{6}\right) y_1,$$

$$-\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} = \left(\lambda - \sin \frac{\pi}{3}\right) y_2, \quad y_0 = 0, \quad y_2 = y_3 \left(1 - (\lambda - 1) h^2 / 2\right).$$

Условием существования нетривиального решения системы уравнений относительно y_1 , y_2 и y_3 является обращение в нуль определителя матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - h^2(\lambda - 1/2) & -1 & 0 \\ -1 & 2 - h^2(\lambda - \sqrt{3}/2) & -1 \\ 0 & 1 & -(1 - h^2(\lambda - 1)/2) \end{vmatrix} = 0.$$

Введя величины

$$z = \lambda h^2, z_1 = 2 + h^2/2, z_2 = 2 + h^2\sqrt{3}/2, z_3 = 2 + h^2,$$

получим кубическое уравнение вида

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) - 3z + 2z_1 + z_3 = 0.$$

Решение данного уравнения может быть найдено методом Ньютона от нулевого начального приближения, и это позволяет получить значение

$$\lambda^{(2)}_{\min} = h^{-2} z_{\min} = 3,2594086.$$

Экстраполированное значение

$$\lambda_{\text{экстр}} = \lambda_{\min}^{(2)} + \frac{\lambda_{\min}^{(2)} - \lambda_{\min}^{(1)}}{r^p - 1} = 3,2594086 + \frac{3,2594086 - 3,2576317}{(3/2)^2 - 1} \approx 3,2608301$$

имеет четвертый порядок точности по шагу сетки.

XI.8. Теоретические задачи

XI.8.1. Описать алгоритм численного построения общего решения для следующих дифференциальных уравнений:

a) $y'' - (10 + x)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10;$

б) $y'' + (10 + x)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10.$

XI.8.2. Используя метод Ньютона, найти следующее приближение к решению краевой задачи:

а) $y'' + 2\sqrt{2(y')^2 - 1} - 12e^{y-x} - 2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

В качестве начального приближения взять $y^0(x) = x$.

б) $y'' + 2\sqrt{2(y')^2 - 1} - 4(1 + y - x)^2 + 5 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

В качестве начального приближения взять $y^0(x) = x$.

в) $y'' + (y')^2 - 8\exp(y-x) + 23 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

В качестве начального приближения взять $y^0(x) = x$.

г) $y'' - 1/2(-1 + y')^2 - 3\exp(y-x) + 4 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

В качестве начального приближения взять $y^0(x) = x$.

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

XI.8.3. Найти наименьшее число λ , при котором следующая задача имеет нетривиальное решение:

a)
$$\begin{cases} y'' + (\lambda - x^2)y = 0, & x \in [0, 1], \\ y(0) = y(1) = 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y'' + (\lambda - x)y = 0, & x \in [0, 1], \\ y(0) = y'(1) = 0; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x'' + \lambda tx = 0, & t \in [0, 1], \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

XI.8.4. Для корректной постановки краевой задачи для системы трех дифференциальных уравнений на отрезке $[0, 100]$ указать, сколько краевых условий должно быть задано слева, а сколько — справа:

а)
$$\begin{cases} x' = -3x + 4y - 2z, \\ y' = x + z, \\ z' = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$$
 в)
$$\begin{cases} x' = 8x + 8y + 6z, \\ y' = 2x - 2y + 2z, \\ z' = -11x - 8y - 9z. \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x' = x + y + 3z, \\ y' = x + 5y + z, \\ z' = 3x + y + z. \end{cases}$$
 д)
$$\begin{cases} x' = 5x + 3y - 2z, \\ y' = 6x - 2y - 6z, \\ z' = 6x + 3y - 3z. \end{cases}$$
 е)
$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 3z, \\ y' = x + y + z, \\ z' = x + 3y - z. \end{cases}$$

XI.8.5. Предложить схему второго порядка аппроксимации для решения краевой задачи на отрезке $[0, 1]$:

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u = -f(x),$$

$$k(0)u'_x(0) = 0, \quad -k(1)u'_x(1) = u(1),$$

где $k(x) = e^x$, $q(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$.

XI.8.6. Предложить схему второго порядка аппроксимации для краевой задачи на отрезке $[0, 1]$:

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u = -f(x), \quad k(0)u'_x(0) = u(0) - 1, \quad k(1)u'_x(1) = 0,$$

где $k(x) = x^2 + 1$, $q(x) = x$, $f(x) = e^x$.

XI.8.7. Для решения краевой задачи на отрезке $[0, 1]$

$$u'' + \cos(x)u = 5, \quad u'(0) = 1, \quad u(1) = 0.5$$

предложена следующая разностная схема:

$$\frac{u_2 + u_1 - 2u_0}{3h} = 1, \quad \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \cos(x_n)u_n = 5, \quad n = 1, \dots, N-1,$$

$$u_N = 0.5.$$

При необходимости внести исправления для того, чтобы схема имела второй порядок аппроксимации.

XI.8.8. Для решения краевой задачи на отрезке $[0, 1]$

$$u'' - u^2 \sin x = \cos x, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) + 2u(1) = 1$$

предложена следующая разностная задача:

$$u_0 = 0, \quad \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} - \sin(x_n)u_n^2 = \cos(x_n), \quad n = 1, \dots, N-1,$$

$$\frac{-u_N + 4u_{N-1} - 3u_{N-2}}{2h} + 2u_N = 1.$$

При необходимости внести исправления для того, чтобы схема имела второй порядок аппроксимации.

XI.8.9. Построить схему 4-го порядка аппроксимации для стационарного уравнения теплопроводности $-u'' + q(x)u = f(x)$ на равномерной сетке при использовании трехточечного шаблона.

XI.8.10. Для краевой задачи

a) $y'' + \frac{1+x}{1+x^2}y' + \cos(x)y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) + 2y'(0) = 3, \quad y(1) = 1;$

б) $y'' + \cos(x)y' + \cos(x^2)y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) + 2y'(0) = 1, \quad y(1) = 1;$

в) $y'' + \frac{x^2+1}{2}y' + (x^2+1)(x-1)y = x^3+2, \quad -y(0) + y'(0) = 2, \quad y(1) = 1.$

1) Предложить аппроксимацию второго порядка на двух точках левого граничного условия.

2) Построить аппроксимацию второго порядка для этого уравнения.

3) Предложить и обосновать корректный метод решения полученной системы разностных уравнений.

XI.8.11. Для краевой задачи

a) $-y'' + \cos(x-2)^2 \cdot y' + \operatorname{tg}^2(\pi x / 8) \cdot y = (x^3 + 1)^{3/2} / 27,$

$y(0) = 2, \quad y'(2) = -1.5;$

б) $-y'' + \left(1/\sqrt{(2x^2 + 1)}\right) \cdot y' + \sin^3(\pi x / 4) \cdot y = x^3 / 2 - 7,$

$y(0) = 7/4, \quad 2y(2) + y'(2) = 1,$

1) Предложить аппроксимацию второго порядка на двух точках правого граничного условия.

2) Построить аппроксимацию второго порядка для этого уравнения.

3) Предложить и обосновать корректный метод решения полученной системы разностных уравнений.

XI.9. Практические задачи

XI.9.1. Построить численно общие решения для следующих дифференциальных уравнений:

a) $y'' - (10 + x^2)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10;$

б) $y'' + (10 + x^2)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10.$

Чем объяснить необходимость использования существенно разных алгоритмов для решения задач а) и б)?

XI.9.2. Получите численное решение следующих нелинейных краевых задач:

a) $y'' + px \cos y = 0, \quad 0 < x \leq 1,$

$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad p = 1, 4, 7, 25, 50, 100;$

б) $y'' + \frac{0,5}{1-0,5y} y'^2 = 0, \quad 0 < x \leq 1,$

$y(0) = y_0, \quad y(1) = 0,$

$y_0 = 0,25; 0,5; 1; 1,5; 1,8; 1,9; 1,95;$

в) $y'' + \sin y = 0, \quad 0 < x \leq x_k,$

$y(0) = 0, \quad y(x_k) = \pi,$

$x_k = 0,5; 1; 2; 4; 6.$

XI.9.3. Построить алгоритм метода пристрелки для вычисления решения следующих нелинейных задач:

a) $\begin{cases} y'' - x\sqrt{y} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y'' - x\sqrt{y} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, \quad \int_0^1 y(x) dx = 1. \end{cases}$

XI.9.4. При заданных значениях параметра α численно найти периодическое решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \alpha x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - y^3, \end{cases}$$

а) $\alpha = 0.1,$ б) $\alpha = 1.0,$ в) $\alpha = 10.0.$

XI.9.5. Для численного отыскания периодического с периодом единица решения уравнения

$$y'' - P^2(x)y = f(x),$$

где $P^2(x) > 0$ и $f(x)$ — заданные периодические функции, используется разностная схема

$$\begin{cases} \frac{y_1 - 2y_0 + y_{N-1}}{h^2} - P^2(0)y_0 = f(0), \\ \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} - P^2(nh)y_n = f(nh), \quad n = 1, 2, \dots, N-2, \\ \frac{y_0 - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} - P^2(1-h)y_{N-1} = f(1-h), \end{cases}$$

где $Nh = 1.$

Вычислить решение при $h = 0.005$ в случае $P^2(x) = 10 + \sin 2\pi x,$ $f(x) = \cos 2\pi x.$

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

XI.9.6. Рассмотрите две краевые задачи:

$$y'' = e^y, \quad y(0) = a, \quad y(1) = b,$$

$$y'' = -e^y, \quad y(0) = a, \quad y(1) = b.$$

1. Попытайтесь найти решения этих задач, положив $a = 1$ и сделав замену $y'_x = p(y)$.
2. Найдите решение методом стрельбы при $a = 1$ и различных b . Что происходит А) при $0 < b < 1,499719998$? Б) при $b > 1,499719998$ (см. [7], с. 110)?
3. Попытайтесь решить задачи численно методом Нумерова (см. задачу XI.7.1) с линеаризацией по Ньютону. Сколько узлов сетки Вам необходимо, чтобы найти решение с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$?

XI.9.7. Рассмотрите нелинейную сингулярно-возмущенную*) краевую задачу:

$$\varepsilon y'' = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

1. Получите точное решение задачи, см. [21]. Для этого сделайте замену $y'_x = p(y)$.
2. Предложите и реализуйте численный метод решения задачи. Сравните полученное решение с точным. Исследуйте поведение погрешности Вашего численного метода при $\varepsilon \rightarrow 0$.

XI.9.8. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y'' = (y - u(x))^{2q+1}, \quad y(-1) = A, \quad y(1) = B,$$

$q \in N$ — натуральное число, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Получить численное решение задачи в случаях:

- а) $u(x) = x^2, \quad A > 1, \quad B > 1,$
- б) $u(x) = x^2, \quad A = 1, \quad B > 1$ или $A > 1, \quad B = 1,$
- в) $u(x) = |x|, \quad A > 1, \quad B > 1,$
- г) $u(x) = |x|, \quad A = 1, \quad B > 1.$

Что происходит с решением при увеличении q ? (В численных расчетах задайте $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.)

*) Сингулярно-возмущенными задачами называются задачи с малым параметром при старшей производной.

Теоретически задача исследована в [21]. В случае $u(x) = |x|$ появляется внутренний погранслой — узкая область в окрестности $x = 0$, где у отличны от $|x|$.

XI.9.9. Решите численно краевую задачу:

$$\varepsilon y'' = y - y^3,$$

$$y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad |A| < \sqrt{2}, \quad |B| < \sqrt{2}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Решением этой задачи являются так называемые пиковые, или пичковые, структуры. В [21] исследованы свойства решений и приведены графики восьми линейно независимых решений. Там же показано, что при фиксированных A и B существует по четыре линейно независимых решения, таких, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = 0$ при всех x , за исключением точек

$$x_i = i/n, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad n \in N \quad (n \geq 2), \quad \text{где } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = \sqrt{2}.$$

Попытайтесь обнаружить такие структуры для $n = 2, n = 3$, выбирая соответствующее начальное приближение при линеаризации по Ньютону. (Положите $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$).

XI.9.10. Известно, что краевая задача

$$\varepsilon y'' = y^3 - y,$$

$$y(0) = A < -1, \quad y(0) = B > 1$$

имеет решение с внутренним погранслоем в точке $x = 1/2$ [21]. Исследовать, как его толщина зависит от параметра ε .

Какое начальное приближение надо использовать при решении задачи методом линеаризации?

Известно, что при $A = 0, B = 0$ данная краевая задача имеет еще два решения, кроме тривиального ($y \equiv 0$). Найдите их численно.

XI.9.11. Исследуйте следующую сингулярно-возмущенную задачу:

$$\varepsilon y'' = -y(y + a(x)),$$

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad a'(0) = 0$$

в зависимости от вида функции $a(x)$. Рассмотрите поведение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Удалось ли Вам получить пограничный слой типа всплеска?

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

XI.9.12. Решите численно задачу на нахождение собственных значений и собственных функций волнового уравнения [17]:

$$y'' = -k^2 y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

1. Сравните полученные решения с известными точными $k_n = n\pi$, $y_n \cong \sin(n\pi x)$ (n — положительное целое число).
2. Используйте Ваш алгоритм для получения решения при больших k . С какими трудностями Вы столкнулись? Как можно улучшить используемый алгоритм?
3. Рассмотрите данную задачу для других граничных условий, например, $y'(0) = y(1) = 0$.

XI.9.13. В цилиндрических координатах задача на собственные значения имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} = -k^2 y,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Собственными функциями этой задачи являются цилиндрические функции Бесселя нулевого порядка, а собственными значениями задачи будут нули этих функций:

$$k_1 = 2,404826, \quad k_2 = 5,520078,$$

$$k_3 = 8,653728, \quad k_4 = 11,791538.$$

Покажите, что подстановка $\tilde{y} = y/\sqrt{r}$ приводит уравнение к виду, для которого можно применять метод Нумерова (см. задачу XI.7.1). Решите численно спектральную задачу. Сравните результаты расчета с точными собственными значениями, приведенными выше.

XI.9.14. Частица в потенциальной яме. Найдите численно **все** уровни энергии частицы в потенциальной яме с потенциалом $U(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ и соответствующие им функции распределения. Данный результат важен для решения уравнения Кортвега–де Фриза. Указание: уровни энергии есть собственные значения λ_k уравнения Шредингера $y'' + (\lambda - U(x))y = 0$ с условиями $y(+\infty) = y(-\infty) = 0$, а соответствующие им собственные функции и есть функции распределения.

XI.9.15. Частица в потенциальной яме 2

1. Получите аналитическое решение стационарного уравнения Шредингера для случая прямоугольной и параболической потенциальных ям и сравните его с численными решениями, полученными обычным методом второго порядка аппроксимации с использованием алгоритма прогонки и методом Нумерова.

2. Рассмотрите случай, когда потенциал имеет зеркальную симметрию относительно $x = 0$. При этом собственные функции системы будут четными или нечетными относительно $x = 0$, причем четность или нечетность чередуется с ростом квантового числа (энергии). Проверьте этот эффект численно. Каким способом в этом случае можно в два раза сократить объем вычислений при расчете собственных значений для потенциалов?

3. Проверьте численно, что для заданного потенциала две волновые функции u_λ и $u_{\lambda'}$, соответствующие разным собственным значениям λ и λ' , являются ортогональными: $\int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(x) u_{\lambda'}(x) dx = 0$, как это и следует из квантовой механики.

XI.9.16. Частица в поле с потенциалом Тоды

Рассмотрите движение частицы в поле с потенциалом Тоды [22]:

$$\ddot{x} = 1 - e^x.$$

Это уравнение можно трактовать как движение частицы в поле с потенциалом $U(x) = e^x - x$.

Найти численно все периодические решения, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$x(0) = x(120) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(120) = A$$

и дополнительному условию $A \geq 10$.

Как период колебаний зависит от A ? Сколько решений получается?

XI.9.17. Распределение концентрации реагента и температуры смеси (в безразмерном виде) для трубчатого реактора с аксиальным перемешиванием находится как решение нелинейной краевой задачи

$$\frac{1}{Pe_M} y'' - y' + Da(1-y) \exp \frac{\gamma \theta}{\gamma + \theta} = 0,$$

$$\frac{1}{Pe_T} \theta'' - \theta' + BDa(1-y) \exp \frac{\gamma \theta}{\gamma + \theta} - \beta(\theta - \theta_c) = 0,$$

где y — концентрация, θ — температура, Da — число Дамкёлера, Pe_M , Pe_T — массовое и тепловое числа Пекле, γ — энергия активации, β — коэффициент теплопередачи, B — адиабатическое повышение температуры, θ_c — температура охладителя.

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

Границные условия для задачи таковы:

$$Pe_M y(0) - y'(0) = 0, \quad Pe_T \theta(0) - \theta'(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad \theta'(1) = 0.$$

Найти численно решения краевой задачи при значениях параметров $Pe_M = 5$, $Pe_T = 10$, $\gamma = 20$, $\beta = 2$, $B = 15$ и $\theta_c = 0$ для значений параметра Da 0.05, 0.063, 0.07, 0.08, 0.1, 0.012. Сколько решений при том или ином значении числа Дамкёлера Вам удалось найти?

О решениях задачи можно прочитать в [23].

XI.9.18. Найти стационарные структуры в системе «брюсселятор»

$$u'' + \frac{1}{D_u} f(u, v) = 0,$$

$$v'' + \frac{1}{D_v} g(u, v) = 0,$$

где $f(u, v) = A - (B+1)u + u^2v$, $g(u, v) = Bu - u^2v$, $D_u = 0.0016$, $D_v = 0.008$, $A = 2$, $B = 4.6$ с граничными условиями $u(0) = u(X) = 2$, $v(0) = v(X) = 2.3$ в зависимости от X — длины отрезка, на котором решается задача. При численном исследовании X меняется в диапазоне от 50 до 200.

XI.9.19 (Т. К. Старожилова). По теории речеобразования речевой аппарат человека представляет собой единую акустическую систему, возбуждаемую периодическими колебаниями голосовых связок либо турбулентным шумом. При этом голосовой тракт (ротовой канал от голосовых связок до конца губ) можно рассматривать как резонатор или фильтр, собственные частоты и собственные функции которого определяются из решения следующей спектральной задачи:

$$(S(x)\Psi'_x(x))'_x + \lambda^2 S(x)\Psi(x) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$\Psi'_x(0) = 0, \quad 8\sqrt{S(L)} \Psi'_x(L) + 3\pi\sqrt{\pi} \Psi(L) = 0.$$

Здесь x — расстояние вдоль оси распространения волн от голосовых связок до рассматриваемого сечения голосового тракта (см. рис. 9.1). Функция $S(x)$ — функция площади сечения голосового тракта вдоль оси распространения волн; L — длина голосового тракта (расстояние от голосовых связок до конца губ вдоль оси x).

Найти первые четыре собственных значения λ_i ($0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \dots$) и соответствующие им собственных функции. Функция площади поперечного сечения голосового тракта $S(x)$ задана таблично (см. таблицу 3). По известным собственным значениям вычислить собственные частоты, считая скорость звука известной величиной, равной 1193 км/ч.

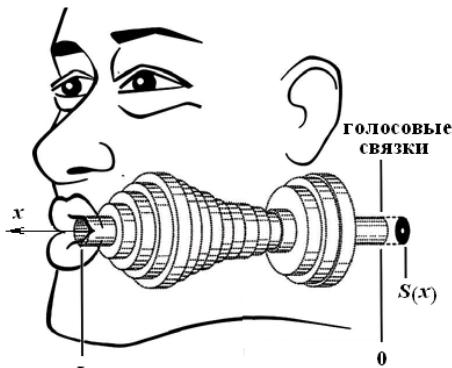


Рис. 9.1. Аппроксимация голосового тракта

Таблица

Площадь поперечного сечения голосового тракта $S(x)$

$x, \text{ мм}$	$S, \text{ мм}^2$
0	78,2
2,5	66,4
5	43
7,5	39,1
10	33,2
12,5	25,4
15	31,3
17,5	50,8
20	87,7
22,5	444
25	523,2
27,5	532,2
30	538,5
32,5	531,7
35	527,2
37,5	504,5
40	498,7
42,5	527
45	570,6
47,5	572,5
50	566,7
52,5	549,1
55	535,4

$x, \text{ мм}$	$S, \text{ мм}^2$
57,5	515,9
60	486,6
62,5	453,3
65	434,8
67,5	420
70	420,7
72,5	437,2
75	470,5
77,5	480,8
80	457,2
82,5	408,4
85	361,5
87,5	340
90	295,1
92,5	257,9
95	203,2
97,5	144,6
100	103,6
102,5	80,1
105	64,5
107,5	33,2
110	21,5
112,5	13,7

$x, \text{ мм}$	$S, \text{ мм}^2$
115	7,8
117,5	13,7
120	23,4
122,5	27,4
125	23,4
127,5	21,2
130	18,5
132,5	13
135	11,3
137,5	7,2
140	5,8
142,5	5,9
145	9,8
147,5	9
150	19,5
152,5	23,4
155	37,1
157,5	52,8
160	86
162,5	139,7
165	139,7

XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

XI.9.20. Найдем решение одной задачи Коши для уравнения в частных производных в так называемых переменных бегущей волны. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(1-u), \quad u(-\infty, t) = 1, \quad u(+\infty, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq k, \\ 0, & x > k. \end{cases}$$

Это — задача Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП). Известно, что решением является так называемая *волна переключения*, распространяющаяся с постоянной скоростью. Ее можно найти следующим образом. Переядем к переменным бегущей волны $\xi = vt - x$, тогда уравнение в частных производных превратится в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$vu'_\xi = u''_{\xi\xi} + au(1-u), \quad (9.1)$$

где v — параметр (скорость распространения волны). Искомое решение — траектория на фазовой плоскости (u, u') , выходящая из точки $(0, 0)$ и входящая в $(1, 0)$.

1. Проверьте, что $(0, 0)$ и $(1, 0)$ — особые точки (9.1), исследуйте характер особых точек.
2. Покажите, что для любого значения скорости распространения волны $v > v_{\min} = 2\sqrt{a}$ существует траектория, выходящая из $(0, 0)$ и входящая в $(1, 0)$. Заметим, что u имеет характер численности популяции и по физическому смыслу задачи не может принимать отрицательные значения.
3. Найдите эту траекторию численно. Какое направление интегрирования вдоль нее будет устойчивым?

XI.9.21. Задача Зельдовича–Франк–Каменецкого

Уравнение распространения волны горения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(u-\varepsilon)(1-u)$$

называется уравнением Зельдовича–Франк–Каменецкого (ЗФК). Начальные и граничные условия те же, что и для уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова ($0 < \varepsilon \ll 1$).

Перейти к переменным бегущей волны. Исследовать устойчивость особых точек системы. У системы существует траектория, выходящая из $(0, 0)$ и входящая в $(1, 0)$. Обратите внимание, что теперь такое решение существует при единственном значении параметра v : $v = \sqrt{2a}$. Найти это решение численно.

XI.10. Библиографическая справка

Более детальную теоретическую справку о методах решения краевых задач можно получить, используя книги [1, 2, 5, 17]. Подробнее о различных вариантах метода прогонки см. в [24]. Начиная с данной главы при подготовке раздела «Задачи для самостоятельной реализации» использованы материалы задачника [25].

XII. Общая теория сходимости схем для уравнений в частных производных

XII.1. Основные понятия теории разностных схем

Рассмотрим задачу для дифференциального уравнения в частных производных, записанную в операторной (абстрактной) форме

$$\mathbf{L}u = f. \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{L} — дифференциальный оператор, действующий на функцию u , f — известная правая часть.

Поставим в соответствие (1.1) разностную задачу

$$\mathbf{L}_h \mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}. \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{L}_h — разностный оператор, действующий на функцию \mathbf{y} , $\boldsymbol{\varphi}$ — известная правая часть (сеточная функция).

Разностную задачу (1.2), представляющую собой совокупность записи разностного уравнения во всех внутренних узлах расчетной области и записи разностных соотношений в граничных узлах (дискретизации граничных условий), будем называть разностной схемой.

Предположим, что при такой записи дифференциального уравнения и разностного уравнения в соответствующие операторы и правые части включены начальные условия и для дифференциальной, и для разностной задач.

В дальнейшей записи для сеточных функций будем нумеровать значения по номеру узла введеной разностной сетки. Для эволюционных задач (то есть таких, которые зависят от выделенной переменной — времени) обычно будем верхний индекс сеточной функции ставить в соответствие номеру слоя по времени, а нижний (или нижние индексы) — индексу узла сетки при разбиении по пространству:

$$u(n\tau, mh) \rightarrow y_m^n, \quad n = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, M.$$

Сеточная функция представляет собой вектор длины $M \cdot N$, и для нее может быть введена любая векторная норма, рассмотренная в теме II.

Определение 1. Говорят, что разностное решение **сходится** к решению дифференциальной задачи, если норма разности между сеточной проекцией точного решения и решением разностной задачи стремится

к нулю на последовательности сеток, таких, что шаги сетки стремятся к нулю:

$$\|[u]_{\tau h} - \mathbf{y}\| \xrightarrow[\tau, h \rightarrow 0]{} 0.$$

Если при этом выполнена оценка

$$\|[u]_{\tau h} - \mathbf{y}\| \leq c_1 \tau^k + c_2 h^p,$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от сеточных параметров, то говорят, что имеет место сходимость порядка k по времени и порядка p по пространственным переменным.

Определение 2. **Невязкой** разностного уравнения называется результат подстановки в разностную задачу проекции на сетку точного решения дифференциальной задачи:

$$\mathbf{r}_{\tau h} = \mathbf{L}_h[u]_{\tau h} - \boldsymbol{\phi}.$$

Определение 3. Если $\|\mathbf{r}_{\tau h}\| \xrightarrow[\tau, h \rightarrow 0]{} 0$, то говорят, что разностная схема (1.2) **аппроксимирует** задачу (1.1) на решении дифференциальной задачи (1.1).

Если, кроме того, имеет место оценка

$$\|\mathbf{r}_{\tau h}\| \leq c_1 \tau^s + c_2 h^q,$$

где c_1 и c_2 не зависят от сеточных параметров, то говорят, что разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком s по времени и порядком q по пространству.

Определение 4. Разностная схема (1.2) называется **устойчивой**, если для двух возмущенных задач

$$\mathbf{L}_h \mathbf{y}_1 = \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\delta}_1,$$

$$\mathbf{L}_h \mathbf{y}_2 = \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\delta}_2$$

имеет место оценка

$$\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq c(\|\boldsymbol{\delta}_1\| + \|\boldsymbol{\delta}_2\|).$$

Теорема 1 (П. Лакса–В. С. Рябенького–А. Ф. Филиппова). Пусть разностная задача (1.2) аппроксимирует дифференциальную задачу (1.1) на ее решении и устойчива. Тогда решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной. Если аппроксимация имеет порядок k по времени и порядок p по пространству, то и сходимость имеет те же порядки.

Определение 5. Для линейной разностной схемы $\mathbf{L}_h \mathbf{y} = \boldsymbol{\phi}$ устойчивость есть ограниченность нормы решения нормой правой части:

$$\|\mathbf{y}\| \leq c \|\boldsymbol{\phi}\|,$$

где c не зависит от сеточных параметров.

В определении существенно, что разностная схема является линейной, т.к. даже для линейных дифференциальных уравнений возможно построение нелинейных разностных схем.

Теорема 2. Для линейных разностных схем определения устойчивости 4 и 5 эквивалентны.

Как и в случае ОДУ, прямое исследование сходимости разностных схем представляет собой нетривиальную задачу и возможно для очень ограниченного круга задач и схем. Поэтому в большинстве задач на исследование сходимости требуется провести анализ порядка аппроксимации схемы и исследовать ее устойчивость.

Определение 6. Совокупность расчетных узлов, используемых на каждом элементарном шаге вычислений в разностной схеме, называется **шаблоном**.

Порядок аппроксимации схем исследуется разложением точного решения дифференциальной задачи в точках шаблона разностной схемы относительно любой фиксированной точки шаблона в ряд Тейлора для нахождения главных членов ошибки аппроксимации. Обычно точкой, относительно которой берется разложение в ряд Тейлора, выбирается либо та, относительно которой все разложения делаются наиболее просто, либо центр симметрии шаблона.

Для сокращения записи иногда будут использоваться обозначения А. А. Самарского для первых и вторых разностных производных:

$$y_x = \frac{y_{m+1} - y_m}{h}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y_m - y_{m-1}}{h}, \quad y_{x^\circ} = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2h},$$

$$\Lambda_{x\bar{x}} y \equiv y_{xx} = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{h^2},$$

а также для обозначения временных слоев следующего вида:

$$y^{n+1} = \hat{y}, \quad y^{n-1} = \check{y}.$$

XII.2. Исследование устойчивости

Исследование устойчивости представляет собой более сложную задачу, чем исследование аппроксимации. Рассмотрим основные приемы исследования разностных схем на устойчивость.

XII.2.1. Признак фон Неймана

Самым употребительным является **спектральный признак устойчивости**, применяемый для исследования устойчивости эволюционных

задач. В литературе для этого метода иногда употребляются синонимы — **метод Фурье, признак фон Неймана.**

Введем вектор разностного решения для данного временного слоя

$$\mathbf{y}^n = (y_0^n, y_1^n, \dots, y_M^n)^T.$$

Если разностная схема использует значения сеточной функции только на двух последовательных слоях, то такая разностная схема называется *двухслойной*. В данном разделе будем рассматривать только двухслойные разностные схемы.

Для двухслойной разностной схемы с постоянными коэффициентами можно ввести запись

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{A}_0 \mathbf{y}^n + \tau \mathbf{f}^{n+1}. \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{A}_0 и \mathbf{A}_1 — матрицы.

Пусть мы сумели (возможно, неединственным образом) представить решение на следующем слое в виде

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{R}_\tau \mathbf{y}^n + \boldsymbol{\sigma}^n.$$

Оператор \mathbf{R}_τ называется оператором послойного перехода. В частном случае (2.1) $\mathbf{R}_\tau = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_0$.

Определение 7. Разностная схема (1.2) называется *равномерно устойчивой* по начальным данным, если $\exists \rho$ и $\exists C$, причем C не зависит от сеточных параметров, такие что $\forall n = 0, 1, \dots, N$, справедлива оценка

$$\|\mathbf{y}^{n+1}\| \leq \rho \|\mathbf{y}^n\|,$$

причем $\forall n \quad \rho^n \leq C$.

В качестве ρ обычно выбирают либо

$$\rho = 1, C = 1,$$

и тогда говорят о строгой устойчивости по начальным данным, либо

$$\rho = 1 + c_0 \tau, \quad \rho = e^{c_0 \tau}, \quad C = \exp(c_0 T),$$

и тогда говорят о нестрогой устойчивости по начальным данным.

При любом выборе ρ имеем оценку

$$\|\mathbf{y}^n\| \leq \rho^n \|\mathbf{y}^0\| \leq C \|\mathbf{y}^0\|.$$

Для равномерной устойчивости по начальным данным необходимо, чтобы все степени оператора перехода были ограничены

$$\forall n = 1, \dots, N \quad \left\| \mathbf{R}_\tau^n \right\| \leq \rho^n \leq C. \quad (2.2)$$

Для оценки нормы оператора по слойного перехода можно воспользоваться собственными значениями этого оператора $\|\mathbf{R}_\tau\| \geq \max |\lambda_j|$.

Теорема 3 (спектральный признак устойчивости фон Неймана). *Необходимым условием устойчивости по начальным данным является выполнение следующего неравенства для всех собственных значений оператора перехода*

$$|\lambda| \leq 1 + c_0 \tau.$$

Обычно устойчивость исследуется отдельно для каждой фурье-гармоники решения

$$y_m^n = \lambda^n e^{i\omega m}.$$

Определение 8. Разностная схема (2.1) устойчива по правой части, если для решения (2.1) в любой момент времени выполнено условие

$$\|\mathbf{y}^n\| \leq M \|\mathbf{f}\|,$$

причем M не зависит от сеточных параметров.

Теорема 4. Пусть линейная двухслойная разностная схема может быть представлена в виде $\mathbf{A}_1 \mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{A}_0 \mathbf{y}^n + \mathbf{t} \mathbf{f}^{n+1}$. Пусть эта разностная схема устойчива по начальным данным и выполнено условие (2.2), оператор \mathbf{A}_1 равномерно обратим (то есть $\|\mathbf{A}_1^{-1}\| \leq C_1$) и функция правой части ограничена на каждом слое по времени. Тогда разностная схема устойчива по правой части и имеет место оценка

$$\max_n \|\mathbf{y}^n\| \leq C \left(\|\mathbf{y}^0\| + C_1 \tau \sum_n \|\mathbf{f}^n\| \right).$$

Если условие устойчивости выполнено при любых соотношениях между шагами по времени и пространству, то такие схемы называются **абсолютно** или **безусловно** устойчивыми. Если для устойчивости схемы требуется выполнение дополнительного условия, накладывающего определенную связь между изменением шагов по времени и пространству, то такие схемы называются **условно** устойчивыми.

Пример 1. Рассмотрим схему, называемую явный левый уголок для решения одномерного линейного уравнения переноса:

$$u'_t + cu'_x = f(t, x) \text{ при } c > 0:$$

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = f_m^n.$$

Для исследования устойчивости применим спектральный признак.

Подставим $y_m^n = \lambda^n e^{iam}$ в однородное разностное уравнение, так как из устойчивости по начальным данным следует устойчивость по правой части. В результате получим

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{iam} - \lambda^n e^{iam}}{\tau} + c \frac{\lambda^n e^{iam} - \lambda^n e^{i\alpha(m-1)}}{h} = 0.$$

Нас интересует нетривиальное решение, поэтому сокращая на общий множитель всех членов $\lambda^n e^{ia}$, получим спектр оператора перехода

$$\lambda = 1 - ct/h + e^{-ia} ct/h.$$

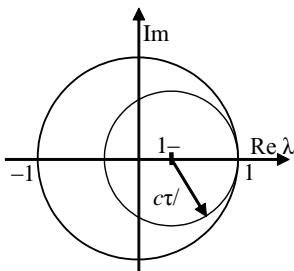


Рис. 2.1. Спектр разностного оператора схемы «явный уголок» для линейного уравнения переноса при числе Куранта меньше единицы

(числом) числе Куранта меньше единицы.

При различных значениях параметра α получим на комплексной плоскости окружность с центром в точке $(1 - ct/h, 0)$ радиуса ct/h . При числе Куранта $ct/h \leq 1$ эта окружность лежит внутри единичной (рис. 2.1), тем самым выполнен спектральный признак устойчивости. Таким образом, данная разностная схема является условно устойчивой — она устойчива при (гиперболическом)

XII.2.2. Энергетический признак устойчивости

Для двухслойных схем используется **каноническая** форма записи разностной схемы:

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{y}^n = \mathbf{f}^n. \quad (2.3)$$

Если $\mathbf{B} = \mathbf{E}$, то разностная схема является явной. Разностную схему (2.3) при нулевой правой части будем называть **однородной**.

Определение 9. Однородная разностная схема (2.3) равномерно устойчива по начальным данным, если для решения (2.3) выполнена оценка

$$\|\mathbf{y}^{n+1}\| \leq M_1 \|\mathbf{y}^0\|,$$

причем M_1 не зависит от сеточных параметров.

Определение 10. Разностная схема (2.3) устойчива по правой части, если для решения (2.3) в любой момент времени выполнено условие

$$\|\mathbf{y}^{n+1}\| \leq M_2 \|\mathbf{f}\|,$$

причем M_2 не зависит от сеточных параметров.

Под операторными неравенствами ниже мы будем понимать следующее. Говорят, что оператор \mathbf{A} положительно определен ($\mathbf{A} > 0$), если $\forall \mathbf{u} \neq 0 (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$. Аналогично говорят, что оператор $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$, если $\forall \mathbf{u} \neq 0$ имеет место неравенство $(\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u})$.

Теорема 5 (энергетический признак устойчивости) по начальным данным А. А. Самарского). Для задачи Коши при $\mathbf{y}^0 = \psi$ для однородного уравнения (2.3) при условии $\mathbf{B} = \mathbf{B}^*$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* > 0$ условие

$$\mathbf{B} \geq \tau \mathbf{A}/2 \quad (2.4)$$

необходимо и достаточно для устойчивости по начальным данным в энергетической норме, порождаемой оператором \mathbf{A} , то есть

$$\|\mathbf{y}^{n+1}\|_{\mathbf{A}} \leq \|\mathbf{y}^0\|_{\mathbf{A}} \equiv \|\psi\|_{\mathbf{A}}.$$

Теорема 6. Пусть разностная схема (2.3) с оператором $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* > 0$ равномерно устойчива по начальным данным. Тогда она устойчива и по правой части, причем выполнена оценка

$$\|\mathbf{y}^n\| \leq c_1 \|\mathbf{y}^0\| + c_2 \|\mathbf{f}^n\|.$$

Последняя теорема очень важна, так как позволяет исследовать тем или иным способом устойчивость только однородной задачи, устойчивость по правой части следует из устойчивости по начальным данным.

Здесь необходимо сделать важное замечание: результат этой теоремы есть прямое следствие того факта, что правая часть уравнения **не зависит от иско-мого решения**. Фактически исследуется на устойчивость только аппроксимация дифференциального оператора в частных производных. Если в правой части уравнения появляется зависимость от u , то ситуация значительно усложняется. Не существует общих методов исследования устойчивости разностных схем для нелинейных уравнений в частных производных. Один из эвристических приемов, не имеющих строгого обоснования, — принцип замороженных коэффициентов. О нем речь пойдет ниже.

Пример 2. Рассмотрим явную схему для уравнения теплопроводности $u'_t = a^2 u''_{xx} - f(t, x)$:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} - a^2 \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2} = f_m^n.$$

Приведем эту схему к каноническому виду

$$\mathbf{E} \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau} - a^2 \Lambda_{xx} \mathbf{y}^n = f_m^n, \quad \Lambda_{xx} \mathbf{y}^n = \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}.$$

Оператор второй разностной производной является симметричным отрицательно определенным, поэтому для него выполнено

$$\lambda_{\min} \mathbf{E} \leq -\Lambda_{xx} \leq \lambda_{\max} \mathbf{E}. \quad (2.5)$$

Сравнивая необходимое и достаточное условие устойчивости (2.2) в энергетической норме, порождаемой оператором Λ_{xx} : $\mathbf{E} \geq -a^2 \tau \Lambda_{xx}/2$ с условием (2.5), получим $a^2 \tau / 2 \leq 1/\lambda_{\max}$. Спектр оператора второй разностной производной был вычислен в теме 9, было получено, что $\lambda_{\max} = 4/h^2$. Таким образом, из энергетических неравенств получим, что явная схема для уравнения теплопроводности является устойчивой при выполнении условия

$$a^2 \tau / h^2 \leq 1/2. \quad (2.6)$$

Число $a^2 \tau / h^2$ называется параболическим числом Куранта.

XII.2.3. Сеточный принцип максимума

Сеточный принцип максимума применяют к схемам решения уравнения переноса, а также к линейным параболическим уравнениям.

Сформулируем признак устойчивости явных и неявных двухслойных линейных разностных схем. Запишем двухслойную схему (2.1) в следующем виде:

$$\sum_k \alpha_k y_{m+k}^{n+1} = \sum_l \beta_l y_{m+l}^n + \varphi_m^n.$$

Коэффициенты α_k перенумеруем так, чтобы

$$|\alpha_0| = \max_k |\alpha_k|.$$

Тогда

а) схема равномерно устойчива по начальным данным, если

$$(1+c\tau)|\alpha_0| \geq \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| + \sum_l |\beta_l|, \quad c = \text{const}; \quad (2.7)$$

б) схема устойчива по правой части, если выполнено (2.7) и

$$|\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \geq \frac{\kappa}{\tau}, \quad \kappa = \text{const} > 0.$$

XII.2.4. Принцип замороженных коэффициентов

Пусть дана разностная схема для эволюционного уравнения с непостоянными коэффициентами или для нелинейного уравнения. Использование спектрального признака в данном случае невозможно. Применим следующий прием. Будем считать, что мелкость разбиения сетки у нас такова, что на расстоянии нескольких шагов по пространству и за небольшое количество шагов по времени функции, входящие в качестве коэффициентов, меняются слабо. Тогда будем считать их постоянными («заморозим» коэффициенты) и применим спектральный признак устойчивости. Мы получим условие устойчивости разностной схемы в окрестности какого-либо узла. Затем потребуем, чтобы расчеты проводились с такими значениями параметров, чтобы условие устойчивости выполнялось при всех возможных значениях коэффициентов.

Пример 3. Рассмотрим явную схему для уравнения Хопфа $u'_t + u u'_x = 0$:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + y_m^n \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0.$$

«Замораживаем» коэффициент перед пространственной производной, считаем, что $y_m^n = b$. Имеем разностную схему с постоянными коэффициентами (см. пример 1). Она устойчива в случае $0 < b\tau/h \leq 1$. Тогда в соответствии с принципом замороженных коэффициентов можно предполагать, что разностная схема может быть устойчивой, если для любого слоя по времени выполнено $\min_m y_m^n \geq 0$, $\max_m y_m^n / h \leq 1$.

Принцип замороженных коэффициентов не только не имеет строгого обоснования, но и может приводить к неверным результатам. Так, один из контрпримеров приведен в [26].

XII.2.5. Условие Куранта–Фридрихса–Леви

Пусть поставлена задача (задача Коши или начально-краевая задача) для дифференциального уравнения в частных производных. Зафиксируем какую-нибудь точку в области, где ищется решение данной задачи. Введем понятие множества зависимости для данной точки.

Определение 11. Множеством зависимости для данной точки называется такое множество в области задания начальных и краевых условий, что решение в данной точке зависит от функций начальных и краевых условий только на этом множестве.

Например, для задачи Коши для линейного уравнения теплопроводности (пример 2) для любой точки полосы, в которой ищется решение,

множеством зависимости будет вся числовая прямая, где заданы начальные условия. Для задачи Коши для уравнения переноса из примера 1 множеством зависимости будет единственная точка в области начальных данных. Подробнее об этом речь пойдет ниже.

Аналогично можно определить область зависимости и для разностной задачи.

Определение 12. Множеством зависимости для данной точки в сеточной области называется такое множество сеточных узлов в области задания начальных и краевых условий, что решение разностной задачи в данной точке зависит от значений сеточных функций начальных и краевых условий только на этом множестве.

Теорема 7 (Р. Курант). Для того чтобы значения решений сеточной задачи в точке P сходились при $h \rightarrow 0$ к значению решения дифференциальной задачи, необходимо, чтобы каждая точка Q множества зависимости для значения $u(P)$ решения дифференциальной задачи была предельной при $h \rightarrow 0$ точкой для последовательности точек из областей зависимости сеточных задач.

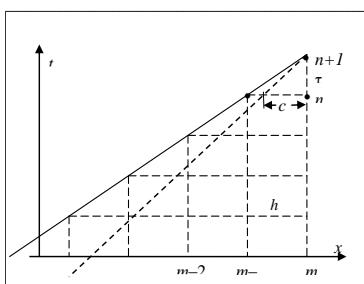


Рис. 2.2. Область зависимости решения разностной задачи и дифференциальной задачи

задачи в точке P сходились при $h \rightarrow 0$ к значению решения дифференциальной задачи, необходимо, чтобы каждая точка Q множества зависимости для значения $u(P)$ решения дифференциальной задачи была предельной при $h \rightarrow 0$ точкой для последовательности точек из областей зависимости сеточных задач.

Рассмотрим примеры 1 и 2 с точки зрения удовлетворения условию Куранта–Фридрихса–Леви.

В примере 1 областью зависимости решения дифференциальной задачи является точка пересечения характеристики, выпущенной назад из точки (x_m, t^{n+1}) , с областью начальных условий при $t = 0$. Область зависимости решения, получаемого по разностной схеме «явный уголок» строится следующим образом. Решение в рассматриваемом сеточном узле зависит от значений сеточной функции в двух точках (x_m, t^n) и (x_{m-1}, t^n)

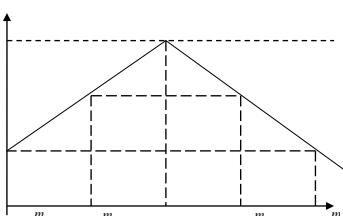


Рис. 2.3. Область зависимости решения разностной задачи — основание равнобедренного треугольника, область зависимости решения дифференциальной задачи — все точки на прямой $t = 0$

на предыдущем слое, затем — от значений в трех точках (x_m, t^n) , (x_{m-1}, t^n) и (x_{m-2}, t^n) еще на слой ниже и т.д. до самого нижнего слоя. Образуется треугольник, в основании которого лежат узлы с номерами от $m-n$ до m и составляющие область зависимости разностного решения. Если характеристика дифференциального уравнения лежит внутри этого треугольника, то схема устойчива, а если снаружи — то неустойчива.

Как следует из построения, показанного на рис. 2, характеристика будет лежать внутри треугольника при выполнении условия Куранта $c\tau/h \leq 1$.

Для примера 2 ситуация другая. Областью зависимости решения в точке (x_m, t^{n+1}) для дифференциальной задачи является прямая $t=0$ (рис. 3). Для разностной задачи область зависимости решения в узле (x_m, t^{n+1}) строится так. На предыдущем временном решении зависит от значений сеточной функции в трех точках (x_{m-1}, t^n) , (x_m, t^n) , (x_{m+1}, t^n) , на слой ниже — в пяти точках (x_{m-2}, t^n) , (x_{m-1}, t^n) , (x_m, t^n) , (x_{m+1}, t^n) и (x_{m+2}, t^n) и т.д. Опять образуется треугольник, в основание которого и попадают узлы, составляющие область зависимости разностной задачи. Из-за другого шаблона разностной схемы этот треугольник отличается от того, что получился при рассмотрении примера 1. Точки на прямой $t=0$ могут быть предельными точками области зависимости разностной задачи только в том случае, когда шаг по времени стремится к нулю существенно быстрее, чем шаг по пространству, отсюда и возникает условие $\tau \sim h^2$.

XII.2.6. Исследование устойчивости разностных схем непосредственно по определению

Методы, описанные в предыдущих разделах, пригодны в основном для эволюционных задач. Среди уравнений математической физики важное место занимают уравнения эллиптического типа (например, уравнения Пуассона, Лапласа, Гельмгольца), устойчивость разностной аппроксимации которых такими способами исследовать невозможно. В этом случае приходится прибегать непосредственно к определению 5. Техника доказательства устойчивости в этом случае будет описана в теме 15 «Эллиптические уравнения».

IX.3. Монотонность двухслойных схем

Определение 13. Однородные разностные схемы, сохраняющие монотонность пространственного профиля разностного решения, называются **монотонными**.

Для учебных целей мы используем самое простое определение монотонности [27]. В литературе существуют и другие (не эквивалентные друг другу) определения.

Теорема 8. Явная двухслойная линейная однородная схема

$$y_m^{n+1} = \sum_l \beta_l y_{m+l}^n \quad (3.1)$$

монотонна тогда и только тогда, когда все $\beta_l \geq 0$.

Неявные схемы могут быть приведены к виду (3.1) только при суммировании бесконечного числа членов ряда. Вычисление коэффициентов β_l в этом случае не всегда тривиально.

IX.4. Методы построения разностных схем

XII.4.1. Метод аппроксимации производных конечными разностями

Заключается в замене входящих в дифференциальное уравнение производных их разностной аппроксимацией того или иного порядка на каком-либо шаблоне.

Вернемся еще раз к примеру 1. Разностную схему для уравнения переноса $u'_t + cu'_x = f(t, x)$ (при $c > 0$) можно получить, аппроксимируя производную по времени разностью вперед, а пространственную производную — разностью назад относительно точки (x_m, t^n) , приходим к уже известной нам схеме «явный левый уголок»:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = f_m^n .$$

Этот путь один из самых очевидных на прямоугольных сетках. В случае, когда используются более сложные пространственные сетки, применение этого метода затруднено.

XII.4.2. Метод неопределенных коэффициентов

Выберем шаблон разностной схемы, припишем неизвестный вес каждому узлу, разложим в каждой точке сеточной проекцию точного решения в ряд Тейлора и составим систему линейных уравнений для определения коэффициентов, приравнивая коэффициенты перед присутствующими в уравнении производными единице, а перед отсутствующими — нулю. Иногда не все коэффициенты перед членами одного порядка малости можно приравнять к нулю, тогда приходится выбирать вариант, более предпочтительный из тех или иных внешних соображений. Иногда коэффициенты схемы подбираются так, чтобы разностная схема была бы как можно ближе к монотонной в предположении, что свойства разностной схемы непрерывно зависят от ее коэффициентов.

XII.4.3. Интегро-интерполяционный метод и метод конечных объемов

Эти методы апеллируют непосредственно к интегральной форме законов сохранения. Законы сохранения в виде уравнений в частных производных обычно являются следствием интегральных законов сохранения, получаемые в предположении существования и непрерывности соответствующих производных. Неудивительно, что схемы, выводимые этими методами, обладают одним из важнейших свойств для разностных схем в приложениях к задачам математической физики — **консервативностью**, т.е. интегрирование закона сохранения по всему расчетному объему может быть сведено к сумме интегралов по отдельным ячейкам. В литературе существуют различные определения консервативности.

Вторым важным преимуществом методов этого класса является возможность построения схем на сетках сложной структуры. Примеры применения метода неопределенных коэффициентов и интегро-интерполяционного метода приведены в разделе «Задачи с решениями».

XII.4.4. Интерполяционно-характеристические методы

Интерполяционно-характеристические построения разностных схем применяются для гиперболических систем уравнений, для которых существуют характеристики.

Рассмотрим снова уравнение из примера 1. Покажем, что схема «явный левый уголок» для уравнения переноса

$$u'_t + cu'_x = f(t, x) \quad (4.1)$$

может быть получена как интерполяционно-характеристическая.

Напомним, что характеристическая форма уравнения переноса строится с помощью замены переменных

$$\eta = x + ct,$$

$$\xi = x - ct.$$

Воспользуемся формулами дифференцирования при замене переменных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta} c + \frac{\partial u}{\partial \xi} (-c),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Подставим эти равенства в уравнение (4.1). Тогда уравнение переноса приводится к характеристической форме $2c \frac{\partial u}{\partial \eta} = f\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right)$ при $\xi = x - ct = \text{const}$, определяющем характеристику. Решение этого уравнения может быть получено интегрированием вдоль характеристики от некоторого начального значения

$$u(x_m, t^{n+1}) = u^* + \int_{\eta^*}^{\eta} \frac{1}{2c} f\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right) d\eta.$$

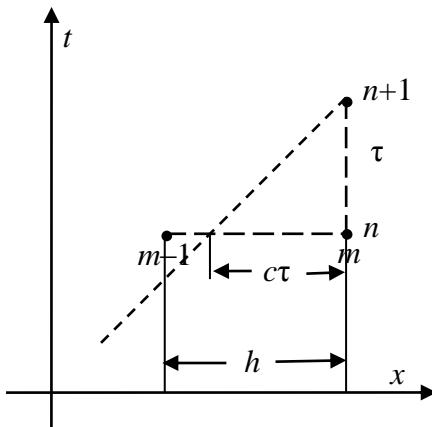


Рис. 4.1. Интерполяционно-характеристический способ получения схемы «явный уголок»

Выпустим характеристику $x - ct = \text{const}$ из точки (x_m, t^{n+1}) назад, до пересечения с предыдущим времененным слоем. Получим значение решения в этой точке линейной интерполяцией по значениям в двух соседних точках (x_m, t^n) , (x_{m-1}, t^n) с учетом того, что расстояние от точки пересечения до точки (x_m, t^n) равно $c\tau$:

$$y^* = y_{m-1}^n + \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} (h - c\tau),$$

или

$$y^* = \frac{c\tau}{h} y_{m-1}^n + \left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) y_m^n.$$

Интегрируя вдоль характеристики, заменим интеграл формулой прямоугольников при известном значении правой части в угловой точке. Для этого вычислим приращение η на отрезке характеристики:

$$\eta - \eta^* = (x_m + ct^{n+1}) - (x^* + ct^*) = (x_m - x^*) + c(t^{n+1} - t^*) = 2c\tau.$$

Тогда окончательно решение в рассматриваемой точке шаблона есть

$$y_m^{n+1} = y^* + \frac{2c\tau}{2c} f_m^n \equiv \frac{c\tau}{h} y_{m-1}^n + \left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) y_m^n + \tau f_m^n.$$

Нетрудно видеть, что получена та же самая разностная схема «явный левый уголок». При числе Куранта, в точности равном единице, интерполяция является точной, т.к. характеристика пересекается с нижним слоем в сеточном узле (x_{m-1}, t^n) .

При других способах интерполяции на нижнем слое и другой аппроксимации интеграла могут быть получены иные интерполяционно-характеристические схемы.

Интерполяционно-характеристические схемы относительно легко строятся и для неравномерных сеток в многомерном случае.

XII.4.5. Метод прямых

Основная идея группы численных методов заключается в замене производных по некоторым переменным разностными уравнениями и сохранением части производных в дифференциальном виде. После такой замены возникает система дифференциально-разностных уравнений, которая решается с помощью численных методов решения ОДУ. Поясним сказанное на примере. Пусть решается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Постановка задачи есть

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(X, t) = \varphi_2(t).$$

Заменим вторую производную по пространству конечно-разностной формулой. Получаем систему ОДУ

$$\frac{\partial y_m}{\partial t} = a \frac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}}{h^2} \quad (4.2a)$$

для внутренних точек области. В узлах около границы воспользуемся граничными условиями, тогда мы получим

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = a \frac{\varphi_1(t) - 2y_1 + y_2}{h^2}, \quad (4.2b)$$

$$\frac{\partial y_{M-1}}{\partial t} = a \frac{y_{M-2} - 2y_{M-1} + \varphi_2(t)}{h^2}. \quad (4.2c)$$

В качестве начальных данных используем

$$y_m(0) = \psi(x_m).$$

Решая получившуюся систему ОДУ тем или иным численным методом, находим решение уравнения теплопроводности простейшим вариантом метода прямых. Методы прямых можно использовать для решения уравнений в частных производных гиперболического, параболического и эллиптического типов.

XII.4.6. Компактные разностные схемы

Рассмотрим подход, в котором разностный оператор добавляется «неявным» образом к применению метода прямых на нерасширенном (компактном) шаблоне. В качестве примера рассмотрим численное решение уравнения переноса.

Вначале рассмотрим модельное дифференциальное равенство

$$\frac{du}{dx} = f(u).$$

Для разностной аппроксимации данного дифференциального равенства используем разностную схему, записанную с использованием неопределенных коэффициентов:

$$\alpha_1 f_{m-1} + \alpha_2 f_m + \alpha_3 f_{m+1} = \beta_1 u_{m-1} + \beta_2 u_m + \beta_3 u_{m+1}.$$

В качестве опорной точки примем среднюю точку шаблона, имеющую индекс m . Если рассматривать функции, входящие в равенство, как проекции достаточно гладких функций, то можно получить условия аппроксимации (на равномерной сетке) на гладком решении третьего порядка аппроксимации. Эти условия примут вид

$$\beta_1 = -\frac{1+\beta_2 h}{2h}, \quad \beta_3 = \frac{1-\beta_2 h}{2h}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{6} + \frac{\beta_2 h}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{4}{6}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{6} - \frac{\beta_2 h}{4},$$

при этом один коэффициент остается свободным. При этом в качестве дополнительного условия использована нормировка $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение в частных производных — однородное уравнение переноса. Для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ по аналогии имеем

$$\alpha_1 \frac{\partial u_{m-1}}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial u_m}{\partial t} + \alpha_3 \frac{\partial u_{m+1}}{\partial t} = -c(\beta_1 u_{m-1} + \beta_2 u_m + \beta_3 u_{m+1})$$

или

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{\beta_2 h}{4} \right) \frac{\partial u_{m-1}}{\partial t} + \frac{4}{6} \frac{\partial u_m}{\partial t} + \left(\frac{1}{6} - \frac{\beta_2 h}{4} \right) \frac{\partial u_{m+1}}{\partial t} = c \frac{1+\beta_2 h}{2h} u_{m-1} - \beta_2 c u_m - c \frac{1-\beta_2 h}{2h} u_{m+1}.$$

В зависимости от знака скорости переноса c выбираем коэффициент β_2 таким образом, чтобы производная по пространству определялась только по двум точкам, в случае положительной скорости распространения возмущений $1-\beta_2 h=0$, откуда $\beta_2=1/h$. В случае отрицательной скорости распространения возмущений $1+\beta_2 h=0$, $\beta_2=-1/h$. Диффе-

ренциальную по времени и разностную по пространству задачу можно записать в операторном виде $\mathbf{A}^n \frac{\partial u_m}{\partial t} = \mathbf{B}^n u_m$. Здесь матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют вид

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \alpha_2^0 & \alpha_3^0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_1^N & \alpha_2^N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^n = \begin{pmatrix} \beta_2^0 & \beta_3^0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_1^N & \beta_2^N \end{pmatrix}.$$

Первая и последняя строки матриц получаются из аппроксимации граничного условия с нужным порядком и дополнительного замыкающего соотношения. Можно рассматривать полученную схему как более сложный вариант метода прямых, когда система ОДУ не записана в нормальной форме Коши. Если теперь заменить производные по времени на разности каким-либо подходящим образом, то получим разностную схему, относящуюся к классу компактных разностных схем. Простейшим примером такой компактной разностной схемы будет

$$\mathbf{A}^n \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \mathbf{B}^n u_m^n.$$

XII.4.7. Бикомпактные разностные схемы Б. В. Рогова

Опишем вариант метода прямых получения схемы четвертого порядка по пространству на минимальном двухточечном шаблоне для решения уравнения переноса. Этот способ предложен в работах Б. В. Рогова с соавторами. Запишем уравнение переноса в операторном виде как

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.3)$$

Отнесем к величинам, подлежащим определению в ходе численного решения, не только узловые значения искомой функции u_m , но и интегральные средние по элементарным отрезкам:

$$\bar{u}_m = \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} u dx.$$

Для получения системы уравнений метода прямых проинтегрируем (4.3) по пространственной ячейке. Это приводит к уравнению

$$\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial t} + \frac{c}{h} (u_{m+1} - u_m) = 0, \quad (4.4)$$

в которое входят и узловые значения, и интегральное среднее. Для получения второго уравнения системы проинтегрируем по ячейке независимое дифференциальное следствие уравнения (4.3) $\partial L(u)/\partial x = 0$, т.е. уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

В результате получим уравнение, в которое опять входит производная по x от искомой функции:

$$\frac{\partial(u_{m+1} - u_m)}{\partial t} + c \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{m+1} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_m \right) = 0. \quad (4.5)$$

Для замыкания системы уравнений воспользуемся формулой интегрирования Эйлера–Маклорена:

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} g(x) dx = \frac{h}{2} (g_m + g_{m+1}) - \frac{h^2}{12} (g'_{m+1} - g'_m) + O(h^5),$$

которую перепишем в виде

$$g'_{m+1} - g'_m = \frac{6}{h} (g_m + g_{m+1}) - \frac{12}{h} \bar{g}_m + O(h^3). \quad (4.6)$$

Заменяя в (4.5) разность производных по правилу (4.6), получаем второе уравнение системы

$$\frac{\partial(u_{m+1} - u_m)}{\partial t} + \frac{6c}{h} (u_m + u_{m+1}) - \frac{12c}{h} \bar{u}_m = 0. \quad (4.7)$$

Уравнения (4.4) и (4.7) вместе с граничными условиями для входящей функции распределения образуют замкнутую систему дифференциально-разностных уравнений метода прямых.

По времени можно использовать различные схемы. Автор схемы предлагает использовать диагонально-неявные методы Рунге–Кутты третьего порядка аппроксимации, которые можно интерпретировать как комбинацию неявных методов Эйлера с различными шагами на каждой стадии метода. Таким образом, получающаяся схема имеет компактный (двуточечный) шаблон как по пространству, так и по времени, поэтому названа **бикомпактной**.

Разберем реализацию базовой схемы неявного метода Эйлера для решения системы (4.4), (4.7). Записывая неявную аппроксимацию для этих уравнений и обозначая число Куранта $\sigma = c\tau/h$, получим систему

$$\begin{cases} \bar{u}_m^{n+1} = \bar{u}_m^n - \sigma(u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}), \\ u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1} = u_{m+1}^n - u_m^n - 6\sigma(u_{m+1}^{n+1} + u_m^{n+1}) + 12\sigma\bar{u}_m^n. \end{cases}$$

Ее решение позволяет находить узловые значения методом бегущего счета слева направо от известного значения на левой границе (при $c > 0$) и данных с предыдущего временного слоя:

$$u_{m+1}^{n+1}(1 + 6\sigma + 12\sigma^2) = u_m^{n+1}(1 - 6\sigma + 12\sigma^2) + u_{m+1}^n - u_m^n + 12\sigma\bar{u}_m^n,$$

попутно пересчитывая \bar{u}_m^{n+1} из первого уравнения системы.

XII.5. Задачи на доказательство

XII.5.1. Доказать теорему Лакса–Рябенького–Филиппова.

XII.5.2. Доказать, что для линейных разностных схем определения 4 и 5 эквивалентны.

XII.5.3. Доказать теорему 4.

XII.5.4. Доказать, что из монотонности разностной схемы в смысле (3.1) следует ее устойчивость.

XII.5.5. Показать, что достаточным условием монотонности двухслойной схемы с весами

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \xi a \Lambda_{\bar{x}\bar{x}} y^{n+1} + (1 - \xi) a \Lambda_{\bar{x}\bar{x}} y^n$$

для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

является условие $a\tau/h^2 \leq 1/(2(1 - \xi))$.

XII.5.6. Показать, что необходимым и достаточным условием монотонности двухслойной схемы с весами

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \xi a \Lambda_{\bar{x}\bar{x}} y^{n+1} + (1 - \xi) a \Lambda_{\bar{x}\bar{x}} y^n$$

для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ является условие $a\tau/h^2 \leq (2 - \xi)/(4(1 - \xi)^2)$.

XII.6. Задачи с решениями

XII.6.1. Исследовать на аппроксимацию и устойчивость трехслойную схему Ричардсона $\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = a^2 \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}$, аппроксимирующую линейное уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

На том же самом шаблоне получить безусловно устойчивую схему.

Решение. В силу симметрии шаблона схемы для исследования ее на аппроксимацию проводим разложение в ряд Тейлора проекции точного решения в окрестности центральной точки шаблона. Несложно заметить, что в левой части остаются только производные нечетных порядков при разложении в ряд Тейлора, а в правой — четных. Таким образом, порядок аппроксимации схемы второй как по времени, так и по пространственным переменным.

Исследуем на устойчивость трехслойную схему по спектральному признаку. Подстановка частного решения в виде $u_m^n = \lambda^n e^{i\varphi m}$ дает квадратное уравнение для определения спектра оператора послойного перехода $\lambda^2 + \frac{8a\tau}{h^2} \lambda \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1 = 0$. Дискриминант уравнения всегда положительный. По теореме Виета в случае действительных корней один из корней этого уравнения при любом значении параметра φ по модулю больше единицы. Для устойчивости трехслойной схемы нам необходимо потребовать, чтобы все корни, определяющие норму оператора послойного перехода, были бы по абсолютной величине меньше единицы. Таким образом, схема Ричардсона безусловно неустойчива.

«Исправлением» схемы оказывается замена в выражении $\frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}$ для аппроксимации производной по пространству значения функции в центральной точке шаблона на среднее арифметическое на двух слоях по времени $0,5(y_m^{n-1} + y_m^{n+1})$ (схема Франкела–Дюффорта):

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{2\tau} = \frac{a}{h^2} \left[y_{m-1}^n - \left(y_m^{n+1} + y_m^{n-1} \right) + y_{m+1}^n \right].$$

Это явная схема (значение сеточной функции на верхнем слое вычисляется явно). Исследование на устойчивость по спектральному признаку приводит к уравнению

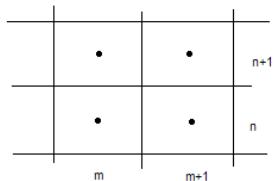
$$(1+2\sigma)\lambda^2 + 4\sigma\lambda \cos\varphi - (1-2\sigma) = 0, \quad \sigma = at/h^2.$$

По теореме Виета корни этого уравнения всегда меньше 1 по модулю, схема безусловно устойчива по спектральному признаку. Однако она обладает лишь условной аппроксимацией порядка $O(\tau^2, h^2, \tau^2/h^2)$.

XII.6.2. С помощью интегро-интерполяционного метода получите схему, аппроксимирующую квазилинейное стационарное уравнение теплопроводности в плазме

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(u^{5/2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u^{5/2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y)$$

на равномерной пространственной сетке, состоящей из центров прямоугольников.



Решение. Пусть a, b — стороны прямоугольника. Уравнение теплопроводности можно записать в виде двух уравнений для температуры и потока тепла

$$\operatorname{div} \mathbf{W} + ku = f(x, y), \quad \mathbf{W} = -u^{5/2} \operatorname{grad} u.$$

Интегрируем первое уравнение по ячейке. Использование теоремы Остроградского–Гаусса дает

$$a \sum_{k=1,3} W_n^k + b \sum_{k=2,4} W_n^k + ku_{nm}ab = Q_{mn}ab,$$

где W_n^k — нормальная проекция потока к k -му ребру ячейки (их четыре) с внешней нормалью \mathbf{n}^k .

Из второго уравнения имеем

$$\mathbf{W} = -u^{5/2} \operatorname{grad} u, \quad W_n^k = -u^{5/2} \left(\operatorname{grad} u, \mathbf{n}^k \right) = -u^{5/2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}^k}.$$

Нормаль в примере всегда направлена между центрами ячеек, от центра рассматриваемой ячейки к центру ячейки соседней. В этом нелинейном примере аппроксимировать коэффициент теплопроводности на ребре со вторым порядком аппроксимации можно разными способами, и все они правильные: степень полусуммы (по мнению А. А. Самарского, предпочтительный вариант), полусумма степеней, полусумма обратных величин к коэффициенту теплопроводности в центрах ячейки, и даже можно степень убрать под производную. Здесь приведем формулу только для первого варианта из перечисленных

$$W_n^{mn \rightarrow mn+1} = - \left(\frac{u_{mn+1} + u_{mn}}{2} \right)^{5/2} \frac{u_{mn+1} - u_{mn}}{a}.$$

Выражения для аппроксимации потоков для всех остальных ячеек получаются аналогично. Окончательно имеем

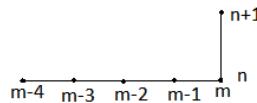
$$-a \left(\left(\frac{u_{mn+1} + u_{mn}}{2} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{u_{mn+1} - u_{mn}}{b} + \left(\frac{u_{mn-1} + u_{mn}}{2} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{u_{mn-1} - u_{mn}}{b} \right) - \\ -b \left(\left(\frac{u_{m+1n} + u_{mn}}{2} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{u_{m+1n} - u_{mn}}{a} + \left(\frac{u_{m-1n} + u_{mn}}{2} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{u_{m-1n} - u_{mn}}{a} \right) + ku_{nm}ab = Q_{mn}ab.$$

Разделив полученное разностное уравнение на объем ячейки ab , можно с помощью непосредственной проверки убедиться, что разностное уравнение аппроксимирует производные потоков.

XII.6.3. Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему, аппроксимирующую уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

$$u(0, x) = \varphi(x); \quad 0 \leq t \leq x; \quad -\infty \leq x \leq \infty$$



на сетке

$D_h = \{(t^n, x_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \dots N; x_m = mh, h = \text{const}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
в точке $\{m, n\}$, используя заданный шаблон. Указать порядок аппроксимации.

Решение. Припишем веса точкам шаблона, двигаясь сверху вниз и справа налево, равными a, b, c, d, e, f . Тогда разностная схема будет иметь вид

$$ay_m^{n+1} + by_m^n + cy_{m-1}^n + dy_{m-2}^n + ey_{m-3}^n + fy_{m-4}^n = 0. \quad (6.1)$$

Разложим сеточную проекцию решения дифференциальной задачи в ряд Тейлора относительно точки $\{m, n\}$. Будем иметь

$$u_m^{n+1} = u_m^n + u'_n \tau + u''_n \tau^2 / 2 + \dots,$$

$$u_m^n = u_m^n,$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - u'_x h + u''_{xx} h^2 / 2 - u'''_{xxx} h^3 / 6 + u''''_{xxxx} h^4 / 24 - u'''''_{xxxxx} h^5 / 120 + \dots,$$

$$u_{m-2}^n = u_m^n - u'_x 2h + u''_{xx} (2h)^2 / 2 - u'''_{xxx} (2h)^3 / 6 + u''''_{xxxx} (2h)^4 / 24 - u'''''_{xxxxx} (2h)^5 / 120 + \dots,$$

$$u_{m-3}^n = u_m^n - u'_x 3h + u''_{xx} (3h)^2 / 2 - u'''_{xxx} (3h)^3 / 6 + u''''_{xxxx} (3h)^4 / 24 - u'''''_{xxxxx} (3h)^5 / 120 + \dots,$$

$$u_{m-4}^n = u_m^n - u'_x 4h + u''_{xx}(4h)^2 / 2 - u'''_{xxx}(4h)^3 / 6 + u''''_{xxxx}(4h)^4 / 24 - u'''''_{xxxxx}(4h)^5 / 120 + \dots$$

Подставляя эти разложения в (6.1), в качестве коэффициента перед u_m^n получаем сумму $a + b + c + d + e + f$. Этот коэффициент необходимо привести к нулю, так как в дифференциальном уравнении нет члена, пропорционального u :

$$a + b + c + d + e + f = 0.$$

Коэффициент перед u'_x есть $a\tau = 1$,

коэффициенты

перед u'_x	$(-c - 2d - 3e - 4f)h = 0,$
перед u''_{xx}	$(c + 4d + 9e + 16f)h^2 / 2 = 0,$
перед u'''_{xxx}	$(-c - 8d - 27e - 64f)h^3 / 6 = 0,$
перед u''''_{xxxx}	$(c + 16d + 81e + 256f)h^4 / 24 = -1.$

Решением полученной системы шести линейных уравнений с шестью неизвестными коэффициентами разностной схемы является следующий набор:

$$a = 1 / \tau, b = -1 / \tau - 1/h^4, c = 4/h^4, d = -6/h^4, e = 4/h^4, f = -1/h^4.$$

Окончательно схема примет вид

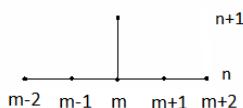
$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_m^n - 4u_{m-1}^n + 6u_{m-2}^n - 4u_{m-3}^n + u_{m-4}^n}{h^4} = 0,$$

ее порядок аппроксимации $O(\tau, h)$.

XII.6.4. Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему, аппроксимирующую уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u(0, x) = \varphi(x); \quad 0 \leq t \leq x; \quad -\infty \leq x \leq \infty$$



на сетке

$$D_h = \left\{ (t^n, x_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_m = mh, h = \text{const}, m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \right\}$$

в точке $\{m, n\}$ с максимальной точностью, используя заданный шаблон. Указать полученный порядок аппроксимации.

Решение. Припишем веса точкам шаблона: верхней точке вес a , на нижнем слое, последовательно двигаясь слева направо, припишем точкам веса b, c, d, e, f . Тогда разностная схема будет иметь вид

$$ay_m^{n+1} + by_{m-2}^n + cy_{m-1}^n + dy_m^n + ey_{m+1}^n + fy_{m+2}^n = 0. \quad (6.2)$$

Разложим сеточную проекцию решения дифференциальной задачи в ряд Тейлора относительно точки $\{m,n\}$. Будем иметь

$$u_m^{n+1} = u_m^n + u'_t \tau + u''_t \tau^2 / 2 + u'''_t \tau^3 / 6 + u''''_t \tau^4 / 24 + \dots,$$

$$u_{m-2}^n = u_m^n - u'_x 2h + u''_{xx} (2h)^2 / 2 - u'''_{xxx} (2h)^3 / 6 + u''''_{xxxx} (2h)^4 / 24 - u''''''_{xxxxx} (2h)^5 / 120 + \dots,$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - u'_x h + u''_{xx} h^2 / 2 - u'''_{xxx} h^3 / 6 + u''''_{xxxx} h^4 / 24 - u''''''_{xxxxx} h^5 / 120 + \dots,$$

$$u_m^n = u_m^n,$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + u'_x h + u''_{xx} h^2 / 2 + u'''_{xxx} h^3 / 6 + u''''_{xxxx} h^4 / 24 + u''''''_{xxxxx} h^5 / 120 + \dots,$$

$$u_{m+2}^n = u_m^n + u'_x 2h + u''_{xx} (2h)^2 / 2 + u'''_{xxx} (2h)^3 / 6 + u''''_{xxxx} (2h)^4 / 24 + u''''''_{xxxxx} (2h)^5 / 120 + \dots$$

Подставляя эти разложения в (6.2), в качестве коэффициента перед u_m^n получим сумму $a + b + c + d + e + f$. Этот коэффициент необходимо приравнять к нулю, так как в дифференциальном уравнении нет члена, пропорционального u :

$$a + b + c + d + e + f = 0.$$

Коэффициент перед u'_t

$$d\tau = 1,$$

коэффициенты

$$\text{перед } u'_x \quad (-2b - c + e + 2f)h = 0,$$

$$\text{перед } u''_{xx} \quad (4b + c + e + 4f)h^2 / 2 = -1.$$

На этом обязательные условия аппроксимации дифференциального уравнения заканчиваются. Дальнейшие условия будем использовать для повышения порядка аппроксимации. Для того чтобы сделать такое повышение максимально эффективным, заметим, что для точного решения дифференциального уравнения есть связь между временными и пространственными производными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

Таким образом, мы можем заменить вторую производную по времени в разложении значения функции в ряд Тейлора в верхней точке на четвертую производную по пространству и приравнять нулю коэффициенты при соответствующих производных:

$$\text{перед } u'''_{xxx} \quad (-8b - c + e + 8f)h / 6 = 0,$$

$$\text{перед } u'''_{xxxx} - a\tau^2 / 2 + (16b + c + e + 16f)h^4 / 24 = 0.$$

Решением полученной системы шести линейных уравнений относительно шести неизвестных коэффициентов является следующий набор коэффициентов:

$$a = 1 / \tau, \quad b = f = 1/(12h^2) - \tau/(2h^4),$$

$$c = e = -4/(3h^2) + 2\tau/h^4, \quad d = -1/\tau + 5/(2h^2) - 3\tau/h^4.$$

С учетом этих равенств получаем схему во внутренних точках области

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m-2}^n - 16u_{m-1}^n + 30u_m^n - 16u_{m+1}^n + u_{m+2}^n}{12h^2} + \\ + \tau \frac{-u_{m-2}^n + 4u_{m-1}^n - 6u_m^n + 4u_{m+1}^n - u_{m+2}^n}{h^4} = 0. \end{aligned}$$

Эту формулу можно представить также в виде

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} - \left(\frac{\tau}{2} - \frac{h^2}{12} \right) \frac{u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 6u_m^n - 4u_{m+1}^n + u_{m+2}^n}{h^4} = 0.$$

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: первый член приближает производную по времени с первым порядком, второй — вторую производную со вторым порядком, а третий представляет собой два главных члена погрешности аппроксимации этих формул, в которых четвертая производная вычислена разностным образом.

Вычисление коэффициента при старшей оставшейся степени $h^5/h^2 \equiv h^3$ дает нуль в силу симметрии коэффициентов, поэтому окончательный порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^4)$.

XII.7. Теоретические задачи

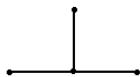
XII.7.1. Уравнение Шрёдингера $-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U\Psi$ можно в безразмерных переменных привести к виду $-i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \tilde{U}\Psi$, и для решения этого уравнения использовать двухслойную схему с весами

$$-i \frac{\Psi_m^{n+1} - \Psi_m^n}{\tau} = \xi \left(\Lambda_{\bar{x}x} \Psi^{n+1} + \tilde{U} \Psi^{n+1} \right) + (1 - \xi) \left(\Lambda_{\bar{x}x} \Psi^n + \tilde{U} \Psi^n \right).$$

Исследовать ее на сходимость.

Указание: исследовать сначала схему с нулевым потенциалом.

XII.7.2. Для однородного уравнения переноса $u_t + cu_x = 0$ методом неопределенных коэффициентов построить схему максимального порядка



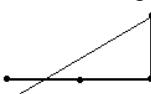
аппроксимации на приведенном шаблоне и исследовать ее сходимость к решению дифференциальной задачи.

XII.7.3. Для однородного уравнения переноса $u_t + cu_x = 0$ методом неопределенных коэффициентов построить схему максимального порядка



аппроксимации на приведенном шаблоне и исследовать ее сходимость к решению дифференциальной задачи.

XII.7.4. Интерполяционно-характеристическим методом построить схему



наивысшего порядка аппроксимации однородного уравнения переноса $u_t + cu_x = 0$. Результат сравнить с результатом предыдущей задачи.

Указание. Решение дифференциальной задачи сносится неизменным вдоль характеристики $x - ct = \text{const}$. Поэтому задачей являются построение интерполяции наивысшего порядка на нижнем слое и вычисление приближенного значения функции в точке пересечения характеристики, выпущенной из точки верхнего слоя, с нижним слоем. Решение в узле шаблона верхнего слоя получится перенесением значения этого интерпolatedенного значения на верхний слой.

XII.7.5. Используя энергетические неравенства, найти условие устойчивости двухслойной схемы с весами

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \xi a \Lambda_{\bar{x}x} y^{n+1} + (1 - \xi) a \Lambda_{\bar{x}x} y^n + \varphi^n$$

для уравнения теплопроводности $u_t = au_{xx}$.

XII.7.6. Найти условие монотонности двухслойной схемы Кранка–Николсон для уравнения теплопроводности.

XII.7.7. Для неоднородного уравнения теплопроводности $u_t = au_{xx} + f(t, x)$.



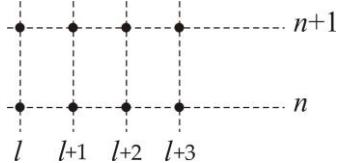
на шеститочечном шаблоне записать схему второго порядка аппроксимации по времени и четвертого по пространству на равномерной пространственной сетке.

XII.7.8. Построить методом неопределённых коэффициентов аппроксимацию уравнения Лапласа на шаблоне $\mathbb{W} = \{(x_{m-1}, y_{k-1}), (x_{m-1}, y_{k+1}), (x_{m+1}, y_{k-1}), (x_{m+1}, y_{k+1}), (x_m, y_k)\}$, если шаги по направлению x и y равны одной и той же величине h . Шаблон нарисовать.

XII.7.9. Построить на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = nt; \tau N = 1; n = 0 \dots N; x_l = lh; l = 0; \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty\}$ методом неопределённых коэффициентов разностную схему, аппроксимирующую с наивысшим порядком в точке (n, l) задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0; u(x, 0) = \psi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty,$$

используя шаблон разностной схемы



XII.7.10. Для решения задачи Коши для системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0; \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{f}(x); \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 0 \leq t \leq 1; \quad -\infty < x < +\infty,$$

на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = nt; \tau N = 1; n = 0 \dots N; x_l = lh; l = 0; \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty\}$ предложена разностная схема

$$\frac{\mathbf{y}_l^{n+1} - \mathbf{y}_l^n}{\tau} - \mathbf{A} \frac{\mathbf{y}_{l+1}^n - \mathbf{y}_{l-1}^n}{2h} - \frac{\tau}{2h^2} \mathbf{A}^2 (\mathbf{y}_{l+1}^n - 2\mathbf{y}_l^n + \mathbf{y}_{l-1}^n) = 0$$

$$\mathbf{y}_l^0 = \mathbf{f}_l; \quad n = 0 \div N-1; \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Указать для неё шаблон и исследовать на спектральную устойчивость.

XII.7.11. Какое уравнение и с каким порядком аппроксимации приближается разностной схемой

$$y_{i-1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j} - 4y_{i,j} = \frac{f_{i-1,j} + 10f_{i,j} + f_{i+1,j}}{12} h^2,$$

$$i = 1, \dots, I-1, \quad j = 1, \dots, J-1, \quad y_{0,j} = 0, \quad y_{I,j} = \psi_j, \quad j = 0, \dots, J, \quad y_{i,0} = \chi_i, \quad y_{i,J} = 0, \\ i = 1, \dots, I-1?$$

XII.7.12. Какое уравнение и с каким порядком аппроксимации приближается разностной схемой

$$\frac{1}{mh_1^2} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) (y_{m+1,n} - y_{m,n}) - \left(m - \frac{1}{2} \right) (y_{m,n} - y_{m-1,n}) \right] + \\ + \frac{1}{m^2 h_1^2} \frac{y_{m,n+1} - 2y_{m,n} + y_{m,n-1}}{h_2^2} = f_{m,n},$$

$$m = 1, \dots, M-1, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad y_{0,n} = \psi_n, \quad y_{M,n} = 0, \quad n = 0, \dots, N, \quad y_{m,0} = 0, \\ y_{m,N} = \phi_m, \quad m = 1, \dots, M-1?$$

XII.7.13. Какое уравнение и с каким порядком аппроксимации приближается разностной схемой

$$y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j} + \frac{h_x^2}{12h_y^2} \left[y_{i+1,j+1} - 2y_{i+1,j} + y_{i+1,j-1} + 10y_{i,j+1} - 20y_{i,j} + 10y_{i,j-1} + y_{i-1,j+1} - 2y_{i-1,j} + y_{i-1,j-1} \right] = 0,$$

$i = 1, \dots, I-1, j = 1, \dots, J-1, y_{i,0} = \chi_i, j = 0, \dots, J, y_{0,j} = \chi_j, y_{0,j} = 0, y_{I,j} = \psi_j, j = 0, \dots, J, y_{i,0} = 0, y_{i,J} = \varphi_i, i = 1, \dots, I-1?$

XII.7.14. Какое уравнение и с каким порядком аппроксимации приближается разностной схемой

$$\frac{1}{ih_1} \frac{1}{h_1} \left[\left(i + \frac{1}{2} \right) (y_{i+1,j} - y_{i,j}) - \left(i - \frac{1}{2} \right) (y_{i,j} - y_{i-1,j}) \right] + \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_2^2} = f_{i,j},$$

$i = 1, \dots, I-1, j = 1, \dots, J-1, y_{0,j} = 0, y_{I,j} = \psi_j, j = 0, \dots, J, y_{i,0} = \varphi_i, y_{i,J} = 0, i = 1, \dots, I-1?$

XII.7.15. Дано разностное уравнение

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = \sigma \frac{y_{m+1}^n - y_m^{n+1} - y_m^{n-1} + y_{m-1}^n}{h^2}.$$

- а) Какое дифференциальное уравнение приближается данным разностным уравнением?
- б) Какова погрешность аппроксимации? Исследовать это уравнение на аппроксимацию при $\tau/h^2 = \text{const}$.
- в) Исследовать на устойчивость решение разностного уравнения.

XII.7.16. Исследовать на устойчивость решение разностного уравнения.

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = \mu \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}, \quad (\mu > 0).$$

XII.7.17. Какая задача и с какой погрешностью приближается схемой:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \mu \left[\sigma \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\sigma) \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2} \right],$$

$$0 < \sigma < 1, \quad y_m^0 = \varphi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots ?$$

XII.7.18. Исследовать на устойчивость решение разностного уравнения

$$\frac{y_m^{n+1} - \frac{1}{2}(y_{m+1}^n + y_{m-1}^n)}{\tau} + \alpha \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = f_m^n,$$

$$y_m^0 = \varphi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots$$

Какое дифференциальное уравнение приближается этим разностным уравнением?

XII.7.19. Какое дифференциальное уравнение и с какой погрешностью аппроксимации приближается разностным уравнением

$$\frac{3y_m^{n+1} - 4y_m^n + y_m^{n-1}}{2\tau} = \sigma \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} ?$$

XII.7.20. Исследовать на устойчивость решение разностного уравнения

$$\frac{(y_{k+1}^{n+1} + y_k^{n+1}) - (y_{k+1}^n + y_k^n)}{2\tau} + a \frac{(y_{k+1}^{n+1} + y_{k+1}^n) - (y_k^{n+1} + y_k^n)}{2h} = f_{k+\frac{1}{2}},$$

$$k = 0, \pm 1, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, y_k^0 = \varphi(x_k), f_{k+\frac{1}{2}} = f(t_n + \tau/2, x_k + h/2).$$

Какая дифференциальная задача приближается разностной схемой?

XII.7.21. Исследовать на аппроксимацию разностную схему

$$\frac{y_k^{n+1} - y_k^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left[\frac{y_{k+1}^{n+1} - y_{k-1}^{n+1}}{2h} + \frac{y_{k+1}^n - y_{k-1}^n}{2h} \right] = \frac{1}{2} (f_k^{n+1} + f_k^n),$$

$$y_k^0 = \varphi(x_k) \quad k = 0, \pm 1, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$$

для задачи $u_t + au_x = f(t, x)$ $u(0, x) = \varphi(x)$ $t \geq 0$ $-\infty < x < \infty$.

IX.5.22. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{y_k^{n+1} - y_k^n}{\tau} = (1 - \theta) \frac{y_{k-1}^{n+1} - 2y_k^{n+1} + y_{k+1}^{n+1}}{h^2} + \theta \frac{y_{k-1}^n - 2y_k^n + y_{k+1}^n}{h^2},$$

$k = 1, \dots, K-1$, $n = 0, \dots, N-1$,

$$y_k^0 = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, K,$$

$$y_0^n = y_K^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Какое дифференциальное уравнение приближается данным разностным уравнением?

XII.7.23. Какая задача и с какой погрешностью приближается схемой

$$\frac{y_m^{n+1} - \frac{1}{2}(y_{m+1}^n + y_{m-1}^n)}{\tau} + \alpha \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = f_m^n,$$

$$y_m^0 = \varphi(x_m), \quad n = 0, \dots, T/\tau - 1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

а) при $\tau/h = r = \text{const}$,

б) при $\tau/h^2 = r = \text{const}$?

XII.7.24. При каком соотношении шагов τ и h выполнено необходимое условие (Неймана) устойчивости для разностной схемы

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = f_m^n, \quad a \geq 0,$$

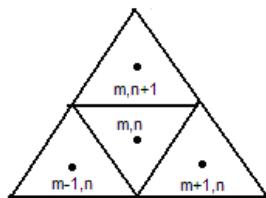
$$y_m^0 = \varphi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots ?$$

XII.7.25. На шеститочечном шаблоне $\mathbb{W} = \{(t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^{n+1}, x_{m+1})\}$ для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad u(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad -\infty < x < \infty,$$

построить схему с порядком аппроксимации $O(\tau^2, h^4)$.

XII.7.26. С помощью интегро-интерполяционного метода получите схему, аппроксимирующую линейное стационарное уравнение теплопроводности с диссипацией



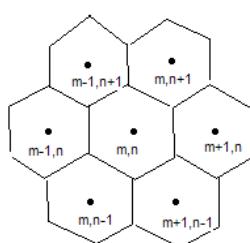
$$-p \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + ku = f(x, y)$$

на пространственной сетке:

- состоящей из центров правильных треугольников;
- сетке из следующей задачи.

Указание: перейти к системе двух уравнений относительно температуры и теплового потока, при интегрировании воспользоваться формулой Остроградского–Гаусса.

XII.7.27. Стационарное уравнение переноса нейтронов в диффузационном приближении можно записать в виде системы уравнений для плотности ψ и потока нейтронов \mathbf{W} :



$$\operatorname{div} \mathbf{W} + \alpha_0 \psi = Q(x, y), \quad \frac{1}{3} \operatorname{grad} \psi + \alpha_1 \mathbf{W} = 0.$$

С помощью интегро-интерполяционного метода получите схему, аппроксимирующую эту систему на пространственной сетке:

- состоящей из центров правильных шестиугольников;
- на сетке предыдущей задачи.

Указание: при интегрировании первого уравнения воспользоваться формулой Остроградского–Гаусса.

XII.7.28. Исследовать сходимость разностной схемы к решению соответствующей дифференциальной задачи:

a) $u_t = a u_x + f(x, t),$

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T, u(x, 0) = g(x),$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + f_m^n,$$

$$u_m^0 = g(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N\tau = T.$$

б) $u_t = u_{xx} + f(x, t),$

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T, u(x, 0) = g(x), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0.$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \xi \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \xi) \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + f_m^{n+1/2},$$

$$u_m^0 = g(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N\tau = T.$$

в) $u_t = a u_x + f(x, t),$

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T, u(x, 0) = g(x),$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + f_m^n,$$

$$u_m^0 = g(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N\tau = T.$$

г) $u_t = a u_x + f(x, t),$

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T; u(x, 0) = g(x),$

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + f_m^n,$$

$$u_m^0 = g(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N\tau = T.$$

д) $u_t = u_{xx} + f(x, t),$

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T, u(x, 0) = g(x), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0.$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + f_m^{n+1/2},$$

$$u_m^0 = g(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N\tau = T.$$

е) $u_t = u_{xx} + f(x, t)$,

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T, u(x, 0) = g(x), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0.$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + f_m^{n+1/2},$$

$u_m^0 = g(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N\tau = T.$

ж) $u_t = a u_x + f(x, t)$,

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T, u(x, 0) = g(x),$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a\xi \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} + a(1-\xi) \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + f_m^n,$$

$u_m^0 = g(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N\tau = T.$

з) $u_t = u_{xx} + f(x, t)$,

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T, u(x, 0) = g(x), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0.$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{2h^2} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{2h^2} + f_m^{n+1/2},$$

$u_m^0 = g(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N\tau = T.$

и) $u_t = a u_x + f(x, t)$,

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T; u(x, 0) = g(x),$

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + f_m^n,$$

$u_m^0 = g(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N\tau = T.$

к) $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$,

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T; u(x, 0) = g(x), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0.$

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + \frac{5}{6} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{12} \frac{u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n}{\tau} = \\ = a^2 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{2h^2} + a^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{2h^2} + f_m^{n+1/2}, \end{aligned}$$

$u_m^0 = g(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N\tau = T.$

XII.7.29. Найти показатель жесткости системы ОДУ метода прямых (4.2а) – (4.2в).

XII.7.30. Построить схему метода прямых для решения линейного уравнения переноса с постоянными коэффициентами, имеющую второй порядок аппроксимации по пространственным переменным.

XII.7.31. Построить разностную схему метода прямых для решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

XII.7.32. Построить компактную разностную схему для решения начально-краевой задачи для линейного неоднородного уравнения теплопроводности. Можно ли таким образом получить явную схему?

XII.7.33. Построить бикомпактную разностную схему для решения начально-краевой задачи для линейного неоднородного уравнения теплопроводности.

XII.7.34. Построить бикомпактную разностную схему четвертого порядка аппроксимации по пространству для решения начально-краевой задачи для линейного неоднородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.

XII.8. Библиографический комментарий

Впервые теорема о связи устойчивости, сходимости и аппроксимации была сформулирована и доказана в работах [28, 29]. Близкие теоремы ранее были сформулированы Л. В. Канторовичем, некоторые из них приведены в книге [30]. Спектральный признак устойчивости подробно описан во многих учебниках, см., например, [1, 17]. Исследование на устойчивость с помощью спектрального метода подробно описано в [31].

Роль множеств влияния в дифференциальных задачах подробно обсуждается в [32]. О множествах влияния в разностной задаче подробнее см. [1].

Подробное изложение метода энергетических неравенств для исследования устойчивости можно найти в [33]. Там же вводится и обсуждается понятие консервативности разностной схемы, сокращенные обозначения для разностных операторов.

Разностные схемы в пространствах неопределенных коэффициентов рассмотрены в [34].

Компактным разностным схемам посвящена монография [19]. Бикомпактные разностные схемы впервые введены в [35, 36], в современном виде они представлены в [37, 38].

XIII. Численные методы решения уравнений параболического типа

XIII.1. Введение

Уравнения параболического типа часто встречаются при описании диссипативных процессов — теплопроводности, диффузии, течения вязкой жидкости. В данном разделе приведены основные сведения о численных методах решения задач параболического типа. Вкратце рассмотрены численные методы решения таких задач для случая нескольких пространственных переменных. Основные проблемы, возникающие при рассмотрении задач со многими пространственными переменными, подробнее будут рассмотрены в теме XV.

XIII.2. Основные сведения

Основным уравнением параболического типа является уравнение теплопроводности (или уравнение диффузии):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} k(t, \mathbf{r}) \operatorname{grad} u = Q(t, \mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Это уравнение описывает процесс распространения тепла при наличии источника или стока тепла, а также процесс распространения примесей. В большинстве учебных задач мы будем использовать одномерное нестационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = Q(t, x). \quad (1.2)$$

Задача распространения тепла может рассматриваться в неограниченной области, т.е. как задача Коши с начальными данными

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.3)$$

или как начально–краевая в ограниченной пространственной области $0 \leq x \leq L$, тогда к начальным условиям

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.4)$$

XIII. Численные методы решения уравнений параболического типа

добавляются краевые условия, выбираемые из трех основных типов в зависимости от физической постановки задачи:

1) краевые условия первого рода определяют температуру на концах рассматриваемого интервала:

$$u(t, 0) = \chi_1(t), \quad u(t, L) = \chi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (1.5)$$

2) краевые условия второго рода, определяющие поток тепла на концах интервала:

$$-k(t, 0) \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \chi_1(t), \quad k(t, L) \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = \chi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (1.6)$$

3) краевые условия третьего рода, при которых задается некоторая комбинация температуры и потока тепла на концах интервала:

$$\left. \left(\alpha_1 u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_{(t, 0)} = \chi_1(t), \quad \left. \left(\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_{(t, L)} = \chi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.7)$$

При постоянном коэффициенте теплопроводности (1.2) упрощается, превращаясь в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(t, x). \quad (1.8)$$

Для учебных целей мы чаще всего будем использовать уравнение (1.8).

XIII.3. Элементы теории А. А. Самарского устойчивости двухслойных разностных схем

Уравнение теплопроводности является уравнением первого порядка по времени, поэтому простейшей аппроксимацией этой производной является двухслойная:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}.$$

В зависимости от того, на каком слое строится разностная аппроксимация второй пространственной производной — на нижнем или на верхнем, — получающиеся схемы называются *явными* или *неявными*.

Совокупность значений в узлах пространственной сетки на данном временном слое определяет вектор-функцию \mathbf{y}^n .

Явная разностная схема для уравнения (1.8) будет иметь вид

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = k \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2} + Q_m^n, \quad (2.1a)$$

или, в обозначениях Самарского,

$$\frac{\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}}{\tau} = k \Lambda_{xx} \mathbf{y} + \mathbf{Q}^n. \quad (2.16)$$

Аналогично **неявная** схема

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = k \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + Q_m^n \quad (2.2a)$$

может быть записана как

$$\frac{\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}}{\tau} = k \Lambda_{xx} \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}^{n+1}. \quad (2.26)$$

Обе схемы (2.1) и (2.2) имеют одинаковый порядок аппроксимации $O(\tau, h^2)$. Если для получения решения по явной схеме требуется всего лишь выразить из (2.1a) значение y_m^{n+1} на верхнем слое, то реализация неявной схемы требует решения системы линейных уравнений на верхнем слое. В силу специального вида матрицы обычно такое решение находится методом прогонки. Неявный метод более трудоемок. Однако большинство используемых на практике разностных схем являются неявными. Связано это с принципиально различными свойствами устойчивости явных и неявных схем, особенно критичными для уравнений параболического типа.

Исследование устойчивости разностных схем можно проводить с использованием спектрального признака устойчивости. Подробно он описан в теме XII. Здесь нам хочется остановиться на теории устойчивости двухслойных разностных схем, которая наилучшим образом приложима именно к разностным схемам для решения уравнений параболического типа.

Канонической формой двухслойной разностной схемы называется запись вида

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{y}^n = \mathbf{f}^n. \quad (2.3)$$

Здесь под \mathbf{y}^n понимается вектор-функция сеточных значений температур на n -м слое по времени.

Теорема 1. Пусть матрица $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T > 0$, тогда условие

$$\mathbf{B} \geq 0.5\tau\mathbf{A} \quad (2.4)$$

является необходимым и достаточным для устойчивости разностной схемы (2.3) в энергетической норме, порождаемой оператором \mathbf{A} , т.е.

$$\|\mathbf{y}^{n+1}\|_{\mathbf{A}} \leq \|\mathbf{y}^0\|_{\mathbf{A}} \equiv \|\Phi_{\tau h}\|_{\mathbf{A}}.$$

Напоминаем, что операторное неравенство (2.4) нужно понимать в смысле, что $\forall \mathbf{y} \neq 0 \quad (\mathbf{B}\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq \frac{\tau}{2}(\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{y})$.

Используем теорему 1 для исследования устойчивости явной схемы (2.1б). Эта схема уже записана в канонической форме, оператор второй разностной производной симметричен и отрицательно определен, поэтому условием устойчивости будет $\mathbf{E} \geq -\frac{\tau}{2}k\Lambda_{xx}$ или

$$-\Lambda_{xx} \leq \frac{2}{\tau k} \mathbf{E}. \quad (2.5)$$

В теме IX был получен спектр разностного оператора второй производной и было показано, что

$$\frac{\pi^2}{l^2} \mathbf{E} \leq -\Lambda_{xx} \leq \frac{4}{h^2} \mathbf{E}. \quad (2.6)$$

Сопоставляя (2.5) и (2.6), в качестве необходимого и достаточного условия устойчивости получим $\frac{4}{h^2} \leq \frac{2}{\tau k}$, или

$$\frac{\tau k}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (2.7)$$

Этот результат нам уже знаком из темы XII, когда он был получен исходя из условия Куранта–Фридрихса–Леви и спектрального признака устойчивости. Безразмерная комбинация $\sigma = \frac{\tau k}{h^2}$ называется **парabolическим числом Куранта**.

Нетрудно видеть, что условие устойчивости (2.7) является очень жестким: при стремлении пространственного шага к нулю шаг по времени должен стремиться к нулю как квадрат пространственного шага, поэтому количество необходимых шагов по времени растет квадратично по сравнению с ростом количества шагов по пространству при измельчении сетки. Сильное ограничение шага по времени из условия устойчивости явной схемы (2.7) приводит к необходимости использования неявных схем при решении уравнения теплопроводности.

Аналогично с помощью теоремы 1 показывается безусловная устойчивость схемы Кранка–Николсон:

$$\frac{\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}}{\tau} = \frac{1}{2} k \boldsymbol{\Lambda}_{xx} \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} k \boldsymbol{\Lambda}_{xx} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^n \right) \quad (2.8)$$

второго порядка аппроксимации по обеим переменным.

Приведем (2.8) к каноническому виду:

$$\left(\mathbf{E} - \frac{1}{2} k \tau \boldsymbol{\Lambda}_{xx} \right) \frac{\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}}{\tau} - k \boldsymbol{\Lambda}_{xx} \mathbf{y} = 0 .$$

Условием устойчивости из (2.4) будет $\mathbf{E} - \frac{1}{2} k \tau \boldsymbol{\Lambda}_{xx} \geq -\frac{\tau}{2} k \boldsymbol{\Lambda}_{xx}$, или

$\mathbf{E} \geq 0$. Поскольку последнее неравенство истинно при любых шагах по пространству и времени, то схема Кранка–Николсон безусловно устойчива.

Напомним, что важным свойством разностных схем является монотонность. Понятие монотонности (по Фридрихсу) двухслойных разностных схем было введено главе XII. Можно показать, что условие монотонности явной схемы совпадает с условием устойчивости, неявная схема безусловно монотонна, а условием монотонности схемы Кранка–Николсон является условие типа (2.7) с ограничением временного шага квадратом пространственного.

XIII.4. Переменный коэффициент теплопроводности

XIII.4.1. Задачи с переменным коэффициентом теплопроводности

При переменном коэффициенте теплопроводности аппроксимируем уравнение (1.2), записанное в дивергентном виде, явно

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(k_{i+1/2}^n \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n}{h} - k_{i-1/2}^n \frac{y_m^n - 2y_{m-1}^n}{h} \right) + f_m^n \quad (3.1)$$

или неявно

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(k_{i+1/2}^{n+1} \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1}}{h} - k_{i-1/2}^{n+1} \frac{y_m^{n+1} - 2y_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + f_m^{n+1} . \quad (3.2)$$

Для исследования устойчивости схем с переменными коэффициентами используется принцип замороженных коэффициентов (см. тему XII).

XIII.4.2. Задачи с разрывами коэффициента теплопроводности

Важный класс задач составляют задачи с контактными разрывами, на которых коэффициент теплопроводности может терпеть разрыв. При наличии разрывов в коэффициенте теплопроводности решение краевой задачи на верхнем слое становится, вообще говоря, неединственным. Существует множество обобщенных решений, каждое из которых удовлетворяет своему условию согласования в точке разрыва. Для выделения единственного решения необходимо поставить в этой точке внутреннее краевое условие, оно выбирается из физических соображений и должно входить в полную постановку задачи.

Из физических соображений нужно потребовать непрерывности температуры и теплового потока в точке разрыва коэффициента $x = \xi$, т.е скакок этих величин слева и справа от разрыва должен быть равен нулю:

$$u|_{x=\xi-0} = u|_{x=\xi+0}, \quad (ku)'|_{x=\xi-0} = (ku)'|_{x=\xi+0}.$$

При этом контактный разрыв всегда должен попадать в узел сетки. Такие сетки называются **специальными**. При этом для аппроксимации коэффициента теплопроводности в ячейке левее точки разрыва пользуются левым коэффициентом, а правее — правым.

XIII.5. Квазилинейное уравнение теплопроводности

Спитцеровская теплопроводность в плазме определяется коэффициентом теплопроводности, который сам зависит от температуры как $k = au^{5/2}$. Поэтому во многих практических задачах большой интерес представляют решения квазилинейного уравнения переноса вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} au^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\alpha > 0). \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) допускает решение в виде бегущей волны. Построим его. В переменных бегущей волны $\zeta = x - vt$, где v — скорость волны, решение представляется в виде

$$u = u(\zeta) = u(x - vt). \quad (4.2)$$

Пусть $u \equiv 0$ при $\zeta = x - vt > 0$.

Подставив (4.2) в (4.1), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-vu'_\zeta = a(u^\alpha u'_\zeta)'_\zeta. \quad (4.3)$$

Оно интегрируется по ζ :

$$c - vu = au^\alpha u'_\zeta, \quad (4.4)$$

c — константа интегрирования.

Выражение, стоящее в правой части (4.4), есть поток величины u , а уравнение (4.4) является некоторым законом сохранения. В точке фронта $u = 0$, в силу непрерывности потока справа и слева от фронта должно выполняться $c - v \cdot 0 = 0$, отсюда следует $c = 0$.

Так как нас интересуют только нетривиальные решения (4.1), то u не равно нулю тождественно, и можно разделить правую и левую части на u . Тогда получим

$$-v = au^{\alpha-1} u'_\zeta = \frac{a}{\alpha} (u^\alpha)'_\zeta, \quad (4.5)$$

откуда решение

$$u = \begin{cases} \left(\frac{\alpha v}{a} (-\zeta) \right)^{1/\alpha}, & \zeta \leq 0, \\ 0, & \zeta > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Решение (4.6) непрерывно, но производная его разрывна при $\zeta = 0$. Поэтому данное решение является не классическим, а обобщенным, которое удовлетворяет интегральному закону сохранения. Решение (4.6) называется волной Зельдовича–Самарского–Соболя.

Уравнение (4.1) записано в **дивергентном** виде. Построение разностной схемы, исходя из такого вида квазилинейного уравнения теплопроводности, дает возможность получить **консервативную** разностную схему. Разностная схема называется **консервативной**, если разностный аналог закона сохранения, которому соответствует дифференциальное уравнение, выполнен для любой конечной подобласти в области решения.

Самым простым способом решения такой задачи является неявная разностная схема с нелинейностью на нижнем слое:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(k_{m+1/2}^n \frac{y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1}}{h} - k_{m-1/2}^n \frac{y_m^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + f_m^n.$$

Такой способ учета нелинейности приводит к схемам, не эквивалентным полностью неявным схемам. Обычно использование таких схем приводит к неправильной скорости распространения тепловых волн.

Схема с нелинейностью на верхнем слое:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(k_{m+1/2}^{n+1} \frac{y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1}}{h} - k_{m-1/2}^{n+1} \frac{y_m^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + f_m^{n+1}.$$

Для реализации алгоритма прогонки проведем линеаризацию функции в правой части, то есть используем итерационный метод Ньютона. Способ линеаризации сильно зависит от того, как именно аппроксимирован коэффициент теплопроводности в полуцелой точке (см. задачу XIII.10.1).

XIII.6. Многомерное уравнение теплопроводности

Простейшая явная разностная схема для численного решения двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

может быть получена путем замены производных разностями (далее мы обозначаем сеточную функцию той же буквой, что и решение дифференциального уравнения в надежде, что читатель уже привык к тому, что это объекты разных функциональных пространств, и не будет их путать, а вот вторая пространственная переменная после x по традиции обозначается y):

$$\frac{u_{ml}^{n+1} - u_{ml}^n}{\tau} = \frac{u_{m-1,l}^n - 2u_{ml}^n + u_{m+1,l}^n}{h_x^2} + \frac{u_{m,l-1}^n - 2u_{ml}^n + u_{m,l+1}^n}{h_y^2}$$

или, в операторной форме,

$$\frac{u_{ml}^{n+1} - u_{ml}^n}{\tau} = \mathbf{\Lambda}_1 u_{ml}^n + \mathbf{\Lambda}_2 u_{ml}^n.$$

Исследование спектральной устойчивости этой схемы ($u_{me}^n = \lambda^n e^{iam+i\beta l}$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$) приводит к следующему результату для спектра оператора послойного перехода:

$$\lambda(\alpha, \beta, \tau, h_x, h_y) = 1 - 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

откуда получаем условие устойчивости

$$\tau \leq \frac{1}{2(h_x^{-2} + h_y^{-2})}.$$

Это требование настолько жесткое, что решение задач большой размерности по явным схемам практически невозможно.

Для неявной схемы

$$\frac{u_{ml}^{n+1} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 u_{ml}^{n+1} + \Lambda_2 u_{ml}^{n+1}$$

исследование на устойчивость по спектральному признаку дает

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}},$$

т.е. схема устойчива при любых α, β . Однако разрешение системы сеточных уравнений на верхнем слое приводит к задаче эллиптического типа. Хотя матрица системы является разреженной, обратная матрица будет полной. Для построения эффективных алгоритмов решения полученных сеточных уравнений необходимо знакомство с материалом темы XV. Аналогичная ситуация складывается и для схемы Кранка–Николсон при числе пространственных измерений не меньше двух. О методах расщепления также рекомендуем смотреть тему XV.

XIII.7. Задачи на доказательство

XIII.7.1. Доказать теорему 1.

XIII.7.2. Доказать, что **шеститочечная параметрическая разностная схема**

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \xi \frac{y_{m-1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \xi) \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}$$

при весе $\xi = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^4)$.

XIII.7.3. Доказать, что **схема Алена–Чена** для решения линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = D \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^n}{h^2}$$

эквивалентна явной схеме с уменьшенным значением шага по времени (под эквивалентностью схем понимается возможность преобразования одной схемы в другую, используя лишь линейные операции).

XIII.7.4. Доказать безусловную устойчивость схемы «классики»

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = a^2 \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}, \quad m+n=2l;$$

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = a^2 \frac{y_{m-1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1}}{h^2}, \quad m+n=2l+1.$$

Найти ее порядок аппроксимации, описать алгоритм расчета по этой схеме. Явная эта схема или неявная?

XIII.7.5. Доказать, что тривиальная схема переменных направлений для трех пространственных измерений

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = D\Delta_1 u^{n+1} + D\Delta_2 u^n + D\Delta_3 u^n,$$

$$\frac{u^{n+2} - u^{n+1}}{\tau} = D\Delta_1 u^{n+1} + D\Delta_2 u^{n+2} + D\Delta_3 u^{n+1},$$

$$\frac{u^{n+3} - u^{n+2}}{\tau} = D\Delta_1 u^{n+2} + D\Delta_2 u^{n+2} + D\Delta_3 u^{n+3}$$

неустойчива.

XIII.8. Задачи с решениями

XIII.8.1. Для решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} D \operatorname{grad} u = 0, \quad u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$$

использована сетка, состоящая из центров правильных шестиугольников со стороной h , равномерно заполняющих всю плоскость. Для простоты записи схемы каждый узел сетки обозначается одним индексом, для каждого узла существует список его ближайших соседей, то есть центров шестиугольников, имеющих с данным общую грань.

а) Построить явную разностную схему. Записать ее в каноническом виде. Указать условия устойчивости схемы.

б) Построить неявную разностную схему. Записать ее в каноническом виде. Доказать безусловную устойчивость схемы.

в) Построить двухслойную разностную схему типа схемы Кранка–Николсон. Записать ее в каноническом виде. Найти условия монотонности схемы.

Решение. Для построения разностной схемы проинтегрируем исходное дифференциальное уравнение по шестиугольной сетке, считая величины в объеме ячейки постоянными. Тогда, с использованием теоремы Остроградского–Гаусса, имеем

$S \frac{\partial u}{\partial t} - \oint \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = 0$, S – площадь шестиугольной ячейки, \mathbf{n} – вектор внешней нормали, $w = -D \operatorname{grad} u$ — поток тепла. Заменяем интеграл суммой по граням, очевидным образом вычисляя тепловой поток:

$$0 = S \frac{\partial y_k}{\partial t} - \oint \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} \approx S \frac{\partial y_k}{\partial t} - \sum D h \frac{y_k - y_l}{h \sqrt{3}}, \text{ с учетом того, что пло-}$$

щадь правильного шестиугольника со стороной h есть $6h^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, окончательно получаем

$$0 = \frac{\partial y_k}{\partial t} - D \frac{2}{9} \sum \frac{y_k - y_l}{h^2}.$$

Заменяя производную по времени тем или иным образом, получим соответствующую схему. Неявная схема всегда монотонная, следовательно, безусловно устойчивая. Условие устойчивости явной схемы есть

$$\mathbf{E} - \frac{\tau}{2} \mathbf{A} > 0.$$

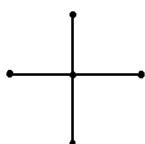
Условие монотонности схемы Кранка–Николсон будет $1 - \frac{2}{3} \frac{D\tau}{h^2} > 0$.

XIII.8.2. Для численного решения уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ используется **схема Ричардсона** $\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{a}{h^2} \Lambda_{xx} y^n$, с шаблоном.

Исследовать эту схему на аппроксимацию и устойчивость.

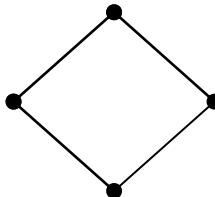
Решение. Исследование на аппроксимацию проводится стандартно. Учитывая, что производная по времени приближена центральной разностью, несложно заметить, что ее порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$.

Подстановка решения в виде $y_m^n = \lambda^n e^{iam}$ дает квадратное уравнение для определения спектра оператора послойного перехода $\lambda^2 + \frac{8a\tau}{h^2} \lambda \sin^2 \frac{ah}{2} - 1 = 0$, один из корней которого при любом значении параметра a по модулю больше единицы, т.е. рассматриваемая схема *безусловно неустойчива*.



Выходом из данной ситуации оказывается замена в выражении $\Lambda_{xx} y_m^n = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}$ величины y_m^n на $\frac{y^{n-1} + y^{n+1}}{2}$ (схема Франке-ла-Дюффорта):

$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{2\tau} = \frac{a}{h^2} \left[y_{m-1}^n - (y_m^{n+1} + y_m^{n-1}) + y_{m+1}^n \right]$ с шаблоном «ромб», которая разрешается явно относительно y_m^{n+1} и безусловно устойчива.



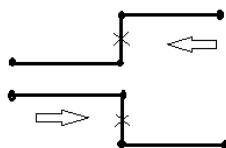
Однако она обладает лишь условной аппроксимацией: $O(\tau^2, h^2, \tau^2/h^2)$, и таким образом сходимость возможна лишь при $\tau/h \rightarrow 0$.

XIII.8.3. Исследовать на аппроксимацию и устойчивость **схему Саульева** бегущего счета

$$\frac{y_m^n - y_m^{n-1}}{\tau} = a \frac{y_{m-1}^n - (y_m^n + y_m^{n-1}) - y_{m+1}^{n-1}}{h^2} \quad (\text{четные слои, счет слева направо})$$

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = a \frac{y_{m-1}^n - (y_m^n + y_m^{n+1}) + y_{m+1}^{n+1}}{h^2} \quad (\text{нечетные слои, счет справа налево})$$

со следующим шаблоном:



Решение. Путем подстановки решения в виде $y_m^n = \lambda^n e^{iam}$ несложно проверить, что схема безусловно устойчива.

Для исследования аппроксимации схемы Саульева воспользуемся методом операторной аппроксимации. Введем в рассмотрение два разностных оператора

$$\mathbf{L}_1 u_m = \frac{u_{m-1} - u_m}{h^2}, \quad \mathbf{L}_2 u_m = \frac{u_{m+1} - u_m}{h^2}.$$

Очевидно, что оператор второй разности можно представить как сумму этих операторов

$$\Delta u_m = \mathbf{L}_1 u_m + \mathbf{L}_2 u_m = \frac{u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1}}{h^2}.$$

Первый этап схемы Саульева запишем в операторной форме как

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = a^2 (\mathbf{L}_1 u_m^n + \mathbf{L}_2 u_m^{n-1}).$$

Эквивалентная форма записи есть $(\mathbf{E} - \tau a^2 \mathbf{L}_1) u_m^n = (\mathbf{E} + \tau a^2 \mathbf{L}_2) u_m^{n-1}$.

Оператор, стоящий в левой части последнего равенства, обратим, решение системы уравнений «бегущим счетом» эквивалентно обращению этого оператора. Тогда мы можем выразить отсюда значение

$$u_m^n = (\mathbf{E} - \tau a^2 \mathbf{L}_1)^{-1} (\mathbf{E} + \tau a^2 \mathbf{L}_2) u_m^{n-1}.$$

Для второго этапа метода Саульева имеем

$$(\mathbf{E} - \tau a^2 \mathbf{L}_2) u_m^{n+1} = (\mathbf{E} + \tau a^2 \mathbf{L}_1) u_m^n.$$

С учетом первого этапа

$$(\mathbf{E} - \tau a^2 \mathbf{L}_2) u_m^{n+1} = (\mathbf{E} + \tau a^2 \mathbf{L}_1) (\mathbf{E} - \tau a^2 \mathbf{L}_1)^{-1} (\mathbf{E} + \tau a^2 \mathbf{L}_2) u_m^{n-1}.$$

Отсюда сразу следует симметричная форма записи операторного уравнения

$$(\mathbf{E} + \tau a^2 \mathbf{L}_1)^{-1} (\mathbf{E} - \tau a^2 \mathbf{L}_2) u_m^{n+1} = (\mathbf{E} - \tau a^2 \mathbf{L}_1)^{-1} (\mathbf{E} + \tau a^2 \mathbf{L}_2) u_m^{n-1}.$$

Если параметр τ достаточно мал, то справедливо равенство $(\mathbf{E} + \tau a^2 \mathbf{L}_1)^{-1} = \mathbf{E} - \tau a^2 \mathbf{L}_1 + O(\tau^2)$. С точностью до членов второго порядка по шагу по времени имеем

$$(\mathbf{E} - \tau a^2 \mathbf{L}_1 - \tau a^2 \mathbf{L}_2 + \tau^2 a^4 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2) u_m^{n+1} = (\mathbf{E} + \tau a^2 \mathbf{L}_1 + \tau a^2 \mathbf{L}_2 + \tau^2 a^4 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2) u_m^{n-1}.$$

Хотя последние операторные слагаемые в этом равенстве одинаковые, они действуют на сеточную функцию на разных слоях и только частично компенсируют друг друга. Нетрудно убедиться, что остальные операторные слагаемые аппроксимируют уравнение теплопроводности со вторым порядком по времени и пространству. Наличие некомпенсированных слагаемых, имеющих порядок $O(\tau^2/h^4)$, говорит об условной аппроксимации разностной схемы.

Схема Саульева допускает значительное улучшение. Достаточно только вычислить значения функции в рамках перехода с данного слоя на следующий два раза — бегущим счетом слева направо и бегущим счетом

справа налево — и усреднить результаты. Свойства такого метода расчета предлагаются исследовать самостоятельно.

XIII.8.4. Для численного решения уравнения теплопроводности

$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ используется **схема Алена–Чена**

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = a \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} \text{ с шаблоном } \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet - \bullet - \bullet \end{array} .$$

Исследовать данную схему на аппроксимацию и устойчивость. Является данная схема явной или неявной?

Решение. Несмотря на то, что значение функции y_m^{n+1} , вычисляемое на верхнем слое, входит и в правую, и в левую части разностного уравнения, в каждой точке сетки оно легко разрешается относительно y_m^{n+1} .

Системы уравнений на верхнем слое не возникает, схема является явной. Схема безусловно устойчива, что является ее достоинством при реализации бегущего счета, однако она имеет порядок аппроксимации $O(\tau, h^2, \tau/h^2)$, т.е. схема является условно аппроксимирующей.

XIII.8.5. Исследовать на аппроксимацию **локально-одномерные схемы** дробных шагов для решения линейного однородного уравнения теплопроводности в случае двух и трех пространственных координат.

Решение. Исследование схемы расщепления на аппроксимацию проведем на примере локально-одномерной схемы для двумерного уравнения теплопроводности. Исследование будем проводить в так называемой операторной форме. Запишем схему дробных шагов для каждого этапа в виде

$$\frac{\tilde{u}_{ml} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{u}_{ml}, \quad \frac{u_{ml}^{n+1} - \tilde{u}_{ml}}{\tau} = \Lambda_2 u_{ml}^{n+1}.$$

Перепишем уравнения в эквивалентном операторном виде

$$(\mathbf{E} - \tau \Lambda_1) \tilde{u}_{ml} = u_{ml}^n, \quad (\mathbf{E} - \tau \Lambda_2) u_{ml}^{n+1} = \tilde{u}_{ml}.$$

Выразим значение искомой функции на верхнем временном слое через значение на предыдущем слое. Для этого исключим промежуточное значение, подействовав на обе части второго уравнения оператором $(\mathbf{E} - \tau \Lambda_1)$:

$$(\mathbf{E} - \tau \Lambda_1)(\mathbf{E} - \tau \Lambda_2) u_{ml}^{n+1} = (\mathbf{E} - \tau \Lambda_1) \tilde{u}_{ml}.$$

Так как в силу уравнения первого этапа $(\mathbf{E} - \tau \Lambda_1) \tilde{u}_{ml} = u_{ml}^n$, то тогда

$$(\mathbf{E} - \tau \Lambda_1)(\mathbf{E} - \tau \Lambda_2) u_{ml}^{n+1} = u_{ml}^n.$$

Это равенство эквивалентными преобразованиями приводится к виду

$$\frac{u_{ml}^{n+1} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 u_{ml}^{n+1} + \Lambda_2 u_{ml}^{n+1} - \tau \Lambda_1 \Lambda_2 u_{ml}^{n+1}.$$

Если точное решение задачи имеет ограниченные четвертые производные по пространственным координатам, то последнее слагаемое в правой части является величиной порядка $O(\tau)$ и определяет погрешность аппроксимации.

Для случая трех пространственных переменных имеем

$$(\mathbf{E} - \tau \boldsymbol{\Lambda}_1) u_{ml}^* = u_{ml}^n, \quad (\mathbf{E} - \tau \boldsymbol{\Lambda}_2) u_{ml}^{**} = u_{ml}^*, \quad (\mathbf{E} - \tau \boldsymbol{\Lambda}_3) u_{ml}^{***} = u_{ml}^{**}.$$

Действуя аналогично, получаем

$$(\mathbf{E} - \tau \boldsymbol{\Lambda}_1)(\mathbf{E} - \tau \boldsymbol{\Lambda}_2)(\mathbf{E} - \tau \boldsymbol{\Lambda}_3) u_{ml}^{n+1} = u_{ml}^n.$$

Это равенство эквивалентными преобразованиями приводится к виду

$$\frac{u_{ml}^{n+1} - u_{ml}^n}{\tau} = \Lambda_1 u_{ml}^{n+1} + \Lambda_2 u_{ml}^{n+1} + \Lambda_3 u_{ml}^{n+1} - \tau(\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) u_{ml}^{n+1} + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 u_{ml}^{n+1}.$$

XIII.9. Теоретические задачи

XIII.9.1. Исследовать на устойчивость двухслойную разностную схему с весами

$$\frac{\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}}{\tau} = a\xi \boldsymbol{\Lambda}_{xx} \hat{\mathbf{y}} + a(1-\xi) \boldsymbol{\Lambda}_{xx} \mathbf{y} + \xi \mathbf{Q}^{n+1} + (1-\xi) \mathbf{Q}^n$$

в зависимости от весового параметра ξ :

- а) методом энергетических неравенств;
- б) спектральным методом.

Результаты сравнить.

XIII.9.2. При каком значении параметра ξ схема из задачи XIII.8.1 для однородного уравнения теплопроводности имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^4)$?

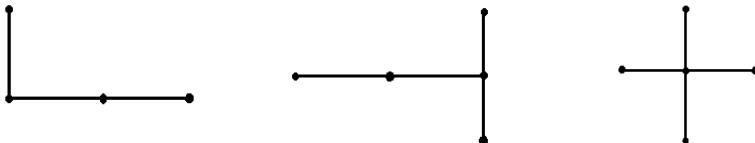
XIII.9.3. При каком соотношении шагов τ и h явная разностная схема

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}$$

для однородного уравнения теплопроводности имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^4)$?

XIII.9.4. Для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами построить схему наивысшего порядка аппроксимации на шаблоне из точек $(x_{m-1}, t^n), (x_m, t^n), (x_{m+1}, t^n), (x_{m-1}, t^{n+1}), (x_m, t^{n+1}), (x_{m+1}, t^{n+1})$.

XIII.9.5. Используя условие устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви, определить, какие из разностных схем, шаблоны которых приведены ниже, не будут устойчивыми:



XIII.9.6. Построить разностные схемы для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = \psi(x),$$

используя шаблоны и .

Спектральным признаком исследовать полученные схемы на устойчивость, используя принцип замороженных коэффициентов.

XIII.9.7. Решение краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

определяется приближенно по разностной схеме

$$\frac{y_m^{p+1} - y_m^p}{\tau} = \frac{y_{m+1}^p - 2y_m^p + y_{m-1}^p}{h^2}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad Mh = 1$$

$$y_0^0 = \varphi(mh), \quad y_M^p = 0.$$

Выписать решение дифференциальной задачи в виде ряда Фурье, а разностной задачи — в виде конечного ряда Фурье. Сравнивая эти ряды, рассмотреть механизм сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной при $\tau = rh^2$, $r \leq 0.5$, $h \rightarrow 0$, и механизм расходимости при $r > 0.5$, $h \rightarrow 0$.

XIII.9.8. Уравнение теплопроводности $u_t = u_{xx}$ аппроксимируется схемой Дюфорта–Франкела (схема «ромб»):

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{y_{m+1}^n - y_m^{n+1} - y_m^{n-1} + y_{m-1}^n}{h^2}.$$

Исследовать ее на устойчивость и показать, что если $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ так, что $\tau/h = C = \text{const}$, то эта схема аппроксимирует гиперболическое уравнение $u_t + C^2 u_{tt} = u_{xx}$.

XIII.9.9. Определить порядок аппроксимации схемы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \frac{y_{m+1}^{n+1} - y_{m+1}^n}{\tau} + \frac{5}{6} \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{1}{12} \frac{y_{m-1}^{n+1} - y_{m-1}^n}{\tau} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} \end{aligned}$$

для решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности и исследовать ее на устойчивость.

XIII.9.10. Для решения смешанной задачи уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad u(t, 0) = \psi_0(t), \quad u(t, 1) = \psi_1(t), \\ k &= \text{const}, \quad 0 \leq t, x \leq 1 \end{aligned}$$

на сетке $x_m = mh$, $hM = 1$, $m = 0, \dots, M$, $t^n = n\tau$, $\tau N = 1$, $n = 0, \dots, N$

предложена разностная схема

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3y_m^{n+1} - 4y_m^n + y_m^{n-1}}{2\tau} = k^2 \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + f_l^{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad m = 0, 1, \dots, M-1, \\ y_m^0 = \varphi_m; \quad y_m^1 = \varphi_m + k^2 \tau (\varphi''_{xx})_m, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad y_0^n = \psi_0^n; \quad y_M^n = \psi_2^n, \quad n = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Указать ее шаблон, исследовать на аппроксимацию и устойчивость.

XIII.9.11. Для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x), \quad u(0, x) = \psi(x), \quad k = \text{const} > 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad -\infty \leq x \leq +\infty,$$

на сетке $x_l = lh$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$, $t^n = n\tau$, $\tau N = T$, $n = 0, \dots, N$

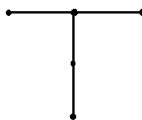
предложена разностная схема

$$\begin{cases} \frac{y_m^{n+1} - \frac{1}{2} [y_{m+1}^n + y_{m-1}^n]}{\tau} = k \frac{y_{m-1}^n - [y_m^{n+1} + y_m^{n-1}] + y_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n, \\ n = 0, \dots, N-1, m = 0, \pm 1, \dots, \\ y_m^0 = \psi_l, \quad y_m^1 = \varphi_m + k^2 \tau (\varphi''_{xx})_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty. \end{cases}$$

Указать ее шаблон и исследовать на аппроксимацию и устойчивость.

XIII.9.12. Исследовать на устойчивость и аппроксимацию трехслойную

схему $\frac{1.5(y_m^{n+1} - y_m^n)}{\tau} - \frac{0.5(y_m^n - y_m^{n-1})}{\tau} = \Lambda_{xx} y_m^{n+1}$ с шаблоном



XIII.9.13. Для квазилинейного уравнения теплопроводности $u'_t = (u^{5/2} u'_x)'_x$ построить аналог схемы Саульева, используя дивергентную форму записи уравнения. Исследовать получившуюся схему на устойчивость по принципу замороженных коэффициентов.

XIII.9.14. Для квазилинейного уравнения теплопроводности $u'_t = (u^{3/2} u'_x)'_x$ построить консервативный аналог схемы Ричардсона, используя интегро-интерполяционный метод. Исследовать получившуюся схему на устойчивость по принципу замороженных коэффициентов.

XIII.9.15. Для квазилинейного уравнения теплопроводности $u'_t = (u^{1/2} u'_x)'_x$ построить аналог схемы Дюфорта–Франкела. Исследовать получившуюся схему на устойчивость по принципу замороженных коэффициентов.

XIII.9.16. Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, t)$$

построить схему расщепления по направлениям, вывести схему с исключенным промежуточным слоем. Исследовать схему на спектральную устойчивость.

XIII.9.17. Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, t)$$

предложены варианты разностных схем метода переменных направлений:

a)
$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^n}{\tau/2} = \Lambda_{xx}\mathbf{u}^{n+1/2} + \Lambda_{yy}\mathbf{u}^n + \mathbf{f}, \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_{xx}\mathbf{u}^{n+1/2} + \Lambda_{yy}\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{f}; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^n}{\tau} = \frac{1}{2}(\Lambda_{xx}\mathbf{u}^{n+1/2} + \Lambda_{yy}\mathbf{u}^n) + \mathbf{f}, \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1/2}}{\tau} = \frac{1}{2}(\Lambda_{xx}\mathbf{u}^{n+1} + \Lambda_{yy}\mathbf{u}^n). \end{cases}$$

Исследовать схемы на аппроксимацию. Исследовать спектральную устойчивость схем.

XIII.9.18. Построить аналог схемы переменных направлений, устойчивый для решения уравнения теплопроводности с тремя пространственными переменными (**схема Дугласа–Ганна**).

Указание. Рассмотреть три этапа. На каждом из них используется локально-одномерная схема вида

$$\frac{u^* - u^n}{\tau} = D\Lambda_1 (\sigma_1 u^* + (1-\sigma_1)u^n) + D\Lambda_2 u^n + D\Lambda_3 u^n,$$

$$\frac{u^{**} - u^n}{\tau} = D\Lambda_1 (\sigma_2 u^* + (1-\sigma_2)u^n) + D\Lambda_2 (\sigma_3 u^{**} + (1-\sigma_3)u^n) + D\Lambda_3 u^n,$$

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = D\Lambda_1 (\sigma_4 u^* + (1-\sigma_4)u^n) + D\Lambda_2 (\sigma_5 u^{**} + (1-\sigma_5)u^n) + \\ + D\Lambda_3 (\sigma_6 u^{n+1} + (1-\sigma_6)u^n). \end{aligned}$$

Верхние индексы * и ** обозначают промежуточные значения, координатные индексы i, j, k опущены во всех членах уравнений, Λ_i — компоненты разностного оператора теплопроводности. Затем весовые коэффициенты подбираются из условий устойчивости.

XIII.9.19. Исследовать схему Дугласа–Ганна на аппроксимацию.

Указание. Использовать операторную форму записи.

XIII.10. Практические задачи

XIII.10.1. Определить параметры сетки для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$ при численном решении задачи

a) $u_t = u_{xx} + (4x/(x^2 + 2t + 1)) u_x, 0 \leq x \leq 1, 0 < t,$

$u(0,t) = 1/(2t + 1), u(1, t) = 1/(2(t + 1)), 0 < t; u(x,0) = 1/(x^2 + 1), 0 \leq x \leq 1,$

XIII. Численные методы решения уравнений параболического типа

б) $u_t = (1/2) u_{xx} + 4x^2/(x^2 + t + 1)^3, 0 \leq x \leq 1, 0 < t,$

$u(0,t) = 1/(t+1), u(1,t) = 1/(t+2), 0 < t; u(x,0) = 1/(x^2 + 1), 0 \leq x \leq 1,$

в) $u_t = u_{xx} + f(x,t), 0 \leq x \leq 1, 0 < t; f(x,t) = \pi^2 \sin(\pi x),$

$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, 0 < t; u(x,0) = 0, 0 \leq x \leq 1,$

по явной схеме и найти это решение. Сравнить численное решение задачи с точным. Показать, что заданная точность достигнута.

XIII.10.2. Для реализации метода прямых решения уравнения теплопроводности относительно пространственной сеточной функции \mathbf{y} , записанного в виде системы уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \Lambda_{xx}\mathbf{y} + \mathbf{f}(t),$$

использовать по времени:

- а) явный метод Рунге–Кутты второго порядка аппроксимации (метод Эйлера с пересчетом);
- б) классический метод Рунге–Кутты четвертого порядка аппроксимации;
- в) схему трапеций (Кранка–Николсон);
- г) одностадийный метод Розенброка с комплексными коэффициентами;
- д) неявную схему Эйлера с экстраполяцией Ричардсона;
- е) диагонально неявный L-устойчивый двухстадийный метод Рунге–Кутты второго порядка аппроксимации с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{ccc} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

- ж) диагонально неявный A-устойчивый двухстадийный метод Рунге–Кутты третьего порядка аппроксимации с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{ccc} \frac{3 - \sqrt{3}}{6} & \frac{3 - \sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{3 + \sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

- з) неявный метод Рунге–Кутты с таблицей Бутчера

1/3	1/3
1	1/3 2/3
1	0 0 1
	3/4 3/4 -1/2

и) неявный метод Рунге–Кутты с таблицей Бутчера

1/3	1/3
1	0 1
1	3/4 -1/12 1/3
	3/4 -1/12 1/3

к) двухслойную компактную разностную схему с порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^4)$,

л) метод ФДН второго порядка аппроксимации.

Найти численно решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

при начальном распределении $\varphi(x) = \exp(-x^2)$, для которого известно точное решение

$$u(x, t) = \frac{\exp(-x^2 / (1+4t))}{\sqrt{1+4t}}.$$

Как нужно поставить краевые условия поиска решения в ограниченной области для сохранения порядка пространственной аппроксимации? Дважды измельчая пространственную сетку вдвое, определить порядок сходимости численного решения к точному и сравнить с теоретическим. Как при этом должна изменяться временная сетка метода а) и почему?

XIII.10.3. Численно найти решение задачи теплопроводности с источником на конечном отрезке

$$u_t = u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t; \quad f(x, t) = \pi^2 \sin(\pi x);$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t; \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Использовать методы задачи XIII.10.2. Проделать все пункты задачи XIII.10.2. Методом разделения переменных найти точное решение задачи и сравнить с численным.

XIII.10.4. Методами задачи XIII.10.2 численно найти решение задачи теплопроводности на конечном отрезке

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t, \quad k = \text{const} > 0,$$

при начальных и краевых условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = u(a, t) = 0.$$

Если начальное распределение является кусочно-непрерывной функцией своего аргумента, задача имеет точное решение, выражаемое в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 kt}{a^2}\right) \sin \frac{\pi n x}{a},$$

где коэффициенты Фурье начальных данных вычисляются по формулам

$$\alpha_n = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx.$$

Вычислить точное и приближенное решение. Дважды измельчая пространственную сетку вдвое, определить порядок сходимости численного решения к точному и сравнить с теоретическим. Для решения задачи рассмотреть варианты начального распределения

$$1) \quad \varphi(x) = \begin{cases} 2, & x \geq a/2, \\ 0, & x < a/2. \end{cases}$$

$$2) \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < a/3, \\ 2, & a/3 \leq x \leq 2a/3, \\ 0, & x > 2a/3. \end{cases}$$

XIII.10.5. Методами задачи XIII.10.2 численно исследовать остывание полубесконечного стержня:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = U_0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Эта задача также имеет точное решение

$$u(x, t) = U_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi.$$

Выполнить остальные пункты задачи XIII.10.2.

XIII.10.6. Методами задачи XIII.10.2 численно найти решение задачи о сглаживании температурного разрыва в неограниченной области

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

при начальном распределении вида

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Выполнить остальные пункты задачи XIII.10.2. Объяснить результаты применения схемы Кранка–Николсон.

XIII.10.7. Найти решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

a) $u'_t = u''_{xx} + 8x^2/(x^2 + 2t + 1)^3$, $0 < x < 1$, $0 < t$,

$u'_x(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1/(2t + 2)$, $0 < t$; $u(x, 0) = 1/(x^2 + 1)$, $0 < x < 1$;

б) $u'_t = u''_{xx}$, $0 < x < 1$, $0 < t$,

$u(0, t) - 0.5 u'_x(0, t) = 0$, $u(1, t) - 0.5 u'_x(1, t) = 0$, $0 < t$,

$u(x, 0) = \exp(2x)$, $0 < x < 1$,

по схеме Кранка–Николсон. Дважды измельчая пространственно-временную сетку вдвое, определить порядок сходимости численного решения к точному и сравнить с теоретическим.

XIII.10.8. Получите с помощью любой из разностных схем (Кранка–Николсон, Саульева, Дюффорта–Франкела, неявная разностная схема с экстраполяцией Ричардсона) численное решение однородного уравнения теплопроводности при следующих начальных краевых условиях:

$u(0, x) = 0$, $u(t, 0) = 0$, $u(t, 1) = \sin(\omega t) + 1$,

при различных значениях ω ($N = 250$, $10 < \omega < 100\ 000$). При каком значении ω решение существенно отличается от нуля только вблизи границы? Проиллюстрировать численное решение анимацией (файлом с расширением *.avi, построение которого доступно, например, в пакете Tecplot) с использованием 10 кадров на период колебаний при $\omega < 100$.

XIII.10.9. Получите с помощью схемы переменных направлений решение двумерной задачи нестационарной теплопроводности в квадрате при следующих начальных и краевых условиях:

$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 < t$,

$f(x, y, t) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$,

$u(0, y, t) = 0$, $u(1, y, t) = 0$, $u(x, 0, t) = 0$, $u(x, 1, t) = 0$, $0 < t$,

$u(x, y, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Покажите, что точным решением дифференциальной задачи является $u(x, y, t) = (1 - \exp(-\pi^2 t)) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Сгущением сеток и сравнением с сеточной проекцией точного решения покажите, что схема имеет второй порядок сходимости по всем переменным.

XIII.11. Задачи для самостоятельного исследования

XIII.11.1. Для аппроксимации уравнения (4.1) использована схема

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(k_{m+1/2} \frac{y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1}}{h} - k_{m-1/2} \frac{y_m^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}}{h} \right),$$

где $k_{m+1/2}$ вычисляется следующим образом:

$$1) \quad k_{m+1/2} = \frac{a}{2} \left((y_m^n)^\alpha + (y_{m+1}^n)^\alpha \right);$$

$$2) \quad k_{m+1/2} = a \left(\frac{y_m^n + y_{m+1}^n}{2} \right)^\alpha;$$

$$3) \quad k_{m+1/2} = a \left(\frac{2y_m^n y_{m+1}^n}{y_m^n + y_{m+1}^n} \right)^\alpha;$$

$$4) \quad k_{m+1/2} = a \frac{2(y_m^n)^\alpha (y_{m+1}^n)^\alpha}{(y_m^n)^\alpha + (y_{m+1}^n)^\alpha}.$$

Выражения 1)–4) суть некоторые аппроксимации au^α , взятые на предыдущем слое по времени между узлами y_m , y_{m+1} . Какой из вариантов предпочтительнее? Почему не работают в окрестности фронта средние гармонические — 3) и 4)?

Реализовать схемы 1) и 2), сравнить численное решение с точным (см. выше). Почему при больших значениях τ/h^2 наблюдается отставание фронта волны в численном решении от точного значения [17]?

XIII.11.2. Для аппроксимации уравнения (4.1) использована схема

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(k_{m+1/2} \frac{y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1}}{h} - k_{m-1/2} \frac{y_m^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}}{h} \right),$$

где $k_{m+1/2}$ вычисляется следующим образом:

$$1) \quad k_{m+1/2} = \frac{a}{2} \left((y_m^{n+1})^\alpha + (y_{m+1}^{n+1})^\alpha \right);$$

$$2) k_{m+1/2} = a \left(\frac{y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1}}{2} \right)^\alpha;$$

$$3) k_{m+1/2} = a \left(\frac{2y_m^{n+1} y_{m+1}^{n+1}}{y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1}} \right)^\alpha;$$

$$4) k_{m+1/2} = a \frac{2(y_m^{n+1})^\alpha (y_{m+1}^{n+1})^\alpha}{(y_m^{n+1})^\alpha + (y_{m+1}^{n+1})^\alpha}.$$

Выражения 1)–4) суть некоторые аппроксимации au^α , взятые на рассчитываемом слое по времени между узлами y_m , y_{m+1} . Как построить линеаризацию разностной схемы для решения уравнений на верхнем слое? Какой из вариантов предпочтительнее? Реализовать схемы 1) и 2), сравнить численное решение с точным (см. выше).

XIII.11.3. Задача Колмогорова–Петровского–Пискунова

Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(1-u),$$

$$u(-\infty, t) = 1, \quad u(+\infty, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

найти численное решение:

- а) с использованием явной схемы;
- б) используя принцип расщепления по физическим процессам (что считать $\pm\infty$ в данной задаче?);
- в) исследуйте метод расщепления на аппроксимацию и устойчивость;
- г) сравните полученные численные решения с решениями в переменных бегущей волны задачи (XI.10.20).

О задаче Колмогорова–Петровского–Пискунова см. также в книгах [39–42]. Точное решение для некоторых случаев содержится в [42, 43].

XIII.11.4. Задача Колмогорова–Петровского–Пискунова с нелинейным коэффициентом.

1. Показать численно, что в задачах

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} u_1^\alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} + au_1(1-u_1), \quad \alpha > 0, \quad (10.1)$$

$$u(-\infty, t) = 1, \quad u(+\infty, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + au_2^{1+\alpha}(1-u_2), \quad (10.2)$$

$$u(-\infty, t) = 1, \quad u(+\infty, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

при одинаковых значениях параметров α и a решениями являются бегущие волны, фронты которых распространяются с одинаковой скоростью. Строгое доказательство этого утверждения содержится в [42].

Почему для каждого из этих уравнений наиболее эффективной является своя разностная схема? В чем состоит качественное различие в решениях? Чем оно вызвано?

2. Попробуйте исследовать (10.1) в переменных бегущей волны (α — целое). Для изучения характера сложной особой точки воспользуйтесь теоремой из [44, с. 157–158].

XIII.11.5. Задача Зельдовича–Франк–Каменецкого

Для уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au^2(1-u),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(u-\varepsilon)(1-u), \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

с условиями $u(-\infty, t) = 1, \quad u(+\infty, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

выполнить пункты 1–3 предыдущей задачи. Сравните полученные численные решения с решениями в переменных бегущей волны (см. задачу XI.10.21).

О задаче Зельдовича–Франк–Каменецкого см. [39–42], некоторые точные решения приведены в [42, 43].

Выполнить те же задания, что в задаче XIII.11.4, для следующих пар уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_1^\alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + au_1^2(1-u_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + a u_2^{\alpha+2} (1 - u_2), \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_3^\alpha \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + a u_3 (u_3 - \varepsilon) (1 - u_3), \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} + a u_4^{\alpha+1} (u_4 - \varepsilon) (1 - u_4). \end{aligned} \quad (10.4)$$

В чем отличие от уравнений (10.1, 10.2)? (См. также [42]).

XIII.11.6. Режимы с обострением

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a u^\beta, \quad a > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (10.5)$$

Построить численно решение (10.5) в случаях

а) $\beta = \alpha + 1$, б) $\beta < \alpha + 1$, в) $\beta > \alpha + 1$,

$$u(-\infty, t) = 0, \quad u(+\infty, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

В чем качественное различие случаев а) (так называемый *S*-режим с обострением), б) (*HS*-режим), в) (*LS*-режим)? (См. [45]). В случае а) численно проверить справедливость формулы полуширины локализации тепла: $l = \pi \sqrt{\frac{\alpha+1}{a\alpha^2}}$. Как решение зависит от амплитуды начального возмущения u_0 ?

XIII.11.7. Автомодельные решения и автомодельные переменные

Будем искать решение уравнения (10.5) в виде [45, с. 32–62.]:

$$u(x, t) = g(t) f(\xi), \quad \text{где } \xi = x / \phi(t).$$

1. Найти функции $g(t)$, $\phi(t)$.

2. Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет при этом функция $f(\xi)$? Решить численно получившееся уравнение для $f(\xi)$ с условиями

$$f'_\xi(\xi = 0) = 0; \quad f(\xi = l) = 0, \quad l < +\infty,$$

с дополнительным требованием $f^\alpha f'_\xi|_{\xi=l} = 0$.

3. Задавая $f(\xi)$ при $t = 0$ в качестве начальных условий для (10.5), сравните поведение численного решения с автомодельным. (Так как известны $g(t)$, $\phi(t)$ и $f(\xi)$, то тем самым найдено $u(x, t) \quad \forall t \quad 0 < t < t_f$.) Что происходит при $t \rightarrow t_f$?

XIII.11.8. Тепловой кристалл

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \frac{\partial}{\partial x} u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 \frac{\partial}{\partial y} u^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + au^\beta.$$

Попытайтесь качественно исследовать свойства решений этого уравнения.

В случае $\alpha = \beta - 1 > 0$, $k_1 \neq k_2$ рассмотреть задачу со следующими граничными условиями:

$$u(t, x, 0) = A_0(1-t)^n(1-\lambda_1 x)^{2/\alpha} \quad \text{при } x \leq 1/\lambda_1,$$

$$u(t, 0, y) = A_1(1-t)^n(1-\lambda_2 y)^{2/\alpha} \quad \text{при } y \leq 1/\lambda_2,$$

иначе 0. Здесь $n < 0$ — действительное число.

Рассмотреть случаи 1) $n = -1/\alpha$, 2) $n < -1/\alpha$, 3) $-1/\alpha < n < 0$.

Решить задачу численно и сравнить полученное решение с аналитическим. Решение тепловой кристалл описано в [45].

XIII.11.9. Остановка тепловой волны

Модифицируем задачу XIII.11.6

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + au^\beta - \varepsilon u, \quad (10.6)$$

положив $\varepsilon = 0,1$.

1. Выполнить пункты задачи XIII.11.6. Как влияет малый линейный сток на поведение решения?

2. В случае $\alpha = \beta - 1$ найти *автомодельное решение*, аналогичное рассматриваемому в задаче XIII.11.7.

Указание. Рассмотреть последовательность замен:

$$v = ue^{\varepsilon t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = e^{\varepsilon t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \right) \text{ и } d\tau = e^{\alpha \varepsilon t} dt.$$

Каким станет уравнение (10.6) в переменных v , x , t ?

3. Рассмотреть задачу о формировании теплового кристалла для уравнения (10.6).

XIII.11.10. Неустойчивость Тьюринга

Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au + bv,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + cu + dv$$

с условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} = 0,$$

причем $a + d < 0$, $a d - b c > 0$. При этих условиях особая точка $(0, 0)$ системы $\dot{u} = au + bv$, $\dot{v} = cu + dv$ устойчива. Пусть, без ограничения общности, $a > 0$.

1. Найти условие, когда внесение в систему диффузии приводит к потере устойчивости однородного стационарного решения.

Указание. Рассмотреть преобразование Фурье по пространственной переменной. Исследовать на устойчивость особые точки получившейся системы ОДУ.

2. Подобрав коэффициенты a, b, c, d и D_1, D_2 , удовлетворяющие условиям, найденным в пункте 1, получить при численном счете так называемые *структуры Тьюринга*. Под структурой Тьюринга здесь понимается пространственно-неоднородное решение с волновым числом k , таким, что

$$\operatorname{Re} \lambda(k^2) = 0; \quad \frac{\partial(\operatorname{Re} \lambda)}{\partial(k^2)} = 0$$

при записи решения в виде $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t - ikx}$. В случае *линейной* задачи

эти структуры будут возрастать по амплитуде при $t \rightarrow \infty$, в случае нелинейного уравнения (следующая задача) бесконечный рост становится невозможным, структура стабилизируется за счет нелинейности.

XIII.11.11. Распределенный брюсселятор

Рассмотрим систему уравнений типа реакция–диффузия, где для описания химических реакций использована модельная система брюсселятор. В литературе эта постановка имеет название распределенный брюсселятор:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A - (B + 1)u + u^2v + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bu - u^2v + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(l, t) = 0$$

и начальным условием $u(x, 0) = A(1 + \varepsilon \cos \omega x)$, $v(x, 0) = B / A$. Это — система уравнений «брюсселятор» с учетом диффузии компонентов.

1. Пусть $B > (1 + A\sqrt{D_1/D_2})^2$, $D_1 < D_2$. Рассмотреть образование структур Тьюринга в случаях $\mu = A\sqrt{D_1/D_2}$, $\mu < 0.207$, $0.207 < \mu < 2.418$, $\mu > 2.418$.

Когда можно пользоваться явной разностной схемой? Когда необходима неявная схема?

2. Пусть теперь $D_1 > D_2$, $A > 1$. Что происходит в системе? Почему для расчетов необходимо применять неявные схемы? Какую схему расщепления по физическим процессам можно предложить для решения задачи? Примеры расчетов приведены в книге [7], качественное исследование — в [11].

XIII.11.12. Двумерная схема «классики»

Для двумерного уравнения теплопроводности используется схема «классики». Как и в схеме Саульева, расчет осуществляется в два этапа:

$$\frac{u_{lm}^{n+1} - u_{lm}^n}{\tau} = \frac{u_{l-1m}^n - 2u_{lm}^{n+1} + u_{l+1m}^n}{h_x^2} + \frac{u_{bm-1}^n - 2u_{lm}^{n+1} + u_{lm+1}^n}{h_y^2}$$

в случае, если $l + m + n$ — четное,

$$\frac{u_{lm}^{n+1} - u_{lm}^n}{\tau} = \frac{u_{l-1m}^{n+1} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{l+1m}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{bm-1}^{n+1} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{lm+1}^{n+1}}{h_y^2}$$

в случае, если $l + m + n$ — нечетное.

Явная или неявная эта схема? Исследовать ее на аппроксимацию и устойчивость. Зачем нужно «перепрыгивание» — смена порядка обхода узлов при переходе со слоя на слой по времени?

Применить эту схему к расчету предыдущей задачи.

XIII.11.13. «Орегонатор» — математическая модель реакции

Белоусова–Жаботинского

Математическая модель «орегонатор» периодической химической реакции Белоусова–Жаботинского с учетом диффузии реагентов имеет вид

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = 77,27 \cdot (y_2 + y_1 \cdot (1 - 8,375 \cdot 10^{-6} y_1 - y_2)) + D_1 \Delta y_1,$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = \frac{1}{77,27} \cdot (y_3 - (1 + y_1) \cdot y_2) + D_2 \Delta y_2,$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial t} = 0,161 \cdot (y_1 - y_3) + D_3 \Delta y_3.$$

Здесь y_i — концентрации реагентов; D_i — их коэффициенты диффузии; Δ — оператор Лапласа. Для описания реакции в тонком слое жидкости в чашке Петри считаем

$$y_i = y_i(t, r, \phi),$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Задача решается в полярных координатах.

Стенку чашки Петри будем считать непроницаемой для всех реагентов:

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

В центре расчетной области поставим условия симметрии:

$$\left. r \frac{\partial y_i}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

Распределения концентраций реагентов в начальный момент времени — известные функции (задаваемые пользователем) полярных координат:

$$y_i|_{t=0} = f_i(r, \phi).$$

Вычислить распределения концентраций $y_i(t, r, \phi)$. Размер расчетной области и коэффициенты задает пользователь.

XIII.11.14. «Орегонатор» — математическая модель реакции Белоусова–Жаботинского 2.

Наиболее интересным решением системы, описывающей химическую реакцию Белоусова–Жаботинского, является решение типа спиральной волны. Почему в постановке, приведенной выше, невозможно получить такие решения?

Модифицировать приведенную выше постановку, написать программу для получения решения в виде спиральной волны а) в декартовых координатах; б) в полярных координатах; в) в координатах «спиральной волны». О спиральных волнах в реакции Белоусова–Жаботинского см. [39, 46, 47].

XIII.11.15. «Пущинатор» — математическая модель реакции Белоусова–Жаботинского.

Одна из математических моделей реакции Белоусова–Жаботинского, предложенная А.М. Жаботинским и А. Б. Ровинским, включает в себя два уравнения типа «реакция–диффузия»:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_1 \Delta u + v(1-u) - \beta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_2 \Delta v + \frac{1}{\varepsilon} v(1-u(1+\alpha + (v-\alpha)^2)) + 1.\end{aligned}$$

Здесь x — концентрация ионов церия, а y связана с концентрацией малновой кислоты. Необходимо решить эту задачу на плоскости. Оператор Лапласа в декартовых координатах имеет вид

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Границы расчетной области будем считать непроницаемой для реагентов:

$$D_i \frac{\partial y_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$$

(n — направление внешней нормали к границе).

Распределения концентраций реагентов в начальный момент времени — известные функции:

$$y_i|_{t=0} = f_i(x, y).$$

Вычислить распределения концентраций реагентов при $0 < t \leq T$. Величины α , ε , β (это положительные концентрации или константы реакций), постоянные коэффициенты диффузии и начальные условия задает пользователь. ε — малая величина (порядка 0.01 и меньше). Для коэффициентов диффузии всегда должно выполняться неравенство $0 < D_2 < D_1$.

Цель исследования — найти области параметров задачи, при которых в системе появляются а) бегущие волны или бегущие импульсы, б) формируются пространственно-неоднородные стационарные структуры.

Обратите внимание, что в этом случае при не слишком удачном выборе алгоритма решения задачи структуры и волны «растягиваются» вдоль координатных линий!

Математическая модель опубликована в статье [48].

XIII.11.16. Уравнение ФитцХью–Нагумо, описывающее распространение нервного импульса

Несколько различных математических моделей, предназначенных для описания распространения нервного импульса в одномерной системе, носят название моделей ФитцХью–Нагумо. Исторически считается, что данные модели возникли из интерполяции наборов экспериментальных данных. Так как в годы создания модели была сильно развита радиотехника, вполне вероятной представляется гипотеза, что нелинейность в данной системе «позаимствована» из хорошо известной радиотехникам модели Ван-дер-Поля. Главное, что в такой системе реализуется случай колебательной потери устойчивости, решение — бегущий импульс, форму которого можно подобрать так, чтобы его форма была близка к тому, что в действительности фиксируется в физиологических экспериментах.

Пример одного из видов моделей ФитцХью–Нагумо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(a - u)(u - 1) - v + I + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = bu - \gamma v.$$

Отметим, во-первых, сходство модели ФитцХью–Нагумо и уравнения ЗФК. Кроме того, уравнения ФитцХью–Нагумо могут быть решены точно [49]. О свойствах математической модели подробнее см. [50].

Требуется исследовать характер особых точек точечной системы в зависимости от параметров. Определить область параметров, когда в системе возможно распространение бегущих волн (волны переключения, см. задачи XIII.11.1–4).

Проанализировать случай, когда в системе положение равновесия единственное и возможно распространение «бегущего импульса». В фазовом пространстве задачи в переменных «бегущей волны» такому импульсу соответствует сепаратрисса, идущая из седла в это же седло.

Построить и реализовать неявную разностную схему для решения нелинейной системы уравнений в частных производных.

XIII.11.17. Пространственно-распределенная модель свертывания крови

Для моделирования пространственно-распределенной системы свертывания в уравнения задачи X.8.14 были добавлены слагаемые, описывающие диффузию реагентов. Модифицированная система имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_1 \Delta \theta + \frac{\alpha \theta^2}{\theta + \theta_0} - \kappa_1 \theta - \gamma \theta \varphi ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_2 \Delta \varphi + \beta \theta \cdot \left(1 - \frac{\varphi}{C}\right) \left(1 + \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2\right) - \kappa_2 \varphi ,$$

где D_1, D_2 — коэффициенты диффузии активатора и ингибитора соответственно. Оператор Лапласа в одномерном случае $\Delta = \frac{1}{x^v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} x^v \frac{\partial}{\partial x}$; $v = 0$ соответствует плоскому случаю, $v = 1$ — цилиндрически-симметричному. Поскольку оба реагента являются макромолекулами, их коэффициенты диффузии полагали приближенно равными, то есть $D_1 \approx D_2 = 6 \cdot 10^{-4}$ мм²/мин.

В результате предварительных исследований процессов структурообразования в одномерном плоском случае было обнаружено, что механизм формирования структур в предложенной модели имеет ряд принципиальных отличий от ранее известных механизмов структурообразования в активных средах [51, 52]. Было обнаружено, что формирование стационарных структур обеспечивается за счет взаимодействия двух автоволн — волны активации и волны ингибирования. При этом вторая автволна может обеспечить остановку процесса свертывания и формирования тромба даже в гомогенной среде.

В численных экспериментах исследовалась эволюция локализованного возмущения стационарного состояния системы $\theta \equiv 0, \varphi \equiv 0$. В одномерных расчетах начальное возмущение представляло собой ступеньку по активатору вида:

$$\theta(x, 0) = \begin{cases} \theta_i, & 0 \leq |x| \leq l, \\ 0, & l \leq |x| \leq L, \end{cases}$$

где L — характерный размер рассматриваемой области пространства, l — полуширина начального возмущения, θ_i — амплитуда начального возму-

шения (см. таблицу). На границах области ($x = \pm L$) ставились условия Неймана.

Таблица

**Характерные значения параметров
пространственно-распределенной модели**

$D_1, \text{мм}^2 \cdot \text{мин}^{-1}$	$D_2, \text{мм}^2 \cdot \text{мин}^{-1}$	$L, \text{мм}$	$l, \text{мм}$	$\theta_i, \text{нМ}$
0,0006	0,0006	2,00	0,01(3)	0,80

Значения констант реакций приведены в таблице к задаче X.8.14. В случае достаточно большого начального возмущения в системе наряду с диффузией происходит автокаталитическое образование активатора. Наличие диффузии и автокаталитического роста приводит к распространению автоволнового фронта активатора. Его рост останавливает ингибитор, образование которого происходит с некоторой задержкой по времени (лагом). Это обусловлено различием констант скоростей реакций α и β на три порядка. В области, где концентрация активатора велика, возможно распространение автоволны ингибитора.

XIII.11.18. Фазовый переход при дегидратации

Рассматривается одномерная задача извлечения газа из гидросодержащего пласта, занимающего полупространство $x > 0$ [53]. В изотермическом приближении для давления P и водонасыщенности S справедливы следующие дифференциальные уравнения:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (1-S)P - \frac{k}{\mu_g} \frac{\partial}{\partial x} (1-S)P \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{k}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial x} S \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Здесь k — проницаемость пласта, μ — вязкости каждой фазы ($\mu_g = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\mu_w = 1,8 \cdot 10^{-3}$ Па·с), ϕ — пористость пласта.

Границные условия таковы: $P = 0$ при $x = 0$, и на подвижной фазовой границе

$$\left. \frac{k}{\mu_w} S \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{n-} = \phi (0,784 - S) V,$$

$$\left. \frac{k}{\mu_g} (1-S) \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{n-} = \phi \left(\frac{\rho_{g0}}{P^*} RT - 1 + S \right) V,$$

$$\rho_{g0} = 116 \text{ кг / м}^3 \quad P^* = P_a \exp(-9549 / T + 49,32),$$

T — температура породы, R — универсальная газовая постоянная, P_a — атмосферное давление (100 000 Па). В задаче φ — пористость пласта — от 0,1 до 0,5, проницаемость от 10^{-10} до 10^{-15} .

XIII.12. Библиографическая справка

Численным методам решения уравнений и систем параболического типа посвящена обширная литература. Об операторной аппроксимации и решении нелинейных задач в качестве первоначального чтения рекомендуем книгу [17]. Об исследовании на устойчивость по методу А. А. Самарского смотри [33]. Некоторые вопросы реализации неявных схем и решения сеточных уравнений на верхнем слое описаны в [24]. Некоторые разностные схемы, использованные для решения задач в режимах с обострением, описаны в [45]. В [34] приведены примеры построения монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для уравнения теплопроводности в пространстве неопределенных коэффициентов.

XIV. Численные методы решения уравнений гиперболического типа

XIV.1. Введение

Уравнение переноса является простейшим уравнением в частных производных. Оно описывает широкий класс физических явлений, например переноса излучения или нейтронов. Разностные схемы, построенные для этого уравнения, обобщаются на случай систем уравнений гиперболического типа, в том числе систем уравнений газовой динамики. Уравнения газовой динамики являются нелинейными, поэтому ряд вопросов аппроксимации, связанных с нелинейностью, рассматривается на примере простейшего нелинейного уравнения Хопфа. Методам решения уравнений газовой динамики посвящено большое количество книг и статей в силу важности и обширности поля приложений. В данном пособии не ставится задача введения в курс самых современных методов решения гиперболических систем нелинейных уравнений. Наша задача много скромнее — дать начальные понятия и возможность на практике «пощупать» основные схемы, пригодные для решения уравнений гиперболического типа.

XIV.2. Линейное уравнение переноса

XIV.2.1. Характеристики

Рассмотрим линейное однородное уравнение переноса

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

или неоднородное уравнение с источником в правой части

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t). \quad (2.2)$$

Из теории уравнений в частных производных известно, что (2.2) обладает **характеристиками**. Характеристическая форма уравнения переноса строится с помощью замены переменных:

$$\eta = x + ct,$$

$$\xi = x - ct.$$

Воспользуемся формулами дифференцирования при замене переменных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta} c + \frac{\partial u}{\partial \xi} (-c),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Подставим эти равенства в (2.2). Тогда уравнение переноса приводится к характеристической форме

$$2c \frac{\partial u}{\partial \eta} = f\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2c}\right) \quad (2.3)$$

при $\xi = x - ct = \text{const}$, определяющем характеристику. Решение этого уравнения может быть получено интегрированием вдоль характеристики от некоторого начального значения

$$u(x_m, t^{n+1}) = u^* + \int_{\eta^*}^{\eta} \frac{1}{2c} f\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2c}\right) d\eta. \quad (2.4)$$

Решение (2.4) при нулевой правой части означает, что для однородного уравнения переноса (2.1) решение с начального слоя переносится без изменений вдоль характеристик.

XIV.2.2. Разностные схемы

Простейшие разностные схемы для уравнения переноса рассмотрены в разделе XII. Они могут быть получены, например, заменой производных на сетке соответствующими разностями. В качестве примера схем, где производные заменены разностями, приведем две схемы первого порядка аппроксимации — «явный левый уголок»

$$L_{th} y = \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (2.5)$$

и «явный правый уголок»

$$L_{th} y = \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = 0. \quad (2.6)$$

XIV.2.3. Монотонность

Начальный монотонный профиль точного решения однородного линейного уравнения переноса с постоянными коэффициентами в каждый момент времени переходит в монотонный (с некоторым сдвигом). Говорят, что сохраняется монотонность пространственного профиля. Желательно определить аналогичное свойство для численного решения. Существует несколько определений монотонности разностной схемы. Наиболее употребительными являются три.

1. Монотонность по Фридрихсу [54]. Двухслойная разностная схема для однородного уравнения

$$y_m^{n+1} = \sum_k \alpha_k(\tau, h) y_{m+k}^n$$

называется монотонной, если все коэффициенты разностной схемы

$$\alpha_k \geq 0. \quad (2.7)$$

2. Монотонность по С. К. Годунову [55]. Монотонными называются разностные схемы, для которых следует $y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1} \geq 0$, если $y_{m+1}^n - y_m^n \geq 0$, и $y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1} \leq 0$, если $y_{m+1}^n - y_m^n \leq 0$.

3. Монотонность по Хартену [56]. Для этого определяется полная вариация решения как $\text{TV}(y^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |y_{m+1}^n - y_m^n|$. Условием монотонности является невозрастание полной вариации:

$$\text{TV}(y^{n+1}) \leq \text{TV}(y^n). \quad (2.8)$$

Схемы, удовлетворяющие условию (2.8), называются TVD-схемами (Total Variation Diminishing).

Теорема 1 (С. К. Годунов). *Не существует монотонных линейных разностных схем для уравнения переноса с порядком аппроксимации выше первого.*

XIV.2.4. Аппроксимационная вязкость

Для того чтобы пояснить, почему простейшие схемы первого порядка обладают сглаживающими свойствами, рассмотрим схему «явный левый уголок» (2.5) для численного решения однородного уравнения переноса (2.1) с положительной скоростью переноса $c > 0$:

$$L_{th} y = \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0.$$

Поскольку решения дифференциальной задачи и разностного уравнения принадлежат разным функциональным пространствам, это порождает определенные трудности при теоретическом анализе свойств разностных схем. Для такого исследования возможно рассматривать разностные операторы в том же пространстве, что и дифференциальные операторы. Будем считать, что разностные схемы удовлетворяются функциями непрерывного аргумента в каждой точке рассматриваемой области.

Обычно ограничиваются рассмотрением уравнений, где в разложении в ряд Тейлора проекции точного решения на сетку оставлены члены по τ и h , причем степени сеточных параметров совпадают с порядком главных членов невязки. Получающиеся при этом уравнения называют *первым дифференциальным приближением* (ПДП).

Исследование схемы (2.5) на аппроксимацию дает следующее выражение для главных членов ошибки аппроксимации (главных членов невязки):

$$r_{th} = Lu + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{ch}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^2 + h^2). \quad (2.9)$$

Используем следствия дифференциального уравнения переноса — так называемые дифференциальные продолжения. В предположении достаточной гладкости решения (2.1) легко устанавливается равенство между вторыми производными по пространству и времени для решения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-c \frac{\partial u}{\partial t} \right) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Тогда для главного члена погрешности аппроксимации получим выражение

$$r_{th} = Lu - \frac{ch}{2} \left(1 - \frac{c\tau}{h} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^2 + h^2). \quad (2.10)$$

Таким образом, с точностью до членов второго порядка малости разностная схема аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.11)$$

В этом уравнении аналог коэффициента теплопроводности $\gamma = \frac{ch}{2} \left(1 - \frac{c\tau}{h} \right)$ — коэффициент аппроксимационной вязкости, а член в правой части

$$\eta = \frac{ch}{2} \left(1 - \frac{c\tau}{h} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

именуется *аппроксимационной вязкостью*. Его действие — сглаживание численного решения. Действительно, при переходе в подвижную систему координат уравнение (2.11) превращается в уравнение теплопроводности. Однако сама эта вязкость является свойством выбранной разностной схемы первого порядка аппроксимации. Здесь в исходное уравнение (2.1) не вводятся никакие дополнительные члены и не используются сглаживающие операторы.

Уравнение (2.11) носит название параболической формы *первого дифференциального приближения* разностной схемы. Аналогично, оставив в правой части главные члены ошибки аппроксимации в виде (2.9), можно было получить гиперболическую форму первого дифференциального приближения, которая редко используется в силу ее малой информативности. Все устойчивые схемы первого порядка аппроксимации будут обладать схемной вязкостью. Кроме того, по первому дифференциальному приближению можно судить об устойчивости разностной схемы. Если схемная вязкость отрицательна, то для такого дифференциального уравнения задача Коши ставится некорректно, а разностная схема неустойчива.

Отличие решения уравнения (2.11) от решения (2.1) называют *диссипативной ошибкой*. Так как коэффициент γ пропорционален шагу сетки, диссипативная ошибка тем больше, чем грубее шаг разностной сетки по пространству.

Для схем высокого порядка аппроксимации, не обладающих схемной вязкостью, иногда вводят *искусственную вязкость*. В этом случае разностная схема строится для (2.11) вместо (2.1), а коэффициент вязкости γ выбирается из каких-либо внешних соображений. Уравнение (2.11) при постоянном коэффициенте вязкости называется линейным уравнением Бюргерса.

Для схем второго порядка аппроксимации по всем переменным первое дифференциальное приближение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \delta h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (2.12)$$

Здесь коэффициент δ зависит от конкретной разностной схемы.

Уравнение (2.12) обладает дисперсией, т.е. различные гармоники разложения в ряд Фурье начального условия задачи распространяются по сетке с различными скоростями, зависящими от их волнового числа. В этом случае говорят, что ошибка носит дисперсионный характер. Исследование на сеточную дисперсию проводят отдельно для каждой фурье-

гармоники решения. Пример исследования на дисперсионную ошибку приведен в задаче XIV.8.5.

Вообще говоря, обычно схемы нечетного порядка аппроксимации, для которых в первом дифференциальном приближении справа стоят четные производные, обладают диссипативной ошибкой, а схемы четного порядка с нечетными производными в первом дифференциальном приближении — дисперсионной.

XIV.2.5. Гибридные разностные схемы

Теорема Годунова является очень важной, т.к. для практических приложений часто требуется, чтобы схема обеспечивала хотя бы положительность решения. Для немонотонных схем высокого порядка аппроксимации гарантировать положительность решения практически невозможно. Для обеспечения монотонности при повышении порядка аппроксимации схемы пользуются схемами с переменным порядком аппроксимации в зависимости от локального поведения решения. Такие схемы еще называют *гибридными*.

Построение гибридных схем рассмотрим на примере схемы Р. П. Федоренко, порядок которой меняется от второго в областях гладкости решения до первого в областях больших градиентов. Запишем схему

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} + \frac{k}{2\tau} \left(\frac{\tau}{h} - \frac{\tau^2}{h^2} \right) (y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n) = 0.$$

При параметре $k = 0$ она является схемой «явный левый уголок», а при $k = 1$ переходит в схему Лакса–Вендроффа второго порядка аппроксимации. Напомним, что последняя получается вычитанием диссипативных членов из правой части (2.11). Вторая производная по пространственной переменной вычисляется по формулам второго порядка аппроксимации.

Введем анализатор гладкости решения, сравнивая конечные разности первого и второго порядков:

$$k = \begin{cases} 1, & |y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n| < \xi |y_m^n - y_{m-1}^n|, \\ 0, & |y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n| > \xi |y_m^n - y_{m-1}^n|. \end{cases}$$

Параметр ξ подбирается для конкретной задачи. При $\xi = 0$ имеем схему первого порядка, при $\xi = \infty$ — второго. В настоящее время используются схемы с гладким переключением со схем высокого порядка аппроксимации в области гладкого решения к схемам первого порядка в областях больших градиентов.

Отметим, что описанная схема была исторически первой. В настоящее время используется большое количество различных гибридных схем [34, 57].

XIV.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами

От простейшего уравнения переноса можно перейти к рассмотрению гиперболических систем уравнений вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{u} — искомый вектор решения, \mathbf{A} — матрица с постоянными коэффициентами, \mathbf{F} — вектор правой части. Система (3.1) будет гиперболической, если спектр матрицы \mathbf{A} действительный. Для нахождения решения этой системы в ограниченной пространственной области необходимо корректно поставить смешанную начально-краевую задачу. Начальные условия должны ставиться для всех компонент вектора \mathbf{u} . Проще всего оценить корректность постановки краевых условий задачи переходом к инвариантам Римана.

Пусть $\{\lambda_i, \mathbf{e}_i\}$ — полный набор собственных значений и левых собственных векторов матрицы \mathbf{A} . Умножим уравнение (3.1) слева на собственный вектор \mathbf{e}_k^T :

$$\mathbf{e}_k^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{e}_k^T \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{e}_k^T \mathbf{F},$$

воспользовавшись свойством левого собственного вектора, будем иметь

$$\frac{\partial(\mathbf{e}_k, \mathbf{u})}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial(\mathbf{e}_k, \mathbf{u})}{\partial t} = (\mathbf{e}_k, \mathbf{F}). \quad (3.2)$$

Таким образом, мы видим, что система уравнений распадается на отдельные уравнения переноса для комбинаций переменных, называемых инвариантами Римана:

$$R_k = (\mathbf{e}_k, \mathbf{u}).$$

Каждый инвариант R_k переносится со своей скоростью переноса λ_k .

Вместо системы уравнений, в которой все переменные связаны между собой, мы получили уравнения для отдельных инвариантов вида

$$\frac{\partial R_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial R_k}{\partial t} = f_k.$$

Если скорость переноса $\lambda_k > 0$, то соответствующее граничное условие должно быть поставлено на левой границе расчетной области, а если $\lambda_k < 0$, то на правой. Краевое условие не обязательно должно ставиться непосредственно для комбинации переменных, входящих в инвариант R_k .

Для корректной постановки задачи необходимо потребовать, чтобы система уравнений, составленная из собственно граничных условий на данной границе, и инвариантов Римана, являющихся выходящими (из расчетной области), была бы невырожденной.

XIV.4. Квазилинейное уравнение Хопфа

Очень простым и в то же время содержательным примером нелинейного (квазилинейного) уравнения переноса является следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.1)$$

Это уравнение называется уравнением Хопфа. Для него скорость и направление переноса определяются начальным и граничными условиями. Многие схемы, пригодные для решения линейного уравнения переноса, имеют обобщения на случай квазилинейного уравнения.

Уравнение (4.1) имеет бесконечное множество дивергентных форм. Первой из них будет

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2 / 2}{\partial x} = 0. \quad (4.2)$$

Умножив исходное уравнение на u^α , получим при любом $\alpha \geq 0$ дивергентную форму вида

$$\frac{1}{(\alpha+1)} \frac{\partial u^{\alpha+1}}{\partial t} + \frac{1}{(\alpha+2)} \frac{\partial u^{\alpha+2}}{\partial x} = 0. \quad (4.3)$$

При формулировке задач для квазилинейных уравнений в основе формулировки лежит интегральный закон сохранения. Из этого закона следует само дифференциальное уравнение при условии гладкости решения. Поэтому постулируем, что дивергентной формой уравнения, отвечающей интегральному закону сохранения, является форма (4.2).

Решения уравнения (4.1) обладают рядом свойств, присущих решениям уравнений газовой динамики, в частности, они могут обладать сильными и слабыми разрывами (см. задачи XIV.9.22, XIV.9.23).

Общей формой квазилинейного уравнения, записанного в дивергентном виде, является

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0. \quad (4.4)$$

Обобщением квазилинейного уравнения Хопфа на системы с диссипацией служит уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (4.5)$$

Это уравнение замечательно тем, что с помощью подстановки Хопфа–Коула

$$u = -\frac{2\gamma}{w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

оно может быть сведено к линейному уравнению теплопроводности.

Уравнение Бюргерса имеет параболический тип. Напомним, что тип уравнения определяется производными старших порядков. Но если в параболическом уравнении члены с младшими производными имеют тот же порядок, что и старшие, то для таких уравнений крайне существен вопрос удачной аппроксимации членов с младшими производными. Свойства таких численных методов во многом опираются на свойства разностных схем для уравнений гиперболического типа.

Еще одним важным свойством разностных схем является их консервативность. Обычно уравнения в частных производных получаются из интегральных законов сохранения в предположении непрерывности производных. Если из выполнения аналогов этих интегральных законов сохранения для элементарного объема следует их выполнение для произвольного контрольного объема, то разностная схема называется консервативной. Консервативные разностные схемы строятся при использовании дивергентной формы уравнений типа (4.4).

XIV.5. Волновое уравнение. Система уравнений акустики

Распространение малых колебаний в среде описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad (5.1)$$

для которого ставится смешанная начально–краевая задача в области

$$0 < t \leq T, \quad 0 < x < X :$$

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \varphi_2(x), \quad 0 < x < X, \quad (5.2)$$

$$u(t, 0) = \psi_1(t), \quad u(t, X) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.3)$$

Введением функции

$$v(t, x) = \int_0^t \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x} d\tau \quad (5.4)$$

этую задачу можно свести к гиперболической системе двух уравнений. Действительно, (5.4) эквивалентно уравнению $v'_t = u'_x$. Это и есть первое уравнение системы. Второе получается интегрированием (5.1) по времени. Имеем

$$\int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} d\tau = c^2 \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\tau + \int_0^t f(\tau, x) d\tau,$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_0^t = c^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \int_0^t f(\tau, x) d\tau. \quad (5.5)$$

Введем функцию $F(t, x) = \int_0^t f(\tau, x) d\tau + \varphi_2(x)$, тогда (5.5) перепишется в виде $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial v}{\partial x} + F(t, x)$. В итоге получается система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial v}{\partial x} + F(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (5.6)$$

с начальными данными

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad v(0, x) = 0 \quad (5.7)$$

поскольку функция v определена с точностью до начального значения. Краевые условия (5.3) остаются неизменными.

Система уравнений (5.6) носит название системы уравнений акустики. Это — система первого порядка гиперболического типа. Строить схемы для (5.6) часто бывает проще, чем для волнового уравнения (5.1).

XIV.6. Некоторые нелинейные уравнения гиперболического типа

В нелинейной динамике важную роль играют два уравнения гиперболического типа. Для них известны точные решения.

Уравнение синус-Гордон является одним из основных уравнений нелинейных волн и появляется в качестве простейшей модели в динамике ДНК в математической биологии, в теории магнетиков, теории дислокаций и других физических приложениях. Это уравнение имеет вид

$$u_{tt}'' - u_{xx}'' + \sin u = 0. \quad (6.1)$$

Для решений типа «бегущей волны»

$$u(x, t) = \varphi(x - ct), \quad \xi = x - ct \quad (6.2)$$

уравнение при $|c| < 1$ превращается в уравнение физического маятника

$$(1 - c^2)\varphi_{\xi\xi}'' - \sin \varphi = 0. \quad (6.3)$$

С помощью замены $\xi = z\sqrt{1 - c^2}$ оно сводится к уравнению колебаний без параметров

$$\varphi_{zz}'' - \sin \varphi = 0.$$

Уравнение (6.3) допускает два типа траекторий: периодические и вращательные, разделенные точным решением (сепаратрисой седла):

$$\varphi(\xi) = 4 \operatorname{arctg} \exp \left(\pm \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1 - c^2}} \right). \quad (6.4)$$

Решение (6.4) при знаке плюс называют *солитоном* или *кинком*, а при знаке минус — *антикинком*. Оно описывает волну переброса между двумя эквивалентными равновесными состояниями $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$. Величина c — скорость солитона. Уравнение синус-Гордон обладает свойством полной интегрируемости, т.е. для него существует бесконечное число интегралов движения. Желающие могут посмотреть, как преобразование Бэкунда позволяет получить двухсолитонное решение [58].

Другим примером нелинейного уравнения, обладающего свойством полной интегрируемости, является уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), описывающее нелинейные волны в среде с дисперсией. Подробнее о выводе уравнения КдФ можно прочитать в [59]. Самое знаменитое решение КдФ — односолитонное, описывающее распространение уединенной волны (типа цунами) на мелководье. Впервые такую волну наблюдал Скотт Рассел, проследовав за ней на лошади несколько километров.

XIV. Численные методы решения уравнений гиперболического типа

Существует несколько эквивалентных форм записи уравнения. Используем как основу уравнение Хопфа, тогда уравнение Кортевега–де Фриза будет иметь вид

$$u'_t + 6uu'_x + u'''_{xxx} = 0.$$

КдФ было первым уравнением, для которого найдены солитонные решения. Точным решением КдФ типа «бегущей волны» является солитон вида

$$u(x, t) = \frac{2k^2}{\cosh^2(k(x - 4k^2t - x_0))}.$$

Здесь параметр k определяет высоту и ширину солитона, а также его скорость, x_0 — произвольный параметр. Уравнение Кортевега–де Фриза обладает бесконечным набором интегралов движения $I_n = \int P_n(u, u'_x, \dots) dx$, первые три из которых имеют следующий вид:

$$P_0 = u,$$

$$P_1 = u^2,$$

$$P_3 = u^3 - (u'_x)^2.$$

Многосолитонные решения описывают взаимодействия нескольких уединенных волн. При таком взаимодействии солитоны испытывают «упругие» столкновения. После столкновения каждый солитон сохраняет свою форму и скорость движения, при этом во время взаимодействия решение не является суперпозицией двух волн. Двухсолитонные решения уравнений синус-Гордон и Кортевега–де Фриза изменяют положение центров солитонов после взаимодействия.

При численном решении уравнений синус-Гордон или Кортевега–де Фриза требование консервативности разностной схемы является обязательным.

Уравнения газовой динамики и гидродинамики также представляют собой гиперболическую систему нелинейных уравнений.

XIV.7. Задачи на доказательство

XIV.7.1. Доказать теорему Годунова, которая утверждает, что двухслойная линейная монотонная разностная схема для уравнения переноса не может иметь порядок аппроксимации выше первого.

Указание. Рассмотреть в качестве начальных данных Коши квадратичную функцию $u(0, x) = (x/h - 1/2)^2 - 1/4$, $u_m = (m - 1/2)^2 - 1/4 \geq 0$. При таких начальных данных разностное уравнение дает точное решение, т.к. оценка

погрешности для схем высокого порядка идет через третью (или более старшую) производную точного решения, равную нулю. Посмотреть на поведение разностного решения на следующем шаге.

XIV.7.2. Доказать, что для численного решения задачи Коши для линейного однородного уравнения переноса с постоянными коэффициентами все три определения монотонности эквивалентны.

XIV.7.3. Доказать, что из условий аппроксимации схемы для уравнения переноса и монотонности по Фридрихсу следует ее устойчивость.

XIV.7.4. Для решения двумерного (по пространственным координатам) уравнения переноса при $a > 0, b > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, t)$$

используется явная разностная схема

$$\frac{y_{m+l+1}^{n+1} - y_{m+l+1}^n}{\tau} + a \frac{y_{m+l+1}^n - y_{ml+1}^n}{h_x} + b \frac{y_{m+l+1}^n - y_{m+l}^n}{h_y} = f_{m+l+1}^n. \quad (6.1)$$

Доказать, что схема устойчива при условиях $\sigma_x = a\tau / h_x < 1$, $\sigma_y = a\tau / h_y < 1$, $\sigma_x + \sigma_y < 1$. Исследовать данную схему на сходимость.

XIV.7.5. Для решения двумерного (по пространственным координатам) уравнения переноса при $a > 0, b > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, t)$$

используется явная разностная схема

$$\frac{y_{m+l+1}^{n+1} - (y_{ml+1}^n + y_{m+l}^n - y_{ml}^n)}{\tau} + a \frac{y_{m+l}^n - y_{ml}^n}{h_x} + b \frac{y_{ml+1}^n - y_{ml}^n}{h_y} = f_{m+l+1}^n. \quad (6.2)$$

Доказать, что схема устойчива при условиях $\sigma_x = a\tau / h_x < 1$, $\sigma_y = a\tau / h_y < 1$, $\sigma_x + \sigma_y > 1$. Исследовать данную схему на сходимость.

XIV.7.6. Показать, что схемы задач **XIV.7.3.** и **XIV.7.4.**, являющиеся обобщением схемы «явный левый уголок» для положительной скорости переноса на многомерный случай, могут быть получены интерполяционно-характеристическим методом первого порядка. Полученные схемы являются устойчивыми в том случае, если используется интерполяция внутри треугольника, в вершинах которого значения известны, и неустойчивыми, если результат получается в результате экстраполяции.

XIV.7.7. Доказать, что для линейного однородного уравнения переноса (2.1) среди монотонных по Фридрихсу схем, построенных на минималь-

XIV. Численные методы решения уравнений гиперболического типа

ном шаблоне, включающем узлы (t^{n+1}, x_{m+1}) , (t^{n+1}, x_m) , (t^n, x_{m+1}) , (t^n, x_m) , наименьшую диссипацию имеют условно устойчивые схемы «явный» и «неявный уголок». Сравнить с диссипативной ошибкой схемы «безусловно устойчивый уголок».

XIV.7.8. Доказать, что система уравнений акустики (5.6) имеет гиперболический тип.

XIV.7.9. Доказать, что система уравнений Эйлера (газовой динамики), записанная в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{P}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x},$$

с уравнениями состояния идеального газа $\varepsilon = \varepsilon(T)$, $P = P(\rho, T)$, используемых в качестве замыкающих соотношений, имеет гиперболический тип. Найти характеристики системы.

XIV.8. Задачи с решениями

XIV.8.1. Для линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

предложить схему $N + 1$ порядка аппроксимации.

Указание. Рассмотреть невязку, образующуюся при замене дифферен-

$$\text{циального уравнения разностным } \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0.$$

Решение. Проведем исследование разностного уравнения на аппроксимацию. Для этого представим сеточные функции u_m^{n+1} и u_{m+1}^n в виде разложения в ряд Тейлора:

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h(u'_x)_m^n + \frac{h^2}{2!}(u''_x)_m^n + \frac{h^3}{3!}(u'''_x)_m^n + \frac{h^4}{4!}(u^{IV}_x)_m^n + \dots + \frac{h^N}{N!}(u_x^{(N)})_m^n + O(h^{N+1}),$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau(u'_t)_m^n + \frac{\tau^2}{2!}(u''_t)_m^n + \frac{\tau^3}{3!}(u'''_t)_m^n + \frac{\tau^4}{4!}(u^{IV}_t)_m^n + \dots + \frac{\tau^N}{N!}(u_t^{(N)})_m^n + O(\tau^{N+1}).$$

Отсюда с учетом того, что $u_t^{(k)} = u_x^{(k)}$, получим

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = (u'_t - u'_x)_m^n + r_\tau,$$

где r_τ — невязка, вычисляемая в точке (t^n, x_m) по формуле

$$\begin{aligned} r_\tau &= \frac{1}{2!}(\tau - h)u''_x + \frac{1}{3!}(\tau^2 - h^2)u'''_x + \frac{1}{4!}(\tau^3 - h^3)u''''_x + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{(N+1)!}(\tau^N - h^N)u_x^{(N+1)} + O(\tau^{N+1}, h^{N+1}) = \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{h^k}{(k+1)!} (\sigma^k - 1)u_x^{(k+1)} + O(\tau^{N+1}, h^{N+1}), \end{aligned}$$

$\sigma = \tau/h$ — число Куранта.

Аппроксимация частных производных высоких порядков, входящих в выражение для невязки с помощью конечных разностей, приводит к равенству

$$r_\tau = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \frac{\sigma^k - 1}{(k+1)!} \Delta^{k+1} u_m^n + O(\tau^{N+1}, h^{N+1}).$$

В таком случае, после переноса суммы по k в выражении для невязки в левую часть, получим разностную схему искомого порядка аппроксимации

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \frac{\sigma^k - 1}{(k+1)!} \Delta^{k+1} u_m^n = 0,$$

или

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \sigma \Delta^+ u_m^n - \sigma \sum_{k=1}^N \frac{(1-\sigma^k)}{(k+1)!} \Delta^{k+1} u_m^n = 0.$$

Эта схема легко распространяется на уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

если учесть, что $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial t^k \partial x^l} = (-1)^k a^k \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^{k+l}}$.

XIV.8.2. Для численного решения задачи Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x) \quad t \in [0, T], \quad x \in (-\infty, \infty), \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

используется разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} - \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} &= f_m^n, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm(M-1), \\ y_m^0 &= \varphi_m^n, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm(M-1). \end{aligned}$$

Доказать её устойчивость, используя второе определение устойчивости:

$$\|u_\tau\| \leq c \|f\| \text{ при } \sigma_x = \tau/h < 1.$$

Решение. Перепишем разностную схему в виде, разрешенном относительно величин на следующем слое по времени:

$$y_m^{n+1} = (1 - \sigma) y_m^n + \sigma y_{m+1}^n + \tau f_m^n,$$

$$y_m^0 = \varphi_m.$$

Определим норму в пространстве сеточных функций как

$$\|y_\tau\| = \sup_{n,m} |y_m^n| = \max_n \sup_m |y_m^n|.$$

Если $1 - \sigma \geq 0$, то справедлива оценка

$$\|(1 - \sigma) y_m^n + \sigma y_{m+1}^n\| \leq |(1 - \sigma) + \sigma| \max_n (|y_m^n|, |y_{m+1}^n|) = \max_n (|y_m^n|, |y_{m+1}^n|) \leq \max_m |y_m^n|.$$

В таком случае

$$|y_m^{n+1}| \leq \max_m |y_m^n| + \tau |f_m^n| \leq \max_m |y_m^n| + \tau \max_{m,n} |f_m^n|.$$

Отсюда видно, что при $f_m^n = 0$ норма решения $|u_m^n|$ не возрастает при возрастании n — выполняется принцип максимума. Поскольку правая часть в полученном неравенстве не зависит от m , то

$$\max_m |y_m^{n+1}| \leq \max_m |y_m^n| + \tau \max_{m,n} |f_m^n|.$$

$$\text{Аналогично } \max_m |y_m^n| \leq \max_m |y_m^{n-1}| + \tau \max_{m,n} |f_m^n|,$$

$$\max_m |y_m^{n-1}| \leq \max_m |y_m^{n-2}| + \tau \max_{m,n} |f_m^n|, \dots,$$

$$\max_m |y_m^1| \leq \max_m |y_m^0| + \tau \max_{m,n} |f_m^n|.$$

Сложение этих неравенств дает

$$\max_m |y_m^{n+1}| \leq \max_m |y_m^0| + (n+1)\tau \max_{m,n} |f_m^n|,$$

откуда получаем, с учетом того, что $t_n = n\tau$:

$$\max_m |y_m^{n+1}| \leq \max_m |\varphi_m| + t_{n+1} \max_{m,n} |f_m^n| \leq \|f_\tau\| + t_{n+1} \|f_\tau\| = (1 + t_{n+1}) \|f_\tau\|.$$

При этом учтено, что $\|\varphi_\tau\| = \|f_\tau\| = \max_{n,m} |f_m^n| + \max_m |\varphi_m^n|$.

Таким образом, получим $\|u_\tau\| \leq c \|f_\tau\|$, где $c = 1 + t_{n+1}$.

XIV.8.3. Построить явную разностную схему первого порядка точности для аппроксимации линейного уравнения переноса

$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)$, используя ее запись в общем виде

через неопределенные коэффициенты

$L_\tau y_\tau \equiv c_1 y_m^{n+1} + c_2 y_m^n + c_3 y_{m+1}^n = f_m^n$, на шаблоне «явный

правый уголок».



Решение. Будем подбирать коэффициенты c_i таким образом, чтобы выполнялось условие аппроксимации первого порядка

$$\mathbf{L}_\tau U_\tau = \mathbf{L}u|_{t_n, x_m} + O(\tau + h).$$

Разложение проекции точного решения на сетку u_m^{n+1} и u_{m+1}^n в ряды Тейлора в окрестности точки x_m , t_n приводит к равенствам

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau(u'_t)_m^n + O(\tau^2),$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h(u'_x)_m^n + O(h^2).$$

Подстановка этих разложений в разностную схему с неопределенными коэффициентами дает

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\tau U_\tau &= c_1 u_m^{n+1} + c_2 u_m^n + c_3 u_{m+1}^n = (c_1 + c_2 + c_3)u_m^n + c_1 \tau(u'_t)_m^n + c_3 h(u'_x)_m^n + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= (c_1 + c_2 + c_3)u_m^n + c_1 \sigma h(\mathbf{L}u)_m^n + (c_1 \sigma + c_3)h(u'_x)_m^n + O(h^2), \end{aligned}$$

поскольку можно считать независимыми переменными шаг по пространству и число Куранта, а для шага по времени получаем очевидное выражение $\tau = \sigma h$, $\sigma = \text{const}$. Здесь использованы очевидные равенства для дифференциального оператора

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{L}u + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{L}u.$$

Для выполнения условия аппроксимации первого порядка

$$\mathbf{L}_\tau U_\tau|_{t_n, x_m} = \mathbf{L}u|_{t_n, x_m} + O(h)$$

необходимо выполнение условий порядка

$$c_1 \sigma h = 1 + O(h),$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 + O(h),$$

$$(c_1 + c_3)h = 0 + O(h).$$

Если положить $O(h) = 0$, то условия порядка примут вид

$$c_1 \sigma h = 1,$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$c_1 + c_3 = 0.$$

Эта схема линейных алгебраических уравнений имеет единственное ре-

шение $c_1 = \frac{1}{\sigma h} = \tau^{-1}$, $c_2 = \frac{\sigma - 1}{\sigma h} = h^{-1} - \tau^{-1}$, $c_3 = -h^{-1}$. Получили коэффици-

енты уже известной разностной схемы первого порядка аппроксимации на заданном шаблоне

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} - \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = f_m^n.$$

Несложно проверить, что учет $O(h)$ привел бы к незначительной коррекции результата.

Замечание 1. Конечно, выбранная разностная схема легко получается и из других соображений. Но с помощью метода неопределенных коэффициентов удается построить схемы с хорошими свойствами для более сложных уравнений и систем.

Замечание 2. В случае гладкой правой части можно повысить порядок аппроксимации разностной схемы. Для этого следует записать равенство $\mathbf{L}_\tau y_\tau = c_1 y_m^{n+1} + c_2 y_m^n + c_3 y_{m+1}^n = b_1 f_m^{n+1} + b_2 f_m^n + b_3 f_{m+1}^n$, далее схема строится аналогично. Представляем читателям самостоятельно провести дальнейшие выкладки.

XIV.8.4. Исследовать на спектральную устойчивость полностью симметричную разностную схему на шаблоне квадрат

$$\frac{1}{2\tau} \left[(y_{m+1}^{n+1} + y_m^{n+1}) - (y_{m+1}^n - y_m^n) \right] + \frac{1}{h} \left[(y_{m+1}^{n+1} + y_{m+1}^n) - (y_m^{n+1} - y_m^n) \right] = f_{m+1/2}^{n+1/2},$$

аппроксимирующую линейное уравнение переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Решение. После подстановки в схему гармоник Фурье $y_m^n = \lambda^n e^{iam}$ получим выражение для спектра оператора послойного перехода

$$\lambda(\alpha) = \frac{1 - i\sigma \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + i\sigma \operatorname{tg}(\alpha/2)},$$

$\sigma = \tau / h$ — число Куранта. Тогда $|\lambda(\alpha)| = \left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$ и рассматриваемая схема

безусловно устойчива. Этого следовало ожидать, так как аппроксимация производной по времени производится как на нижнем, так и на верхнем временном слое. Однако решение на верхнем слое выписывается в явном виде, поскольку краевое условие ставится на левой границе. Поэтому схему иногда относят к явным схемам бегущего счета. Расчетная формула будет

$$y_{m+1}^{n+1} = y_m^n + \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} (y_m^{n+1} - y_{m+1}^n) + \tau f_{m+1/2}^{n+1/2}.$$

Схема обладает вторым порядком аппроксимации по времени и пространственной координате.

XIV.8.5. Получить дисперсионное соотношение для разностных схем первого и второго порядков сходимости для аппроксимации нелинейного уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, где $a \neq \text{const}$ и, вообще говоря, зависит от решения.

Указание. Использовать дисперсионное соотношение в виде $e^{\lambda\tau} e^{ikx}$, где k — волновое число, точное решение для данного дифференциального уравнения известно, $\lambda = -aki$.

Решение. Будем искать дисперсионное соотношение для разностного уравнения в виде $y_m^n = e^{\lambda(k)t_n} \cdot e^{ikx_m} = e^{\lambda n\tau + iknh}$.

После его подстановки в схему «правый уголок» первого порядка аппроксимации получим $\frac{1}{\tau}(e^{\lambda\tau} - 1) + \frac{a}{h}(1 - e^{-ikh}) = 0$, откуда следует $\lambda(\tau, h, k) = \frac{1}{\tau} \ln \left\{ 1 - \frac{a\tau}{h} + \frac{a\tau}{h} e^{-ikh} \right\}$.

Сравним дисперсионное соотношение для дифференциального и соответствующих разностных уравнений.

Пусть $\frac{a\tau}{h} = 1$. Имеет место совпадение $\lambda(k)$ и $\lambda(\tau, h, k)$. Этот случай мало интересен для вычислительной практики, поскольку a может меняться в ходе решения задачи. Для проведения дисперсионного анализа схем предположим $kh \ll 1$, имея в виду то, что h — малый параметр, а аппроксимация тем лучше, чем меньше волновое число, то есть чем более гладким является исследуемое частное решение.

В таком случае дисперсионное соотношение вплоть до членов второго порядка будет

$$\lambda(\tau, h, k) \approx -iak - \frac{ahk^2}{2} \left(1 - \frac{a\tau}{h} \right) = \lambda(k) - \frac{k^2}{2} ah(1 - \sigma),$$

$\sigma = a\tau / h$ — число Куранта, а частное решение примет вид

$$\exp(ik(mh - ant)) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} ak^2(h - a\tau)nt\right).$$

Первый сомножитель совпадает с соответствующим частным решением дифференциального уравнения. Второй множитель имеет чисто разностное происхождение. Именно его поведение при различных τ , h , k представляет особенный интерес. При $a < 0$, $h - a\tau > 0$, как видно из этого решения, рассматриваемую схему нельзя использовать для проведения расчетов. Второй сомножитель имеет порядок $\exp(k^2 |a| ht_n)$, он быстро

растет при $k \sim h^{-1}$, $h \ll 1$. Аналогичная ситуация получается и при $a > 0$, $h - at < 0$. При $a > 0$, $h - at > 0$ второй сомножитель затухает с ростом t_n тем быстрее, чем больше k или чем меньше λ — длина волны частного решения вида $\exp(ikx)$. Таким образом, численное решение, полученное по схеме уголок, отличается от точного, в котором все гармоники сохраняют амплитуду с ростом t_n , наличием затухающего множителя для гармоник с большими волновыми числами (или малыми длинами волн). Действие этого сомножителя приводит к сглаживанию решений, имеющих разрыв в начальных данных.

Для разностной схемы Лакса–Вендроффа второго порядка аппроксимации

$$(y_m^{n+1} - y_m^n) + \frac{\sigma}{2}(y_{m+1}^n - y_{m-1}^n) - \frac{\sigma^2}{2}(y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n) = 0$$

дисперсионное соотношение будет

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \ln \left(1 - i\sigma \sin kh - 2\sigma^2 \sin^2 \frac{kh}{2} \right),$$

для длинноволновых гармоник с $kh \ll 1$ разложение вплоть до членов третьего порядка по этой величине дает

$$\lambda(\tau, h, k) \approx -ika + ika \frac{k^2 h^2}{6} (1 - 3\sigma^2).$$

Из полученных соотношений можно сделать следующий вывод. Решения дифференциального уравнения переноса имеют вид волн с волновым числом k , которые движутся вправо со скоростью a , так как

$$u(t, x) = \exp(ikx + \lambda(k)t) = \exp(ik(x - at)).$$

Решения разностного уравнения второго порядка аппроксимации имеют вид

$$\begin{aligned} y(t_n, x_m) &= \exp(ikx_m + \lambda(\tau, h, k)t_n) = \exp \left(ik \left\{ x_m - a \left[1 - \frac{k^2 h^2}{6} (1 - 3\sigma^2) \right] t_n \right\} \right) = \\ &= \exp \left(ik \left\{ x_m - a [1 + A_k(k)] t_n \right\} \right), \end{aligned}$$

где введено обозначение $A_k = -k^2 h^2 (1 - 3\sigma^2) / 6$.

Последнее выражение означает, что разностные решения уже не имеют вид волн, движущихся с одной и той же скоростью. Теперь каждая волна со своей частотой движется с собственной скоростью $a_k = a(1 + A_k)$. Разумеется, при малых k скорости a_k мало отличаются от a , но высокочастотные волны движутся со скоростями, заметно отличающимися от скорости переноса. Кроме того, в схеме Лакса–Вендроффа гармоники со вре-

менем не затухают, т.к. не появляется множителя с действительным отрицательным показателем экспоненты, численное решение не сглаживается со временем. Начальный волновой пакет и определенный им начальный профиль решения изменяются с течением времени из-за рассогласования фаз. Это приводит к потере монотонности профиля $u(x)$, если он был вначале монотонным, и появлению осцилляций разностного происхождения. Появление *сеточной дисперсии* — одно из проявлений эффекта Гиббса, подробнее об эффекте Гиббса в [31].

XIV.8.6. Акустическая система описывает распространение плоских звуковых волн. Поставим для нее задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\rho = \text{const}, \quad c = \text{const},$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x),$$

$$t > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

где u — скорость движения среды, p — давление, ρ — плотность среды, c — скорость звука в среде.

- Представить акустическую систему в интегральной форме.
- Преобразовать акустическую систему к виду системы с разделенными переменными.
- Предложить разностную схему первого порядка точности для ее решения.

Решение.

- Проинтегрировав акустическую систему по произвольной области с границей G , получим

$$\oint_G \rho u dx - pdt = 0,$$

$$\oint_G \frac{p}{c^2} dx - \rho u dt = 0.$$

- Умножим второе уравнение на $(\rho c)^{-1}$, затем сложим с первым и вычтем из него. Получим систему двух уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{p}{\rho c} \right) + c \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{p}{\rho c} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(u - \frac{p}{\rho c} \right) - c \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{p}{\rho c} \right) = 0,$$

или после введения обозначений (инвариантов Римана) $R = u + \frac{p}{\rho c}$,

$S = u - \frac{p}{\rho c}$ система запишется в виде двух уравнений переноса

$$\frac{\partial R}{\partial t} + c \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} - c \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Эта система позволяет выписать общее решение: $R = f(x - ct)$, $S = g(x + ct)$. Здесь f, g — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, определяемые из начальных условий. В терминах инвариантов Римана можно определить и значения естественных переменных u, p :

$$u = \frac{1}{2}(f(x - ct) + g(x + ct)),$$

$$p = \frac{\rho c}{2}(f(x - ct) - g(x + ct)).$$

Замечательное свойство инвариантов Римана R, S заключается в их постоянстве вдоль прямых $x - ct = \text{const}$ и $x + ct = \text{const}$, или $\frac{dx}{dt} = \pm c$, которые называются характеристиками акустической системы.

Если задавать начальные данные $u(x, 0) = \varphi(x)$, $p(x, 0) = \psi(x)$, $-\infty < x < \infty$, то связь начальных данных и инвариантов Римана будет

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)), \quad \psi(x) = \frac{\rho c}{2}[f(x) - g(x)],$$

откуда получим $f(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{\rho c}$, $g(x) = \varphi(x) - \frac{\psi(x)}{\rho c}$.

Следовательно, решение системы в этом случае

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2\rho c}(\psi(x - ct) + \psi(x + ct)),$$

$$p(t, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) - \frac{\rho c}{2}(\psi(x - ct) + \psi(x + ct)).$$

Для численного решения системы, записанной в инвариантах Римана, можно применить схему Куранта–Изаксона–Риса:

$$\frac{R_m^{n+1} - R_m^n}{\tau} + c \frac{R_m^{n+1} - R_{m-1}^n}{h} = 0, \quad \frac{S_m^{n+1} - S_m^n}{\tau} - c \frac{S_{m+1}^{n+1} - S_m^n}{h} = 0,$$

или $R_m^{n+1} = (1 - \sigma)R_m^n + \sigma R_{m-1}^n$, $S_m^{n+1} = (1 + \sigma)S_m^n - \sigma S_{m+1}^n$.

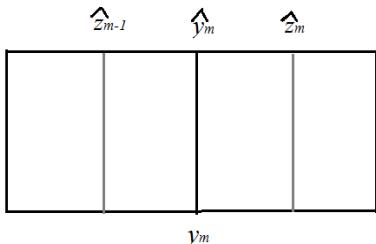
Известно, что данная схема имеет первый порядок аппроксимации и является устойчивой при выполнении условия КФЛ $\frac{c\tau}{h} \leq 1$.

XIV.8.7. Исследовать на сходимость двухслойную схему для системы уравнений акустики (5.6) на разнесенной сетке:

$$\frac{\hat{y}_m - y_m}{\tau} = c^2 \xi_1 \frac{\hat{z}_m - \hat{z}_{m-1}}{h} + c^2 (1 - \xi_1) \frac{z_m - z_{m-1}}{h} + F_m^n,$$

$$\frac{\hat{z}_m - z_m}{\tau} = \xi_2 \frac{\hat{y}_{m+1} - \hat{y}_m}{h} + (1 - \xi_2) \frac{y_{m+1} - y_m}{h}$$

в зависимости от выбора весовых множителей схемы ξ_1, ξ_2 .



Разнесенный шаблон для задачи XIV.8.7

Решение. Сеточные функции у соответствуют непрерывной функции u , а z — v . Исследуем представленную схему на устойчивость, используя спектральный признак:

$$y_m^n = a \lambda^n e^{i \varphi m}, \quad z_m^n = b \lambda^n e^{i \varphi m}.$$

Подстановка в однородную разностную схему приводит к системе вида

$$a \frac{\lambda - 1}{\tau} - c^2 b \frac{1 - e^{-i\varphi}}{h} (\xi_1 \lambda + 1 - \xi_1) = 0,$$

$$b \frac{\lambda - 1}{\tau} - a \frac{e^{i\varphi} - 1}{h} (\xi_2 \lambda + 1 - \xi_2) = 0.$$

Требование существования нетривиального решения системы относительно амплитуд a и b приводит к дисперсионному соотношению

$$\left(\frac{\lambda - 1}{\tau} \right)^2 - c^2 \frac{(1 - e^{-i\varphi})(e^{i\varphi} - 1)}{h^2} (\xi_1 \lambda + 1 - \xi_1)(\xi_2 \lambda + 1 - \xi_2) = 0.$$

Обозначим число Куранта $\sigma = c\tau / h$ и введем $k = 2\sigma \sin \varphi / 2$. Приводя последнее выражение к классическому квадратному уравнению, получим

$$\lambda^2 (1 + k^2) + \lambda \left[-2 + k^2 (\xi_1 (1 - \xi_2) + \xi_2 (1 - \xi_1)) \right] + 1 + k^2 (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) = 0.$$

Оба корня системы меньше единицы при выполнении условий

$$\xi_1 + \xi_2 \geq 1,$$

$$\sigma^2 (2\xi_1 - 1)(2\xi_2 - 1) \geq -1.$$

Отсюда видно, что если $\xi_1 \geq 0.5$ и $\xi_2 \geq 0.5$, то схема устойчива при любых числах Куранта и сеточных параметрах, если $\xi_1 + \xi_2 \geq 1$, если один

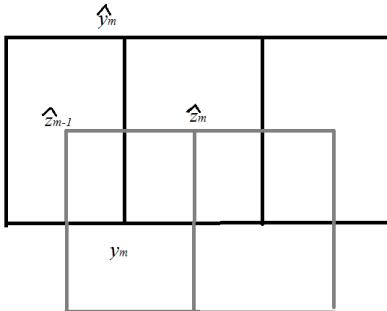
из параметров меньше 0.5, то схема условно устойчива при

$$\tau \leq \frac{h}{c} (2\xi_1 - 1)^{-1} (2\xi_2 - 1)^{-1}.$$

Пусть $\xi_1 = \xi_2 = 0.5$.

Тогда полученная схема является безусловно устойчивой и обладает вторым порядком аппроксимации по обеим переменным.

В случае $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$ схема может трактоваться как чисто явная схема второго порядка аппроксимации. Шаблон для этой схемы представлен на рисунке. Условием устойчивости чисто явной схемы будет $\sigma \leq 1$.



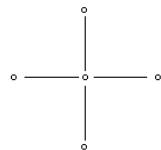
Шаблон явной схемы для системы акустики на разнесенных сетках

XIV.8.8. Исследовать на сходимость схему «крест»

для численного решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Шаблон схемы показан на рисунке.



Решение. Запишем разностную схему

$$\mathbf{L}_\tau u_\tau = \frac{y_m^{n+1} - 2y_m^n + y_m^{n-1}}{\tau^2} - \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} = 0.$$

Исследование на аппроксимацию дает для главного члена невязки

$$r_\tau = \frac{\tau^2}{12} u_t^{(4)} - \frac{h^2}{12} u_x^{(4)} + O(\tau^2, h^2).$$

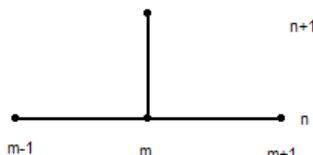
Схема имеет второй порядок аппроксимации. Исследуем схему на устойчивость по спектральному признаку. Для спектра оператора послойного перехода получается квадратное уравнение

$$\lambda^2 - 2(1 - 2\sigma^2 \sin^2(\alpha/2))\lambda + 1 = 0,$$

здесь $\sigma = \tau/h$ — число Куранта. По теореме Виета произведение корней $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ и условие устойчивости выполняется, если $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Для полученного квадратного уравнения с действительными коэффициентами это означает, что его корни являются комплексно-сопряженными. Это возможно лишь в случае, если дискриминант отрицателен:

$$D(\alpha) = 4\sigma^2 \sin^2 \alpha (\sigma^2 \sin^2(\alpha/2) - 1) < 0.$$

Условие устойчивости будет выполнено для всех гармоник, если $\sigma < 1$.



XIV.8.9. Данна система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = \varphi_1(x), v(0, x) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

А) Показать, что система является гиперболической. Определить корректные постановки краевых условий для этой задачи из предложенных вариантов (если условия некорректны, указать почему):

- 1) $u(t, 0) = \psi_1(t), \quad v(t, 0) = \psi_2(t).$
- 2) $u(t, 0) = \psi_1(t), \quad v(t, 1) = \psi_2(t).$
- 3) $u(t, 0) + v(t, 0) = \psi_1(t), \quad v(t, 1) = \psi_2(t).$
- 4) $v(t, 0) = \psi_1(t), \quad u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t).$

Б) Предложить устойчивую разностную схему для решения данной системы уравнений на указанном шаблоне.

В) Указать способ и порядок вычисления неизвестных функций u, v на верхнем слое, включая граничные точки.

Решение.

А) Собственные значения матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ равны

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$. Соответствующие им левые собственные векторы $e_1 = (1, 1), e_2 = (3, -4)$. Система является гиперболической, так как ее собственные числа действительные. Тогда у этой системы уравнений в частных производных имеются два инварианта Римана. Первый

$R_1 = (\mathbf{e}_1, (u, v)^T) = u + v$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial R_1}{\partial t} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = f + g$, а

второй $R_2 = (\mathbf{e}_2, (u, v)^T) = 3u - 4v$ — уравнению $\frac{\partial R_2}{\partial t} + 6 \frac{\partial R_2}{\partial x} = 3f - 4g$.

Первая постановка краевых условий некорректна, т.к. оба условия заданы слева, при этом инвариант R_1 приносит значение $u + v$ тоже на левую границу, справа будем иметь только принесенное значение R_2 , этого недостаточно для определения входящего R_1 на правой границе.

Для второй постановки на левой границе задано значение u , приносится инвариантом R_1 значение $u + v$, что позволяет определить на этой границе любую линейную комбинацию искомых переменных, в частности, значения инварианта R_2 . На правой границе задано значение v , инвариант R_2 приносит значение $3u - 4v$, система для определения переменных u и v совместна, постановка корректна.

Третья постановка граничных условий некорректна, т.к. значение $u + v$ на левой границе одновременно задано и приносится инвариантом R_1 , система несовместна.

Четвертая постановка также корректна. Величины, задаваемые на левой и правой границах области, и величины, приносимые инвариантами на границы, образуют совместные системы для определения u и v на границах. Следовательно, на обеих границах могут быть определены любые линейные комбинации переменных, в частности, входящий на левой границе инвариант R_2 , а на правой — R_1 . Корректные постановки граничных условий — вторая и четвертая.

Б) Требуемая схема — схема Лакса–Вендроффа в инвариантах Римана. Схема Лакса–Вендроффа является условно устойчивой.

Схема Лакса–Вендроффа для неоднородного уравнения переноса $u'_t + au'_x = f(t, x)$ может быть получена из явной четырехточечной схемы. Для этого выразим главный член ошибки аппроксимации явной четырехточечной схемы (с производной вперед по времени и центральной по пространству):

$$r_{th} = \frac{\tau}{2} u''_{tt},$$

или, используя дифференциальные продолжения,

$$u''_{tt} = (-au'_x + f)'_t = -a(u'_t)'_x + f'_t = -a(-au''_{xx} + f'_x) + f'_t = a^2 u''_{xx} - af'_x + f'_t.$$

Теперь заменим главный член погрешности аппроксимации соответствующей конечной разностью и вычтем его из левой части исходной разностной схемы.

В результате получим схему

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2h^2} (y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n) = f_m^n - \frac{a\tau}{2} f'_x + \frac{\tau}{2} f'_t.$$

Производные по x от правой части можно заменить центральной разностью — порядок аппроксимации не изменится. Условие устойчивости схемы $\sigma = a\tau/h \leq 1$, оно определяется вторым уравнением для инвариантов.

Б) Искомые функции на верхнем слое вычисляются в результате решения системы линейных уравнений на верхнем слое

$$\begin{cases} u_m^{n+1} + v_m^{n+1} = R_{1m}^{n+1}, \\ 3u_m^{n+1} - 4v_m^{n+1} = R_{2m}^{n+1}, \end{cases}$$

во всех точках, включая граничные. Система может быть разрешена, для сеточных функций явное выражение есть

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = (4R_{1m}^{n+1} + R_{2m}^{n+1})/7, \\ v_m^{n+1} = (3R_{1m}^{n+1} - R_{2m}^{n+1})/7. \end{cases}$$

Схема Лакса–Вендроффа не позволяет найти решение в граничных узлах — для этого формально одна из точек шаблона должна лежать за границами расчетной области. Значения инвариантов в граничных точках (R_1 на левой, R_2 на правой) рассчитываются отдельно. Сделать это возможно с использованием, например, схемы Бима–Уорминга с интерполяцией по трем точкам значения в точке пересечения характеристики, выпущенной назад, с нижним слоем по времени. После этого значения искомых величин на границах также находятся из решения системы линейных уравнений.

XIV.9. Теоретические задачи

XIV.9.1. Задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

имеет решение $u(x, t) = e^{iat} e^{ixa}$.

Аппроксимирующая эту задачу разностная схема

$$\frac{y_m^{p+1} - y_m^p}{\tau} - \frac{y_{m+1}^p - y_m^p}{h} = 0, \quad p = 0, 1, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$y_m^0 = e^{iahm}$$

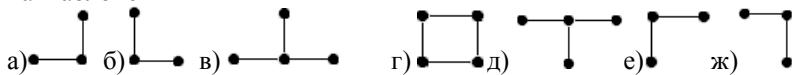
имеет решение $y_m^p = [1 - \sigma + \sigma e^{iah}]^p e^{iahm}$, которое при $p = t/\tau$, $m = x/h$ стремится к решению дифференциальной задачи при $h \rightarrow 0$, каково бы ни

было фиксированное число $\sigma = \tau/h$. Между тем при $\sigma > 1$ разностная задача не удовлетворяет необходимому для сходимости условию Куранта–Фридрихса–Леви. Объясните кажущийся парадокс.

XIV.9.2. Построить разностные схемы для решения задачи Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \in [0, T]$$

на шаблоне



Исследовать эти схемы на устойчивость и указать их порядок аппроксимации.

3) Построить единственную (с точностью до способа аппроксимации правой части) схему с порядком аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$, которой соответствует шаблон в).

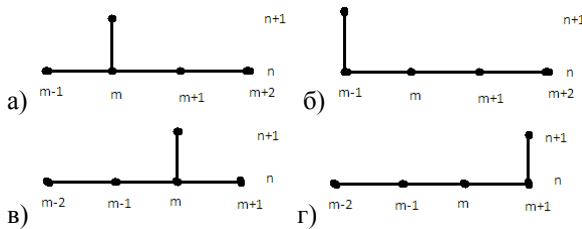
XIV.9.3. Построить первое дифференциальное приближение схемы «явный правый уголок» (2.6) для численного решения однородного уравнения переноса (2.1) с положительной скоростью переноса $c > 0$. Исследовать устойчивость схемы для решения задачи Коши по первому дифференциальному приближению.

XIV.9.4. Построить первое дифференциальное приближение схем для численного решения задачи Коши для уравнения переноса. Рассмотреть схему Лакса и двухслойную явную трехточечную схему второго порядка аппроксимации по обеим переменным. Исследовать характер погрешности по первому дифференциальному приближению.

XIV.9.5. Пусть некоторая разностная схема для решения уравнения переноса первого порядка аппроксимации обладает отрицательным коэффициентом схемной вязкости. Что можно сказать о других свойствах этой схемы (устойчивость, сходимость, монотонность)?

XIV.9.6. Для полностью симметричной разностной схемы второго порядка аппроксимации, построенной на шаблоне задачи XIV.9.2.г), исследовать характер погрешности. Какова ошибка данной схемы — диссипативная или дисперсионная?

XIV.9.4. Интерполяционно–характеристическим методом построить схему наивысшего порядка аппроксимации для однородного линейного уравнения переноса $u'_t + cu'_x = 0$ на предложенном шаблоне



На каком шаблоне предпочтительнее строить аппроксимацию при положительной скорости распространения возмущений c , а на каком — при отрицательной?

XIV.9.5. Построить обобщение условно устойчивой схемы "неявный уголок" на случай двух пространственных измерений аналогично (6.1) и (6.2) при $a > 0$, $b > 0$. Исследовать схему на аппроксимацию и устойчивость. Интерпретировать результаты устойчивости схемы из условия Куранта–Фридрихса–Леви.

XIV.9.6. Для решения уравнения переноса

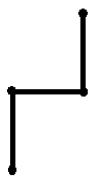
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0$$

используют схему с искусственной вязкостью

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = \xi \tau \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}.$$

Исследовать её на устойчивость. При каких значениях ξ эта схема совпадает со схемами Лакса, Куранта–Изаксона–Риса, Лакса–Вендроффа?

XIV.9.7. Показать, что разностные схемы Лакса и Куранта–Изаксона–Риса удовлетворяют условию TVD.



XIV.9.8. Для решения уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0$$

построить разностную схему «кабаре» на шаблоне, показанном на рисунке. Исследовать схему на сходимость.

Показать, что схема точна не только при значениях числа Куранта $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$, но и при $\sigma = 1/2$.

XIV.9.7. Какая дифференциальная задача с какой погрешностью аппроксимации приближается схемой

$$\frac{y_m^{n+1} - 0.5(y_{m+1}^n + y_{m-1}^n)}{\tau} + \alpha \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = f_m^n,$$

$$y_m^0 = \varphi(x_m) \quad n = 0, \dots T/\tau - 1; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- a) при $\tau/h = r = \text{const}$,
- b) при $\tau/h^2 = r = \text{const}$?

XIV.9.8. Для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} = x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} - 8 \frac{\partial v}{\partial x} = t$$

с начальными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$, $v(x, 0) = v_0(x)$ построить разностную схему второго порядка аппроксимации по обеим переменным, указать шаблон разностной схемы, исследовать ее на устойчивость.

XIV.9.9. Для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 2t$$

с начальными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$, $v(x, 0) = v_0(x)$ построить двухслойную гибридную разностную схему, указать шаблон разностной схемы.

XIV.9.10. Для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = t,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 12 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = x$$

с начальными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$, $v(x, 0) = v_0(x)$ построить двухслойную разностную схему второго порядка аппроксимации по каждой переменной, указать шаблон разностной схемы, исследовать схему на устойчивость.

XIV.9.11 (А. В. Барабанщиков). Исследовать на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы на сетке

$$D_h = \left\{ (t^n, x_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_m = mh, h = \text{const}, m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \right\} :$$

a)

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{-3u_{m+1}^n + 4u_m^n - u_{m-1}^n}{2h} + \frac{-3v_{m+1}^n + 3v_{m-1}^n}{2h} = f_m^n, \\ \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{-u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2h} + \frac{-v_{m+1}^n + 4v_m^n - 3v_{m-1}^n}{2h} = g_m^n; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{-u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} + 2u_m^n - 2u_{m-1}^n}{2h} + \frac{-v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^n + 2v_{m-1}^n}{2h} = f_m^n, \\ \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{-u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^n + 2u_{m-1}^n}{2h} + \frac{-v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1} + 2v_m^n - 2v_{m-1}^n}{2h} = g_m^n; \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{-u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + u_m^n}{2h} + \frac{v_m^{n+1} - v_{m-1}^{n+1} - v_{m+1}^n + v_m^n}{2h} = f_m^n, \\ \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + u_m^n}{2h} + \frac{-v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1} - v_{m+1}^n + v_m^n}{2h} = g_m^n; \end{cases}$$

г)

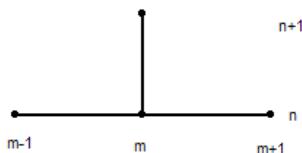
$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{-2u_{m+1}^{n+1} + 2u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + u_m^n}{3h} + 2 \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1} - v_{m+1}^n + v_m^n}{3h} = f_m^n, \\ \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + u_m^n}{3h} + \frac{-v_{m+1}^{n+1} + v_{m-1}^{n+1} - 2v_{m+1}^n + 2v_m^n}{3h} = g_m^n; \end{cases}$$

д)

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{-4u_{m+1}^n + 5u_m^n - 1u_{m-1}^n}{3h} + 2 \frac{-2v_{m+1}^n + v_m^n + v_{m-1}^n}{3h} = f_m^n, \\ \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{-2u_{m+1}^n + u_m^n + u_{m-1}^n}{3h} + 2 \frac{-v_{m+1}^n + 2v_m^n - v_{m-1}^n}{3h} = g_m^n. \end{cases}$$

XIV.9.12. Даны система уравнений и постановки краевых условий к каждой из них, при этом начальные условия для всех систем $u(0, x) = \varphi_1(x)$, $v(0, x) = \varphi_2(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

$a) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x). \end{cases}$	1) $u(t, 0) = \psi_1(t)$, $v(t, 1) = \psi_2(t)$. 2) $u(t, 1) = \psi_1(t)$, $v(t, 1) = \psi_2(t)$. 3) $u(t, 0) = \psi_1(t)$, $2u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t)$ 4) $u(t, 0) + v(t, 0) = \psi_1(t)$, $u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t)$.
$b) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x). \end{cases}$	1) $u(t, 0) = \psi_1(t)$, $v(t, 1) = \psi_2(t)$. 2) $u(t, 1) = \psi_1(t)$, $v(t, 1) = \psi_2(t)$. 3) $u(t, 0) = \psi_1(t)$, $2u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t)$. 4) $u(t, 0) + v(t, 0) = \psi_1(t)$, $u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t)$.
$b) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x). \end{cases}$	1) $u(t, 0) - v(t, 0) = \psi_1(t)$, $v(t, 1) = \psi_2(t)$. 2) $u(t, 0) = \psi_1(t)$, $2u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t)$. 3) $u(t, 0) = \psi_1(t)$, $2u(t, 0) + v(t, 0) = \psi_2(t)$. 4) $u(t, 0) + v(t, 0) = \psi_1(t)$, $u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t)$.
$\Gamma) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x). \end{cases}$	1) $u(t, 0) - v(t, 0) = \psi_1(t)$, $v(t, 1) = \psi_2(t)$. 2) $u(t, 0) = \psi_1(t)$, $2u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t)$. 3) $u(t, 1) = \psi_1(t)$, $u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t)$. 4) $u(t, 0) + 3v(t, 0) = \psi_1(t)$, $u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t)$.



1) Показать, что система является гиперболической. Определить корректные постановки краевых условий для этой задачи из предложенных вариантов (если постановки условий некорректны, указать, почему).

2) Предложить устойчивую разностную схему для решения данной системы уравнений на указанном шаблоне.

3) Указать способ и порядок вычисления неизвестных функций u , v на верхнем слое, включая граничные точки.

XIV.9.13. Даны система уравнений и постановки краевых условий к каждой из них, при этом начальные условия для всех систем $u(0, x) = \varphi_1(x)$, $v(0, x) = \varphi_2(x)$, $w(0, x) = \varphi_3(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

<p>a)</p> $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial w}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = g(t, x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} - 6 \frac{\partial v}{\partial x} + 5 \frac{\partial w}{\partial x} = h(t, x). \end{cases}$	<p>1) $u(t, 0) - v(t, 0) + w(t, 0) = \psi_1(t)$, $u(t, 1) - v(t, 1) + w(t, 1) = \psi_2(t)$, $u(t, 1) = \psi_3(t)$.</p> <p>2) $u(t, 0) - v(t, 0) + w(t, 0) = \psi_1(t)$, $v(t, 0) = \psi_2(t)$, $w(t, 1) = \psi_3(t)$.</p> <p>3) $u(t, 1) - v(t, 1) + w(t, 1) = \psi_1(t)$, $u(t, 1) - 2v(t, 1) + w(t, 1) = \psi_2(t)$, $u(t, 0) = \psi_3(t)$.</p> <p>4) $u(t, 0) - v(t, 0) + w(t, 0) = \psi_1(t)$, $u(t, 0) - v(t, 0) + 0.5w(t, 0) = \psi_2(t)$, $w(t, 1) = \psi_3(t)$.</p>
<p>б)</p> $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} + 8 \frac{\partial v}{\partial x} + 6 \frac{\partial w}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial w}{\partial x} = g(t, x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} - 11 \frac{\partial u}{\partial x} - 8 \frac{\partial v}{\partial x} - 9 \frac{\partial w}{\partial x} = h(t, x). \end{cases}$	<p>1) $u(t, 0) + w(t, 0) = \psi_1(t)$, $u(t, 1) - v(t, 1)/2 + w(t, 1) = \psi_2(t)$, $w(t, 0) = \psi_3(t)$.</p> <p>2) $u(t, 0) + w(t, 0) = \psi_1(t)$, $u(t, 1) - v(t, 1)/2 + w(t, 1) = \psi_2(t)$, $3u(t, 1) + 2v(t, 1) + 2w(t, 1) = \psi_3(t)$.</p> <p>3) $u(t, 1) + w(t, 1) = \psi_1(t)$, $v(t, 1) = \psi_2(t)$, $3u(t, 0) + 2v(t, 0) + 2w(t, 0) = \psi_3(t)$.</p> <p>4) $u(t, 1) + w(t, 1) = \psi_1(t)$, $v(t, 0) = \psi_2(t)$, $3u(t, 0) + 2v(t, 0) + 2w(t, 0) = \psi_3(t)$.</p>

в)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = g(t, x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = h(t, x). \end{cases}$$

$$1) u(t, 0) - w(t, 0) = \psi_1(t),$$

$$u(t, 0) + 2v(t, 0) - w(t, 0) = \psi_2(t),$$

$$w(t, 0) = \psi_3(t).$$

$$2) u(t, 1) - w(t, 1) = \psi_1(t),$$

$$u(t, 0) - 3v(t, 0) + 2w(t, 0) = \psi_2(t),$$

$$w(t, 0) = \psi_3(t).$$

$$3) u(t, 1) - w(t, 1) = \psi_1(t),$$

$$v(t, 0) = \psi_2(t),$$

$$u(t, 0) - 3v(t, 0) + 2w(t, 0) = \psi_3(t).$$

$$4) u(t, 0) - w(t, 0) = \psi_1(t),$$

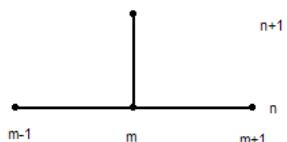
$$v(t, 0) = \psi_2(t),$$

$$u(t, 0) - 3v(t, 0) + 2w(t, 0) = \psi_3(t).$$

1) Показать, что система является гиперболической. Определить корректные постановки краевых условий для этой задачи из предложенных вариантов (если условия некорректны, указать, почему).

2) Предложить устойчивую разностную схему для решения данной системы уравнений на указанном шаблоне.

3) Описать способ и порядок вычисления неизвестных функций u , v , w на верхнем слое, включая граничные точки.



XIV.9.14. Данна система уравнений и постановки краевых условий к каждой из них, при этом начальные условия для всех систем $u(0, x) = \varphi_1(x)$, $v(0, x) = \varphi_2(x)$, $w(0, x) = \varphi_3(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

$$a) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + 3 \frac{\partial w}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 5 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = g(t, x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = h(t, x). \end{cases}$$

$$1) u(t, 1) - w(t, 1) = \psi_1(t),$$

$$u(t, 0) + 2v(t, 0) + w(t, 0) = \psi_2(t),$$

$$v(t, 0) = \psi_3(t).$$

$$2) u(t, 1) - w(t, 1) = \psi_1(t),$$

$$u(t, 1) + 2v(t, 1) + w(t, 1) = \psi_2(t),$$

$$w(t, 0) = \psi_3(t).$$

$$3) u(t, 1) - w(t, 1) = \psi_1(t),$$

$$v(t, 1) = \psi_2(t),$$

$$u(t, 0) - v(t, 0) + w(t, 0) = \psi_3(t).$$

$6) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} + 3 \frac{\partial w}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = g(t, x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = h(t, x). \end{cases}$	4) $u(t, 0) - w(t, 0) = \psi_1(t),$ $u(t, 1) + 2v(t, 1) + w(t, 1) = \psi_2(t),$ $v(t, 0) = \psi_3(t).$ 1) $v(t, 0) - w(t, 0) = \psi_1(t),$ $3u(t, 1) - 5v(t, 1) + 2w(t, 1) = \psi_2(t),$ $5u(t, 0) + v(t, 0) + 4w(t, 0) = \psi_3(t).$ 2) $v(t, 0) - w(t, 0) = \psi_1(t),$ $3u(t, 1) - 5v(t, 1) + 2w(t, 1) = \psi_2(t),$ $5u(t, 1) + v(t, 1) + 4w(t, 1) = \psi_3(t).$ 3) $v(t, 0) - w(t, 0) = \psi_1(t),$ $3u(t, 0) - 5v(t, 0) + 2w(t, 0) = \psi_2(t),$ $5u(t, 1) + v(t, 1) + 4w(t, 1) = \psi_3(t).$ 4) $v(t, 1) - w(t, 1) = \psi_1(t),$ $3u(t, 0) - 5v(t, 0) + 2w(t, 0) = \psi_2(t),$ $5u(t, 0) + v(t, 0) + 4w(t, 0) = \psi_3(t).$
---	--

1) Показать, что система является гиперболической. Определить корректные постановки краевых условий для этой задачи из предложенных вариантов (если условия некорректны, указать, почему).

2) Предложить устойчивую монотонную разностную схему для решения данной системы уравнений на указанном шаблоне.

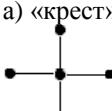
3) Указать способ и порядок вычисления неизвестных функций u, v, w на верхнем слое, включая граничные точки.

XIV.9.15. Построить разностные схемы второго порядка аппроксимации для задачи

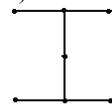
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t)$$

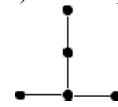
на предложенном шаблоне. Исследовать полученную схему на сходимость.

а) «крест» 	б) неявная трехслойная 
---	---

в) неявная семиточечная схема



г) явная трехслойная схема

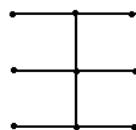


XIV.9.15. Построить двухпараметрическое семейство разностных схем для решения смешанной задачи для линейного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x),$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t).$$



на девятиточечном шаблоне. Исследовать полученное семейство схем на аппроксимацию. Схемы наивысшего порядка аппроксимации исследовать на устойчивость.

XIV.9.16. Для решения смешанной задачи для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad u(0, t) = \psi_0(t), \quad u(1, t) = \psi_1(t)$$

использована разностная схема

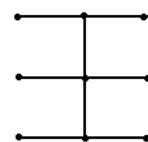
$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1} - u_m^{n-1} + u_{m-1}^{n-1}}{h^2} = f_m^n.$$

Построить шаблон разностной схемы. Исследовать ее на аппроксимацию и устойчивость. Явная эта схема или неявная? В чем особенность аппроксимации данной схемы?

XIV.9.17. Для волнового уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t, x)$ исследовать сходимость трехслойной схемы с весами на девятиточечном шаблоне, записанной в обозначениях Самарского:

$$\Lambda_{\bar{n}} y = c^2 (\xi \Lambda_{\bar{x}\bar{x}} \hat{y} + (1-2\xi) \Lambda_{\bar{x}x} y + \xi \Lambda_{xx} \bar{y}) + f$$

к решению дифференциальной задачи. Как при этом следует аппроксимировать правую часть $f(t, x)$ для получения максимального порядка аппроксимации?



XIV.9.18 (О. А. Пыркова). Проверить, корректно ли поставлена краевая задача для системы уравнений акустики

$$u_t + v_x = 0, \quad v_t + u_x = 0$$

при начальных условиях $u(x,0) = f(x)$, $v(x,0) = g(x)$ и краевых условиях

- а) $u(0,t) = 0, v(1,t) = 1,$
- б) $u(0,t) + v(0,t) = 0, v(1,t) = 1,$
- в) $u(0,t) = 0, u(1,t) + 2v(1,t) = \sin t,$
- г) $u(0,t) = 0, v(0,t) = t,$
- д) $u(0,t) - v(0,t) = t, v(1,t) = 0,$
- е) $u(0,t) = f(0), v(0,t) = g(0),$
- ж) $u(0,t) = 1, v(1,t) = 0,$
- з) $u(0,t) + v(0,t) = 0, u(1,t) + v(1,t) = 1,$
- и) $u(0,t) + 2v(0,t) = 0, u(1,t) = \cos t,$
- к) $u(0,t) = 0, u(1,t) - v(1,t) = t,$
- л) $u(0,t) = 0, v(1,t) = 0,$
- м) $u(0,t) = 0, u(1,t) + v(1,t) = 1.$

При необходимости исправить ошибки.

XIV.9.19 (Е. Н. Аристова). Исследовать на сходимость схему для системы уравнений акустики

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial v}{\partial x} + F(t,x), \end{cases}$$

полученную методом прямых. Этот метод заключается в следующем. Введем сетку по пространственным переменным $\{x_m, m = 0, 1, \dots, M\}$. Будем определять сеточную функцию u_m , соответствующую функции u , в целых узлах сетки, а функцию $z_{m+1/2}$, соответствующую v , — в полуцелых узлах. Тогда от системы дифференциальных уравнений в частных производных можно перейти к системе дифференциально–разностных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dz_{m+1/2}}{dt} = \frac{y_{m+1} - y_m}{h_m}, \\ \frac{dy_m}{dt} = c^2 \frac{z_{m+1/2} - z_{m-1/2}}{h_m} + F_m(t), \end{cases}$$

где $h_m = x_{m+1} - x_m$, $\bar{h}_m = 0.5(h_m + h_{m-1})$. Введя единый вектор переменных по правилу $y_n = w_{2n}$, $z_{n+1/2} = w_{2n+1}$, система дифференциально-разностных уравнений может быть переписана в матричной форме

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t).$$

Здесь матрица \mathbf{A} имеет следующую трехдиагональную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_0} & 0 & \frac{1}{h_0} & & & & \\ & -\frac{c^2}{\bar{h}_1} & 0 & \frac{c^2}{\bar{h}_1} & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -\frac{c^2}{\bar{h}_{M-1}} & 0 & \frac{c^2}{\bar{h}_{M-1}} & \\ & & & & -\frac{1}{h_{M-1}} & 0 & \frac{1}{h_{M-1}} \end{pmatrix}$$

При дискретизации системы ОДУ по времени можно использовать различные схемы. Для исследования применяется одностадийный метод Розенброка с комплексными коэффициентами CROS. Полученная схема является явной или неявной?

XIV.9.20 (И. Б. Петров). Для численного решения одномерной акустической системы (c — скорость звука, $\rho = \text{const}$ — плотность, u — скорость, p — давление) в области $t \in [0, T], x \in [0, 1]$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

построить в инвариантах Римана $\left(u + \frac{p}{\rho c}, u - \frac{p}{\rho c} \right)$ схемы

- а) Куранта–Изаксона–Риса («явный уголок»);
- б) Лакса;

в) Лакса–Вендроффа.

Предложите корректный вариант постановки начальных и граничных условий и способ их реализации с требуемым порядком аппроксимации.

XIV.9.21. Рассмотрим квазилинейное уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2 / 2}{\partial x} = 0$$

с начальными и краевыми условиями $u(0, t) = a$,

$$u(x, 0) = \begin{cases} a > 0, & x \leq x_0, \\ b > a > 0, & x > x_0. \end{cases}$$

Из каждой начальной или краевой точки выходит характеристика с наклоном $1/u$, вдоль которых и переносится начальное значение решения.

Наклон характеристик $\operatorname{tg} \alpha = 1/a$ левее точки разрыва и $\operatorname{tg} \alpha = 1/b$

правее точки разрыва. В точке x_0 образуются две характеристики, между которыми решение из общих соображений найти трудно. Неоднозначность в решении может быть устранена следующим приемом: размажем разрыв в начальных значениях линейно на интервале $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, получим непрерывное решение, в том числе и в проблемном секторе, устремим ε к нулю. Показать, что таким предельным решением будет следующее:

$$u(x, t) = \begin{cases} a, & x - x_0 \leq at, \\ \frac{x - x_0}{t}, & at \leq x - x_0 \leq bt, \\ b, & x - x_0 \geq bt. \end{cases}$$

Это решение непрерывно, но сохраняет разрыв производных решения на выделенных характеристиках, поэтому называется слабым разрывом.

XIV.9.22. Для квазилинейного уравнения Хопфа (4.1)

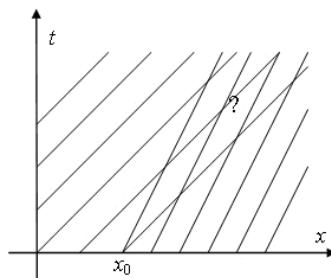
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

рассмотрим решение с начальными и краевыми условиями $u(0, t) = a$,

$$u(x, 0) = \begin{cases} a, & x \leq x_0, \\ b < a, & x > x_0. \end{cases}$$

При этих условиях из точки x_0 выходят две характеристики, образующие сектор, где решение неединственно.

С физической точки зрения такая ситуация недопустима. Прием с размазыванием разрыва в данном случае не помогает. В предположении, что в данной ситуации реализуется решение с разрывом, движущимся с постоянной скоростью D , найти скорость движения разрыва.



XIV.9.23. Показать, что для нелинейного уравнения Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

использование неконсервативной схемы

$$(y_m^{n+1} - y_m^n)/\tau + y_m^n(y_m^n - y_{m-1}^n)/h = 0$$

для расчета распада сильного разрыва

$$u(0, x) = \begin{cases} a, & x \leq x_0, \\ b < a, & x > x_0 \end{cases}$$

при параметрах сетки $\tau = h/b$ приводит к неверной скорости разрыва $D = h/\tau = b \neq (a+b)/2$.

XIV.9.24. Показать, что консервативные схемы, построенные на основе использования дивергентной формы уравнения Хопфа, обладают тем свойством, что суммирование интегральных законов сохранения по всем ячейкам разностной сетки приводит к результату, который можно интерпретировать как интегрирование закона сохранения по всей расчетной области.

XIV.9.25. Покажите, что разностные схемы типа «предиктор–корректор» Лакса–Вендроффа и Мак–Кормака, аппроксимирующие квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0,$$

совпадают в линейном случае $f = au$, $a = \text{const}$. Исследуйте полученную линейную схему на сходимость при $f = au$, $a = \text{const}$.

XIV.9.26. Для нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$ построить гибридную разностную схему, указать шаблон разностной схемы, исследовать ее на устойчивость.

XIV.9.27. Данна схема для решения квазилинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0,$$

предиктор $\frac{\tilde{y}_m - y_m^n}{\tau} + \frac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} = 0, \quad \frac{\tilde{y}_{m-1} - y_m^n}{\tau} + \frac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} = 0,$

корректор $\frac{y_m^{n+1} - 0.5(y_m^n + \tilde{y}_m)}{\tau} + \frac{\tilde{f}_m - \tilde{f}_{m-1}}{2h} = 0, \quad f = \frac{u^2}{2}.$

а) Нарисуйте шаблон заданной разностной схемы.

б) Получите условие устойчивости и порядок аппроксимации в линейном случае $f = au, a = \text{const.}$

XIV.9.35. Данна схема (Уорминга–Кутлера–Ломакса) для решения квази-

линейного уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0.$

1-й этап:

$$\frac{y_m^{n+1/3} - y_m^n}{2\tau/3} + \frac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} = 0, \quad \frac{y_{m-1}^{n+1/3} - y_{m-1}^n}{2\tau/3} + \frac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} = 0.$$

2-й этап:

$$\frac{y_m^{n+2/3} - 0.5(y_m^n + y_m^{n+1/3})}{2\tau/3} + \frac{f_m^{n+1/3} - f_{m-1}^{n+1/3}}{2h} = 0,$$

$$\frac{y_{m+1}^{n+2/3} - 0.5(y_{m+1}^n + y_{m+1}^{n+1/3})}{2\tau/3} + \frac{f_{m+1}^{n+1/3} - f_m^{n+1/3}}{2h} = 0.$$

3-й этап:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{3}{8} \frac{f_{m+1}^{n+2/3} - f_{m-1}^{n+2/3}}{h} + \frac{-2f_{m+1}^n + 7f_{m+1}^n - 7f_{m-1}^n + 2f_{m-1}^n}{24h} +$$

$$+ \frac{\omega}{24h^4} (y_{m+2}^n - 4y_{m+1}^n + 6y_m^n - 4y_{m-1}^n + y_{m-2}^n) = 0, \quad \omega = \text{const},$$

$\omega = \text{const.}$

а) Нарисуйте шаблон заданной разностной схемы.

б) Какой вид будет иметь схема в линейном случае ($f = au, a = \text{const.}$)?

XIV.10. Практические задачи

XIV.10.1. Решите численно уравнение переноса

$$u_t + a u_x = 0, \text{ используя}$$

а) схему Лакса

$$\frac{y_m^{n+1} - 0.5(y_{m+1}^n + y_{m-1}^n)}{\tau} + a \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = 0;$$

б) схему Лакса–Вендроффа

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2} \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2} = 0$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \sin(2\pi x/L), 0 \leq x \leq L, L = 10,$$

и периодическими граничными условиями.

Примените дважды сгущение сеток вдвое, начиная с сетки, включающей 101 точку по пространственной переменной, и проведите расчеты до $T = 9$. Оцените реальный порядок сходимости схемы б) сравнением изменения погрешности численного решения $\|u - [u]_{th}\|$ на последовательности сгущающихся сеток при фиксированном числе Куранта. Какую скорость сходимости показывает схема Лакса на последовательности сгущающихся сеток при фиксированном числе Куранта?

Решите эту задачу для чисел Куранта $\tau/h = 1.0, 0.6, 0.3$.

XIV.10.2. Решите численно уравнение переноса $u_t + u_x = 0$, используя

а) схему с разностями против потока

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0.$$

б) схему Лакса–Вендроффа

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2} \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2} = 0$$

с начальным условием $u(x,0) = \sin(4\pi x/L)$, $0 \leq x \leq L$ и периодическими граничными условиями.

Примените дважды сгущение сеток вдвое, начиная с сетки, включающей 41 точку по пространственной координате при $h = 0.5$, и проведите расчет до $T = 18$. Оцените реальный порядок сходимости схем а) и б)

сравнением изменения погрешности численного решения $\|y - [u]_{\tau h}\|$ на последовательности сгущающихся сеток при фиксированном числе Куранта.

Решите эту задачу для чисел Куранта $\tau/h = 1.0, 0.6, 0.3$.

XIV.10.3. Решите численно уравнение переноса $u_t + u_x = 0$, используя а) явную схему Эйлера (схему с центральной разностью)

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = 0,$$

б) схему Лакса–Вендроффа

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2} \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2} = 0,$$

если заданы начальное условие $u(x,0) = 1$, $x \leq 5$ и $u(x,0) = 0$, $5 \leq x \leq 20$ и граничное условие $u(0,t) = 1$.

Используйте начальную сетку, состоящую из 41 точки при $h = 0.5$, и проведите расчет до значения $T = 9$. Объясните полученный результат. Примените дважды сгущение сеток вдвое, оцените порядок сходимости схем а) и б) сравнением изменения погрешности численного решения по сравнению с точным $\|y - [u]_{\tau h}\|$ на последовательности сгущающихся сеток при фиксированном числе Куранта.

Решите эту задачу для чисел Куранта $\tau/h = 1.0, 0.6, 0.3$.

XIV.10.4 (О. А. Пыркова). Найти решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа на сетке (x_m, t^n) :

а) $u_{tt}''(x,t) = u_{xx}''(x,t) + \frac{2(a^2 - 1)}{(x + at + 1)^3}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$

$$u(0,t) = \frac{1}{at + 1}, \quad u(1,t) = \frac{1}{at + 2}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x,0) = \frac{1}{x+1}, \quad u_t'(x,0) = -\frac{a}{(x+1)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$a = 0.5 + 0.1 k \quad (k = 0, 1, \dots, 10).$$

б) $u_{tt}''(x,t) = u_{xx}''(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$

$$u(0,t) = \frac{1}{t+a}, \quad u(1,t) = \frac{1}{t+a+1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x,0) = \frac{1}{x+a}, \quad u'_t(x,0) = -\frac{1}{(x+a)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$a = 0.5 + 0.1 k \quad (k = 0, 1, \dots, 10).$$

б) $u''_{tt}(x,t) = u''_{xx}(x,t) + \frac{2a}{(a(x+t)+2)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \frac{1}{a(t+1)+2}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x,0) = \frac{x}{ax+2}, \quad u'_t(x,0) = -\frac{ax}{(ax+2)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$a = 0.5 + 0.1 k \quad (k = 0, 1, \dots, 4).$$

г) $u''_{tt}(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0.5,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 0.5,$$

$$u(x,0) = (ax^2 + 1.1) \sin \pi x, \quad u'_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$a = 1.1 + 0.1 k \quad (k = 0, 1, \dots, 4).$$

д) $u''_{tt}(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$

$$u(0,t) = e^{at}, \quad u(1,t) = e^{a(t+1)} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x,0) = e^{ax}, \quad u'_t(x,0) = a e^{ax}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$a = 0.5 + 0.1 k \quad (k = -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5).$$

е) $u''_{tt}(x,t) - u''_{xx}(x,t) = x^2 - t^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \frac{2.4}{e}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x,0) = (1.5x^2 + 0.9)e^{-x}, \quad u'_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Использовать метод второго порядка аппроксимации. Начальную сетку выбрать самостоятельно. Для оценки порядка сходимости схемы

дважды использовать сгущение сеток в два раза. Оценить реальную скорость сходимости.

Найти точное решение каждой задачи. Сравнить численное решение с точным.

XIV.10.5. Используйте схему Лакса

$$\frac{y_m^{n+1} - 0.5(y_{m+1}^n + y_{m-1}^n)}{\tau} + \frac{F_{m+1}^n - F_{m-1}^n}{2h} = 0$$

для решения уравнения Хопфа

$$u_t + F_x = 0, \quad F = u^2/2$$

на начальной сетке, содержащей 51 узел в направлении оси x . Решите уравнение для движущегося вправо разрыва, если $u = 1$ в первых 11 узлах и $u = 0$ в остальных узлах сетки, $h = 0.1$. Проведите расчеты при числах Куранта $\tau/h = 1.0, 0.6, 0.3$ и сравните полученные численные решения с аналитическим решением, а также сравните теоретическую скорость распространения разрыва $D = (u_1 + u_2)/2$, которая равна полусумме скоростей справа и слева от него, с полученной в расчетах. Скорость разрыва определять по положению точки, в которой значение решения равно полусумме начальных значений справа и слева от разрыва.

Проведите сравнение с результатами, получаемыми по схеме Куранта–Изаксона–Риса:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + y_m^n \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0.$$

Объясните полученные результаты.

Примените дважды сгущение сеток вдвое, оцените порядок сходимости схем Лакса и Куранта–Изаксона–Риса сравнением изменения погрешности численного решения $\|y - [u]_{\tau h}\|$ на последовательности сгущающихся сеток при фиксированном числе Куранта.

XIV.10.6. Решите численно линейное уравнение переноса $u_t + f_x = 0, f = au$, используя

а) схему Русанова:

1-й этап:

$$\frac{y_{m+1/2}^{n+1/3} - 0.5(y_m^n + y_{m+1}^n)}{\tau/3} + \frac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} = 0, \quad \frac{y_{m-1/2}^{n+1/3} - 0.5(y_m^n + y_{m-1}^n)}{\tau/3} + \frac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} = 0.$$

2-й этап:

$$\frac{y_m^{n+2/3} - y_m^n}{2\tau/3} + \frac{f_{m+1/2}^{n+1/3} - f_{m-1/2}^{n+1/3}}{2h} = 0.$$

3-й этап:

$$\begin{aligned} & \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{3}{8} \frac{f_{m+1}^{n+2/3} - f_{m-1}^{n+2/3}}{h} + \frac{-2f_{m+2}^n + 7f_{m+1}^n - 7f_{m-1}^n + 2f_{m-2}^n}{24h} + \\ & + \frac{\omega}{24h^4} (y_{m+2}^n - 4y_{m+1}^n + 6y_m^n - 4y_{m-1}^n + y_{m-2}^n) = 0, \quad \omega = \text{const.} \end{aligned}$$

б) схему Уорминга–Кутлера–Ломакса:

1-й этап:

$$\frac{y_m^{n+1/3} - y_m^n}{2\tau/3} + \frac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} = 0, \quad \frac{y_{m-1}^{n+1/3} - y_{m-1}^n}{2\tau/3} + \frac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} = 0.$$

2-й этап:

$$\begin{aligned} & \frac{y_m^{n+2/3} - 0.5(y_m^n + y_m^{n+1/3})}{2\tau/3} + \frac{f_m^{n+1/3} - f_{m-1}^{n+1/3}}{2h} = 0, \\ & \frac{y_{m+1}^{n+2/3} - 0.5(y_{m+1}^n + y_{m+1}^{n+1/3})}{2\tau/3} + \frac{f_{m+1}^{n+1/3} - f_m^{n+1/3}}{2h} = 0. \end{aligned}$$

3-й этап:

$$\begin{aligned} & \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{3}{8} \frac{f_{m+1}^{n+2/3} - f_{m-1}^{n+2/3}}{h} + \frac{-2f_{m+1}^n + 7f_{m+1}^n - 7f_{m-1}^n + 2f_{m-1}^n}{24h} + \\ & + \frac{\omega}{24h^4} (y_{m+2}^n - 4y_{m+1}^n + 6y_m^n - 4y_{m-1}^n + y_{m-2}^n) = 0, \quad \omega = \text{const.} \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в разностных формулах, описывающих третий шаг каждой схемы, является конечно-разностной аппроксимацией слагаемого с четвертой производной u_{xxxx} ($x_1 - x_2$)⁴, дополнительно введенного для обеспечения устойчивости схемы. $r = \tau/h$, $4r^2 - r^4 \leq \omega \leq 3$ с начальным условием $u(x, 0) = \sin(6\pi x/L)$, $0 \leq x \leq L$, и периодическими граничными условиями.

Используйте начальную сетку, состоящую из 41 точки при $h = 1$, и проведите расчет до $T = 18$. Решите эту задачу при $\omega = 3$ для чисел Куранта $\tau/h = 1.0, 0.6, 0.3$.

Примените дважды сгущение сеток вдвое, оцените реальный порядок сходимости схем Русанова и Уорминга–Кутлера–Ломакса сравнением из-

менения погрешности численного решения $\|y - [u]_{th}\|$ на последовательности сгущающихся сеток при фиксированном числе Куранта.

XIV.10.7. Используйте схему Б. В. Рогова метода прямых для решения уравнения переноса $u_t + au_x = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, основанную на использовании сеточных величин и интегральных средних по ячейке

$$\bar{u}_j = \frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u dx :$$

$$(u_{j+1} - u_j)_t = -\frac{6a}{h_{j+1}}(u_{j+1} + u_j) + \frac{12a}{h_{j+1}}\bar{u}_{j+1},$$

$$(\bar{u}_{j+1})_t = -\frac{a}{h_{j+1}}(u_{j+1} - u_j), \quad 0 \leq j \leq J.$$

а) Для аппроксимации по времени используйте диагонально-неявную схему Рунге–Кутты третьего порядка с таблицей Бутчера:

Для краевой задачи $u(x, 0) = \sin \pi x$,

$u(0, t) = -\sin \pi t$ выпишите точное решение и

сравните его с численным при $a = 1$.

Исследуйте порядок сеточной сходимости при измельчении сеточных параметров вдвое.

б) Для аппроксимации по времени используйте диагонально-неявную схему Рунге–Кутты третьего порядка с таблицей Бутчера:

Для краевой задачи $u(x, 0) = \sin \pi x$,

$u(0, t) = -\sin \pi t$ выпишать точное решение и

сравнить его с численным при $a = 1$.

Исследовать порядок сеточной сходимости при измельчении сеточных параметров вдвое.

в) Для аппроксимации по времени использовать диагонально-неявную схему Рунге–Кутты третьего порядка с заданной таблицей Бутчера:

Для краевой задачи $u(x, 0) = x^4$, $u(0, t) = t^4$ выписать точное решение и сравнить его с численным при значении $a = 1$.

Исследовать порядок сеточной сходимости при измельчении сеточных параметров вдвое.

1/3	1/3
1	1/3 2/3
1	0 0 1
	3/4 3/4 -1/2

1/3	1/3
1	0 1
1	3/4 -1/12 1/3
	3/4 -1/12 1/3

1/3	1/3
1	1/3 2/3
1	0 0 1
	3/4 3/4 -1/2

г) Для аппроксимации по времени используйте диагонально-неявную схему Рунге–Кутты третьего порядка с таблицей Бутчера:

Для краевой задачи $u(x, 0) = x^4$, $u(0, t) = t^4$ записать точное решение и сравнить его с численным при $a = 1$.

Исследовать порядок сеточной сходимости при измельчении сеточных параметров вдвое.

1/3	1/3
1	0
1	3/4 -1/12 1/3
	3/4 -1/12 1/3

XIV.10.8. Найдите решение уравнения Хопфа

$$u_t + F_x = 0, \quad F = u^2/2$$

для течения с разрежением. Используйте начальные условия $u = 0$ в первых 21 узлах разностной сетки (координата $x < 0$) и $u = 1$ всюду вне этих узлов (координата $x > 0$), всего сетка включает в себя 101 узел в направлении оси x . Примените оба варианта схемы Мак–Кормака с чередованием на шагах предиктор и корректор производных вперед–назад и назад–вперед:

а) предиктор

$$\frac{\tilde{y}_m - y_m^n}{\tau} + \frac{F_{m+1}^n - F_m^n}{h} = 0, \quad \frac{\tilde{y}_{m-1} - y_{m-1}^n}{\tau} + \frac{F_m^n - F_{m-1}^n}{h} = 0,$$

корректор

$$\frac{y_m^{n+1} - 0.5(y_m^n + \tilde{y}_m)}{\tau} + \frac{\tilde{F}_m - \tilde{F}_{m-1}}{2h} = 0;$$

б) предиктор

$$\frac{\tilde{y}_m - y_m^n}{\tau} + \frac{F_m^n - F_{m-1}^n}{h} = 0, \quad \frac{\tilde{y}_{m+1} - y_{m+1}^n}{\tau} + \frac{F_{m+1}^n - F_m^n}{h} = 0,$$

корректор

$$\frac{y_m^{n+1} - 0.5(y_m^n + \tilde{y}_m)}{\tau} + \frac{\tilde{F}_{m+1} - \tilde{F}_m}{2h} = 0.$$

Сравните результаты, полученные при трех различных отношениях шагов $\tau/h = 1.0, 0.6, 0.3$ с точным аналитическим решением $u = 0$ при $x \leq 0$, $u = x/t$ при $0 < x \leq t$, $u = 1$ при $x > t$. Примените удвоение сетки при фиксированном числе Куранта и сравните погрешность решения $\|y - [u]_{th}\|$ для двух сеток.

XIV.10.9. Найдите численно решение уравнения Хопфа

$$u_t + uu_x = 0$$

для течения с разрежением. Начальные условия: $u = 0$ в первых 21 узлах разностной сетки (координата $x < 0$) и $u = 1$ всюду вне этих узлов (координата $x > 0$), всего сетка включает в себя 81 узел в направлении оси x . Используйте

а) центрированную по времени схему Бима–Уорминга:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{f_{m+1}^n - f_{m-1}^n}{2h} + \frac{1}{4h} \left(A_{m+1}^n (y_{m+1}^{n+1} - y_{m+1}^n) - A_{m-1}^n (y_{m-1}^{n+1} - y_{m-1}^n) \right) = 0,$$

которая получается из линеаризации схемы с полусуммой пространственных производных на верхнем и нижнем слое при условии, что функция f не зависит явно от времени:

$$f_m^{n+1} \approx f_m^n + f_u (y_m^{n+1} - y_m^n) \equiv f_m^n + A_m^n (y_m^{n+1} - y_m^n).$$

Здесь $f = u^2/2$, $A = f_u$. На верхнем слое возникает система уравнений с трехдиагональной матрицей. Обычно системы такого вида решаются методом прогонки. Для его использования на верхнем слое нужно поставить еще одно граничное условие, обычно используют «мягкое» условие вида $u'_x(t, X) = 0$.

б) неявную схему Эйлера

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{f_{m+1}^{n+1} - f_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0.$$

В этом случае на верхнем слое возникает необходимость решения нелинейной системы уравнений. Для этого часто используют метод Ньютона. Как его экономично реализовать в данном случае?

В качестве дополнительных граничных условий использовать либо «мягкое» граничное условие, либо досчитывать недостающее значение по схеме «явный левый уголок» и использовать его в качестве дополнительного граничного условия для метода прогонки. Сравнить оба подхода.

Сравните результаты, полученные при трех отношениях шагов $\tau/h = 1.0, 0.6, 0.3$ с точным аналитическим решением $u = 0$ при $x \leq 0$, $u = x/t$ при $0 < x < t$, $u = 1$ при $x > t$.

XIV.10.10. Решите линейное уравнения Бюргерса $u_t + F_x = \omega u_{xx}$, $F = c u$, используя

XIV. Численные методы решения уравнений гиперболического типа

а) схему ВВЦП (метод разностей вперед по времени и центральных разностей)

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = \omega \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2};$$

б) схему с разностями против потока

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = \omega \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2};$$

в) схему Леонарда

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \left[\frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} - \frac{y_{m+1}^n - 3y_m^n + 3y_{m-1}^n - y_{m-2}^n}{6h} \right] = \omega \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2};$$

г) схему «чехарда» и схему Дюфорта–Франкела

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} + c \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = \omega \frac{y_{m+1}^n - (y_m^{n+1} + y_m^{n-1}) + y_{m-1}^n}{h^2};$$

д) схему Мак-Кормака с чередованием производных вперед–назад на этапах предиктор–корректор:

предиктор

$$\frac{\tilde{y}_m - y_m^n}{\tau} + \frac{F_{m+1}^n - F_m^n}{h} = \omega \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2},$$

$$\frac{\tilde{y}_{m-1} - y_{m-1}^n}{\tau} + \frac{F_m^n - F_{m-1}^n}{h} = \omega \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2},$$

корректор

$$\frac{y_m^{n+1} - 0.5(y_m^n + \tilde{y}_m)}{\tau} + \frac{\tilde{F}_m - \tilde{F}_{m-1}}{2h} = \omega \frac{\tilde{y}_{m+1} - 2\tilde{y}_m + \tilde{y}_{m-1}}{h^2};$$

е) схему Мак-Кормака с чередованием производных назад–вперед на этапах предиктор–корректор:

предиктор

$$\frac{\tilde{y}_m - y_m^n}{\tau} + \frac{F_m^n - F_{m-1}^n}{h} = \omega \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2},$$

$$\frac{\tilde{y}_{m+1} - y_{m+1}^n}{\tau} + \frac{F_{m+1}^n - F_m^n}{h} = \omega \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2},$$

корректор

$$\frac{y_m^{n+1} - 0.5(y_m^n + \tilde{y}_m)}{\tau} + \frac{\tilde{F}_{m+1} - \tilde{F}_m}{2h} = \omega \frac{\tilde{y}_{m+1} - 2\tilde{y}_m + \tilde{y}_{m-1}}{h^2};$$

ж) схему Брили–Макдоnalда с аппроксимацией производных по времени неявным методом Эйлера (сравнить аппроксимацию конвективной части со схемой из задачи XIV.10.11), $A = F_u$:

$$\begin{aligned} \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{F_{m+1}^n - F_{m-1}^n}{2h} + \frac{\left[A_{m+1}^n (y_{m+1}^{n+1} - y_{m+1}^n) - A_{m-1}^n (y_{m-1}^{n+1} - y_{m-1}^n) \right]}{2h} = \\ = \omega \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2}; \end{aligned}$$

з) схему Аллена–Чена:

предиктор

$$\tilde{u}_m = u_m^n - \frac{\tau}{2h} (F_{m+1}^n - F_{m-1}^n) + \frac{\omega\tau}{h^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n),$$

корректор

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{2h} (\tilde{F}_{m+1} - \tilde{F}_{m-1}) + \frac{\omega\tau}{h^2} (\tilde{u}_{m+1} - 2u_m^{n+1} + \tilde{u}_{m-1}).$$

Для всех вариантов задано начальное условие $u(x, 0) = 0$ при $0 \leq x \leq 1$; а граничные условия имеют вид $u(0, t) = 100$, $u(1, t) = 0$. Расчет проведите на сетке, состоящей из 201 узла по пространственной переменной. Найдите стационарное решение при $r = \omega\tau/h^2 = 1.0$ и $v = ct/h = 0.4$.

Сравнить численное и точное решения. Точное стационарное решение задачи с граничными условиями $u(0, t) = u_0$, $u(L, t) = 0$ есть

$$u(x, t) = u_0 U \{ (1 - \exp[U \operatorname{Re}_L(x/L - 1)]) / (1 + \exp[U \operatorname{Re}_L(x/L - 1)]) \},$$

$$\operatorname{Re}_L = u_0 L / \omega, \quad U = \text{решение уравнения } (U - 1)/(U + 1) = \exp\{-U \operatorname{Re}_L\}.$$

XIV.10.11. Решите уравнение Бюргерса $u_t + F_x = \omega u_{xx}$ для неподвижного разрыва в вязкой жидкости, $F = u^2/2$. Начальные условия заданы следующим образом: $u = 1$ в левой граничной точке, $u = -1$ в правой граничной точке и $u = 0$ в остальных точках. Используйте для решения схему Мак-Кормака:

предиктор

$$\frac{\tilde{y}_m - y_m^n}{\tau} + \frac{F_{m+1}^n - F_m^n}{h} = \omega \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2},$$

XIV. Численные методы решения уравнений гиперболического типа

$$\frac{\tilde{y}_{m-1} - y_{m-1}^n}{\tau} + \frac{F_m^n - F_{m-1}^n}{h} = \omega \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2},$$

корректор

$$\frac{y_m^{n+1} - 0.5(y_m^n + \tilde{y}_m)}{\tau} + \frac{\tilde{F}_m - \tilde{F}_{m-1}}{2h} = \omega \frac{\tilde{y}_{m+1} - 2\tilde{y}_m + \tilde{y}_{m-1}}{h^2}.$$

XIV.10.12. Найти численно решение уравнения Бюргерса

$$u_t + u u_x = \gamma u_{xx}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x,0) = 0 \text{ при } 0 \leq x \leq 100;$$

$$u(0,t) = 1, \quad u(100,t) = 0$$

на разностной сетке, состоящей из 201 узла, параметр $\gamma = 10$.

Сравните численное решение с точным решением в виде распада начального разрыва

$$u = \begin{cases} u_1, & x > 0, \\ u_2 > u_1, & x < 0. \end{cases}$$

В переменных бегущей волны $\xi = x - Ut$ (здесь скорость разрыва $U = 0.5(u_1 + u_2)$) точное решение в поставленной задаче выражается через функцию ошибок следующим образом:

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + A \exp\left(\frac{u_2 - u_1}{2\gamma}\xi\right)}, \quad A = \frac{\operatorname{erfc}\left(-\frac{x - u_1 t}{\sqrt{4\gamma t}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_2 t}{\sqrt{4\gamma t}}\right)}, \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-y^2} dy.$$

Это решение стремится при $t \rightarrow \infty$ к стационарной ударной волне

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left(\frac{u_2 - u_1}{2\gamma}\xi\right)}.$$

Для решения задачи воспользуйтесь схемами

а) Мак-Кормака,

б) Брили–Макдональда (см. задачу XIV.10.10ж),

в) центрированной по времени схемой Бима–Уорминга (см. задачу XIV.10.9а))

XIV.10.13 (О. А. Пыркова). Решить численно задачу для уравнения синус–Гордон

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(u),$$

$$0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq t \leq T \quad (T \geq 2);$$

$u(x, 0) = u_0$ при $x < x_0$, $u(x, 0) = 0$ при $x \geq x_0$; $u_t(x, 0) = 0$;

$u_x(0, t) = 0$, $u(10, t) = 0$

для значений $x_0 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ и $u_0 = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1$, $a = 0.5, 1, 1.5, 2$, используя

а) схему «крест»

$$\frac{y_m^{n-1} - 2y_m^n + y_m^{n+1}}{\tau^2} - a^2 \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} = F_m^n, \quad F(u, x, t) = \sin(u),$$

б) неявную схему с нелинейностью на среднем слое

$$\frac{y_m^{n+1} - 2y_m^n + y_m^{n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{y_{m-1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1}}{h^2} = F_m^n, \quad F(u, x, t) = \sin(u).$$

Начальную сетку выбрать самостоятельно. Для оценки реального порядка сходимости схем дважды использовать сгущение сеток в два раза.

XIV. 10.14. Решить численно задачу для системы уравнений акустики

$$u_t - a v_x = F(u, x, t), \quad v_t - a u_x = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(0, x) = f(x), \quad v(0, x) = g(x); \quad u(t, 0) + v(t, 0) = t, \quad v(t, 1) = 0;$$

а) по схеме для инвариантов Римана ($q = u + v$, $r = u - v$ — инварианты Римана):

$$\frac{q_m^{n+1} - q_m^n}{\tau} - a \frac{q_{m+1}^n - q_{m-1}^n}{2h} = F_m^n + \frac{\tau}{2} \left[(F'_t)_m^n + a(F'_x)_m^n + a^2 \frac{q_{m+1}^n + 2q_m^n - q_{m-1}^n}{h^2} \right],$$

$$\frac{r_m^{n+1} - r_m^n}{\tau} + a \frac{r_{m+1}^n - r_{m-1}^n}{2h} = F_m^n + \frac{\tau}{2} \left[(F'_t)_m^n - a(F'_x)_m^n + a^2 \frac{r_{m+1}^n + 2r_m^n - r_{m-1}^n}{h^2} \right]$$

при $f(x) = -1$, $g(x) = -x + 1$ для набора правых частей $F(u, x, t) = 0, t, tu$;

б) по устойчивым схемам «явный уголок» при начальных значениях

$$f(x) = -1, \quad g(x) = -x + 1$$

и для набора параметров $F(u, x, t) = 0, t, tu$, $a = -2, -1, 1, 2$.

в) по симметричной разностной схеме

$$\frac{y_{m+1}^{n+1} + y_m^{n+1} - y_{m+1}^n - y_m^n}{2\tau} - a \frac{z_{m+1}^{n+1} + z_m^n - z_{m+1}^n - z_m^n}{2\tau} = \frac{F_{m+1}^{n+1} + F_{m+1}^n + F_m^{n+1} + F_m^n}{4},$$

$$\frac{z_{m+1}^{n+1} + z_m^{n+1} - z_{m+1}^n - z_m^n}{2\tau} - a \frac{y_{m+1}^{n+1} + y_{m+1}^n - y_m^{n+1} - y_m^n}{2\tau} = 0$$

при $f(x) = -1$, $g(x) = -x + 1$, $F(u, x, t) = 0$; $a = -1, 1$;

XIV. Численные методы решения уравнений гиперболического типа

г) $F(u,x,t) = 0; a = -1$ по разностной схеме «чехарда»

I этап:

$$\frac{u_{m+1/2}^{n+1/2} - 0.5(u_{m+1}^n + u_m^n)}{\tau/2} + \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0,$$

$$\frac{v_{m+1/2}^{n+1/2} - 0.5(v_{m+1}^n + v_m^n)}{\tau/2} + \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0;$$

II этап:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{v_{m+1/2}^{n+1/2} - v_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0,$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1/2}^{n+1/2} - u_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0$$

при $f(x) = -1, g(x) = -x + 1$;

е) методом характеристик при $f(x) = -1, g(x) = -x + 1, F(u,x,t) = 0, t, tu; a = 0.5, 1, 1.5, 2$. Начальную сетку выбрать самостоятельно. Оценить реальную скорость сходимости решения, дважды используя сгущение сетки в два раза.

XIV.11. Задачи для самостоятельного исследования

XIV.11.1 (Л. А. Чудов). Акустика. Рассмотрим нестационарное течение жидкости, охватывающее ограниченную область. Мы хотим предсказать звуковое поле, излучаемое на большое расстояние от области течения. Акустическая аналогия этой задачи состоит в решении неоднородного волнового уравнения:

$$\left(\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi = q, \quad (11.1)$$

здесь a_0 — скорость распространения звука в покоящейся жидкости, φ — искомый потенциал скорости, q — интенсивность источника.

Если жидкость несжимаемая, то $a_0 \rightarrow \infty$ и волновое уравнение (11.1) переходит в уравнение Лапласа.

Все волны обладают некоторыми общими свойствами. Одним из важных свойств большинства волн является сохранение энергии. Другое свойство состоит в том, что полное смещение среды в волне обычно весьма мало. Поскольку волновое уравнение имеет второй порядок как по пространственным переменным, так и по времени, оно обратимо, если только в уравнении не присутствуют члены, описывающие диссипатив-

ные процессы. Следовательно, в алгоритмах для волнового уравнения нежелательны диссипативные ошибки, приводящие к уменьшению амплитуды решения. Выполнение условия обратимости решения в алгоритме гарантирует, что моды не затухают, когда алгоритм устойчив. Поскольку волны часто распространяются на весьма большие расстояния, алгоритм, применяемый для расчета их поведения, должен давать минимальное численное затухание. Наилучшие из подобных алгоритмов являются «почти неустойчивыми» или могут быть легко переведены в неустойчивое состояние за счет малых ошибок аппроксимации, дополнительных нецентрированных слагаемых в разностном уравнении или нелинейных эффектов, которые не появляются при линейном анализе устойчивости.

1. Реализуйте разностный алгоритм для численного решения уравнения (11.1) и рассмотрите поведение решений волнового уравнения (11.1), представленных в виде суммы двух волн $\varphi(x, t) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где $\xi = x - a_0 t$, $\eta = x + a_0 t$. Для этого задайте в начальный момент времени ($t = 0$) потенциал возмущенного движения $\varphi(x)$ в виде функции, например, $f_1(\xi)$, отличной от нуля только на участке $0 \leq x_0 \leq \xi_0$.

2. Исследуйте распространение волн, если область их распространения с одной стороны ограничена. Как учесть взаимодействие волны со стенкой в численном расчете?

3. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -a_0 \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -a_0 \frac{\partial \rho}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Уравнения (11.2) имеют периодические решения вида:

$$\rho(x, t) = \rho(k) e^{ikx} e^{-i\omega t},$$

$$v(x, t) = v(k) e^{ikx} e^{-i\omega t},$$

где $\rho(k)$ и $v(k)$ — комплексные величины, k — волновое число, отвечающее направлению x . Это действительная величина, которая с длиной волны моды связана соотношением $\lambda = 2\pi/k$.

Реализуйте следующую конечно-разностную аппроксимацию системы (11.2):

$$\frac{\rho_j^n - \rho_j^{n-1}}{\Delta t} = -a_0 \frac{v_{j+1/2}^{n-1/2} - v_{j-1/2}^{n-1/2}}{\Delta x},$$

$$\frac{v_{j-1/2}^{n+1/2} - v_{j-1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = -a_0 \frac{\rho_j^n - \rho_{j-1}^n}{\Delta x}. \quad (11.3)$$

Здесь переменная ρ определена в центрах ячеек в старый и новый момент времени. Скорость V определена на границах ячеек и в моменты, промежуточные по отношению к тем, в которые определена плотность. Подобные сетки называются *разнесенными*. Разностная схема (11.3) называется *явным алгоритмом «чехарда» на разнесенной сетке*. Выведите условие устойчивости для схемы (11.3).

4. Для системы (11.2) реализуйте неявный конечно-разностный алгоритм:

$$\begin{aligned} \rho_j^n - \rho_j^{n-1} &= -\frac{\Delta t a_0}{2} \left[\frac{(v_{j+1/2}^n - v_{j-1/2}^n)}{\Delta x} + \frac{(v_{j+1/2}^{n-1} - v_{j-1/2}^{n-1})}{\Delta x} \right], \\ v_{j+1/2}^n - v_{j+1/2}^{n-1} &= -\frac{\Delta t a_0}{2} \left[\frac{(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n)}{\Delta x} + \frac{(\rho_{j+1}^{n-1} - \rho_j^{n-1})}{\Delta x} \right]. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Расчетная сетка здесь разнесена по пространству, но не по времени. Новые значения ρ и v теперь определяются одновременно на одном и том же шаге по времени. Исследуйте устойчивость схемы (11.4) по спектральному признаку.

Одной из хороших проверок алгоритма является следующая процедура. Проведите расчет на большое число шагов по времени, затем остановите его, измените знак Δt и затем — обратный расчет задачи до начального времени $t = 0$.

Более подробно качественные свойства рассмотренных здесь алгоритмов обсуждаются в [60, с. 145–154].

XIV.11.2 (Л. А. Чудов). Волны Римана. Выпишем нелинейную систему уравнений одномерных движений идеальной сжимаемой жидкости в случае баротропных процессов. Она состоит из уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (11.5)$$

уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (11.6)$$

и условия баротропности

$$p = f(\rho). \quad (11.7)$$

Уравнения (11.5) – (11.7) позволяют определить плотность ρ и скорость u в зависимости от координаты x и времени t . Система (11.5) – (11.7) не имеет решений, зависящих только от $x \pm a_0 t$, но оказывается возможным найти решение этой системы, представляющее собой плоскую волну и являющееся обобщением решений вида $f(x \pm a_0 t)$. Будем искать решения системы (11.5) – (11.7), для которых скорость u является функцией только плотности ρ . Такие частные решения системы (11.5) – (11.7) носят названия *решений Римана*. Соответствующие этим решениям движения называются *волнами Римана* $f(x \pm a_0 t)$.

1. Докажите, что в рассматриваемом течении скорость можно определить по формуле $u = \pm \int \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \frac{d\rho}{\rho}$.

Обозначим $\frac{dp}{d\rho} = a^2(\rho)$ и введем величину $c = u + a$. Какой физический смысл имеет величина c ?

2. Задав начальный профиль возмущения плотности, численно решите уравнение для $\rho(x, t)$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0:$$

а) для случая адиабатических движений совершенного газа ($\gamma = 1,4$):

$$c(\rho) = \sqrt{A\gamma} \left[1 + \frac{2}{\gamma - 1} \right] \rho^{\frac{1}{2}(\gamma-1)},$$

б) задав самостоятельно некоторую зависимость давления от плотности, $p = f(\rho)$.

3. Опишите качественное поведение решения $\rho(x, t)$. Укажите, какие требования к численному методу предъявляет возникновение в потоке скачков уплотнения. Выведите зависимость $p(\rho)$, при которой не возникает эффекта опрокидывания волны сжатия Римана. Дайте физическую трактовку полученного соотношения. Проведите численный расчет течения с полученной зависимостью $p(\rho)$.

4. Докажите, что рассмотренные решения Римана можно определить как такие решения, для которых имеется семейство прямолинейных характеристик.

5. Установите условия существования центрированных волн Римана, когда $u = u_0 f(x/t)$, $\rho = \rho_0 \phi(x/t)$.

Течения подобного типа — частный случай автомодельных течений, когда решение зависит от некоторой комбинации независимых переменных. Проиллюстрируйте численными расчетами особенности распространения центрированных волн Римана.

XIV.11.3. Одномерные электромагнитные волны

Плоскополяризованная волна в вакууме описывается дифференциальными уравнениями, вытекающими из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Электрическое поле \mathbf{E} направлено по оси y , магнитное поле \mathbf{B} по оси x .

Если ввести векторные обозначения $\mathbf{u} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ и $\mathbf{F} = (c\mathbf{B}, c\mathbf{E})$, систему (11.8) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0. \quad (11.9)$$

Задав начальные условия $\mathbf{E}(x, 0)$ и $\mathbf{B}(x, 0)$, решите (11.9) численно (предварительно выведите условие устойчивости для каждого метода):

а) явным методом первого порядка точности. Какой результат Вы получили?

б) методом Лакса

$$u_m^{n+1} = \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2h} (F_{m+1}^n - F_{m-1}^n);$$

в) двухшаговым методом Лакса–Вендроффа: первый шаг — метод Лакса (п. 2), а второй шаг — центрированный метод «чехарда»:

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{\Delta t}{2h} (F_{i+1}^n + F_i^n),$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{h} \left(F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2} \right);$$

г) методом «с перешагиванием»:

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{h} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n),$$

$$u_{i+1}^{n+2} = u_{i+1}^n - \frac{\Delta t}{h} (F_{i+2}^{n+1} - F_i^{n+1}).$$

Опишите преимущества и недостатки примененных методов, выявленные Вами в ходе практических расчетов. Здесь значения $\{F_{i+1/2}^{n+1/2}\}$ на втором шаге вычисляются по значениям $\{u_{i+1/2}^{n+1/2}\}$ на первом шаге.

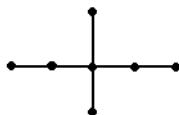
XIV. 11.4. Уравнение Кортевега–де Фриза

Одно из самых замечательных уравнений математической физики — уравнение Кортевега–де Фриза (сокращенно КДФ) часто записывают в виде

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (11.10)$$

или

$$\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x = \tilde{u}_{xxx}. \quad (11.11)$$



1. Найти преобразование, переводящее (11.10) в (11.11).

Далее мы используем запись (11.10).

2. Рассматриваем задачу (11.10) в области $x \in [-10; 10]$ с условием периодичности.

Для решения (11.10) иногда используют 3-слойную разностную схему (третья производная расписывается по пяти точкам симметричным образом, не пугайтесь, если какой-либо коэффициент обратиться в ноль). Исследуйте ее на аппроксимацию и устойчивость.

Какое условие устойчивости Вы получили? Попробуйте построить разностную схему на шаблоне, напоминающем шаблон схемы Саульева для решения уравнения теплопроводности.

На каком шаблоне стоит аппроксимировать уравнение (11.10), а на каком — (11.11)? Ответ зависит от направления распространения волн в решении, другими словами — от направления характеристик.



Исследуйте получившиеся схемы на аппроксимацию и устойчивость.
Можно ли использовать прогонку для вычислений на верхнем слое?
3. Уравнение (11.10) имеет бесконечное число законов сохранения. Укажем несколько из них:

$$\int u dx = \text{const}_1,$$

$$\int u^2 dx = \text{const}_2,$$

$$\int \left(\frac{(u'_x)^2}{2} + u^3 \right) dx = \text{const}_3 = I_1.$$

Как построить консервативную разностную схему, чтобы на сеточном уровне выполнялись законы сохранения $\int u dx = \text{const}$?

4. Особую роль играет третий из приведенных выше законов сохранения. Он является гамильтонианом для уравнения (11.10), то есть

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta I_1}{\delta u} \right). \quad (11.12)$$

Здесь $\frac{\delta I_1}{\delta u}$ — вариационная производная функционала I_1 .

Укажите способ получения разностной схемы, сохраняющей гамильтониан системы. Удастся ли Вам получить схему на несимметричном шаблоне типа Саульева?

Указание. Запишем сеточный аналог гамильтониана I_1 :

$$I_1^h = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_{m+1} - u_m}{h} \right)^2 + (u_m)^3 \right] h = I_1 + O(h^2).$$

На сеточном уровне взятие вариационной производной означает дифференцирование по всем u_m^n и деление на h . Тогда получаем сеточную запись вариационной производной:

$$\begin{aligned} \frac{\delta I_1^h}{\delta u} &= \frac{1}{h} \frac{\partial I_1^h}{\partial u_m} = 3u_m^2 + \frac{1}{h^2} ((u_m - u_{m-1}) - (u_{m+1} - u_m)) = \\ &= 3u_m^2 - \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Аппроксимируя дискретный аналог (11.12) с естественным для этого вторым порядком по h , получаем

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{3(u_{m+1})^2 - 3(u_{m-1})^2}{2h} - \frac{u_{m+2} - 2u_{m+1} + 2u_{m-1} - u_{m-2}}{2h^3}.$$

Заменяя производную по времени разностью $\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau}$ и вычисляя правую часть на n слое, получаем одну из схем пункта 2.

Конечно, возможны и другие аппроксимации гамильтониана, варьирование которых приводит к другим разностным схемам. Все они будут записываться на симметричных шаблонах, на сеточном уровне для этих схем также будет выполняться закон сохранения $\int u dx = \text{const}$.

Контрольный вопрос: почему I_1^h аппроксимирует I_1 с точностью $O(h^2)$?

5. Получите численно с помощью одной из приведенных выше разностных схем *односолитонное* решение КДФ:

$$u = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right), \quad (11.13)$$

взяв в качестве начального условия (11.13) при $t = 0$, $c = 2$. Приведите на графике значения точного и Вашего численного решений.

6. Пусть $u(0, x) = -6 \operatorname{sech}^2(x)$. В этом случае задача Коши для (11.10) имеет *двухсолитонное* решение:

$$u(x, t) = -12 \frac{4 \operatorname{ch}(2x - 8t) + \operatorname{ch}(4x - 64t) + 3}{[3 \operatorname{ch}(x - 28t) + \operatorname{ch}(3x - 36t)]^2}.$$

Сравните Ваше численное решение с точным (при малых t). При больших t , в силу периодичности области, возникает взаимодействие солитонов. Пронаблюдайте его.

7. Выполняется ли для Вашей схемы свойство обратимости?

8. Задаем начальные условия в виде

$$u(0, x) = -n(n+1) \operatorname{sech}^2(x - 2t).$$

Сколько солитонов получаем?

9. А теперь $u(0, x) = 4 \operatorname{sech}^2(x - 2t)$. Что получается в этом случае?

10*. Решите уравнение (11.8) с произвольными начальными условиями и условием периодичности, используя следующий алгоритм. Сначала на сетке вычисляется uu'_x . Затем выполняется численно быстрое преобразование Фурье [24, 61], и в каждой точке сетки численно решается уравнение $u_t = ik^3 u + \xi$, где ξ — фурье-образ uu'_x . После этого можно найти $u(t, x)$ на следующем слое по времени, выполнив обратное преобразование Фурье.

XIV.11.5. По теореме Лакса каждое из собственных чисел λ задачи Штурма–Лиувилля

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Pu = -\lambda u, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u = 0$$

является первым интегралом уравнения КДФ, здесь P — решение КДФ (11.8), а время входит как параметр. Этот результат был получен П. Лаксом вначале численно, а затем доказан строго.

Повторите численную часть работы П. Лакса для случая $P(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ — двухсолитонное решение и для случая $P(x, 0) = -n(n+1) \operatorname{sech}^2 x$ (n -солитонное решение).

XIV.11.6. Уравнение синус–Гордон

Другим классом уравнений, имеющих солитонные решения, является уравнение синус–Гордон [62]:

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u. \quad (11.12)$$

1. Используя схему «крест», воспроизвести решения типа «шельфа» (или «кинка»)

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\gamma \exp \left[\pm \frac{t \pm 0.8x}{0.6} \right] \right]. \quad (11.13)$$

Начальные данные для задачи Коши возьмите из точного решения (11.12) (γ — любое положительное число):

$$u(x, 0) = 4 \operatorname{arctg} \left[\gamma \exp \left[\pm \frac{4}{3} x \right] \right],$$

$$u'_t(x, 0) = \pm \frac{10}{3} \operatorname{sech} \left[\pm \frac{4}{3} x + \ln \gamma \right].$$

2. То же для «бризерного» решения:

$$u(x, t) = -4 \operatorname{arctg} \left(\frac{4 \sin(0.6t + 1)}{3 \operatorname{ch}(0.8x + 1)} \right).$$

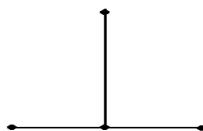
3. То же для решения

$$u(x,t) = -4 \operatorname{arctg} \left(\frac{4}{3} \frac{\operatorname{sh}(0.6t)}{\operatorname{ch}(0.8x+1)} \right).$$

Решение 3) является «двуихсолитонным».

4. Перейдем от задачи Коши к задаче с периодическими граничными условиями. Рассмотреть взаимодействие «бризера» 2) и «двуихсолитонного решения» 3).

5. В чем основной недостаток схемы «крест»?



6. Построить схему на шаблоне, показанном на рисунке.

Указание: рассмотреть систему

$$u_t + v_x = F(u), \quad v_t + u_x = 0,$$

эквивалентную исходному уравнению. На приведенном шаблоне написать схему для однородного уравнения. Используя характеристические свойства уравнения и линейную интерполяцию, вычислить F — функцию правой части — в соответствующих точках шаблона (в зависимости от числа Куранта):

$$F(u) = \int_0^t \sin u \, dt.$$

XIV.11.7. Течение в трубке с упругими стенками

Рассмотрим задачу о течении несжимаемой жидкости в деформируемой трубке. В безразмерном виде уравнения движения несжимаемой жидкости запишем как

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} S v = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Первое уравнение — закон сохранения массы. второе — импульса. Здесь S — площадь поперечного сечения трубы, v — осредненная по площади сечения скорость. Считается, что во входном сечении ($x = 0$) задан закон изменения скорости $v(t)$, например, $v = V \sin^2 \omega t$.

Второе условие, в зависимости от того, где оно ставится, — в соответствующем сечении $S = 1$. В начальный момент все находилось в равновесном состоянии $v = 0, S = 1$.

Система замыкается уравнениями состояния:

- Локально-реагирующая трубка. Модельное уравнение состояния суть $S - 1 = \tanh P$.

$$2. \text{ Трубка с учетом инерции стенки } P = S - 1 + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Требуется записать систему в характеристическом виде, проанализировать, какого порядка аппроксимации требуются разностные схемы, построить схему, желательно, в инвариантных Римана.

Реализовать оба случая уравнения состояния. В чем отличие схемы для трубы с инерцией?

XIV.11.8. Задача о поршне

В сечении $x = 0$ труба постоянного сечения перекрыта поршнем. Справа от поршня находится газ с параметрами P_1, ρ_1, γ_1 а слева — с параметрами P_2, ρ_2, γ_2 . В момент времени $t = 0$ поршень начинает двигаться вправо со скоростью D . Описать движение каждого газа при времени $t > 0$.

Для описания движения газов уравнения одномерной газовой динамики могут быть записаны в эйлеровых координатах:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon + \frac{P}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

с уравнением состояния $\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$, скорость звука в таком газе определяется как $c^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$.

Эти же уравнения можно записать в *лагранжевых массовых координатах*. В такой постановке в качестве координаты берется масса газа, сосредоточенная между поршнем и текущей точкой: $m = \int_0^x \rho(x, t) dx$. В этом случае

вводится начальная сетка узлов по координате, в дальнейшем узлы движутся вместе с газом: $\frac{dx_k}{dt} = v_k$.

Связь между лагранжевыми и эйлеровыми координатами такова: $dm = \rho(x, 0) dx$. Тогда система уравнений газовой динамики в этих координатах примет вид

$$-\frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{P \partial u}{\partial m} = 0$$

с теми же формулами для уравнения состояния и скорости звука.

В каких переменных проще вести расчет движения газа — в исходных или в лагранжевых массовых? Построить разностные схемы для решения задачи о поршне в эйлеровых и лагранжевых массовых координатах, провести расчеты а) по монотонной разностной схеме, б) немонотонной разностной схеме высокого порядка аппроксимации и в) по гибридной разностной схеме. Сравнить полученные результаты.

XIV.11.8. Задача Римана о распаде произвольного разрыва в газовой динамике

В сечении $x = 0$ труба постоянного сечения перекрыта непроницаемой мембраной. Справа от поршня находится газ с параметрами P_1, ρ_1, γ_1 а слева — с параметрами P_2, ρ_2, γ_2 . В момент времени $t = 0$ мембрана разрывается. Описать движение каждого газа при времени $t > 0$. Что общего и в чем различие по сравнению с предыдущей задачей? Эта задача называется задачей Римана о распаде произвольного разрыва.

Система уравнений газовой динамики приведена выше. В каких переменных проще вести расчет движения газа — в исходных или в лагранжевых массовых? Построить разностные схемы для решения задачи о поршне в эйлеровых и лагранжевых массовых координатах, провести расчеты а) по монотонной разностной схеме, б) немонотонной разностной схеме высокого порядка аппроксимации и в) по гибридной разностной схеме. Сравнить полученные результаты. Провести расчеты для случаев отношения давлений газов $P_1/P_2 = 1.5, 3, 5, 10, 100$ в случаях $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 7/5$, $\gamma_1 = 7/5, \gamma_2 = 5/3$, $\gamma_1 = 5/3, \gamma_2 = 7/5$.

О точных решениях задачи Римана см., например, в [63].

XIV.12. Библиографическая справка

Литература, посвященная численному решению систем уравнений в частных производных гиперболического типа, весьма обширна. Для ознакомления с основными численными методами решения задач, возникающих в различных приложениях, рекомендуем книгу [57]. Построение сеточно-характеристических методов для систем уравнений гиперболического типа, в частности для уравнений газовой динамики, подробно описано в [34]. Там же можно познакомиться со свойствами различных схем в пространствах неопределенных коэффициентов. Компактным разностным схемам для задач аэродинамики посвящена монография [18]. Современное развитие схем «кабаре» описано в [65].

XV. Численное решение уравнений в частных производных эллиптического типа

Среди всех типов уравнений математической физики эллиптические уравнения с точки зрения вычислителей стоят особняком. С одной стороны, имеется хорошо развитая теория решения эллиптических уравнений и систем. Достаточно легко доказываются теоремы об устойчивости разностных схем для эллиптических уравнений. Во многих случаях получаются априорные оценки точности расчетов и числа итераций при решении возникающих систем сеточных уравнений. С другой стороны, системы сеточных уравнений, возникающие при решении уравнений конечно-разностными методами, имеют большую размерность и плохо обусловлены. Для решения таких систем разработаны специальные итерационные методы.

XV.1. Примеры эллиптических уравнений. Постановки краевых задач

Самое простое уравнение эллиптического типа — уравнение Лапласа. Его запись с помощью инвариантных дифференциальных операторов есть

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0, \quad (1.1)$$

или

$$\Delta u = 0.$$

Здесь Δ — дифференциальный оператор Лапласа. В декартовой системе координат в двумерном случае уравнение Лапласа запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.1')$$

Любая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией*.

Уравнение Пуассона с помощью инвариантных дифференциальных операторов может быть записано как

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = f(\mathbf{x}), \quad (1.2)$$

или

$$\Delta u = f(\mathbf{x}).$$

В декартовой системе координат в двумерном случае уравнение Пуассона запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (1.2')$$

Однородное уравнение Гельмгольца с помощью инвариантных дифференциальных операторов может быть записано как

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u + k^2 u = 0. \quad (1.3)$$

Для этих уравнений можно поставить следующие задачи (постановку задач рассмотрим на примере уравнения Лапласа).

1. Внешняя задача. Требуется найти функцию, гармоническую вне некоторой замкнутой области Ω . На границе области заданы либо значение функции (условия первого рода, условия Дирихле), либо производная искомой функции в направлении внешней нормали к границе области (условия второго рода, условия Неймана), либо линейная комбинация значения функции на границе и нормальной производной (условия третьего рода, иногда в литературе их называют условиями Робена). Кроме того, обычно требуют ограниченности функции на бесконечности.
2. Внутренняя задача. Требуется найти функцию, гармоническую внутри некоторой замкнутой области Ω . На границе области заданы либо значение функции, либо производная искомой функции в направлении внутренней нормали к границе области, либо их линейная комбинация.

XV.2. Простейшая разностная схема «крест».

Сеточный принцип максимума. Пример исследования схемы на устойчивость

Для построения простейшей разностной схемы будем рассматривать двумерное уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2.1)$$

в единичном квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ с краевыми условиями первого рода на границе расчетной области Γ : $u_{\Gamma} = \varphi$ (φ — заданная на границе функция). В случае прямоугольной области граничные условия удобно записать в следующем виде:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad u(x, 0) = \varphi_3(x), \quad u(x, 1) = \varphi_4(x).$$

Для простоты выкладок введем равномерную расчетную сетку с узлами $\{x_m, y_l\}$, $m, l = 0, 1, \dots, M$ с равным количеством шагов по каждому пространственному направлению, сеточную область D — совокупность всех узлов сетки, включая граничные, и сеточную функцию $\{u_{ml}\}$, которую в данном разделе будем обозначать той же буквой, что и решение дифференциальной задачи, чтобы не путать со второй независимой переменной. В этом случае шаги по координатам предполагаются равными. В случае неравных шагов по каждому направлению полученные результаты качественно не изменятся, а запись уравнений станет более громоздкой.

Выбираем простейший пятиточечный шаблон разностной схемы «крест». На этом шаблоне аппроксимирующее разностное уравнение легко выписать. Для этого производные заменим вторыми разностями и получаем разностное уравнение

$$\frac{u_{m-1,l} - 2u_{ml} + u_{m+1,l}}{h^2} + \frac{u_{m,l-1} - 2u_{ml} + u_{m,l+1}}{h^2} = f_{ml},$$

где h — шаг по координатам, или в операторной форме

$$\Lambda_1 u_{ml} + \Lambda_2 u_{ml} = f_{ml},$$

$$\text{здесь } \Lambda_1 u_{ml} = \frac{u_{m-1,l} - 2u_{ml} + u_{m+1,l}}{h^2}, \quad \Lambda_2 u_{ml} = \frac{u_{m,l-1} - 2u_{ml} + u_{m,l+1}}{h^2},$$

$$u_{0l} = \varphi_1(y_l), \quad u_{m0} = \varphi_3(x_m), \quad u_{Ml} = \varphi_2(y_l), \quad u_{mM} = \varphi_4(x_m).$$

Эту же разностную схему можно записать в каноническом виде для разностных схем для эллиптических уравнений:

$$u_{ml} = \frac{1}{4}(u_{m-1,l} + u_{m+1,l} + u_{m,l-1} + u_{m,l+1}) + h^2 f_{ml}.$$

Такая схема обладает вторым порядком аппроксимации по обеим координатам. Это легко показать, применяя разложение в ряд Тейлора функции — проекции точного решения на сетку — вплоть до членов

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ В МФТИ

четвертого порядка включительно. Проведем такое разложение для одного из операторов, стоящих в данном разностном уравнении:

$$\Lambda_1 u_m = \frac{u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1}}{h^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial u^4} \right)_m + O(h^4).$$

Здесь учтено разложение проекции точного решения в ряд Тейлора:

$$u_{m+1} = u(x_{m+1}) = u_m + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m + \\ + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_m + \frac{h^5}{5!} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)_m + O(h^6)$$

и аналогичное разложение для u_{m-1} .

Для рассматриваемого двумерного уравнения получим выражение для главного члена невязки:

$$\Lambda_1 u_{ml} + \Lambda_2 u_{ml} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{ml} + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right]_{ml} + O(h^4).$$

Рассмотрим устойчивость построенной схемы. Отметим, что методы исследования на устойчивость, применяемые для эволюционных (зависящих от времени) уравнений, здесь не работают. Действовать приходится на основе определения устойчивости для разностной схемы с линейным оператором.

Сформулируем несколько полезных утверждений.

Лемма 1. Пусть сеточная функция $\{u_{ml}\}$ определена на сетке $\{x_m, y_l\}$ ($m, l = 0, \dots, M$) и во всех внутренних узлах сетки удовлетворяет разностному уравнению

$$\frac{u_{m-1,l} - 2u_{ml} + u_{m+1,l}}{h^2} + \frac{u_{m,l-1} - 2u_{ml} + u_{m,l+1}}{h^2} = f_{ml},$$

причем во всех внутренних узлах сетки правая часть этого уравнения неотрицательная: $f_{ml} \geq 0$. Тогда наибольшее значение сеточная функция $\{u_{ml}\}$ достигает хотя бы в одной точке границы сеточной области.

Лемма 2. Пусть сеточная функция $\{u_{ml}\}$ определена на сетке $\{x_m, y_l\}$ ($m, l = 0, \dots, M$) и во всех внутренних узлах сетки удовлетворяет разностному уравнению

$$\frac{u_{m-1,l} - 2u_{ml} + u_{m+1,l}}{h^2} + \frac{u_{m,l-1} - 2u_{ml} + u_{m,l+1}}{h^2} = f_{ml},$$

причем во всех внутренних узлах сетки правая часть этого уравнения неположительна: $f_{ml} \leq 0$. Тогда наименьшее значение сеточной функции $\{u_{ml}\}$ достигает хотя бы в одной точке границы сеточной области. Теорема 1 (Сеточный принцип максимума). Каждое решение разностного уравнения Лапласа

$$\frac{u_{m-1,l} - 2u_{ml} + u_{m+1,l}}{h^2} + \frac{u_{m,l-1} - 2u_{ml} + u_{m,l+1}}{h^2} = 0$$

достигает своего минимального и максимального значения на границе сеточной области.

Введем норму сеточной функции как

$$\|u_{ml}\| = \max_{m,l \in D} |u_{ml}|.$$

Для доказательства устойчивости теперь надо доказать однозначную разрешимость разностной задачи для уравнения Пуассона с любой правой частью и любыми граничными условиями, получить оценку

$$\|u_{ml}\| \leq C \|f\|.$$

Здесь в правой части стоит норма правой части задачи, записанной в операторном виде: $\|f\| = \max_{m,l \in D} |f_{ml}| + \max_{m,l \in \partial D} |\varphi_{ml}|$. Первый максимум в этой сумме берется по всем внутренним точкам, второй — по всем точкам сеточной границы.

Докажем однозначную разрешимость разностной задачи. Рассмотрим сеточное уравнение Лапласа с нулевыми граничными условиями. В силу принципа максимума такая задача имеет лишь тривиальное решение. Но сеточная система — это система линейных уравнений. Если система с нулевой правой частью имеет лишь тривиальное решение, то она однозначно разрешима при любой правой части.

Заметим, что в точной арифметике действие разностного оператора, приближающего дифференциальный оператор Лапласа, на произвольный полином второй степени совпадает по результату с действием дифференциального оператора — погрешность аппроксимации, как следует из приведенной выше оценки, будет нулевая. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$P^h = \frac{1}{4} \left[R^2 - (x^2 + y^2) \right] \max_{m,l \in D} |f_{ml}| + \max_{m,l \in \partial D} |\varphi_{ml}|,$$

где R — радиус окружности с центром в точке $(0, 0)$ и включающей в себя рассматриваемую область. В данном случае $R = \sqrt{2}$. Эта функция называется *мажорантой Гершгорина*.

Индекс h означает, что рассматривается сеточная проекция мажоранты. Обратимся к сеточной функции $w_{ml} = u_{ml} - P^h_{ml}$ и применим к ней разностный оператор Лапласа. Получим

$$\Lambda_1 w_{ml} + \Lambda_2 w_{ml} = f_{ml} + \max_{m,l \in D} |f_{ml}| \text{ во всех внутренних точках области.}$$

Отсюда следует, что свое наибольшее значение рассматриваемая сеточная функция достигает на границе сеточной области в соответствии с леммой 1. Но, как легко убедиться, на границе области сеточная функция $w_{ml} = u_{ml} - P^h_{ml}$ принимает только отрицательные значения. Тогда $u_{ml} - P^h_{ml} \leq 0$ во всех точках сеточной области, включая граничные. Рассмотрим сеточную функцию $v_{ml} = u_{ml} + P^h_{ml}$. Проведя такие же рассуждения, придем к неравенству $u_{ml} + P^h_{ml} \geq 0$ во всех точках сеточной области, включая граничные.

Объединяя полученные результаты, находим

$$|u_{ml}| \leq |P^h_{ml}| \leq \frac{1}{4} R^2 \max_{m,l \in D} |f_{ml}| + \max_{m,l \in \partial D} |\varphi_{ml}|,$$

откуда следует неравенство $\|u_{ml}\| \leq \max(1, R^2/4) \|f\|$. Таким образом, устойчивость самой разностной схемы доказана.

XV.3. Об итерационных методах решения систем сеточных уравнений

При решении эллиптических систем существенная часть вычислительной работы — решение возникающих сеточных уравнений. Фактически для нахождения сеточной функции решения надо получить решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности с разреженной матрицей специального вида. При аппроксимации уравнения Лапласа или Пуассона на регулярных сетках в областях простой структуры матрица системы обычно получается самосопряженная (см. задачу XV.5.2).

Прямые методы для решения такого рода систем не всегда эффективны — они требуют обращения матрицы, причем обратная матрица

получается не разреженной (ленточной, блочно-диагональной и т.п.), а заполненной. Поэтому часто используются итерационные методы. Практически всегда можно усовершенствовать такой метод, используя свойства разностного оператора и информацию о спектре матрицы.

Дадим сводку основных результатов, опираясь на методы, рассмотренные в первой части, главе II, но максимально используем информацию о специфике задачи. При изложении материала мы используем эллиптический разностный оператор, опирающийся на схему «крест». Похожие результаты могут быть получены и для других аппроксимаций эллиптических дифференциальных операторов, сохраняющих на разностном уровне свойства самосопряженности и отрицательной определенности.

XV.3.1. О практической реализации итерационных методов

Как мы уже видели (глава II), все двухслойные итерационные методы решения СЛАУ могут быть представлены в канонической форме

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i}{\tau_{i+1}} + \mathbf{A}\mathbf{u}^i = \mathbf{f}. \quad (3.1)$$

Если оператор \mathbf{B} — единичный, то двухслойный итерационный метод называется *явным*, в противном случае — *неявным*. Эквивалентной формой может служить следующая. Перенесем второе слагаемое в правую часть, заметим, что в правой части появляется невязка текущего приближения $\mathbf{r}^i = \mathbf{A}\mathbf{u}^i - \mathbf{f}$. Тогда (3.1) можно записать в виде

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i}{\tau_{i+1}} = -\mathbf{r}^i.$$

При практической реализации численных методов именно такая форма представления методов является предпочтительной. В качестве невязки используется просто результат подстановки текущего приближения в разностное уравнение. Для вычисления невязки нам совершенно не нужна матричная запись системы.

XV.3.2. Метод простых итераций

Метод простых итераций записывается для системы сеточных уравнений в следующем виде:

$$u_{ml}^{i+1} = u_{ml}^i + \tau(\Lambda u_{ml}^i - f_{ml}),$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ В МФТИ

если точка принадлежит внутренней части сеточной области, и $u_{ml}^i = \varphi_{ml}$, если точка с индексами ml принадлежит границе сеточной области. Здесь разностный оператор Лапласа $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, τ — итерационный параметр. Количество арифметических операций при реализации метода простых итераций $\sim O(N^2)$. Здесь N — размер полной матрицы системы.

Получим формулу для эволюции невязки. Вычтем из итерационной формулы $u_{ml}^{i+1} = u_{ml}^i + \tau(\Lambda u^i - f)_{ml}$ очевидное тождество $u_{ml} = u_{ml} + \tau(\Lambda u - f)_{ml}$ во внутренних точках, а из равенства $u_{ml}^{i+1} = u_{ml}^i$ вычтем тождество $u_{ml} = u_{ml}$ в граничных узлах. Тогда получим формулу, связывающую невязки на двух соседних итерациях во внутренних узлах сетки:

$$r_{ml}^{i+1} = r_{ml}^i + \tau \Lambda r_{ml}^i, \quad (3.2)$$

причем $r_{ml}^{i+1} = 0$ во всех граничных узлах соответственно. Значение следующего приближения очевидно связано с текущей невязкой $u_{ml}^{i+1} = u_{ml}^i + \tau r_{ml}^i$.

Уравнение (3.2), связывающее невязки, совпадает с уравнением, связывающим две итерационные погрешности на двух последовательных итерациях. Нас интересует именно сходимость в смысле стремления к нулю итерационной погрешности. Итерационную погрешность мы вычислить не можем, а невязка вычисляется легко. Во всех расчетных формулах ниже используются именно невязки.

Для сеточной функции невязки r_{ml} , тождественно равной нулю на границе области, ее эволюция на итерациях описывается уравнением

$$r_{ml}^{i+1} = (\mathbf{E} + \tau \Lambda) r_{ml}^i.$$

Для оценки сходимости итерационного процесса необходимо оценить норму оператора послойного перехода. Для норм последовательных невязок имеем

$$\|r_{ml}^{i+1}\| \leq \|\mathbf{E} + \tau \Lambda\| \|r_{ml}^i\|,$$

откуда получим оценку нормы невязки текущего приближения через норму невязки начального приближения $\|r_{ml}^i\| \leq \|\mathbf{E} + \tau \Lambda\|^i \|r_{ml}^0\|$. Так как известно (см. задачу XV.5.2), что разностный оператор самосопряжен-

ный, то самой удобной для дальнейшего использования будет евклидова норма. Для дальнейшего нам потребуется оценка границ спектра разностного оператора Лапласа. Поэтому перед дальнейшим чтением необходимо разобрать задачу XV.5.3.

Самым простым для этих целей является метод Фурье (или спектральный анализ оператора перехода).

Нам известны собственные числа и собственные функции сеточного оператора Лапласа:

$$\varphi^{kp} = \sin \frac{k\pi m}{M} \sin \frac{p\pi l}{L}, \quad \lambda^{kp} = -\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2M} - \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{p\pi}{2L}.$$

Отметим, что собственные числа и собственные функции вычисляны как раз для интересующего нас случая — на границе сеточной области невязка равна нулю.

В дальнейшем необходимо будет знать границы спектра. Пусть для простоты выкладок задача решается в единичном квадрате, шаги по координатам равные. Тогда для минимального по абсолютной величине собственного числа оператора второй разности справедлива оценка $\lambda_{\min} = \lambda^1 = l = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{2M} \approx \pi^2$, так как $M \gg 1$, $h = 1/M$, а для максимального по абсолютной величине собственного числа

$$\lambda_{\max} = \lambda^{(M-1)} = L = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{(M-1)\pi}{2M} \approx \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{2} = \frac{4}{h^2} = 4M^2.$$

Для собственного числа оператора Лапласа имеем $l \leq \lambda^{kp} \leq L$, где $l \approx 2\pi^2$, $L \approx 8/h^2 = 8M^2$. Легко также оценить число обусловленности системы сеточных уравнений.

Представим сеточную функцию невязки r_{ml}^0 , равную нулю на границе, в виде разложения по базису из нормированных собственных функций разностного оператора

$$r_{ml}^0 = \sum_{kp} c_{kp} \varphi_{ml}^{kp}, \quad c_{kp} = (r_{ml}^0, \varphi_{ml}^{kp}),$$

при этом выполняется равенство Парсеваля $\|r_{ml}^0\| = \|\mathbf{c}\|$.

Далее, используя это разложение, получим

$$r^1 = (\mathbf{E} + \tau\Lambda)r^0 = (\mathbf{E} + \tau\Lambda) \sum_{kp} c_{kp} \varphi^{kp} = \sum_{kp} c_{kp} (\mathbf{E} + \tau\Lambda) \varphi^{kp} =$$

$$= \sum_{kp} c_{kp} (1 - \tau \lambda^{kp}) \varphi^{kp}.$$

Тогда отсюда следует, что скорость сходимости метода простой итерации q определяется как $\max\{|1 - \tau l|, |1 - \tau L|\}$, а условие сходимости $q < 1$ выполняется при $0 < \tau < 2/L$.

XV.3.3. Метод простых итераций с оптимальным параметром

Для определения параметра τ , обеспечивающего максимальную скорость сходимости, необходимо решать следующую оптимизационную задачу:

$$\tau_0 = \operatorname{Arg} \min_{\tau} \left(\max_{\lambda \in [l, L]} |1 - \tau \lambda| \right).$$

Так как максимум величины под знаком модуля достигается на правой или левой границе интервала $[l, L]$, то выполняется равенство $\max_{\lambda \in [l, L]} |1 - \tau \lambda| = \max\{|1 - \tau l|, |1 - \tau L|\}$. Эта задача легко решается (например, графически), значение оптимального итерационного параметра τ_0 равно $\tau_0 = \frac{2}{l + L}$. Оптимальное значение скорости сходимости метода простых итераций будет

$$q_0 = q(\tau_0) = 1 - \tau_0 l = 1 - \frac{2}{L + l} \cdot l = \frac{L - l}{L + l} = \frac{1 - \mu^{-1}}{1 + \mu^{-1}} \approx 1 - 2\mu^{-1},$$

где $\mu = L/l$ — число обусловленности системы сеточных уравнений.

XV.3.4. Чебышёвское ускорение метода простых итераций

Рассмотрим итерационный метод с выбором параметра τ на каждой итерации:

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \tau_{i+1} (\mathbf{\Lambda u}^i - \mathbf{f}).$$

Соответствующие соотношения для эволюции невязки будут

$$\mathbf{r}^{i+1} = (\mathbf{E} + \tau_{i+1} \mathbf{\Lambda}) \mathbf{r}^i, \quad \mathbf{r}^i = \prod_{j=1}^i (\mathbf{E} + \tau_j \mathbf{\Lambda}) \mathbf{r}^0.$$

После разложения невязок на двух соседних итерациях по базису из собственных функций сеточного оператора получим равенство

$$\sum c_{pq}^{i+1} \varphi^{pq} = \sum c_{pq}^i (\mathbf{E} + \tau_{i+1} \mathbf{\Lambda}) \varphi^{pq} = \sum c_{pq}^i (1 - \tau_{i+1} \lambda^{pq}) \varphi^{pq}.$$

Для коэффициентов разложения и компонентов невязки справедливы следующие равенства:

$$c_{pq}^{i+1} = c_{pq}^i (1 - \tau_{i+1} \lambda^{pq}), \quad c_{pq}^i = \prod_{j=1}^i (1 - \tau_j \lambda^{pq}) c_{pq}^0,$$

$$\mathbf{r}^i = \sum_{pq} c_{pq}^i \varphi^{pq} = \sum_{pq} c_{pq}^0 \prod_{j=1}^i (1 - \tau_j \lambda^{pq}) \varphi^{pq}.$$

Оценим норму невязки на i шаге итераций:

$$\|\mathbf{r}^i\| \leq \max_{\lambda \in [l, L]} \left| \prod_{j=1}^i (1 - \tau_j \lambda^{pq}) \right| \left\| \sum_{pq} c_{pq} \varphi^{pq} \right\| \leq \max_{\lambda \in [l, L]} \left| \prod_{j=1}^i (1 - \tau_j \lambda^{pq}) \right| \|\mathbf{r}^0\|.$$

Вновь приходим к минимаксной задаче. Необходимо найти такую последовательность итерационных параметров $\{\tau_j\}_{j=1}^i$, чтобы выполня-

$$\min_{\{\tau_j\}} \max_{\lambda \in [l, L]} \left| \prod_{j=1}^i (1 - \tau_j \lambda^{pq}) \right|.$$

Заметим, что $\prod_{j=1}^i (1 - \tau_j \lambda^{pq})$ есть полином (относительно τ) степени i .

Задача — сделать его наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[l, L]$. Эта задача, как известно, решена Чебышёвым, а корни этого полинома являются нулями полинома Чебышёва первого рода:

$$\tau_j = \left[\frac{L+l}{2} + \frac{L-l}{2} \cos \frac{\pi(2j-1)}{2i} \right]^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, i.$$

Можно получить оценку скорости сходимости метода с оптимальным набором параметров $q \approx 1 - 2\sqrt{1/\mu}$. Хотя при плохо обусловленных матрицах в этом случае скорость сходимости тоже близка к единице, как и в методе простых итераций, тем не менее появление квадратного корня из числа обусловленности приводит к заметному ускорению. Методы, сходящиеся со скоростью не меньшей скорости метода простых итераций с чебышёвскими параметрами, называются *быстро сходящимися методами*.

Однако метод итераций с чебышёвскими параметрами в таком виде оказывается неустойчивым по двум причинам: рост ошибок округления

в расчетах и некоторые свойства нулей полиномов Чебышёва, в частности, сгущение τ_k^{-1} — величин, обратных корням полинома, — к границам спектра. Не останавливаясь на доказательстве неустойчивости чебышёвского итерационного процесса, заметим, что для ее устранения необходимо переставить итерационные параметры не в их естественном порядке, а так, чтобы все частичные произведения $\prod_{j=1}^i (1 - \tau_j \lambda)$ не воз-

растали бы вблизи границ спектра при любом i . Это необходимо, поскольку частичное произведение, относящееся к правой части спектра со сгущающейся чебышёвской сеткой, очень быстро растет из-за больших величин $(1 - \tau_j \lambda)$. Задача упорядочения итерационных параметров достаточно сложна, ее решение связано с именами В. И. Лебедева, В. П. Финогенова, А. А. Самарского и Е. С. Николаева [24, 66]. Приведем результат ее решения для $i = 2^q$, где i — количество сомножителей в произведении (число итераций) $\prod_{j=1}^i (1 - \tau_j \lambda)$, q — натуральное число.

При $i = 2$ перебираем корни полинома Чебышёва в их естественном порядке (в фигурных скобках указываем номер корня) $\{1, 2\}$ или в порядке убывания номера $\{2, 1\}$. Далее последовательность номеров корней получаем следующим образом. Каждый номер корня меняется на пару чисел: первое число — номер корня, второе — дополняет сумму в каждой паре до значения $i + 1$ ($2^r + 1$). Таким образом, при $i = 4$ получаем два упорядоченных набора. Из последовательности $\{1, 2\}$ получаем $\{1, 4, 2, 3\}$, а из $\{2, 1\}$ — $\{2, 3, 1, 4\}$. Действуя аналогично далее, имеем при $i = 8$ $\{1, 8, 4, 5, 2, 7, 3, 6\}$ в первой последовательности чебышёвских параметров или $\{2, 7, 3, 6, 1, 8, 4, 5\}$ во второй последовательности. Следующий шаг дает $i = 16$ $\{1, 16, 8, 9, 4, 13, 5, 12, 2, 15, 7, 10, 3, 14, 6, 11\}$ в первой последовательности чебышёвских параметров или $\{2, 15, 7, 10, 3, 14, 6, 11, 1, 16, 8, 9, 4, 13, 5, 12\}$ во второй. Построение таких упорядоченных наборов легко можно продолжить. Приведенное упорядочение является универсальным — оно обеспечивает устойчивость любых методов, где необходим чебышёвский набор итерационных параметров.

Обычно при реализации чебышёвских методов задаются последовательностью из 32 или 64 параметров и делают серию итераций. Если невязка велика, то результат серии используют в качестве начального приближения для следующей серии итераций, если невязка мала, то решение считается найденным. Такая упрощенная реализация работает

несколько медленнее, чем «честное» чебышёвское ускорение, но весьма эффективно.

XV.3.5. Трехслойный итерационный метод Чебышёва

Чебышёвское ускорение итерационного процесса решения СЛАУ возможно тогда, когда о спектре матрицы перехода известно больше, чем просто значение спектрального радиуса. Предположим, что система СЛАУ

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

решается с помощью какого-либо итерационного метода (типа простых итераций):

$$\mathbf{u}^{(s+1)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(s)} + \mathbf{F}, \quad \mathbf{u}^{(s)} \rightarrow \mathbf{u}^* \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

Необходимым и достаточным условием сходимости итерационного процесса является ограничение на спектральный радиус матрицы перехода $\rho(\mathbf{R}) < 1$.

Пусть все приближения $\mathbf{u}^{(s)}$ известны. Тогда возникает естественный вопрос: не существует ли какой-либо их линейной комбинации

$$\mathbf{y}_m = \sum_{s=0}^m \gamma_{ms} \mathbf{u}^{(s)}, \text{ которая точнее приближает решение } \mathbf{u}^*? \text{ Заметим, что}$$

коэффициенты γ_{ms} должны удовлетворять условию $\sum_{s=0}^m \gamma_{ms} = 1$, так как

если все приближения совпадают с точным решением, то и улучшение тоже должно давать точное решение. Тогда погрешность нового решения можем записать как

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_m - \mathbf{u}^* &= \sum_{s=0}^m \gamma_{ms} \mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{u}^* = \sum_{s=0}^m \gamma_{ms} (\mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{u}^*) = \\ &= \sum_{s=0}^m \gamma_{ms} \mathbf{R}^s (\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^*) = \mathbf{p}_m(\mathbf{R})(\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^*), \end{aligned}$$

где матричный многочлен $\mathbf{p}_m(\mathbf{R}) = \sum_{s=0}^m \gamma_{ms} \mathbf{R}^s$ должен обладать свой-

ством, что $p_m(1) = \sum_{s=0}^m \gamma_{ms} = 1$.

Если бы в качестве \mathbf{p}_m мы могли взять характеристический многочлен матрицы \mathbf{R} , то по теореме Гамильтона–Кэли имели бы $\mathbf{p}_m(\mathbf{R}) = \mathbf{0}$, что означает сходимость в m шагов. Такой выбор полинома редко используется на практике по двум причинам. Во-первых, все собственные значения \mathbf{R} редко бывают известны, и, во-вторых, желательно достичь приемлемой точности быстрее, чем за $m = \dim(\mathbf{R})$ шагов. Поэтому вместо поиска многочлена $\mathbf{p}_m(\mathbf{R}) = \mathbf{0}$ постараемся найти многочлен $\mathbf{p}_m(\mathbf{R})$ с минимальным спектральным радиусом. Это возможно сделать в следующих предположениях:

- 1) все собственные значения \mathbf{R} действительны;
- 2) все они лежат на интервале $[-\rho, \rho]$, где $\rho < 1$.

Тогда фактически возникает задача поиска многочлена, который удовлетворяет двум условиям: $p_m(1) = 1$ и $\max_{-\rho \leq x \leq \rho} |p_m(x)|$ имеет наименьшее возможное значение. Эта задача была решена П. Л. Чебышёвым на отрезке $[-1, 1]$. Её решением являются полиномы Чебышёва первого рода $T_n(x)$. На интересующем нас интервале многочленом с нужными свойствами является полином

$$p_m(x) = \frac{T_m(x/\rho)}{T_m(1/\rho)}.$$

Здесь важно отметить, что при $x \in [-\rho, \rho]$ $|p_m(x)| \leq 1/T_m(1/\rho)$. Обычно для итерационных методов решения сеточных уравнений, возникающих при решении эллиптических задач, спектральный радиус матрицы перехода \mathbf{R} слабо отличается от единицы, а именно $\rho = 1/(1+\varepsilon)$. Тогда $|p_m(x)| \leq 1/T_m(1+\varepsilon)$. Последняя оценка в силу свойств многочленов Чебышёва вне отрезка $[-1, 1]$ означает, что при малых ε и умеренных m $|p_m(x)|$ достаточно мало.

Для экономной реализации метода воспользуемся рекуррентным соотношением для полиномов Чебышёва:

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x). \quad (3.3)$$

Такие рекуррентные соотношения характерны для всех систем ортогональных полиномов.

Введем обозначение $\mu_m \equiv 1/T_m(1/\rho)$. Тогда $\mathbf{p}_m(\mathbf{R}) = \mu_m \mathbf{T}_m(\mathbf{R}/\rho)$, а из (3.3) получим

$$\frac{1}{\mu_m} = \frac{2}{\rho \mu_{m-1}} - \frac{1}{\mu_{m-2}}. \quad (3.4)$$

XV. Численное решение уравнений в частных производных эллиптического типа

Вычислим погрешность решения на m итерации:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_m - \mathbf{u}^* &= \mathbf{p}_m(\mathbf{R})(\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^*) = \mu_m \mathbf{T}_m(\mathbf{R}/\rho)(\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^*) = \\ &= \mu_m \left(2 \frac{\mathbf{R}}{\rho} \mathbf{T}_{m-1}(\mathbf{R}/\rho)(\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^*) - \mathbf{T}_{m-2}(\mathbf{R}/\rho)(\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^*) \right) = \\ &= \mu_m \left(2 \frac{\mathbf{R}}{\rho} \frac{\mathbf{y}_{m-1} - \mathbf{u}^*}{\mu_{m-1}} - \frac{\mathbf{y}_{m-2} - \mathbf{u}^*}{\mu_{m-2}} \right).\end{aligned}$$

Этот ответ можно переписать в другом виде:

$$\mathbf{y}_m = \frac{2\mu_m}{\mu_{m-1}} \frac{1}{\rho} \mathbf{R} \mathbf{y}_{m-1} - \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} \mathbf{y}_{m-2} + \mathbf{d}_m,$$

где правая часть с учетом (3.4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_m &= \mathbf{u}^* - \frac{2\mu_m}{\mu_{m-1}} \frac{\mathbf{R}}{\rho} \mathbf{u}^* + \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^* - \frac{2\mu_m}{\mu_{m-1}} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{F}}{\rho} + \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} \mathbf{u}^* = \\ &= \mu_m \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{2}{\mu_{m-1}} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mu_{m-2}} \right) \mathbf{u}^* + \frac{2\mu_m}{\rho\mu_{m-1}} \mathbf{F} = \frac{2\mu_m}{\rho\mu_{m-1}} \mathbf{F}.\end{aligned}$$

Вся информация о решениях на предыдущих итерациях содержится в трех последних. Это является огромным достоинством метода трехслойного чебышёвского ускорения. Таким образом, мы получаем алгоритмически простой метод ускорения:

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_1 = \rho, \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{u}^{(0)}, \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{F},$$

$$m = 2, 3, \dots \quad \begin{cases} \mu_m = \left(\frac{2}{\rho\mu_{m-1}} - \frac{1}{\mu_{m-2}} \right)^{-1} \\ \mathbf{y}_m = \frac{2\mu_m}{\mu_{m-1}} \frac{1}{\rho} \mathbf{R} \mathbf{y}_{m-1} - \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} \mathbf{y}_{m-2} + \frac{2\mu_m}{\rho\mu_{m-1}} \mathbf{F}. \end{cases}$$

Это представление содержит одно матрично-векторное умножение, как и в исходном методе типа простых итераций. Стоимость всех остальных операций мала по сравнению с ним.

Для метода простых итераций один параметр метода можно считать постоянным, формулы трехслойного метода Чебышёва будут

$$\mathbf{u}^1 = (\mathbf{E} - \tau\mathbf{A})\mathbf{u}^0 + \tau\mathbf{f},$$

$$\mathbf{u}^{i+1} = \alpha_{i+1}(\mathbf{E} - \tau\mathbf{A})\mathbf{u}^i + (1 - \alpha_{i+1})\mathbf{u}^{i-1} + \tau\alpha_{i+1}\mathbf{f}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $\tau = 2/(l+L)$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{i+1} = 4/(4 - \rho^2\alpha_i)$, $\rho = (L-l)/(L+l)$.

Известно [67], что для эволюции невязки справедлива оценка

$$\|\mathbf{r}^i\| \leq \frac{2q^i}{1+q^{2i}} \|\mathbf{r}^0\|, \text{ где } q = \frac{1-1/\sqrt{\mu}}{1+1/\sqrt{\mu}}.$$

Трехслойный метод Чебышёва в настоящее время применяется значительно чаще двухслойного при численном решении уравнений эллиптического типа.

Каноническая форма записи трехслойного итерационного метода (к которым и относится приведенный трехслойный метод Чебышёва) есть

$$\mathbf{B}\mathbf{u}^{k+1} = \alpha_{k+1}(\mathbf{B} - \tau_{k+1}\mathbf{A})\mathbf{u}^k + (1 - \alpha_{k+1})\mathbf{B}\mathbf{u}^{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}\mathbf{f},$$

$$\mathbf{B}\mathbf{u}^1 = (\mathbf{B} - \tau_1\mathbf{A})\mathbf{u}^0 + \tau_1\mathbf{f}.$$

Если оператор \mathbf{B} — единичный, то трехслойный итерационный метод называется явным, в противном случае — неявным.

XV.3.6. Метод верхней релаксации (SOR)

Еще один неявный итерационный метод может быть легко реализован. Это метод верхней релаксации, в англоязычной литературе — Successive OverRelaxation (SOR). Рассмотрим реализацию метода верхней релаксации для разностной аппроксимации уравнения Пуассона. Переписав разностную схему в виде

$$\frac{u_{m-1,l} + u_{m,l-1}}{h^2} + \frac{u_{m,l+1} + u_{m+1,l}}{h^2} - \frac{4u_{ml}}{h^2} = f_{ml}, \quad u_{ml} = U_{ml},$$

выпишем расчетные формулы для метода релаксаций:

$$\frac{u_{m-1,l}^{k+1} + u_{m,l-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{m,l+1}^k + u_{m+1,l}^k}{h^2} - \frac{4}{h^2} \left[\frac{u_{ml}^{k+1}}{\omega} + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) u_{ml}^k \right] = f_{ml},$$

$$u_{ml}^{k+1} = U_{ml}.$$

Последовательность вычислений в методе релаксации такая же, как и в методе Зейделя — бегущий счет (см. задачу 5.6). Уравнения представляются в виде

$$u_{m-1,l}^{k+1} + u_{m,l-1}^{k+1} - \frac{4}{\omega} u_{ml}^{k+1} = -(u_{m,l+1}^k + u_{m+1,l}^k) + 4 \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) u_{ml}^k - h^2 f_{ml},$$

решение u_{ml}^{k+1} вычисляется также начиная с левого нижнего угла прямоугольной области интегрирования. Для реализации этого метода не требуется знания спектра задачи, при этом оптимальное значение параметра подбирается эмпирически. Но при специальном упорядочивании узлов сетки оптимальное значение параметра можно вычислить теоретически. При шахматном упорядочивании оптимальное значение параметра

$$\omega_o = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}.$$

В этой формуле ρ — спектральный радиус матрицы перехода метода Якоби $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{L})$, не зависящий от порядка упорядочивания узлов. Эти же диагональные и нижне- и верхне-треугольные операторы входят в запись метода релаксации в матричной форме:

$$\mathbf{L}\mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{U}\mathbf{u}^k + \mathbf{D} \left[\frac{\mathbf{u}^{k+1}}{\omega} + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) \mathbf{u}^k \right] = \mathbf{f}.$$

XV.3.7. Метод переменных направлений

Решение нестационарной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f \quad (3.5)$$

со стационарными граничными условиями $u|_{\Gamma} = \varphi$ будет стремиться к некоторому стационарному пределу при $t \rightarrow \infty$ или при $n \rightarrow \infty$. В этом пункте n — количество шагов по времени при решении дифференциального уравнения в частных производных разностным методом. В этом случае роль шага по времени будет играть итерационный параметр τ . Принципиальное отличие состоит в том, что итерационный параметр не обязан быть малым, хорошая аппроксимация нестационарного уравнения не требуется, так как нас интересует лишь финальное стационарное состояние.

Представим метод *переменных направлений*, использованный ранее для решения многомерного уравнения теплопроводности, в следующем виде:

$$\frac{\tilde{u}_{ml} - u_{ml}^k}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{u}_{ml} + \Lambda_2 u_{ml}^k - f_{ml}, \quad \frac{u_{ml}^{k+1} - \tilde{u}_{ml}}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{u}_{ml} + \Lambda_2 u_{ml}^{k+1} - f_{ml}.$$

Легко показать, что для невязок будет выполнено

$$\frac{\tilde{r}_{ml} - r_{ml}^k}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{r}_{ml} + \Lambda_2 r_{ml}^k, \quad \frac{r_{ml}^{k+1} - \tilde{r}_{ml}}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{r}_{ml} + \Lambda_2 r_{ml}^{k+1}.$$

Для исследования эволюции невязки на итерации представим ее в виде разложения по базису из собственных функций сеточного оператора Лапласа: $r_{ml}^s = \sum_{kp} c_{kp}^s \varphi_{ml}^{kp}$, $\tilde{r}_{ml} = \sum_{kp} \tilde{c}_{kp} \varphi_{ml}^{kp}$.

Выразим невязку на промежуточном слое через невязку на предыдущей итерации:

$$(\mathbf{E} - \tau \Lambda_1) \tilde{r}_{ml} = (\mathbf{E} + \tau \Lambda_2) r_{ml}^i.$$

Используя разложения по собственным функциям разностного оператора, получим

$$(\mathbf{E} - \tau \Lambda_1) \sum_{kp} \tilde{c}_{kp} \varphi_{ml}^{kp} = (\mathbf{E} + \tau \Lambda_2) \sum_{kp} c_{kp}^i \varphi_{ml}^{kp},$$

откуда сразу следует равенство

$$\sum_{kp} \tilde{c}_{kp} (1 + \tau \lambda^k) \varphi_{ml}^{kp} = \sum_{kp} c_{kp}^i (1 - \tau \lambda^k) \varphi_{ml}^{kp}.$$

В силу того, что выбранный базис из собственных функций ортонормированный, получаем равенство для коэффициентов Фурье невязок:

$$\tilde{c}_{kp} = \frac{1 - \tau \lambda^k}{1 + \tau \lambda^k} c_{kp}^i.$$

Аналогично рассмотрим связь невязки на промежуточном слое и на следующей итерации. Затем, исключив промежуточный слой, получим

$$c_{kp}^{i+1} = \frac{1 - \tau \lambda^P}{1 + \tau \lambda^P} \tilde{c}_{kp} = \frac{1 - \tau \lambda^P}{1 + \tau \lambda^P} \frac{1 - \tau \lambda^k}{1 + \tau \lambda^k} c_{kp}^i.$$

Введем обозначение $\mu(\tau) = \max_{\lambda \in [l, L]} \left| \frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda} \right|$, тогда для коэффициентов разложения справедливо неравенство $|c_{kp}^{i+1}| \leq \mu^2(\tau) |c_{kp}^i|$, следовательно, для нормы невязки имеем условие $\|\mathbf{r}^{k+1}\| \leq \mu^2(\tau) \|\mathbf{r}^k\|$. Для достижения максимальной скорости сходимости необходимо минимизировать $\mu(\tau)$.

Найдем оптимальное значение параметра τ . Для этого необходимо решить задачу

$$\tau = \arg \left\{ \min_{\tau} \left[\max_{\lambda \in [l, L]} \left| \frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda} \right| \right] \right\}.$$

Простой графический анализ приводит к результату

$$\max_{\lambda \in [l, L]} \left| \frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda} \right| = \max_{\lambda \in [l, L]} \left\{ \left| \frac{1-\tau l}{1+\tau l} \right|, \left| \frac{1-\tau L}{1+\tau L} \right| \right\}.$$

Минимум $\mu(\tau)$ достигается при $\frac{1-\tau_0 l}{1+\tau_0 l} = -\frac{1-\tau_0 L}{1+\tau_0 L}$, откуда сразу следует $\tau_0 = 1/\sqrt{lL}$. Тогда $\mu(\tau_0) = \frac{1-l/\sqrt{lL}}{1+l/\sqrt{lL}} \approx 1-2\sqrt{l/L}$. Невязка за одну итерацию убывает, таким образом, в $q = \mu^2 \approx 1-4\sqrt{l/L}$ раз.

Скорость сходимости итерационного процесса для метода переменных направлений с оптимальным параметром приблизительно такая же, как и для процесса с чебышёвским набором итерационных параметров. Для такого метода также можно поставить задачу поиска набора оптимальных параметров, обеспечивающих максимальную скорость сходимости. Это параметры Вашпресса, полученные ранее Золотарёвым [67].

В канонической форме метод переменных направлений записывается в виде

$$(\mathbf{E} - \tau \boldsymbol{\Lambda}_2)(\mathbf{E} - \tau \boldsymbol{\Lambda}_1) \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{u}^k = \mathbf{f}.$$

Если вычислить произведение операторов в левой части, то получается операторный множитель $\mathbf{E} - \tau \mathbf{A} + \tau^2 \boldsymbol{\Lambda}_2 \boldsymbol{\Lambda}_1$. Здесь $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Lambda}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_2$ — сеточный аналог оператора Лапласа. Последнее слагаемое в операторе в левой части равенства играет роль погрешности на итерациях.

Так как сумма сеточных операторов второй разности и есть оператор Лапласа, то сходимость данного метода получается достаточно быстрой. Обращать каждый из операторных сомножителей достаточно легко из-за специальной структуры оператора, позволяющей организовать прогонку на каждом цикле итераций лишь по одному направлению. Говорят, что в данном методе оператор факторизованный (то есть представленный в виде произведения операторных сомножителей).

XV.3.8. Попеременно-треугольный итерационный метод (ПТИМ)

Неявная аппроксимация двумерного уравнения теплопроводности позволяет выбирать любые шаги по времени, поэтому итерационный метод $(\mathbf{E} - \tau \mathbf{A}) \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\tau} + \mathbf{A}\mathbf{u}^k = \mathbf{f}$ должен сходиться быстро, но обращение матрицы в левой части равенства — задача столь же трудоемкая, что и обращение исходной матрицы \mathbf{A} , так как матрица $\mathbf{E} - \tau \mathbf{A}$ не факторизованная.

Представим оператор $\mathbf{E} - \tau \mathbf{A}$ в факторизованной форме $\mathbf{E} - \tau \mathbf{A} \approx (\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_1)(\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_2)$, причем $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$. Построим факторизацию, отличную от описанной выше.

Выберем матрицу $\mathbf{R}_1 = \{r_{ij}\}$:

$$r_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j, \\ \frac{a_{ij}}{2}, & i = j, \\ 0, & i < j. \end{cases}$$

В таком случае можно взять $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1^*$. Такой выбор операторов \mathbf{R} допускает простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим неявную аппроксимацию (3.3) на шаблоне «крест» по пространству на верхнем слое. Операторы \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 определены на трехточечных шаблонах, так что

$$\mathbf{R}_1 = \frac{1}{h_x^2} (u_{ml} - u_{m-l}) + \frac{1}{h_y^2} (u_{ml} - u_{ml-1}),$$

$$\mathbf{R}_2 = \frac{1}{h_x^2} (u_{ml} - u_{m+l}) + \frac{1}{h_y^2} (u_{ml} - u_{ml+1}).$$

Таким образом, название метода можно считать идущим от разбиения шаблона на треугольники, а можно полагать, что название исходит из того, что \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 — нижняя и верхняя треугольные матрицы соответственно, их диагональные элементы совпадают.

Тогда неявная аппроксимация (3.5) приводит к уравнению

$$(\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_1 - \tau \mathbf{R}_2) \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\tau} + \mathbf{A}\mathbf{u}^k = \mathbf{f},$$

которое можно факторизовать добавлением члена $\tau^2 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$, т.е порядка ошибки неявной аппроксимации по времени:

$$(\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_2)(\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_1) \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\tau} + \mathbf{A}\mathbf{u}^k = \mathbf{f}.$$

Операторный множитель $\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_2)(\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_1)$ часто называют оператором предобуславливания. Можно показать, что при такой факторизации \mathbf{B} — самосопряженный положительный оператор.

При фиксированном τ значение решения на следующей итерации находится в два этапа. Сначала, как во всех итерационных методах, вычисляется невязка на текущей итерации $\mathbf{r}^i = \mathbf{A}\mathbf{u}^i - \mathbf{f}$, а затем решаются системы уравнений

$$(\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_2)\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\mathbf{u}^k - \tau \mathbf{r}^k,$$

$$(\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_1)\mathbf{u}^{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}.$$

Так как матрицы $(\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_1)$ и $(\mathbf{E} - \tau \mathbf{R}_2)$ являются треугольными, то эти уравнения разрешаются методом бегущего счета значительно проще, чем исходное. В силу специфики уравнения ПТИМ для схемы «крест» реализация метода достаточно проста (см. задачу XV.5.10).

Для ПТИМ существуют методы ускорения, основанные на трехслойном итерационном методе Чебышева. Подробное описание такого ускорения и формулировки и доказательства соответствующих теорем читатель может найти в [24]. Приведем ниже одну из таких теорем, опирающуюся на оценки границ спектра разностного оператора.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{A} \equiv -\Lambda = -\mathbf{R} - \mathbf{R}^*$ и существуют положительные постоянные l и L , при которых выполнены операторные неравенства $\mathbf{A} \geq l\mathbf{E}$, $4\mathbf{R}^*\mathbf{R} \leq L\mathbf{A}$.

Пусть также

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{lL}}, \quad \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \text{где} \quad \gamma_1 = \frac{l}{2\left(1 + \sqrt{\frac{l}{L}}\right)}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{lL}}{4}.$$

Тогда двухэтапный итерационный метод $\mathbf{r}^k = \mathbf{Au}^k - \mathbf{f}$, $(\mathbf{E} - \omega \mathbf{R}^*)\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Bu}^k - \tau_k \mathbf{r}^k$, $(\mathbf{E} - \omega \mathbf{R})\mathbf{u}^{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}$ сходится, причем для его погрешности справедлива оценка в энергетической норме $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} = \sqrt{(\mathbf{Ax}, \mathbf{x})}$:

$$\|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}\|_{\mathbf{A}} \leq \frac{2\rho_1^k}{1 + \rho_1^{2k}} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}\|_{\mathbf{A}},$$

$$\text{где } \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{l/L}}{1 + 3\sqrt{l/L}},$$

В качестве оценок границ спектра для нижней границы l можно взять минимальное значение модуля собственного числа λ_{\min} оператора \mathbf{A} либо, если границы спектра точно неизвестны, любую положительную постоянную $0 < l \leq \lambda_{\min}$. Можно показать, что $L \geq \lambda_{\max}$, $L > l$, где λ_{\max} — максимальное значение модуля собственного числа оператора \mathbf{A} .

XV.4. Сводка результатов по итерационным методам решения сеточных уравнений (на примере задачи Неймана в квадрате)

После рассмотрения самых распространенных методов решения сеточных уравнений получена возможность сравнить итерационные методы по количеству итераций, необходимых для уменьшения начальной невязки в одно и то же количество раз. Оценка имеет стандартный вид и состоит из двух сомножителей, один характеризует заданную точность ($\ln \varepsilon$), второй — выбранный метод. Приведем только выражения для этого сомножителя, пропорционального числу узлов сетки. Пусть задача решается в единичном квадрате, число узлов сетки в двумерной области по каждому направлению равно N .

Медленные:

$\frac{2N^2}{\pi^2}$ — методы Якоби и простых итераций с оптимальным выбором параметра,

$\frac{N^2}{\pi^2}$ — метод Зейделя.

Средней скорости сходимости:

$\frac{2N}{\pi}$ — метод верхней релаксации,

$\frac{N}{\pi}$ — метод простых итераций с чебышёвским набором парамет-

ров,

$\frac{N}{2\pi}$ — методы переменных направлений и попеременно-

треугольный.

Быстрые:

$\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{\pi}}$ — попеременно-треугольный метод с чебышёвским набором

параметров.

Сверхбыстрые:

$\frac{2}{\gamma} \ln\left(\frac{2N}{\pi}\right)$ — метод переменных направлений с чебышёвским набо-

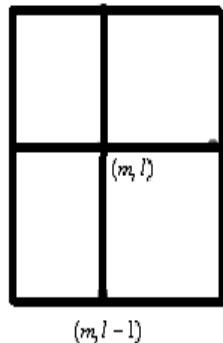
ром параметров, $\gamma \approx 3,2$.

XV.5. Задачи с решениями

XV.5.1. Для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике методом неопределенных коэффициентов построить схему максимально возможного порядка аппроксимации на девятиточечном шаблоне. Считать, что $h_x \neq h_y$. Как изменится порядок аппроксимации при $h_x = h_y = h$?

Решение. Заметим, что в уравнении Лапласа нет выделенных пространственных направлений, следовательно, веса разностной схемы будут зависеть лишь от расстояния от центра шаблона. Тогда возможно записать разностную схему в виде

$$u_{m,l} = \alpha(u_{m-1,l} + u_{m+1,l}) + \beta(u_{m,l-1} + u_{m,l+1}) +$$



$$+\gamma(u_{m-1,l+1} + u_{m-1,l-1} + u_{m+1,l+1} + u_{m+1,l-1}).$$

Подставим проекцию на сетку точного решения задачи в разностную схему и выпишем разложение в ряды Тейлора в окрестности центральной точки шаблона. Соберем слагаемые с одинаковыми степенями по шагам сетки. Получим следующие условия:

h_x^0	$1 = 2\alpha + 2\beta + 4\gamma$	h_x^4	$\frac{\alpha}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$
h_x^2	$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	h_y^4	$\frac{\beta}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$
h_y^2	$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$h_x^2 h_y^2$	$\gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$

Коэффициенты при нечетных степенях шагов сетки получаются тождественно равными нулю. Члены шестого порядка по шагам сетки мы опускаем.

Так как разностное уравнение должно аппроксимировать уравнение Лапласа, то мы имеем равенство $\alpha h_x^2 = \beta h_y^2$.

Воспользуемся теперь следствиями уравнения Лапласа:

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2},$$

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2},$$

тогда, складывая два приведенных выше выражения, получим

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right),$$

$$h_x^4 \frac{\alpha}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + h_y^4 \frac{\beta}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + h_x^2 h_y^2 \frac{\gamma}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} =$$

$$= h_x^4 \frac{\alpha}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + h_y^4 \frac{\beta}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \frac{\gamma}{2} h_x^2 h_y^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) =$$

$$= \frac{h_x^2}{12} \left(\alpha h_x^2 - 6\gamma h_y^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{h_y^2}{12} \left(\beta h_y^2 - 6\gamma h_x^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

При неравных друг другу шагах разностной сетки мы получаем схему второго порядка аппроксимации, как и схему «крест», но в зависимости от выбора коэффициентов невязка будет определяться четвертой производной лишь по одному направлению. При равных шагах сетки коэффициенты определяются системой уравнений

$$2\alpha + 2\beta + 4\gamma = 1,$$

$$\alpha = \beta,$$

$$\alpha = 6\gamma.$$

Главный член невязки определяется при этом шестью производными, схема будет иметь четвертый порядок аппроксимации.

XV.5.2. Показать самосопряженность разностного оператора, возникающего при аппроксимации двумерного уравнения Лапласа в прямоугольной области по схеме «крест».

Решение. Для того чтобы показать самосопряженность оператора, введем обычное (при исследовании эллиптических задач) скалярное произведение двух сеточных функций, определенных во всех сеточных узлах и равных нулю в узлах граничных. Такое скалярное произведение определяется как

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} v_{ij} h_x h_y.$$

Вычислим теперь скалярное произведение $(u, \Lambda_1 v_{ml} + \Lambda_2 v_{ml})$. Учитывая вид операторов, можно записать:

$$(u, \Lambda_1 v_{ml} + \Lambda_2 v_{ml}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_y^2} \right) h_x h_y =$$

$$= \frac{h_x}{h_y} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} v_{i+1,j} - 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} v_{i,j+1} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} v_{i-1,j} \right) +$$

$$+ \frac{h_y}{h_x} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} v_{i,j+1} - 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} v_{i,j} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} v_{i,j-1} \right).$$

Поменяем в первой, третьей, четвертой и шестой суммах индексы суммирования, тогда последнюю сумму в предыдущей цепочке равенств можно записать:

$$\frac{h_x}{h_y} \left(\sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=1}^{M-1} u_{k+1,j} v_{k,j} - 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} v_{i+1,j} + \sum_{k=2}^N \sum_{j=1}^{M-1} u_{k-1,j} v_{k,j} \right) + \\ + \frac{h_y}{h_x} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{l=2}^M u_{il-1} v_{i,l} - 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} v_{i,j} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-2} u_{il+1} v_{i,l} \right).$$

Теперь заметим, что на границах области функции равны нулю и что значение суммы не зависит от индекса суммирования. Мы получим далее

$$\frac{h_x}{h_y} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} u_{k+1,l} v_{k,l} - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} u_{kl} v_{k+1,l} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} u_{k-1,l} v_{k,l} \right) + \\ + \frac{h_y}{h_x} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} u_{k,l-1} v_{k,l} - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} u_{k,l} v_{k,l} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} u_{k,l+1} v_{k,l} \right) = \\ = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} v_{kl} \left(\frac{u_{k+1,l} - 2u_{k,l} + u_{k-1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l+1} - 2u_{k,l} + u_{k,l-1}}{h_y^2} \right) h_x h_y = \\ = (\Lambda_1 u_{ml} + \Lambda_2 u_{ml}, v).$$

Это означает самосопряженность разностного оператора.

XV.5.3. Решить задачу на собственные значения сеточного оператора Лапласа в прямоугольнике с краевыми условиями первого рода:

$$\frac{u_{m-1,l} - 2u_{ml} + u_{m+1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{m,l-1} - 2u_{ml} + u_{m,l+1}}{h_y^2} = \lambda u_{ml},$$

$$u_{0l} = 0, \quad u_{m0} = 0, \quad u_{Ml} = 0, \quad u_{mL} = 0,$$

$$M = X/h_x, \quad L = Y/h_y.$$

Решение. Как и для дифференциального оператора Лапласа, будем искать решение задачи методом разделения переменных. Считаем, что собственная функция задачи может быть представлена как произведение $\Phi_m \Psi_l$. Подставим это произведение в исходное уравнение, тогда мы получим

$$\varphi_l \frac{\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1}}{h_x^2} + \varphi_m \frac{\varphi_{l-1} - 2\varphi_l + \varphi_{l+1}}{h_y^2} = \lambda \varphi_m \varphi_l.$$

У задачи, конечно, есть тривиальное (нулевое) решение, которое нам не интересно. Для поиска нетривиального решения разделим обе части последнего равенства на произведение $\varphi_m \varphi_l$. Тогда получим

$$\frac{1}{\varphi_m} \frac{\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1}}{h_x^2} + \frac{1}{\varphi_l} \frac{\varphi_{l-1} - 2\varphi_l + \varphi_{l+1}}{h_y^2} = \lambda.$$

В последнем равенстве первое слагаемое зависит лишь от индекса m , второе — от l . Но это возможно в случае, если

$$\frac{1}{\varphi_m} \frac{\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1}}{h_x^2} = \lambda_m, \quad \frac{1}{\varphi_l} \frac{\varphi_{l-1} - 2\varphi_l + \varphi_{l+1}}{h_y^2} = \lambda_l, \quad \lambda = \lambda_m + \lambda_l.$$

Таким образом, мы приходим к двум задачам на собственные значения:

$$\frac{\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1}}{h_x^2} = \lambda_m \varphi_m,$$

$$\frac{\varphi_{l-1} - 2\varphi_l + \varphi_{l+1}}{h_y^2} = \lambda_l \varphi_l,$$

задачи такого типа рассматривались ранее в теме IX, задача IX.5.3. Решения этих задач имеют вид

$$\lambda_m^{(k)} = -\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2M}, \quad \varphi_m^{(k)} = \sin \frac{k\pi m}{M}, \quad k = 1, \dots, M-1,$$

$$\lambda_l^{(q)} = -\frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{q\pi}{2L}, \quad \varphi_l^{(q)} = \sin \frac{q\pi l}{L}. \quad q = 1, \dots, L-1.$$

Тогда мы получаем, что собственная функция разностного оператора $\varphi^{kq} = \varphi_m^{(k)} \varphi_l^{(q)} = \sin \frac{k\pi m}{M} \sin \frac{q\pi l}{L}$, а соответствующее собственное число есть $\lambda^{kq} = \lambda_m^{(k)} + \lambda_l^{(q)} = -\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2M} - \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{q\pi}{2L}$.

XV.5.4. Показать, что решение двумерного уравнения Пуассона по схеме «крест» с последующим решением системы сеточных уравнений методом

дом простых итераций равносильно решению на установление задачи для уравнения теплопроводности с помощью простой явной схемы.

Решение. Для записи метода простых итераций будем использовать безматричную запись. Вспомним, что одно из представлений метода простой итерации есть

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \tau \mathbf{r}^k,$$

где τ — итерационный параметр, \mathbf{r}^k — невязка предыдущего приближения.

Очевидно, что в граничных узлах сетки невязка будет равна нулю, их значения на итерациях не изменяются. Вычислим невязку в произвольном внутреннем узле области. Она есть

$$r_{i,j}^k = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_y^2} - f_{i,j} = (\boldsymbol{\Lambda}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_2)u_{i,j}^k - f_{i,j}. \text{ То-}$$

гда уточненное значение решения на следующей итерации есть

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \tau \left(\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_y^2} - f_{i,j} \right).$$

Сравнивая с расчетной формулой для решения уравнения теплопроводности с помощью явной пятиточечной схемы, убеждаемся, что расчетные формулы совпадают.

XV.5.5. Уравнение Пуассона в прямоугольной области решается по разностной схеме «крест» с условиями Дирихле. Полученная система сеточных уравнений решается затем методом Якоби. Выписать формулы итерационного метода в операторном (безматричном) представлении. Показать сходимость итерационного метода.

Решение. Запишем разностную схему для внутренних точек области, в которой решается уравнение Пуассона:

$$\frac{u_{k+1,l} - 2u_{k,l} + u_{k-1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l+1} - 2u_{k,l} + u_{k,l-1}}{h_y^2} = f_{k,l}.$$

Расставим теперь индексы итераций по методу Якоби. Значения на итерации с индексом

$$\frac{u_{k+1,l}^n - 2u_{k,l}^{n+1} + u_{k-1,l}^n}{h_x^2} + \frac{u_{k,l+1}^n - 2u_{k,l}^{n+1} + u_{k,l-1}^n}{h_y^2} = f_{k,l}.$$

Отсюда легко выражаются значения нового приближения сеточной функции во внутренних узлах сетки:

$$u_{k,l}^{n+1} = \frac{h_y^2(u_{k+1,l}^n + u_{k-1,l}^n) + h_x^2(u_{k,l+1}^n + u_{k,l-1}^n) - h_x^2 h_y^2 f_{k,l}}{2(h_x^2 + h_y^2)}.$$

Запишем теперь формулы метода Якоби с использованием невязки. Мы имеем

$$r_{kl}^n = \frac{u_{k+1,l}^n - 2u_{k,l}^n + u_{k-1,l}^n}{h_x^2} + \frac{u_{k,l+1}^n - 2u_{k,l}^n + u_{k,l-1}^n}{h_y^2} - f_{k,l},$$

и для метода Якоби

$$2 \frac{u_{k,l}^n - u_{k,l}^{n+1}}{h_x^2} + 2 \frac{u_{k,l}^n - u_{k,l}^{n+1}}{h_y^2} + r_{k,l}^n = 0,$$

$$u_{k,l}^{n+1} = u_{k,l}^n + \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right)^{-1} r_{k,l}^n.$$

Метод Якоби сходится в силу диагонального преобладания матрицы СЛАУ при записи системы в матричной форме.

XV.5.6. Уравнение Пуассона в прямоугольной области решается по разностной схеме «крест» с условиями Дирихле. Полученная система сеточных уравнений решается методом Зейделя. Выписать формулы итерационного метода в операторном (безматричном) представлении. Описать последовательность вычислений значения сеточной функции.

Решение. Для простоты предположим, что шаги разностной сетки по всем пространственным направлениям одинаковы. Метод Зейделя, учитывающий результаты вычислений на $k + 1$ итерации, записывается для рассматриваемого уравнения Пуассона

$$\frac{u_{m-1,l}^{k+1} - 2u_{ml}^{k+1} + u_{m+1,l}^k}{h^2} + \frac{u_{m,l-1}^{k+1} - 2u_{ml}^{k+1} + u_{m,l+1}^k}{h^2} = f_{ml}$$

с условиями на границе сеточной области $u_{ml}^{k+1} \Big|_{\Gamma} = U_{ml}$.

Напомним, что хотя метод Зейделя неявный, но его реализация оказывается простой, если правильно установить последовательность вычислений. В каноническом виде формулы для метода Зейделя есть

$$u_{ml}^{k+1} = \frac{1}{4}(u_{m-1,l}^{k+1} + u_{m+1,l}^i + u_{m,l-1}^{k+1} + u_{m,l+1}^i) + \frac{h^2}{4} f_{ml}.$$

Сначала из последнего уравнения, используя граничные условия $u_{01}^{k+1} = U_{01}$ и $u_{10}^{k+1} = U_{10}$, находим u_{11}^{k+1} . Затем, зная u_{11}^{k+1} , можно аналогично найти u_{12}^{k+1} и так далее. Получаем схему бегущего счета. Значения сеточной функции вычисляются в следующем порядке изменения индексов: $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, M-1), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, M-1), (M-1, 1), (M-1, 2), \dots, (M-1, M-1)$.

XV.5.7. Решить задачу на собственные значения сеточного оператора Лапласа в прямоугольнике с краевыми условиями Неймана:

$$\frac{u_{m-1,l} - 2u_{ml} + u_{m+1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{m,l-1} - 2u_{ml} + u_{m,l+1}}{h_y^2} = \lambda u_{ml},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{0l} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} u_{m0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u_{Ml} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} u_{mL} = 0,$$

$$M = X/h_x, \quad L = Y/h_y.$$

Решение. Сначала выписываем разностный оператор для решаемой задачи. Для этого нам необходимо записать аппроксимацию граничных условий Неймана с тем же порядком (вторым), что и во внутренних точках. Мы имеем

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} u_{0l} = \frac{u_{1l} - u_{0l}}{h_x} + \frac{h_x}{2} \frac{\partial^2 u_{0l}}{\partial x^2} + O(h_x^2).$$

Теперь вместо второй производной подставим в эту формулу вторую разность, порядок аппроксимации от этого не изменится:

$$0 = \frac{h_x}{2} \left(2 \frac{u_{1l} - u_{0l}}{h_x^2} + \frac{u_{-1,l} - 2u_{0l} + u_{1,l}}{h_x^2} \right) + O(h_x^2).$$

Второе слагаемое в скобках мы не можем вычислить, для этого необходимо использовать данные в фиктивных узлах. Но дифференциальное уравнение должно выполняться везде вплоть до точек границы. Тогда в силу поставленной задачи мы имеем

$$\frac{u_{-1,l} - 2u_{0l} + u_{1,l}}{h_x^2} = - \frac{u_{0,l-1} - 2u_{0l} + u_{0,l+1}}{h_y^2} + \lambda u_{0l},$$

и запись разностного уравнения на соответствующей границе будет

$$2 \frac{u_{ll} - u_{0l}}{h_x^2} - \frac{u_{0,l-1} - 2u_{0l} + u_{0,l+1}}{h_y^2} + \lambda u_{0l} = 0.$$

Аналогично на противоположенной границе имеем

$$2 \frac{u_{M-l} - u_{Ml}}{h_x^2} - \frac{u_{M,l-1} - 2u_{Ml} + u_{M,l+1}}{h_y^2} + \lambda u_{Ml} = 0.$$

Точно так же аппроксимируются производные по другому направлению на двух других границах.

Теперь решаем задачу аналогично XV.5.3 методом разделения переменных. Для всех точек определим сеточную собственную функцию. Считаем, что собственная функция задачи может быть представлена как произведение $\varphi_m \varphi_l$. Подставим это произведение в разностное уравнение во внутренних точках области, тогда мы получим

$$\varphi_l \frac{\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1}}{h_x^2} + \varphi_m \frac{\varphi_{l-1} - 2\varphi_l + \varphi_{l+1}}{h_y^2} = \lambda \varphi_m \varphi_l.$$

Для поиска нетривиального решения разделим обе части последнего равенства на произведение $\varphi_m \varphi_l$. Тогда мы получим

$$\frac{1}{\varphi_m} \frac{\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1}}{h_x^2} + \frac{1}{\varphi_l} \frac{\varphi_{l-1} - 2\varphi_l + \varphi_{l+1}}{h_y^2} = \lambda.$$

В последнем равенстве первое слагаемое зависит лишь от индекса m , второе — только от l . Но это возможно, если

$$\frac{1}{\varphi_m} \frac{\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1}}{h_x^2} = \lambda_m, \quad \frac{1}{\varphi_l} \frac{\varphi_{l-1} - 2\varphi_l + \varphi_{l+1}}{h_y^2} = \lambda_l, \quad \lambda = \lambda_m + \lambda_l.$$

Таким образом, мы приходим к двум задачам на собственные значения

$$\frac{\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1}}{h_x^2} = \lambda_m \varphi_m, \quad \frac{\varphi_{l-1} - 2\varphi_l + \varphi_{l+1}}{h_y^2} = \lambda_l \varphi_l,$$

задачи такого типа рассматривались ранее в теме IX, задача IX.5.3. От приведенного выше решения для дифференциального оператора на границах задача будет отличаться граничным условием. Применим процедуру разделения переменных к граничному условию, получим

$$2 \frac{u_{ll} - u_{0l}}{h_x^2} - \frac{u_{0,l-1} - 2u_{0l} + u_{0,l+1}}{h_y^2} + \lambda u_{0l} = 0.$$

$$\frac{2}{\varphi_0} \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{h_x^2} + \frac{1}{\varphi_l} \frac{\varphi_{l-1} - 2\varphi_l + \varphi_{l+1}}{h_y^2} = \lambda.$$

Второе слагаемое не влияет на решение задачи – оно уже учтено при рассмотрении внутренних узлов, а первое слагаемое дает граничное условие

$$\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{h_x^2} = \frac{\lambda_m}{2} \varphi_0.$$

Подобное граничное условие получается и на правой границе рассматриваемой области.

Отметим одно принципиальное отличие от задачи с граничными условиями Дирихле. В задаче с условиями Неймана существует нетривиальное решение (постоянное) для нулевого собственного значения.

Решения этих задач на собственные значения для разностного оператора имеют вид

$$\lambda_m^{(k)} = -\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2M}, \quad \varphi_m^{(k)} = \cos \frac{k\pi m}{M}, \quad k = 0, \dots, M-1,$$

$$\lambda_l^{(q)} = -\frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{q\pi}{2L}, \quad \varphi_l^{(q)} = \cos \frac{q\pi l}{L}, \quad k = 0, \dots, M-1.$$

Заметим, что исходная дифференциальная задача определена с точностью до произвольной постоянной. Обычно для однозначного определения решения дифференциальной задачи вводится дополнительное требование, например, $u(0,0) = 0$.

На уровне разностной задачи для выделения единственного решения мы требуем, чтобы при разложении по собственным функциям разностного оператора коэффициент при собственной функции, тождественно равной единице, всегда был нулевым. Тогда случай нулевого собственного числа не интересен, и оно просто отбрасывается.

Тогда мы получаем, что собственная функция разностного оператора $\varphi^{kq} = \varphi_m^{(k)} \varphi_l^{(q)} = \cos \frac{k\pi m}{M} \cos \frac{q\pi l}{L}$, а соответствующее собственное число есть $\lambda^{kq} = \lambda_m^{(k)} + \lambda_l^{(q)} = -\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2M} - \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{q\pi}{2L}$ при условии $q + k > 0$.

Разностный оператор остается отрицательно определенным, для него справедливы многие оценки для сходимости итерационных методов сечочного решения. Но сходимость от разных начальных приближений будет медленной, для быстрой сходимости следует выбирать начальное

приближение, такое, что интегральное среднее от начальной невязки по рассматриваемой области равнялось бы нулю.

XV.5.8. В современных формулировках метод релаксации рассматривается с черно-белым (шахматным, красно-черным) упорядочением узлов. Назовем все внутренние узлы сетки черными, если для них сумма значений индексов четная, все прочие внутренние узлы назовем белыми. Получить расчетные формулы метода верхней релаксации при решении задачи Дирихле по схеме «крест» для сетки с черно-белым упорядочением узлов.

Решение. Заметим, что при расчетах по схеме «крест» белые узлы соседствуют только с черными, и наоборот. Тогда с учетом этого расчетные формулы будут для всех белых узлов

$$\frac{u_{m-1,l}^i + u_{m,l-1}^i}{h^2} + \frac{u_{m,l+1}^i + u_{m+1,l}^i}{h^2} - \frac{4}{h^2} \left[\frac{u_{ml}^{i+1}}{\omega} + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) u_{ml}^i \right] = f_{ml},$$

то есть значение в белом узле ищется по значениям в черных с предыдущей итерации. Для всех черных узлов используются значения в белых на новой итерации

$$\frac{u_{m-1,l}^{i+1} + u_{m,l-1}^{i+1}}{h^2} + \frac{u_{m,l+1}^{i+1} + u_{m+1,l}^{i+1}}{h^2} - \frac{4}{h^2} \left[\frac{u_{ml}^{i+1}}{\omega} + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) u_{ml}^i \right] = f_{ml}.$$

Последовательность вычислений для такого варианта будет несколько отличаться от первоначальной формулировки метода релаксации. Сначала ищется значение на следующей итерации для всех белых узлов, затем — для черных. Такой итерационный метод очевидным образом связан со схемой «классики» для решения параболических уравнений.

XV.5.9. Пусть число внутренних узлов равно 9. Выписать в матричном виде сеточные уравнения при классической формулировке схемы «крест» и для случая черно-белого упорядочения узлов. Для простоты рассмотреть вариант, когда значения функции на границе области равны нулю.

Решение. В «классическом» варианте послойной нумерации сеточная система есть

$$-\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

где $\mathbf{u} = (u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{31}, u_{32}, u_{33})^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f} = -h^2(f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^T,$$

а в случае черно-белого упорядочения узлов сетки

$$-\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} = (u_{11}, u_{13}, u_{22}, u_{31}, u_{33}, u_{12}, u_{21}, u_{23}, u_{32})^T,$$

$$\mathbf{f} = -h^2(f_{11}, f_{13}, f_{22}, f_{31}, f_{33}, f_{12}, f_{21}, f_{23}, f_{32})^T.$$

Нетрудно видеть, что тем самым матрица приведена к виду, в котором для нее можно искать оптимальное значение параметра верхней релаксации (см. тему II).

XV.5.10. Уравнение Пуассона в квадрате со стороной 1 решается по разностной схеме «крест». Получить формулы ПТИМ. Оценить сходимость ПТИМ. Найти количество итераций, необходимое для того, чтобы невязка начального приближения уменьшилась в $1/\epsilon$ раз.

Решение. Рассмотрим разностную аппроксимацию уравнения Пуассона по схеме «крест», переписав схему в эквивалентном виде:

$$\mathbf{A}u_{ml} = \frac{1}{h} \left(\frac{u_{ml} - u_{m-1,l}}{h} + \frac{u_{ml} - u_{m,l-1}}{h} \right) - \frac{1}{h} \left(\frac{u_{m+1,l} - u_{ml}}{h} + \frac{u_{m,l+1} - u_{ml}}{h} \right).$$

Тем самым представили оператор \mathbf{A} как сумму двух операторов $\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{U}$, где

$$\mathbf{R}u_{ml} = \frac{1}{h} \left(\frac{u_{ml} - u_{m-1,l}}{h} + \frac{u_{ml} - u_{m,l-1}}{h} \right),$$

$$\mathbf{U}u_{ml} = -\frac{1}{h} \left(\frac{u_{m+1,l} - u_{ml}}{h} + \frac{u_{m,l+1} - u_{ml}}{h} \right).$$

При этом матрица оператора \mathbf{R} является нижней треугольной, а матрица \mathbf{U} — верхней треугольной (в этом легко убедиться, записав рассматриваемую систему в виде СЛАУ). Можно также показать, что оператор \mathbf{U} является сопряженным оператором к \mathbf{R} , т.е. $\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{R}^*$. Сопряженность операторов показывается аналогично исследованию на самосопряженность разностного оператора Лапласа, см. задачу XV.5.2.

Алгоритм вычисления решения будет таков. На первом этапе вычисляется вектор невязки

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{Au}^k - \mathbf{f},$$

затем выполняется первый этап итерации

$$\tilde{u}_{ml} - \frac{\omega}{h} \left(\frac{\tilde{u}_{m+1,l} - \tilde{u}_{ml}}{h} + \frac{\tilde{u}_{m,l+1} - \tilde{u}_{ml}}{h} \right) = \mathbf{Bu}_{ml}^k - \tau r_{ml}^k.$$

Уравнения этого этапа нужно начинать решать от точки с индексами $m = N - 1$, $l = N - 1$ с учетом того, что на границе сеточной области невязка равна нулю и, следовательно, значения функции известны. Таким образом, система решается начиная с правого верхнего угла области вплоть до левого нижнего угла. На этом этапе получается схема «бегущего счета».

Второй этап метода

$$u_{ml}^{i+1} + \frac{\omega}{h} \left(\frac{u_{m,l}^{i+1} - u_{m-1,l}^{i+1}}{h} + \frac{u_{ml}^{i+1} - u_{m,l-1}^{i+1}}{h} \right) = \tilde{u}_{ml}.$$

Система линейных уравнений, соответствующая второму этапу, решается аналогично методом бегущего счета, но вычисления здесь начинаются в точке $m = 1$, $l = 1$ — левом нижнем углу расчетной области и заканчиваются в правом верхнем углу.

Для обоснования сходимости ПТИМ воспользуемся теоремой 2. Если, с учетом спектра разностного оператора, выбрать

$$\delta = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} = \lambda_{\min}(\mathbf{A}), \quad \Delta = \frac{8}{h^2} \geq \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} = \lambda_{\max}(\mathbf{A}).$$

то можно положить для τ и ω

$$\omega = \frac{h^2}{4 \sin \frac{\pi h}{2}} \approx \frac{h}{2\pi}, \quad \tau = \frac{h^2 (1 + \sin \frac{\pi h}{2})}{\sin \frac{\pi h}{2} (1 + 3 \sin \frac{\pi h}{2})} \approx \frac{2h}{\pi}.$$

Оценка количества итераций для этого метода дает

$$k \approx \frac{\ln \varepsilon^{-1}}{2\pi h} = \frac{N}{2\pi} \ln \varepsilon^{-1}.$$

Примечание. Использование в ПТИМ набора чебышёвских итерационных параметров для ускорения сходимости приводит к следующему результату. Расчетные формулы для метода таковы:

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\tau_{k+1}} + \mathbf{A} \mathbf{u}^k = \mathbf{f},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{R}^*, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{E} + \omega \mathbf{R}^*)(\mathbf{E} + \omega \mathbf{R}),$$

где чебышёвский набор параметров определяется по априорной оценке необходимого числа итераций K . Параметры алгоритма: $\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$,

$$\tau_j = \frac{\tau_0}{1 + \eta t_j}, \quad \eta = \frac{1 - \gamma_1/\gamma_2}{1 + \gamma_1/\gamma_2}, \quad t_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2K}, \quad j = 1, \dots, K.$$

Для рассмотренной схемы «крест» границы спектра оцениваются как $\gamma_1 \approx 2 \sin \frac{\pi h}{2}$, $\gamma_2 \approx 1 + \sin \frac{\pi h}{2}$, а число обусловленности исходной системе

мы $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \approx \pi h$. Оценка количества итераций даст результат

$$K = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \ln \varepsilon^{-1}.$$

XV.5.11. Метод регуляризации. Найти численно решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = -2$ в прямоугольной области $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$ с граничными условиями $u(0, y) = 1$, $u(x, Y) = 1 + x^2$, $u(X, y) = (1 + X^2)y/Y$, $u(x, 0) = 0$. Использовать схему «крест».

Решение. В точке $(0, 0)$ имеется разрыв граничных условий. Это приводит к наличию особенности в решении. Такая особенность носит локальный характер, ее влияние сильно уменьшается при удалении от

точки разрыва. Схема «крест» в «чистом» виде эту особенность учитывать не будет. Для аккуратного учета особенности будем искать решение в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y).$$

Здесь w — гармоническая функция, содержащая особенность и удовлетворяющая граничным условиям в окрестности точки разрыва. Из курса ТФКП известно, что функция $w_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ — гармоническая,

$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow 0$ при $y=0, x \rightarrow 0$ и $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ при $x=0, y \rightarrow 0$. Тогда решение разумно искать в виде $u(x, y) = v(x, y) + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$. Для функции v получаем задачу

$$\Delta v = -2$$

в прямоугольной области $0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y$ с граничными условиями

$$v(0, y) = 0, \quad v(x, Y) = 1 + x^2 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{x}\right),$$

$u(X, y) = (1 + X^2)y / Y - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{X}\right), \quad v(x, 0) = 0$. Эта задача не содержит особенностей, и схема «крест» строится для нее обычным образом.

XV.6. Задачи на доказательство

XV.6.1. Доказать леммы 1, 2 (для схемы «крест») и теорему 1.

XV.6.2. Доказать сеточный принцип максимума для разностной схемы, построенной в задаче XV.5.1.

XV.6.3. Доказать, что разностный оператор, построенный в задаче XV.5.1, является самосопряженным. Найти спектр этого оператора.

XV.6.4. Доказать, что метод простых итераций, записанный через невязки, является более экономичным, то есть требует меньшее число арифметических действий для выполнения каждой итерации, по сравнению с канонической записью метода.

XV.6.5. Известно, что собственные функции разностного оператора определены с точностью до постоянного множителя. Доказать, что если собственные функции задачи XV.5.3 определить как

$\varphi_m^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{M h_x}} \sin \frac{k \pi m}{M}$, $\varphi_l^{(q)} = \sqrt{\frac{2}{L h_y}} \sin \frac{q \pi l}{L}$, то собственные функции сеточного оператора Лапласа в прямоугольнике с краевыми условиями первого рода образуют ортонормированную систему в смысле скалярного произведения $(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} v_{ij} h_x h_y$.

XV.6.6. Доказать, что при красно-черном (бело-черном, шахматном) упорядочивании узлов одна итерация метода Зейделя решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате эквивалентна двум итерациям метода Якоби, поэтому метод Зейделя сходится ровно в два раза быстрее метода Якоби.

XV.6.7. Рассматривается разностный оператор, возникающий при решении уравнения Лапласа по схеме «крест»

$$\frac{u_{m-1,l} - 2u_{ml} + u_{m+1,l}}{h^2} + \frac{u_{m,l-1} - 2u_{ml} + u_{m,l+1}}{h^2} = -\mathbf{A}u_{ml},$$
 с условиями Дирихле на границе сеточной области, тогда в граничных точках $u_{ml}|_{\Gamma} = \mathbf{A}u_{ml}$. Доказать, что величина $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ является нормой сеточной функции.

Такая норма называется энергетической нормой, энергетическая норма порождается любым самосопряженным положительным оператором.

XV.6.8. Рассматривается разностный оператор, возникающий при решении уравнения Лапласа в квадрате по схеме «крест» с равным количеством узлов по каждому направлению,

$$\frac{u_{m-1,l} - 2u_{ml} + u_{m+1,l}}{h^2} + \frac{u_{m,l-1} - 2u_{ml} + u_{m,l+1}}{h^2} = -\mathbf{A}u_{ml},$$
 с условиями Дирихле на границе сеточной области, тогда в граничных точках $u_{ml}|_{\Gamma} = \mathbf{A}u_{ml}$. Пусть сеточная функция \mathbf{v}^1 не совпадает ни с одной собственной функцией оператора \mathbf{A} . Определим последовательность функций $\mathbf{v}^2 = \mathbf{A}\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k = \mathbf{A}\mathbf{v}^{k-1}$. Доказать линейную независимость системы функций $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$, если $k \leq (M+1)^2$.

XV.7. Теоретические задачи

XV.7.1. Для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике методом неопределенных коэффициентов построить схему максимально возможного порядка аппроксимации на девятиточечном шаблоне (см. задачу XV.5.1). Считать, что $h_x \neq h_y$. Как будет меняться порядок аппроксимации при $h_x = h_y = h$?

XV.7.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа решается в кольце $R_1 < r < R_2$ с граничными условиями $u(R_1, \varphi) = f(\varphi)$, $u(R_2, \varphi) = g(\varphi)$. Здесь f, g — произвольные 2π -периодические функции. Построить аналог разностной схемы «крест» для решения этой задачи. Исследовать построенную разностную схему на аппроксимацию и устойчивость. Оператор Лапласа в цилиндрических координатах записывается в виде

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \varphi}.$$

XV.7.3. Уравнение Пуассона в прямоугольной области решается по разностной схеме «крест» с условиями Дирихле. Полученная система се-точных уравнений решается методом Якоби. Выписать формулы итерационного метода в операторном (безматричном) представлении. Показать сходимость итерационного метода.

XV.7.4. Задача Неймана для уравнения Пуассона $\Delta u = f(r, \varphi)$ решается в круге радиуса R . Граничное условие записано в виде $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = g(\varphi)$.

Здесь f, g — произвольные 2π -периодические функции аргумента φ . Функция f непрерывна внутри круга. Построить разностную схему для решения поставленной задачи на пятиточечном шаблоне («крест») в полярных координатах.

XV.7.5. Задача Дирихле для уравнения $\operatorname{div} k(x, y) \operatorname{grad} u(x, y) = f(x, y)$ решается в прямоугольной области. Известно, что $k(x, y) \geq k_0 > 0$. Построить разностную схему для решения задачи на пятиточечном шаблоне и исследовать ее на устойчивость.

XV.7.6. Задача Дирихле для уравнения $\operatorname{div} k(x, y) \operatorname{grad} u(x, y) = f(x, y)$ решается в прямоугольной области. Известно, что $k(x, y) \geq k_0 > 0$. Построить разностную схему для решения задачи на девятиточечном шаблоне.

XV.7.7. Построить аппроксимацию уравнения Пуассона на пятиточечном шаблоне $\mathbb{W} = \{(m+1, l+1), (m-1, l+1), (m+1, l-1), (m-1, l-1), (m, l)\}$ на сетке с равными шагами по обоим направлениям. Каков порядок аппроксимации построенной схемы?

XV.7.8. Бесконечная плоскость покрыта сеткой из правильных треугольников со стороной h . Все треугольники пронумерованы, для каждого известны номера соседей, имеющих с данным общие ребра или общие вершины. Построить разностную аппроксимацию оператора Лапласа а) на сетке из центров этих правильных треугольников, б) на сетке из вершин этих правильных треугольников.

XV.7.9. Бесконечная плоскость покрыта сеткой из правильных шестиугольников со стороной h . Все шестиугольники пронумерованы, для каждого известны номера соседей, имеющих с данным общие ребра. Построить аппроксимацию оператора Лапласа а) на сетке из центров этих правильных шестиугольников, б) на сетке из вершин этих правильных шестиугольников.

XV.7.10 (А. С. Холодов). Данна замкнутая выпуклая область на плоскости. Внутри этой области произвольно расположены точки — узлы разностной сетки. Координаты всех узлов известны. Методом неопределенных коэффициентов построить устойчивую разностную схему наивысшего порядка аппроксимации в произвольном узле, приближающую уравнение Лапласа.

Полное решение задачи в более общей постановке см. в [68].

XV.7.11. Построить разностную схему для решения задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} u \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

в прямоугольной области $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$ с граничными условиями $u(0, y) = 1$, $u(x, Y) = 1 + x^2$, $u(X, y) = 1 + X^2 y / Y$, $u(x, 0) = 1$.

XV.7.12. Выписать формулы методов Якоби, Зейделя и верхней релаксации при решении уравнения Пуассона в прямоугольнике с помощью девятиточечной разностной схемы. Позволяет ли в этом случае шахматное упорядочивание узлов сделать вывод об эквивалентности двух итераций метода Якоби одной итерации метода Зейделя и найти оптимальный параметр метода верхней релаксации?

XV.7.13. Найти спектральный радиус матрицы перехода (показатель сходимости) метода Якоби и метода Зейделя решения задач Неймана и Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате. Схема строится

на квадратной сетке, содержащей N интервалов по каждому направлению.

XV.7.14. Найти спектральный радиус матрицы перехода (показатель сходимости) метода Якоби и метода Зейделя решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике на прямоугольной сетке, содержащей N_x и N_y интервалов по соответствующему направлению.

Указание. Для метода Зейделя спектральный радиус найти в случае шахматного упорядочивания узлов.

XV.7.15. Найти оптимальный параметр метода последовательной верхней релаксации решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате на квадратной сетке, содержащей N интервалов по каждому направлению, при красно-черном (бело-черном, шахматном) упорядочивании узлов (см. задачу VI.5.8).

XV.7.16. Найти оптимальный параметр метода последовательной верхней релаксации решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике на прямоугольной сетке, содержащей N_x и N_y интервалов по соответствующему направлению, при красно-черном (бело-черном, шахматном) упорядочивании узлов (см. задачу VI.5.9).

XV.7.17. Найти собственные функции и собственные числа разностного оператора Гельмгольца для аппроксимации дифференциального оператора Гельмгольца $\mathbf{L}u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u + k^2 u = 0$ в единичном квадрате с условиями Дирихле.

XV.7.18. Решается задача Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате. Используется схема «крест». Найти спектральный радиус матрицы перехода при использовании а) метода простых итераций для использования чебышёвского трехслойного ускорения, б) переменно-треугольного итерационного метода. Доказать, что в обоих случаях спектр действительный.

XV.8. Практические задачи

XV.8.1. Решить задачу Дирихле в квадрате для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$f(x, y) = -32(x(1-x) + y(1-y)), \quad u|_{x,y \in \Gamma} = 0$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ В МФТИ

Использовать пятиточечную аппроксимацию оператора Лапласа. Исследовать зависимость числа итераций, обеспечивающих заданную точность, от количества интервалов сетки по одному направлению.

Использовать:

- а) метод простой итерации с оптимальным параметром;
- б) метод простой итерации с набором чебышёвских параметров;
- в) метод простой итерации с трехслойным чебышёвским ускорением;
- г) метод Якоби;
- д) метод Зейделя при последовательной нумерации узлов;
- е) метод Зейделя при шахматной нумерации узлов;
- ж) метод последовательной верхней релаксации при последовательной нумерации узлов, при этом оптимальный параметр подобрать эмпирически. Зависит ли оптимальный параметр от разбиения?
- з) метод последовательной верхней релаксации при шахматном упорядочивании с оптимальным параметром;
- и) метод переменных направлений;
- к) попеременно-треугольный метод;
- л) попеременно-треугольный метод с трехслойным чебышёвским ускорением.

XV.8.2. Построить ПТИМ для разностной схемы на симметричном 9-точечном шаблоне. Использовать его для решения задачи XV.8.1.

XV.8.3. Для решения двумерного уравнения Пуассона использован итерационный метод

$$\frac{u_{m-1,l}^k - 2u_{ml}^{k+1} + u_{m+1,l}^k}{h^2} + \frac{u_{m,l-1}^k - 2u_{ml}^{k+1} + u_{m,l+1}^k}{h^2} = f_{ml},$$

если $k + l + m$ — четно,

$$\frac{u_{m-1,l}^{k+1} - 2u_{ml}^{k+1} + u_{m+1,l}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{m,l-1}^{k+1} - 2u_{ml}^{k+1} + u_{m,l+1}^{k+1}}{h^2} = f_{ml},$$

если $k + l + m$ — нечетно. Описать алгоритм расчета. Исследовать метод на сходимость. Решить этим методом задачу XV.8.1.

Указание. Записать метод в терминах невязок.

XV.9. Задачи для самостоятельной реализации

XV.9.1. Будем рассматривать только часто встречающиеся краевые задачи для поля ϕ , зависящего от двух пространственных переменных (x,y) , удовлетворяющего уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = -S(x, y).$$

В задачах электростатики φ — потенциал, а S соответствует плотности заряда; в стационарной тепловой задаче φ — температура, S — локальная скорость выделения или поглощения тепла. Будут рассматриваться граничные условия Дирихле, в которых значения φ задаются на некоторой замкнутой кривой в плоскости (x, y) и, возможно, на некоторых дополнительных кривых внутри области.

Реализовать численные алгоритмы, основанные

- 1) на непосредственной аппроксимации дифференциального оператора и решении системы сеточных уравнений методом Гаусса;
- 2) применения итерационного метода. Использовать метод простых итераций и ПТИМ.

а) Для уравнения Лапласа, $S(x, y) \equiv 0$, рассмотреть численное решение для простейших граничных условий (типа констант или линейных функций).

б) Для уравнения Пуассона вычислить разность потенциалов между двумя зарядами как функцию расстояния между ними и сравнить полученные значения с аналитическими.

в) Изменить программу так, чтобы можно было задавать на некоторых внешних и внутренних границах условия Неймана. Изучить решения с такими граничными условиями.

г) Вместо граничных условий Дирихле задаются периодические граничные условия. Тогда потенциалы на левой и правой, а также на верхней и нижней границах области произвольные, но равные по величине друг другу. Т. е. для всех i и j $\varphi_{i1} = \varphi_{iN}$; $\varphi_{1j} = \varphi_{Nj}$. Уравнения с такими условиями описывают пространственно-периодическое распределение плотности заряда в кристалле. Модифицировать программу и решить уравнение Пуассона с этими граничными условиями.

2. Для решения приведенной выше задачи с различными граничными условиями реализовать алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье (алгоритмы такого преобразования описаны, например, в [24, 61]).

XV.9.2 (Л. А. Чудов). Модель малярной кисти. Подробнее об этой задаче и других примерах установившихся течений жидкости в [69, с. 232–240].

При окраске стены кистью часть краски остается на стенке в виде слоя за кистью. Рассмотрим приближенную модель процесса. Предположим, что кисть состоит из большого числа параллельных и равноот-

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ В МФТИ

стоящих друг от друга пластин, которые совместно скользят по плоской стенке, в направлении их контакта со стенкой вдоль оси x . Предположим, что пластины имеют бесконечные размеры в направлениях осей x и z , так что результирующее движение представляет собой установившееся течение одного направления. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Здесь u — скорость течения жидкости.

Оси координат удобно связать с пластинами, тогда граничные условия для течения в канале между двумя соседними пластинами будут

$$u = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b, 0 < z < \infty,$$

$$u = U \text{ при } z = 0, 0 < y < b.$$

а) Получить численное решение поставленной задачи. Сравнить результат с точным решением

$$u(y, z) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n} e^{-n\pi z/b} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Объяснить, как реализован алгоритм для вычисления значений функции точного решения.

б) Получить оценку толщины слоя жидкости, который будет оставаться на стенке позади кисти, при предположении, что все пластины имеют заднюю кромку при одном и том же значении x . Использовать формулу для объемного расхода жидкости, вытекающей из одного канала: $Q = \int_0^b \int_0^\infty u dy dz$. Сравнить со значением для точного решения $Q = AU b^2$,

$$A \approx 0.27.$$

в) Указать недостатки рассмотренной модели. Определить характер их влияния на решение.

XV.9.3. Стационарное движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрических трубах. Рассмотрим движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе произвольного поперечного сечения.

Обозначая градиент давления $\frac{\partial p}{\partial x} = -G(t)$, получим уравнение движения

в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{G}{\mu},$$

здесь μ — коэффициент вязкости, u — скорость течения жидкости. Требуется решить уравнение, подчиняющееся граничным условиям, с помощью которых задаются градиент давления и значения u при определенных y и z .

1. Решить задачу для трубы круглого поперечного сечения, для которой $u = 0$ на границе трубы, т. е. при $r = \sqrt{y^2 + z^2} = a$. Сравнить численные результаты с точным решением $u = \frac{G}{4\mu}(a^2 - r^2)$. Получить численно величину объемного расхода жидкости через произвольное сечение $Q = 2\pi \int_0^a u r dr$, сравнить ее с точным значением $Q = \frac{\pi a^4 G}{8\mu}$. Предложить, как можно использовать данную величину для контроля точности численного расчета.

2. Получить решение задачи для трубы эллиптического поперечного сечения с полуосами b (по оси y) и c (вдоль оси z). Сравнить результат численного решения с точным распределением скорости

$$u(y, z) = \frac{G}{2\mu(b^{-2} + c^{-2})} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right).$$

Самостоятельно вывести величину объемного расхода жидкости и сравнить ее точное значение с численными данными.

3. Вычислить распределение скорости в трубе прямоугольного поперечного сечения со сторонами $y = mb$, $z = mc$ (для определенности пусть $c > b$). Получить точное решение для скорости и расхода, сравнить его с численным значением.

Указание. Для получения точного решения учесть, что разность $u - \frac{G}{2\mu} \frac{b^2 - y^2}{b^2}$ представляет собой четную функцию как от y , так и от z , которая удовлетворяет уравнению Лапласа и равна 0 при $y = mb$.

XV.9.4 (М. В. Мещеряков). **Гравитационные волны.** Примером нестационарных течений жидкости являются волновые движения с колебаниями отдельных частиц. Рассмотрим волны на поверхности жидкости, возникающие в результате того, что поверхность выведена из состояния равновесия и колеблется под действием силы тяжести. Такие волны называются *гравитационны-*

ми. Гравитационные волны описываются уравнениями нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости.

Пусть начальное возмущение заключается в отклонении жидкости от состояния равновесия. Предположим, что этим начальным возмущением являются мгновенные добавочные давления, вызванные, например, порывом ветра. Возникающие при этом движения будут потенциальными, $\mathbf{V} = \nabla\phi$. Здесь мы ввели новую функцию ϕ — потенциал скорости. Уравнение неразрывности переходит тогда в уравнение Лапласа для потенциала

$$\Delta\phi = 0. \quad (9.1)$$

Уравнения движения Эйлера приводятся к интегралу Коши–Лагранжа следующего вида:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t), \quad (9.2)$$

где gz представляет собой потенциал сил тяжести.

Пусть течение медленное, тогда квадратом скорости в уравнении (9.2) можно пренебречь. Кроме того, так как ϕ определяется с точностью до произвольной функции, зависящей от времени, то можно (9.2) переписать в виде

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial\phi}{\partial t} - gz \text{ при } z = 0. \quad (9.3)$$

Границные условия. Предположим, что жидкость ограничена снизу непроницаемой поверхностью. На этой поверхности ставим условие непроницаемости на нормальную компоненту скорости: $V_n = \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$. Непроницаемая свободная поверхность (граница жидкости с газом) будет плоскостью, которую примем за координатную плоскость xy . На свободной поверхности жидкости давление p равно давлению газа над жидкостью (p_0).

Границное условие для скорости на свободной поверхности:

$$V_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad \text{при } z = 0. \quad (9.4)$$

Начальные условия. Пусть возмущенная поверхность в начальный момент ($t = 0$) определяется уравнением $z = f(x, y)$. Тогда при $t = 0$, $z = 0$ справедливо соотношение $\frac{\partial\phi}{\partial t} = -gf(x, y)$. Начальные скорости

возникают в результате действия импульса давления, равного $\int_0^\tau pd\tau$.

Потенциал скорости в начальный момент можно представить в виде

$$\varphi = -\frac{1}{\rho} f_1(x, y).$$

Плоские волны. Рассмотрим волновое движение, называемое плоскими волнами. В этом случае свободная поверхность будет представлять собой цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси z . Пусть жидкость ограничена плоским горизонтальным дном, отстоящим от свободной поверхности на расстояние h . Тогда для искомого потенциала скорости $\varphi(x, z, t)$ справедливы уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, 0, t)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial z} = 0.$$

Начальные условия заменим требованием периодичности по времени t и координате x искомого решения.

1. Постройте аналитическое решение поставленной задачи, представив искомую функцию в виде $\varphi = \Theta(t)X(x)Z(z)$. Покажите, что полученное решение представляет собой результат наложения четырех колебаний.

2. Получите численное решение и сравните его с аналитическим.

Определите профиль волны $\zeta(x, y, t)$, используя соотношение

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t}.$$

Прогрессивные волны. Проведите численное исследование частного случая плоских волновых движений, который определяется потенциалом скорости вида

$$\varphi = Ae^{kz} \cos(kx - \sigma t).$$

Профиль волны в этом случае имеет вид

$$\zeta = -\frac{A\sigma}{g} \sin(kx - \sigma t).$$

Опишите основные закономерности рассматриваемого движения жидкости. Чему равен период волны, частота колебаний? Выведите формулу для траекторий частиц жидкости и сравните ее на графике с траекторией, получаемой в численном решении.

XV.9.5. Гравитационные волны — 2. Задача о распространении гравитационных волн уже не имеет точного решения, если мы учитываем сложный рельеф дна водоема. Построить численное решение задачи о распространении гравитационной волны с условиями периодичности, задавая форму дна водоема. Пусть жидкость ограничена дном, отстоящим от свободной поверхности на расстояние $h = h(x)$. Здесь $h(x)$ — гладкая периодическая функция.

XV.9.6. Область со входящим углом. Решается уравнение Пуассона

$$\Delta u = -2$$

в квадратной области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ с вырезанным квадратом $0,5 \leq x \leq 1$, $0,5 \leq y \leq 1$. Граничные условия для задачи

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad \frac{\partial u(0,5, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0,5)}{\partial y} = 0, \quad u(1, y) = 0,$$

$u(x, 0) = 0$. Эта задача содержит особенность, связанную с появлением в расчетной области входящего угла (под входящим углом понимается внутренний угол в области интегрирования, величина которого больше, чем π). Известно, что у решений эллиптических уравнений в окрестности входящего угла возникает особенность. Предложить метод регуляризации. Реализовать вычисления по схеме «крест» и по схеме с симметричным девятиточечным шаблоном.

О методах регуляризации в областях со входящими углами см., например, [70].

XV.9.7. Решается уравнение Пуассона

$$\Delta u = -2$$

в квадратной области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ с вырезанным кругом $(x - 0,5)^2 - (y - 0,5)^2 = \frac{1}{9}$. Граничные условия для задачи $u(0, y) = 0$,

$u(x, 1) = 0$, $u(0, y) = 0$, $u(x, 1) = 0$. На границе круга $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Реализовать вычисления по схеме «крест» и по схеме с симметричным девятиточеч-

ным шаблоном. Как следует реализовать граничные условия на криволинейном участке границы?

XV.10. Библиографический комментарий

О свойствах разностных операторов при аппроксимации эллиптических уравнений и методах решения сеточных уравнений подробнее можно прочитать в [24, 71–73]. О методе неопределенных коэффициентов применительно к построению разностных схем для уравнений и систем эллиптического типа можно прочитать в статье [68]. Среди «сверхбыстрых» итерационных методов в последнее время выделяют семейство многосеточных методов. Такие методы связаны с именем Р. П. Федоренко [74]. Об основных идеях реализации методов этого класса можно прочитать в [67]. Основы теории многосеточных методов описаны в сборнике [75]. Рекомендуем также учебный курс по многосеточным методам [76].

Ответы к задачам темы IX. Построение общего решения разностных задач

IX.7.1. $y_n = -5^n / 3 + \alpha \cdot 2^n$.

IX.7.2. $y_n^* = -n \cdot 2^n / 2 = -n \cdot 2^{n-1}$.

IX.7.3. 1) $y_n^* = 1$. 2) $y_n^* = n+1$. 3) $y_n^* = n^2 + 2n + 3$. 4) $y_n^* = -n^2$.

IX.7.4. 1) $\bar{y}_n = \alpha(1/2)^n + \beta(1/3)^n$. 2) $\bar{y}_n = \alpha(2)^n + \beta(1/2)^n$.

3) $\bar{y}_n = 3^n \left(\gamma_1 \cos \frac{2\pi n}{3} + \gamma_2 \sin \frac{2\pi n}{3} \right)$.

IX.7.5. . $y_n = (1/2)^n$.

IX.7.6. Ответ. $y_{1000} = -(1-\sqrt{5})/2)^{1001}/\sqrt{5} + ((1+\sqrt{5})/2)^{1001}/\sqrt{5}$, после собирания членов можно преобразовать к виду $y_{1000} = 2^{-1000} \sum_{k=0}^{500} C_{1001}^{2k+1} 5^k$.

IX.7.8. 1) $y_n^* = -2$. 2) $y_n^* = -2n$. 3) $y_n^* = 6 \cdot 3^n / 5$. 4) $y_n^* = \cos n / (2 \cos 1 - 5/2)$.

IX.7.9. Характеристическое уравнение

$$7q^5 - 2q^4 - (8\alpha + 5)q^3 + (8\alpha + 3)q^2 - 2q - 1 = 0,$$

$$\text{или } (q-1)(7q^4 + 5q^3 - 8\alpha q^2 + 3q + 1) = 0.$$

Система условий теоремы Шура–Кона на коэффициенты характеристического уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 3 > 1, \\ 8 > |2 + 9\alpha|, \quad 10/9 < \alpha < 0. \\ |6 - 9\alpha| > |6 + 3\alpha|, \end{cases}$$

На границе при $\alpha = 0$ есть корень -1 , не совпадающий с 1 , остальные корни меньше 1 , при $\alpha = 10/9$ есть пара комплексно-сопряженных корней, по модулю равных единице. Поэтому окончательный ответ $\frac{10}{9} \leq \alpha \leq 0$.

IX.7.10. Характеристическое уравнение

$$13q^5 + (13 + \alpha)q^4 + (\alpha + 7)q^3 + (\alpha + 7)q^2 + (\alpha + 1)q + 1 = 0,$$

$$\text{или } (q+1)(13q^4 + \alpha q^3 + 7q^2 + \alpha q + 1) = 0.$$

Система условий теоремы Шура–Кона на коэффициенты характеристического уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} |\alpha| < 14, \\ |196 - \alpha^2| > |98 - \alpha^2|, \quad |\alpha| < 10.5. \\ |294 - 2\alpha^2| > 7|\alpha|, \end{cases}$$

На границе при $\alpha = 10.5$ есть кратный корень -1 , остальные корни меньше 1 , при $\alpha = -10.5$ корень -1 , остальные корни меньше единицы. Поэтому окончательный ответ $-10.5 \leq \alpha < 10.5$.

IX.7.11. В данной задаче необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения были по абсолютной величине больше либо равны единице и на границе не было бы кратных корней. Переходя к переменной $t = 1/q$, получим уравнение, для которого можно применять теорему Шура–Кона. Система неравенств для α из условий теоремы Шура–Кона на коэффициенты характеристического уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} |\alpha| < 10, \\ |100 - \alpha^2| > |50 - \alpha^2|, \quad |\alpha| < 7.5. \\ |150 - 2\alpha^2| > |5\alpha|, \end{cases}$$

На границе при $\alpha = 7.5$ есть кратный корень -1 , остальные корни меньше 1 , при $\alpha = -7.5$ корень -1 , остальные корни меньше единицы. Поэтому окончательный ответ $-7.5 \leq \alpha < 7.5$.

IX.7.12. 1) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \sqrt{12}^n + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \sqrt{12}^n;$

2) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^n + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} 2^n + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} n + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} (1+i)^n + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} (1-i)^n$, или, выделяя действительную часть,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \sqrt{2}^n \cos \frac{\pi n}{4} + \left(-\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \sqrt{2}^n \sin \frac{\pi n}{4};$$

4) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-2)^n + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^n.$

- IX.7.13.** 1) $y_n = \alpha(1/2)^n + \beta(1/7)^n + 2^{n+1}$. 2) $y_n = \alpha(-1/3)^n + \beta(1/5)^n + (1/3)^n$.
 3) $y_n = \alpha(1/3)^n + \beta(3)^n - 2^{-n+1}$. 4) $y_n = \alpha(1/4)^n + \beta(1/3)^n + 5n(1/3)^n$.
 5) $y_n = \alpha(1/2)^n + \beta(-1/5)^n + n^2 - 3n + 4$.

IX.7.14. 1) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1-3\sqrt{3}i \end{pmatrix} (3+3\sqrt{3}i)^n + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1+3\sqrt{3}i \end{pmatrix} (3-3\sqrt{3}i)^n$,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) 6^n \cos \frac{\pi n}{3} + \left(-\beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) 6^n \sin \frac{\pi n}{3}.$$

2) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \end{pmatrix} (2+2i)^n + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \end{pmatrix} (2-2i)^n$,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) (2\sqrt{2})^n \cos \frac{\pi n}{4} + \left(-\beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) (2\sqrt{2})^n \sin \frac{\pi n}{4}.$$

3) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} (-3+\sqrt{3}i)^n + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix} (-3-\sqrt{3}i)^n$,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) (2\sqrt{3})^n \cos \frac{5\pi n}{6} + \left(-\beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) (2\sqrt{3})^n \sin \frac{5\pi n}{6}.$$

4) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix} (-2+2\sqrt{3}i)^n + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{3}i \end{pmatrix} (-2-2\sqrt{3}i)^n$,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) 4^n \cos \frac{2\pi n}{3} + \left(-\beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) 4^n \sin \frac{2\pi n}{3}.$$

5) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} (-3+3i)^n + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} (-3-3i)^n$,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) (3\sqrt{2})^n \cos \frac{3\pi n}{4} + \left(-\beta \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) (3\sqrt{2})^n \sin \frac{3\pi n}{4}.$$

6) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} (3+\sqrt{3}i)^n + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix} (3-\sqrt{3}i)^n$,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) (2\sqrt{3})^n \cos \frac{\pi n}{6} + \left(-\beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) (2\sqrt{3})^n \sin \frac{\pi n}{6}.$$

$$\text{IX.7.15. 1) } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} 2^n + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} 3^n + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} n^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^n + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} 7^n - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} 2^n - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-1)^n + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^n + n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^n.$$

$$4) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} (-1)^n + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-5)^n + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} 3^n - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$5) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 5^n + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right).$$

$$6) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-3)^n + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} n + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

$$7) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 3^n + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right).$$

$$8) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} (-4)^n + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} n^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$9) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (-1)^n + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} (-4)^n + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} 3^n + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$10) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} 4^n + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right).$$

IX.7.16. 1) Для определения G_k имеем три группы уравнений:

$$\begin{cases} G_{k-1} - 2G_k + G_{k+1} = 0, & k \leq -1, \\ G_{-1} - 2G_0 + G_1 = 1, & k = 0, \\ G_{k-1} - 2G_k + G_{k+1} = 0, & k \geq 1. \end{cases}$$

Общие решения первой и третьей групп уравнений имеют общий вид, отличающийся только постоянными: $\alpha^- + \beta^- n$ при $n \leq 0$ и $\alpha^+ + \beta^+ n$ при $n \geq 0$. Так как G_0 входит во все три группы уравнений, то из полученных соотношений имеем $G_0 = \alpha^- = \alpha^+ = A$. Теперь воспользуемся уравнением при $k = 0$ для установления связи между двумя оставшимися константами β^- и β^+ : $(A - \beta^-) - 2A + (A - \beta^+) = 1$.

Отсюда $\beta^- = B$, $\beta^+ = 1 - B$. Окончательное выражение для фундаментального решения

$$G_k = \begin{cases} A+Bk, & k \leq 0; \\ A+(B+1)k, & k \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что ограниченного решения не существует, т.к. B одновременно не может равняться 0 и -1 .

$$2) G_k = \begin{cases} A \cos \frac{\pi k}{3} + \left(B + \frac{2\sqrt{3}}{3}(1-2A) \right) \sin \frac{\pi k}{3}, & k \geq 0; \\ A \cos \frac{\pi k}{3} + B \sin \frac{\pi k}{3}, & k \leq 0. \end{cases}$$

$$3) G_k = \begin{cases} -\frac{2}{3} \cdot 2^{-k}, & k \geq 0; \\ -\frac{2}{3} \cdot 2^k, & k \leq 0. \end{cases} \quad 4) G_k = \begin{cases} 2^k - 3^k, & k \leq 0; \\ 0, & k \geq 0. \end{cases}$$

$$5) G_k = \begin{cases} -\frac{2}{11} \cdot 6^k, & k \leq 0; \\ -\frac{2}{11} \cdot 2^{-k}, & k \geq 0. \end{cases} \quad 6) G_k = \begin{cases} 0, & k \leq 0; \\ 4(2^{-k} - 4^{-k}), & k \geq 0. \end{cases}$$

$$7) G_k = \begin{cases} 0, & k \geq 0; \\ \frac{1}{7}((-3)^k - 4^k), & k \leq 0. \end{cases}$$

Ответы к задачам темы X. Жесткие задачи

X.6.2. Функция устойчивости явного метода Рунге–Кутты с числом стадий s является многочленом степени s . С другой стороны, отличие этого многочлена от разложения экспоненты в ряд Тейлора должно начинаться с члена $p+1$, где p — порядок метода. Поэтому условие устойчивости методов порядка 2, 3, 4, для которых число стадий совпадает с порядком метода $s=p$, не зависит от конкретных коэффициентов метода Рунге–Кутты и совпадает с расположением экспоненты в ряд Тейлора вплоть до порядка членов, равному порядку аппроксимации. Для методов более высокого порядка аппроксимации включаются барьеры Бутчера, число стадий метода превышает порядок аппроксимации (насколько?) $s>p$, поэтому для части членов вплоть до p коэффициенты известны априори из условий порядка и совпадают с коэффициентами ряда Тейлора экспоненты, а оставшиеся определяются уже конкретным выбором метода.

$$\underline{\text{X.6.5.}} \text{ а) } \gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \gamma = \frac{3-\sqrt{3}}{6}; \text{ б) } \gamma = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, \gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}; \text{ в) } \gamma \geq 1/4.$$

X.6.7. Кривая локуса корней расположена целиком в правой полуплоскости и имеет вид типа овала, отсекая на действительной оси отрезок $[0, 4]$ и ориентирована так, что область устойчивости остается слева (по часовой стрелке). Метод А-устойчив.

X.6.9. Кривая локуса корней пробегает вверх и вниз по мнимой оси интервал между $\pm\sqrt{3}i$, этот отрезок составляет всю область сильной устойчивости. Метод является нестрого устойчивым при ограниченности первой производной:

$$\zeta_{1,2} = \frac{\frac{2h}{3} \frac{\partial f}{\partial y} \pm \sqrt{1 + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}}{1 - \frac{h}{3} \frac{\partial f}{\partial y}} \quad |\zeta_{1,2}| \leq 1 + 2h \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|.$$

X.6.10. Кривая локуса корней – вся мнимая ось, $\zeta \rightarrow 0$ соответствует $z \rightarrow -2$, метод А-устойчив.

X.6.11. Кривая локуса корней $[-i, i]$, метод только нестрого устойчив.

X.6.12. Кривая локуса корней $z = 3(1 - \cos \theta) + i \sin \theta$, или $(x/3 - 1)^2 + y^2 = 1$. Однако схема неустойчива: часть внешности единичного круга $1 \leq |\zeta| \leq 2^{0.5}$ отображается во внутренность эллипса, зато $|\zeta| \geq 2^{0.5}$ во всю комплексную плоскость, областей устойчивости не остается.

X.6.19. а) $R(z) = \frac{2+z}{2-z} > 0$ при $z > -2$, т.е. при $h < 2/|\lambda|$.

б) $R(z) = \frac{1}{z^2/4 + (1-z/2)^2} > 0$ при $\operatorname{Re} z < 0$.

X.6.20. $R^*(z) = (2^p R^2(z/2) - R(z)) / (2^p - 1)$.

а) $R^*(z) = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + z^4/48$ — порядок третий;

б) $R^*(z) = (96 - 18z - 5z^2) / (3(4-z)^2(2-z))$ — порядок четвертый.

Ответы к задачам темы XI. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

XI.8.4. Во всех пунктах задачи $L \cdot \min|\lambda_i| \gg 1$.

а) Спектр матрицы $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Два собственных значения положительны, поэтому два условия должны быть поставлены справа и одно слева;

б) Спектр матрицы $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Два собственных значения положительны, поэтому два условия должны быть поставлены справа и одно слева;

в) Спектр матрицы $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2$. Два собственных значения отрицательны, поэтому два условия должны быть поставлены слева и одно справа.

г) Спектр матрицы $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$. Два собственных значения положительны, поэтому два условия должны быть поставлены справа и одно слева.

д) Спектр матрицы $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$. Два собственных значения отрицательны, поэтому два условия должны быть поставлены слева и одно справа.

е) Спектр матрицы $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Два собственных значения положительны, поэтому два условия должны быть поставлены справа и одно слева.

XI.8.9. Аппроксимация $-y_{xx} + py_x^\circ + cy = \varphi$, где y_x° обозначает центральную разностную производную, при

$$p = \frac{h^2}{6} q' \left/ \left(1 + \frac{h^2}{6} q \right) \right., \quad c = q + \frac{h^2}{12} (q^2 + q''),$$

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12} (qf + f'') - \frac{h^2}{6} pf', \quad \text{будет обладать четвертым порядком}$$

точности.

XI.8.10. 1) а) $y_1 = y_0(1-h/2-h^2/4)+3h/2-h^2/4$.

$$\text{б) } y_1 = y_0(1-h/2-h^2/4)+h/2+h^2/4.$$

$$\text{в) } y_1 = y_0(1+h+h^2/4)+2h+h^2/2.$$

3) Во всех задачах нет диагонального преобладания, поэтому нельзя использовать метод прогонки. Корректным методом будет либо построение общего решения через решение задач Коши, либо метод стрельбы.

XI.8.11. 1) б) $y_{N-1} = y_N(1+h^2/2) + 3h/2 - 5h^2/4$.

$$\text{в) } y_{N-1} = y_N(1+2h+h^2/6) - h + 5h^2/3.$$

3) Диагональное преобладание в схеме есть, корректный метод решения — прогонка.

Ответы к задачам темы XII. Общая теория сходимости схем для уравнений в частных производных

XII.5.4. Исключением значений y_{m+1}^{n+1} и y_{m-1}^{n+1} в правой части разностного уравнения нетрудно получить достаточное условие монотонности

$$\frac{h^2}{a\xi\tau} - 2\frac{1-\xi}{\xi} \geq 0, \quad \text{или } \tau \leq \frac{h^2}{2a(1-\xi)}.$$

XII.5.5. Ответ. Необходимое и достаточное условие монотонности можно получить, приведя эту схему к явному виду с бесконечной суммой вида

$$y_m^{n+1} = \beta_0 y_m^n + \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l (y_{m-l}^n + y_{m+l}^n),$$

$$\beta_0 = 1 - \frac{4a\tau}{\gamma(h+\gamma)}, \quad \beta_1 = \frac{4ha\tau}{\gamma(h+\gamma)^2}, \quad \beta_l = \beta_{l-1} \frac{4\xi a\tau}{(h+\gamma)^2}, \quad l \geq 2, \quad \gamma = \sqrt{h^2 + 4\xi a\tau}.$$

Тогда условием монотонности будет $\tau \leq \frac{(2-\xi)h^2}{4a(1-\xi)^2}$, которое несколько слабее

достаточного условия монотонности.

XII.7.1. Для нулевого потенциала для собственных значений будем иметь:

$\lambda = (1 - 4iK(1 - \xi)\sin^2\alpha/2)/(1 + 4iK\xi\sin^2\alpha/2)$, $K = \tau/h^2$. Числитель и знаменатель имеют равные действительные части, поэтому $|\lambda| \leq 1$, если абсолютное значение мнимой части числителя меньше, чем знаменателя, т.е. $1 - \xi \leq \xi$, или $\xi \geq 0.5$. Введение потенциала не меняет этот результат (меняет только мнимую часть в λ , но синхронно вверху и внизу).

XII.7.2. Это схема Лакса–Вендроффа:

$$\frac{y_{m+1}^{n+1} - y_{m+1}^n}{\tau} + \frac{c}{2h} \left(y_{m+1}^n - y_{m-1}^n \right) - \frac{c^2 \tau}{2h^2} (y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n) = 0.$$

Схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$, устойчива при выполнении условия $c\tau \leq h$.

XII.7.3. Это схема Бима–Уорминга:

$$\frac{y_{m+1}^{n+1} - y_{m+1}^n}{\tau} + \frac{c}{h} \left(\frac{3}{2} y_{m+1}^n - 2y_m^n + \frac{1}{2} y_{m-1}^n \right) - \frac{c^2 \tau}{2h^2} (y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n) = 0.$$

Схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$, устойчива при выполнении условия $c\tau \leq 2h$.

XII.7.4. Получится схема Бима–Уорминга:

$$\frac{y_{m+1}^{n+1} - y_{m+1}^n}{\tau} + \frac{c}{h} \left(\frac{3}{2} y_{m+1}^n - 2y_m^n + \frac{1}{2} y_{m-1}^n \right) - \frac{c^2 \tau}{2h^2} (y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n) = 0.$$

XII.7.5. $\xi \geq 0.5 - h^2/(4a\tau)$.

XII.7.6. Из ответа задачи XII.5.5 следует: $a\tau/h^2 \leq 3/4$.

XII.7.7. Схема с весами при выборе $\xi \geq 0.5 - h^2/(12a\tau)$, $\phi^n = f(t^n + 0.5\tau, x_m) + h^2 f''_{xx}(t^n + 0.5\tau, x_m)/12$ обеспечит нужную точность.

XII.7.25. Схема с весами $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \xi a \Lambda_{\bar{x}\bar{x}} y^{n+1} + (1-\xi) a \Lambda_{\bar{x}\bar{x}} y^n + \varphi_m^n$ при

$\xi = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12a\tau}$, $\varphi_m^n = f_m^{n+1/2} + \frac{h^2}{12} (f_{xx})_m^{n+1/2}$, причем вторую производную f_{xx} можно вычислять разностным образом.

XII.7.26.

$$\text{a) } k \frac{\sqrt{3}a^2}{4} u_{mn} - \frac{\sqrt{3}ap}{a} [(u_{m+1,n} - u_{mn}) + (u_{m,n+1} - u_{mn}) + (u_{m-1,n} - u_{mn})] = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} f_{mn}.$$

XII.7.27. a)

$$\alpha_0 \psi_{mn} \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} - \frac{a}{3\alpha_1 \sqrt{3}a} \cdot [(\psi_{mn+1} - \psi_{mn}) + (\psi_{m-1n+1} - \psi_{mn}) + (\psi_{m-1n} - \psi_{mn}) + (\psi_{mn-1} - \psi_{mn}) + (\psi_{m+1n-1} - \psi_{mn}) + (\psi_{m+1n} - \psi_{mn})] = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} Q_{mn}.$$

Ответы к задачам темы XIII. Численные методы решения уравнений параболического типа

XIII.8.1. Указание. Привести схему к каноническому виду. Воспользоваться теоремой 1 и тем фактом, что Λ_{xx} – отрицательно определенный оператор, для которого с учетом вычисленного в теме IX спектра справедливы оценки $\frac{\pi^2}{l^2} \mathbf{E} \leq -\Lambda_{xx} \leq \frac{4}{h^2} \mathbf{E}$.

В качестве условия устойчивости двумя способами получим $\xi \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau k}$.

$$\underline{\text{XIII.8.2. }} \xi = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau k}.$$

XIII.8.18. Получается схема Дугласа–Ганна

$$\frac{u^* - u^n}{\tau} = \frac{D}{2} \Lambda_1 (u^* + u^n) + D \Lambda_2 u^n + D \Lambda_3 u^n,$$

$$\frac{u^{**} - u^n}{\tau} = \frac{D}{2} \Lambda_1 (u^* + u^n) + \frac{D}{2} \Lambda_2 (u^{**} + u^n) + D \Lambda_3 u^n,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{D}{2} \Lambda_1 (u^* + u^n) + \frac{D}{2} \Lambda_2 (u^{**} + u^n) + \frac{D}{2} \Lambda_3 (u^{n+1} + u^n).$$

На каждом шаге метода возникает система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, решаемая методом прогонки. Схема Дугласа–Ганна безусловно устойчивая. В настоящее время это наиболее удачная из схем расщепления в трехмерном случае.

XIII.8.19. Ответ $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$.

XIII.10.7. 1. $g(t) = (1 - t/t_f)^{-1/2}$, $\phi(t) = (1 - t/t_f)^{\frac{2(\beta-1)}{\beta-(\alpha+1)}}$, t_f — положительный параметр.

Ответы к задачам темы XIV. Численные методы решения уравнений гиперболического типа

XIV.9.12. Система является гиперболической, так как спектр матрицы действительный во всех вариантах.

a) Собственные значения $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 1$. Соответствующие им левые собственные векторы $\mathbf{e}_1 = (2, -3), \mathbf{e}_2 = (2, 1)$.

Для инварианта Римана

$$R_1 = 2u - 3v \text{ уравнение будет } \frac{\partial R_1}{\partial t} - 7 \frac{\partial R_1}{\partial x} = 2f - 3g,$$

$$\text{для } R_2 = 2u + v \text{ — уравнение } \frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{\partial R_2}{\partial x} = 2f + g.$$

Корректные постановки г.у. — первая и четвертая. Вторая некорректна, т.к. оба условия заданы справа, при этом инвариант R_2 приносит значение $2u + v$ тоже на правую границу, слева будем иметь только принесенное значение R_1 , этого недостаточно для определения входящего R_2 на левой границе. Третья некорректна, т.к. значение $2u + v$ на правой границе одновременно задано и приносится инвариантом R_2 , система несовместна.

б) Собственные значения $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$. Соответствующие им левые собственные векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 1), \mathbf{e}_2 = (-4, 1)$.

Для инварианта Римана

$$R_1 = u + v \text{ уравнение будет } \frac{\partial R_1}{\partial t} + 3 \frac{\partial R_1}{\partial x} = f + g,$$

$$\text{для } R_2 = -4u + v \text{ — уравнение } \frac{\partial R_2}{\partial t} - 2 \frac{\partial R_2}{\partial x} = -4f + g.$$

Корректные постановки г.у. — первая и третья. Вторая некорректна, т.к. оба условия заданы справа, при этом инвариант R_1 приносит значение

$-4u+v$ тоже на правую границу, слева будем иметь только принесенное значение R_2 , чего недостаточно для определения входящего R_1 на левой границе. Четвертая некорректна, т.к. значение $u+v$ на правой границе одновременно задано и приносится инвариантом R_1 , система несовместна.

в) Собственные значения $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -5$. Соответствующие им левые собственные векторы $\mathbf{e}_1 = (2, 1), \mathbf{e}_2 = (1, -1)$.

Для инварианта Римана

$$R_1 = 2u + v \text{ уравнение будет } \frac{\partial R_1}{\partial t} + 4 \frac{\partial R_1}{\partial x} = 2f + g,$$

$$\text{для } R_2 = u - v \text{ — уравнение } \frac{\partial R_2}{\partial t} - 5 \frac{\partial R_2}{\partial x} = f - g.$$

Корректная постановка г.у. — четвертая. Первая и вторая некорректны, т.к. инварианты приносят свои значения на границу, где они и так заданы, получается несовместная система. Третья постановка некорректна из-за того, что оба условия на одной границе, а характеристики имеют различное направление.

г) Собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4$. Соответствующие им левые собственные векторы $\mathbf{e}_1 = (2, 1), \mathbf{e}_2 = (1, 3)$.

Для инварианта Римана

$$R_1 = 2u + v \text{ уравнение будет } \frac{\partial R_1}{\partial t} + \frac{\partial R_1}{\partial x} = 2f + g,$$

$$\text{для } R_2 = u + 3v \text{ — уравнение } \frac{\partial R_2}{\partial t} - 4 \frac{\partial R_2}{\partial x} = f + 3g.$$

Корректная постановка г.у. — первая. Вторая и четвертая некорректны, т.к. инварианты приносят свои значения на границу, где они и так заданы, получается несовместная система. Третья постановка некорректна из-за того, что оба условия на одной границе, а характеристики имеют различное направление.

XIV.9.13. Система является гиперболической, т.к. спектр матрицы действительный во всех вариантах.

а) Спектр матрицы $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Соответствующие левые собственные векторы матрицы $\mathbf{e}_1 = (1, -1, 1), \mathbf{e}_2 = (1, -2, 1), \mathbf{e}_3 = (1, -1, 1/2)$, поэтому для инварианта $R_1 = u - v + w$ уравнение будет

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + 2 \frac{\partial R_1}{\partial x} = f - g + h,$$

$$\text{для } R_2 = u - 2v + w \text{ — уравнение } \frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{\partial R_2}{\partial x} = f - 2g + h,$$

а для $R_3 = u - v + w/2$ — уравнение $\frac{\partial R_3}{\partial t} - \frac{\partial R_3}{\partial x} = f - g + h/2$.

Корректная постановка ГУ — вторая.

б) Спектр матрицы $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$. Соответствующие левые собственные векторы матрицы $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{e}_2 = (1, 1/2, 1), \mathbf{e}_3 = (3, 2, 2)$, поэтому

для инварианта $R_1 = u + w$ уравнение будет $\frac{\partial R_1}{\partial t} - 3 \frac{\partial R_1}{\partial x} = f + h$, для

$R_2 = u + v/2 + w$ — уравнение $\frac{\partial R_2}{\partial t} - 2 \frac{\partial R_2}{\partial x} = f + g/2 + h$, а для

$R_3 = 3u + 2v + 2w$ — уравнение $\frac{\partial R_3}{\partial t} + \frac{\partial R_3}{\partial x} = 3f + 2g + 2h$.

Корректная постановка ГУ — третья.

в) Спектр матрицы $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Соответствующие левые собственные векторы матрицы $\mathbf{e}_1 = (1, -3, 2), \mathbf{e}_2 = (1, 2, -1), \mathbf{e}_3 = (1, 0, -1)$, поэтому для инварианта $R_1 = u - 3v + 2w$ уравнение будет

$\frac{\partial R_1}{\partial t} + 2 \frac{\partial R_1}{\partial x} = f - 3g + 2h$,

для $R_2 = u + 2v - w$ — уравнение $\frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{\partial R_2}{\partial x} = f + 2g - h$, а для $R_3 = u - w$ —

уравнение $\frac{\partial R_3}{\partial t} - \frac{\partial R_3}{\partial x} = f - h$.

Корректные постановки ГУ — вторая и третья.

XIV.9.14. Система является гиперболической, т.к. спектр матрицы действительный во всех вариантах. Монотонной разностной схемой являются только уголки, поэтому можно использовать соответствующие устойчивые явные уголки для инвариантов Римана.

а) Спектр матрицы $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$.

Соответствующие левые собственные векторы матрицы $\mathbf{e}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{e}_2 = (1, -1, 1), \mathbf{e}_3 = (1, 0, -1)$, поэтому

для инварианта $R_1 = u + 2v + w$ уравнение будет $\frac{\partial R_1}{\partial t} + 6 \frac{\partial R_1}{\partial x} = f + 2g + h$,

для $R_2 = u - v + w$ — уравнение $\frac{\partial R_2}{\partial t} + 3 \frac{\partial R_2}{\partial x} = f - g + h$, а для $R_3 = u - w$ —

уравнение $\frac{\partial R_3}{\partial t} - 2 \frac{\partial R_3}{\partial x} = f - h$.

Корректная постановка ГУ — первая.

б) Спектр матрицы $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$.

Соответствующие левые собственные векторы матрицы $\mathbf{e}_1 = (5, 1, 4), \mathbf{e}_2 = (3, -5, 2), \mathbf{e}_3 = (0, 1, -1)$, поэтому

для инварианта $R_1 = 5u + v + 4w$ уравнение будет $\frac{\partial R_1}{\partial t} + 3 \frac{\partial R_1}{\partial x} = 5f + g + 4h$,

для $R_2 = 3u - 5v + 2w$ — уравнение $\frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{\partial R_2}{\partial x} = 3f - 5g + 2h$, а для

$$R_3 = v - w - \frac{\partial R_3}{\partial t} - 2 \frac{\partial R_3}{\partial x} = g - h.$$

Корректная постановка ГУ — четвертая.

XIV.9.17. Схема имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству, условием устойчивости будет $(ct/h)^2(1 - 4\xi) \leq 1$, т.е. при $\xi \geq 1/4$ схема безусловно устойчива, при $\xi < 1/4$ условие устойчивости типа условия Куранта $ct/h \leq 1/\sqrt{1 - 4\xi}$.

XIV.9.22. $D = (a + b)/2$.

Ответы к задачам темы XV. Численные методы решения уравнений эллиптического типа

XV.7.14. $\rho = 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{N^2}$.

XV.7.15. $\rho = 1 - \frac{1}{2} \left(h_y^2 \frac{\pi^2}{N_x^2} + h_x^2 \frac{\pi^2}{N_y^2} \right) \left(h_y^2 + h_x^2 \right)^{-1}$.

XV.7.16. $\omega \approx 2 \left(1 - \frac{\pi}{N} \right)$.

Литература

1. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1977. 440 с.
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Б.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учеб. пособие. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2010. 240 с.
3. Сборник задач по основам вычислительной математики / под ред. О.М. Белоцековского. М. : МФТИ, 1974. 148 с.
4. Режим доступа: <http://pmpru.ru/vf4/polynomial>. (Дата обращения: 27.04.2015).
5. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М. : Мир, 1999. 685 с.
6. Виноград Р.Э. Об одном утверждении К. П. Персидского // УМН. 1954. Т. 9, вып. 2(60). С. 125–128.
7. Хайрер Э., Нерсепт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М. : Мир, 1990. 512 с.
8. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М. : Наука, 1975. 248 с.
9. Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно-возмущенных системах. М. : Наука–Физматлит, 1995. 336 с.
10. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. М. : Эдиториал УРСС, 2000. Наука, 1998.
11. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М. : Наука–Физматлит, 1997. 496 с.
12. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М. : Мир, 1998. 575 с.
13. Колебания и бегущие волны в химических системах: пер. с англ. / под ред. Р. Филда, М. Бургер. М. : Мир, 1988. 720 с.
14. Кондрашов А.С., Хибник А.И. Экогенетические модели как быстро-медленные системы // Исследования по математической биологии. Пущино, 1996. С. 88–123.
15. Атаяуллаханов Ф.И., Гурия Г.Т., Сафрошкина А.Ю. Пространственные аспекты динамики свертывания крови. Феноменологическая модель // Биофизика. 1994. Т 39, вып. 1. С. 97–104.
16. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1988. 334 с.
17. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2009.
18. Rosenbrock H. Some general implicit processes for numerical solution of differential equations // Computer Journal. 1963. V. 5, N 4. P. 329–330.
19. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэро-гидродинамики. М. : Наука, 1990. 230 с.
20. Абрамов А.А., Андреев В.Б. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963. Т. 3, № 2. С. 377–381.
21. Чанг К., Хаузерс Ф. Нелинейные сингулярно-возмущенные краевые задачи. М. : Мир, 1988. 248 с.

22. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М. : Наука–Физматлит, 1997. 496 с.
23. Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М. : Мир, 1991. 368 с.
24. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М. : Наука, 1978. 590 с.
25. Лобанов А.И., Мещеряков М.В., Чудов Л.А. Задачи для самостоятельного исследования в курсе вычислительной математики: учеб. пособие. М. : МФТИ, 2001. 76 с.
26. Гавриков М.Б., Локуциевский О.В. Начала численного анализа. М. : ТОО «Янус», 1995. 580 с.
27. Калиткин Н.Н. Численные методы. Спб. : БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
28. Рябенький В.С., Филиппов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М. : Гостехиздат, 1956.
29. Lax P.D., Richtmyer R.D. Survey of the stability of linear finite difference equations // Comm. Pure Appl. Math. 1956. V. 9. P. 267–293.
30. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М. : Наука, 1984. 752 с.
31. Жуков А.И. Метод Фурье в вычислительной математике М. : Наука, 1992. 128 с.
32. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1945.
33. Самарский А.А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1983. 656 с.
34. Магомедов М.-К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М. : Наука, 1988. 288 с.
35. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 6. С. 98–110.
36. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // ДАН. 2011. Т. 436, № 5. С. 600–605.
37. Аристова Е.Н., Рогов Б.В. О реализации граничных условий в бикомпактных схемах для линейного уравнения переноса // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 10. С. 3–14.
38. Рогов Б.В. Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53, № 2. С. 94–104.
39. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2007. 612 с.
40. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М., 1987. 368 с.
41. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М. : Наука, 1987. 480 с.
42. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М. : Наука, 1987. 350 с.
43. Заичев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М. : Международная программа образования, 1996. 496 с.
44. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М. : Наука, 1990. 488 с.

45. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М. : Наука, 1987. 480 с.
46. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М. : Наука, 1992. 544 с.
47. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М. : Наука, 1987. 240 с.
48. Ровинский А.Б., Жаботинский А.М. О механизме автокатализической реакции I окисления Се броматом // Теоретическая и экспериментальная химия. 1978. Т. 14, № 2. С. 183–192.
49. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М. : Наука, 2005. 256 с.
50. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Ижевск : Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 556 с.
51. Лобанов А.И., Старожилова Т.К., Гурия Г.Т. Численное исследование структурообразования при свертывании крови // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 8. С. 83–95.
52. Атаяуллаханов Ф.И., Зарницаина В.И., Кондратович А.Ю., Лобанова Е.С., Сарбаш В.И. Особый класс автоволн — автоволны с остановкой — определяет пространственную динамику свертывания крови // УФН. 2002. Т. 172, № 6. С. 671–690.
53. Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М. : Физматлит, 2009.
54. Friedrichs K.O., Hyers D.H. Symmetric hyperbolic linear differential equations // Communis Pure and Appl. Mathem. 1954. V. 7, N 2. P. 345–392.
55. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47(89), вып. 3. С. 271–306.
56. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1987. V. 49, N 3. P. 357–393.
57. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. 2-е изд., испр. и доп. М. : Физматлит, 2012. 656 с.
58. Прудковский П.А. Теория нелинейных волн. Режим доступа: <http://qopt.org/speckurs/nlwaves/nlwaves.htm>. (Дата обращения: 08.04.2015).
59. Крайнов В.П. Лекции по избранным проблемам механики сплошных сред. Долгопрудный : Издательский Дом «Интеллект», 2014. 120 с.
60. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М. : Мир, 1990. 660 с.
61. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. М. : Физматкнига, 2013. 240 с.
62. Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. М. : Мир, 1981. Могилев: Бифизмат, 1997. 294 с.
63. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
64. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М. : Мир, 1988. 694 с.

65. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М. : Изд-во МГУ, 2013. 467 с.
66. Лебедев В.И., Финогенов С.А. Решение проблемы упорядочения параметров в чебышевских итерационных методах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13, № 1. С. 18–33.
67. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М. : Мир, 2001. 429 с.
68. Холодов А.С. Монотонные разностные схемы на нерегулярных сетках для эллиптических уравнений в области со многими несвязными границами // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 9. С. 104–113.
69. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М. : Мир, 1973. 758 с.
70. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. М. : Наука, 1979. 320 с.
71. Самарский А.А. Теория разностных схем. 3-е изд., испр. М. : Наука, 1989. 616 с.
72. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики М. : Научный мир, 2003. 316 с.
73. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М. : Наука, 1976. 352 с.
74. Федоренко Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. 1961. Т. 1, № 5. С. 922–927.
75. Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 1. М. : Наука, 2005. 343 с.
76. Ольшанский М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М. : Физматлит, 2005. 168 с.

Учебное издание

Аристова Елена Николаевна
Лобанов Алексей Иванович

**ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ
ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
В МФТИ**

ЧАСТЬ II

Редактор *I. A. Волкова*. Корректор *H. E. Кобзева*
Компьютерная верстка *H. E. Кобзева*
Макет обложки *E. A. Березина*

Подписано в печать 12.08.2015. Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 19,4.
Уч.-изд. л. 18,5. Тираж 400 экз. Заказ № 328.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок
