Р.В. Константинов

ЛЕКЦИИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Долгопрудный, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Учебное пособие представляет собой курс лекций по функциональному анализу, читаемых автором студентам третьего курса факультета управления и прикладной математики МФТИ. Принятая в МФТИ программа годового курса функционального анализа накладывает довольно жёсткие ограничения на объём теоретического материала. Именно поэтому данная книга совсем не претендует на максимальную полноту и большую общность изложения теории функционального анализа. Изучение излагаемой в пособии теории предполагает у читателя знания основ математического анализа и линейной алгебры в рамках принятой в МФТИ программы, изучаемой студентами на первых двух курсах. Все сформулированные утверждения и теоремы полностью доказаны, и для их понимания не требуется привлечения дополнительной литературы по функциональному анализу. Автор надеется, что эта книга послужит читателю хорошей базой для дальнейшего изучения функционального анализа и его приложений.

Пособие начинается изложением свойств топологических, метрических и бесконечномерных линейных нормированных пространств. Основное внимание уделено изучению полноты, сепарабельности, пополнения и компактности в метрических пространствах, а также свойств линейных непрерывных операторов в бесконечномерных линейных нормированных пространствах. В небольшом объёме рассматриваются и топологические пространства. Обсуждается аксиоматика топологических пространств, а также взаимосвязь секвенциальных и топологических определений различных понятий функционального анализа (например, замкнутость и компактность множеств, непрерывность отображений). Подробно рассматриваются слабая и слабая* топологии в линейных нормированных пространствах. Отдельная глава посвящена изложению теории меры и интеграла Лебега и связанных с ними лебеговых пространств. В данной главе используется материал по теории меры и интеграла Лебега из книги У. Рудина “Основы математического анализа” [4]. Проведено сравнение известных студентам понятий измеримости множества по Жордану и интегрируемости функции по Риману соответственно с новыми понятиями измеримости множества и интегрируемости функции по Лебегу.

Следует отметить, что изложение теоретического материала сопровождается большим количеством примеров, контрпримеров и задач, помогающих усвоению основных идей курса. Практически ко всем теоремам приведены примеры, поясняющие различные условия и ограничения, которые встречаются в формулировках этих теорем. Рассматриваемые примеры и задачи могут быть весьма полезны при обсуждении соответствующих разделов функционального анализа со студентами на семинарах. Некоторые из таких примеров были предложены самими студентами, что отмечено в тексте пособия. Автор выражает этим студентам свою глубокую благодарность.

Также хотелось бы выразить свою искреннюю признательность доценту кафедры высшей математики МФТИ С.П. Коновалову, чьи лекции и семинары по функциональному анализу оказали огромное влияние на автора пособия, и профессору кафедры высшей математики МФТИ Б.И. Голубову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

Введение

Учебное пособие представляет собой годовой курс лекций по функциональному анализу и состоит из пяти больших глав. С материалом первых трёх глав студенты знакомятся в осеннем семестре, а двух последних — в весеннем.

Первая глава посвящена аксиоматике топологических и метрических пространств и обсуждению понятий сходимости последовательностей, замкнутости множеств, непрерывности отображений в топологических и метрических пространствах. Основное внимание здесь уделено свойствам полноты и сепарабельности метрических пространств. Доказаны критерий полноты метрического пространства — принцип вложенных шаров и теорема Бэра о непредставимости полного метрического пространства счётным объединением своих нигде не плотных подмножеств. Определено пополнение неполного метрического пространства и доказана теорема Хаусдорфа о существовании пополнения. В качестве важного прикладного результата рассмотрен принцип сжимающих отображений Банаха. Применение этого принципа проиллюстрировано доказательством с его помощью теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во второй главе рассматриваются компактные подмножества топологических и метрических пространств. В топологических пространствах основное внимание уделено обсуждению взаимосвязи счётной и секвенциальной компактности множеств. Доказан критерий компактности множества метрического пространства — эквивалентность компактности множества его полноте и вполне ограниченности, а также его секвенциальной компактности. Применение этого критерия проиллюстрировано в доказательстве важной прикладной теоремы Арцела—Асколи о компактности множества в метрическом пространстве непрерывных функций с равномерной метрикой.

В первых трёх параграфах третьей главы рассматриваются линейные нормированные и гильбертовы пространства. Основными результатами здесь являются теоремы об эквивалентности норм в конечномерном линейном нормированном пространстве, о некомпактности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве, о проекции точки на выпуклое замкнутое множество, о представлении гильбертова пространства в виде прямой суммы замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения. В небольшом объёме обсуждаются полные счётные системы и счётные базисы в линейных нормированных пространствах.

В двух последних параграфах третьей главы рассматриваются линейные непрерывные (ограниченные) операторы в линейных нормированных пространствах. Приведены многочисленные примеры вычисления норм линейных операторов. Обсуждаются важные достаточные условия ограниченности линейного оператора, связанные с конечномерностью области определения или области значений оператора и замкнутости его ядра. Основными результатами являются теоремы о полноте пространства линейных ограниченных операторов, об ограниченности поточечно ограниченной последовательности линейных непрерывных операторов (теорема Банаха—Штейнгауза), об открытом отображении и об обратном операторе (теоремы Банаха).

Четвёртая глава целиком посвящена изложению теории меры и интеграла Лебега. Здесь используется материал по теории меры и интеграла Лебега из книги У. Рудина "Основы математического анализа" [4]. Основными результатами являются теоремы о счётной аддитивности и абсолютной непрерывности интеграла Лебега и теоремы о предельном переходе — Б. Леви о монотонной сходимости, Фату и Лебега об ограниченной сходимости. В небольшом объёме обсуждается мера и интеграл Лебега—Стилтьеса на примере монотонной функции скачков и дифференцируемой монотонной функции с ограниченной производной.

Последняя пятая глава посвящена изучению различных вопросов, связанных с понятием сопряжённого пространства для линейного нормированного пространства. Это прежде всего теорема Хана—Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала, теорема об отделимости выпуклых непересекающихся множеств и теорема Рисса—Фреше о структуре сопряжённого гильбертова пространства. Достаточно подробно обсуждаются слабая и слабая* топологии. В частности, показано, что слабая непрерывность линейного функционала равносильна его сильной непрерывности. Основными результатами здесь являются теоремы Мазура о слабой замкнутости замкнутого выпуклого множества, Банаха—Алаоглу о слабой* компактности шара в сопряжённом пространстве, Банаха—Тихонова о слабо сходящейся подпоследовательности ограниченной последовательности в рефлексивном сепарабельном пространстве. Доказан важный прикладной результат о существовании метрической проекции точки на выпуклое замкнутое подмножество рефлексивного сепарабельного пространства.

В теории спектра линейного ограниченного оператора в банаховом пространстве показана непустота и компактность спектра и проведена классификация его компонент на точечную, непрерывную и остаточную части. Основными результатами здесь являются теоремы о спектральном радиусе и об отображении спектра многочленом. Для компактных операторов в банаховых пространствах доказана теорема Фредгольма и показана структура их спектра. Наконец, для компактных самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве обсуждается важная теорема Гильберта—Шмидта и её приложения для вычисления резольвенты.

Глава 1

Топологические и метрические пространства

1.1. Топологические пространства

Определение 1.1.1. *Пусть X — некоторое множество. Семейство τ подмножеств множества X называется топологией, если выполнены следующие свойства:*

1) $X \in \tau$ *и* $\varnothing \in \tau$,

2) *для любого семейства подмножеств*

$$\left\{ U_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\} \subset \tau$$

(здесь $\mathcal{A}$ — произвольное множество индексов) выполнено включение

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau,$$

3) *для любого конечного семейства подмножеств*

$$\left\{ U_k \;\middle|\; k \in \overline{1, N} \right\} \subset \tau$$

(здесь N — произвольное натуральное число) выполнено включение

$$\bigcap_{k=1}^{N} U_k \in \tau.$$

Множество X с введённой в нём топологией τ называется топологическим пространством и обозначается (X, τ).

Определение 1.1.2. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Любое множество $U \in \tau$ называется τ-открытым (или просто открытым) в топологическом пространстве (X, τ). Топология τ называется семейством открытых подмножеств множества X.*

Определение 1.1.3. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Для любого элемента $x \in X$ окрестностью x называется произвольное τ-открытое множество, содержащее x. Для элемента $x \in X$ его окрестность $U \in \tau$ будем обозначать $U(x)$.*

П р и м е р 1.1.1. Пусть X — произвольное множество. Самой слабой топологией в X является семейство $\tau_{\text{слаб.}}$, состоящее всего из двух подмножеств — X и $\varnothing$. По пункту 1 определения 1.1.1 любая топология τ в X содержит $\tau_{\text{слаб.}}$. Самой сильной топологией в X является семейство $\tau_{\text{сильн.}}$, состоящее из всех подмножеств множества X. Очевидно, что любая топология τ в X содержится в $\tau_{\text{сильн.}}$.

О п р е д е л е н и е 1.1.4. *Пусть X — произвольное множество, τ_1 и τ_2 — две топологии в X. Говорят, что τ_1 слабее τ_2 (или τ_2 сильнее τ_1), если любое τ_1-открытое множество из X является τ_2-открытым, т. е. $\tau_1 \subset \tau_2$.*

П р и м е р 1.1.2. Не всякие две топологии из множества X сравнимы между собой. Рассмотрим $X = \mathbb{R}$ и определим в $\mathbb{R}$ две топологии τ' и τ''. Семейство τ' содержит всякое подмножество $\mathbb{R}$, каждая точка которого входит в него вместе с некоторым содержащим её интервалом. Семейство τ'' состоит из всех подмножеств $\mathbb{R}$, каждое из которых (если оно не пусто) отличается от $\mathbb{R}$ не более чем на счётное множество. То есть непустое $U \in \tau''$ тогда и только тогда, когда существует пустое, конечное или счётное множество $S \subset \mathbb{R}$, такое, что $U = \mathbb{R}\backslash S$.

Покажем, что τ' и τ'' являются топологиями в $\mathbb{R}$. Очевидно, что множества $\mathbb{R}$ и $\varnothing$ содержатся в τ' и τ''. Для любого семейства подмножеств $\left\{ U_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\} \subset \tau'$ требуется проверить включение $V = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \in \tau'$. Для любого $x \in V$ существует $\alpha(x) \in \mathcal{A}$, такой, что $x \in U_{\alpha(x)}$. Так как $U_{\alpha(x)} \in \tau'$, то x входит в $U_{\alpha(x)}$ вместе с некоторым интервалом I, т. е. $x \in I \subset U_{\alpha(x)} \subset V$. Следовательно, любая точка V содержится в нем вместе с некоторым содержащим её интервалом, а значит, по определению $V \in \tau'$. Для любого конечного семейства подмножеств $\left\{ U_k \;\middle|\; k \in \overline{1,N} \right\} \subset \tau'$ требуется проверить включение $W = \bigcap\limits_{k=1}^{N} U_k \in \tau'$. Для любого $x \in W$ и любого $k \in \overline{1,N}$ справедливо включение $x \in U_k$. По определению τ' для любого $k \in \overline{1,N}$ существует интервал $I_k = (a_k, b_k)$, содержащий x и содержащийся в U_k, т. е. $a_k < x < b_k$ и $I_k \subset U_k$. Определим $a = \max\limits_{k\in\overline{1,N}} a_k$ и $b = \min\limits_{k\in\overline{1,N}} b_k$. Тогда $a < x < b$, т. е. интервал $I = (a,b)$ содержит x, и для любого $k \in \overline{1,N}$ выполнены включения $I \subset I_k \subset U_k$. Следовательно, $x \in I \subset W$, т. е.

любая точка W содержится в нем вместе с некоторым содержащим её интервалом, что означает по определению $W \in \tau'$.

Для любого семейства подмножеств $\left\{ U_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\} \subset \tau''$ требуется проверить включение $V = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau''$. Если $V = \varnothing \in \tau''$, то доказывать нечего. Поэтому считаем, что $V \neq \varnothing$, т. е. существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, такое, что $U_{\alpha_0} \neq \varnothing$. Получаем $\mathbb{R} \backslash V = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \Big(\mathbb{R} \backslash U_\alpha \Big) \subset \mathbb{R} \backslash U_{\alpha_0}$ — не более чем счётное множество по определению τ''. Следовательно, V отличается от $\mathbb{R}$ не более чем на счётное множество, т. е. по определению принадлежит τ''. Для любого конечного семейства подмножеств $\left\{ U_k \;\middle|\; k \in \overline{1, N} \right\} \subset \tau''$ требуется проверить включение $W = \bigcap\limits_{k=1}^{N} U_k \in \tau''$. Если $W = \varnothing \in \tau''$, то доказывать нечего. Поэтому считаем, что $W \neq \varnothing$. Тогда $U_k \neq \varnothing$ для любого $k \in \overline{1, N}$, а значит, $\mathbb{R} \backslash U_k$ не более чем счётно. Получаем $\mathbb{R} \backslash W = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Big(\mathbb{R} \backslash U_k \Big)$ — не более чем счётное множество, так как является конечным объединением не более чем счётных множеств.

Итак, доказано, что τ' и τ'' являются топологиями в $\mathbb{R}$. Покажем, что они несравнимы, т. е. существует $U \in \tau'$, такое, что $U \notin \tau''$, и существует $V \in \tau''$, такое, что $V \notin \tau'$. Пусть $U = (0, 1) \in \tau'$. Тогда $U \neq \varnothing$ и $\mathbb{R} \backslash U$ более чем счётно. Следовательно, $U \notin \tau''$. Пусть $V = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $V \in \tau''$. Однако для $x_0 = 0 \in V$ и для любого интервала $I = (a, b)$, содержащего x_0 (т. е. $a < 0 < b$), существует $N \in \mathbb{N}$, такой, что $0 < \frac{1}{n} < b$ для любого $n > N$. Следовательно, $I \not\subset V$. Таким образом, ни один интервал, в который входит точка $x_0 = 0 \in V$, не содержится в V. Следовательно, $V \notin \tau'$.

Определение 1.1.5. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится по топологии τ к элементу $x \in X$, если для любой окрестности $U(x)$ элемента x существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено включение $x_n \in U(x)$. Сходимость x_n к x по топологии τ будем обозначать $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$.*

Пример 1.1.3. Пусть X — произвольное множество. Если ввести в X самую слабую топологию $\tau_{\text{слаб.}}$ (см. пример 1.1.1), то окажется, что любая последовательность из X сходится, причём к любой точке. Действительно, в слабейшей топологии любая точка из X имеет только одну окрестность — само множество X, где и находятся все элементы любой последовательности. Если же в X рассмотреть самую сильную топологию $\tau_{\text{сильн.}}$ (см. пример 1.1.1), то сходящейся по $\tau_{\text{сильн.}}$ будет только та последовательность, которая является стационарной с некоторого номера. Действительно, если $x_n \overset{\tau_{\text{сильн.}}}{\to} x$ при $n \to \infty$, то для $U(x) = \{x\} \in \tau_{\text{сильн.}}$ — окрестности точки x, состоящей лишь из самой точки x, найдется номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n \in U(x)$, т. е. $x_n = x$. Аналогичная ситуация имеет место в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \tau'')$ (описание топологии τ'' в $\mathbb{R}$ см. в примере 1.1.2). Действительно, пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ сходится к $x \in \mathbb{R}$ по топологии τ'' (т. е. $x_n \overset{\tau''}{\to} x$ при $n \to \infty$). Рассмотрим окрестность точки x — множество $U(x) = \mathbb{R} \backslash \left\{ x_n \;\middle|\; x_n \neq x,\ n \in \mathbb{N} \right\} \in \tau''$. Так как существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено включение $x_n \in U(x)$, то получаем $x_n = x$ для любого $n > N$.

Определение 1.1.6. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $F \subset X$ назовём τ-замкнутым (или просто замкнутым), если его дополнение является τ-открытым, т. е. $F^c = X \backslash F \in \tau$.*

Определение 1.1.7. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Точка x называется точкой прикосновения множества $S \subset X$, если для любой окрестности $U(x)$ точки x выполнено $U(x) \cap S \neq \varnothing$.*

Утверждение 1.1.1. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда множество $F \subset X$ является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои точки прикосновения.*

Доказательство. Пусть множество F замкнуто в (X, τ), а $x \in X$ — его точка прикосновения. Предположим, что $x \notin F$. Тогда $x \in F^c \in \tau$, т. е. множество F^c является окрестностью точки x. Тогда по определению 1.1.7 множества F^c и F должны пересекаться, что невозможно. Получили противоречие. Следовательно, $x \in F$. Обратно, пусть F содержит все свои точки прикосновения. Рассмотрим произвольную точку $x \in F^c$. Так как $x \notin F$, то она не является точкой прикосновения множества F (все точки прикосновения множества F принадлежат ему по условию). Следовательно, существует окрестность $U(x)$ точки x, не пересекающаяся с F. Это означает, что $U(x) \subset F^c$. Таким образом, $\bigcup\limits_{x \in F^c} U(x) \subset F^c$. Так как для любого $x \in U(x)$ выполнено $x \in U(x)$, то $F^c = \bigcup\limits_{x \in F^c} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in F^c} U(x)$. Таким образом, множество F^c и содержит, и содержится в множестве $\bigcup\limits_{x \in F^c} U(x)$, т. е. совпадает с ним: $F^c = \bigcup\limits_{x \in F^c} U(x)$. Таким образом, F^c представлено в виде объединения открытых множеств, а значит, по определению 1.1.1 само является открытым. Следовательно, множество F является замкнутым.

Утверждение 1.1.2. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Для любого семейства $\left\{ F_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ замкнутых подмножеств множества X (т. е. для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ выполнено $(F_\alpha)^c \in \tau$) множество $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ является замкнутым. Для любого конечного семейства $\{F_k\}_{k=1}^N$ замкнутых подмножеств множества X множество $\bigcup\limits_{k=1}^N F_k$ является замкнутым. Иными словами, произвольное пересечение и конечное объединение замкнутых подмножеств X является замкнутым в (X, τ).*

Доказательство. Имеем $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \right)^c = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} (F_\alpha)^c$. Так как $(F_\alpha)^c \in \tau$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}$, то по определению 1.1.1 получаем $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} (F_\alpha)^c \in \tau$. Следовательно, $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ замкнуто в (X, τ).

Далее, $\left(\bigcup\limits_{k=1}^N F_k \right)^c = \bigcap\limits_{k=1}^N (F_k)^c$. Так как $(F_k)^c \in \tau$ для любого $k \in \overline{1, N}$, то по определению 1.1.1 получаем $\bigcap\limits_{k=1}^N (F_k)^c \in \tau$. Следовательно, $\bigcup\limits_{k=1}^N F_k$ замкнуто в (X, τ).

Определение 1.1.8. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Точка $x \in X$ называется секвенциальной точкой прикосновения множества $S \subset X$, если существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$.*

Определение 1.1.9. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $S \subset X$ называется секвенциально замкнутым, если оно содержит все свои секвенциальные точки прикосновения.*

Утверждение 1.1.3. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, а множество $F \subset X$ является замкнутым. Тогда F является секвенциально замкнутым.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную секвенциальную точку прикосновения x множества F. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любой окрестности $U(x)$ точки x существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n \in U(x)$. Так как $x_n \in F$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то для любого $n > N$ выполнено $x_n \in U(x) \cap F$, т. е. $U(x) \cap F \neq \varnothing$. Следовательно, x является точкой прикосновения множества F, и по утверждению 1.1.1 в силу замкнутости F получаем $x \in F$. Таким образом, любая секвенциальная точка прикосновения F принадлежит F, т. е. F является секвенциально замкнутым.

Пример 1.1.4. Приведём пример топологического пространства и его секвенциально замкнутого подмножества, которое не является замкнутым. Рассмотрим топологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau'')$ (см. пример 1.1.2) и множество $S = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ — отрезок вещественной оси с концами в нуле и единице. Множество S не является замкнутым в $(\mathbb{R}, \tau'')$, так как оно более чем счётно, т. е. его дополнение $S^c = \mathbb{R} \backslash S$ отличается от $\mathbb{R}$ на более чем счётное множество S, и поэтому $S^c \notin \tau''$. Тем не менее множество S является секвенциально замкнутым в $(\mathbb{R}, \tau'')$. Действительно, возьмём произвольную секвенциальную точку прикосновения x множества S. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau''} x$. Как показано в примере 1.1.3, существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n = x$. Следовательно, $x \in S$, что и требовалось.

Определение 1.1.10. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Замыканием множества $S \subset X$ (которое будем обозначать $[S]_\tau$) называется пересечение всех замкнутых множеств из X, содержащих S, т. е. $[S]_\tau = \bigcap\limits_{\left\{F:\, \substack{S \subset F \\ F^c \in \tau}\right\}} F$.*

Утверждение 1.1.4. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Тогда замыкание множества S совпадает с множеством всех точек прикосновения множества S, т. е.* $[S]_\tau = \left\{ x \in X \;\middle|\; \forall\, U(x) \in \tau \text{ выполнено } U(x) \cap S \neq \varnothing \right\}$.

Доказательство. Пусть $x \in [S]_\tau$. Предположим, что x не является точкой прикосновения множества S, т. е. существует окрестность $U(x)$ точки x, такая, что $U(x) \cap S = \varnothing$. Следовательно, $S \subset \Big(U(x)\Big)^c$. Так как множество $U(x)$ открыто, то его дополнение $\Big(U(x)\Big)^c$ по определению является замкнутым. Так как x принадлежит замыканию S, то по определению 1.1.10 выполнено включение $x \in \Big(U(x)\Big)^c$. Следовательно, x лежит как в окрестности $U(x)$, так и в её дополнении, чего быть не может. Полученное противоречие доказывает, что замыкание множества S содержится в множестве всех точек прикосновения множества S.

Рассмотрим теперь произвольную точку прикосновения x множества S. Предположим, что $x \notin [S]_\tau$. Тогда существует замкнутое множество $F \supset S$, такое, что $x \notin F$. Следовательно, $x \in F^c$, а $F^c \in \tau$ в силу замкнутости F. Поэтому F^c является окрестностью точки x. Но любая окрестность точки x как точки прикосновения множества S должна пересекаться с S по определению 1.1.7. Однако $S \cap F^c \subset F \cap F^c = \varnothing$, т. е. S не пересекается с F^c. Полученное противоречие доказывает, что множество всех точек прикосновения множества S содержится в замыкании множества S.

Определение 1.1.11. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Секвенциальным замыканием множества $S \subset X$ (которое будем обозначать $[S]_{\text{секв.}}$) называется множество всех секвенциальных точек прикосновения множества S, т. е.*

$$[S]_{\text{секв.}} = \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists\, \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S :\ x_n \xrightarrow{\tau} x \text{ при } \ n \to \infty \right\}.$$

Утверждение 1.1.5. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Тогда $[S]_{\text{секв.}} \subset [S]_\tau$.*

Доказательство. Пусть точка $x \in [S]_{\text{секв.}}$. Тогда существует $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$. Покажем, что x является точкой прикосновения множества S. Рассмотрим произвольную окрестность $U(x)$ точки x. Следовательно, существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n \in U(x)$. Следовательно, для любого $n > N$ получаем $x_n \in U(x) \cap S$, т. е. $U(x) \cap S \neq \varnothing$. Таким образом, точка x является точкой прикосновения множества S, и по утверждению 1.1.4 выполнено включение $x \in [S]_\tau$.

Пример 1.1.5. Покажем на примере, что замыкание множества в топологическом пространстве может не совпадать с его секвенциальным замыканием. Рассмотрим топологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau'')$ (см. пример 1.1.2). В примере 1.1.4 показано, что множество $S = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ является секвенциально замкнутым и не является замкнутым. Следовательно, $S = [S]_{\text{секв.}} \neq [S]_{\tau''}$. Найдем замыкание множества S. По определению τ'' любое непустое замкнутое множество из $(\mathbb{R}, \tau'')$, не совпадающее с $\mathbb{R}$, является не более чем счётным. Следовательно, оно не может содержать несчётное множество S. Таким образом, единственным замкнутым множеством из $(\mathbb{R}, \tau'')$, содержащим S, является $\mathbb{R}$. Поэтому $[S]_{\tau''} = \mathbb{R}$.

Определение 1.1.12. *Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется непрерывным, если для любого $x_0 \in X_1$ и любой окрестности $U\Big(f(x_0)\Big) \in \tau_2$ точки $f(x_0)$ существует окрестность $V(x_0) \in \tau_1$ точки x_0, такая, что для любого $x \in V(x_0)$ выполнено $f(x) \in U\Big(f(x_0)\Big)$, т. е. образ окрестности $V(x_0)$ под действием f содержится в $U\Big(f(x_0)\Big)$: $f\Big(V(x_0)\Big) \subset U\Big(f(x_0)\Big)$.*

Определение 1.1.13. *Пусть X_1 и X_2 — множества, отображение $f\colon X_1 \to X_2$. Прообразом произвольного множества $S \subset X_2$ под действием отображения f называется множество $f^{-1}(S) = \Big\{ x \in X_1 \;\Big|\; f(x) \in S \Big\}$.*

Утверждение 1.1.6. *Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства, отображение $f\colon X_1 \to X_2$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) *f является непрерывным отображением;*

2) *для любого τ_2-открытого множества $G \subset X_2$ его прообраз $f^{-1}(G)$ является τ_1-открытым;*

3) *для любого* τ_2*-замкнутого множества* $F \subset X_2$ *его прообраз* $f^{-1}(F)$ *является* τ_1*-замкнутым.*

Доказательство. Покажем, что условие 1 эквивалентно условию 2. Пусть выполнено условие 1, т. е. f является непрерывным отображением. Для любого множества $G \in \tau_2$ рассмотрим произвольную точку его прообраза $x \in f^{-1}(G)$. Так как $f(x) \in G$, то G является окрестностью точки $f(x)$. Следовательно, в силу непрерывности отображения f существует окрестность $U(x) \in \tau_1$ точки x, такая, что $f\Big(U(x)\Big) \subset G$, т. е. по определению 1.1.13 выполнено включение $U(x) \subset f^{-1}(G)$. Получаем

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} U(x) \subset f^{-1}(G).$$

Таким образом, $f^{-1}(G) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(G)} U(x)$. Значит, прообраз множества G под действием f представляет собой объединение τ_1-открытых множеств. Значит, по определению 1.1.1 прообраз $f^{-1}(G)$ является τ_1-открытым.

Пусть теперь выполнено условие 2. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in X_1$ и окрестность $U\Big(f(x_0)\Big) \in \tau_2$ её образа под действием f. В силу условия 2 множество $V = f^{-1}\Big(U\Big(f(x_0)\Big)\Big)$ является τ_1-открытым и содержит точку x_0. Следовательно, множество $V \in \tau_1$ является окрестностью точки x_0, причём по построению $f(V) \subset U\Big(f(x_0)\Big)$. Таким образом, отображение f является непрерывным.

Покажем, что условия 2 и 3 эквивалентны. Прежде всего заметим, что для любого множества $S \subset X_2$ справедливо равенство $f^{-1}(S^c) = \Big(f^{-1}(S)\Big)^c$. Действительно, включение $x \in f^{-1}(S^c)$ равносильно $f(x) \notin S$, т. е. $x \notin f^{-1}(S)$, что означает справедливость включения $x \in \Big(f^{-1}(S)\Big)^c$. Пусть выполнено условие 2. Тогда для любого τ_2-замкнутого множества $F \subset X_2$ получаем $\Big(f^{-1}(F_2)\Big)^c = f^{-1}(F_2^c) \in \tau_1$, так как множество $F_2^c \in \tau_2$. Следовательно, множество $f^{-1}(F_2)$ является τ_1-замкнутым, т. е. справедливо условие 3. Пусть теперь выполнено условие 3. Тогда для любого τ_2-открытого множества $G \subset X_2$ получаем $f^{-1}(G) = f^{-1}\Big((G^c)^c\Big) = \Big(f^{-1}(G^c)\Big)^c \in$

$\in \tau_1$, так как по условию 3 τ_2-замкнутость множества G^c влечёт τ_1-замкнутость множества $f^{-1}(G^c)$.

Определение 1.1.14. *Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется секвенциально непрерывным, если для любого $x_0 \in X_1$ и любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, сходящейся по топологии τ_1 к точке x_0, последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X_2$ сходится по топологии τ_2 к точке $f(x_0)$, т. е. условие $x_n \xrightarrow{\tau_1} x_0$ при $n \to \infty$ влечёт $f(x_n) \xrightarrow{\tau_2} f(x_0)$ при $n \to \infty$.*

Утверждение 1.1.7. *Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства, отображение $f\colon X_1 \to X_2$ является непрерывным. Тогда отображение f является секвенциально непрерывным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in$ $\in X_1$ и произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, сходящуюся по топологии τ_1 к точке x_0. Рассмотрим произвольную окрестность $U(f(x_0)) \in \tau_2$ точки $f(x_0)$. В силу непрерывности отображения f по определению 1.1.12 существует окрестность $V(x_0) \in \tau_1$ точки x_0, такая, что $f\Big(V(x_0)\Big) \subset U(f(x_0))$. Так как $x_n \xrightarrow{\tau_1} x_0$ при $n \to \infty$, то существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n \in$ $\in V(x_0)$. Следовательно, для любого $n > N$ справедливо включение $f(x_n) \in U(f(x_0))$. Это означает, что $f(x_n) \xrightarrow{\tau_2} f(x_0)$ при $n \to \infty$. Следовательно, отображение f является секвенциально непрерывным.

Пример 1.1.6. Приведём пример секвенциально непрерывного отображения одного топологического пространства на другое, которое не является непрерывным. Рассмотрим тождественное отображение $f\colon (\mathbb{R}, \tau'') \to (\mathbb{R}, \tau')$, где топологии τ'' и τ' в $\mathbb{R}$ описаны в примере 1.1.2. По определению тождественного отображения $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ сходится к $x_0 \in \mathbb{R}$ по топологии τ''. Тогда, как показано в примере 1.1.3, существует номер N, такой, что для любого $n > N$ выполнено $x_n =$ $= x_0$. Следовательно, $f(x_n) = f(x_0)$ для любого $n > N$, что означает сходимость $f(x_n) \xrightarrow{\tau'} f(x_0)$. Следовательно, отображение f является секвенциально непрерывным. Покажем, что отображение f не является непрерывным. Действительно, рассмотрим произвольный $x \in \mathbb{R}$

и любой интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$ конечной длины, содержащий x, т. е. интервал (a,b) является окрестностью точки x в топологическом пространстве $(\mathbb{R},\tau')$. Любая окрестность $V(x) \in \tau''$ точки x в топологическом пространстве $(\mathbb{R},\tau'')$ отличается от $\mathbb{R}$ не более чем на счётное множество. Следовательно, $V(x) \not\subset (a,b)$ и $f(V(x)) = V(x) \not\subset (a,b)$. В силу произвольности окрестности $V(x) \in \tau''$ получаем, что f не является непрерывным.

Выясним, при каких условиях на топологию секвенциально замкнутое подмножество топологического пространства является замкнутым, секвенциальное замыкание подмножества совпадает с его замыканием, а секвенциально непрерывное отображение топологического пространства является непрерывным.

Определение 1.1.15. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство, точка $x \in X$. Семейство окрестностей $\left\{ U_\alpha(x) \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ точки x назовём определяющим, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну окрестность этого семейства, т. е. для любой окрестности $V(x)$ точки x существует $\alpha \in \mathcal{A}$, такое, что $U_\alpha(x) \subset \subset V(x)$.*

Определение 1.1.16. *Будем говорить, что топологическое пространство (X,τ) удовлетворяет аксиоме счётности, если любая точка $x \in X$ имеет счётное определяющее семейство окрестностей.*

Утверждение 1.1.8. *Пусть (X,τ) — топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме счётности, множество $S \subset X$. Тогда любая точка прикосновения множества S является его секвенциальной точкой прикосновения.*

Доказательство. Пусть точка $x \in X$ является точкой прикосновения множества S. По условию она имеет счётное определяющее семейство окрестностей $\{ U_k(x) \}_{k=1}^\infty$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим $V_n(x) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k(x)$. Тогда семейство окрестностей $\{ V_n(x) \}_{n=1}^\infty$ также является определяющим для точки x. Действительно, для любой окрестности $W(x)$ точки x существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что $U_n(x) \subset \subset W(x)$. Так как $V_n(x) \subset U_n(x)$, то $V_n(x) \subset W(x)$, что и требовалось. Так как x является точкой прикосновения множества S, то любая её окрестность пересекается с S. В частности, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in V_n(x) \cap S$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ сходится к точке x. Рассмотрим произвольную окрестность $W(x)$ точки x. Существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что $V_N(x) \subset W(x)$. Тогда для любого $n > N$ находим $x_n \in V_n(x) \subset V_N(x) \subset W(x)$. Таким образом, $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$, т. е. точка x является секвенциальной точкой прикосновения.

Следствие 1.1.1. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме счётности. Тогда любое секвенциально замкнутое подмножество X является замкнутым, а секвенциальное замыкание любого подмножества X совпадает с его замыканием.*

Доказательство. Пусть множество $F \subset X$ является секвенциально замкнутым, т. е. содержит все свои секвенциальные точки прикосновения. В силу утверждения 1.1.8 любая точка прикосновения F является его секвенциальной точкой прикосновения, а значит, принадлежит F. Следовательно, в силу утверждения 1.1.1 множество F является замкнутым.

Далее рассмотрим произвольное множество $S \subset X$. По утверждению 1.1.5 $[S]_{\text{секв.}} \subset [S]_\tau$. Рассмотрим произвольную $x \in [S]_\tau$. В силу утверждения 1.1.4 x является точкой прикосновения множества S. Следовательно, по утверждению 1.1.8 x является секвенциальной точкой прикосновения S, т. е. по определению 1.1.11 $x \in [S]_{\text{секв.}}$. Таким образом, справедливо включение $[S]_\tau \subset [S]_{\text{секв.}}$. Следовательно, $[S]_\tau = [S]_{\text{секв.}}$.

Следствие 1.1.2. *Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства, причём пространство (X_1, τ_1) удовлетворяет аксиоме счётности. Тогда любое секвенциально непрерывное отображение $f \colon X_1 \to X_2$ является непрерывным.*

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что некоторое секвенциально непрерывное отображение $f \colon X_1 \to X_2$ не является непрерывным. Тогда существует точка $x_0 \in X_1$ и окрестность $U\Big(f(x_0)\Big) \in \tau_2$ точки $f(x_0) \in X_2$, такая, что для любой окрестности $V(x_0) \in \tau_1$ точки x_0 выполнено соотношение

$f\Big(V(x_0)\Big) \not\subset U\Big(f(x_0)\Big)$. По условию точка x_0 имеет счётное определяющее семейство окрестностей $\{\, V_k(x_0)\,\}_{k=1}^{\infty}$. Определим для любого $n \in \mathbb{N}$ окрестность $W_n(x_0) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k(x_0)$. Тогда семейство окрестностей $\{\, W_n(x_0)\,\}_{n=1}^{\infty}$ точки x_0 также является определяющим (это показано в доказательстве утверждения 1.1.8). Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $f\Big(W_n(x_0)\Big) \not\subset U\Big(f(x_0)\Big)$, то существует $x_n \in W_n(x_0)$, такое, что $f(x_n) \notin U\Big(f(x_0)\Big)$. Полученная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке x_0. Действительно, для любой окрестности $V(x_0) \in \tau_1$ точки x_0 существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что $W_N(x_0) \subset V(x_0)$. Следовательно, для любого $n > N$ находим $x_n \in W_n(x_0) \subset W_N(x_0) \subset V(x_0)$, т. е. справедливо $x_n \xrightarrow{\tau_1} x_0$ при $n \to \infty$. Однако по построению $f(x_n) \notin U\Big(f(x_0)\Big)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. $f(x_n) \overset{\tau_2}{\not\to} f(x_0)$ при $n \to \infty$. Получили противоречие с секвенциальной непрерывностью отображения f.

Определение 1.1.17. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Семейство открытых подмножеств $\beta \subset \tau$ называется базой топологии τ, если любое τ-открытое множество представимо в виде объединения некоторого семейства подмножеств из β, т. е. для любого $G \in \tau$ существует семейство $\Big\{\, V_\alpha \in \beta \;\Big|\; \alpha \in \mathcal{A} \,\Big\}$ (здесь $\mathcal{A}$ — некоторое множество индексов), такое, что $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$.*

Пример 1.1.7. Рассмотрим $(\mathbb{R}, \tau')$ — топологическое пространство из примера 1.1.2. Покажем, что базой топологии τ' является семейство β, состоящее из всевозможных интервалов вещественной оси, т. е. $\beta = \Big\{\, (a,b) \subset \mathbb{R} \;\Big|\; -\infty < a < b < +\infty \,\Big\}$. Действительно, для любого $G \in \tau'$ и любой точки $x \in G$ существует интервал $I(x) \in \beta$, содержащий x и содержащийся в G, т. е. $x \in I(x) \subset G$. Следовательно, $G = \bigcup\limits_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in G} I(x) \subset G$, т. е. $G = \bigcup\limits_{x \in G} I(x)$. Таким образом, любое множество из τ' представимо в виде объединения интервалов, что и требовалось.

Утверждение 1.1.9. *Пусть X — некоторое множество. Для того чтобы семейство β подмножеств множества X было базой не-*

которой топологии τ в X, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

а) *для любого $x \in X$ существует $V \in \beta$, такое, что $x \in V$, т. е. $X = \bigcup\limits_{V \in \beta} V$;*

б) *для любых множеств $V_1 \in \beta$ и $V_2 \in \beta$ и любого элемента $x \in V_1 \cap V_2$ существует множество $W \in \beta$, такое, что $x \in W \subset V_1 \cap V_2$.*

Доказательство. Пусть τ — некоторая топология в множестве X, а семейство подмножеств β является её базой. Так как по определению топологии $X \in \tau$, то по определению 1.1.17 базы топологии существует семейство подмножеств $\left\{ V_\alpha \in \beta \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$, такое, что $X = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$. Следовательно, для любого $x \in X$ существует $\alpha(x) \in \mathcal{A}$, такое, что $x \in V_{\alpha(x)}$, т. е. выполнено условие а. Далее, так как по определению $\beta \subset \tau$, то для любых множеств $V_1 \in \beta$ и $V_2 \in \beta$ выполнено включение $V_1 \cap V_2 \in \tau$. Следовательно, существует семейство подмножеств $\left\{ W_\alpha \in \beta \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$, такое, что $V_1 \cap V_2 = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} W_\alpha$. Поэтому для любого $x \in V_1 \cap V_2$ существует $\alpha(x) \in \mathcal{A}$, такое, что $x \in W_{\alpha(x)}$, т. е. выполнено условие б.

Пусть теперь семейство β подмножеств множества X удовлетворяет свойствам а и б. Определим семейство подмножеств τ, состоящее из всевозможных объединений множеств из β, т. е. множество $G \in \tau$ тогда и только тогда, когда существует семейство подмножеств $\left\{ V_\alpha \in \beta \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$, такое, что $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$. Покажем, что τ является топологией в X. Для этого проверим для семейства τ определение 1.1.1.

По условию $X = \bigcup\limits_{V \in \beta} V$. Следовательно $X \in \tau$. Пустое множество является пустым объединением подмножеств из β (для пустого индексного множества $\mathcal{A} = \varnothing$). Следовательно, $\varnothing \in \tau$. Таким образом, выполнено условие 1 определения 1.1.1.

Далее рассмотрим произвольное семейство $\left\{ G_\alpha \in \tau \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$. Покажем, что $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha \in \tau$. По условию для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ существуют индексное множество $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ и семейство $\left\{ V_{\tilde{\alpha}} \in \beta \;\middle|\; \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_\alpha \right\}$, такие, что $G_\alpha = \bigcup\limits_{\tilde\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}_\alpha} V_{\tilde\alpha}$. Следовательно, $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\bigcup\limits_{\tilde\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}_\alpha} V_{\tilde\alpha} \right)$, т. е. множество G представлено в виде объединения подмножеств из β, поэтому $G \in \tau$. Таким образом, выполнено условие 2 определения 1.1.1.

Для проверки условия 3 определения 1.1.1 прежде всего покажем, что для любого конечного семейства подмножеств $\{\, V_k \,\}_{k=1}^N \subset \beta$ выполнено включение $V_1 \cap \ldots \cap V_N \in \tau$. По условию б для любого $x \in V_1 \cap V_2$ существует $W(x) \in \beta$, такое, что $x \in W(x) \subset V_1 \cap V_2$. Следовательно,

$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{x \in V_1 \cap V_2} \{x\} \subset \bigcup_{x \in V_1 \cap V_2} W(x) \subset V_1 \cap V_2,$$

т. е. $V_1 \cap V_2 = \bigcup\limits_{x \in V_1 \cap V_2} W(x)$. Значит, множество $V_1 \cap V_2$ представлено в виде объединения элементов β, т. е. по определению $V_1 \cap V_2 \in \tau$. Предположим, рассуждая по индукции, что для $N \geq 2$ пересечение произвольных N подмножеств из β принадлежит τ. Рассмотрим произвольное семейство из $N+1$ подмножества $\{V_k\}_{k=1}^{N+1} \subset \beta$ и произвольный элемент $x \in V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1}$. По предположению индукции множество $V_1 \cap \ldots \cap V_N \in \tau$. Следовательно, для $x \in V_1 \cap \ldots \cap V_N$ существует множество $U(x) \in \beta$, такое, что $x \in U(x) \subset V_1 \cap \ldots \cap V_N$. Поэтому справедливо включение $x \in U(x) \cap V_{N+1}$. Тогда существует $W(x) \in \beta$, такое, что $x \in W(x) \subset U(x) \cap V_{N+1} \subset V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1}$. Следовательно, справедливо равенство

$$V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1} = \bigcup_{x \in V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1}} W(x).$$

Значит, множество $V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1}$ представлено в виде объединения элементов β, т. е. по определению $V_1 \cap \ldots \cap V_{N+1} \in \tau$.

Для окончательной проверки условия 3 определения 1.1.1 рассмотрим конечное семейство подмножеств $\{\, G_k \,\}_{k=1}^N \subset \tau$. Покажем, что $G = \bigcap\limits_{k=1}^N G_k \in \tau$. По условию для любого $k \in \overline{1, N}$ существует индексное множество $\mathcal{A}_k$ и семейство $\left\{\, V_{k,\alpha} \in \beta \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A}_k \,\right\}$, такое, что $G_k = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_k} V_{k,\alpha}$. Следовательно, справедливо равенство

$$G = \bigcap_{k=1}^N \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_k} V_{k,\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, \alpha_N \in \mathcal{A}_N} \Big(V_{1,\alpha_1} \cap \ldots \cap V_{N,\alpha_N} \Big).$$

Как было показано выше, множество $V_{1,\alpha_1} \cap \ldots \cap V_{N,\alpha_N} \in \tau$. Следовательно, множество G представлено в виде объединения элементов семейства τ. Так как свойство 2 определения 1.1.1 для семейства τ уже доказано выше, то получаем включение $G \in \tau$.

Определение 1.1.18. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Семейство открытых подмножеств $\sigma \subset \tau$ называется предбазой топологии τ, если совокупность всевозможных конечных пересечений множеств семейства σ образует базу топологии τ.*

Утверждение 1.1.10. *Пусть X — некоторое множество. Для того чтобы семейство σ подмножеств множества X было предбазой некоторой топологии τ в X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ существовало $V \in \sigma$, такое, что $x \in V$, т. е. $X = \bigcup\limits_{V \in \sigma} V$.*

Доказательство. Пусть τ — некоторая топология в множестве X, а семейство подмножеств σ является её предбазой. Пусть β — база топологии τ, состоящая из всевозможных конечных пересечений множеств из σ. По утверждению 1.1.9 для любого $x \in X$ существует $U \in \beta$, такое, что $x \in U$. Так как множество U представляет собой конечное пересечение множеств из семейства σ, то включение $x \in U$ означает существование множества $V \in \sigma$, такого, что $x \in V$, что и требовалось.

Обратно, пусть семейство подмножеств σ множества X удовлетворяет условию $X = \bigcup\limits_{V \in \sigma} V$. Определим семейство β подмножеств множества X, каждое из которых представляет собой конечное пересечение множеств из σ. Проверим для семейства β условия а и б утверждения 1.1.9. Так как по определению $\sigma \subset \beta$, то $X = \bigcup\limits_{V \in \sigma} V \subset \bigcup\limits_{U \in \beta} U \subset X$, т. е. $X = \bigcup\limits_{U \in \beta} U$. Следовательно, условие а выполнено. Далее для любых множеств U_1 и U_2 из β по определению получаем $U_1 \cap U_2 \in \beta$, так как и U_1, и U_2 являются конечным пересечением подходящих множеств из σ, а значит, и $U_1 \cap U_2$ тоже представляет собой конечное пересечение множеств семейства σ. Следовательно, для любого $x \in U_1 \cap U_2$ существует $W = U_1 \cap U_2 \in \beta$, такое, что $x \in W = U_1 \cap U_2$. Следовательно, условие б выполнено. Таким образом, по утверждению 1.1.9 β является базой некоторой топологии τ в X. Значит, σ является предбазой этой топологии.

П р и м е р 1.1.8. Рассмотрим множество X всех вещественнозначных функций, определённых на отрезке $[0,1]$, т. е. множество X состоит из всех функций вида $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Введём в множестве X топологию τ, такую, что сходимость по этой топологии последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ к функции $y \in X$ (т. е. $x_n \xrightarrow{\tau} y$ при $n \to \infty$) эквивалентна поточечной сходимости $x_n(t) \to y(t)$ при $n \to \infty$ при каждом $t \in [0,1]$. Рассмотрим для любых $x \in X$, $t \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$ множество

$$V(x,t,\varepsilon) = \Big\{ \ z \in X \ \Big| \ |x(t) - z(t)| < \varepsilon \ \Big\}.$$

Объявим систему множеств $\sigma = \{ \ V(x,t,\varepsilon) \ | \ x \in X, \ t \in [0,1], \ \varepsilon > 0 \}$ предбазой искомой топологии. Так как для любого $x \in X$ справедливо включение $x \in V(x,t,\varepsilon)$ при любых $t \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$, то семейство σ удовлетворяет условию утверждения 1.1.10. Следовательно, семейство σ действительно является предбазой некоторой топологии τ в множестве X. Тогда базой β топологии τ является совокупность всевозможных конечных пересечений множеств из σ. Таким образом, множество $G \in \tau$ тогда и только тогда, когда существует семейство множеств $\{ \ W_\alpha \in \beta \ | \ \alpha \in \mathcal{A} \}$, такое, что $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} W_\alpha$. При этом включение $W_\alpha \in \beta$ означает, что существует натуральное число N_α, а для любого номера $n \in \overline{1, N_\alpha}$ существуют $x_{n,\alpha} \in X$, $t_{n,\alpha} \in [0,1]$ и $\varepsilon_{n,\alpha} > 0$, такие, что

$$W_\alpha = \bigcap_{n=1}^{N_\alpha} V\left(x_{n,\alpha}, t_{n,\alpha}, \varepsilon_{n,\alpha}\right).$$

Покажем, что определённая таким образом топология τ является топологией поточечной сходимости в X.

Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится к $y \in X$ по определённой топологии τ. Тогда для любой окрестности $U(y) \in \tau$ точки $y \in X$ существует $N\Big(U(y)\Big) \in \mathbb{N}$, такой, что для всех $n \geq N\Big(U(y)\Big)$ выполнено $x_n \in U(y)$. Возьмём для любых $t \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$ окрестность точки $y \in X$ из предбазы σ, т. е. $U(y) = V(y,t,\varepsilon)$. Тогда для всех $n \geq N\Big(U(y)\Big)$ получаем $x_n \in V(y,t,\varepsilon)$, т. е. $|x_n(t) - y(t)| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к y поточечно на отрезке $[0,1]$.

Обратно, пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится к $y \in \in X$ поточечно на отрезке $[0,1]$. Покажем, что в этом случае последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет сходиться к y по топологии τ. Рассмотрим произвольную окрестность $U(y) \in \tau$ точки $y \in X$. Тогда по определению топологии τ существует $M \in \mathbb{N}$, а для любых $m \in \overline{1, M}$ существуют $z_m \in X$, $t_m \in [0,1]$ и $\varepsilon_m > 0$, такие, что

$$y \in \bigcap_{m=1}^{M} V(z_m, t_m, \varepsilon_m) \subset U(y).$$

Так как по условию для любого $m \in \overline{1, M}$ выполнено $x_n(t_m) \to y(t_m)$ при $n \to \infty$, то существует $N_m \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n \geq N_m$ выполнено неравенство

$$|x_n(t_m) - y(t_m)| < \varepsilon_m - |z_m(t_m) - y(t_m)|.$$

Определим значение $N\Big(U(y)\Big) = \max\limits_{m=\overline{1,M}} N_m$. Тогда для любого $n \geq \geq N\Big(U(y)\Big)$ находим, что для каждого $m \in \overline{1, M}$ выполнено неравенство

$$|x_n(t_m) - z_m(t_m)| \leq |x_n(t_m) - y(t_m)| + |y(t_m) - z_m(t_m)| < \varepsilon_m.$$

Таким образом, $x_n \in \bigcap\limits_{m=1}^{M} V(z_m, t_m, \varepsilon_m) \subset U(y)$ для любого $n \geq \geq N\Big(U(y)\Big)$, т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к y по топологии τ.

Приведём пример подмножества $S \subset X$, секвенциальное замыкание которого по описанной топологии поточечной сходимости τ не совпадает с его топологическим замыканием, т. е. $[S]_{\text{секв.}} \neq [S]_{\tau}$. Определим множество S следующим образом. Функция $x \in S$, если существует разбиение $T = \{t_k\}_{k=0}^{N}$ отрезка $[0,1]$ вида $0 = t_0 < < t_1 < \ldots < t_N = 1$, такое, что график x на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ образуют боковые ребра равнобедренного треугольника с основанием $[t_{k-1}, t_k]$ и высотой, равной единице. Указанное разбиение назовем разбиением, порождающим функцию x. Условно можно назвать S множеством "пилообразных" функций. Покажем, что функция y, равная тождественно нулю на отрезке $[0,1]$, принадлежит топологическому и не принадлежит секвенциальному замыканию S в топологическом пространстве (X, τ). Действительно, рассмотрим произвольную окрестность $U(y) \in \tau$ функции y. Тогда существует $M \in \mathbb{N}$

и для любого $m \in \overline{1, M}$ существуют $z_m \in X$, $t_m \in [0,1]$ и $\varepsilon_m > 0$, такие, что

$$y \in \bigcap_{m=1}^{M} V(z_m, t_m, \varepsilon_m) \subset U(y).$$

Построим "пилоообразную" функцию $x \in S$, порождающее разбиение которой содержит все точки t_m, $m \in \overline{1, M}$. Тогда $x(t_m) = 0 = y(t_m)$ для всех $m \in \overline{1, M}$. Следовательно, справедливо включение

$$x \in \bigcap_{m=1}^{M} V(z_m, t_m, \varepsilon_m) \subset U(y).$$

Таким образом в силу утверждения 1.1.4 $y \in [S]_\tau$. Тем не менее y не является поточечным пределом никакой последовательности из S, т. е. ни одна последовательность из S не сходится к y по топологии τ. Действительно, предположим, рассуждая от противного, что существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} y$ при $n \to \infty$, т. е. $x_n(t) \to y(t)$ при $n \to \infty$ при всех $t \in [0,1]$. Тогда, так как функции x_n непрерывны на отрезке $[0,1]$ и равномерно ограничены ($0 \leq x_n(t) \leq 1$ при всех $t \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$), то по теореме Лебега об ограниченной сходимости (см. теорему 6 из [1, гл. V, § 5, с. 302]) получаем, что

$$\tfrac{1}{2} = \int_0^1 x_n(t)\,dt \overset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 y(t)\,dt = 0,$$

т. е. получили противоречие. Следовательно, $y \notin [S]_{\text{секв.}}$, что и требовалось.

1.2. Метрические пространства

Определение 1.2.1. *Пусть X — некоторое множество. Функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой в множестве X, если выполнены следующие свойства:*

1) $\rho(x,y) \geq 0$ для всех $x \in X$ и $y \in X$, причём $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ для всех $x \in X$ и $y \in X$;

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$ для всех $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Множество X с введённой в нём метрикой ρ называется метрическим пространством (X, ρ).

Определение 1.2.2. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Открытым шаром с центром в точке $x \in X$ радиуса $R > 0$ называется множество*

$$O_R(x) = \left\{ \, y \in X \;\middle|\; \rho(x, y) < R \, \right\}.$$

Утверждение 1.2.1. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Пусть β_ρ — семейство всех открытых шаров множества X, т. е.*

$$\beta_\rho = \left\{ \, O_R(x) \;\middle|\; x \in X, \quad R > 0 \, \right\}.$$

Тогда семейство β_ρ является базой некоторой топологии в множестве X.

Доказательство. Проверим для семейства β_ρ условия а и б утверждения 1.1.9. Для любого $x \in X$ и числа $R > 0$ выполнено включение $x \in O_R(x)$. Следовательно, условие а выполнено. Для произвольных точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и чисел $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$ рассмотрим произвольный элемент $x \in O_{R_1}(x_1) \cap O_{R_2}(x_2)$. Покажем, что существует $R > 0$, такое, что $O_R(x) \subset O_{R_1}(x_1) \cap O_{R_2}(x_2)$. Определим $R = \min \Big\{ R_1 - \rho(x_1, x)\, ,\, R_2 - \rho(x_2, x) \Big\} > 0$. Тогда для любого $y \in O_R(x)$ получаем $\rho(x_k, y) \le \rho(x_k, x) + \rho(x, y) < \rho(x_k, x) + R \le R_k$, т. е. $y \in O_{R_k}(x_k)$ для $k = \overline{1, 2}$, что и требовалось. Следовательно, условие б выполнено. Таким образом, семейство β_ρ действительно является базой некоторой топологии в множестве X.

Определение 1.2.3. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Топология в множестве X, базой для которой служит семейство β_ρ, называется метрической топологией τ_ρ в множестве X.*

Утверждение 1.2.2. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда множество $G \subset X$ является τ_ρ-открытым (т. е. $G \in \tau_\rho$) тогда и только тогда, когда для любого $x \in G$ существует $R > 0$, такое, что $O_R(x) \subset G$.*

Доказательство. Пусть множество $G \in \tau_\rho$. Тогда по определению метрической топологии τ_ρ множество G представляет собой некоторое объединение элементов базы β_ρ — открытых шаров. Следовательно, для любого $x \in G$ существуют $z \in X$ и число $r > 0$, такие, что $x \in O_r(z) \subset G$. Определим число $R = r - \rho(z, x) > 0$. Тогда для любого $y \in O_R(x)$ имеем $\rho(y,z) \le \rho(x,z) + \rho(x,y) < \rho(x,z) + R = r$, т. е. $y \in O_r(z)$. Следовательно, $O_R(x) \subset O_r(z) \subset G$, что и требовалось.

Пусть теперь для любого $x \in G$ существует число $R_x > 0$, такое, что $O_{R_x}(x) \subset G$. Тогда

$$G = \bigcup_{x\in G} \{x\} \subset \bigcup_{x\in G} O_{R_x}(x) \subset G, \quad \text{т. е.} \quad G = \bigcup_{x\in G} O_{R_x}(x).$$

Следовательно, по определению 1.2.3 множество $G \in \tau_\rho$, т. е. является τ_ρ-открытым.

Утверждение 1.2.3. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ сходится к элементу $x \in X$ при $n \to \infty$ по метрической топологии τ_ρ (т. е. $x_n \xrightarrow{\tau_\rho} x$ при $n \to \infty$) тогда и только тогда, когда $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{\tau_\rho} x$ при $n \to \infty$. Тогда для любой окрестности $U(x) \in \tau_\rho$ точки x существует номер $N = N\Big(U(x)\Big)$, такой, что для любого $n > N$ выполнено включение $x_n \in U(x)$. Рассмотрим для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $U(x) = O_\varepsilon(x)$ и определим номер $N_\varepsilon = N\Big(O_\varepsilon(x)\Big)$. Тогда для любого $n > N_\varepsilon$ выполнено $x_n \in O_\varepsilon(x)$, т. е. $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. Следовательно, $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнено $x_n \in O_\varepsilon(x)$. Рассмотрим произвольную окрестность $U(x) \in \tau_\rho$ точки x. В силу утверждения 1.2.2 существует число $R > 0$, такое, что $O_R(x) \subset U(x)$. Следовательно, для любого $n > N(R)$ получаем $x_n \in O_R(x) \subset U(x)$, что и требовалось.

Утверждение 1.2.4. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Тогда метрическая топология τ_ρ удовлетворяет аксиоме счётности.*

Доказательство. Определим для любого элемента $x \in X$ счётное семейство окрестностей $\Big\{O_{\frac{1}{n}}(x)\Big\}_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что это семейство является определяющим для точки x. Рассмотрим произвольную окрестность $U(x) \in \tau_\rho$ точки x. В силу утверждения 1.2.2 существует число $R > 0$, такое, что $O_R(x) \subset U(x)$. Следовательно, для любого номера $n > \frac{1}{R}$ получаем $O_{\frac{1}{n}}(x) \subset O_R(x) \subset U(x)$, что и требовалось для проверки определения 1.1.15.

Следствие 1.2.1. *В метрическом пространстве (X, ρ) всякое секвенциально замкнутое множество является τ_ρ-замкнутым, секвенциальное замыкание любого множества совпадает с его τ_ρ-замыканием, и любое секвенциально непрерывное отображение из (X, ρ) в произвольное топологическое пространство является непрерывным топологически.*

Доказательство. Следует из следствий 1.1.1, 1.1.2.

Замечание 1.2.1. Рассмотрим на множестве X всех вещественнозначных функций, определённых на отрезке $[0, 1]$, топологию τ поточечной сходимости, определённую в примере 1.1.8. В этом же примере построено множество $S \subset X$, такое, что $[S]_\tau \neq [S]_{\text{секв.}}$. Следовательно, топология τ не порождается метрикой, т. е. не метризуема. По этой же причине не метризуема топология τ'' на $\mathbb{R}$, определённая в примере 1.1.2, так как в примере 1.1.4 предъявлено секвенциально замкнутое подмножество топологического пространства $(\mathbb{R}, \tau'')$, не являющееся τ''-замкнутым.

Замечание 1.2.2. Рассмотрим в произвольном множестве X сильнейшую топологию $\tau_{\text{сильн.}}$, состоящую из всех подмножеств множества X. Эта топология порождается метрикой ρ вида

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Действительно, для любого множества $G \subset X$ и любой точки $x \in G$ получаем $O_1(x) = \{x\} \subset G$. Следовательно, в силу утверждения 1.2.2 справедливо включение $G \in \tau_\rho$. Таким образом, любое подмножество из X является τ_ρ-открытым. Поэтому $\tau_{\text{сильн.}} = \tau_\rho$.

Пример 1.2.1. Пусть X — множество всех числовых последовательностей, т. е. любой элемент $x \in X$ является числовой последовательностью вида $x = \{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$, где $x(k) \in \mathbb{R}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Введём в множестве X метрику ρ, сходимость по которой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ к элементу $y \in X$ равносильна поточечной сходимости, т. е. свойство $\rho(x_n, y) \to 0$ при $n \to \infty$ равносильно выполнению для любого $k \in \mathbb{N}$ соотношения $x_n(k) \to y(k)$ при $n \to \infty$. Определим метрику на X следующим образом:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}\,|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \quad \forall\, x, y \in X.$$

Покажем прежде всего, что для определённой функции ρ выполнены аксиомы метрики из определения 1.2.1. Условия 1 и 2 этого определения, очевидно, выполнены. Проверим условие 3 (неравенство треугольника). Заметим, что функция $f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ возрастает при $t \geq 0$, так как функция $\frac{1}{1+t}$ убывает при $t \geq 0$. Так как для любых $x, y, z \in X$ и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|x(k) - - y(k)| \leq |x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|$, то получаем

$$\frac{|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \leq \frac{|x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|}{1 + |x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|} \leq$$
$$\leq \frac{|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} + \frac{|y(k) - z(k)|}{1 + |y(k) - z(k)|}\,.$$

Домножив последнее неравенство на 2^{-k} и просуммировав по $k \in \mathbb{N}$, получим требуемое неравенство треугольника для рассматриваемой функции ρ.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ поточечно сходится к $y \in X$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n(k) \to y(k)$ при $n \to \infty$. Определим для любого $\varepsilon > 0$ номер $M = M(\varepsilon)$, такой, что $2^{-M} < \varepsilon$. Тогда для любых $x, y \in X$ выполнено

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{2^{-k}\,|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-M} < \varepsilon.$$

По условию поточечной сходимости последовательности x_n к элементу y для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(k, \varepsilon)$, такой, что для всех $n > N(k, \varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n(k) - y(k)| < < \varepsilon$. Следовательно, для любого $n > \max\Big\{N(1, \varepsilon), \ldots, N(M(\varepsilon), \varepsilon)\Big\}$ получаем

$$\rho(x_n, y) \leq \sum_{k=1}^{M(\varepsilon)} \frac{2^{-k}\,|x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} + \varepsilon < \sum_{k=1}^{M(\varepsilon)} 2^{-k}\varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Пусть теперь $\rho(x_n, y) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $\varepsilon \in \in (0,1)$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено $\rho(x_n, y) < \varepsilon$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{|x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} < 2^k \varepsilon.$$

Тогда при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ для любого $n > N\left(2^{-k}\varepsilon\right)$ получаем неравенство

$$\frac{|x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} < \varepsilon, \qquad \text{т. е.} \qquad |x_n(k) - y(k)| < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

что означает $x_n(k) \to y(k)$ при $n \to \infty$.

Пример 1.2.2. Приведём ещё один пример секвенциально непрерывного отображения, не являющегося непрерывным топологически. Рассмотрим множество X, состоящее из всех непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с вещественными значениями, лежащими на отрезке $[0,1]$. Введем в X топологию τ поточечной сходимости, описанную в примере 1.1.8. Определим также метрическое пространство (X, ρ), где метрика $\rho(x, y) = \int\limits_0^1 \big|x(t) - y(t)\big|\, dt$. Покажем, что функция ρ удовлетворяет аксиомам метрики из определения 1.2.1. Очевидно, что $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$. Если $\rho(x, y) = 0$ и при этом существует $t_0 \in [0,1]$, такое, что $|x(t_0) - - y(t_0)| > 0$, то в силу непрерывности функций x и y в точке t_0 существует $\delta \in (0,1)$, такое, что для любого $t \in [0,1]$ вида $|t - t_0| \leq \delta$ выполнено неравенство $|x(t) - y(t)| > \frac{|x(x_0) - y(t_0)|}{2}$. Следовательно, в силу известных свойств интеграла Римана получаем

$$\rho(x, y) \geq \int\limits_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0,1]} |x(t) - y(t)| \geq \tfrac{\delta}{2} |x(t_0) - y(t_0)| > 0,$$

т. е. получили противоречие. Далее для любых $x, y, z \in X$ и любого $t \in [0,1]$ выполнено неравенство $|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |y(t) - -z(t)|$. Интегрируя это неравенство по $t \in [0,1]$, получим неравенство треугольника для ρ.

Рассмотрим тождественное отображение $I\colon (X, \tau) \to (X, \rho)$, т. е. $I(x) = x$ для любого $x \in X$. Покажем, что I секвенциально непрерывно. Действительно, пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$

сходится поточечно к $y \in X$ на $[0,1]$. Так как $0 \leq x_n(t) \leq 1$, то $|x_n(t) - y(t)| \leq 2$ для любого $t \in [0,1]$. Также $|x_n(t) - y(t)| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $t \in [0,1]$. Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости (см. теорему 6 из [1, гл. V, § 5, с. 302]) получаем $\rho\Big(I(x_n), I(y)\Big) = \int\limits_0^1 \big|x_n(t) - y(t)\big|\, dt \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что I не является топологически непрерывным отображением. Рассмотрим множество $S \subset X$ "пилообразных" функций, описанное в примере 1.1.8. Как показано в примере 1.1.8, тождественно нулевая на $[0,1]$ функция y_0 является точкой прикосновения множества S. Тогда получаем, что для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и для любой окрестности $U(y_0) \in \tau$ функции y_0 существует элемент $x_0 \in U(y_0) \cap S$, такой, что $\rho\Big(I(x_0), I(y_0)\Big) = \int\limits_0^1 x_0(t)\, dt = \varepsilon_0$. Следовательно, отображение I разрывно в точке y_0, так как образ любой окрестности $U(y_0)$ точки y_0 в топологическом пространстве (X, τ) не содержится в открытом шаре радиуса ε_0 с центром в $I(y_0) = y_0$ в метрическом пространстве (X, ρ).

1.3. Сепарабельные метрические пространства

Определение 1.3.1. *Множество S из метрического пространства (X, ρ) называется всюду плотным в X, если его замыкание совпадает с X, т. е. для любого $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует $y \in S$, такое, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.*

Определение 1.3.2. *Метрическое пространство (X, ρ) называется сепарабельным, если в нём существует счётное всюду плотное множество.*

Пример 1.3.1. Рассмотрим метрическое пространство (X, ρ) из примера 1.2.1, состоящее из всех числовых последовательностей, с метрикой поточечной сходимости:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}\, |x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \quad \forall\, x, y \in X.$$

Покажем, что это сепарабельное метрическое пространство. Для любого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$S_N = \left\{\, x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \;\middle|\; x(k) = 0 \;\; \forall\, k > N \,\right\}.$$

Множество S_N состоит из всех числовых последовательностей с рациональными значениями, тривиальными на номерах, больших N. Очевидно, что S_N равномощно $\mathbb{Q}^N$, которое является счётным как конечное декартово произведение счётного множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Определим множество $S = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} S_N$. Множество S счётно как счётное объединение счётных множеств. Покажем, что S всюду плотно в X, т. е. $[S]_{\tau_\rho} = X$. Действительно, рассмотрим произвольный элемент $x \in X$ и число $\varepsilon > 0$. Существует номер N_ε, такой, что $\sum\limits_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем число $\delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\left(\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon} 2^{-k}\right)\delta_\varepsilon < < \frac{\varepsilon}{2}$. Для любого $k \in \overline{1, N_\varepsilon}$ существует рациональное число $y(k)$, такое, что $|x(k) - y(k)| < \delta_\varepsilon$. Полагая $y(k) = 0$ при $k > N_\varepsilon$, получаем элемент $y \in S_{N_\varepsilon} \subset S$. При этом имеем неравенство

$$\rho(x, y) < \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} 2^{-k}\delta_\varepsilon + \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось.

Заметим, что множество $A \subset X$, состоящее из всех числовых последовательностей с рациональными значениями, тоже, очевидно, является всюду плотным в X. Действительно, для любого элемента $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ можно для каждого номера k определить рациональное число $z(k)$ вида $|x(k) - z(k)| < \varepsilon$. Таким образом, определён элемент $z \in A$, такой, что $\rho(x, z) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon$. Однако множество A не является счётным. Покажем это. Предположим, рассуждая от противного, что множество A является счётным. Следовательно, можно взаимно однозначным образом занумеровать все элементы множества A, представив его в виде $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Определим элемент $z \in X$ следующим образом:

$$z(k) = \begin{cases} 0, & a_k(k) \neq 0, \\ 1, & a_k(k) = 0 \end{cases} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, по построению z и определению множества A справедливо включение $z \in A$. Однако $z \neq a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, так как $z(n) \neq a_n(n)$. Следовательно, $z \notin A$. Получили противоречие.

Утверждение 1.3.1. *Пусть в метрическом пространстве (X,ρ) существует несчётное подмножество A_0 (т. е. бесконечное множество, неравномощное множеству натуральных чисел), для которого найдётся число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любых различных элементов $a, b \in A_0$ выполнено неравенство $\rho(a,b) \geq \varepsilon_0$. Тогда метрическое пространство (X,ρ) является несепарабельным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $S \subset X$, всюду плотное в X. Тогда для любого элемента $a \in A_0$ существует элемент $y_a \in S$, такой, что $\rho(a, y_a) \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$. Тогда для любых различных элементов $a, b \in A_0$ получаем неравенство

$$\varepsilon_0 \leq \rho(a,b) \leq \rho(a,y_a) + \rho(b,y_b) + \rho(y_a,y_b) \leq \tfrac{2}{3}\varepsilon_0 + \rho(y_a,y_b).$$

Следовательно, $\rho(y_a,y_b) \geq \frac{\varepsilon_0}{3} > 0$, т. е. $y_a \neq y_b$. Таким образом, определено инъективное отображение $A_0 \ni a \mapsto y_a \in S$. Поэтому множество $S_0 = \{\, y_a \mid a \in A_0 \,\} \subset S$ равномощно множеству A_0, т. е. само является несчётным. Следовательно, несчётным является и множество S, так как содержит несчётное подмножество. Таким образом, любое всюду плотное в X множество является несчётным, что означает несепарабельность метрического пространства (X,ρ).

Пример 1.3.2. Рассмотрим на множестве X всех числовых последовательностей метрику d равномерной сходимости вида

$$d(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{|x(k)-y(k)|}{1+|x(k)-y(k)|} \right) \quad \forall\, x,y \in X.$$

Покажем, что метрическое пространство (X,d) является несепарабельным. Для любого числа α рассмотрим числовую последовательность $x_\alpha(k) = \alpha k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Определим множество $A_0 = \left\{ x_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset X$. Ясно, что множество A_0 равномощно вещественной оси и поэтому несчётно. При этом для любых различных чисел α и β имеем

$$d(x_\alpha, x_\beta) \geq \lim_{k\to\infty} \left(\frac{|\alpha-\beta|}{\frac{1}{k}+|\alpha-\beta|} \right) = 1 = \varepsilon_0.$$

Следовательно, в силу утверждения 1.3.1 метрическое пространство (X,d) несепарабельно.

П р и м е р 1.3.3. Рассмотрим множество $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных на вещественной оси вещественнозначных функций, имеющих конечные пределы на $+\infty$ и $-\infty$, с метрикой равномерной сходимости вида

$$\rho_c(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - y(t)| \quad \forall\, x, y \in C(\mathbb{R}).$$

Так как непрерывная на $\mathbb{R}$ вещественная функция, имеющая конечные пределы на $\pm\infty$, является ограниченной на $\mathbb{R}$, то $\rho_c(x, y) < +\infty$ для любых $x, y \in C(\mathbb{R})$. Покажем, что метрическое пространство $\Big(C(\mathbb{R}), \rho_c\Big)$ является сепарабельным. Для любых натуральных чисел N и M определим множество $S_{N,M} \subset C(\mathbb{R})$, такое, что любая функция $x \in S_{N,M}$ имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} Q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_M t^M, & -N \le t \le N, \\ Q(N), & t > N, \\ Q(-N), & t < -N, \end{cases}$$

где $a_0, \ldots, a_M$ — произвольные рациональные числа. Ясно, что множество $S_{N,M}$ равномощно множеству Q^{M+1}, которое является счётным как конечное декартово произведение счётного множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда множество $S = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcup\limits_{M=1}^{\infty} S_{N,M} \subset C(\mathbb{R})$ является счётным как счётное объединение счётных множеств $S_{N,M}$. Покажем, что множество S является всюду плотным в $C(\mathbb{R})$. Рассмотрим произвольную функцию $x \in C(\mathbb{R})$ и число $\varepsilon > 0$. По условию существует число $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, такое, что для всех $t \ge \delta$ и $\tau \le -\delta$ выполнены неравенства

$$|x(t) - x(+\infty)| \le \varepsilon \quad \text{и} \quad |x(\tau) - x(-\infty)| \le \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное натуральное число $N > \delta$. На отрезке $[-N, N]$ по теореме Вейерштрасса непрерывную функцию x можно равномерно с точностью ε приблизить многочленом $P(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_M t^M$, т. е. справедливо неравенство

$$\sup_{t \in [-N, N]} |x(t) - P(t)| \le \varepsilon.$$

Выберем число $\gamma > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$\gamma \left(1 + N + \ldots + N^M\right) \le \varepsilon.$$

Для любого $k \in \overline{0, M}$ выберем рациональное число a_k так, чтобы $|a_k - b_k| \leq \gamma$. Определим многочлен $Q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_M t^M$. Таким образом, определена функция $y \in S_{N,M} \subset S$ следующего вида:

$$y(t) = \begin{cases} Q(t), & -N \leq t \leq N, \\ Q(N), & t > N, \\ Q(-N), & t < -N. \end{cases}$$

Так как для любого $t \in [-N, N]$ справедливо неравенство

$$|Q(t) - P(t)| \leq \sum_{k=0}^{M} |a_k - b_k| \, |t|^k \leq \gamma \sum_{k=0}^{M} N^M \leq \varepsilon,$$

то получаем

$$\sup_{t \in [-N,N]} |x(t) - y(t)| \leq \sup_{t \in [-N,N]} \Big(|x(t) - P(t)| + |P(t) - Q(t)| \Big) \leq 2\varepsilon.$$

Далее для любого $t > N$ имеем

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - x(+\infty)| + |x(+\infty) - x(N)| + \\ + |x(N) - P(N)| + |P(N) - Q(N)| \leq 4\varepsilon.$$

Аналогично для любого $\tau < -N$ имеем

$$|x(\tau) - y(\tau)| \leq |x(\tau) - x(-\infty)| + |x(-\infty) - x(-N)| + \\ + |x(-N) - P(-N)| + |P(-N) - Q(-N)| \leq 4\varepsilon.$$

Следовательно, справедливо неравенство $\rho_c(x, y) \leq 4\varepsilon$, что и требовалось.

Пример 1.3.4. Рассмотрим множество $BC(\mathbb{R})$ всех непрерывных и ограниченных на вещественной оси вещественнозначных функций с метрикой равномерной сходимости ρ_c из примера 1.3.3. Покажем, что метрическое пространство $\big(BC(\mathbb{R}), \rho_c\big)$ несепарабельно. Рассмотрим неотрицательную "пилообразную" функцию $x \in BC(\mathbb{R})$ вида: для любого целого числа k на отрезке $I_k = \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]$ функция x либо тождественно нулевая, либо её график образуют боковые рёбра равнобедренного треугольника с основанием I_k и единичной высотой. Множество всех таких "пилообразных" функций обозначим A_0. Любая функция $x \in A_0$ однозначно определяется своими значениями $x(k)$ в целых точках k. При этом для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $x(k) = 0$ либо $x(k) = 1$. Следовательно, множество A_0 равномощно множеству всех числовых последовательностей, принимающих значения 0 и 1, которое в свою очередь равномощно промежутку $[0, 1)$. Следовательно, множество A_0 несчётно. При этом для любых двух различных функций $x, y \in A_0$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$, такое, что $|x(k_0) - y(k_0)| = 1$. Следовательно, $\rho_c(x, y) \geq |x(k_0) - y(k_0)| = 1 = \varepsilon_0$. Таким образом, по утверждению 1.3.1 получаем несепарабельность метрического пространства $\Big(BC(\mathbb{R}), \rho_c\Big)$.

Утверждение 1.3.2. *Пусть метрическое пространство (X, ρ) является сепарабельным. Пусть бесконечное множество $A \subset X$. Тогда метрическое пространство (A, ρ) тоже является сепарабельным.*

Доказательство. Пусть счётное множество $S = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ из X является всюду плотным в пространстве X. Определим функцию расстояния от произвольного элемента $x \in X$ до множества A вида $\rho(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \rho(x, a)$. Тогда по определению точной нижней грани числовой функции для любых номеров n и m существует элемент $a_{n,m} \in A$, такой, что выполнено неравенство

$$\rho(z_n, a_{n,m}) \leq \rho(z_n, A) + \frac{1}{m}.$$

Рассмотрим не более чем счётное множество $B = \{a_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty} \subset A$. Покажем, что множество B является всюду плотным в A. Так как множество S всюду плотно в X, для любого элемента $a \in A$ и числа $\varepsilon > 0$ существует номер n, такой, что справедливо неравенство $\rho(a, z_n) \leq \varepsilon$. Следовательно, $\rho(z_n, A) \leq \rho(z_n, a) \leq \varepsilon$. Рассмотрим номер m вида $\frac{1}{m} \leq \varepsilon$. Тогда получаем неравенства $\rho(z_n, a_{n,m}) \leq \rho(z_n, A) + \frac{1}{m} \leq 2\varepsilon$. Отсюда в силу неравенства треугольника находим

$$\rho(a, a_{n,m}) \leq \rho(a, z_n) + \rho(z_n, a_{n,m}) \leq 3\varepsilon.$$

Следовательно, множество $B \subset A$ является всюду плотным в A. Покажем, что множество B является счётным. Так как B не более чем счётно, то достаточно показать бесконечность множества B. Предположим, рассуждая о противного, что множество B конечно. Поскольку B всюду плотно в A, то для любого элемента $a \in A$ имеем равенство $\rho(a,B) = \inf\limits_{b\in B} \rho(a,b) = 0$. Так как по предположению множество B конечно, то нижняя грань в определении величины $\rho(a,B)$ достигается, т. е. существует элемент $b_a \in B$, такой, что $\rho(a,B) = \rho(a,b_a) = 0$. Следовательно, получаем равенство $a = b_a \in B$. Таким образом, справедливо включение $A \subset B$. Обратное включение $B \subset A$ выполнено по построению множества B. Поэтому имеет место равенство $A = B$. Но это невозможно, так как множество A по условию бесконечно, а B по предположению конечно. Полученное противоречие доказывает бесконечность не более чем счётного множества B. Следовательно, B является счётным, что и требовалось.

1.4. Полные метрические пространства

Определение 1.4.1. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов метрического пространства (X,ρ) называется фундаментальной (или ρ-фундаментальной), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n > N$ и $m > N$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Заметим, что сходящаяся в метрическом пространстве (X,ρ) последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ к элементу $x \in X$ является фундаментальной. Действительно, условие $x_n \xrightarrow{\tau_\rho} x$ при $n \to \infty$ в силу утверждения 1.2.3 означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $M(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > M(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Определим номер $N(\varepsilon) = M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Тогда для любых $n > N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$, пользуясь неравенством треугольника, находим

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Заметим также, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из метрического пространства (X,ρ) может сходиться только к одному пределу. Действительно, если для элементов $y \in X$ и $z \in X$ выполнены условия $x_n \xrightarrow{\tau_\rho} y$ и $x_n \xrightarrow{\tau_\rho} z$ при $n \to \infty$, то, пользуясь неравенством треугольника, получаем $0 \le \rho(y,z) \le \rho(x_n,y) + \rho(x_n,z) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\rho(y,z) = 0$, и по определению 1.2.1 получаем $y = z$.

Определение 1.4.2. *Метрическое пространство (X,ρ) называется полным, если любая фундаментальная последовательность из (X,ρ) является сходящейся.*

З а м е ч а н и е 1.4.1. Полнота метрического пространства является свойством метрики, но не метрической топологии. Приведём пример множества X и двух метрик ρ и d в нём, таких, что метрическое пространство (X, ρ) является полным, метрическое пространство (X, d) не является полным, однако метрические топологии τ_ρ и τ_d совпадают, т. е. $\tau_\rho = \tau_d$. Пусть множество $X = \mathbb{R}$ — вещественная ось, $\rho(x, y) = |x - y|$, $d(x, y) = |e^x - e^y|$. Метрическое пространство $(\mathbb{R}, \rho)$ является полным в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности. Покажем, что метрическое пространство $(\mathbb{R}, d)$ не является полным. Рассмотрим последовательность $x_n = -n$. Покажем, что она является d-фундаментальной. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ и любых $n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$ и $m > n$ имеем $d(x_n, x_m) = |e^{-n} - e^{-m}| < e^{-n} < \varepsilon$, что и требовалось. Тем не менее последовательность $x_n = -n$ не является сходящейся в метрическом пространстве $(\mathbb{R}, d)$, так как для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty} |e^{-n} - e^x| = e^x > 0$.

Покажем теперь, что справедливо равенство метрических топологий $\tau_\rho = \tau_d$. Пусть множество $G \subset \mathbb{R}$ является ρ-открытым, т. е. $G \in \tau_\rho$. Надо показать, что $G \in \tau_d$, т. е. по утверждению 1.2.2 для любого $x \in G$ надлежит указать число $R = R(x) > 0$, такое, что для любого $y \in \mathbb{R}$ вида $d(x, y) < R$ будет выполнено включение $y \in G$. Так как $G \in \tau_\rho$, то для $x \in G$ существует число $r = r(x) > 0$, такое, что для любого $y \in \mathbb{R}$ вида $\rho(x, y) < r$ имеем $y \in G$. Так как функция натурального логарифма непрерывна в точке $e^x > 0$, то существует $\delta = \delta(x) > 0$, такое, что для любого $z \in \mathbb{R}$ вида $|z - e^x| < \delta$ выполнено неравенство $|\ln z - \ln e^x| < r$. Следовательно, для любого числа y вида $|e^y - e^x| < \delta$ справедливо неравенство $|\ln e^y - \ln e^x| = |y - x| < r$, т. е. $y \in G$. Таким образом, число $R(x) = \delta(x)$ является искомым. Следовательно, множество G является d-открытым. Таким образом, доказано включение $\tau_\rho \subset \tau_d$.

Обратно, пусть множество $G \in \tau_d$. Требуется для любого $x \in G$ найти число $r = r(x) > 0$, такое, что для любого $y \in \mathbb{R}$ вида $\rho(x, y) < r$ будет выполнено включение $y \in G$. Так как множество $G \in \tau_d$, то для $x \in G$ существует число $R = R(x) > 0$, такое, что для любого $y \in \mathbb{R}$ вида $d(x, y) < R$ имеем $y \in G$. Так как экспоненциальная функция непрерывна в точке x, то существует $\delta = \delta(x) > 0$, такое, что для любого $y \in \mathbb{R}$ вида $|y - x| < \delta$ выполнено неравенство $|e^y - e^x| < R$, а значит, $y \in G$. Таким образом, число $r(x) = \delta(x)$ является искомым. Следовательно, множество G является ρ-открытым. Таким образом, доказано включение $\tau_d \subset \tau_\rho$.

У т в е р ж д е н и е 1.4.1. *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, множество $S \subset X$. Тогда метрическое пространство (S, ρ) является полным тогда и только тогда, когда множество S является замкнутым в метрическом пространстве (X, ρ).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть метрическое пространство (S, ρ) является полным. Рассмотрим произвольную секвенциальную точку прикосновения $z \in X$ множества S. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $\rho(x_n, z) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}$ является фундаментальной в метрическом пространстве (S, ρ). Тогда в силу полноты (S, ρ) существует $x \in S$, такой, что $\rho(x_n, z) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\rho(x, z) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, z) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\rho(x, z) = 0$. Это означает равенство $x = z \in S$. Итак, множество S является секвенциально замкнутым в (X, ρ), а по следствию 1.2.1 является замкнутым. Заметим, что при доказательстве замкнутости множества S использовалась полнота (S, ρ), а не (X, ρ).

Пусть теперь множество S является замкнутым в полном метрическом пространстве (X, ρ). Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$. Тогда эта последовательность будет фундаментальной и в (X, ρ). В силу полноты пространства (X, ρ) существует $x \in X$, такой, что $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, x является секвенциальной точкой прикосновения множества S. В силу замкнутости S получаем, что $x \in S$. Следовательно, любая фундаментальная последовательность из S сходится к элементу S, т. е. (S, ρ) является полным метрическим пространством.

П р и м е р 1.4.1. Приведём пример неполного метрического пространства и его замкнутого подмножества, не являющегося полным метрическим пространством. Для этого рассмотрим метрическое пространство $(\mathbb{R}, d)$, где метрика $d(x, y) = |e^x - e^y|$ (см. замечание 1.4.1). Как показано в замечании 1.4.1, метрическое пространство $(\mathbb{R}, d)$ не является полным. Его подмножество $S = (-\infty, 0]$ с метрикой d также представляет собой неполное метрическое пространство, так как d-фундаментальная последовательность $x_n = -n$ содержится в S и не является сходящейся (см. замечание 1.4.1). Тем не менее множество S является τ_d-замкнутым. Действительно, хорошо известно, что для обычной метрики $\rho(x, y) = |x - y|$ в $\mathbb{R}$ множество S является τ_ρ-замкнутым, так как его дополнение $S^c = (0, +\infty)$ является

τ_ρ-открытым. Но, как показано в замечании 1.4.1, $\tau_d = \tau_\rho$. Следовательно, S^c является и τ_d-открытым, значит, само множество S является τ_d-замкнутым.

Определение 1.4.3. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Замкнутым шаром с центром в точке $x \in X$ радиуса $R > 0$ называется множество*

$$B_R(x) = \left\{ y \in X \;\middle|\; \rho(x, y) \le R \right\}.$$

Замечание 1.4.2. В метрическом пространстве (X, ρ) для любого $x \in X$ и числа $R > 0$ множество $B_R(x)$ является τ_ρ-замкнутым. Действительно, рассмотрим произвольную точку z из его дополнения, т. е. $\rho(x, z) > R$. Определим число $r = \rho(x, z) - R > 0$. Покажем, что справедливо включение $O_r(z) \subset X \backslash B_R(x)$. Для любого $y \in O_r(z)$ по неравенству треугольника имеем $\rho(x, y) \ge \rho(x, z) - \rho(y, z) > \rho(x, z) - r = R$, т. е. $y \in X \backslash B_R(x)$, что и требовалось. Следовательно, по утверждению 1.2.2 дополнение множества $B_R(x)$ является τ_ρ-открытым, т. е. по определению 1.1.6 само множество $B_R(x)$ является τ_ρ-замкнутым.

Теорема 1.4.1 (*принцип вложенных шаров*). *Метрическое пространство (X, ρ) является полным тогда и только тогда, когда любая убывающая по вложению последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть метрическое пространство (X, ρ) является полным. Рассмотрим последовательность замкнутых шаров $\left\{B_{R_n}(x_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$, убывающую по вложению, т. е.

$$B_{R_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{R_n}(x_n) \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbb{N},$$

причём $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Требуется доказать, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{R_n}(x_n) \ne 0$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ центров шаров. Покажем, что она является фундаментальной. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $R_n < \varepsilon$. Так как для любого $m > n$ справедливо включение $x_m \in B_{R_m}(x_m) \subset B_{R_n}(x_n)$, то $\rho(x_m, x_n) \le R_n$. Следовательно, для любых $m, n > N(\varepsilon)$ получаем $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Тогда в силу полноты метрического пространства (X, ρ) существует $x \in X$, такой, что $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{R_n}(x_n)$. Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ и $m > n$ получаем

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, x) \leq R_n + \rho(x_m, x) \to R_n \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Таким образом, $\rho(x_n, x) \leq R_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что и требовалось.

Предположим теперь, что в метрическом пространстве (X, ρ) любая убывающая по вложению последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Рассмотрим в X произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует номер m_k, такой, что для любых $n, m \geq m_k$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) \leq 2^{-k-1}$. Определим последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом: $n_1 = m_1$, $n_{k+1} = \max\{m_{k+1}, n_k + 1\}$. Тогда $n_{k+1} > n_k \geq m_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq 2^{-k-1}$. Рассмотрим последовательность замкнутых шаров с центрами в точках x_{n_k} и радиусами $R_k = 2^{-k} \to 0$ при $k \to \infty$. Покажем, что эта последовательность шаров является убывающей по вложению. Действительно, для любого $y \in B_{R_{k+1}}(x_{n_{k+1}})$ имеем

$$\rho(x_{n_k}, y) \leq \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, y) \leq 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = 2^{-k} = R_k.$$

Таким образом, $B_{R_{k+1}}(x_{n_{k+1}}) \subset B_{R_k}(x_{n_k})$ для любого $k \in \mathbb{N}$. При этом $R_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, существует $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{R_k}(x_{n_k})$, т. е. $\rho(x_{n_k}, x) \leq R_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $k = k(\varepsilon) > \log_2 \frac{2}{\varepsilon}$, такой, что для любого $n \geq n_{k(\varepsilon)}$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x, x_{n_k}) \leq 2^{-k-1} + 2^{-k} < 2^{-k+1} < \varepsilon.$$

Это означает, что $x_n \xrightarrow{\tau_\rho} x$ при $n \to \infty$, что и требовалось.

П р и м е р 1.4.2. Покажем, что в полном метрическом пространстве пересечение замкнутых шаров, образующих убывающую по вложению последовательность, может быть пустым, если радиусы шаров не стремятся к нулю (см. [5, гл. 12, с. 201]). Рассмотрим множество $X = \mathbb{N}$, в котором метрика задана формулой

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n, \\ 0, & m = n. \end{cases}$$

Покажем, что для функции ρ выполнены аксиомы метрики из определения 1.2.1. Условия 1 и 2 очевидны. Покажем, что выполнено условие 3, т. е. неравенство треугольника. Действительно, для любых различных натуральных чисел m, n, k получаем

$$\rho(m,n) = 1 + \tfrac{1}{m+n} \le 2 \le 1 + \tfrac{1}{m+k} + 1 + \tfrac{1}{n+k} = \rho(m,k) + \rho(n,k).$$

Покажем, что метрическое пространство $(\mathbb{N}, \rho)$ является полным. Если последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ρ-фундаментальной, то существует номер N, такой, что для всех $k, s \ge N$ выполнено неравенство $\rho(n_k, n_s) < 1$. Если $n_k \ne n_s$, то $\rho(n_k, n_s) > 1$. Следовательно, $n_k = n_s = m$. Таким образом, всякая фундаментальная в метрическом пространстве $(\mathbb{N}, \rho)$ последовательность является стационарной с некоторого номера, а значит, сходящейся. Далее для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим замкнутый шар с центром в n и радиуса $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$, т. е.

$$B_{r_n}(n) = \left\{ m \in \mathbb{N} \;\middle|\; \rho(m,n) \le r_n \right\}.$$

Тогда число $m \in \mathbb{N}$, не равное n, принадлежит $B_{r_n}(n)$ тогда и только тогда, когда

$$1 + \tfrac{1}{m+n} \le 1 + \tfrac{1}{2n}, \quad \text{т. е.} \quad m \ge n.$$

Таким образом, справедливо равенство $B_{r_n}(n) = \{m\}_{m=n}^{\infty}$. Следовательно, $B_{r_n}(n) \supset B_{r_{n+1}}(n+1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. построенные шары образуют убывающую по вложению последовательность, при этом $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(n) = \varnothing$.

Определение 1.4.4. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Диаметром непустого множества $S \subset X$ называется величина*

$$\operatorname{diam} S = \sup_{x,y \in S} \rho(x,y).$$

Утверждение 1.4.2. *Метрическое пространство (X, ρ) является полным тогда и только тогда, когда любая убывающая по вложению последовательность непустых замкнутых множеств из X, диаметр которых стремится к нулю, имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть метрическое пространство (X, ρ) является полным. Рассмотрим произвольную последовательность

$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ непустых замкнутых подмножеств X, таких, что $F_{n+1} \subset \subset F_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $d_n = \operatorname{diam} F_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для любого номера n существует точка $x_n \in F_n$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ρ-фундаментальной. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $d_n < \varepsilon$. Так как для любого номера $m > n$ справедливо включение $x_m \in F_m \subset F_n$, то получаем $\rho(x_m, x_n) \leq d_n < \varepsilon$. Таким образом, для любых $n, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Следовательно, в силу полноты метрического пространства (X, ρ) получаем, что существует элемент $x \in X$, такой, что $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что для любого номера n справедливо включение $x \in F_n$. Так как для любого $m > n$ выполнено включение $x_m \in F_n$ и $x_m \xrightarrow{\tau_\rho} x$ при $m \to \infty$, то x является секвенциальной точкой прикосновения множества F_n. Тогда в силу замкнутости F_n и утверждения 1.1.3 получаем, что $x \in F_n$. Следовательно, $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, что и требовалось.

Пусть теперь любая убывающая по вложению последовательность непустых замкнутых множеств из X, диаметр которых стремится к нулю, имеет непустое пересечение. Рассмотрим в X произвольную последовательность замкнутых шаров $F_n = B_{R_n}(x_n)$, такую, что $F_{n+1} \subset F_n$ для любого номера n и $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для диаметра $d_n = \operatorname{diam} F_n$ шара F_n получаем

$$d_n = \sup_{y,z\in F_n} \rho(y,z) \leq \sup_{y,z\in F_n} \Big(\rho(y,x_n) + \rho(z,x_n)\Big) \leq \\ \leq R_n + R_n = 2R_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, по условию $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$. Тогда по теореме 1.4.1 метрическое пространство (X, ρ) является полным.

П р и м е р 1.4.3. Рассмотрим линейное пространство ℓ_∞, состоящее из ограниченных числовых последовательностей, метрика в котором задаётся формулой

$$\rho(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k) - y(k)| \quad \forall\, x, y \in \ell_\infty.$$

Покажем, что метрическое пространство ℓ_∞ является полным. Для этого рассмотрим произвольную ρ-фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_\infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $|x_n(k) - x_m(k)| \leq \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, то числовая последовательность $\{x_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{R}$. Тогда по критерию Коши сходимости числовой последовательности для любого $k \in \mathbb{N}$ существует числовой предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = z(k) \in \mathbb{R}$. Получили числовую последовательность z, которая по построению является поточечным пределом последовательности x_n. Далее для любых $k \in \mathbb{N}$ и $n, m > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ перейдём в неравенстве $|x_n(k) - x_m(k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ к пределу по $m \to \infty$. Получим $|x_n(k) - z(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Следовательно, $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k) - z(k)| = \rho(x_n, z) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ для любого $n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Таким образом, $\rho(x_n, z) \to 0$ при $n \to \infty$. Осталось показать, что $z \in \ell_\infty$, т. е. z является ограниченной числовой последовательностью. Так как $x_n \in \ell_\infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то для $n = N(1) + 1$ существует $R > 0$, такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|x_n(k)| \leq R$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ находим $|z(k)| \leq |z(k) - x_n(k)| + |x_n(k)| \leq \rho(z, x_n) + R \leq 1 + R$. Следовательно, z — ограниченная числовая последовательность.

Предъявим в ℓ_∞ убывающую по вложению последовательность замкнутых множеств, пересечение которых пусто, а диаметры конечны и не стремятся к нулю. Рассмотрим для любого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$F_n = \left\{ x \in \ell_\infty \;\middle|\; x(1) = \ldots = x(n) = 0,\ \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = 1 \right\}.$$

Очевидно, для любого номера n выполнено включение $F_{n+1} \subset F_n$. Если z — точка прикосновения F_n, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in F_n$, такой, что $\rho(z, x_\varepsilon) < \varepsilon$. Следовательно, для любого номера $k \in \overline{1, n}$ имеем $|z(k)| = |z(k) - x_\varepsilon(k)| \leq \rho(z, x_\varepsilon) < \varepsilon$, т. е. в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем $z(k) = 0$. Справедливы неравенства:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |z(k)| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big(|z(k) - x_\varepsilon(k)| + |x_\varepsilon(k)| \Big) \leq \rho(z, x_\varepsilon) + 1 < \varepsilon + 1,$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |z(k)| \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big(|x_\varepsilon(k)| - |z(k) - x_\varepsilon(k)| \Big) \geq 1 - \rho(z, x_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем равенство $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |z(k)| = 1$. Таким образом, $z \in F_n$. Итак, доказана замкнутость множества F_n. Покажем, что диаметр множества F_n равен двум. Действительно, для любых элементов $x, y \in F_n$ справедлива оценка $\rho(x,y) \le \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Big(|x(k)| + |y(k)|\Big) \le 2$, т. е. $\operatorname{diam} F_n \le 2$. С другой стороны, числовые последовательности $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ вида $\tilde{x}(k) = \tilde{y}(k) = 0$ для любого $k \ne n+1$, а $\tilde{x}(n+1) = 1$ и $\tilde{y}(n+1) = -1$, принадлежат множеству F_n. При этом $2 = \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) \le \operatorname{diam} F_n$. Следовательно, $\operatorname{diam} F_n = 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Покажем, наконец, что пересечение всех множеств F_n по $n \in \mathbb{N}$ пусто. Если предположить, что существует $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, то по определению F_n получаем $x(n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и при этом $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| = 1$, что невозможно. Таким образом, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$.

Определение 1.4.5. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Множество $S \subset X$ называется нигде не плотным, если его замыкание $[S]_{\tau_\rho}$ не содержит ни одного открытого шара.*

Теорема 1.4.2 (*Бэр*). *Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде счётного объединения своих нигде не плотных подмножеств.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Предположим, рассуждая от противного, что существует счётное семейство нигде не плотных множеств $S_n \subset X$, таких, что $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Рассмотрим произвольный элемент $x_0 \in X$. Так как множество S_1 является нигде не плотным, то для любого $R > 0$ выполнено $O_R(x_0) \not\subset [S_1]_{\tau_\rho}$. Тогда множество $G_1 = O_1(x_0) \setminus [S_1]_{\tau_\rho} = O_1(x_0) \cap [S_1]^c_{\tau_\rho}$ является открытым как пересечение двух открытых множеств и является непустым. Следовательно, существует $x_1 \in G_1$, причём в силу открытости множества G_1 существует число $\delta_1 > 0$, такое, что $O_{2\delta_1}(x_1) \subset G_1$. Определим $R_1 = \min\{\delta_1, 1\}$. Так как справедливо включение $B_{R_1}(x_1) \subset O_{2R_1}(x_1) \subset O_{2\delta_1}(x_1)$, то получаем, что $B_1(x_0) \supset B_{R_1}(x_1)$ и $B_{R_1}(x_1) \cap S_1 = \varnothing$. Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ построены $x_1, \ldots, x_n \in X$ и положительные числа $R_1, \ldots, R_n$, такие, что $B_1(x_0) \supset B_{R_1}(x_1) \supset \ldots \supset B_{R_n}(x_n)$, причём $B_{R_k}(x_k) \cap S_k = \varnothing$ и

$R_k \le \frac{1}{k}$ для любого $k \in \overline{1,n}$. Так как множество S_{n+1} является нигде не плотным, то $O_{R_n}(x_n) \not\subset [S_{n+1}]_{\tau_\rho}$. Тогда множество $G_{n+1} = O_{R_n}(x_n) \backslash [S_{n+1}]_{\tau_\rho} = O_{R_n}(x_n) \cap [S_{n+1}]^c_{\tau_\rho}$ является открытым как пересечение двух открытых множеств и является непустым. Следовательно, существует $x_{n+1} \in G_{n+1}$, причём в силу открытости множества G_{n+1} существует число $\delta_{n+1} > 0$, такое, что $O_{2\delta_{n+1}}(x_{n+1}) \subset G_{n+1}$. Определим $R_{n+1} = \min\left\{\delta_{n+1}, \frac{1}{n+1}\right\}$. Так как справедливо включение $B_{R_{n+1}}(x_{n+1}) \subset O_{2R_{n+1}}(x_{n+1}) \subset O_{2\delta_{n+1}}(x_{n+1})$, то получаем, что $B_{R_n}(x_n) \supset B_{R_{n+1}}(x_{n+1})$ и $B_{R_{n+1}}(x_{n+1}) \cap S_{n+1} = \varnothing$. Таким образом, по индукции построена убывающая по вложению последовательность замкнутых шаров $\left\{B_{R_n}(x_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$, причём $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, по теореме 1.4.1 существует $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{R_n}(x_n)$. Тогда для любого номера n в силу соотношения $B_{R_n}(x_n) \cap S_n = \varnothing$ получаем $x \notin S_n$. Существование такого $x \in X \backslash \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n\right)$ противоречит равенству $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

П р и м е р 1.4.4. Простейшим примером неполного метрического пространства, представимого в виде счётного объединения своих нигде не плотных подмножеств, является множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с обычной метрикой $\rho(x,y) = |x-y|$. Действительно, любое одноточечное множество из $\mathbb{Q}$ является нигде не плотным в $(\mathbb{Q}, \rho)$, так как любой открытый шар из $(\mathbb{Q}, \rho)$ представляет собой счётное множество всех рациональных чисел, содержащихся в заданном числовом интервале, т. е. состоит более чем из одной точки. При этом множество $\mathbb{Q}$ является счётным, т. е. представляет собой счётное объединение всех входящих в него точек.

Приведём пример неполного линейного метрического пространства, представимого в виде счётного объединения своих нигде не плотных подмножеств. Рассмотрим линейное пространство ℓ_1, состоящее из всех числовых последовательностей, компоненты которых образуют абсолютно сходящийся ряд, т. е.

$$\ell_1 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < +\infty \right\}.$$

Введём в ℓ_1 метрику $\rho(x,y) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x(k) - y(k)|$, рассмотренную ранее в примере 1.4.3 для линейного пространства ℓ_∞. Покажем, что метрическое пространство (ℓ_1, ρ) является неполным. Для этого рассмотрим в ℓ_1 последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \le k \le n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Так как для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$, выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) = \sup_{n<k\le m} \tfrac{1}{k} < \tfrac{1}{n},$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, такой, что для любых $n, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ является фундаментальной в (ℓ_1, ρ). Однако эта последовательность не сходится в (ℓ_1, ρ). Предположим, рассуждая от противного, что существует $z \in \ell_1$, такой, что $\rho(z, x_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для любого номера $k \in \mathbb{N}$ и любого $n > k$ получаем

$$\left|z(k) - \tfrac{1}{k}\right| = |z(k) - x_n(k)| \le \rho(z, x_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $z(k) = \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Но тогда $z \notin \ell_1$, так как $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = +\infty$. Полученное противоречие доказывает неполноту метрического пространства (ℓ_1, ρ). Рассмотрим для любого номера n множество

$$F_n = \left\{ x \in \ell_1 \;\middle|\; \sum_{k=1}^\infty |x(k)| \le n \right\}.$$

Так как для любого $x \in \ell_1$ существует $n(x) \in \mathbb{N}$, такое, что выполнено неравенство $\sum\limits_{k=1}^\infty |x(k)| \le n(x)$, т. е. $x \in F_{n(x)}$, то справедливо равенство $\ell_1 = \bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n$. Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n является замкнутым в метрическом пространстве (ℓ_1, ρ). Пусть $z \in \ell_1$ — точка прикосновения множества F_n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in F_n$, такое, что $\rho(z, x_\varepsilon) < \varepsilon$. Следовательно, для любого $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{N} |z(k)| \le \sum_{k=1}^{N} |z(k) - x_\varepsilon(k)| + \sum_{k=1}^{N} |x_\varepsilon(k)| \le$$
$$\le N\rho(z, x_\varepsilon) + n \le N\varepsilon + n \to n \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $\sum\limits_{k=1}^{N} |z(k)| \le n$. Следовательно, переходя в последнем неравенстве к пределу при $N \to \infty$, получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z(k)| \le n$. Следовательно, $z \in F_n$, т. е. множество F_n является замкнутым в (ℓ_1, ρ). Наконец, покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n является нигде не плотным в метрическом пространстве (ℓ_1, ρ). В силу замкнутости F_n достаточно показать, что ни один открытый шар из (ℓ_1, ρ) не содержится в F_n. Предположим, рассуждая от противного, что существуют $x_0 \in F_n$ и $R_0 > 0$, такие, что $O_{R_0}(x_0) \subset F_n$. Тогда для любого $x \in \ell_1$ вида $\rho(x, x_0) < R_0$ выполнено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)| \le n$. Существует номер N, такой, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{R_0}{2k} > 2n$. Рассмотрим элемент $y_N \in \ell_1$ следующего вида:

$$y_N(k) = \begin{cases} \frac{R_0}{2k}, & 1 \le k \le N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Тогда элемент $z_N = x_0 + y_N \in O_{R_0}(x_0)$, так как $\rho(z_N, x_0) \le \frac{R_0}{2} < R_0$. Однако справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_N(k)| \ge \sum_{k=1}^{\infty} |y_N(k)| - \sum_{k=1}^{\infty} |x_0(k)| = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_0}{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} |x_0(k)| > 2n - n = n,$$

т. е. $z_N \notin F_n$. Получили противоречие. Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ доказано, что множество F_n является нигде не плотным в метрическом пространстве (ℓ_1, ρ).

Рассмотрим несколько применений теоремы 1.4.2 Бэра в задачах теории функций действительного и комплексного переменных.

Задача 1.4.1. Доказать, что не существует функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывной в рациональных и разрывной в иррациональных точках.

Решение. Предположим, рассуждая от противного, что такая функция существует. Рассмотрим функцию $\omega\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ колебания функции f в точке, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ определим

$$\omega(x) = \lim_{\delta \to +0} \sup_{\substack{y,z \in \mathbb{R}: \\ |y-x|<\delta \\ |z-x|<\delta}} |f(y) - f(z)|.$$

Известно, что функция f является непрерывной в точке x тогда и только тогда, когда $\omega(x) = 0$. Пусть $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — все рациональные числа, а $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ — все иррациональные. По условию для любого $x \in \mathbb{I}$ выполнено неравенство $\omega(x) > 0$, а для любого $y \in \mathbb{Q}$ выполнено $\omega(y) = 0$. Определим для любого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$F_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \omega(x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Тогда справедливо равенство $\mathbb{I} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Действительно, если $x \in \mathbb{I}$, то имеем $\omega(x) > 0$. Следовательно, существует $n(x) \in \mathbb{N}$, такое, что выполнено неравенство $\frac{1}{n(x)} \leq \omega(x)$, т. е. получаем $x \in F_{n(x)}$. Если же $x \in \mathbb{Q}$, то $\omega(x) = 0$, т. е. $x \notin F_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n является замкнутым в $\mathbb{R}$ (по умолчанию предполагается, что в $\mathbb{R}$ рассматривается обычная метрика $\rho(x, y) = |x - y|$). Пусть x — точка прикосновения множества F_n, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in F_n$, такой, что $|x - x_\varepsilon| < \varepsilon$. Так как для любого $\delta > 0$ из неравенства $|y - x_\delta| < \delta$ следует неравенство $|y - x| < 2\delta$, то получаем

$$\sup_{\substack{y,z \in \mathbb{R}: \\ |y-x|<2\delta \\ |z-x|<2\delta}} |f(y) - f(z)| \geq \sup_{\substack{y,z \in \mathbb{R}: \\ |y-x_\delta|<\delta \\ |z-x_\delta|<\delta}} |f(y) - f(z)| \geq \omega(x_\delta) \geq \frac{1}{n}\,.$$

Следовательно, выполнено соотношение

$$\omega(x) = \lim_{\delta \to +0} \sup_{\substack{y,z \in \mathbb{R}: \\ |y-x|<2\delta \\ |z-x|<2\delta}} |f(y) - f(z)| \geq \frac{1}{n},$$

т. е. $x \in F_n$. Таким образом, доказана замкнутость F_n. Далее покажем, что F_n является нигде не плотным множеством в $\mathbb{R}$. В силу замкнутости F_n достаточно показать, что F_n не содержит ни одного непустого числового интервала. Известно, что любой непустой числовой интервал обязательно содержит рациональные числа. Но в множестве F_n нет ни одного рационального числа. Таким образом, F_n действительно не содержит ни одного непустого числового интервала. Получаем, что справедливо равенство

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{ F_n \cup \{r_n\} \Big\},$$

где множество F_n и одноточечное множество $\{r_n\}$ являются нигде не плотными в $\mathbb{R}$. Таким образом, полное метрическое пространство $\mathbb{R}$ представлено в виде счётного объединения своих нигде не плотных подмножеств. Это противоречит теореме 1.4.2 Бэра. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Задача 1.4.2. Пусть комплексная функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области $G \subset \mathbb{C}$. Пусть для каждого комплексного числа $z \in G$ существует натуральное число $n(z)$, такое, что $f^{(n(z))}(z) = 0$. Доказать, что f — многочлен.

Решение. Известно, что комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с метрикой $\rho = |z - w|$ является полным метрическим пространством. Рассмотрим произвольное $z_0 \in G$. В силу открытости множества G в метрическом пространстве $(\mathbb{C}, \rho)$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что замкнутый круг

$$K_0 = B_{\varepsilon_0}(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - z_0| \le \varepsilon_0 \right\} \subset G.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$A_m = \left\{ z \in K_0 \;\middle|\; f^{(m)}(z) = 0 \right\}.$$

Так как комплексная функция f регулярна в области G, то множество A_m замкнуто в $(\mathbb{C}, \rho)$, причём для любого комплексного числа $z \in$ $\in K_0$ выполнено включение $z \in A_{n(z)}$. Следовательно, $K_0 = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. Так как метрическое пространство (K_0, ρ) является полным в силу утверждения 1.4.1, а все множества $A_m \subset K_0$ замкнуты в метрическом пространстве (K_0, ρ), то по теореме 1.4.2 Бэра существует $m_0 \in$ $\in \mathbb{N}$, такое, что множество A_{m_0} в метрическом пространстве (K_0, ρ)

содержит открытый шар. Это означает, что существуют $z_1 \in K_0$ и $\varepsilon_1 > 0$, такие, что

$$O_{\varepsilon_1}(z_1) \cap K_0 = \left\{ z \in K_0 \;\middle|\; |z - z_1| < \varepsilon_1 \right\} \subset A_{m_0}.$$

Покажем, что существует $z_2 \in O_{\varepsilon_1}(z_1) \cap K_0$, такое, что

$$|z_2 - z_0| < \varepsilon_0.$$

Действительно, определим $z_2 = z_1 + \alpha(z_0 - z_1)$ для $0 < \alpha < 1$. Тогда при $0 < \alpha < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$ выполнены неравенства

$$|z_2 - z_1| = \alpha|z_0 - z_1| \le \alpha\varepsilon_0 < \varepsilon_1,$$
$$|z_2 - z_0| = (1 - \alpha)|z_1 - z_0| \le (1 - \alpha)\varepsilon_0 < \varepsilon_0.$$

Следовательно, любое число $\alpha \in \left(0, \min\left\{1, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right\}\right)$ подойдёт. Определим число $\varepsilon_2 = \min\{\ \varepsilon_0 - |z_2 - z_0|\ ,\ \varepsilon_1 - |z_2 - z_1|\ \} > 0$. Получаем, что справедливо включение

$$O_{\varepsilon_2}(z_2) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - z_2| < \varepsilon_2 \right\} \subset O_{\varepsilon_1}(z_1) \cap K_0 \subset A_{m_0}.$$

Следовательно, для всех $z \in O_{\varepsilon_2}(z_2)$ имеем $f^{(m_0)}(z) = 0$. Тогда для любого $k \ge m_0$ и любого $z \in O_{\varepsilon_2}(z_2)$ получаем $f^{(k)}(z) = 0$. Так как регулярная в открытом круге комплексной плоскости функция представима в нём своим рядом Тейлора, то рассматриваемая функция f является в $O_{\varepsilon_2}(z_2)$ многочленом степени меньше m_0. Так как многочлен P и функция f регулярны в области G и существует последовательность $w_k = z_2 + \frac{\varepsilon_2}{k+1} \in O_{\varepsilon_2}(z_2)$, такая, что $w_k \to z_2$ при $k \to \infty$ и $f(w_k) = P(w_k)$, то по теореме единственности регулярной функции $f = P$ в области G.

1.5. Пополнение метрического пространства

Определение 1.5.1. *Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — метрические пространства. Отображение $\varphi\colon X_1 \to X_2$ называется изометрией, если φ является взаимно однозначным (т. е. для любого $x_2 \in X_2$ существует единственный $x_1 \in X_1$, такой, что $\varphi(x_1) = x_2$), и для любых элементов $x_1, y_1 \in X_1$ выполнено равенство $\rho_1(x_1, y_1) = \rho_2\left(\varphi(x_1), \varphi(y_1)\right)$. Если между метрическими пространствами X_1 и X_2 существует изометрия, то говорят, что они являются изометричными.*

У т в е р ж д е н и е 1.5.1. *Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — метрические пространства, и существует изометрия $\varphi: X_1 \to X_2$. Тогда обратное отображение $\varphi^{-1}: X_2 \to X_1$ тоже является изометрией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как φ является взаимно однозначным отображением X_1 на X_2, то обратное отображение $\varphi^{-1}: X_2 \to$ $\to X_1$ существует. Тогда для любых элементов $x_2, y_2 \in X_2$ получаем

$$\rho_2(x_2, y_2) = \rho_2\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x_2)\right), \varphi\left(\varphi^{-1}(y_2)\right)\right) = \rho_1\left(\varphi^{-1}(x_2), \varphi^{-1}(y_2)\right),$$

т. е. по определению 1.5.1 отображение φ^{-1} является изометрией.

У т в е р ж д е н и е 1.5.2. *Пусть (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) и (X_3, ρ_3) — метрические пространства, причём существуют изометрии $\varphi: X_1 \to$ $\to X_2$ и $\psi: X_2 \to X_3$. Тогда отображение $\gamma: X_1 \to X_3$ вида $\gamma = \varphi \circ \psi$, т. е. суперпозиция отображений φ и ψ, тоже является изометрией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение γ взаимно однозначно отображает X_1 на X_3 как суперпозиция взаимно однозначных отображений φ и ψ. Далее для любых элементов $x_1, y_1 \in X_1$ находим

$$\rho_1(x_1, y_1) = \rho_2\left(\varphi(x_1), \varphi(y_1)\right) =$$
$$= \rho_3\left(\psi\left(\varphi(x_1)\right), \psi\left(\varphi(y_1)\right)\right) = \rho_3\left(\gamma(x_1), \gamma(y_1)\right).$$

Следовательно, по определению 1.5.1 отображение γ является изометрией.

У т в е р ж д е н и е 1.5.3. *Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — изометричные метрические пространства, причём пространство (X_1, ρ_1) является полным. Тогда пространство (X_2, ρ_2) также является полным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi: X_1 \to X_2$ — изометрия. Рассмотрим произвольную ρ_2-фундаментальную последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N =$ $= N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n, m > N$ выполнено неравенство $\rho_2(z_n, z_m) < \varepsilon$. Определим $x_n = \varphi^{-1}(z_n)$. Тогда по определению 1.5.1 получаем $\rho_1(x_n, x_m) = \rho_2(z_n, z_m) < \varepsilon$ для любых $n, m >$ $> N$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$ является ρ_1-фундаментальной. Следовательно, в силу полноты пространства

(X_1, ρ_1) существует элемент $x \in X_1$, такой, что $\rho_1(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Определим элемент $z = \varphi(x)$. Тогда находим $\rho_2(z_n, z) = = \rho_2(\varphi(x_n), \varphi(x)) = \rho_1(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Получили, что произвольная ρ_2-фундаментальная последовательность сходится в X_2, т. е. пространство (X_2, ρ_2) является полным.

Определение 1.5.2. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Будем говорить, что множество $A \subset X$ является всюду плотным (или ρ-всюду плотным) в множестве $B \subset X$, если выполнено включение $[A]_{\tau_\rho} \supset B$, т. е. для любого $b \in B$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $a \in A$, такое, что $\rho(a, b) < \varepsilon$.*

Определение 1.5.3. *Будем говорить, что полное метрическое пространство (Y, d) является пополнением метрического пространства (X, ρ), если существует множество $Z \subset Y$, d-всюду плотное в Y, такое, что метрические пространства (X, ρ) и (Z, d) изометричны.*

Замечание 1.5.1. Пусть (X, ρ) — неполное метрическое пространство, а (Y, d) — полное метрическое пространство, причём $X \subset Y$. Пусть сужение метрики d на множество X совпадает с метрикой ρ, а множество X является d-всюду плотным в Y. Тогда метрическое пространство (Y, d) является пополнением (X, ρ). Действительно, рассмотрим множество $Z = X$ и тождественное отображение $\varphi\colon X \to \to Z$ вида $\varphi(x) = x$ в роли изометрии между (X, ρ) и (Z, d). Тогда определение 1.5.3 выполнено. Так как множество X всюду плотно в Y, то для любых элементов $y, \tilde{y} \in Y$ существуют последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ и $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, такие, что $d(x_n, y) \to 0$ и $d(\tilde{x}_n, \tilde{y}) \to \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что справедливо соотношение $d(y, \tilde{y}) = = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n)$. Действительно, по неравенству треугольника находим

$$d(y, \tilde{y}) \le d(x_n, y) + d(\tilde{x}_n, \tilde{y}) + \rho(x_n, \tilde{x}_n).$$

Переходя к нижнему пределу в этом неравенстве, получаем $d(y, \tilde{y}) \le \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n)$. Далее по неравенству треугольника находим

$$\rho(x_n, \tilde{x}_n) \le d(x_n, y) + d(\tilde{x}_n, \tilde{y}) + d(y, \tilde{y}).$$

Переходя к верхнему пределу в этом неравенстве, получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n) \le d(y, \tilde{y}).$$

Следовательно, справедливы оценки

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n) \le d(y, \tilde{y}) \le \varliminf_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n).$$

Так как всегда справедливо неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n),$$

то получаем, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n) = \varliminf_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n) = d(y, \tilde{y}).$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n) = d(y, \tilde{y})$.

Пример 1.5.1. Рассмотрим метрическое пространство $(\mathbb{R}, d)$, где метрика $d(x, y) = |e^x - e^y|$. В замечании 1.4.1 была показана неполнота этого метрического пространства. Предъявим пополнение этого метрического пространства. Рассмотрим $Y = [0, +\infty)$ с обычной на вещественной оси метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Так как $(\mathbb{R}, \rho)$ является полным метрическим пространством, а множество Y является τ_ρ-замкнутым в $\mathbb{R}$, то в силу утверждения 1.4.1 метрическое пространство (Y, ρ) является полным. Рассмотрим множество $Z = (0, +\infty) \subset Y$. Так как $[Z]_{\tau_\rho} = Y$, то Z является ρ-всюду плотным в Y. Рассмотрим отображение $\varphi: \mathbb{R} \to Z$ вида $\varphi(x) = e^x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Тогда отображение φ является изометрией между метрическими пространствами $(\mathbb{R}, d)$ и (Z, ρ). Действительно, отображение φ является взаимно однозначным из $\mathbb{R}$ на Z, и при этом для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$d(x, y) = |e^x - e^y| = |\,\varphi(x) - \varphi(y)| = \rho\left(\varphi(x), \varphi(y)\right).$$

Таким образом, по определению 1.5.3 метрическое пространство (Y, ρ) является пополнением неполного метрического пространства $(\mathbb{R}, d)$. Заметим, что в рассмотренном примере пополнение Y является собственным подмножеством пополняемого множества $\mathbb{R}$, т. е. $Y \subset \mathbb{R}$ и $Y \ne \mathbb{R}$.

Утверждение 1.5.4. *Любые два пополнения метрического пространства (X, ρ) изометричны.*

Доказательство. Пусть (Y_1, ρ_1) и (Y_2, ρ_2) — два пополнения метрического пространства (X, ρ). Требуется доказать, что существует изометрия $\psi\colon Y_1 \to Y_2$. По определению 1.5.3 существует множество $Z_1 \subset Y_1$, ρ_1-всюду плотное в Y_1, и множество $Z_2 \subset Y_2$, ρ_2-всюду плотное в Y_2, такие, что метрическое пространство (X, ρ) изометрично метрическим пространствам (Z_1, ρ_1) и (Z_2, ρ_2). Следовательно, существуют изометрии $\varphi_1\colon X \to Z_1$ и $\varphi_2\colon X \to Z_2$. Определим отображение $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon Z_1 \to Z_2$. В силу утверждений 1.5.1 и 1.5.2 отображение φ является изометрией. Так как множество Z_1 является ρ_1-всюду плотным в Y_1, то для любого $y_1 \in Y_1$ существует последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z_1$, такая, что $\rho_1(z_n, y_1) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, так как отображение φ является изометрией, последовательность образов $\varphi(z_n) \in Z_2$ является ρ_2-фундаментальной в полном метрическом пространстве (Y_2, ρ_2). Поэтому существует элемент $y_2 \in Y_2$, такой, что $\rho_2\Big(\varphi(z_n), y_2\Big) \to 0$ при $n \to \infty$. Объявим построенный элемент $y_2 \in Y_2$ образом элемента $y_1 \in Y_1$ под действием отображения ψ, т. е. $\psi(y_1) = y_2$. Таким образом, определено отображение $\psi\colon Y_1 \to Y_2$. Покажем, что это определение корректно, т. е. значение $\psi(y_1)$ не зависит от выбора последовательности $z_n \in Z_1$, сходящейся к y_1. Действительно, пусть другая последовательность $\tilde{z}_n \in Z_1$ сходится к y_1. Тогда по неравенству треугольника $\rho_1(z_n, \tilde{z}_n) \leq \rho_1(z_n, y_1) + \rho_1(\tilde{z}_n, y_1) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, так как отображение φ является изометрией, то $\rho_2\Big(\varphi(z_n), \varphi(\tilde{z}_n)\Big) = \rho_1(z_n, \tilde{z}_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по неравенству треугольника получаем $\rho_2\Big(\varphi(\tilde{z}_n), y_2\Big) \leq \rho_2\Big(\varphi(z_n), y_2\Big) + \rho_2\Big(\varphi(z_n), \varphi(\tilde{z}_n)\Big) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. последовательность $\varphi(\tilde{z}_n) \in Z_2$ сходится к тому же элементу $y_2 \in Y_2$, что и последовательность $\varphi(z_n)$. Таким образом, корректность определения отображения ψ доказана. Покажем, что это отображение является изометрией между метрическими пространствами (Y_1, ρ_1) и (Y_2, ρ_2). Проверим взаимную однозначность отображения ψ, т. е. для любого элемента $y_2 \in Y_2$ существует единственный элемент $y_1 \in Y_1$, такой, что $\psi(y_1) = y_2$. Действительно, так как множество Z_2 является ρ_2-всюду плотным в Y_2, то для любого $y_2 \in Y_2$ существует последовательность $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z_2$, такая, что $\rho_2(w_n, y_2) \to 0$ при $n \to \infty$. Определим последовательность $z_n = \varphi^{-1}(w_n) \in Z_1$. Так как по утверждению 1.5.1 отображение φ^{-1} является изометрией, то последовательность z_n является ρ_1-фундаментальной в полном метрическом пространстве (Y_1, ρ_1). Следовательно, существует элемент $y_1 \in Y_1$, такой, что $\rho_1(z_n, y_1) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по определению отображения ψ получаем $\psi(y_1) = y_2$. При этом для любого элемента $\tilde{y}_1 \in Y_1$, отличного от y_1, справедливо равенство $\rho_2\Big(\psi(\tilde{y}_1), \psi(y_1)\Big) = \rho_1(\tilde{y}_1, y_1) > 0$. Действительно, так как множество Z_1 является ρ_1-всюду плотным в Y_1, то существует последовательность $\{\tilde{z}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z_1$, такая, что $\rho_1(\tilde{z}_n, \tilde{y}_1) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда получаем:

$$\rho_2\Big(\psi(\tilde{y}_1), \psi(y_1)\Big) = \lim_{n\to\infty} \rho_2\Big(\varphi(\tilde{z}_n), \varphi(z_n)\Big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \rho_1(\tilde{z}_n, z_n) = \rho_1(\tilde{y}_1, y_1) > 0.$$

Следовательно, отображение ψ разные элементы множества Y_1 переводит в разные элементы множества Y_2. Таким образом, установлена взаимная однозначность отображения ψ. При этом также показано, что для любых элементов $y_1, \tilde{y}_1 \in Y_1$ выполнено равенство $\rho_2\Big(\psi(\tilde{y}_1), \psi(y_1)\Big) = \rho_1(\tilde{y}_1, y_1)$. Следовательно, отображение ψ является изометрией. Таким образом, пополнения (Y_1, ρ_1) и (Y_2, ρ_2) метрического пространства (X, ρ) изометричны.

Теорема 1.5.1 (*Хаусдорф*). *Для любого неполного метрического пространства существует пополнение.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) — неполное метрическое пространство. Пусть F — множество всех фундаментальных последовательностей из X. Введём на множестве F отношение эквивалентности следующим образом. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\} \in F$ эквивалентна последовательтности $\{y_n\} \in F$, если $\rho(x_n, y_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае будем писать $\{x_n\} \sim \sim \{y_n\}$. Покажем, что введёное на множестве F отношение эквивалентности обладает свойствами: симметрией, транзитивностью и эквивалентностью любого элемента F самому себе. Действительно, если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, то $\rho(y_n, x_n) = \rho(x_n, y_n) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\{y_n\} \sim \{x_n\}$, т. е. симметрия доказана. Далее, если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ и $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, то по неравенству треугольника находим $\rho(x_n, z_n) \leq \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, получаем $\{x_n\} \sim \{z_n\}$, т. е. транзитивность доказана. Свойство $\{x_n\} \sim \{x_n\}$ очевидно, так как $\rho(x_n, x_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Разобьём множество F на классы эквивалентных фундаментальных последовательностей и определим множество Y как совокупность классов эквивалентных фундаментальных последовательностей из (X, ρ). Введём на множестве Y метрику d следующим образом. Для любых $y, \tilde{y} \in Y$ рассмотрим произвольные последовательности $\{x_n\} \in y$ и $\{\tilde{x}_n\} \in \tilde{y}$. Тогда определим $d(y, \tilde{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n)$. Требуется доказать корректность этого определения, т. е. проверить существование указанного предела и его независимость от выбора последовательностей из классов эквивалентности y и $\tilde{y}$. После этого требуется проверить для d аксиомы метрики из определения 1.2.1.

Покажем, что для любых последовательностей $\{x_n\} \in y \in Y$ и $\{\tilde{x}_n\} \in \tilde{y} \in Y$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n)$ существует. Для этого проверим фундаментальность числовой последовательности $\{\rho(x_n, \tilde{x}_n)\}$. По неравенству треугольника для любых $n, m \in \mathbb{N}$ находим

$$\rho(x_n, \tilde{x}_n) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) + \rho(x_m, \tilde{x}_m).$$

Следовательно, получаем неравенство

$$\Big|\rho(x_n, \tilde{x}_n) - \rho(x_m, \tilde{x}_m)\Big| \le \rho(x_n, x_m) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m).$$

Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$ являются фундаментальными в метрическом пространстве (X, ρ), то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n, m > N(\varepsilon)$ выполнены неравенства $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любых $n, m > N(\varepsilon)$ получаем неравенство $\Big|\rho(x_n, \tilde{x}_n) - \rho(x_m, \tilde{x}_m)\Big| < \varepsilon$, и тем самым доказываем фундаментальность числовой последовательности $\{\rho(x_n, \tilde{x}_n)\}$. Следовательно, в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности существует числовой предел $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n)$.

Покажем независимость этого предела от выбора последовательностей из классов эквивалентности y и $\tilde{y}$. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{x_n^*\}$ принадлежат классу y, а последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ и $\{\tilde{x}_n^*\}$ принадлежат классу $\tilde{y}$. Тогда по определению $\{x_n\} \sim \{x_n^*\}$ и $\{\tilde{x}_n\} \sim \{\tilde{x}_n^*\}$, т. е. $\rho(x_n, x_n^*) \to 0$ и $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n^*) \to 0$ при $n \to \infty$. Так как по неравенству треугольника справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \rho(x_n, \tilde{x}_n) &\le \rho(x_n, x_n^*) + \rho(x_n^*, \tilde{x}_n^*) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n^*), \\ \rho(x_n^*, \tilde{x}_n^*) &\le \rho(x_n, x_n^*) + \rho(x_n, \tilde{x}_n) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n^*), \end{aligned}$$

то получаем

$$\Big|\rho(x_n,\tilde{x}_n)-\rho(x_n^*,\tilde{x}_n^*)\Big| \le \rho(x_n,x_n^*)+\rho(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n^*)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n^*,\tilde{x}_n^*) = \lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\tilde{x}_n)$, т. е. доказана корректность определения функции d.

Проверим аксиомы метрики для функции d. По определению d для любых $y,\tilde{y}\in Y$ имеем $d(y,\tilde{y})\ge 0$. Пусть $d(y,\tilde{y})=0$. Это возможно тогда и только тогда, когда для любых последовательностей $\{x_n\}\in y$ и $\{\tilde{x}_n\}\in\tilde{y}$ выполнено равенство $0=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\tilde{x}_n)$. Следовательно, $\{x_n\}\sim\{\tilde{x}_n\}$, что равносильно равенству $y=\tilde{y}$. Далее имеем $d(y,\tilde{y})=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\tilde{x}_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\tilde{x}_n,x_n)=d(\tilde{y},y)$. Проверим для d неравенство треугольника. Рассмотрим произвольные $y,\tilde{y},\hat{y}\in$ $\in Y$. Тогда для любых последовательностей $\{x_n\}\in y$, $\{\tilde{x}_n\}\in\tilde{y}$ и $\{\hat{x}_n\}\in\hat{y}$ получаем

$$d(y,\tilde{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\tilde{x}_n)\le\lim_{n\to\infty}\Big(\rho(x_n,\hat{x}_n)+\rho(\tilde{x}_n,\hat{x}_n)\Big)= \\ =d(y,\hat{y})+d(\tilde{y},\hat{y}).$$

Таким образом, проверены все аксиомы метрики для функции d. Получили метрическое пространство (Y,d), состоящее из классов эквивалентных фундаментальных последовательностей из (X,ρ). Покажем, что метрическое пространство (Y,d) является пополнением метрического пространства (X,ρ).

Для любого элемента $x\in X$ обозначим через $s(x)$ класс эквивалентных фундаментальных последовательностей из X, содержащий стационарную последовательность $x_n=x$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Определим множество $Z=\{\ s(x)\ \mid x\in X\ \}\subset Y$.

Покажем, что метрические пространства (X,ρ) и (Z,d) изометричны. Рассмотрим отображение $\varphi\colon X\to Z$ вида $\varphi(x)=s(x)$ для любого $x\in X$. Тогда по определению $\varphi(X)=Z$, причём для любых элементов $x,\tilde{x}\in X$ находим $d\Big(s(x),s(\tilde{x})\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x,\tilde{x})=\rho(x,\tilde{x})$. Следовательно, отображение φ является изометрией.

Покажем, что множество Z является d-всюду плотным в Y. Рассмотрим произвольный элемент $y\in Y$ и любое $\varepsilon>0$. Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\}\in y$. В силу фундаментальности этой последовательности в метрическом пространстве (X,ρ) существует номер $N=N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n,m\ge N$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) \le \varepsilon$. Определим элемент $s(x_N) \in Z$. Тогда $d\Big(s(x_N), y\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_N, x_n) \le \varepsilon$. Таким образом, $[Z]_{\tau_d} = Y$, что и требовалось.

Покажем, наконец, что метрическое пространство (Y, d) является полным. Рассмотрим произвольную d-фундаментальную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых $n, m > N(\varepsilon)$ выполнено $d(y_n, y_m) < \varepsilon$. Так как множество Z является d-всюду плотным в множестве Y, то для любого номера n существует элемент $x_n \in X$, такой, что $d\Big(s(x_n), y_n\Big) < \frac{1}{n}$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset X$. Покажем, что она является ρ-фундаментальной. Действительно, для любых номеров $n, m > M(\varepsilon) = \max\left\{N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), \left[\frac{3}{\varepsilon}\right] + 1\right\}$ получаем

$$\rho(x_n, x_m) = \\ = d\Big(s(x_n), s(x_m)\Big) \le d\Big(s(x_n), y_n\Big) + d\Big(s(x_m), y_m\Big) + d\left(y_n, y_m\right) < \\ < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Следовательно, существует класс эквивалентных фундаментальных последовательностей $y \in Y$, такой, что последовательность $\{x_n\} \in y$. Покажем, что $d(y_n, y) \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, для любого $n > M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ имеем

$$d(y_n, y) \le d\Big(s(x_n), y_n\Big) + d\Big(s(x_n), y\Big) < \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, доказано, что d-фундаментальная последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ сходится к элементу $y \in Y$. Следовательно, метрическое пространство (Y, d) является полным.

Итак, для метрического пространства (Y, d) проверено определение 1.5.3 пополнения метрического пространства (X, ρ). Теорема доказана.

П р и м е р 1.5.2. Рассмотрим линейное пространство ℓ_1, состоящее из всех числовых последовательностей, компоненты которых образуют абсолютно сходящийся ряд (см. пример 1.4.4), метрика в котором имеет вид $\rho(x, y) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x(k) - y(k)|$. Как показано в примере 1.4.4, это метрическое пространство является неполным. Определим метрическое пространство c_0, состояшее из всех бесконечно малых числовых последовательностей, с той же метрикой ρ. Покажем, что пополнением метрического пространства (ℓ_1, ρ) является метрическое пространство (c_0, ρ).

Докажем полноту метрического пространства (c_0, ρ). Как показано в примере 1.4.3, метрическое пространство (ℓ_∞, ρ), состоящее из всех ограниченных последовательностей, является полным. Так как $c_0 \subset \ell_\infty$, то произвольная ρ-фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ сходится в (ℓ_∞, ρ) к некоторому элементу $z \in \ell_\infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x_n, z) < \varepsilon$. Осталось показать, что $z \in c_0$, т. е. последовательность z является бесконечно малой. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем включение $x_n \in c_0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует номер $K_n(\varepsilon)$, такой, что для любого $k > K_n(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n(k)| < \varepsilon$. Тогда для номера $n = N(\varepsilon) + 1$ и любого $k > K_n(\varepsilon)$ находим $|z(k)| \leq |z(k) - x_n(k)| + |x_n(k)| < \rho(z, x_n) + \varepsilon < 2\varepsilon$. Следовательно, последовательность z является бесконечно малой. Таким образом, доказана полнота метрического пространства (c_0, ρ).

Покажем, что множество ℓ_1 является ρ-всюду плотным в c_0. Действительно, для любого $x \in c_0$ и любого $\varepsilon > 0$ существует номер $K(x, \varepsilon)$, такой, что $|x(k)| < \varepsilon$ для любого $k > K(x, \varepsilon)$. Определим элемент $z \in \ell_1$ следующим образом:

$$z(k) = \begin{cases} x(k), & 1 \leq k \leq K\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ 0, & k > K\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{cases}$$

Тогда получаем $\rho(x, z) = \sup\limits_{k > K\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)} |x(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, т. е. $O_\varepsilon(x) \cap \ell_1 \neq \varnothing$. Следовательно, любая точка $x \in c_0$ является точкой прикосновения множества $\ell_1 \subset c_0$, т. е. $[\ell_1]_{\tau_\rho} = c_0$. Следовательно, в силу замечания 1.5.1 метрическое пространство (c_0, ρ) является пополнением метрического пространства (ℓ_1, ρ).

1.6. Принцип сжимающих отображений Банаха

Определение 1.6.1. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Отображение $f\colon X \to X$ называется сжимающим, если существует число $L \in [0, 1)$, такое, что для любых элементов $x, y \in X$ выполнено неравенство $\rho\Big(f(x), f(y)\Big) \leq L\rho(x, y)$.*

О п р е д е л е н и е 1.6.2. *Пусть X — некоторое множество, отображение $f: X \to X$. Точка $x_0 \in X$ называется неподвижной для отображения f, если $f(x_0) = x_0$.*

Т е о р е м а 1.6.1 (*Банах*)**.** *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, отображение $f: X \to X$ является сжимающим. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть отображение f является сжимающим с константой $L \in [0, 1)$. Возьмём любой элемент $x_1 \in X$ и определим последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\rho(x_{n+1}, x_{n+m}) \le L^n \rho(x_1, x_m) \le L^n \sum_{k=1}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) \le$$
$$\le L^n \sum_{k=1}^{m-1} L^{k-1} \rho(x_1, x_2) \le \frac{L^n}{1 - L} \rho(x_1, x_2).$$

Так как $0 \le L < 1$, то $L^n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $L^n \rho(x_1, x_2) < (1 - L)\varepsilon$. Тогда для любых $n > N(\varepsilon)$ и $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\rho(x_{n+1}, x_{n+m}) < \varepsilon$, что означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в полном метрическом пространстве (X, ρ). Следовательно, существует элемент $x_0 \in X$, такой, что $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда получаем

$$\rho\Big(f(x_0), x_0\Big) \le \rho\Big(f(x_0), x_n\Big) + \rho(x_0, x_n) \le L\rho(x_0, x_{n-1}) + \rho(x_0, x_n) \to 0$$

при $n \to \infty$. Это означает, что $\rho(f(x_0), x_0) = 0$, т. е. выполнено равенство $f(x_0) = x_0$. Следовательно, элемент x_0 является неподвижной точкой отображения f.

Покажем единственность неподвижной точки сжимающего отображения f. Пусть элементы $y, z \in X$ являются неподвижными точками отображения f. Тогда находим, что $\rho(y, z) = \rho\Big(f(y), f(z)\Big) \le L\rho(y, z)$, т. е. $(1 - L)\rho(y, z) \le 0$. Так как $1 - L > 0$, то получаем $\rho(y, z) = 0$, т. е. $y = z$. Следовательно, сжимающее отображение имеет одну неподвижную точку.

Применим принцип сжимающих отображений Банаха для доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

З а д а ч а 1.6.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — открытое множество, функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ непрерывна, причём для любого компакта $K \subset G$ существует число $L_K > 0$, такое, что для любых $(t,x) \in K$ и $(t,y) \in K$ выполнено неравенство $|f(t,x) - f(t,y)| \le L_K|x-y|$. Доказать, что для любой точки $(t_0,x_0) \in G$ существует $\delta_0 > 0$, такое, что на промежутке $I_0 = [t_0-\delta_0, t_0+\delta_0]$ существует единственное решение задачи Коши: $\dfrac{dx(t)}{dt} = f\Big(t, x(t)\Big)$ для любого $t \in I_0$ и $x(t_0) = x_0$.

Р е ш е н и е. Для любой точки $(t_0,x_0) \in G$ в силу открытости множества G существует число $r_0 > 0$, такое, что для любой точки $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ вида $|t-t_0| \le r_0$ и $|x-x_0| \le r_0$ выполнено включение $(t,x) \in G$. Определим компакт

$$K_0 = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |t-t_0| \le r_0,\ \ |x-x_0| \le r_0 \right\} \subset G.$$

По условию существует $L_0 > 0$, такое, что для любых $(t,x) \in K_0$ и $(t,y) \in K_0$ выполнено неравенство $|f(t,x) - f(t,y)| \le L_0|x-y|$. Определим число $M_0 = \max\limits_{(t,x)\in K_0} |f(t,x)|$. Пусть $\delta_0 = \min\{\frac{r_0}{M_0+1}, \frac{1}{L_0+1}\} \le r_0$. Рассмотрим множество X_0, состоящее из всех непрерывных на отрезке I_0 функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, такими, что их графики лежат в компакте K_0. Метрику в множестве X_0 определим по формуле $\rho(x,y) = \max\limits_{t\in I_0}|x(t)-y(t)|$. Тогда метрическое пространство (X_0,ρ) является полным. Действительно, ρ-фундаментальность функциональной последовательности $\{x_n\}$ из X_0 равносильна равномерной фундаментальности $\{x_n\}$ на отрезке I_0. Следовательно, в силу критерия Коши равномерной сходимости на I_0 получаем равномерную сходимость $\{x_n\}$ к функции z на отрезке I_0, т. е. $\rho(x_n,z) \to 0$ при $n \to \infty$. При этом функция z будет непрерывной на I_0 как равномерный предел непрерывных, а её график будет лежать в K_0 в силу замкнутости этого множества в $\mathbb{R}^{n+1}$. Таким образом, $z \in X_0$, что и требовалось.

Определим отображение $F\colon X_0 \to X_0$ вида

$$\Big(F(x)\Big)(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau$$

для любого $t \in I_0$. Заметим, что для любых $x \in X_0$ и $t \in I_0$ выполнено неравенство $\left|\Big(F(x)\Big)(t) - x_0\right| \le \delta_0 M_0 \le r_0$. Тогда для любого $x \in X_0$ график функции $F(x)$ лежит в K_0, т. е. $F(x) \in X_0$ для любого $x \in X_0$. Далее для любых $x, y \in X_0$ получаем неравенство

$$\rho\Big(F(x), F(y)\Big) \le \delta_0 L_0 \rho(x, y),$$

причём $0 \le \delta_0 L_0 < 1$. Следовательно, отображение F является сжимающим с константой $\delta_0 L_0$. Тогда в силу принципа сжимающих отображений Банаха существует единственная неподвижная точка $\hat{x} \in$ $\in X_0$ отображения F. В силу непрерывности функции $\hat{x}$ на отрезке I_0 и равенства $\hat{x}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \hat{x}(\tau))\, d\tau$ для любого $t \in I_0$ получаем, что функция $\hat{x}$ является непрерывно дифференцируемой на I_0, причём для любого $t \in I_0$ выполнено равенство $\dfrac{\hat{x}(t)}{dt} = f\Big(t, \hat{x}(t)\Big)$. Так как $\hat{x}(t_0) = x_0$, то получаем, что функция $\hat{x}$ является решением рассматриваемой задачи Коши. Если же $x \in X_0$ также является решением задачи Коши, то для любого $t \in I_0$ по формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dx(\tau)}{d\tau}\, d\tau = \Big(F(x)\Big)(t),$$

т. е. $x = F(x)$. Таким образом, x является неподвижной точкой отображения F, что означает $x = \hat{x}$ в силу единственности неподвижной точки отображения F.

Глава 2

Компактные множества в топологических и метрических пространствах

2.1. Компактные множества в топологических пространствах

Определение 2.1.1. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Открытым покрытием множества S называется семейство τ-открытых множеств $\left\{ V_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ (здесь $\mathcal{A}$ — некоторое множество индексов), такое, что выполнено включение $S \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$.*

Определение 2.1.2. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $S \subset X$ называется*

1) *компактным, если любое открытое покрытие множества S содержит конечное подпокрытие;*

2) *счётно-компактным, если любое счётное открытое покрытие множества S содержит конечное подпокрытие;*

3) *секвенциально компактным, если любая последовательность элементов множества S содержит подпоследовательность, сходящуюся по топологии τ к некоторому элементу из S.*

Утверждение 2.1.1. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$ является компактным. Тогда множество S является счётно-компактным.*

Доказательство. Сразу следует из определения 2.1.2.

Утверждение 2.1.2. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$ является секвенциально компактным. Тогда множество S является счётно-компактным.*

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что S не является счётно-компактным. Тогда существует счётное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества S, не имеющее конечного подпокрытия. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует

$x_n \in S$, такое, что $x_n \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_k$. В силу секвенциальной компактности множества S последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ к точке $x_0 \in S$, т. е. $x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x_0$ при $m \to \infty$. Так как $\mathcal{P}$ является покрытием множества S, то существует номер $k_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $x_0 \in V_{k_0}$. Тогда существует номер $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что для всех $m \geq m_0$ выполнено включение $x_{n_m} \in V_{k_0}$. Так как $n_m \to \infty$ при $m \to \infty$, то $n_m \geq k_0$ при всех достаточно больших $m \geq m_0$. Но тогда при всех таких m выполнено соотношение $x_{n_m} \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n_m} V_k \supset V_{k_0}$, т. е. $x_{n_m} \notin V_{k_0}$. Получили противоречие.

Определение 2.1.3. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$. Точка $x \in X$ называется предельной точкой множества S, если в любой её окрестности найдется точка множества S, отличная от x, т. е. для любой окрестности $U(x) \in \tau$ точки x существует $y \in U(x) \cap S$, такой, что $y \neq x$.*

Утверждение 2.1.3. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, множество $S \subset X$ является компактным, или счётно-компактным, или секвенциально компактным. Тогда любое бесконечное подмножество $E \subset S$ имеет в S предельную точку.*

Доказательство. В силу утверждений 2.1.1 и 2.1.2 достаточно проверить это утверждение для счётно-компактного множества S. Итак, пусть множество S счётно-компактно. Покажем, что любое бесконечное подмножество $E \subset S$ имеет в S предельную точку. Предположим, рассуждая от противного, что ни одна точка из S не является предельной для множества E. В силу бесконечности множества E существует счётное подмножество $E_1 \subset E$, которое, очевидно, также лишено предельных точек в S. Следовательно, для любого $x \in S$ существует его окрестность $U(x) \in \tau$, такая, что $E_1 \cap \Big(U(x) \backslash \{x\}\Big) = \varnothing$. Тогда для любого $x \in S \backslash E_1$ указанная окрестность $U(x) \in \tau$ удовлетворяет условию $E_1 \cap U(x) = \varnothing$, т. е. $S \cap U(x) \subset S \backslash E_1$. Определим множество $V = \bigcup\limits_{x \in S \backslash E_1} U(x)$. По определению 1.1.1 множество V является τ-открытым. При этом справедливо соотношение $S \backslash E_1 \subset S \cap V = \bigcup\limits_{x \in S \backslash E_1} \Big(S \cap U(x)\Big) \subset S \backslash E_1$. Следовательно, справедливо равенство $S \cap V = S \backslash E_1$. Определим счётное открытое покрытие $\mathcal{P}$ множества S следующим образом: $\mathcal{P} = \{ V, U(x) \mid x \in E_1 \}$. По построению удаление из $\mathcal{P}$ любого его элемента $U(x)$ для $x \in E_1$ приведёт к тому, что оставшийся набор открытых множеств перестанет быть покрытием S. Действительно, для любых точек $x, y \in E_1$ вида $x \neq y$ справедливо $x \notin U(y)$. Так как $S \cap V = S \backslash E_1$, то для $x \in E_1$ выполнено $x \notin V$. Следовательно, для любого $x \in E_1$ выполнено $x \notin \left(\bigcup\limits_{\substack{y \in E_1 \\ y \neq x}} U(y) \right) \cup V$, что и требовалось. Если же из $\mathcal{P}$ удалить только V, то оставшийся набор окрестностей останется счётным. Таким образом, счётное покрытие $\mathcal{P}$ не имеет конечного подпокрытия. Получили противоречие со счётной компактностью множества S.

Пример 2.1.1. Приведём пример топологического пространства, которое не является счётно-компактным (а значит, также не является компактным или секвенциально компактным), любое подмножество которого имеет в нём предельную точку. Этот пример предложил студент 076 группы МФТИ Р. Таханов. Пусть $X = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Определим топологию τ в $\mathbb{N}$ следующим образом. Объявим базой топологии τ семейство

$$\beta = \left\{ V_k = \{2k-1, 2k\} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\},$$

т. е. любое множество V_k из семейства β состоит из двух чисел $2k-1$ и $2k$ для $k \in \mathbb{N}$. Так как разные множества из β не пересекаются, а объединение всех элементов семейства β совпадает с $\mathbb{N}$, то по теореме 1.1.9 получаем, что β действительно является базой некоторой топологии τ. Иными словами, множество $V \in \tau$, если и только если число $2k \in V$ тогда и только тогда, когда $2k-1 \in V$, где $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\mathbb{N}$ не является счётно-компактным, так как счётное открытое покрытие $\{V_k\}_{k=1}^{+\infty}$, состоящее из множеств $V_k = \{ 2k-1, 2k \} \in \beta$, где $k \in \mathbb{N}$, не имеет конечного подпокрытия. Тем не менее любое непустое подмножество $E \subset \mathbb{N}$ имеет в $(\mathbb{N}, \tau)$ предельную точку. Действительно, если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ точка $2k \in E$, то $2k-1$ является предельной для E, так как любая окрестность точки $2k-1$ содержит точку $2k \in E$, и $2k \neq 2k-1$. Аналогично, если $2k-1 \in E$, то $2k$ является предельной для E, так как любая окрестность точки $2k$ содержит точку $2k-1 \in E$, и $2k-1 \neq 2k$.

Определение 2.1.4. *Будем говорить, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости, если для любых различных точек $x, y \in X$, т. е. $x \neq y$, существуют их окрестности $U(x) \in \tau$ и $U(y) \in \tau$, такие, что $x \notin U(y)$ и $y \notin U(x)$.*

Утверждение 2.1.4. *Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости тогда и только тогда, когда любое его одноточечное подмножество является замкнутым.*

Доказательство. Действительно, для любого $x \in X$ замкнутость одноточечного подмножества $\{x\}$ равносильна по определению 1.1.6 открытости его дополнения. Это в свою очередь выполняется тогда и только тогда, когда для любого $y \neq x$ существует окрестность $U(y) \in \tau$, такая, что $x \notin U(y)$. Последнее совпадает с первой аксиомой отделимости.

Замечание 2.1.1. В монографии [1] понятие счётной компактности определяется иначе: множество S называется счётно-компактным по [1], если любое его бесконечное подмножество имеет в S предельную точку (см. [1, гл. II, § 6, с. 103]). Теорема 9 из [1, гл. II, § 6, с. 103] вроде бы устанавливает эквивалентность между определением счётной компактности из [1] и определением 2.1.2 счётной компактности через счётное открытое покрытие. Однако, как видно из примера 2.1.1, наличие предельной точки у любого бесконечного подмножества не влечёт наличие конечного подпокрытия у произвольного счётного покрытия. Ошибка в доказательстве упомянутой теоремы 9 из [1, гл. II, § 6, с. 103] заключается в том, что предельная точка x_0 последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящей из различных точек и не содержащей x_0, может и не быть предельной точкой "хвоста" этой последовательности $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ (см. детали доказательства теоремы 9 в [1, гл. II, § 6, с. 104]). Это было бы справедливо, если бы выполнялась первая аксиома отделимости. Действительно, в этом случае конечное множество $F_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ является замкнутым в силу утверждения 2.1.4 как конечное объединение замкнутых одноточечных множеств. Следовательно, для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 множество $V(x_0) = U(x_0) \cap F^c$ является открытым и содержит x_0. Поэтому $V(x_0)$ — окрестность точки x_0, не содержащая первые n элементов последовательности. Однако $V(x_0)$ содержит хотя бы один элемент последовательности, который таким образом имеет номер, больший n, т. е. принадлежит “хвосту”. При отсутствии первой аксиомы отделимости, например, в топологическом пространстве из примера 2.1.1, последовательность различных точек $x_n = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предельную точку $x_0 = 1$, так как любая окрестность x_0 содержит x_1. Однако уже множество $\{x_2, x_3, \ldots\}$ не имеет x_0 в качестве предельной точки.

Выясним, при каких условиях счётно-компактное множество $S \subset \subset X$ является секвенциально компактным.

Утверждение 2.1.5. *Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости и аксиоме счётности (см. определение 1.1.16). Тогда всякое счётно-компактное множество $S \subset X$ является секвенциально компактным.*

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что счётно-компактное множество $S \subset X$ не является секвенциально компактным. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \subset S$, не имеющая сходящейся к элементу S подпоследовательности. Покажем, что в этом случае для любого $x \in S$ существует его окрестность $U(x) \in \tau$, содержащая не более конечного набора элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Действительно, пусть существует $x \in S$, любая окрестность которого содержит бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — счётная определяющая система окрестностей точки x. Определим $W_m = \bigcap\limits_{k=1}^{m} U_k$. Ясно, что $\{W_m\}_{m=1}^{\infty}$ также является определяющей системой окрестностей точки x, при этом $W_{m+1} \subset W_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Так как в окрестности W_m точки x находится бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_m, такая, что $x_{n_m} \in W_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Получили подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ рассматриваемой последовательности, которая сходится к x. Действительно, для любой окрестности $V(x) \in \tau$ точки x существует $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $W_{m_0} \subset V(x)$. Тогда для любого $m \geq m_0$ выполнено $x_{n_m} \in W_m \subset \subset W_{m_0} \subset V(x)$, т. е. $x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x$ при $m \to \infty$. Получили противоречие с отсутствием у рассматриваемой последовательности сходящейся подпоследовательности.

Итак, для любого $x \in S$ существует его окрестность $U(x) \in \tau$, содержащая не более конечного набора элементов последовательности

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для любого $x \in S$ выделим все элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, входящие в $U(x)$ и не совпадающие с x. Обозначим их через $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{N}$. Так как в силу первой аксиомы отделимости для любого $k \in \overline{1,N}$ одноточечное множество $\{x_{n_k}\}$ замкнуто, то существует окрестность $U_k(x) \in \tau$ точки x, такая, что $x_{n_k} \notin U_k(x)$. Тогда окрестность $V(x) = U(x) \cap U_1(x) \cap \ldots \cap U_N(x) \in \tau$ точки x не содержит элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за исключением, быть может, самой точки x. Тогда для любого $x \in S \backslash \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = E$ его окрестность $V(x)$ не содержит ни одного элемента последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. справедливо включение $S \cap V(x) \subset E$. Определим множество $V_0 = \bigcup\limits_{x \in E} V(x)$. По определению 1.1.1 множество V_0 является открытым, причём справедливо соотношение $E \subset S \cap V_0 = \bigcup\limits_{x \in E} \Big(S \cap V(x)\Big) \subset E$. Следовательно, $E = S \backslash \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = S \cap V_0$. Далее для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $V_n = V(x_n)$. Определим счётное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ множества S, которое по построению не имеет конечного подпокрытия. Получили противоречие со счётной компактностью множества S.

Выясним, при каких условиях множество $S \subset X$, любое бесконечное подмножество которого имеет в S предельную точку, является счётно-компактным или секвенциально компактным.

Утверждение 2.1.6. *Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости. Тогда всякое множество $S \subset X$, любое бесконечное подмножество которого имеет в S предельную точку, является счётно-компактным.*

Доказательство. Пусть множество $S \subset X$ таково, что любое его бесконечное подмножество имеет в нём предельную точку. Предположим, что множество S не является счётно-компактным. Тогда существует счётное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества S, которое не имеет конечного подпокрытия. Следовательно, для любого номера n существует $x_n \in S$, такое, что $x_n \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_k$. Если множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечно, то существует стационарная подпоследовательность $x_{n_m} = x_0 \in S$. Так как семейство $\mathcal{P}$ является покрытием S, то существует номер k_0, такой, что $x_0 \in V_{k_0}$. Тогда существует номер m_0, такой, что для всех

$m > m_0$ выполнено неравенство $n_m > k_0$. Следовательно, $x_{n_m} = x_0 \in \in V_{k_0} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n_m} V_k$, т. е. получили противоречие.

Если же множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно, то существует подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$, целиком состоящая из различных точек, т. е. $x_{n_m} \neq x_{n_k}$ при $m \neq k$. По условию бесконечное множество $E = \{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ имеет в S предельную точку x_0. Так как все элементы множества E различны, то без ограничения общности можно считать, что $x_0 \notin E$. Действительно, так как в любой окрестности x_0 есть элемент множества E, отличный от x_0, то точка x_0 является предельной и для множества $E \backslash \{x_0\}$. Следовательно, если существует номер s_0, такой, что $x_0 = x_{n_{s_0}}$, то исключим элемент $x_{n_{s_0}}$ из рассматриваемой последовательности. Итак, далее считаем, что $x_0 \neq x_{n_m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Так как семейство $\mathcal{P}$ является покрытием S, то существует номер k_0, такой, что $x_0 \in V_{k_0}$. Тогда существует номер m_0, такой, что для всех $m > m_0$ выполнено неравенство $n_m > k_0$. Рассмотрим множество $F_0 = \{\, x_{n_1}, \ldots, x_{n_{m_0}} \}$. В силу первой аксиомы отделимости множество F_0 является замкнутым как конечное объединение замкнутых одноточечных множеств. Так как $x_0 \notin F_0$ то существует окрестность $U(x_0) \in \tau$, такая, что $U(x_0) \cap F_0 = \varnothing$. Так как x_0 является предельной точкой множества E, то в окрестности $W_0 = U(x_0) \cap V_{k_0} \in \tau$ точки x_0 находится хотя бы один элемент множества E. Следовательно, существует номер m, такой, что $x_{n_m} \in W_0$. Так как первые m_0 элементов последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ не лежат в $U(x_0)$, то получаем, что $m > m_0$. Следовательно, справедливо неравенство $n_m > k_0$ и при этом выполнено включение $x_{n_m} \in W_0 \subset V_{k_0} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n_m} V_k$, т. е. получили противоречие.

Утверждение 2.1.7. *Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости и аксиоме счётности. Тогда всякое множество $S \subset X$, любое бесконечное подмножество которого имеет в S предельную точку, является секвенциально компактным.*

Доказательство. Оно сразу следует из утверждений 2.1.6 и 2.1.5. Тем не менее приведём независимое доказательство этого факта.

Рассмотрим множество $S \subset X$, такое, что любое бесконечное подмножество $E \subset S$ имеет в S предельную точку. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$. Требуется найти ее сходящуюся в S подпоследовательность. Если рассматриваемая последовательность содержит стационарную подпоследовательность $x_{n_k} = x_0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то она является искомой. Если это не так, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, состоящая из различных элементов. По условию бесконечное множество $E = \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет в S предельную точку x_0. Так как все элементы последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ различны, то без ограничения общности можно считать, что $x_0 \neq x_{n_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Действительно, если существует номер k_0, такой, что $x_0 = x_{n_{k_0}}$, то исключим элемент $x_{n_{k_0}}$ из рассматриваемой последовательности. Так как в любой окрестности x_0 есть элемент множества E, отличный от x_0, то точка x_0 является предельной и для множества $E \setminus \{x_{n_{k_0}}\}$. Итак, далее считаем, что $x_0 \notin E$.

Пусть $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — счётная определяющая система окрестностей точки x_0. Тогда $W_m = \bigcap\limits_{k=1}^{m} U_k$ также образуют определяющую систему окрестностей x_0, причем $W_{m+1} \subset W_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Существует номер $k_1 \in \mathbb{N}$, такой, что $x_{n_{k_1}} \in W_1$. Предположим, рассуждая по индукции, что для $m \in \mathbb{N}$ существуют номера $k_m > k_{m-1} > \ldots > k_1 \geq 1$ и $s_m > s_{m-1} > \ldots > s_1 = 1$, такие, что $x_{n_{k_r}} \in W_{s_r}$ для всех $r \in \overline{1, m}$. Так как одноточечное множество из X замкнуто в (X, τ) в силу первой аксиомы отделимости, а конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым, то множество $E_m = \{x_{n_k}\}_{k=1}^{k_m}$ замкнуто в X и не содержит x_0. Следовательно, существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0, не пересекающаяся с E_m, т. е. не содержащая первые k_m элементов последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Существует $s_{m+1} > s_m$, такой, что $W_{s_{m+1}} \subset V(x_0)$. Так как x_0 — предельная точка E, то существует $k_{m+1} \in \mathbb{N}$, такой, что $x_{n_{k_{m+1}}} \in W_{s_{m+1}} \in V(x_0)$. Так как первые k_m элементов последовательности x_{n_k} не содержатся в $V(x_0)$, то $k_{m+1} > k_m$. Итак, построены подпоследовательность $\{x_{n_{k_r}}\}_{r=1}^{\infty}$ и подпоследовательность натуральных чисел $\{s_r\}_{r=1}^{\infty}$, такие, что $x_{n_{k_r}} \in W_{s_r}$ для любого $r \in \mathbb{N}$. Для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существует номер m_0, такой, что $W_{m_0} \subset U(x_0)$. Далее существует $r_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $r \geq r_0$ выполнено неравенство $s_r \geq m_0$. Следовательно, $x_{n_{k_r}} \in W_{s_r} \subset W_{m_0} \subset U(x_0)$. Таким образом, $x_{n_{k_r}} \in U(x_0)$ для любого $r \geq r_0$, т. е. $x_{n_{k_r}} \xrightarrow{\tau} x_0$ при $r \to \infty$, что и требовалось.

Обсудим связь компактности и замкнутости подмножества топологического пространства.

Определение 2.1.5. *Говорят, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет второй аксиоме отделимости, если любые две различные точки из X имеют непересекающиеся окрестности, т. е. для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, существуют их окрестности $U(x) \in \in \tau$ и $U(y) \in \tau$, такие, что $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. Топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме отделимости, называется хаусдорфовым.*

Утверждение 2.1.8. *Пусть топологическое пространство (X, τ) является хаусдорфовым. Тогда любое компактное множество $S \subset X$ является замкнутым.*

Доказательство. Пусть множество $S \subset X$ является компактным. Рассмотрим произвольную точку $x \notin X$. Тогда в силу второй аксиомы отделимости для любого $y \in S$ существует окрестность $U_y(x) \in \tau$ точки x и окрестность $U(y) \in \tau$ точки y, такие, что $U_y(x) \cap \cap U(y) = \varnothing$. Получаем открытое покрытие $\mathcal{P} = \left\{ U(y) \;\middle|\; y \in S \right\}$ множества S. В силу компактности S его открытое покрытие $\mathcal{P}$ имеет конечное подпокрытие, т. е. существует конечный набор точек $y_1, \dots y_N$ множества S, такой, что семейство $\left\{ U(y_k) \;\middle|\; k \in \overline{1, N} \right\}$ является покрытием S. Определим окрестность точки x вида $V(x) = \bigcap\limits_{k=1}^{N} U_{y_k}(x)$. Так как $S \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} U(y_k)$ и $U_{y_k}(x) \cap U(y_k) = \varnothing$ для любого $k = \overline{1, N}$, то $V(x) \cap S = \varnothing$, т. е. $V(x) \subset S^c$. Следовательно, для дополнения множества S справедливо равенство $S^c = \bigcup\limits_{x \in S^c} V(x)$, т. е. по определению 1.1.1 множество $S^c \in \tau$. Следовательно, по определению 1.1.6 множество S является замкнутым.

Утверждение 2.1.9. *Пусть топологическое пространство (X, τ) является хаусдорфовым. Тогда любое секвенциально компактное множество $S \subset X$ является секвенциально замкнутым.*

Доказательство. Пусть множество $S \subset X$ является секвенциальным компактным. Рассмотрим любую точку $z \in [S]_{\text{секв.}}$.

По определению 1.1.11 существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} z$ при $n \to \infty$. Так как множество S является секвенциальным компактом, то существует подпоследовательность x_{n_m} и точка $x_0 \in S$, такая, что $x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x_0$ при $m \to \infty$. Однако x_{n_m} также является сходящейся и к точке z как подпоследовательность сходящейся к z последовательности x_n. Предположим, что $z \neq x_0$. Тогда по определению 2.1.5 существуют непересекающиеся окрестности $U(z) \in \tau$ и $U(x_0) \in \tau$ соответственно точек z и x_0. В силу сходимости x_{n_m} к точке z существует номер N, такой, что для всех $m > N$ выполнено включение $x_{n_m} \in U(z)$. Аналогично в силу сходимости x_{n_m} к точке x_0 существует номер M, такой, что для всех $m > M$ выполнено включение $x_{n_m} \in U(x_0)$. Следовательно, для всех $m > \max\{N, M\}$ получаем $x_{n_m} \in U(z) \cap U(x_0)$, т. е. пересечение $U(z) \cap U(x_0) \neq \varnothing$. Получили противоречие. Таким образом, выполнено соотношение $z = x_0 \in S$. Следовательно, любая секвенциальная точка прикосновения множества S принадлежит S, т. е. множество S является секвенциально замкнутым.

Покажем на примере, что компактное подмножество топологического пространства, удовлетворяющего первой и не удовлетворяющего второй аксиоме отделимости, может быть незамкнутым, а секвенциально компактное множество может быть секвенциально незамкнутым.

Пример 2.1.2. Пусть $X = [0, 1]$. Непустое множество $V \subset X$ объявим открытым, если оно отличается от X не более чем на конечное множество точек. Так определенная совокупность открытых множеств образует в X топологию τ. Действительно, включения $\varnothing \in \tau$ и $X \in \tau$ выполнены по определению τ. Рассмотрим произвольное семейство $\left\{ V_\alpha \subset \tau \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ и множество $W = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$. Если $W = \varnothing$, то получаем $W \in \tau$. Если же $W \neq \varnothing$, то существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, такое, что $V_{\alpha_0} \neq \varnothing$. Поэтому множество $X \setminus W \subset X \setminus V_{\alpha_0}$ — не более чем конечно. Следовательно, по определению τ справедливо включение $W \in \tau$. Рассмотрим конечное семейство $\left\{ V_k \subset \tau \;\middle|\; k \in \overline{1, N} \right\}$ и множество $W = \bigcap\limits_{k=1}^{N} V_k$. Если $W = \varnothing$, то $W \in \tau$. Если же $W \neq \varnothing$, то для любого $k \in \overline{1, N}$ выполнено неравенство $V_k \neq \varnothing$. Поэтому множество $X \backslash W = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \left(X \backslash V_k \right)$ — не более чем конечно как конечное объединение не более чем конечных множеств. Следовательно, $W \in \in \tau$. Таким образом, доказано, что семейство τ является топологией в X.

Ясно, что любое одноточечное подмножество $\{x\} \subset X$ замкнуто в (X, τ), так как его дополнение $X \backslash \{x\} \in \tau$ по определению τ. Отметим также, что (X, τ) не является хаусдорфовым, так как ни одна пара различных точек из X не имеет непересекающихся окрестностей. Действительно, если $x, y \in X$ и $x \neq y$, а $U(x) \in \tau$ и $U(y) \in \tau$ — окрестности точек x и y соответственно, то $U(x) \cap V(x)$ отличается от X не более чем на конечное множество точек, а значит, не пусто.

Заметим, что любая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, состоящая из различных элементов, является сходящейся по топологии τ к любой точке $z \in X$. Действительно, для любой точки $z \in X$ любая её окрестность $U(z) \in \tau$ отличается от X не более чем на конечное множество точек. Следовательно, так как рассматриваемая последовательность имеет счётное множество значений, существует номер N, такой, что для всех $n > N$ выполнено $x_n \in U(z)$. Это означает, что $x_n \xrightarrow{\tau} z$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим произвольное счётное множество $K \subset X$ вида $K = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, причём выполнено $x_n \neq x_m$ при $n \neq m$. Так как множество K счётно, то $X \backslash K \notin \tau$, т. е. $X \backslash K$ не открыто. Следовательно, множество K не замкнуто. Тем не менее множество K является компактом в (X, τ). Действительно, пусть $\mathcal{P} = \left\{ V_\alpha \subset \tau \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ — произвольное открытое покрытие множества K. Тогда существует $\alpha_1 \in \mathcal{A}$, такое, что справедливо включение $x_1 \in V_{\alpha_1}$. Так как множество V_{α_1} отличается от X не более чем на конечное число точек, то существует номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливо включение $x_n \in V_{\alpha_1}$. Так как для любого $n \in \overline{2, N_1}$ существует $\alpha_n \in \mathcal{A}$, такой, что $x_n \in V_{\alpha_n}$, то получаем включение $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N_1} V_{\alpha_n}$. Следовательно, семейство $\left\{ V_{\alpha_n} \right\}_{n=1}^{N_1}$ — конечное подпокрытие для K. Компактность множества K доказана.

Так как последовательность K состоит из различных точек, то она является сходящейся в (X, τ) к любой точке $z \in X$. Тогда получаем, что $[K]_{\text{секв.}} = X \neq K$. Следовательно, множество K не является секвенциально замкнутым. Тем не менее множество K является секвенциальным компактом. Действительно, рассмотрим произвольную последовательность $y_m = x_{n_m}$ элементов множества K. Если множество значений последовательности y_m конечно, то она имеет стационарную подпоследовательность $y_{m_k} = x_{n_0}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, естественно сходящуюся к точке $x_{n_0} \in K$. Если же множество значений последовательности y_m бесконечно, то она имеет подпоследовательность y_{m_k}, состоящую из различных точек. Но тогда она является сходящейся по топологии τ к любой точке пространства X, в частности, к $x_1 \in K$. Таким образом, любая последовательность элементов счётного множества K имеет подпоследовательность, сходящуюся к точке множества K, что и требовалось доказать для секвенциальной компактности K.

Утверждение 2.1.10. *Топологическое пространство (X, τ) является компактным тогда и только тогда, когда любое его собственное замкнутое подмножество является компактным.*

Доказательство. Пусть топологическое пространство (X, τ) является компактным. Рассмотрим произвольное замкнутое множество $F \subset X$, такое, что $F \neq X$. Пусть семейство $\left\{ V_\alpha \in \tau \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ образует открытое покрытие множества F, т. е. $F \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$. В силу замкнутости F получаем, что его дополнение $W = X \backslash F$ открыто. Так как $X = F \cup W \subset \left(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \right) \cup W$, то семейство открытых множеств $\left\{ W,\ V_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ образует открытое покрытие компакта X. Следовательно, оно имеет конечное подпокрытие, т. е. существует конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathcal{A}$, такой, что $X \subset \left(\bigcup\limits_{k=1}^{N} V_{\alpha_k} \right) \cup$ $\cup\, W$. Так как множество W не пересекается с F, то получаем, что $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} V_{\alpha_k}$. Таким образом, произвольное открытое покрытие множества F имеет конечное подпокрытие. Следовательно, множество F является компактом.

Обратно, пусть любое собственное замкнутое множество из X является компактом. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\mathcal{P} = \left\{ V_\alpha \in \tau \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ множества X, т. е. $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$. Выберем индекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ так, чтобы $V_{\alpha_0} \neq \varnothing$. Если $X \subset V_{\alpha_0}$, то конечное подпокрытие для покрытия $\mathcal{P}$ состоит из одного множества V_{α_0}. Если же $X \not\subset V_{\alpha_0}$, то рассмотрим множество $F_0 = X \backslash V_{\alpha_0}$. Тогда в силу $V_{\alpha_0} \neq \neq \varnothing$ получаем $F_0 \neq X$. Также множество F_0 замкнуто, так как V_{α_0} открыто. Следовательно, по условию множество F_0 является компактом. При этом семейство открытых множеств $\mathcal{P} \backslash \{V_{\alpha_0}\}$ образует покрытие для F_0. Тогда у него существует конечное подпокрытие, т. е. найдётся конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathcal{A}$, такой, что $F_0 \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} V_{\alpha_k}$. Поэтому $X \subset \bigcup\limits_{k=0}^{N} V_{\alpha_k}$. Таким образом, покрытие $\mathcal{P}$ имеет конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_k}\}_{k=0}^{N}$. Следовательно, множество X является компактом.

Определение 2.1.6. *Семейство множеств* $\left\{ S_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ *(здесь $\mathcal{A}$ — некоторое множество индексов) называется центрированным, если для любого конечного множества индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ выполнено неравенство* $\bigcap\limits_{k=1}^{N} S_{\alpha_k} \neq \varnothing$.

Утверждение 2.1.11. *Топологическое пространство (X, τ) является компактным тогда и только тогда, когда любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть множество X является компактным. Рассмотрим произвольное центрированное семейство его замкнутых подмножеств $\left\{ F_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$. Предположим, что $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = \varnothing$. Определим для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ множество $V_\alpha = X \backslash F_\alpha$. Так как множество F_α является замкнутым, то множество V_α является открытым. При этом справедливо равенство $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = X \backslash \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = X$. Следовательно, семейство множеств $\left\{ V_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ образует открытое покрытие множества X. В силу компактности X у этого покрытия существует конечное подпокрытие, т. е. существует конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathcal{A}$, такой, что $X = \bigcup\limits_{k=1}^{N} V_{\alpha_k}$. Поэтому $\bigcap\limits_{k=1}^{N} F_{\alpha_k} = X \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{N} V_{\alpha_k} = \varnothing$. Получили противоречие с определением 2.1.6 центрированного семейства множеств. Таким образом, выполнено соотношение $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha \neq \varnothing$.

Пусть теперь любое центрированное семейство замкнутых подмножеств множества X имеет непустое пересечение. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\left\{ V_\alpha \;\middle|\; \alpha\in\mathcal{A} \right\}$ множества X, т. е. $V_\alpha \in \tau$ для любого $\alpha\in\tau$, и $X = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$. Предположим, что для любого конечного набора индексов $\alpha_1,\ldots,\alpha_N\in\mathcal{A}$ семейство $\{V_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$ не является покрытием множества X. Следовательно, $X\setminus \bigcup\limits_{k=1}^N V_{\alpha_k} \neq$ $\neq \varnothing$. Определим для любого $\alpha\in\mathcal{A}$ замкнутое множество $F_\alpha =$ $= X\setminus V_\alpha$. Тогда $\bigcap\limits_{k=1}^N F_{\alpha_k} = X\setminus \bigcup\limits_{k=1}^N V_{\alpha_k} \neq \varnothing$ для любого конечного набора индексов $\alpha_1,\ldots,\alpha_N\in\mathcal{A}$. Поэтому семейство замкнутых множеств $\left\{ F_\alpha \;\middle|\; \alpha\in\mathcal{A} \right\}$ является центрированным. Но тогда по условию $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha \neq \varnothing$. Однако, с другой стороны, $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha = X\setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha =$ $= \varnothing$, т. е. получили противоречие. Таким образом, произвольное открытое покрытие множества X имеет конечное подпокрытие, что означает компактность множества X.

2.2. Компактные множества в метрических пространствах

Определение 2.2.1. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Множество $S\subset X$ называется вполне ограниченным, если для любого $\varepsilon>0$ существует конечный набор точек $x_1,\ldots,x_N$ множества S, такой, что $S\subset \bigcup\limits_{k=1}^N B_\varepsilon(x_k)$. Указанный набор точек $\{x_k\}_{k=1}^N\subset S$ называется конечной ε-сетью множества S.*

Замечание 2.2.1. Заметим, что вполне ограниченное множество метрического пространства является ограниченным (т. е. содержится в некотором шаре), обратное же не верно. Действительно, пусть (X,ρ) — метрическое пространство, а множество $S\subset X$ является вполне ограниченным. Тогда у множества S существует конечная 1-сеть $x_1,\ldots,x_N\in S$, т. е. справедливо включение $S\subset$ $\subset \bigcup\limits_{k=1}^N B_1(x_k)$. Определим число $R = 1 + \max\limits_{k\in\overline{1,N}} \rho(x_1,x_k)$. Так как для любого $z \in S$ существует $k \in \overline{1, N}$, такой, что $\rho(z, x_k) \le 1$, то $\rho(z, x_1) \le \rho(z, x_k) + \rho(x_1, x_k) \le 1 + \rho(x_1, x_k) \le R$. Следовательно, справедливо включение $S \subset B_R(x_1)$, т. е. множество S является ограниченным. Покажем на примере, что ограниченное множество метрического пространства может не быть вполне ограниченным. Рассмотрим метрическое пространство ℓ_∞, описанное в примере 1.4.3, и множество $S = \left\{ x \in \ell_\infty \;\middle|\; |x(k)| \le 1 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \right\}$, т. е. $S = B_1(0)$. Следовательно, S является ограниченным в ℓ_∞. При этом оно содержит последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$ вида $x_n(k) = 0$ при $n \ne k$ и $x_n(n) = 1$. Тогда $\rho(x_n, x_m) = 1$ для любых $n \ne m$. Если предположить, что множество S является вполне ограниченным в ℓ_∞, то в нём существует конечная $\frac{1}{4}$-сеть $z_1, \dots, z_N$. Поэтому существует номер $m \in \overline{1, N}$, такой, что в шаре $B_{\frac{1}{4}}(z_m)$ содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Следовательно, существуют два номера $n_1 \ne n_2$, такие, что $x_{n_1}, x_{n_2} \in B_{\frac{1}{4}}(z_m)$. Отсюда получаем $1 = \rho(x_{n_1}, x_{n_2}) \le \rho(x_{n_1}, z_m) + \rho(x_{n_2}, z_m) \le \frac{1}{2}$, т. е. получили противоречие.

Теорема 2.2.1 (*критерий компактности*)**.** *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, множество $S \subset X$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) *множество S является компактом;*

2) *метрическое пространство (S, ρ) является полным и вполне ограниченным;*

3) *множество S является секвенциально компактным.*

Доказательство. Пусть выполнено условие 1. Для доказательства полноты метрического пространства S воспользуемся принципом вложенных шаров (см. теорему 1.4.1). Рассмотрим в метрическом пространстве (S, ρ) произвольную убывающую по вложению последовательность $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами. Эта последовательность шаров образует в S центрированное семейство замкнутых множеств, так как пересечение любого конечного набора таких шаров $F_{n_1}, \dots, F_{n_m}$ содержит шар с номером $k = \max\{n_1, \dots, n_m\}$: $F_k \subset \bigcap\limits_{s=1}^{m} F_{n_s}$. Следовательно, такое пересечение не пусто. Тогда по утверждению 2.1.11 пересечение всех шаров из рассматриваемой последовательности не пусто. В силу принципа вложенных шаров (теорема 1.4.1) метрическое пространство (S,ρ) является полным. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим покрытие множества S открытыми шарами радиуса ε с центрами во всех точках множества S, т. е. $\mathcal{P} = \left\{ O_\varepsilon(x) \;\middle|\; x \in S \right\}$. В силу компактности множества S открытое покрытие $\mathcal{P}$ имеет конечное подпокрытие, т. е. существует конечный набор точек $x_1, \ldots, x_N$ множества S, такой, что $S \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} O_\varepsilon(x_k) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} B_\varepsilon(x_k)$. Получили, что набор точек $x_1, \ldots, x_N$ образует ε-сеть множества S. Следовательно, множество S является вполне ограниченным.

Пусть выполнено условие 2. Покажем, что множество S является секвенциально компактным. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$. Определим бесконечно малую числовую последовательность $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. Так как множество S является вполне ограниченным, то для любого номера k у него существует конечная ε_k-сеть. Тогда существует шар $B_{\varepsilon_1}(z_1)$, в котором находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$. Образуем из этих элементов подпоследовательность $\{x_{n_1(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \subset B_{\varepsilon_1}(z_1) \cap S$. Предположим, рассуждая по индукции, что для номера k определена подпоследовательность $\{x_{n_k(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset B_{\varepsilon_k}(z_k) \cap \cap S$. Так как множество S имеет конечную ε_{k+1}-сеть, то существует шар $B_{\varepsilon_{k+1}}(z_{k+1})$, содержащий бесконечно много элементов последовательности $\{x_{n_k(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. Образуем из этих элементов подпоследовательность $\{x_{n_{k+1}(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset B_{\varepsilon_{k+1}}(z_{k+1}) \cap S$, причём выберем $n_{k+1}(k+1) > n_k(k)$. Таким образом, по индукции определили подпоследовательность $\{x_{n_k(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ исходной последовательности. При этом для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$, такой, что для любых $k > N(\varepsilon)$ и $s \in \mathbb{N}$ получаем неравенство $\rho\left(x_{n_k(k)}, x_{n_{k+s}(k+s)}\right) \leq \leq \rho\left(x_{n_k(k)}, z_k\right) + \rho\left(x_{n_{k+s}(k+s)}, z_k\right) \leq \frac{2}{k} < \varepsilon$. Следовательно, полученная подпоследовательность $\{x_{n_k(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в полном метрическом пространстве (S,ρ), а значит, является сходящейся в S. Таким образом, множество S является секвенциально компактным.

Пусть выполнено условие 3. Докажем компактность множества S. Прежде всего покажем, что секвенциальная компактность множества S влечёт его вполне ограниченность. Действительно, если предположить, что множество S не является вполне ограниченным, то существует $\varepsilon > 0$, для которого не существует конечной ε-сети множества S. Выберем произвольную точку $x_1 \in S$. По предположению справедливо соотношение $S \not\subset B_\varepsilon(x_1)$. Следовательно, существует $x_2 \in S \backslash B_\varepsilon(x_1)$, т. е. $\rho(x_2, x_1) > \varepsilon$. Предположим, рассуждая по индукции, что построены n точек $x_1, \ldots, x_n$ множества S, таких, что $\rho(x_k, x_m) > \varepsilon$ для любых номеров $k \neq m$, где $k, m \in \overline{1, n}$. По предположению справедливо соотношение $S \not\subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k)$. Следовательно, существует $x_{n+1} \in S \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k)$, т. е. $\rho(x_{n+1}, x_k) > \varepsilon$ для всех $k \in \overline{1, n}$. Таким образом, определена последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset$ $\subset S$, такая, что для любых номеров $k \neq m$ выполнено неравенство $\rho(x_k, x_m) > \varepsilon$. Следовательно, любая подпоследовательность построенной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ не является фундаментальной, т. е. является расходящейся. Получили противоречие с секвенциальной компактностью множества S. Далее предположим, что секвенциально компактное множество S не является компактным. Тогда существует открытое покрытие $\mathcal{P} = \left\{ V_\alpha \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ множества S, не имеющее конечного подпокрытия. Так как для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество S имеет конечную $\frac{1}{n}$-сеть, то существует точка $z_n \in S$, такая, что шар $B_{\frac{1}{n}}(z_n)$ не может быть покрыт конечным набором множеств из семейства $\mathcal{P}$. В силу секвенциальной компактности множества S последовательность $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{z_{n_m}\}_{m=1}^\infty$, т. е. существует точка $z_0 \in S$, такая, что $\rho(z_{n_m}, z_0) \to 0$ при $m \to \infty$. Так как семейство $\mathcal{P}$ является покрытием множества S, существует индекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, при котором $z_0 \in V_{\alpha_0}$. Так как множество V_{α_0} является τ_ρ-открытым, то существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что $O_{\varepsilon_0}(z_0) \subset V_{\alpha_0}$. Существует номер M_0, такой, что для всех $m > M_0$ выполнены неравенства $\frac{1}{n_m} < \frac{\varepsilon_0}{4}$ и $\rho(z_{n_m}, z_0) < \frac{\varepsilon_0}{4}$. Следовательно, для любого номера $m > M_0$ и точки $y \in B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m})$ получаем $\rho(y, z_0) \leq \rho(y, z_{n_m}) + \rho(z_{n_m}, z_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Следовательно, $B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \subset$ $\subset O_{\varepsilon_0}(z_0) \subset V_{\alpha_0}$ для всех $m > M_0$. Но по построению ни один шар $B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m})$ не может быть покрыт конечным набором множеств семейства $\mathcal{P}$. Получили противоречие.

Замечание 2.2.2. Пусть замкнутое множество S из полного метрического пространства (X, ρ) является вполне ограниченным. Из утверждения 1.4.1 следует полнота метрического пространства (S, ρ). Следовательно, по теореме 2.2.1 множество S будет компактным.

З а м е ч а н и е 2.2.3. Пусть множество S из полного метрического пространства (X, ρ) является вполне ограниченным. Тогда замыкание $[S]_{\tau_\rho}$ множества S также является вполне ограниченным (это простое следствие определения 2.2.1). Следовательно, множество $[S]_{\tau_\rho}$ является компактом. В частности, отсюда следует, что любая последовательность из множества S имеет ρ-фундаментальную подпоследовательность.

П р и м е р 2.2.1. Приведём пример неполного метрического пространства и его замкнутого вполне ограниченного некомпактного подмножества. Рассмотрим множество ℓ_1, состоящее из всех числовых последовательностей $\{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < +\infty.$$

Метрику ρ в ℓ_1 определим следующим образом:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \Big(x(k) - y(k)\Big)^2} \qquad \text{для всех} \quad x, y \in \ell_1.$$

Это метрическое пространство является неполным. Действительно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \le n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

является ρ-фундаментальной, так как для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\rho(x_n, x_{n+s}) < \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

для всех $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ и $s \in \mathbb{N}$. Если предположить, что существует $z \in \in \ell_1$, такое, что $\rho(x_n, z) \to 0$ при $n \to \infty$, то получим для любого номера k и $n > k$ соотношение $\left|z(k) - \frac{1}{k}\right| \le \rho(z, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $z(k) = \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т. е. $z \notin \ell_1$. Получили противоречие. Таким образом, доказана неполнота метрического пространства (ℓ_1, ρ).

Рассмотрим множество

$$S = \left\{ x \in \ell_1 \;\middle|\; |x(k)| \le \frac{1}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Метрическое пространство (S, ρ) не является полным, так как содержит указанную выше фундаментальноую расходящуюся в (ℓ_1, ρ), а значит, и в (S, ρ) последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, по теореме 2.2.1 множество S не является компактом в (ℓ_1, ρ). Покажем, что множество S замкнуто и вполне ограничено в (ℓ_1, ρ). Пусть $z \in \ell_1$ — точка прикосновения множества S. Тогда существует последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $\rho(z, z_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$|z(k)| \le |z_n(k)| + |z(k) - z_n(k)| \le \frac{1}{k} + \rho(z, z_n) \to \frac{1}{k}$$

при $n \to \infty$. Поэтому $|z(k)| \le \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т. е. $z \in S$. Таким образом, множество S замкнуто. Далее для любого $\varepsilon > 0$ определим номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что

$$\sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим для положительного числа $\delta = \frac{\varepsilon\sqrt{6}}{2\pi}$ разбиение

$$-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = 1$$

отрезка $[-1, 1]$ мелкости меньше δ. Так как для любой точки $x \in S$ и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $k\, x(k) \in [-1, 1]$, то существует $n_k \in \overline{0, M}$, такое, что выполнено неравенство $|k\, x(k) - t_{n_k}| < \delta$. Определим конечное множество S_ε, состоящее из последовательностей $y = \{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ вида $y(k) = 0$ для $k > N$ и $y(k) = \frac{t_{n_k}}{k}$ для $k \in \overline{1, N}$, где $n_k \in \overline{0, M}$. Количество точек множества S_ε не превышает $(M + {} + 1)^N$. По построению $S_\varepsilon \subset S$, причем для любого $x \in S$ существует $y \in S_\varepsilon$, такой, что для любого $k \in \overline{1, N}$ выполнено неравенство $|x(k) - {} - y(k)| < \frac{\delta}{k}$. Тогда получаем

$$\rho(x, y) \le \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \Big(x(k) - y(k)\Big)^2} + \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \Big(x(k)\Big)^2} <$$

$$< \delta \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}} + \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, $S \subset \bigcup\limits_{y \in S_\varepsilon} B_\varepsilon(y)$, т. е. S_ε — конечная ε-сеть для S. Следовательно, множество S является вполне ограниченным в (ℓ_1, ρ).

Определение 2.2.2. *Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Множество, состоящее из всех непрерывных на T вещественнозначных функций, метрика в котором определяется формулой $d(x, y) = \sup\limits_{t \in T} |x(t) - y(t)|$, будем называть метрическим пространством $C(T)$.*

Замечание 2.2.4. Любая функция из множества $C(T)$ ограничена на T. Действительно, для любого $x \in C(T)$ существует максимизирующая последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T$, т. е.

$$\sup_{t \in T} |x(t)| = \lim_{n \to \infty} |x(t_n)|.$$

Так как по теореме 2.2.1 метрический компакт T является секвенциальным компактом, то последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Следовательно, существует $t_0 \in T$, такое, что $\rho(t_{n_m}, t_0) \to 0$ при $m \to \infty$. В силу непрерывности функции x получаем $|x(t_{n_m}) - x(t_0)| \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{t \in T} |x(t)| = \lim_{m \to \infty} |x(t_{n_m})| = |x(t_0)| < +\infty.$$

Таким образом, $d(x, y) < +\infty$ для любых $x, y \in C(T)$. Остальные свойства метрики (неотрицательность, симметрия и неравенство треугольника), очевидно, выполнены для функции d.

Теорема 2.2.2. *Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Тогда метрическое пространство $C(T)$ является полным.*

Доказательство. Пусть последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(K)$$

является d-фундаментальной, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых $m, n \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Так как для любого $t \in T$ выполнено неравенство $|x_n(t) - x_m(t)| \leq d(x_n, x_m)$, то числовая последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Следовательно, в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности для любого $t \in T$ существует числовой предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = z(t)$. Так как для любых $\varepsilon > 0$, $t \in T$ и любых $m, n \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$, то, перейдя в нём к пределу по $m \to \infty$, получим $|x_n(t) - z(t)| \leq \varepsilon$. Так как последнее неравенство справедливо для любого $t \in T$, то и $\sup\limits_{t \in T} |x_n(t) - z(t)| \leq \varepsilon$ для любого $n \geq N(\varepsilon)$. Следовательно, выполнено соотношение $d(x_n, z) \to 0$ при $n \to \infty$. Осталось показать, что $z \in C(T)$, т. е. функция z является непрерывной на T. Для любого $t_0 \in T$ и любого $\varepsilon > 0$ в силу непрерывности функции $x_{N(\varepsilon)}$ на множестве T существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, такое, что для любого $t \in T$ вида $\rho(t, t_0) < \delta$ справедливо неравенство

$$|x_{N(\varepsilon)}(t) - x_{N(\varepsilon)}(t_0)| < \varepsilon.$$

Тогда для любого $t \in T$, $\rho(t, t_0) < \delta$, получаем

$$|z(t) - z(t_0)| \leq |z(t) - x_{N(\varepsilon)}(t)| + |z(t_0) - x_{N(\varepsilon)}(t_0)| + \\ + |x_{N(\varepsilon)}(t) - x_{N(\varepsilon)}(t_0)| \leq 3\varepsilon.$$

Следовательно, функция z является непрерывной в произвольной точке $t_0 \in T$, что и требовалось.

Теорема 2.2.3 (*Кантор*). *Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Тогда любая функция $x \in C(T)$ является равномерно непрерывной на T, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, такое, что для любых $t, \tau \in T$, таких, что $\rho(t, \tau) \leq \delta$, выполнено $|x(t) - x(\tau)| \leq \varepsilon$.*

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что существует функция $x \in C(T)$, которая не является равномерно непрерывной на T. Следовательно, существует $\varepsilon_0 > 0$, а для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $t_n, \tau_n \in T$, такие, что $\rho(t_n, \tau_n) \leq \frac{1}{n}$ и $|x(t_n) - x(\tau_n)| > \varepsilon_0$. Так как метрический компакт T является секвенциальным компактом, то последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T$

имеет сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Следовательно, существует $t_0 \in T$, такое, что $\rho(t_{n_m}, t_0) \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда получаем

$$\rho(\tau_{n_m}, t_0) \le \rho(\tau_{n_m}, t_{n_m}) + \rho(t_{n_m}, t_0) \le \tfrac{1}{n_m} + \rho(t_{n_m}, t_0) \to 0$$

при $m \to \infty$. В силу непрерывности функции x находим

$$0 < \varepsilon_0 \le \lim_{m\to\infty} |x(t_{n_m}) - x(\tau_{n_m})| = |x(t_0) - x(t_0)| = 0,$$

т. е. получили противоречие.

Определение 2.2.3. *Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Множество $S \subset C(T)$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых $t, \tau \in T$, таких, что $\rho(t, \tau) \le \delta$, и для любого $x \in S$ выполнено неравенство $|x(t) - x(\tau)| \le \varepsilon$.*

Теорема 2.2.4 (*Арцела—Асколи*). *Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Множество $S \subset C(T)$ является вполне ограниченным в $C(T)$ тогда и только тогда, когда S ограничено в $C(T)$ (т. е. существует $R > 0$, такое, что для любого $x \in S$ выполнено неравенство $\sup\limits_{t\in T} |x(t)| \le R$) и S равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть множество $S \subset C(T)$ является вполне ограниченным. Тогда по замечанию 2.2.1 множество S содержится в некотором шаре пространства $C(T)$, т. е. существует число $r > 0$ и функция $z \in C(T)$, такие, что $S \subset B_r(z)$. Определим

$$R = r + \sup_{t\in T} |z(t)|.$$

В силу замечания 2.2.4 получаем $R < +\infty$. Тогда для любого $x \in S$ находим

$$\sup_{t\in T} |x(t)| \le d(x, z) + \sup_{t\in T} |z(t)| \le r + \sup_{t\in T} |z(t)| = R.$$

Следовательно, S является ограниченным в $C(T)$. Далее для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть множества S, т. е. существуют функции $x_1, \dots, x_N \in S$, такие, что $S \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} B_\varepsilon(x_k)$. По теореме 2.2.3

Кантора каждая функция x_k равномерно непрерывна на T, т. е. для каждого $k \in \overline{1,N}$ найдётся $\delta_k > 0$, такое, что для любых $t, \tau \in T$ вида $\rho(t,\tau) \le \delta_k$ выполнено неравенство $|x_k(t) - x_k(\tau)| \le \varepsilon$. Определим

$$\delta = \min_{k \in \overline{1,N}} \delta_k > 0.$$

Так как для любой функции $x \in S$ существует номер $k \in \overline{1,N}$, такой, что $d(x, x_k) \le \varepsilon$, то для любых $t, \tau \in T$ вида $\rho(t,\tau) \le \delta$ находим

$$|x(t) - x(\tau)| \le |x(t) - x_k(t)| + |x(\tau) - x_k(\tau)| + |x_k(t) - x_k(\tau)| \le \\ \le 2d(x, x_k) + \varepsilon \le 3\varepsilon.$$

Следовательно, множество S является равностепенно непрерывным.

Пусть теперь множество S является ограниченным в $C(T)$ и равностепенно непрерывным. По теореме 2.2.1 метрический компакт является вполне ограниченным. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная $\delta(\varepsilon)$-сеть множества T вида $t_1, \ldots, t_N \in T$. Рассмотрим отображение $F\colon S \to \mathbb{R}^N$ вида

$$F(x) = \Big(x(t_1), \ldots, x(t_N)\Big) \in \mathbb{R}^N$$

для любой функции $x \in S$. В силу ограниченности множества S в $C(T)$ существует число $R > 0$, такое, что для любых $x \in S$ и $t \in T$ выполнено неравенство $|x(t)| \le R$. Рассмотрим разбиение вещественного отрезка $[-R, R]$ мелкости меньше ε точками

$$-R = a_1 < a_2 < \ldots < a_L = R.$$

Определим конечное множество

$$A = \left\{ \, a = (a_{k_1}, \ldots, a_{k_N}) \in \mathbb{R}^N \;\; \Big| \;\; k_s \in \overline{1,L} \;\; \forall\, s \in \overline{1,N} \, \right\}.$$

Количество элементов множества A не превышает L^N. Введём в пространстве $\mathbb{R}^N$ метрику $\Delta_N(u,v) = \max\limits_{s \in \overline{1,N}} |u_s - v_s|$ для любых векторов $u, v \in \mathbb{R}^N$. Тогда для любого $x \in S$ существует $a \in A$, такой, что $\Delta_N\Big(F(x), a\Big) \le \varepsilon$. Занумеруем все элементы множества A, получим $A = \Big\{a(m)\Big\}_{m=1}^{M}$. Определим множество номеров

$$I = \left\{ \, m \in \overline{1,M} \;\Big|\; \exists\, x \in S : \, \Delta_N\Big(F(x), a(m)\Big) \le \varepsilon \, \right\}.$$

Выберем для любого $m \in I$ функцию $x_m \in S$, для которой выполнено неравенство

$$\Delta_N \left(F(x_m), a(m) \right) \leq \varepsilon.$$

Так как для любого $x \in S$ существует $m \in \overline{1, M}$, такой, что

$$\Delta_N \left(F(x), a(m) \right) \leq \varepsilon,$$

то выполнено включение $m \in I$ и неравенство

$$\Delta_N \left(F(x), F(x_m) \right) \leq 2\varepsilon.$$

Так как для любого $t \in T$ существует $k \in \overline{1, N}$, такой, что $\rho(t, t_k) \leq$ $\leq \delta(\varepsilon)$, то находим

$$|x(t) - x_m(t)| \leq |x(t) - x(t_k)| + |x_m(t) - x_m(t_k)| + |x(t_k) - x_m(t_k)| \leq$$
$$\leq 2\varepsilon + \Delta_N \left(F(x), F(x_m) \right) \leq 4\varepsilon.$$

Следовательно, $d(x, x_m) \leq 4\varepsilon$, т. е. множество $\{x_m\}_{m \in I} \subset S$ является конечной 4ε-сетью множества S. Теорема доказана.

Пример 2.2.2. Пусть функция $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$ по переменной $x \in \mathbb{R}$ для любого $t \in [0,1]$, т. е.

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y| \qquad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — ограниченное и замкнутое множество. Рассмотрим множество $S \subset C[0,1]$ вида

$$S = \left\{ \; x \in C^1[0,1] \quad \middle| \quad \tfrac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t)\right) \quad \forall\, t \in [0,1], \quad x(0) \in K \; \right\}.$$

Здесь $C^1[0,1]$ — множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ вещественнозначных функций. Покажем, что множество S является компактом в $C[0,1]$. В силу полноты метрического пространства $C[0,1]$ достаточно доказать замкнутость и вполне ограниченность S в $C[0,1]$. Для любого $x \in S$ и любого $t \in [0,1]$ справедливо равенство

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t f\left(\tau, x(\tau)\right)\, d\tau.$$

Так как множество $K \subset \mathbb{R}$ ограничено, то существует число $D > 0$, такое, что для любого числа $a \in K$ выполнено неравенство $|a| \leq D$. Далее, поскольку функция $t \mapsto f(t,0)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t,0)| = M_0 < +\infty$. Тогда для любого $x \in S$ и любого $t \in [0,1]$ получаем

$$|x(t)| \leq D + \int\limits_0^t |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau,0)|\,d\tau + \int\limits_0^t |f(\tau,0)|\,d\tau \leq$$

$$\leq D + M_0 + L\int\limits_0^t |x(\tau)|\,d\tau.$$

Следовательно, в силу леммы Гронуолла[1] получаем для любого $t \in$ $\in [0,1]$ неравенство

$$|x(t)| \leq (D+M_0)\exp(Lt) \leq (D+M_0)\exp(L) = R.$$

Таким образом, множество S является ограниченным в пространстве $C[0,1]$.

Далее, так как функция f непрерывна, то

$$\sup_{\substack{t\in[0,1]\\ |x|\leq R}} |f(t,x)| = M_R < +\infty.$$

[1]Напомним лемму Гронуолла: если для непрерывной на отрезке $[0,1]$ вещественнозначной функции z существуют неотрицательные числа A и B, такие, что $z(t) \leq A + B\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau$ для любого $t \in [0,1]$, то справедливо неравенство $z(t) \leq$ $\leq A\exp(Bt)$ для любого $t \in [0,1]$. Докажем лемму Гронуолла. Если $B = 0$, то утверждние леммы очевидно. Пусть $B > 0$. Тогда для любого $t \in [0,1]$ имеем

$$\int\limits_0^t \exp(-B\tau)z(\tau)d\tau = \exp(-Bt)\int\limits_0^t z(\xi)\,d\xi + B\int\limits_0^t \exp(-B\tau)\left(\int\limits_0^\tau z(\xi)\,d\xi\right)d\tau \geq$$

$$\geq \exp(-Bt)\left(\frac{z(t)-A}{B}\right) + \int\limits_0^t \exp(-B\tau)(z(\tau)-A)\,d\tau.$$

Отсюда получаем $A\left(\dfrac{1-\exp(-Bt)}{B}\right) \geq \exp(-Bt)\left(\dfrac{z(t)-A}{B}\right)$, т. е. $A\exp(Bt) -$ $- A \geq z(t) - A$ и $A\exp(Bt) \geq z(t)$, что и требовалось.

Тогда для любого $x \in S$ и любых $t, \tau \in [0,1]$ по теореме Лагранжа существует число ξ между t и τ, такое, что

$$|x(t) - x(\tau)| = \left|\frac{dx(\xi)}{dt}\right| |t-\tau| = |f(\xi, x(\xi))|\, |t-\tau| \le M_R|t-\tau|.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M_R+1}$, такое, что для любых $t, \tau \in [0,1]$ вида $|t-\tau| \le \delta(\varepsilon)$ и любой функции $x \in S$ справедливо неравенство $|x(t) - x(\tau)| \le M_R\delta(\varepsilon) \le \varepsilon$. Таким образом, множество S является равностепенно непрерывным в $C[0,1]$. Следовательно, по теореме 2.2.4 Арцела—Асколи получаем, что множество S является вполне ограниченным в пространстве $C[0,1]$.

Докажем замкнутость множества S в $C[0,1]$. Пусть функция $z \in \in C[0,1]$ является точкой прикосновения множества S. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |z(t) - x_n(t)| \to 0$$

при $n \to \infty$. В частности, $|z(0) - x_n(0)| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, число $z(0)$ является точкой прикосновения замкнутого числового множества K, т. е. $z(0) \in K$. Далее для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых $m, n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| \le \varepsilon.$$

Так как для любого $t \in [0,1]$ и любых $n, m > N\left(\frac{\varepsilon}{L+1}\right)$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{dx_n(t)}{dt} - \frac{dx_m(t)}{dt}\right| \le |f(t, x_n(t)) - f(t, x_m(t))| \le$$
$$\le L|x_n(t) - x_m(t)| \le L \sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| \le \varepsilon,$$

то последовательность $\left\{\frac{dx_n}{dt}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset C[0,1]$ является фундаментальной в $C[0,1]$. Следовательно, в силу полноты метрического пространства $C[0,1]$ (см. теорему 2.2.2) существует функция $w \in C[0,1]$, такая, что

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{dx_n(t)}{dt} - w(t)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определим непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0,1]$ функцию $y(t) = z(0) + \int\limits_0^t w(\tau)\,d\tau$. Тогда получаем

$$\sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - y(t)| \le \sup_{t\in[0,1]} \left| x_n(0) - z(0) + \int\limits_0^t \left(\tfrac{dx_n(\tau)}{dt} - w(\tau) \right) d\tau \right| \le$$

$$\le |x_n(0) - z(0)| + \sup_{t\in[0,1]} \left| \tfrac{dx_n(t)}{dt} - w(t) \right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $y(t) = z(t)$ для любого $t \in [0,1]$, т. е. функция z является непрерывно дифференцируемой, и для любого $t \in [0,1]$ справедливо равенство

$$\frac{dz(t)}{dt} = w(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{dx_n(t)}{dt} = \lim_{n\to\infty} f(t, x_n(t)) = f(t, z(t)).$$

Таким образом, справедливо включение $z \in S$, т. е. множество S является замкнутым в пространстве $C[0,1]$.

Глава 3

Линейные нормированные пространства и линейные операторы

3.1. Линейные нормированные пространства

Определение 3.1.1. *Пусть X — комплексное линейное пространство. Функция $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ называется нормой в X, если выполнены следующие условия:*

1) $\|x\| \geq 0$ для любого $x \in X$;

2) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ (т. е. x является нулевым элементом линейного пространства X);

3) $\|tx\| = |t|\,\|x\|$ для любых $x \in X$ и $t \in \mathbb{C}$;

4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in X$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство с фиксированной в нём нормой будем называть линейным нормированным пространством.

Замечание 3.1.1. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Тогда функция $\rho(x,y) = \|x-y\|$ для любых $x, y \in X$ является метрикой на X. Действительно, по определению 3.1.1 получаем $\rho(x,y) \geq 0$ и $\rho(x,y) = 0$, если и только если $x - y = 0$, что равносильно $x = y$, $\rho(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \rho(x,y)$, и наконец, для ρ справедливо неравенство треугольника $\rho(x,y) = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x,z) + \rho(y,z)$ для любых $x, y, z \in X$. Таким образом, будем рассматривать линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ как метрическое с указанной метрикой ρ.

Определение 3.1.2. *Пусть X — линейное пространство, множества $A, B \subset X$, а $t \in \mathbb{C}$. Тогда суммой Минковского множеств A и B будем называть множество*

$$A + B = \left\{\, a + b \;\middle|\; a \in A,\ b \in B \,\right\},$$

а произведением множества A на скаляр t будем называть множество

$$tA = \left\{\, ta \;\middle|\; a \in A \,\right\}.$$

Замечание 3.1.2. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, вектор $x \in X$, число $R > 0$. Тогда справедливы равенства $O_R(x) = x + R\,O_1(0)$ и $B_R(x) = x + R\,B_1(0)$. Действительно, вектор $y \in O_R(x)$ тогда и только тогда, когда $\|y - x\| < R$, что равносильно $y = x + R\,\frac{y-x}{R} \in x + R\,O_1(0)$. Аналогично вектор $y \in B_R(x)$ тогда и только тогда, когда $\|y - x\| \le R$, что равносильно $y = x + R\,\frac{y-x}{R} \in x + R\,B_1(0)$.

Замечание 3.1.3. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, векторы $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, числа $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} O_{R_1}(x_1) + O_{R_2}(x_2) &= O_{R_1+R_2}(x_1 + x_2), \\ B_{R_1}(x_1) + B_{R_2}(x_2) &= B_{R_1+R_2}(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Действительно, докажем сначала эти равенства для $x_1 = x_2 = 0$. Если $x \in O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0)$, то существуют векторы $u \in O_{R_1}(0)$ и $v \in O_{R_2}(0)$, такие, что $x = u + v$. Тогда $\|x\| \le \|u\| + \|v\| < R_1 + R_2$, т. е. $x \in O_{R_1+R_2}(0)$. Следовательно, $O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0) \subset O_{R_1+R_2}(0)$. Если же $x \in O_{R_1+R_2}(0)$, то либо $\|x\| < R_1$ и тогда $x \in O_{R_1}(0) \subset O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0)$, либо $R_1 \le \|x\| < R_1 + R_2$. В последнем случае возьмём число L вида $\|x\| < L < R_1 + R_2$. Тогда вектор $\frac{R_1}{L}x \in O_{R_1}(0)$, а вектор $\left(1 - \frac{R_1}{L}\right) x \in O_{R_2}(0)$, так как

$$\left\|\left(1 - \tfrac{R_1}{L}\right) x\right\| = \left(1 - \tfrac{R_1}{L}\right) \|x\| < \left(1 - \tfrac{R_1}{L}\right) L = L - R_1 < R_2.$$

При этом

$$x = \tfrac{R_1}{L}x + \left(1 - \tfrac{R_1}{L}\right) x \in O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0).$$

Следовательно, $O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0) = O_{R_1+R_2}(0)$. Доказательство равенства $B_{R_1}(0) + B_{R_2}(0) = B_{R_1+R_2}(0)$ проводится совершенно аналогично. Далее в силу замечания 3.1.2 для произвольных векторов x_1 и x_2 получаем

$$\begin{aligned} O_{R_1}(x_1) + O_{R_2}(x_2) &= x_1 + x_2 + O_{R_1}(0) + O_{R_2}(0) = \\ &= x_1 + x_2 + O_{R_1+R_2}(0) = O_{R_1+R_2}(x_1 + x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{R_1}(x_1) + B_{R_2}(x_2) &= x_1 + x_2 + B_{R_1}(0) + B_{R_2}(0) = \\ &= x_1 + x_2 + B_{R_1+R_2}(0) = B_{R_1+R_2}(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Замечание 3.1.4. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, множество $S \subset X$. Тогда для замыкания множества S справедливо равенство

$$[S] = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(S + O_\varepsilon(0)\Big) = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(S + B_\varepsilon(0)\Big).$$

Действительно, для любого $x \in [S]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in S$, такой, что $\|x - y\| < \varepsilon$, что равносильно $x \in y + O_\varepsilon(0) \subset S + + O_\varepsilon(0)$. Следовательно, справедливо включение $[S] \subset S + O_\varepsilon(0)$ для любого $\varepsilon > 0$, что означает

$$[S] \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(S + O_\varepsilon(0)\Big).$$

Далее, так как $O_\varepsilon(0) \subset B_\varepsilon(0)$ для любого $\varepsilon > 0$, то выполнено включение

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \Big(S + O_\varepsilon(0)\Big) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(S + B_\varepsilon(0)\Big).$$

Наконец, если $z \in \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \Big(S + B_\varepsilon(0)\Big)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $y \in S$, такой, что $z \in y + B_{\varepsilon(0)}$, что равносильно $\|z - y\| \le \varepsilon$. Следовательно, $z \in [S]$, что и требовалось.

Замечание 3.1.5. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, множества $A, B \subset X$, скаляр $t \neq 0$. Тогда справедливы соотношения $[A] + [B] \subset [A + B]$ и $t[A] = [tA]$. Действительно, если вектор $x \in [A] + [B]$, то по замечанию 3.1.4 для любого $\varepsilon > 0$ получаем $x \in A + O_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) + B + O_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) = A + B + O_\varepsilon(0)$. Следовательно, $x \in \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \Big(A + B + O_\varepsilon(0)\Big) = [A + B]$. Таким образом, выполнено включение $[A] + [B] \subset [A + B]$. Далее находим

$$t[A] = t \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(A + O_\varepsilon(0)\Big) = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(tA + O_{|t|\varepsilon}(0)\Big) = \\ = \bigcap_{\delta>0} \Big(tA + O_\delta(0)\Big) = [tA],$$

что и требовалось.

З а м е ч а н и е 3.1.6. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Тогда для любого вектора $x \in X$ и числа $R > 0$ шары $O_R(x)$ и $B_R(x)$ являются выпуклыми. Действительно, для любых $y, z \in O_R(x)$ и любого $t \in (0,1)$ получаем $\|ty + (1-t)z - x\| = \|t(y - - x) + (1-t)(z-x)\| \le t\|y - x\| + (1-t)\|z - x\| < tR + (1-t)R = = R$, т. е. $ty + (1-t)z \in O_R(x)$, что означает выпуклость открытого шара $O_R(x)$. Аналогично для любых $y, z \in B_R(x)$ и любого $t \in (0,1)$ получаем $\|ty + (1-t)z - x\| = \|t(y-x) + (1-t)(z-x)\| \le t\|y - x\| + + (1-t)\|z - x\| \le tR + (1-t)R = R$, т. е. $ty + (1-t)z \in B_R(x)$, что означает выпуклость замкнутого шара $B_R(x)$.

У т в е р ж д е н и е 3.1.1. *Пусть X — линейное пространство, в котором существует функция $d: X \to \mathbb{R}$, для которой выполнены свойства 1, 2, 3 определения 3.1.1 нормы, и при этом множество $S = = \left\{ x \in X \;\middle|\; d(x) < 1 \right\}$ выпукло. Тогда функция d является нормой в X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуется проверить для функции d неравенство треугольника. Рассмотрим произвольные векторы $x, y \in \in X$. Тогда для любых чисел $a > d(x) \ge 0$ и $b > d(y)$ справедливо включение $\frac{x}{a} \in S$ и $\frac{y}{b} \in S$. Следовательно, в силу выпуклости множества S для любого $t \in [0,1]$ выполнено включение $t\frac{x}{a} + (1-t)\frac{y}{b} \in S$. Возьмём $t = \frac{a}{a+b} \in (0,1)$, тогда $1 - t = \frac{b}{a+b}$ и выполнено включение $\frac{x+y}{a+b} \in S$, т. е. $d(x+y) < a + b$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $a \to d(x) + 0$ и $b \to d(y) + 0$, получим неравенство $d(x+y) \le d(x) + d(y)$, что и требовалось.

П р и м е р 3.1.1. Рассмотрим для любого $p \in (0,1)$ линейное пространство числовых последовательностей

$$\ell_p = \left\{ x: \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty \right\}.$$

Определим функцию $d_p: \ell_p \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$d_p(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall\, x \in \ell_p.$$

Очевидно, что функция d_p удовлетворяет условиям 1, 2, 3 определения 3.1.1. Рассмотрим множество $S = \left\{ x \in \ell_p \;\middle|\; d_p(x) < 1 \right\}$. Так как $0 < p < 1$, то $1 - \frac{1}{p} < 0$ и выполнено неравенство $2^{1-\frac{1}{p}} < 1$. Выберем произвольное число $\delta \in \left(2^{1-\frac{1}{p}}, 1\right)$ и рассмотрим две последовательности из ℓ_p вида $x_\delta = (\delta, 0, 0, 0 \ldots)$ и $y_\delta = (0, \delta, 0, 0, \ldots)$. Так как $d_p(x_\delta) = d_p(y_\delta) = \delta < 1$, то $x_\delta \in S$ и $y_\delta \in S$. Но для последовательности $z_\delta = \frac{1}{2}(x_\delta + y_\delta) = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, 0, 0, \ldots\right)$ получаем неравенство

$$d_p(z_\delta) = \left(2^{1-p}\delta^p\right)^{\frac{1}{p}} > \left(2^{1-p}2^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Следовательно, $z_\delta \notin S$, т. е. множество S не является выпуклым. Поэтому в силу замечания 3.1.6 функция d_p не является нормой в линейном пространстве ℓ_p для любого $p \in (0, 1)$.

Определение 3.1.3. *Пусть X — линейное пространство. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в X называются эквивалентными, если существуют два положительных числа C_1 и C_2, такие, что для любого $x \in X$ выполнено неравенство*

$$C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1.$$

Пример 3.1.2. Рассмотрим линейное пространство числовых последовательностей

$$\ell_1 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < +\infty \right\}$$

и введём в нём две нормы $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|$ и $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2}$ для любого $x \in \ell_1$. Для любого нетривиального $x \in \ell_1$ справедливо неравенство $\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_2 \le \left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_1 = 1$. Следовательно, $\|x\|_2 \le \|x\|_1$ для любого $x \in \ell_1$. Если предположить, что существует $C_1 > 0$, такое, что для всех $x \in \ell_1$ выполнено неравенство $C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2$, то для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \le n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

получаем следующее противоречие:

$$\frac{\pi}{\sqrt{6}} > \|x_n\|_2 \ge C_1\|x_n\|_1 = C_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$$

при $n \to \infty$. Следовательно, указанного числа C_1 не существует, и нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ не являются эквивалентными в ℓ_1.

Теорема 3.1.1. *Пусть X — конечномерное линейное пространство. Тогда любые две нормы в X являются эквивалентными.*

Доказательство. Пусть размерность X равна $n \in \mathbb{N}$, а конечное семейство векторов $e_1, \ldots, e_n \in X$ образует базис в X, т. е. для любого вектора $x \in X$ существует единственный набор комплексных чисел $x(1), \ldots, x(n)$, такой, что $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x(k)e_k$. Введём в X норму $\|x\|_e = \sum\limits_{k=1}^{n} |x(k)|$ (свойства 1—4 определения 3.1.1, очевидно, выполнены для $\|\cdot\|_e$). Покажем, что любая норма в X эквивалентна норме $\|\cdot\|_e$. Тогда любые две нормы в X, эквивалентные норме $\|\cdot\|_e$, будут эквивалентны и друг другу.

Итак, рассмотрим в X некоторую норму $\|\cdot\|$. В силу неравенства треугольника для любого $x \in X$ получаем неравенство

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x(k)e_k \right\| \le \sum_{k=1}^{n} |x(k)|\, \|e_k\| \le$$
$$\le \left(\max_{k \in \overline{1,n}} \|e_k\| \right) \sum_{k=1}^{n} |x(k)| = C_2 \|x\|_e,$$

где положительное число $C_2 = \max\limits_{k \in \overline{1,n}} \|e_k\|$. Предположим, рассуждая от противного, что нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_e$ не эквивалентны, т. е. для любого числа $R > 0$ существует вектор $x_R \in X$, такой, что $\|x_R\|_e > R\|x_R\|$. Тогда для любого $R > 0$ выполнено неравенство $x_R \neq 0$. Определим для любого номера N вектор $y_N = \frac{x_N}{\|x_N\|_e}$. Тогда выполнено соотношение $1 = \|y_N\|_e > N\|y_N\|$, т. е. $\|y_N\| < \frac{1}{N}$. С другой стороны, для любого $k \in \overline{1,n}$ и любого $N \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|y_N(k)| \le$ $\le \|y_N\|_e = 1$. Тогда по теореме Больцано—Вейерштрасса существует строго возрастающая последовательность номеров $\{N_m\}_{m=1}^{\infty}$, такая, что числовая последовательность $\{y_{N_m}(k)\}_{m=1}^{\infty}$ сходится при каждом $k \in \overline{1,n}$. Обозначим $z(k) = \lim\limits_{m\to\infty} y_{N_m}(k)$ для любого $k \in \overline{1,n}$. Тогда вектор $z = \sum\limits_{k=1}^{n} z(k)e_k$ является пределом по норме $\|\cdot\|_e$ последовательности $\{y_{N_m}\}_{m=1}^{\infty}$, так как $\|y_{N_m} - z\|_e = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_{N_m}(k) - z(k)| \to 0$

при $m \to \infty$. Это, в частности, означает, что $\|z\|_e = \lim\limits_{m\to\infty} \|y_{N_m}\|_e = 1$. С другой стороны, справедливо следующее соотношение: $\|y_{N_m} - z\| \le C_2\|y_{N_m} - z\|_e \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда в силу неравенства $\|y_{N_m}\| < \frac{1}{N_m}$ получаем $\|z\| = \lim\limits_{m\to\infty} \|y_{N_m}\| = 0$. Следовательно, $z = 0$, т. е. $z(k) = 0$ для любого $k \in \overline{1,n}$. Но это противоречит равенству $\|z\|_e = \sum\limits_{k=1}^{n} |z(k)| = 1$. Полученное противоречие доказывает существование числа $C_1 > 0$, такого, что для всех $x \in X$ справедливо неравенство $C_1\|x\|_e \le \|x\|$, что и требовалось.

Следствие 3.1.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, а $L \subset X$ — конечномерное подпространство. Тогда линейное нормированное пространство $(L, \|\cdot\|)$ является полным, а любое замкнутое ограниченное подмножество L является компактом.*

Доказательство. Пусть L — n-мерное подпространство X, а $e_1, \dots, e_n \in L$ — базис в L, т. е. для любого вектора $x \in L$ существует единственный набор комплексных чисел $x(1), \dots, x(n)$, такой, что $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x(k)e_k$. Введём в L норму $\|x\|_e = \sum\limits_{k=1}^{n} |x(k)|$. По теореме 3.1.1 нормы $\|\cdot\|_e$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны в L, т. е. существуют положительные числа C_1 и C_2, такие, что для любого $x \in L$ выполнены неравенства $C_1\|x\|_e \le \|x\| \le C_2\|x\|_e$. Пусть последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ является фундаментальной по норме $\|\cdot\|$. Тогда она является фундаментальной и по норме $\|\cdot\|_e$, так как для всех $m, s \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\|x_m - x_s\|_e \le \frac{1}{C_1}\|x_m - x_s\|$. Так как для любого номера $k \in \overline{1,n}$ и для всех $m, s \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|x_m(k) - x_s(k)| \le \|x_m - x_s\|_e$, то числовая последовательность $\{x_m(k)\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной для любого $k \in \overline{1,n}$. Следовательно, по критерию Коши сходимости числовой последовательности для любого номера $k \in \overline{1,n}$ существует $\lim\limits_{m\to\infty} x_m(k) = z(k)$. Определим вектор $z = \sum\limits_{k=1}^{n} z(k)e_k \in L$. Тогда получаем $\|x_m - z\| \le C_2\|x_m - z\|_e = C_2 \sum\limits_{k=1}^{n} |x_m(k) - z(k)| \to 0$ при $m \to \infty$, т. е. полнота линейного нормированного пространства $(L, \|\cdot\|)$ доказана.

Рассмотрим ограниченное и замкнутое в линейном нормированном пространстве $(L, \|\cdot\|)$ множество $S \subset L$. Докажем, что S является компактом в $(L, \|\cdot\|)$. По теореме 2.2.1 для этого достаточно доказать секвенциальную компактность S. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset S$. В силу ограниченности S, существует число $R > 0$, такое, что $\|x\| \leq R$ для любого $x \in S$. Следовательно, $\|x\|_e \leq \frac{R}{C_1}$ для любого $x \in S$. Тогда для любого номера $k \in \overline{1,n}$ и любого $m \in \mathbb{N}$ получаем неравенство $|x_m(k)| \leq$ $\leq \|x_m\|_e \leq \frac{R}{C_1}$. По теореме Больцано—Вейерштрасса существует строго возрастающая последовательность номеров $\{m_s\}_{s=1}^{\infty}$, такая, что числовая последовательность $\{x_{m_s}(k)\}_{s=1}^{\infty}$ является сходящейся для любого номера $k \in \overline{1,n}$. Обозначим $z(k) = \lim\limits_{s\to\infty} x_{m_s}(k)$ и определим вектор $z = \sum\limits_{k=1}^{n} z(k)e_k \in L$. Получаем $\|x_{m_s} - z\| \leq C_2\|x_{m_s} -$ $- z\|_e = C_2 \sum\limits_{k=1}^{n} |x_{m_s}(k) - z(k)| \to 0$ при $s \to \infty$. В силу замкнутости множества S также получаем $z \in S$. Таким образом, секвенциальная компактность S доказана.

Замечание 3.1.7. Пусть X — n-мерное линейное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Пусть непустое выпуклое множество S является открытым и ограниченным в смысле нормы $\|\cdot\|_e$, и для любого комплексного скаляра α вида $|\alpha| = 1$ выполнено равенство $\alpha S = S$. Тогда в X существует норма $\|\cdot\|$, такая, что выполнено равенство $\left\{ x \in X \;\middle|\; \|x\| < 1 \right\} = S$.

Прежде всего заметим, что нулевой вектор из X содержится в S. Действительно, по условию для $x \in S$ выполнено $(-x) \in S$. Следовательно, в силу выпуклости множества S получаем $0 = \frac{x}{2} + \frac{(-x)}{2} \in S$. Определим функцию Минковского множества S следующим образом:

$$\mu_S(x) = \inf\left\{ t > 0 \;\middle|\; \tfrac{x}{t} \in S \right\} \qquad \forall\, x \in X.$$

Так как множество S открыто по норме $\|\cdot\|_e$ и $0 \in S$, то существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любого $x \in X$ вида $\|x\|_e < \varepsilon_0$ выполнено включение $x \in S$. Тогда для любого вектора $x \in X$ и любого $t >$ $> \frac{\|x\|_e}{\varepsilon_0}$ получаем $\left\|\frac{x}{t}\right\| < \varepsilon_0$, т. е. $\frac{x}{t} \in S$. Следовательно, для любого $x \in X$ получаем неравенство $\mu_S(x) \leq \frac{\|x\|_e}{\varepsilon_0}$. Покажем, что функция μ_S удовлетворяет определению нормы на X. Действительно, по определению $\mu_S(x) \geq 0$ для любого $x \in X$. Равенство $\mu_S(x) = 0$ для некоторого $x \in X$ означает, что для любого $\delta > 0$ существует $t_\delta \in (0,\delta)$, такое, что $\frac{x}{t_\delta} \in S$. Так как множество S ограничено по норме $\|\cdot\|_e$, то существует число $R > 0$, такое, что для любого вектора $z \in S$ выполнено неравенство $\|z\|_e \leq R$. Тогда получаем, что включение $\frac{x}{t_\delta} \in S$ влечёт неравенство $\|x\|_e \leq t_\delta R \leq \delta R \to 0$ при $\delta \to +0$. Следовательно, $\|x\|_e = 0$, что означает равенство $x = 0$. Для любого нетривиального комплексного числа α по условию выполнено равенство $\frac{|\alpha|}{\alpha} S = S$. Тогда для любого $x \in X$ получаем

$$\mu_S(\alpha x) = \inf\left\{\ t > 0 \ \middle|\ \frac{|\alpha| x}{t} \in \frac{|\alpha|}{\alpha} S = S\ \right\} = \\ = \inf\left\{\ |\alpha|\tau > 0 \ \middle|\ \frac{x}{\tau} \in S\ \right\} = |\alpha|\mu_S(x).$$

Если же $\alpha = 0$, то очевидны следующие равенства $\mu_S(\alpha x) = \mu_S(0) = 0 = |\alpha|\mu_S(x)$.

Заметим, что для любого вектора $x \in X$ и любого числа $t > \mu_S(x)$ выполнено включение $\frac{x}{t} \in S$. Действительно, по определению нижней грани для любого $t > \mu_S(x)$ существует положительное $\tau_t < t$, такое, что $\frac{x}{\tau_t} \in S$. Так как множество S выпукло и содержит ноль, то $\frac{\tau_t}{t} S = \frac{\tau_t}{t} S + \left(1 - \frac{\tau_t}{t}\right) 0 \subset S$. Следовательно, $\frac{x}{t} = \frac{\tau_t}{t} \frac{x}{\tau_t} \in \frac{\tau_t}{t} S \subset S$. Тогда для любых векторов $x, y \in X$ и любых чисел $a > \mu_S(x)$ и $b > \mu_S(y)$ получаем включения $\frac{x}{a} \in S$ и $\frac{y}{b} \in S$. В силу выпуклости множества S получаем $\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b} \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \frac{y}{b} \in S$. Следовательно, $\mu_S(x+y) \leq a + b$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $a \to \mu_S(x) + 0$ и $b \to \mu_S(y) + 0$, получим неравенство треугольника $\mu_S(x+y) \leq \mu_S(x) + \mu_S(y)$.

Таким образом, для функции $\mu_S(\cdot)$ доказаны все свойства нормы. Покажем, наконец, что множество S является открытым единичным шаром с центром в нуле в смысле нормы $\mu_S(\cdot)$. Обозначим $D = \left\{\ x \in X \ \middle|\ \mu_S(x) < 1\ \right\}$. Если вектор $x \in D$, то для любого $t \in (\mu_S(x), 1)$ получаем $x \in tS = tS + (1-t)\,0 \subset S$. Следовательно, справедливо включение $D \subset S$. Если же вектор $x \in S$, то в силу открытости множества S по норме $\|\cdot\|_e$, существует число $\delta = \delta(x) > 0$, такое, что для любого вектора $z \in X$ вида $\|z - x\|_e < \delta$ выполнено $z \in S$. В частности, вектор $z = x + \frac{\delta}{2+\|x\|_e} x = \left(1 + \frac{\delta}{2+\|x\|_e}\right) x \in S$. Следовательно, $\mu_S(x) \leq \frac{1}{1+\frac{\delta}{2+\|x\|_e}} < 1$, что означает включение $x \in D$. Таким образом, справедливо включение $S \subset D$, что вместе с доказанным выше включением $D \subset S$ означает равенство $S = D$.

Итак, искомой нормой $\|\cdot\|$ в пространстве X является функция Минковского $\mu_S(\cdot)$ множества S.

Лемма 3.1.1 (*Ф. Рисс, о почти перпендикуляре*). *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $L \subset X$ — его собственное замкнутое подпространство (т. е. $L \neq X$). Тогда для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует единичный вектор $z_\varepsilon \in X$ (т. е. $\|z_\varepsilon\| = 1$), такой, что выполнено неравенство*

$$\rho(z_\varepsilon, L) = \inf_{x \in L} \|z_\varepsilon - x\| > 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. По условию существует вектор $x_0 \in \in X \backslash L$. В силу замкнутости L получаем неравенство $\rho(x_0, L) > 0$. По определению нижней грани для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует вектор $y_\varepsilon \in L$, такой, что справедливо неравенство

$$\|x_0 - y_\varepsilon\| < \frac{\rho(x_0, L)}{1 - \varepsilon}.$$

Определим единичный вектор $z_\varepsilon = \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|}$, для которого и получаем требуемое неравенство

$$\rho(z_\varepsilon, L) = \inf_{y \in L} \|z_\varepsilon - y\| = \frac{\inf\limits_{y \in L} \Big\| x_0 - y_\varepsilon - \|x_0 - y_\varepsilon\|\, y \Big\|}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} =$$

$$= \frac{\rho(x_0, L)}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} > 1 - \varepsilon.$$

Определение 3.1.4. *Пусть L и M — линейные подпространства в некотором линейном пространстве. Сумма подпространств L и M называется прямой, если их пересечение тривиально, т. е. $L \cap \cap M = \{0\}$. Прямую сумму подпространств L и M будем обозначать $L \oplus M$.*

Замечание 3.1.8. Очевидно, что сумма двух линейных подпространств некоторого линейного пространства является линейным подпространством в этом линейном пространстве.

Пример 3.1.3. Построим линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ и его замкнутое собственное подпространство L, такое, что для любого единичного вектора $z \in X$ выполнено строгое неравенство $\rho(z, L) < 1$. Рассмотрим в произвольном ненулевом линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ линейную ненулевую непрерывную функцию $f \colon X \to \mathbb{C}$. В силу непрерывности f существует $\delta > 0$, такое, что для любого $x \in B_\delta(0)$ выполнено неравенство $|f(x)| \le 1$. Тогда для любого вектора $x \in B_1(0)$ получаем неравенство $|f(x)| = \frac{|f(\delta x)|}{\delta} \le \frac{1}{\delta}$. Определим величину

$$d(f) = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \le \tfrac{1}{\delta}.$$

Предположим, что для любого единичного вектора $x \in X$ выполнено строгое неравенство $|f(x)| < d(f)$ (т. е. верхняя грань в определении $d(f)$ не достигается). Тогда замкнутое подпространство $L = \operatorname{Ker} f = \{ x \in X \mid f(x) = 0 \}$ (ядро линейной непрерывной комплекснозначной функции f) является искомым. Докажем это. Прежде всего заметим, что для любого вектора $x_0 \notin \operatorname{Ker} f$ (такой вектор существует в силу нетривиальности функции f) выполнено равенство $X = \operatorname{Lin}\{x_0\} \oplus \operatorname{Ker} f$. Действительно, для любого $x \in X$ существует скаляр $\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)}$, такой, что вектор $y = x - \alpha x_0 \in \operatorname{Ker} f$, т. е. $x = \alpha x_0 + y \in \operatorname{Lin}\{x_0\} + \operatorname{Ker} f$. Следовательно, справедливо равенство $X = \operatorname{Lin}\{x_0\} + \operatorname{Ker} f$. Покажем, что эта сумма подпространств прямая, т. е. $\operatorname{Lin}\{x_0\} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Действительно, если вектор $z \in \operatorname{Lin}\{x_0\} \cap \operatorname{Ker} f$, то $f(z) = 0$, и существует $\alpha \in \mathbb{C}$, такое, что $z = \alpha x_0$. Следовательно, $0 = f(z) = \alpha f(x_0)$. Так как $f(x_0) \ne 0$, то $\alpha = 0$ и $z = 0$, что и требовалось. Таким образом, для любого $x \in X$ существуют единственные скаляр α и вектор $y \in \operatorname{Ker} f$, такие, что $x = \alpha x_0 + y$. Отсюда находим

$$d(f) = \sup_{x \ne 0} \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| = \sup_{x \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{y \in \operatorname{Ker} f \\ \alpha \ne 0}} \frac{|\alpha|\,|f(x_0)|}{\|\alpha x_0 + y\|} = \\ = \sup_{y \in \operatorname{Ker} f} \frac{|f(x_0)|}{\|x_0 + y\|} = \frac{|f(x_0)|}{\rho(x_0, \operatorname{Ker} f)}.$$

Таким образом, для любого $x_0 \notin \operatorname{Ker} f$ выполнено равенство

$$\rho(x_0, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x_0)|}{d(f)}.$$

Если же вектор $y \in \operatorname{Ker} f$, то $\rho(y, \operatorname{Ker} f) = 0 = \frac{|f(y)|}{d(f)}$. Таким образом, для любого единичного вектора z получаем $\rho(z, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(z)|}{d(f)} < 1$, что и требовалось.

Осталось привести пример линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ и нетривиальной линейной непрерывной функции f на X, у которой в определении $d(f)$ не достигается верхняя грань. Рассмотрим линейное пространство $c_0 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \lim\limits_{k\to\infty} x(k) = 0 \right\}$, состоящее из всех бесконечно малых числовых последовательностей, норма в котором имеет вид $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|$. Рассмотрим линейную функцию $f\colon c_0 \to \mathbb{C}$ следующего вида:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x(k)}{k^2} \qquad \forall\, x \in c_0.$$

Функция f является непрерывной, так как для любых $x, y \in c_0$ выполнено неравенство $|f(x)-f(y)| \le \frac{\pi^2}{6}\|x-y\|_\infty$. Отсюда, в частности, следует неравенство $d(f) \le \frac{\pi^2}{6}$. Для доказательства обратного неравенства рассмотрим для любого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $x_n \in c_0$ вида $x_n(k) = (-1)^k$ при $1 \le k \le n$, $x_n(k) = 0$ при $k > n$. Тогда $\|x_n\|_\infty = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. $|f(x_n)| = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le d(f)$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство $\frac{\pi^2}{6} \le d(f)$. Следовательно, справедливо равенство $d(f) = \frac{\pi^2}{6}$. Покажем, что для любого $x \in c_0$, такого, что $\|x\|_\infty = 1$, выполнено строгое неравенство $|f(x)| < d(f)$. Действительно, для любого $x \in c_0$ существует номер N, такой, что для любого $k > N$ выполнено $|x(k)| \le \frac{1}{2}$. Поэтому выполнено неравенство

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k_2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k_2} = \frac{\pi^2}{6},$$

что и требовалось. Таким образом, для замкнутого подпространства $L = \operatorname{Ker} f \subset c_0$ и для любого $z \in c_0$ вида $\|z\|_\infty = 1$ выполнено строгое неравенство $\rho(z, \operatorname{Ker} f) < 1$.

Приведём другой аналогичный пример. Рассмотрим линейное пространство $C[0,2] = \left\{ x\colon [0,2] \to \mathbb{C} \;\middle|\; x \text{ — непрерывная функция} \right\}$, норма в котором имеет вид $\|x\|_c = \max\limits_{t\in[0,2]} |x(t)|$. Рассмотрим линейную функцию $f\colon C[0,1] \to \mathbb{C}$ следующего вида:

$$f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt - \int\limits_1^2 x(t)\,dt \qquad \forall\, x \in C[0,2].$$

Функция f является непрерывной, так как для любых $x, y \in C[0,2]$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| \le 2\|x - y\|_c$. Отсюда, в частности, следует неравенство $d(f) \le 2$. Для доказательства обратного неравенства рассмотрим для любого $n \in \mathbb{N}$ функцию $x_n \in C[0,2]$ вида

$$x_n(t) = \left\{ \begin{array}{rccccc} 1, & 0 & \le & t & \le & 1 - \frac{1}{n}, \\ n(1-t), & 1 - \frac{1}{n} & \le & t & \le & 1 + \frac{1}{n}, \\ -1, & 1 + \frac{1}{n} & \le & t & \le & 2. \end{array} \right.$$

Тогда $\|x_n\|_c = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и справедливы неравенства $d(f) \ge |f(x_n)| \ge 2 - \frac{4}{n} \to 2$ при $n \to \infty$. Следовательно, получаем равенство $d(f) = 2$. Покажем, что для любого $x \in C[0,2]$, такого, что $\|x\|_c = 1$, выполнено строгое неравенство $|f(x)| < 2 = d(f)$. Действительно, для любого $x \in C[0,2]$ существует число $\delta(x) \in (0,1)$, такое, что для всех чисел $t \in \Big[1 - \delta(x), 1 + \delta(x)\Big]$ выполнено неравенство $|x(t) - x(1)| \le \frac{1}{2}$. Тогда для любого $x \in C[0,2]$ вида $\|x\|_c = 1$ получаем следующие неравенства:

$$|f(x)| \le \left| \int\limits_0^{1-\delta(x)} x(t)\,dt \right| + \left| \int\limits_{1+\delta(x)}^2 x(t)\,dt \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{1-\delta(x)}^1 x(t)\,dt - \int\limits_1^{1+\delta(x)} x(t)\,dt \right| \le$$

$$\le \int\limits_0^{1-\delta(x)} \Big|x(t)\Big|\,dt + \int\limits_{1+\delta(x)}^2 \Big|x(t)\Big|\,dt +$$

$$+ \left| \int\limits_{1-\delta(x)}^1 \Big(x(t) - x(1)\Big)\,dt - \int\limits_1^{1+\delta(x)} \Big(x(t) - x(1)\Big)\,dt \right| \le$$

$$\leq 2\Big(1-\delta(x)\Big) + \int\limits_{1-\delta(x)}^{1} \Big|x(t)-x(1)\Big|\,dt + \int\limits_{1}^{1+\delta(x)} \Big|x(t)-x(1)\Big|\,dt \leq$$

$$\leq 2\Big(1-\delta(x)\Big) + \tfrac{\delta(x)}{2} + \tfrac{\delta(x)}{2} = 2-\delta(x) < 2,$$

что и требовалось. Таким образом, для замкнутого подпространства $L = \operatorname{Ker} f \subset C[0,2]$ и для любого $z \in C[0,2]$ вида $\|z\|_c = 1$ выполнено строгое неравенство $\rho(z, \operatorname{Ker} f) < 1$.

Теорема 3.1.2 (*Ф. Рисс*). *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — бесконечномерное линейное нормированное пространство. Тогда единичная сфера $S = \Big\{ x \in X \;\Big|\; \|x\| = 1 \Big\}$ не является компактным множеством.*

Доказательство. Выберем произвольно вектор $z_1 \in S$. Так как X бесконечномерно, то его одномерное подпространство $L_1 = \operatorname{Lin}\{z_1\} \neq X$. По следствию 3.1.1 конечномерное подпространство L_1 является полным, а значит, замкнутым. Следовательно, по лемме 3.1.1 существует вектор $z_2 \in S$, такой, что $\|z_2 - z_1\| \geq \rho(z_2, L_1) \geq \frac{1}{2}$. Далее, рассуждая по индукции, предположим, что для номера $n \geq 2$ построены векторы $z_1, \dots z_n \in S$, такие, что $\|z_m - z_s\| \geq \frac{1}{2}$ при $m \neq s$, $m, s \in \overline{1,n}$. Так как X бесконечномерно, то его конечномерное подпространство $L_n = \operatorname{Lin}\{z_1, \dots, z_n\} \neq X$. По следствию 3.1.1 конечномерное подпространство L_n является полным, а значит, замкнутым. Следовательно, по лемме 3.1.1 существует вектор $z_{n+1} \in S$, такой, что $\|z_{n+1} - z_m\| \geq \rho(z_{n+1}, L_n) \geq \frac{1}{2}$ для любого $m \in \overline{1,n}$. Таким образом, построена последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, любая подпоследовательность которой не фундаментальна, а значит, является расходящейся. Таким образом, сфера S не является секвенциальным компактом, и по теореме 2.2.1 не является компактом в пространстве $(X, \|\cdot\|)$.

Определение 3.1.5. *Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством.*

Утверждение 3.1.2. *Линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ является банаховым тогда и только тогда, когда любой абсолютно сходящийся ряд из X сходится в X, т. е. если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ существует вектор $y \in X$, такой, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = y$, т. е. $\lim\limits_{N\to\infty} \Big\| \sum\limits_{n=1}^{N} x_n - y \Big\| = 0$.*

Доказательство. Пусть пространство $(X, \|\cdot\|)$ банахово. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $L(\varepsilon)$, такой, что для всех $N > L(\varepsilon)$ и $M \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\sum\limits_{n=N+1}^{N+M} \|x_n\| < \varepsilon$. Тогда последовательность частичных сумм $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} x_n$ является фундаментальной в X, так как

$$\|S_{N+M} - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+M} x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+M} \|x_n\| < \varepsilon$$

для любых $N > L(\varepsilon)$ и $M \in \mathbb{N}$. В силу полноты пространства $(X, \|\cdot\|)$ существует вектор $y \in X$, такой, что $\|S_N - y\| \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, справедливо равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = y$.

Обратно, пусть любой абсолютно сходящийся ряд из X сходится в X. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Тогда существует строго возрастающая последовательность номеров $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, такая, что для любого $k \geq n_m$ выполнено неравенство $\|z_k - z_{n_m}\| \leq 2^{-m}$. Следовательно, для любого номера m справедливо неравенство $\|z_{n_{m+1}} - z_{n_m}\| \leq 2^{-m}$. Определим последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, что $x_1 = z_{n_1}$, а $x_{n_{m+1}} = z_{n_{m+1}} - z_{n_m}$ для любого номера m. Так как $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \|x_{n_m}\| \leq \|z_{n_1}\| + 1 < +\infty$, то по условию существует вектор $y \in X$, такой, что $\left\| \sum\limits_{m=1}^{M} x_{n_m} - y \right\| = \|z_{n_{M+1}} - y\| \to 0$ при $M \to \infty$. Следовательно, фундаментальная последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет сходящуюся в X к вектору y подпоследовательность. Отсюда сразу следует, что и сама последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к вектору y. Действительно, по неравенству треугольника получаем $\|z_n - y\| \leq \|z_n - z_{n_m}\| + \|z_{n_m} - y\|$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$. В силу фундаментальности последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ справедливо равенство $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|z_n - z_{n_m}\| = 0$. По построению $\lim\limits_{m\to\infty} \|z_{n_m} - y\| = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n - y\| \leq \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|z_n - z_{n_m}\| + \lim\limits_{m\to\infty} \|z_{n_m} - y\| = 0$, что и требовалось.

3.2. Гильбертово пространство

Определение 3.2.1. *Пусть X — комплексное линейное пространство. Скалярным произведением в X называется отображение $(\cdot,\cdot)\colon X \times X \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее свойствам*

1) для любого $x \in X$ число $(x,x) \in \mathbb{R}$ и выполнено неравенство $(x,x) \geq 0$;

2) равенство $(x,x) = 0$ равносильно $x = 0$;

3) для любых $x, y \in X$ выполнено равенство $(x,y) = \overline{(y,x)}$;

4) для любых $x, y, z \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$.

Определение 3.2.2. *Линейное пространство с фиксированным в нём скалярным произведением называется евклидовым.*

Утверждение 3.2.1. *Пусть X — евклидово пространство. Тогда величина $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, $x \in X$, удовлетворяет определению нормы в X.*

Доказательство. Ясно, что $\|x\| \geq 0$ для любого $x \in X$, а равенство $\|x\| = 0$ равносильно $(x,x) = 0$, что в свою очередь равносильно $x = 0$ по определению 3.2.1 скалярного произведения. Далее для любого $x \in X$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x,x)} = |\alpha|\,\|x\|$.

Осталось доказать неравенство треугольника. Прежде всего заметим, что для любых векторов $x, y \in X$ справедливо неравенство Коши—Буняковского $|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$. Действительно, для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$0 \leq (x - ty, x - ty) = \|x\|^2 - 2t\operatorname{Re}(x,y) + t^2\|y\|^2.$$

Следовательно, получаем неравенство

$$\Big(\operatorname{Re}(x,y)\Big)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0,$$

т. е. $\Big|\operatorname{Re}(x,y)\Big| \leq \|x\|\,\|y\|$. Если выписать экспоненциальнцую форму комплексного числа $(x,y) = |(x,y)|e^{i\varphi}$, то получаем

$$|(x,y)| = \big(x, e^{i\varphi}y\big) = \operatorname{Re}\big(x, e^{i\varphi}y\big) \leq \|x\|\,\big\|e^{i\varphi}y\big\| = \|x\|\,\|y\|,$$

т. е. неравенство Коши—Буняковского. Теперь для любых $x, y \in X$ получаем неравенство треугольника

$$\|x+y\| = \sqrt{\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2} \leq \\ \leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|.$$

Определение 3.2.3. *Пусть X — евклидово пространство. Функцию $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, где $x \in X$, будем называть нормой в X, порождённой скалярным произведением. По умолчанию везде далее будем считать, что любое евклидово пространство является линейным нормированным пространством с нормой, порождённой скалярным произведением.*

Замечание 3.2.1 (равенство параллелограммов)**.** Пусть X — евклидово пространство. Тогда для любых векторов $x, y \in X$ справедливо равенство параллелограммов:

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Действительно, имеем $\|x \pm y\|^2 = (x \pm y, x \pm y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\operatorname{Re}(x,y)$, откуда сразу получаем равенство параллелограммов.

Определение 3.2.4. *Евклидово пространство, полное относительно нормы, порождённой скалярным произведением, будем называть гильбертовым пространством.*

Пример 3.2.1. Рассмотрим линейное нормированное пространство

$$\ell_2 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 < +\infty \right\},$$

норма в котором задана следующим образом:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2} \quad \forall\, x \in \ell_2.$$

Определим в пространстве ℓ_2 скалярное произведение

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)} \quad \forall\, x, y \in \ell_2.$$

Для любых $x, y \in \ell_2$ имеем при каждом $k \in \mathbb{N}$ неравенство

$$|x(k)\overline{y(k)}| = |x(k)|\,|y(k)| \leq \frac{|x(k)|^2 + |y(k)|^2}{2}.$$

Следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)\overline{y(k)}|$ сходится для любых $x, y \in \ell_2$, т. е. величина (x, y) существует и, очевидно, удовлетворяет свойствам 1—4 определения 3.2.1. При этом также выполнено равенство $(x, x) = \|x\|_2$. Таким образом, пространство $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ является евклидовым. Покажем, что оно является полным. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_2$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n, m \geq N(\varepsilon)$ выполнено $\|x_n - x_m\|_2 \leq \varepsilon$. Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $|x_n(k) - x_m(k)| \leq \|x_n - x_m\|_2$, то получаем, что числовая последовательность $\{x_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}$. Следовательно, в силу полноты $\mathbb{C}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ существует числовой предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = z(k) \in \mathbb{C}$. Так как для любого $M \in \mathbb{N}$ и произвольных $n, m \geq N(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_n(k) - x_m(k)|^2} \leq \|x_n - x_m\|_2 \leq \varepsilon,$$

то, переходя к пределу по $m \to \infty$, получаем

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_n(k) - z(k)|^2} = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_n(k) - x_m(k)|^2} \leq \varepsilon.$$

Переходя теперь к пределу по $M \to \infty$, находим

$$\|x_n - z\|_2 = \lim_{M\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_n(k) - z(k)|^2} \leq \varepsilon$$

при всех $n \geq N(\varepsilon)$. Отсюда, в частности, имеем неравенство

$$\|z\|_2 = \lim_{M\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |z(k)|^2} \leq$$

$$\leq \lim_{M\to\infty} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_{N(1)}(k) - z(k)|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_{N(1)}(k)|^2} \right) \leq$$
$$\leq 1 + \|x_{N(1)}\|_2 < +\infty.$$

Следовательно, $z \in \ell_2$ и $\|x_n - z\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, доказана полнота пространства $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$, т. е. оно является гильбертовым.

Определение 3.2.5. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, множество $S \subset X$, вектор $x \in X$. Вектор $y \in S$ называется метрической проекцией вектора x на множество S, если справедливо равенство $\|x - y\| = \rho(x, S) = \inf\limits_{z\in S} \|x - z\|$.*

Теорема 3.2.1 (*Ф. Рисс, о проекции*)**.** *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $S \subset \mathcal{H}$ — выпуклое замкнутое множество. Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ существует единственный вектор $y \in S$, который является метрической проекцией вектора x на множество S.*

Доказательство. По определению расстояния от точки до множества имеем $\rho(x, S) = \inf\limits_{z\in S} \|x - z\|$. Тогда существует минимизирующая последовательность $\{z_m\}_{m=1}^{\infty} \subset S$, т. е.

$$\rho(x, S) = \lim_{m\to\infty} \|x - z_m\|.$$

Покажем, что последовательность z_m является фундаментальной. Используя равенство параллелограммов, имеем

$$\|z_m - z_n\|^2 = \|(z_m - x) - (z_n - x)\|^2 =$$
$$= 2\|z_m - x\|^2 + 2\|z_n - x\|^2 - \|z_m + z_n - 2x\|^2.$$

В силу выпуклости множества S получаем включение $\frac{z_m+z_n}{2} \in S$. Следовательно, имеем неравенство

$$\|z_m + z_n - 2x\|^2 = 4 \left\| \frac{z_m + z_n}{2} - x \right\|^2 \geq 4\rho^2(x, S).$$

Тогда получаем

$$\|z_m - z_n\|^2 \leq 2\|z_m - x\|^2 + 2\|z_n - x\|^2 - 4\rho^2(x, S) \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty.$$

Следовательно, фундаментальность последовательности z_m установлена. В силу полноты пространства $\mathcal{H}$ существует вектор $y \in \mathcal{H}$, такой, что $\|z_m - y\| \to 0$ при $m \to \infty$. Так как множество S замкнуто, то выполнено включение $y \in S$. При этом в силу неравенства треугольника имеем

$$\Big| \|x-y\| - \|x-z_m\| \Big| \le \|y - z_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty.$$

Поэтому $\|x-y\| = \lim\limits_{m\to\infty} \|x - z_m\| = \rho(x, S)$, т. е. $y \in S$ — метрическая проекция вектора x на множество S.

Покажем единственность метрической проекции вектора x на множество S. Предположим, что существуют два вектора $y, z \in S$ вида $\|x-y\| = \|x-z\| = \rho(x, S)$. Тогда, применяя равенство параллелограммов, имеем

$$\|y-z\|^2 = \|(y-x)-(z-x)\|^2 = 2\|y-x\|^2 + 2\|z-x\|^2 - \|y+z-2x\|^2.$$

В силу выпуклости множества S выполнено включение $\frac{y+z}{2} \in S$. Тогда имеем неравенство

$$\|y+z-2x\|^2 = 4\left\|\frac{y+z}{2} - x\right\|^2 \ge 4\rho^2(x, S).$$

Следовательно, получаем

$$\|y-z\|^2 \le 2\|y-x\|^2 + 2\|z-x\|^2 - 4\rho^2(x,S) = 0,$$

т. е. $y = z$, что и требовалось.

П р и м е р 3.2.2. Приведём пример гильбертова пространства, его невыпуклого замкнутого ограниченного подмножества и вектора, не имеющего метрической проекции в этом множестве. Рассмотрим гильбертово пространство ℓ_2 из примера 3.2.1 и множество $M \subset \subset \ell_2$, состоящее из всех векторов $e_n \in \ell_2$, где $e_n(k) = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \ne n \end{cases}$ для всех номеров n, k. Множество M ограничено, так как $\|e_n\|_2 = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Множество M замкнуто. Действительно, если $z \in \in \ell_2$ является точкой прикосновения множества M, то существует последовательность натуральных чисел n_m, такая, что $\|e_{n_m} - z\|_2 \to \to 0$ при $m \to \infty$. Если $n_m \ne n_k$, то $\|e_{n_m} - e_{n_k}\|_2 = \sqrt{2}$. Так как сходящаяся последовательность e_{n_m} является фундаментальной, то существует номер m_0, такой, что для всех $m \geq m_0$ выполнено $n_m = n_{m_0}$. Тогда $z = e_{n_{m_0}} \in M$, т. е. множество M является замкнутым. Очевидно, что множество M не выпукло. Рассмотрим вектор $x \in \ell_2$ вида $x(k) = -\frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого номера n получаем

$$\|x - e_n\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} + 1 + \frac{2}{n}}.$$

Следовательно, $\rho(x, M) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x - e_n\|_2 = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} + 1} < \|x - e_m\|_2$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, для данного вектора $x \in \ell_2$ не существует метрической проекции в замкнутом ограниченном невыпуклом множестве $M \subset \ell_2$.

О п р е д е л е н и е 3.2.6. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $L \subset \mathcal{H}$ — подпространство. Ортогональным дополнением L называется множество*

$$L^{\perp} = \left\{ x \in \mathcal{H} \;\middle|\; (x, y) = 0 \quad \forall\, y \in L \right\}.$$

З а м е ч а н и е 3.2.2. Ортогональное дополнение подпространства $L \subset \mathcal{H}$ является замкнутым подпространством в $\mathcal{H}$. Действительно, для любых векторов $x, z \in L^{\perp}$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем

$$(\alpha x + \beta z, y) = \alpha(x, y) + \beta(z, y) = 0 \quad \forall\, y \in L.$$

Следовательно, $\alpha x + \beta z \in L^{\perp}$, т. е. множество $L^{\perp}$ является подпространством в $\mathcal{H}$. Для любого $z \in \left[L^{\perp}\right]$ существует последовательность $x_m \in L^{\perp}$, такая, что $\|x_m - z\| \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда для любого $y \in L$ в силу неравенства Коши—Буняковского получаем

$$|(z, y)| = |(z - x_m, y)| \leq \|z - x_m\| \, \|y\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Следовательно, $(z, y) = 0$ для любого $y \in L$, т. е. $z \in L^{\perp}$. Таким образом, множество $L^{\perp}$ является замкнутым.

З а м е ч а н и е 3.2.3. Для любого подпространства $L \subset \mathcal{H}$ справедливо равенство $L^{\perp} = [L]^{\perp}$. Действительно, так как $L \subset [L]$, то включение $L^\perp \supset [L]^\perp$ очевидно. С другой стороны, рассмотрим любой $z \in L^\perp$. Для любого $x \in [L]$ сущесвует последовательность $x_m \in \in L$, такая, что $\|x_m - x\| \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда в силу неравенства Коши—Буняковского получаем

$$|(z,x)| = |(z, x - x_m)| \leq \|z\| \, \|x - x_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Следовательно, $z \in [L]^\perp$. Таким образом, доказано обратное включение $L^\perp \subset [L]^\perp$.

Теорема 3.2.2 (*Ф. Рисс, об ортогональном дополнении*). *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $L \subset \mathcal{H}$ — замкнутое подпространство. Тогда справедливо равенство $\mathcal{H} = L \oplus L^\perp$.*

Доказательство. Так как замкнутое подпространство L является выпуклым замкнутым множеством в $\mathcal{H}$, то по теореме 3.2.1 для любого $x \in H$ существует метрическая проекция на L — единственный вектор $y \in L$, такой, что $\|x - y\| = \rho(x, L)$. Покажем, что вектор $z = x - y \in L^\perp$. Для любого вектора $a \in L$ и любого нетривиального $t \in \mathbb{R}$ по определению метрической проекции выполнено неравенство $\|x-y\| \leq \|x-y-ta\|$, так как $y+ta \in L$. Следовательно,

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - y - ta\|^2 = \|x - y\|^2 + t^2\|a\|^2 - 2t \operatorname{Re}(x - y, a).$$

Тогда при $t > 0$ получаем $\operatorname{Re}(x - y, a) \leq \frac{t}{2}\|a\|^2 \to 0$ при $t \to +0$, а при $t < 0$ получаем $\operatorname{Re}(x - y, a) \geq \frac{t}{2}\|a\|^2 \to 0$ при $t \to -0$. Таким образом, $\operatorname{Re}(x - y, a) = 0$. Аналогично, $\|x - y\| \leq \|x - y - ita\|$, так как $y + ita \in L$. Следовательно,

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - y - ita\|^2 = \|x - y\|^2 + t^2\|a\|^2 - 2t \operatorname{Im}(x - y, a).$$

Тогда при $t > 0$ получаем $\operatorname{Im}(x-y, a) \leq \frac{t}{2}\|a\|^2 \to 0$ при $t \to +0$, а при $t < 0$ получаем $\operatorname{Im}(x-y, a) \geq \frac{t}{2}\|a\|^2 \to 0$ при $t \to -0$. Таким образом, $\operatorname{Im}(x-y, a) = 0$. Следовательно, $(x-y, a) = 0$ для любого $a \in \mathcal{H}$, т. е. справедливо включение $x - y = z \in L^\perp$. Таким образом, доказано равенство $\mathcal{H} = L + L^\perp$. Покажем, что сумма подпространств L и $L^\perp$ прямая, т. е. $L \cap L^\perp = \{0\}$. Действительно, если вектор $x \in L \cap L^\perp$, то получаем $(x, x) = 0$, что означает равенство $x = 0$.

Следствие 3.2.1. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $L \subset \mathcal{H}$ — подпространство. Тогда справедливо равенство $\left(L^\perp\right)^\perp = [L]$.*

Доказательство. Для любого $x \in L$ и любого $y \in L^\perp$ выполнено равенство $(x, y) = 0$. Следовательно, $x \in \left(L^\perp\right)^\perp$, т. е. справедливо включение $L \subset \left(L^\perp\right)^\perp$. Так как множество $\left(L^\perp\right)^\perp$ замкнуто, то получаем включение $[L] \subset \left(L^\perp\right)^\perp$. По теореме 3.2.2 имеем равенство $\mathcal{H} = [L] \oplus [L]^\perp$. В силу замечания 3.2.3 выполнено $[L]^\perp = L^\perp$. Тогда для любого вектора $z \in \left(L^\perp\right)^\perp$ существуют единственные векторы $x \in [L]$ и $y \in L^\perp$, такие, что $z = x+y$. Но тогда получаем равенства $0 = (z, y) = (x, y) + (y, y) = (y, y)$, так как $(x, y) = 0$. Следовательно, $y = 0$, и $z = x \in [L]$. Таким образом, доказано обратное включение $\left(L^\perp\right)^\perp \subset [L]$.

3.3. Полные системы и базис

Определение 3.3.1. *Пусть X — комплексное линейное пространство, множество $E \subset X$. Линейной оболочкой множества E называется совокупность всевозможных конечных линейных комбинаций элементов множества E и обозначается $\operatorname{Lin} E$. Таким образом,*

$$\operatorname{Lin} E = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k \;\middle|\; N \in \mathbb{N},\ \begin{array}{c} \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C} \\ x_1, \ldots, x_N \in E \end{array} \right\}.$$

Определение 3.3.2. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Будем говорить, что множество $E \subset X$ образует полную систему, если его линейная оболочка всюду плотна в X, т. е. $[\operatorname{Lin} E] = X$.*

Пример 3.3.1. Рассмотрим линейное нормированное пространство $C[0,1]$, состоящее из всех непрерывных функций $x\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ с нормой $\|x\|_c = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$. Рассмотрим счётное множество $E = \{e_n\}_{n=0}^{\infty} \subset C[0,1]$, где

$$e_0(t) = 1, \quad e_n(t) = t^n \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, множество $\operatorname{Lin} E$ представляет собой все многочлены, определённые на отрезке $[0,1]$. По теореме Вейерштрасса любая функция $x \in C[0,1]$ с любой точностью может быть равномерно на отрезке $[0,1]$ приближена подходящим многочленом, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $P_\varepsilon \in \operatorname{Lin} E$, такой, что $\|x - P_\varepsilon\|_c < \varepsilon$. Таким образом, множество $\operatorname{Lin} E$ является всюду плотным в $C[0,1]$, и поэтому множество E образует в $C[0,1]$ счётную полную систему.

У т в е р ж д е н и е 3.3.1. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ — *линейное нормированное пространство. Счётное множество* $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *образует в* X *полную систему тогда и только тогда, когда для любого* $x \in X$ *выполнено соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \rho\Big(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}\Big) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полнота системы E по определению 3.3.2 означает, что для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $z = z(x, \varepsilon) \in \operatorname{Lin} E$, такое, что выполнено неравенство $\|x - z\| < \varepsilon$. По определению 3.3.1 включение $z \in \operatorname{Lin} E$ означает, что существует $N = N(z) \in \mathbb{N}$, такое, что выполнено включение $z \in \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\}$. Так как для всех $n \geq N$ справедливо включение $\operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\} \subset \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$, то получаем

$$\rho\Big(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}\Big) \leq \rho\Big(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\}\Big) \leq \|x - z\| < \varepsilon,$$

что означает соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\Big(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}\Big) = 0$.

Обратно, если выполнено последнее предельное соотношение, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что справедливо неравенство $\rho\Big(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\}\Big) \leq \varepsilon$. Тогда по определению расстояния от точки до множества существует $z \in \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\} \subset \operatorname{Lin} E$, такое, что выполнено неравенство

$$\|x - z\| \leq \rho\Big(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\}\Big) + \varepsilon.$$

Следовательно, $\|x - z\| \leq 2\varepsilon$ для подходящего $z \in \operatorname{Lin} E$, т. е. множество $\operatorname{Lin} E$ является всюду плотным в X, а система E является полной.

С л е д с т в и е 3.3.1. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ — *линейное нормированное пространство. Пусть счётная система* $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *является полной в* X. *Тогда другая счётная система* $G = \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *является полной в* X *тогда и только тогда, когда для любого* $m \in \mathbb{N}$ *выполнено соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \rho\Big(e_m, \operatorname{Lin}\{g_1, \ldots, g_n\}\Big) = 0.$$

Доказательство. Необходимость сразу следует из утверждения 3.3.1. Покажем достаточность. В силу полноты системы E для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $z = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \in$ $\in \operatorname{Lin} E$, такой, что $\|x - z\| \leq \varepsilon$. По условию для любого $k \in \overline{1,N}$ существует элемент $h_k \in \operatorname{Lin} G$, такой, что выполнено неравенство

$$\|e_k - h_k\| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \sum\limits_{k=1}^{N} |\alpha_k|}\,.$$

Определив элемент $w = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k h_k \in \operatorname{Lin} G$, получаем следующие оценки:

$$\|x - w\| \leq \|x - z\| + \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k| \, \|e_k - h_k\| \leq 2\varepsilon,$$

т. е. множество $\operatorname{Lin} G$ всюду плотно в X, а система G является полной в X.

Задача 3.3.1. Рассмотрим евклидово пространство $CL_2[0,1]$, состоящее из всех непрерывных функций $x\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ с нормой $\|x\|_2 = \sqrt{\int\limits_0^1 |x(t)|^2\, dt}$. Определим функции

$$e_0(t) = 1, \quad e_n(t) = t^n \quad \forall\, t \in [0,1] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ состоит из целых неотрицательных чисел и является строго возрастающей. Доказать, что система $S = \{e_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $CL_2[0,1]$ тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty.$$

Решение. Так как система $E = \{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $C[0,1]$ (см. пример 3.3.1), а для любой функции $x \in$ $\in C[0,1]$ справедливо неравенство $\|x\|_2 \leq \|x\|_c$, то система E является полной и в пространстве $CL_2[0,1]$. Тогда в силу следствия 3.3.1

требуется доказать, что соотношение $\lim\limits_{k\to\infty}\rho\left(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0},\ldots,e_{n_k}\}\right) = 0$ для любого $m\in\mathbb{N}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k} = +\infty$.

Как известно, в произвольном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ квадрат расстояния от точки $x\in\mathcal{E}$ до линейной оболочки конечного набора линейно независимых векторов $y_1,\ldots,y_k\in\mathcal{E}$ вычисляется по формуле

$$\rho^2\left(x, \mathrm{Lin}\{y_1,\,\ldots,\,y_k\}\right) = \frac{\det\Gamma(x,y_1,\,\ldots,\,y_k)}{\det\Gamma(y_1,\,\ldots,\,y_k)},$$

где $\Gamma(y_1,\,\ldots,\,y_k)$ — матрица Грама системы векторов $y_1,\,\ldots,\,y_k$.

В евклидовом пространстве $CL_2[0,1]$ имеем

$$\Gamma(e_{n_0},\,\ldots,\,e_{n_k}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_0+n_0+1} & \cdots & \frac{1}{n_0+n_k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n_k+n_0+1} & \cdots & \frac{1}{n_k+n_k+1} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(e_m, e_{n_0},\,\ldots,\,e_{n_k}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m+m+1} & \frac{1}{m+n_0+1} & \cdots & \frac{1}{m+n_k+1} \\ \frac{1}{m+n_0+1} & \frac{1}{n_0+n_0+1} & \cdots & \frac{1}{n_0+n_k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m+n_k+1} & \frac{1}{n_k+n_0+1} & \cdots & \frac{1}{n_k+n_k+1} \end{pmatrix}.$$

Полученные матрицы Грама являются частным случаем матрицы Коши, имеющей вид

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_0+b_0} & \cdots & \frac{1}{a_0+b_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_k+b_0} & \cdots & \frac{1}{a_k+b_k} \end{pmatrix}$$

для произвольных положительных чисел $a_0,\,\ldots,\,a_k$ и $b_0,\,\ldots,\,b_k$. Очевидно, что детерминант матрицы K имеет вид

$$\det K = \frac{P(a_0,\,\ldots,\,a_k,b_0,\,\ldots,\,b_k)}{\prod\limits_{i,j=0}^{k}(a_i+b_j)},$$

где P — многочлен степени $(k+1)^2-(k+1)=(k+1)k$. Так как при $a_i=a_j$ совпадают i-я и j-я строки матрицы K, а при $b_i=b_j$

совпадают i-й и j-й столбцы матрицы K, то в этих случаях $\det K = 0$. Следовательно, многочлен P имеет вид

$$P(a_0, \ldots, a_k, b_0, ldots, b_k) = Q_k \prod_{0 \le i < j \le k} \Big((a_i - a_j)(b_i - b_j) \Big).$$

Так как степень многочлена $\prod\limits_{0 \le i < j \le k} \Big((a_i - a_j)(b_i - b_j) \Big)$ как раз равна $(k+1)k$, т. е. совпадает со степенью многочлена P, то Q_k — константа, не зависящая от аргументов $a_0, \ldots, a_k$ и $b_0, \ldots, b_k$. Индукцией по $k \in \mathbb{N}$ можно показать, что $Q_k = 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Используя полученный вид детерминанта матрицы Коши, получаем

$$\det \Gamma(e_m, e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}) = \det \Gamma(e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}) \left(\frac{1}{2m+1} \prod_{i=0}^{k} \frac{m - n_i}{m + n_i + 1} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\rho \Big(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\} \Big) = \frac{1}{2m+1} \prod_{i=0}^{k} \frac{|m - n_i|}{m + n_i + 1} =$$

$$= \frac{|m - n_0|}{(2m+1)(m + n_0 + 1)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\left| 1 - \frac{m}{n_i} \right|}{1 + \frac{m+1}{n_i}}.$$

Поэтому если для любого целого числа $k \ge 0$ выполнено неравенство $m \ne n_k$, то имеем неравенство $\rho \Big(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\} \Big) > 0$, а соотношение $\rho \Big(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\} \Big) \to 0$ при $k \to \infty$ равносильно $\ln \rho \Big(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\} \Big) \to -\infty$ при $k \to \infty$. Получаем

$$\ln \rho \Big(e_m, \mathrm{Lin}\{e_{n_0}, \ldots, e_{n_k}\} \Big) =$$

$$= \ln \frac{|m - n_0|}{(2m+1)(m + n_0 + 1)} + \sum_{i=1}^{k} \left(\ln \left| 1 - \frac{m}{n_i} \right| - \ln \left(1 + \frac{m+1}{n_i} \right) \right).$$

Так как $n_i \to +\infty$ при $i \to \infty$, то

$$\ln \left| 1 - \frac{m}{n_i} \right| - \ln \left(1 + \frac{m+1}{n_i} \right) < 0$$

при всех достаточно больших значениях i, а

$$\ln\left|1-\frac{m}{n_i}\right|-\ln\left(1+\frac{m+1}{n_i}\right)\sim-\frac{2m+1}{n_i}$$

при $i\to\infty$. Следовательно, по признаку сравнения сходимости знакопостоянного числового ряда, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\ln\left|1-\frac{m}{n_i}\right|-\ln\left(1+\frac{m+1}{n_i}\right)\right)$$

сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}$. Таким образом, требуемое соотношение

$$\ln\rho\Big(e_m,\mathrm{Lin}\{e_{n_0},\,\ldots,\,e_{n_k}\}\Big)\to-\infty$$

при $k\to\infty$ равносильно расходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}$, т. е. выполнению соотношения $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}=+\infty$, что и требовалось.

Задача 3.3.2. Рассмотрим линейное нормированное пространство $C[0,1]$, состоящее из всех непрерывных функций $x\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ с нормой $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$. Определим функции

$$e_0(t)=1,\quad e_n(t)=t^n\quad\forall\,t\in[0,1]\quad\forall\,n\in\mathbb{N}.$$

Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ состоит из целых неотрицательных чисел, является строго возрастающей, и $n_0=0$. Доказать, что система $S=\{e_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $C[0,1]$ тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}=+\infty.$$

Решение. Если система S полна в пространстве $C[0,1]$, то в силу неравенства $\|x\|_2\le\|x\|_c$ для всех $x\in C[0,1]$ получаем полноту системы S и в пространстве $CL_2[0,1]$. Следовательно, в силу результата задачи 3.3.1 получаем требуемое соотношение $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}=+\infty$.

Теперь предположим, что выполнено равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty$. Тогда по признаку сравнения получаем $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k - 1} = +\infty$. Следовательно, система $G = \{e_{n_k - 1}\}_{k=1}^{\infty}$ полна в пространстве $CL_2[0,1]$. Так как по теореме Вейерштрасса система всех степеней $E = \{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространстве $C[0,1]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P_\varepsilon \in \operatorname{Lin} E$, такой, что справедливо неравенство

$$\|x - P_\varepsilon\|_c \leq \varepsilon.$$

Далее, в силу полноты системы G в пространстве $CL_2[0,1]$ существует многочлен $Q_\varepsilon \in \operatorname{Lin} G$, такой, что выполнено неравенство

$$\|P'_\varepsilon - Q_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon.$$

Определим многочлен $R_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(0) + \int\limits_0^t Q_\varepsilon(\tau)\, d\tau$, где $t \in [0,1]$. Тогда справедливо включение $R_\varepsilon \in \operatorname{Lin} S$, а в силу равенства $P_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(0) + \int\limits_0^t P'_\varepsilon(\tau)\, d\tau$ получаем соотношения

$$\|P_\varepsilon - R_\varepsilon\|_c = \max_{t \in [0,1]} \left| \int\limits_0^t \left(P'_\varepsilon(\tau) - Q_\varepsilon(\tau) \right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 \left| P'_\varepsilon(\tau) - Q_\varepsilon(\tau) \right| d\tau \leq \left\| P'_\varepsilon - Q_\varepsilon \right\|_2 \leq \varepsilon.$$

Следовательно, в силу неравенства треугольника получаем оценку

$$\|x - R_\varepsilon\|_c \leq \|x - P_\varepsilon\|_c + \|P_\varepsilon - R_\varepsilon\|_c \leq 2\varepsilon,$$

т. е. система S полна в пространстве $C[0,1]$, что и требовалось.

Определение 3.3.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Счётная система $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ называется базисом в X, если для любого $x \in X$ существует единственная последовательность скаляров $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что справедливо соотношение*

$$\lim_{N \to \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x) f_n \right\| = 0.$$

Это соотношение будем по определению записывать в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) f_n.$$

Пример 3.3.2. Рассмотрим пространство $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$, определённое в примере 3.2.1. Определим счётную систему $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_2$ вида

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k \end{cases} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что система E образует базис в ℓ_2. Действительно, для любого $x \in \ell_2$ справедливо соотношение

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x(n) e_n \right\|_2 = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} |x(n)|^2} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, можно определить значение $\alpha_n(x) = x(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, если некоторая последовательность скаляров $\{\beta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{N \to \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \beta_n(x) e_n \right\|_2 = 0,$$

то для любого $m \in \mathbb{N}$ и $N > m$ получаем

$$\Big| x(m) - \beta_m(x) \Big| \leq \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \beta_n(x) e_n \right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, получаем $\beta_m(x) = x(m) = \alpha_m(x)$ для любого $m \in$ $\in \mathbb{N}$. Таким образом, доказано, что для любого $x \in \ell_2$ существует единственная последовательность скаляров $\alpha_n(x) = x(n)$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\lim_{N \to \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x) e_n \right\|_2 = 0,$$

что и требовалось.

Замечание 3.3.1. Пусть в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ существует базис $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Тогда система

F является полной в X. Действительно, для любого элемента $x \in X$ имеем

$$\rho\,(x, \operatorname{Lin} F) \le \lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x) f_n \right\| = 0,$$

т. е. множество $\operatorname{Lin} F$ всюду плотно в X, что и требовалось.

Пример 3.3.3. Рассмотрим систему степеней $E = \{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$e_0(t) = 1, \quad e_n(t) = t^n \quad \forall\, t \in [0,1] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Система E является полной в пространствах $C[0,1]$ и $CL_2[0,1]$, однако она не является базисом в этих пространствах.

Действительно, предположив базисность системы E в пространстве $C[0,1]$, получим, что любая непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция раскладывается в равномерно сходящийся к ней на отрезке $[0,1]$ степенной ряд. Но тогда по теореме Абеля получаем бесконечную гладкость любой непрерывной функции на интервале $(0,1)$, что, очевидно, неверно.

Теперь предположим, что система E является базисом в евклидовом пространстве $CL_2[0,1]$. Тогда для любой непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции x существует единственная последовательность скаляров $\{\alpha_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, такая, что

$$\left\| x - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) e_n \right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Определим функцию $z(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau$, $t \in [0,1]$. Получаем

$$\left\| z - \sum_{n=0}^{N} \tfrac{\alpha_n(x)}{n+1}\, e_{n+1} \right\|_c = \max_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t \left(x(\tau) - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) e_n(\tau) \right) d\tau \right| \le$$

$$\le \int\limits_0^1 \left| x(\tau) - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) e_n(\tau) \right| d\tau \le \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) e_n \right\|_2 \to 0$$

при $N \to \infty$. Следовательно, функция z раскладывается в равномерно сходящийся к ней на отрезке $[0,1]$ степенной ряд. Но тогда по теореме Абеля получаем бесконечную гладкость функции z на интервале $(0,1)$, что неверно для случая недифференцируемой непрерывной функции x.

Утверждение 3.3.2. *Пусть $\mathcal{E}$ — евклидово пространство, а система $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ состоит из нетривиальных попарно ортогональных векторов и является полной в $\mathcal{E}$. Тогда система F является базисом в $\mathcal{E}$, причём для любого $x \in \mathcal{E}$ справедливы равенства*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)}\, f_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \quad (\textit{равенство Парсеваля}).$$

Доказательство. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье произвольного вектора $x \in \mathcal{E}$ по ортогональной системе F для любого $N \in \mathbb{N}$ ближайшим элементом для x в подпространстве $\mathrm{Lin}\{f_1, \dots, f_N\}$ является его N-я сумма Фурье:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)}\, f_n,$$

т. е. справедливо равенство

$$\rho^2\Big(x, \mathrm{Lin}\{f_1, \dots, f_N\}\Big) = \|x - S_N(x)\|^2 =$$

$$= (x, x) - (x, S_N(x)) - (S_N(x), x) + (S_N(x), S_N(x)) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{\overline{(x, f_n)}(x, f_n)}{(f_n, f_n)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, f_n)\overline{(x, f_n)}}{(f_n, f_n)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, f_n)\overline{(x, f_n)}}{(f_n, f_n)} =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)}\,.$$

Так как в силу полноты системы F имеем $\rho\Big(x, \mathrm{Lin}\{f_1, \dots, f_N\}\Big) \to 0$ при $N \to \infty$, то получаем соотношения

$$\|x - S_N(x)\| \to 0 \quad \text{и} \quad \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, доказаны требуемые равенства

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)}\, f_n \quad \text{и} \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)}\,.$$

Предположим, что для последовательности скаляров $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет место равенство $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) f_n$. Для любого $N \in \mathbb{N}$ обозначим $r_N(x) = x - \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n(x) f_n$. Тогда справедливо соотношение $\|r_N(x)\| \to \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, в силу ортогональности элементов системы F для любого $m \in \mathbb{N}$ и $N > m$ получаем

$$(x, f_m) = \alpha_m(x)(f_m, f_m) + (r_N(x), f_m) \to \alpha_m(x)(f_m, f_m) \text{ при } N \to \infty,$$

так как $|(r_N(x), f_m)| \le \|r_N(x)\|\,\|f_m\| \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, $\alpha_m(x) = \frac{(x, f_m)}{(f_m, f_m)}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $x \in \mathcal{E}$ существует единственная последовательность скаляров $\alpha_n(x) = \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)}$ (коэффициенты Фурье вектора x по ортогональной системе F), для которой справедливо равенство $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) f_n$. Таким образом, доказана базисность системы F в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$.

Замечание 3.3.2. Пусть в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ имеется счётная полная система $G = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящая из линейно независимых векторов. Подвергая векторы системы G процедуре ортогонализации Грама—Шмидта, получим счётную систему $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящую из нетривиальных попарно ортогональных векторов вида

$$f_1 = g_1, \quad f_2 = g_2 - \frac{(g_2, f_1)}{(f_1, f_1)}\, f_1, \quad \ldots \quad f_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(g_n, f_k)}{(f_k, f_k)}\, f_k, \quad \ldots$$

Так как по определению процедуры ортогонализации Грама—Шмидта для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы включения $f_n \in \mathrm{Lin}\{g_1, \ldots, g_n\}$ и $g_n \in \mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_n\}$, то получаем равенство

$$\mathrm{Lin}\{g_1, \ldots, g_n\} = \mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_n\}.$$

Следовательно, в силу полноты системы G и утверждения 3.3.1 получаем полноту системы F. Но тогда в силу утверждения 3.3.2 получаем базисность системы F в пространстве $\mathcal{E}$.

У т в е р ж д е н и е 3.3.3. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, а система $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ состоит из нетривиальных попарно ортогональных векторов. Система F является базисом в пространстве $\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда только тривиальный вектор ортогонален всем векторам системы F.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость утверждения сразу следует из утверждения 3.3.2. Действительно, если вектор $x \in \mathcal{H}$ ортогонален всем векторам базисной системы F, т. е. $(x, f_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то получаем $0 = \lim\limits_{N\to\infty} \left\| x - \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(x,f_n)}{(f_n,f_n)} f_n \right\| = \lim\limits_{N\to\infty} \|x\| = \|x\|$, т. е. x — нулевой вектор. Заметим, что при доказательстве необходимости мы не пользовались полнотой пространства $\mathcal{H}$.

Покажем достаточность. Для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ в силу минимального свойства его коэффициентов Фурье по ортогональной системе F имеем

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, f_n)}{(f_n, f_n)} f_n \right\|^2 = \\ = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} = \rho^2 \Big(x, \operatorname{Lin}\{f_1, \ldots, f_N\} \Big) \geq 0.$$

Следовательно, для любого $N \in \mathbb{N}$ получаем неравенство

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \leq \|x\|^2.$$

Тогда по теореме Вейерштрасса о пределе неубывающей ограниченной сверху числовой последовательности при $N \to \infty$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \leq \|x\|^2 \quad \text{(неравенство Бесселя).}$$

Следовательно, последовательность $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(x,f_n)}{(f_n,f_n)} f_n$ частичных сумм ряда Фурье вектора x по системе F является фундаментальной в пространстве $\mathcal{H}$, так как для любых $N, M \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Big\| S_N(x) - S_{N+M}(x) \Big\|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+M} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|(x, f_n)|^2}{(f_n, f_n)} \to 0$$

при $N \to \infty$. В силу полноты пространства $\mathcal{H}$ последовательность $S_N(x)$ сходится в $\mathcal{H}$ при $N \to \infty$ к некоторому вектору $z \in \mathcal{H}$. Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ и $N > m$ выполнено равенство $(S_N(x), f_m) = (x, f_m)$, то получаем

$$(x - z, f_m) = \lim_{N\to\infty} (x - S_N(x), f_m) = \lim_{N\to\infty} \Big((x, f_m) - (x, f_m)\Big) = 0.$$

Следовательно, вектор $x - z$ ортогонален всем векторам системы F, а значит, по условию является нулевым. Таким образом, $x = z$ и $\rho\Big(x, \mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_N\}\Big) = \Big\|x - S_N(x)\Big\| \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, система F является полной в пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому по утверждению 3.3.2 получаем базисность системы F в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Утверждение 3.3.4. *Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство изометрически изоморфно пространству* ℓ_2.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, а $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ — его счётное всюду плотное подмножество. Определим строго возрастающую подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} n_1 &= \min\Big\{ m \in \mathbb{N} \;\Big|\; g_m \neq 0 \Big\}, \\ n_{k+1} &= \min\Big\{ m > n_k \;\Big|\; g_m \notin \mathrm{Lin}\{g_{n_1}, \ldots, g_{n_k}\} \Big\} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Покажем, что система $G = \{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, состоящая из линейно независимых векторов, является полной в $\mathcal{H}$. Действительно, для любого $x \in \mathcal{H}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует номер m, такой, что $\|x - g_m\| \le \varepsilon$. Так как для любого $n_k > m$ имеем включение $g_m \in \mathrm{Lin}\{g_{n_1} \ldots, g_{n_k}\}$, то получаем неравенства

$$\rho(x, \mathrm{Lin}\, G) \le \rho\Big(x, \mathrm{Lin}\{g_{n_1} \ldots, g_{n_k}\}\Big) \le \|x - g_m\| \le \varepsilon.$$

Следовательно, множество $\mathrm{Lin}\, G$ является всюду плотным в $\mathcal{H}$, что и требовалось.

В силу замечания 3.3.2, подвергнув векторы системы G процедуре ортогонализации Грама—Шмидта, получим систему попарно ортогональных векторов $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая образует в пространстве $\mathcal{H}$ ортогональный базис. По утверждению 3.3.2 любой вектор $x \in \mathcal{H}$ представляется своим рядом Фурье по ортогональной системе F, а его коэффициенты Фурье $\varphi_n(x) = \frac{(x, f_n)}{\sqrt{(f_n, f_n)}}$ образуют последовательность $\varphi(x) = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из пространства ℓ_2, т. е. $\varphi(x) \in \ell_2$. При этом согласно равенству Парсеваля $\|x\| = \|\varphi(x)\|_2$. Таким образом, определено линейное изометричное (и потому инъективное) отображение $\varphi\colon \mathcal{H} \to \ell_2$. Осталось показать, что отображение φ является сюръекцией, т. е. $\varphi(\mathcal{H}) = \ell_2$. Для любой последовательности $z = \{z(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ рассмотрим последовательность векторов пространства $\mathcal{H}$ вида $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{z(n)}{\sqrt{(f_n, f_n)}} f_n$. Последовательность $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ является фундаментальной в пространстве $\mathcal{H}$, так как для любых $N, M \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|S_N - S_{N+M}\|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+M} |z(n)|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |z(n)|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

В силу полноты пространства $\mathcal{H}$ существует вектор $x \in \mathcal{H}$, такой, что $\|x - S_N\| \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, справедливо равенство

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(n)}{\sqrt{(f_n, f_n)}} f_n\,.$$

Но тогда $\varphi_n(x) = z(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. $\varphi(x) = z$, что и требовалось.

Таким образом, отображение φ устанавливает изометрический изоморфизм пространств $\mathcal{H}$ и ℓ_2.

Пример 3.3.4. Построим пример несепарабельного гильбертова пространства. Рассмотрим множество $\mathcal{H}$ комплекснозначных функций, определённых на отрезке $[0, 1]$, принимающих не более чем счётное множество нетривиальных значений, которые образуют квадратически сходящийся числовой ряд. Таким образом, множество $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} = \left\{ x\colon [0,1] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ не более чем счётное } T(x) \subset [0,1] : \\ \\ \forall\, t \notin T(x) \text{ выполнено } x(t) = 0 \text{ и} \\ \\ \sum\limits_{t \in T(x)} |x(t)|^2 < +\infty \end{array} \right\}.$$

Ясно, что множество $\mathcal{H}$ является линейным пространством относительно поточечных операций сложения и умножния на скаляр. Введём в $\mathcal{H}$ скалярное произведение:

$$(x, y) = \sum_{t \in T(x) \cup T(y)} x(t)\overline{y(t)} \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{H}.$$

Указанный ряд сходится абсолютно, так как справедливо неравенство

$$\sum_{t \in T(x) \cup T(y)} |x(t)y(t)| \le \sqrt{\sum_{t \in T(x)} |x(t)|^2} \sqrt{\sum_{t \in T(y)} |y(t)|^2} < +\infty.$$

Покажем, что линейное пространство $\mathcal{H}$ с нормой $\|\cdot\|$, порождённой введённым скалярным произведением, является полным. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H}$ произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех $n, m \ge N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\|x_n - x_m\| \le$ $\le \varepsilon$. Определим не более чем счётное множество $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(x_n)$. Для любого $t \in T$ и произвольных $n, m \ge N(\varepsilon)$ имеем

$$|x_n(t) - x_m(t)| \le \sqrt{\sum_{\tau \in T} |x_n(\tau) - x_m(\tau)|^2} = \|x_n - x_m\| \le \varepsilon.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\mathbb{C}$ для любого $t \in T$. Если же $t \notin T$, то $x_n(t) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, для любого $t \in [0,1]$ существует числовой предел $z(t) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(t)$, причём для любого $t \notin T$ получаем $z(t) =$ $= 0$. Следовательно, определена функция $z\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, для которой $T(z) = T$, т. е. функция $z \in \mathcal{H}$. Покажем, что последовательность x_n

сходится в $\mathcal{H}$ к функции z. Пусть счётное множество $T = \{t_s\}_{s=1}^{\infty}$, где $t_s \neq t_r$ при $s \neq r$. Тогда для любого $M \in \mathbb{N}$ и $n \geq N(\varepsilon)$ получаем

$$\sqrt{\sum_{s=1}^{M} |x_n(t_s) - z(t_s)|^2} = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\sum_{s=1}^{M} |x_n(t_s) - x_m(t_s)|^2} \leq$$

$$\leq \varlimsup_{m\to\infty} \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|x_n - z\| = \lim_{M\to\infty} \sqrt{\sum_{s=1}^{M} |x_n(t_s) - z(t_s)|^2} \leq \varepsilon,$$

что и требовалось. Таким образом, линейное пространство $\mathcal{H}$ с введённым скалярным произведением является гильбертовым пространством. Покажем, что оно несепарабельно. Для любого $t \in [0, 1]$ определим функцию $x_t \in \mathcal{H}$ вида

$$x_t(\tau) = \begin{cases} 1, & t = \tau, \\ 0, & t \neq \tau. \end{cases}$$

Таким образом, $T(x_t) = \{t\}$ — одноточечное множество. Рассмотрим множество

$$A_0 = \left\{ x_t \;\middle|\; t \in [0, 1] \right\} \subset \mathcal{H}.$$

Ясно, что множество A_0 равномощно отрезку $[0, 1]$ и поэтому является несчётным. Но для любых двух его различных элементов x_t и x_τ при $t \neq \tau$ получаем $\|x_t - x_\tau\| = \sqrt{2} = \varepsilon_0$. Следовательно, в силу утверждения 1.3.1 получаем несепарабельность построенного гильбертова пространства $\mathcal{H}$.

3.4. Линейные операторы

Определение 3.4.1. *Пусть X и Y — линейные пространства. Линейное отображение $A\colon X \to Y$ называется линейным оператором.*

Определение 3.4.2. *Пусть X и Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Ядром оператора A называется подпространство из X вида*

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \, x \in X \;\middle|\; A(x) = 0 \, \right\}.$$

Образом, или множеством значений, оператора A называется подпространство из Y вида:

$$\operatorname{Im} A = \left\{ \, A(x) \;\middle|\; x \in X \, \right\}.$$

Определение 3.4.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A\colon X \to Y$ называется ограниченным, если для любого ограниченного множества $S \subset X$ его образ $A(S)$ является ограниченным в Y.*

Утверждение 3.4.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A\colon X \to Y$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) *оператор A является непрерывным в X;*
2) *оператор A является непрерывным в нуле;*
3) *оператор A является ограниченным;*
4) *существует $R > 0$, такое, что $A\left(B_1^X(0)\right) \subset B_R^Y(0)$.*

Здесь $B_r^X(x) = \left\{ \, z \in X \;\middle|\; \|z - x\|_X \le r \, \right\}$ для вектора $x \in X$ и числа $r \ge 0$.

Доказательство. Очевидно, что из условия 1 следует условие 2. Если выполнено условие 2, то существует число $\delta > 0$, такое, что для любого $x \in X$ вида $\|x\|_X < \delta$ выполнено неравенство $\|A(x)\|_Y < 1$. Для любого ограниченного множества $S \subset X$ существует число $M > 0$, такое, что для любого вектора $x \in S$ выполнено неравенство $\|x\|_X \le M$. Тогда для любого вектора $x \in S$ получаем неравенство $\left\|\frac{\delta}{M+1}x\right\|_X \le \frac{M}{M+1}\delta < \delta$. Следовательно, $\left\|A\left(\frac{\delta}{M+1}x\right)\right\|_Y < 1$, что означает неравенство $\|A(x)\|_Y \le \frac{M+1}{\delta}$. Поэтому множество $A(S)$ является ограниченным в Y. Далее из условия 3, очевидно, следует условие 4. Пусть выполнено условие 4. Тогда для любого вектора $x \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \frac{\varepsilon}{R+1} > 0$, такое, что для любого вектора $y \in X$ вида $\|y - x\|_X < \delta$ справедливо неравенство $\left\|A\left(\frac{y-x}{\delta}\right)\right\|_Y \le R$, т. е. $\|A(y) - A(x)\|_Y \le \frac{R}{R+1}\varepsilon < \varepsilon$. Следовательно, оператор A является непрерывным в произвольной точке $x \in X$, что и требовалось.

Определение 3.4.4. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Нормой линейного оператора $A\colon X \to Y$ называется величина*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y.$$

Замечание 3.4.1. В силу утверждения 3.4.1 неравенство

$$\|A\| < +\infty$$

равносильно ограниченности линейного оператора A.

Утверждение 3.4.2. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда справедливы равенства*

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y = \\ = \inf\left\{ L > 0 \;\middle|\; \|A(x)\|_Y \le L\|x\|_X \quad \forall\, x \in X \right\}.$$

Доказательство. Так как для любого $x \ne 0$ выполнено равенство $\left\|\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_X = 1$, то получаем следующие оценки:

$$\sup_{x \ne 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \ne 0} \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \le \\ \le \sup_{\|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \le \sup_{x \ne 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Следовательно, справедливо равенство $\sup\limits_{x \ne 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y$. Далее находим

$$\sup_{\|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y \le \sup_{\|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y = \\ = \sup_{0 < \|x\|_X \le 1} \|x\|_X \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \le \sup_{\|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y.$$

Поэтому получаем равенство $\sup\limits_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y = \sup\limits_{\|x\|_X\le 1} \|A(x)\|_Y$. Таким образом, доказаны соотношения

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X\le 1} \|A(x)\|_Y = \sup_{x\ne 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y.$$

Далее для любого $L > 0$, такого, что для всех $x \in X$ выполнено $\|A(x)\|_Y \le L\|x\|_X$, получаем неравенство $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_X\le 1} \|A(x)\|_Y \le$ $\le L$. Следовательно, выполнено соотношение

$$\|A\| \le \inf\left\{ L > 0 \;\middle|\; \|A(x)\|_Y \le L\|x\|_X \;\; \forall\, x \in X \right\}.$$

С другой стороны, для любого $x \ne 0$ получаем неравенство

$$\|A(x)\|_Y \le \left(\frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}\right) \|x\|_X \le \|A\|\, \|x\|_X.$$

Следовательно, выполнено обратное неравенство

$$\inf\left\{ L > 0 \;\middle|\; \|A(x)\|_Y \le L\|x\|_X \;\; \forall\, x \in X \right\} \le \|A\|.$$

Задача 3.4.1. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Доказать следующие утверждения:

а) если $\dim X < +\infty$, то $\|A\| < +\infty$;

б) если $\dim \operatorname{Im} A < +\infty$, а $\operatorname{Ker} A$ замкнуто, то $\|A\| < +\infty$.

Решение. а) Пусть $\dim X = n$. Тогда в X существует конечный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Следовательно, для любого вектора $x \in X$ существует единственный набор скаляров $\{\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)\}$, такой, что $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(x) e_k$. Заметим, что для каждого $k \in \overline{1, n}$ отображение $\alpha_k\colon X \to \mathbb{C}$ является линейным. Определим функцию

$$\|x\|_e = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x)| \quad \text{для любого} \quad x \in X.$$

Эта функция является нормой в линейном пространстве X. Действительно, $\|x\|_e \ge 0$, а равенство $\|x\|_e = 0$ равносильно $\alpha_k(x) = 0$ для каждого $k \in \overline{1, n}$, т. е. $x = 0$. Далее для любого вектора $x \in X$ и скаляра $t \in \mathbb{C}$ имеем равенство $\alpha_k(tx) = t\alpha_k(x)$ для каждого $k \in \overline{1, n}$. Следовательно, $\|tx\|_e = |t| \, \|x\|_e$. Наконец, для любых векторов $x, y \in \in X$ имеем равенство $\alpha_k(x+y) = \alpha_k(x) + \alpha_k(y)$ для каждого $k \in \overline{1, n}$. Следовательно, получаем

$$\|x + y\|_e = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x) + \alpha_k(y)| \le \sum_{k=1}^{n} \Big(|\alpha_k(x)| + |\alpha_k(y)|\Big) = \|x\|_e + \|y\|_e,$$

т. е. справедливо неравенство треугольника. По теореме 3.1.1 об эквивалентности норм в конечномерном линейном пространстве нормы $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_e$ эквивалентны в X. Следовательно, существует число $C > 0$, такое, что для любого вектора $x \in X$ справедливо неравенство

$$\|x\|_e \le C\|x\|_X.$$

Определим число $M = \max\limits_{1 \le k \le n} \|A(e_k)\|_Y$. Тогда получаем

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ne 0} \frac{\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k A(e_k) \right\|_Y}{\|x\|_X} \le$$

$$\le \sup_{x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ne 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k| \, \|A(e_k)\|_Y}{\|x\|_X} \le \sup_{x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ne 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k| \, M}{\|x\|_X} =$$

$$= M \sup_{x \ne 0} \frac{\|x\|_e}{\|x\|_X} \le MC,$$

т. е. $\|A\| \le MC < +\infty$, что и требовалось.

б) Пусть теперь линейный оператор A имеет замкнутое ядро и конечномерный образ. Пусть $\dim \operatorname{Im} A = m$. Тогда в $\operatorname{Im} A$ существует конечный базис $\{g_1, \ldots, g_m\}$. Следовательно, для любого $k \in \overline{1, m}$ существует вектор $e_k \in X$, такой, что $Ae_k = g_k$. Покажем, что справедливо равенство

$$\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_k\} = X.$$

Действительно, для любого $x \in X$ имеем $A(x) \in \operatorname{Im} A$, т. е. существует единственный набор скаляров $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, такой, что справедливо равенство $A(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k g_k$. Определим вектор $u = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k \in$ $\in \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_m\}$. Тогда выполнено равенство $A(x-u) = 0$, т. е. вектор $v = x - u \in \operatorname{Ker} A$. Следовательно, доказано равенство

$$\operatorname{Ker} A + \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_k\} = X.$$

Покажем, что сумма подпространств прямая, т. е. справедливо равенство $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_m\} = \{0\}$. Действительно, если вектор $z \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_m\}$, то существуют скаляры $\beta_1, \ldots, \beta_m$, такие, что $z = \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k e_k$, и выполнено равенство $A(z) = 0 = \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k g_k$. Так как векторы $g_1, \ldots, g_m$ линейно независимы, то получаем равенства $\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0$ и $z = 0$. Определим число $M = \max\limits_{k \in \overline{1,n}} \|g_k\|_Y$. Теперь имеем

$$\|A\| = \sup_{\substack{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{C}, \\ \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| > 0,\ v \in \operatorname{Ker} A}} \frac{\left\| A\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k\right)\right\|_Y}{\left\|\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k + v\right\|_X} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{C}, \\ \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| > 0,\ v \in \operatorname{Ker} A}} \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k|\, M}{\left\|\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k + v\right\|_X}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на число $L = \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k| > 0$ и обозначим $\beta_k = \frac{\alpha_k}{L}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{m} |\beta_k| = 1$ и справедливо неравенство

$$\|A\| \leq \frac{M}{\inf\limits_{\substack{\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subset \mathbb{C}, \\ \sum_{k=1}^{m} |\beta_k| = 1,\ w \in \operatorname{Ker} A}} \left\|\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k e_k - w\right\|_X} =$$

$$= \frac{M}{\inf\limits_{\substack{\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subset \mathbb{C}, \\ \sum_{k=1}^{m} |\beta_k| = 1}} \rho\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k e_k, \operatorname{Ker} A\right)}.$$

Пусть $\{\beta_1(s),\,\ldots,\,\beta_m(s)\}_{s=1}^{\infty}$ — минимизирующая последовательность для последней нижней грани, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{m}|\beta_k(s)| = 1$ для любого $s \in \mathbb{N}$, и справедливо равенство

$$\inf_{\substack{\{\beta_1,\,\ldots,\,\beta_m\}\subset\mathbb{C},\\ \sum\limits_{k=1}^{m}|\beta_k|=1}} \rho\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_k e_k, \operatorname{Ker} A\right) = \lim_{s\to\infty}\rho\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_k(s)e_k, \operatorname{Ker} A\right).$$

По теореме Больцано—Вейерштрасса существует сходяшаяся подпоследовательность $\beta_k(s_r) \to \gamma_k$ при $r \to \infty$ для любого $k \in \overline{1,m}$. При этом, естественно, выполнено равенство $\sum\limits_{k=1}^{m}|\gamma_k| = 1$. Тогда вектор $u = \sum\limits_{k=1}^{m}\gamma_k e_k = \lim\limits_{r\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}\beta_k(s_r)e_k \in \operatorname{Lin}\{e_1,\,\ldots,\,e_m\}$.

Заметим, что функция $x \mapsto \rho(x, \operatorname{Ker} A)$ удовлетворяет условию Липшица с константой единица на всём пространстве X, т. е.

$$\Big|\rho(x, \operatorname{Ker} A) - \rho(z, \operatorname{Ker} A)\Big| \le \|x - z\|_X \qquad \forall\, x, z \in X.$$

Действительно, для любых векторов $x, z \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют векторы $v_\varepsilon, w_\varepsilon \in \operatorname{Ker} A$, такие, что $\|x - v_\varepsilon\|_X \le \rho(x, \operatorname{Ker} A) + \varepsilon$ и $\|z - w_\varepsilon\|_X \le \rho(z, \operatorname{Ker} A) + \varepsilon$. Следовательно, получаем

$$\rho(x, \operatorname{Ker} A) - \rho(z, \operatorname{Ker} A) \le \|x - w_\varepsilon\|_X - \|z - w_\varepsilon\|_X + \varepsilon \le \\ \le \|x - z\|_X + \varepsilon,$$

$$\rho(z, \operatorname{Ker} A) - \rho(x, \operatorname{Ker} A) \le \|z - v_\varepsilon\|_X - \|x - v_\varepsilon\|_X + \varepsilon \le \\ \le \|x - z\|_X + \varepsilon,$$

т. е. выполнено $\Big|\rho(x, \operatorname{Ker} A) - \rho(z, \operatorname{Ker} A)\Big| \le \|x - z\|_X + \varepsilon \to \|x - z\|_X$ при $\varepsilon \to +0$. Следовательно, получаем

$$\lim_{s\to\infty}\rho\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_k(s)e_k, \operatorname{Ker} A\right) = \\ = \lim_{r\to\infty}\rho\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_k(s_r)e_k, \operatorname{Ker} A\right) = \rho(u, \operatorname{Ker} A).$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{m} |\gamma_k| = 1$, то вектор $u \neq 0$, и поэтому $u \notin \operatorname{Ker} A$. Так как ядро $\operatorname{Ker} A$ замкнуто, то справедливо неравенство $\rho(u, \operatorname{Ker} A) > 0$. Следовательно, получаем окончательное неравенство

$$\|A\| \leq \frac{M}{\rho(u, \operatorname{Ker} A)} < +\infty,$$

что и требовалось.

Пример 3.4.1. Приведём пример линейного неограниченного оператора, определённого на бесконечномерном пространстве, имеющего бесконечномерный образ и замкнутое ядро. Рассмотрим линейное пространство X, состоящее из всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ комплекснозначных функций, имеющих нулевое значение в нуле. Норму в пространстве X определим так же, как в пространстве $C[0,1]$, т. е.

$$\|x\|_c = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \qquad \forall\, x \in X.$$

Пусть пространство $Y = C[0,1]$ с $\|\cdot\|_c$-нормой. Определим линейный оператор $A\colon X \to Y$ следующим образом:

$$(Ax)(t) = x'(t) \qquad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x \in X.$$

Тогда $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, так как для функции $x \in \operatorname{Ker} A$ имеем $x'(t) = 0$ для любого $t \in [0,1]$, т. е. $x(t) = \mathrm{const} = x(0) = 0$. Далее, $\operatorname{Im} A = Y$, так как для любой функции $y \in Y$ существует функция $x \in X$ вида $x(t) = \int\limits_0^t y(\tau)\, d\tau$ для любого $t \in [0,1]$, такая, что $(Ax)(t) = x'(t) = y(t)$, т. е. $Ax = y$. Наконец, докажем, что $\|A\| = +\infty$. Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию $x_n(t) = \sin(nt)$ из пространства X. Так как $\|x_n\|_c \leq 1$, то справедливы неравенства

$$\|A\| \geq \|Ax_n\|_c = \max_{t \in [0,1]} \Big| n \cos(nt) \Big| = n \to +\infty,$$

что и требовалось.

Пример 3.4.2. Рассмотрим линейное нормированное пространство $CL_1[0,1]$, состоящее из всех непрерывных функций

$$x\colon [0,1] \to \mathbb{C},$$

норма в котором определяется соотношением

$$\|x\|_1 = \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt.$$

Рассмотрим линейный оператор $A\colon CL_1[0,1] \to CL_1[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x \in CL_1[0,1].$$

Вычислим норму оператора A. Для любой функции $x \in CL_1[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_1 = \int\limits_0^1 \left| \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau \right| dt \le \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^t |x(\tau)|\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 |x(\tau)|\,d\tau \int\limits_\tau^1 dt = \int\limits_0^1 (1-\tau)|x(\tau)|\,d\tau \le \|x\|_1.$$

Следовательно, справедливо неравенство $\|A\| \le 1$. Далее для любого $\varepsilon \in (0,1)$ рассмотрим функцию $x_\varepsilon \in CL_1[0,1]$ вида

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{\varepsilon}, & 0 \le t \le \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon \le t \le 1. \end{cases}$$

Получаем

$$\|Ax_\varepsilon\|_1 = \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^t x_\varepsilon(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^1 (1-\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon (1-\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau \ge \int\limits_0^\varepsilon (1-\varepsilon)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau = (1-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|_1.$$

Следовательно,

$$1 \ge \|A\| \ge \frac{\|Ax_\varepsilon\|_1}{\|x_\varepsilon\|_1} \ge 1 - \varepsilon \to 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0,$$

т. е. $\|A\| = 1$. Заметим, что в роли функции x_ε можно было рассмотреть любую непрерывную функцию с вещественными неотрицательными значениями, равную нулю на отрезке $[\varepsilon, 1]$ и принимающую положительные значения на промежутке $[0, \varepsilon)$.

Теперь рассмотрим тот же оператор в другом линейном нормированном пространстве, а именно в евклидовом пространстве $CL_2[0,1]$. Имеем оператор $A\colon CL_2[0,1] \to CL_2[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x \in CL_2[0,1].$$

Вычислим норму оператора A в этом случае. Для любой функции $x \in CL_2[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\int\limits_0^1 \left|\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau\right|^2 dt} \le \sqrt{\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t |x(\tau)|\,d\tau\right)^2 dt}\,.$$

Так как в силу неравенства Коши—Буняковкого для любого $t \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_0^t |x(\tau)|\,d\tau\right)^2 \le \left(\int\limits_0^t |x(\tau)|^2\,d\tau\right)\left(\int\limits_0^t d\tau\right) = \\ = t\left(\int\limits_0^t |x(\tau)|^2\,d\tau\right) \le t\left(\|x\|_2\right)^2,$$

то получаем

$$\|Ax\|_2 \le \sqrt{\int\limits_0^1 t\left(\|x\|_2\right)^2 dt} = \frac{\|x\|_2}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, справедливо неравенство $\|A\| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. Оказывается, полученная оценка для нормы оператора A в рассматриваемом случае является неточной, т. е. на самом деле $\|A\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Установим это, вычислив точное значение для $\|A\|$. Для этого рассмотрим специальный ортогональный базис в евклидовом пространстве $CL_2[0,1]$, который образует счётная система функций $E = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ вида $e_n(t) = \cos\left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right)$, $t \in [0,1]$. Заметим, что другая счётная система функций $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(t) = \sin\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right)$, тоже образует в $CL_2[0,1]$ ортогональный базис, причём для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$Ae_n = \frac{f_n}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}.$$

При этом для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\|e_n\|_2 = \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пусть функция $x \in CL_2[0,1]$ имеет следующее разложение в ряд Фурье по системе E:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Этот ряд сходится к функции x в пространстве $CL_2[0,1]$, т. е. в среднем квадратическом. При этом, применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2}{(e_n, e_n)}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 2|\alpha_n|^2}.$$

Так как оператор A непрерывен в пространстве $CL_2[0,1]$ в силу полученной выше оценки для его нормы $\|A\| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, то получаем, что

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Ae_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} f_n.$$

Последний ряд представляет собой разложение в ряд Фурье по системе F функции Ax и сходится к ней в пространстве $CL_2[0,1]$, т. е. в среднем квадратическом. При этом в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2}{\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^2 (f_n, f_n)}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|\alpha_n|^2}{\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^2}} \le \frac{2}{\pi}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 2|\alpha_n|^2} = \frac{2}{\pi}\|x\|_2.$$

Таким образом, справедливо неравенство $\|A\| \le \frac{2}{\pi} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Далее имеем неравенства

$$\frac{2}{\pi} \ge \|A\| \ge \frac{\|Ae_1\|_2}{\|e_1\|_2} = \frac{\left\|\frac{2}{\pi} f_1\right\|_2}{\|e_1\|_2} = \frac{2}{\pi},$$

т. е. получаем равенство $\|A\| = \frac{2}{\pi}$.

П р и м е р 3.4.3. Пусть функция $K\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ является непрерывной. Рассмотрим линейный оператор $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x \in C[0,1].$$

Вычислим норму оператора A. Для любой функции $x \in C[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_c = \max_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \right| \le$$
$$\le \max_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,|x(\tau)|\,d\tau \le \left(\max_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,d\tau \right) \|x\|_c.$$

Следовательно, для числа $L = \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,d\tau$ справедливо неравенство $\|A\| \le L$. Далее в силу непрерывности на отрезке $[0,1]$ функции $t \mapsto \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,d\tau$ существует число $t_0 \in [0,1]$, такое, что выполнено $L = \int\limits_0^1 |K(t_0,\tau)|\,d\tau$. По теореме Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции многочленом для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P_\varepsilon\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, такой, что $\Big|K(t_0,\tau) - P_\varepsilon(\tau)\Big| \le \varepsilon$ для всех $\tau \in [0,1]$. Определим непрерывную функцию комплексного переменного $s_\varepsilon\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вида

$$s_\varepsilon(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z}}{|z|}, & |z| \ge \varepsilon, \\ \frac{\overline{z}}{\varepsilon}, & |z| \le \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ вида $|z| \ge \varepsilon$ получаем равенство $s_\varepsilon(z)z = |z|$, а при $|z| \le \varepsilon$ имеем соотношение $s_\varepsilon(z)z = \frac{|z|^2}{\varepsilon} \in [0,\varepsilon]$. Рассмотрим функцию $x_\varepsilon(\tau) = s_\varepsilon\Big(P_\varepsilon(\tau)\Big)$, где $\tau \in [0,1]$. Ясно, что $x_\varepsilon \in C[0,1]$ как суперпозиция непрерывных функций. При этом справедливо неравенство $\|x_\varepsilon\|_c \le 1$, так как $|s_\varepsilon(z)| \le 1$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Получаем

$$\|A\| \ge \|Ax_\varepsilon\|_c \ge \left|\int\limits_0^1 K(t_0,\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau\right| \ge$$

$$\ge \left|\int\limits_0^1 P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau\right| - \int\limits_0^1 \Big|K(t_0,\tau) - P_\varepsilon(\tau)\Big| \, \Big|x_\varepsilon(\tau)\Big| \, d\tau \ge$$

$$\ge \left|\int\limits_0^1 P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau\right| - \varepsilon.$$

Оценим снизу число $\left|\int\limits_0^1 P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau\right|$. Для этого определим множество

$$I_\varepsilon = \Big\{ \ \tau \in [0,1] \ \ \Big| \ \ |P_\varepsilon(\tau)| \le \varepsilon \ \Big\}.$$

Так как P_ε — многочлен, то множество I_ε, если не пусто, состоит из конечного набора промежутков отрезка $[0,1]$. Следовательно, по множествам I_ε и $[0,1]\backslash I_\varepsilon$ можно интегрировать по Риману любую непрерывную на отрезке $[0,1]$ функцию. Получаем

$$\left|\int\limits_0^1 P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau\right| \ge \left|\int\limits_{[0,1]\backslash I_\varepsilon} P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau\right| - \int\limits_{I_\varepsilon} \Big|P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\Big| \, d\tau.$$

Так как для любого $\tau \in [0,1]\backslash I_\varepsilon$ имеем $P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau) = |P_\varepsilon(\tau)|$, а для любого $\tau \in I_\varepsilon$ имеем $P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau) \in [0,\varepsilon]$, то получаем

$$\left|\int\limits_0^1 P_\varepsilon(\tau)x_\varepsilon(\tau)\,d\tau\right| \ge \int\limits_{[0,1]\backslash I_\varepsilon} \Big|P_\varepsilon(\tau)\Big| \, d\tau - \varepsilon =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big|P_\varepsilon(\tau)\Big| \, d\tau - \int\limits_{I_\varepsilon} \Big|P_\varepsilon(\tau)\Big| \, d\tau - \varepsilon \ge \int\limits_0^1 \Big|P_\varepsilon(\tau)\Big| \, d\tau - 2\varepsilon \ge$$

$$\ge \int\limits_0^1 \Big|K(t_0,\tau)\Big| \, d\tau - 3\varepsilon = L - 3\varepsilon.$$

Окончательно получаем неравенства $L \geq \|A\| \geq \|Ax_\varepsilon\|_c \geq L - 4\varepsilon$, откуда при $\varepsilon \to +0$ следует равенство $\|A\| = L = \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,d\tau$.

Пример 3.4.4. Пусть функция $K\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ является непрерывной. Рассмотрим линейный оператор $A\colon CL_1[0,1] \to$ $\to CL_1[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x \in CL_1[0,1].$$

Вычислим норму оператора A. Для любой функции $x \in CL_1[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_1 = \int\limits_0^1 \left| \int\limits_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \right| dt \leq$$
$$\leq \int\limits_0^1 |x(\tau)|\,d\tau \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,dt \leq \left(\max_{\tau\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,dt \right) \|x\|_1.$$

Следовательно, для числа $L = \max\limits_{\tau\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,dt$ справедливо неравенство $\|A\| \leq L$. Из непрерывности функции K вытекает непрерывность функции $\tau \mapsto \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\,dt$ на отрезке $[0,1]$. Следовательно, существует число $\tau_0 \in [0,1]$, такое, что $L = \int\limits_0^1 |K(t,\tau_0)|\,dt$. По теореме Кантора непрерывная на компакте $[0,1]\times[0,1]$ функция K является равномерно непрерывной на нём. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $\tau \in [0,1]$ вида $|\tau - \tau_0| \leq \delta$ и для всех $t \in [0,1]$ справедливо неравенство $\Big|K(t,\tau) - K(t,\tau_0)\Big| \leq \varepsilon$. Определим промежуток

$$I_\varepsilon = \Big\{ \tau \in [0,1] \ \Big| \ |\tau - \tau_0| < \delta(\varepsilon) \Big\}.$$

Рассмотрим непрерывную функцию $x_\varepsilon\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, такую, что $x_\varepsilon(\tau) =$ $= 0$ при всех $\tau \in [0,1]\backslash I_\varepsilon$, а при всех $\tau \in I_\varepsilon$ выполнено неравенство

$x_\varepsilon(\tau) > 0$. Тогда $\|x\|_1 = \int\limits_{I_\varepsilon} x_\varepsilon(\tau)\, d\tau > 0$. Получаем

$$\|Ax_\varepsilon\|_1 = \int\limits_0^1 \left| \int\limits_{I_\varepsilon} K(t,\tau) x_\varepsilon(\tau)\, d\tau \right| dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^1 \left| \int\limits_{I_\varepsilon} K(t,\tau_0) x_\varepsilon(\tau)\, d\tau \right| dt - \int\limits_0^1 dt \int\limits_{I_\varepsilon} \Big| K(t,\tau) - K(t,\tau_0) \Big|\, |x_\varepsilon(\tau)|\, d\tau \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_0^1 |K(t,\tau_0)|\, dt \right) \left(\int\limits_{I_\varepsilon} x_\varepsilon(\tau)\, d\tau \right) - \varepsilon \int\limits_{I_\varepsilon} |x_\varepsilon(\tau)|\, d\tau = \Big(L - \varepsilon \Big) \|x_\varepsilon\|_1.$$

Следовательно, $L \geq \|A\| \geq \frac{\|Ax_\varepsilon\|_1}{\|x_\varepsilon\|_1} \geq L - \varepsilon$, откуда при $\varepsilon \to +0$ получаем равенство $\|A\| = L = \max\limits_{\tau \in [0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,\tau)|\, dt$.

П р и м е р 3.4.5. Пусть функция $K\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ является непрерывной. Рассмотрим линейный оператор $A\colon CL_1[0,1] \to C[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 K(t,\tau) x(\tau)\, d\tau \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, x \in CL_1[0,1].$$

Вычислим норму оператора A. Для любой функции $x \in CL_1[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_c = \max_{t \in [0,1]} \left| \int\limits_0^1 K(t,\tau) x(\tau)\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left(\max_{t \in [0,1]} \max_{\tau \in [0,1]} |K(t,\tau)| \right) \int\limits_0^1 |x(\tau)|\, d\tau = \left(\max_{t,\tau \in [0,1]} |K(t,\tau)| \right) \|x\|_1.$$

Следовательно, для числа $L = \max\limits_{t,\tau \in [0,1]} |K(t,\tau)|$ справедливо неравенство $\|A\| \leq L$. В силу непрерывности функции K существуют числа $t_0, \tau_0 \in [0,1]$, такие, что $L = |K(t_0,\tau_0)|$, а для любого $\varepsilon > 0$

существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $\tau \in [0, 1]$ вида $|\tau - \tau_0| \leq$ $\leq \delta$ справедливо неравенство $\Big|K(t_0, \tau) - K(t_0, \tau_0)\Big| \leq \varepsilon$. Определим промежуток

$$I_\varepsilon = \Big\{ \ \tau \in [0, 1] \ \ \Big| \ \ |\tau - \tau_0| < \delta(\varepsilon) \ \Big\}.$$

Рассмотрим непрерывную функцию $x_\varepsilon\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, такую, что $x_\varepsilon(\tau) =$ $= 0$ при всех $\tau \in [0, 1] \backslash I_\varepsilon$, а при всех $\tau \in I_\varepsilon$ выполнено неравенство $x_\varepsilon(\tau) > 0$. Тогда $\|x\|_1 = \int\limits_{I_\varepsilon} x_\varepsilon(\tau)\, d\tau > 0$. Получаем

$$\|Ax_\varepsilon\|_c \geq \left|\int\limits_0^1 K(t_0, \tau) x_\varepsilon(\tau)\, d\tau\right| = \left|\int\limits_{I_\varepsilon} K(t_0, \tau) x_\varepsilon(\tau)\, d\tau\right| \geq$$

$$\geq \left|\int\limits_{I_\varepsilon} K(t_0, \tau_0) x_\varepsilon(\tau)\, d\tau\right| - \int\limits_{I_\varepsilon} \Big|K(t_0, \tau) - K(t_0, \tau_0)\Big|\ |x_\varepsilon(\tau)|\, d\tau \geq$$

$$\geq \Big(|K(t_0, \tau_0)| - \varepsilon\Big)\, \|x_\varepsilon\|_1.$$

Следовательно, $L \geq \|A\| \geq \frac{\|Ax_\varepsilon\|_1}{\|x_\varepsilon\|_1} \geq L - \varepsilon$, откуда при $\varepsilon \to +0$ получаем равенство $\|A\| = L = \max\limits_{t,\tau \in [0,1]} |K(t, \tau)|$.

Определение 3.4.5. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y, обозначим $\mathcal{L}(X, Y)$. Множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в X, обозначим $\mathcal{L}(X)$.*

Утверждение 3.4.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Тогда множество $\mathcal{L}(X, Y)$ с операторной нормой из определения 3.4.4 является линейным нормированным пространством.*

Доказательство. Так как по утверждению 3.4.1 ограниченность линейного оператора равносильна его непрерывности, а сумма линейных непрерывных операторов и умножение линейного непрерывного оператора на скаляр сохраняют непрерывность, то множество $\mathcal{L}(X, Y)$ является линейным пространством. Покажем, что операторная норма на $\mathcal{L}(X,Y)$ удовлетворяет определению 3.1.1 нормы. В силу замечания 3.4.1 для любого $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ выполнены неравенства $0 \le \|A\| < +\infty$. Равенство $\|A\| = 0$ в силу утверждения 3.4.2 равносильно $\|A(x)\|_Y = 0$ для любого $x \in X$, т. е. $A = 0$ — нулевой оператор. Для любого оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и скаляра $t \in \mathbb{C}$ находим

$$\|tA\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|tA(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \le 1} |t|\,\|A(x)\|_Y = \\ = |t| \sup_{\|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y = |t|\,\|A\|.$$

Наконец, для любых операторов $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ получаем неравенство треугольника

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|A(x) + B(x)\|_Y \le$$

$$\le \sup_{\|x\|_X \le 1} \Big(\|A(x)\|_Y + \|B(x)\|_Y\Big) \le$$

$$\le \sup_{\|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y + \sup_{\|x\|_X \le 1} \|B(x)\|_Y = \|A\| + \|B\|.$$

Теорема 3.4.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — линейное нормированное пространство, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — полное линейное нормированное пространство. Тогда линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X,Y)$ является полным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность линейных операторов

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X,Y).$$

Так как для любого вектора $x \in X$ и произвольных номеров n и m справедливо неравенство $\|A_n(x) - A_m(x)\|_Y \le \|A_n - A_m\|\,\|x\|_X$, то последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в полном пространстве $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Следовательно, для любого вектора $x \in X$ существует вектор $A(x) \in Y$, такой, что $\|A_n(x) - A(x)\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, определён оператор $A\colon X \to Y$. Так как для любых векторов $x, y \in X$ и скаляров α и β выполнено соотношение

$$\|A_n(\alpha x + \beta y) - \alpha A(x) - \beta A(y)\|_Y \le \\ \le |\alpha|\,\|A_n(x) - A(x)\| + |\beta|\,\|A_n(y) - A(y)\|_Y \to 0$$

при $n \to \infty$, то получаем равенство $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$. Следовательно, оператор A является линейным. Фундаментальная последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной в пространстве $\mathfrak{L}(X, Y)$, т. е. существует число $R > 0$, такое, что для любого номера n выполнено неравенство $\|A_n\| \leq R$. Действительно, в силу фундаментальности последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует номер $N(1)$, такой, что для всех $n \geq N(1)$ выполнено неравенство $\|A_n - A_{N(1)}\| \leq$ ≤ 1, которое влечёт неравенство $\|A_n\| \leq \|A_{N(1)}\| + 1$. Следовательно, число $R = \max\bigl\{\|A_1\|, \ldots, \|A_{N(1)}\|\bigr\} + 1$ удовлетворяет условию $\|A_n\| \leq R$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого вектора $x \in X$ получаем соотношения

$$\|A(x)\|_Y = \lim_{n \to \infty} \|A_n(x)\|_Y \leq \varlimsup_{n \to \infty} \|A_n\| \, \|x\|_X \leq R\|x\|_X.$$

Следовательно, выполнено неравенство $\|A\| \leq R$, т. е. линейный оператор A является ограниченным. В силу фундаментальности последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех номеров $n, m \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$. Тогда для любого вектора $x \in X$ вида $\|x\|_X \leq 1$ получаем неравенства

$$\|A_n(x) - A_m(x)\|_Y \leq \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$$

при всех $n, m \geq N(\varepsilon)$. Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\|A_n(x) - A(x)\|_Y = \lim_{m \to \infty} \|A_n(x) - A_m(x)\|_Y \leq \varepsilon$$

для всех $n \geq N(\varepsilon)$. Следовательно, для любого $n \geq N(\varepsilon)$ выполнено соотношение $\|A_n - A\| = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|A_n(x) - A(x)\|_Y \leq \varepsilon$. Таким образом, произвольная фундаментальная в $\mathfrak{L}(X, Y)$ последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к оператору $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$, т. е. пространство $\mathfrak{L}(X, Y)$ является полным.

Пример 3.4.6. Приведём пример линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ и неполного линейного нормированного пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$, для которых пространство линейных ограниченных операторов $\mathfrak{L}(X, Y)$ является неполным. В линейном пространстве

$$\ell_1 = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \quad \middle| \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < +\infty \right\}$$

введём две нормы $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|$ и $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2}$. Тогда линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ полное, а пространство $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_2)$ — неполное. Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида $z_n(k) = \frac{1}{k}$ при $k \le n$ и $z_n(k) = 0$ при $k > n$ является $\|\cdot\|_2$-фундаментальной и расходящейся в пространстве Y. Определим последовательность операторов $A_n\colon X \to Y$ вида

$$A_n(x) = x(1) z_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого номера n находим

$$\|A_n(x)\|_2 = |x(1)|\, \|z_n\|_2 \le \|x\|_1\, \|z_n\|_2, \quad \text{т. е.} \quad \|A_n\| \le \|z_n\|_2 \le \frac{\pi}{\sqrt{6}},$$

поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Следовательно, для любого номера n выполнено $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$. Аналогично для любых $n, m \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение

$$\|A_{n+m} - A_n\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \Big(|x(1)|\, \|z_{n+m} - z_n\|_2 \Big) \le \|z_{n+m} - z_n\|_2.$$

Отсюда получаем

$$\|A_{n+m} - A_n\| \le \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k^2}} < \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}} < \sqrt{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

при всех $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$ и при всех $m \in \mathbb{N}$. Итак, последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Но для любого $x \in \ell_1$ вида $x(1) \ne 0$ последовательность $A_n(x) = x(1) z_n$ является расходящейся в пространстве Y. Поэтому последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Действительно, если бы существовал оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, такой, что $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$, то для любого $x \in \ell_1$ было бы выполнено соотношение $\|A_n(x) - A(x)\|_2 \le \|A_n - A\|\, \|x\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$, что неверно для любого $x \in \ell_1$ вида $x(1) \ne 0$. Таким образом, пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ неполное.

Замечание 3.4.2. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — ненулевое линейное нормированное пространство, а $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — неполное линейное нормированное пространство. Тогда линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ тоже является неполным. Доказательство этого факта, основанное на применении теоремы Хана—Банаха, будет проведено позднее (см. следствие 5.1.3).

Утверждение 3.4.4. *Пусть* $(X, \|\cdot\|_X)$ *и* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *— линейные нормированные пространства, причём линейное пространство* X *является конечномерным. Тогда любой линейный оператор* $A\colon X \to Y$ *является ограниченным, т. е.* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Доказательство. Пусть размерность линейного пространства X равна n, а система векторов $e_1, \ldots, e_n \in X$ образует базис в X. Тогда для любого вектора $x \in X$ существует единственный набор скаляров $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, такой, что справедливо равенство $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. Введём в пространстве X норму вида $\|x\|_e = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$. По теореме 3.1.1 эта норма эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|_X$ пространства X. Следовательно, существует положительное число L, такое, что для любого вектора $x \in X$ выполнено неравенство

$$\|x\|_e \leq L\|x\|_X.$$

Определим число $M = \max\Big\{\|A(e_1)\|_Y, \ldots, \|A(e_n)\|_Y\Big\}$. Тогда для любого вектора $x \in X$ получаем

$$\|A(x)\|_Y \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, \|A(e_k)\|_Y \leq M\|x\|_e \leq ML\|x\|_X,$$

т. е. $\|A\| \leq ML$. Следовательно, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Определение 3.4.6. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ *— линейное нормированное пространство. Линейное отображение пространства* X *в поле скаляров* $\mathbb{C}$ *называется линейным функционалом. Линейное нормированное пространство ограниченных функционалов* $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ *называется пространством, сопряжённым к пространству* X, *и обозначается* X^*.

Пример 3.4.7. Приведём пример линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ и линейного неограниченного функционала $f\colon X \to \mathbb{C}$. Пусть пространство $X = CL_1[0,1]$ состоит из всех непрерывных функций $x\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, норма в котором имеет вид $\|x\|_{L_1} = \int\limits_0^1 |x(t)|\, dt$. Пусть линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{C}$ имеет вид $f(x) = x(0)$ для любой функции $x \in X$. Покажем, что $\|f\| = = +\infty$, т. е. функционал f является неограниченным. Рассмотрим последовательность непрерывных функций вида $x_n(t) = 2n^2\left(\frac{1}{n} - t\right)$ для всех $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ и $x_n(t) = 0$ при $t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$. Тогда получаем, что $\|x_n\|_{L_1} = 1$, а $f(x_n) = 2n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, получаем

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_{L_1}=1} |f(x)| \geq |f(x_n)| = 2n \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 3.4.7. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ называется поточечно ограниченной, если для любого вектора $x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной в пространстве Y, т. е. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(x)\|_Y < +\infty$.*

Теорема 3.4.2 (*Банах, Штейнгауз*). *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, причём пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ является полным. Пусть последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ является поточечно ограниченной. Тогда последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$, т. е. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^{-1}\left(B_1^Y(0)\right).$$

Здесь $A_n^{-1}\left(B_1^Y(0)\right) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \|A_n(x)\|_Y \leq 1 \right\}$ — прообраз замкнутого единичного шара $B_1^Y(0) \subset Y$ для оператора A_n. Так как для любого номера n оператор A_n является непрерывным, то по утверждению 1.1.6 множество $A_n^{-1}\left(B_1^Y(0)\right)$ является замкнутым в пространстве X. Следовательно, множество F является замкнутым в пространстве X как пересечение замкнутых множеств. Далее по условию для любого вектора $x \in X$ существует натуральное число $N(x)$, такое, что для любого номера n выполнено неравенство $\|A_n(x)\|_Y \leq \leq N(x)$. Это равносильно неравенству $\left\|A_n\left(\frac{x}{N(x)}\right)\right\|_Y \leq 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. справедливо включение $\frac{x}{N(x)} \in F$. Таким образом, справедливы включения $X \subset \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} (NF) \subset X$, т. е. выполнено равенство $X = \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} (NF)$. Полное метрическое пространство X представлено в виде счётного объединения замкнутых множеств. Тогда по теореме 1.4.2 Бэра хотя бы одно из этих множеств должно иметь непустую внутренность. Поэтому существуют номер N_0, вектор $z_0 \in \in N_0F$ и положительное число r_0, такие, что выполнено включение $B_{r_0}(z_0) \subset N_0F$. Последнее включение равносильно включению

$$\tfrac{1}{N_0} B_{r_0}(z_0) = B_{\frac{r_0}{N_0}}\left(\tfrac{z_0}{N_0}\right) \subset F.$$

Обозначим $\delta_0 = \frac{r_0}{N_0}$ и $x_0 = \frac{z_0}{N_0}$. Тогда для любого вектора $x \in X$ вида $\|x\|_X = 1$ получаем $x_0 + \delta_0 x \in B_{\delta_0}(x_0) \subset F$, т. е. для любого номера n выполнено неравенство $\|A_n(x_0) + \delta_0 A_n(x)\|_Y \leq 1$. Следовательно,

$$\|A_n(x)\|_Y \leq \frac{1 + \|A_n(x_0)\|_Y}{\delta_0} \leq \frac{1 + N(x_0)}{\delta_0} = L_0.$$

Таким образом, для любого номера n получаем

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|A_n(x)\|_Y \leq L_0,$$

что и требовалось.

Пример 3.4.8. Покажем, что полнота пространства X в теореме 3.4.2 Банаха—Штейнгауза существенна для ограниченности поточечно ограниченной последовательности линейных непрерывных операторов. Приведём пример неполного линейного нормированного пространства X, банахова пространства Y и поточечно ограниченной последовательности операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, которая является неограниченной в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ (т. е. выполнено $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| = +\infty$).

Пусть $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_2)$, $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ (см. пример 3.4.6), а оператор $A_n\colon X \to Y$ имеет вид

$$(A_n(x))(k) = \begin{cases} \frac{x(k)}{\sqrt{k}}, & 1 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Тогда для любого $x \in \ell_1$ находим

$$\|A_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x(k)|}{\sqrt{k}} \le \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right) \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2} \le \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right) \|x\|_2.$$

Следовательно, справедливо неравенство $\|A_n\| \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = L_n$. С другой стороны, для $x_n \in \ell_1$ вида $x_n(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ при $1 \le k \le n$ и $x_n(k) = 0$ при $k > n$ находим

$$\|A_n(x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = L_n \|x_n\|_2.$$

Следовательно, получаем

$$L_n \ge \|A_n\| \ge \frac{\|A_n(x_n)\|_1}{\|x_n\|_2} = L_n,$$

т. е. выполнено $\|A_n\| = L_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Таким образом, последовательность операторов $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ является неограниченной в пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$. Тем не менее она является поточечно ограниченной, так как для любого $x \in \ell_1$ и любого номера n имеем

$$\|A_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x(k)|}{\sqrt{k}} \le \sum_{k=1}^{n} |x(k)| \le \|x\|_1,$$

т. е. выполнено неравенство $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|A_n(x)\|_1 \le \|x\|_1 < +\infty$.

Определение 3.4.8. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ вида $A_n \colon X \to Y$ называется поточечно сходящейся, если для любого вектора $x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся в пространстве Y.*

Замечание 3.4.3. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, а последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является поточечно сходящейся. Тогда для любого вектора $x \in X$ существует вектор $A(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) \in Y$. Таким образом, определено отображение $A\colon X \to Y$, которое является линейным оператором. Действительно, для любых векторов $x, y \in X$ и скаляров α и β находим

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} \Big(\alpha A_n(x) + \beta A_n(y)\Big) = \\ = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} A_n(y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Указанный линейный оператор A будем называть поточечным пределом последовательности линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 3.4.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, причём $(X, \|\cdot\|_X)$ является полным. Пусть последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ является поточечно сходящейся. Тогда её поточечный предел A является линейным ограниченным оператором, т. е. выполнено включение $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. При этом справедливо неравенство*

$$\|A\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|.$$

Доказательство. По условию для любого вектора $x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся в пространстве Y. Следовательно, она является ограниченной в пространстве Y. Тогда по теореме 3.4.2 Банаха—Штейнгауза последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Поэтому существует положительное число L, такое, что для любого номера n выполнено неравенство $\|A_n\| \le L$. Тогда для любого вектора $x \in X$ и любого $n \in \mathbb{N}$ получаем неравенства

$$\|A(x)\|_Y \le \|A(x) - A_n(x)\|_Y + \|A_n(x)\|_Y \le \|A(x) - A_n(x)\|_Y + L\|x\|_X.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем $\|A(x)\| \le L\|x\|$ для любого $x \in X$. Следовательно, $\|A\| \le L$, что означает включение $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Далее для любого вектора $x \in X$ и любого номера n имеем неравенство

$$\|A(x)\|_Y \le \|A(x) - A_n(x)\|_Y + \|A_n\|\,\|x\|_X,$$

переходя в котором к нижнему пределу по $n \to \infty$, получаем

$$\|A(x)\|_Y \le \lim_{n\to\infty} \|A(x) - A_n(x)\|_Y + \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|\,\|x\|_X = \\ = \Big(\varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|\Big)\|x\|_X.$$

Следовательно, справедливо неравенство $\|A\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|$, что и требовалось.

Пример 3.4.9. Покажем, что полнота пространства X в теореме 3.4.3 существенна для ограниченности поточечного предела последовательности линейных непрерывных операторов. Приведём пример неполного линейного нормированного пространства X, банахова пространства Y и поточечно сходящейся к неограниченному линейному оператору A последовательности операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Для этого рассмотрим линейные нормированные пространства и последовательность непрерывных линейных операторов из примера 3.4.8. Определим линейный оператор $A\colon X \to Y$ вида $(A(x))(k) = \frac{x(k)}{\sqrt{k}}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $x \in \ell_1$. Тогда для любого $x \in \ell_1$ получаем

$$\|A(x) - A_n(x)\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x(k)|}{\sqrt{k}} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, оператор A является поточечным пределом последовательности непрерывных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что оператор A является неограниченным, т. е. $\|A\| = +\infty$. Действительно, рассмотрим для любого номера n элемент $x_n \in \ell_1$ вида $x_n(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ при $1 \le k \le n$ и $x_n(k) = 0$ при $k > n$. Тогда получаем равенства

$$\|A(x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right) \|x_n\|_2.$$

Следовательно, находим

$$\|A\| \ge \frac{\|A(x_n)\|_1}{\|x_n\|_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 3.4.9. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Будем говорить, что последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ является поточечно фундаментальной, если для любого вектора $x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в пространстве Y.*

Определение 3.4.10. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Будем говорить, что пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является полным относительно поточечной сходимости, если для любой поточечно фундаментальной последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ существует поточечный предел $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Теорема 3.4.4. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — полные линейные нормированные пространства. Тогда пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является полным относительно поточечной сходимости.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную поточечно фундаментальную последовательность операторов

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y).$$

Тогда в силу полноты пространства Y для любого вектора $x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся в пространстве Y. Следовательно, последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является поточечно сходящейся к линейному оператору $A\colon X \to Y$. По теореме 3.4.3 имеет место включение $A \in L(X, Y)$. Следовательно, пространство $\mathcal{L}(XY)$ является полным относительно поточечной сходимости.

Пример 3.4.10. Приведём пример неполного линейного нормированного пространства X и банахова пространства Y, для которых пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ не является полным относительно поточечной сходимости. Для этого рассмотрим линейные нормированные пространства из примера 3.4.8. Как показано в примере 3.4.9, определённая в примере 3.4.8 последовательность линейных ограниченных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ является поточечно сходящейся к неограниченному оператору $A\colon X \to Y$. Следовательно, в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ существует поточечно фундаментальная последовательность операторов, не имеющая ограниченного поточечного предела. Таким образом, пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ не является полным относительно поточечной сходимости.

Задача 3.4.2. Рассмотрим линейное нормированное пространство

$$CP[-\pi, \pi] = \left\{ \, x \in C[-\pi, \pi] \;\middle|\; x(-\pi) = x(\pi) \, \right\},$$

норма в котором такая же, как и в пространстве $C[-\pi, \pi]$, т. е. $\|x\|_c = \max\limits_{t \in [-\pi, \pi]} |x(t)|$ для любого $x \in CP[-\pi, \pi]$. Доказать, что основная тригонометрическая система

$$S = \left\{ \tfrac{1}{2},\ \cos(nt),\ \sin(nt) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

является полной и не является базисом в пространстве $CP[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Для любой функции $x \in CP[-\pi, \pi]$ и числа $N \in \mathbb{N}$ определим её N-ю сумму Фурье:

$$\Big(S_N(x)\Big)(t) = \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n(x)\cos(nt) + b_n(x)\sin(nt)\Big),$$

где коэффициенты Фурье функции x имеют вид

$$a_0(x) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(\tau)\,d\tau, \quad a_n(x) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(\tau)\cos(n\tau)\,d\tau,$$

$$b_n(x) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(\tau)\sin(n\tau)\,d\tau.$$

Определим N-ю сумму Фейера $F_N(x)$ функции x как среднее арифметическое первых N сумм Фурье:

$$F_N(x) = \frac{S_1(x) + \ldots + S_N(x)}{N} \in \operatorname{Lin} S.$$

По теореме Фейера для любой функции $x \in CP[-\pi, \pi]$ справедливо соотношение

$$\|x - F_N(x)\|_c \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, $\rho\Big(x, \operatorname{Lin} S\Big) \leq \lim\limits_{N\to\infty} \|x - F_N(x)\|_c = 0$, т. е. множество $\operatorname{Lin} S$ является всюду плотным в пространстве $CP[-\pi, \pi]$. Таким образом, доказана полнота системы S в $CP[-\pi, \pi]$.

Предположим, рассуждая от противного, что система S является базисом в пространстве $CP[-\pi, \pi]$. Тогда для каждой функции $x \in CP[-\pi, \pi]$ существует единственная последовательность скаляров

$$\Big\{\alpha_0(x), \alpha_n(x), \beta_n(x)\Big\}_{n=1}^{\infty},$$

такая, что выполнено соотношение

$$\|x - \sigma_N(x)\|_c \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

где $\Big(\sigma_N(x)\Big)(t) = \frac{\alpha_0(x)}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N}\Big(\alpha_n(x)\cos(nt) + \beta_n(x)\sin(nt)\Big)$. Так как последовательность функций $\sigma_N(x) \in CP[-\pi,\pi]$ сходится равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$ к функции x, то получаем

$$\pi\alpha_0(x) = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sigma_N(x)\Big)(\tau)\,d\tau = \int\limits_{-\pi}^{\pi}x(\tau)\,d\tau = \pi a_0(x),$$

$$\pi\alpha_n(x) = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sigma_N(x)\Big)(\tau)\cos(n\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}x(\tau)\cos(n\tau)\,d\tau = \pi a_n(x),$$

$$\pi\beta_n(x) = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sigma_N(x)\Big)(\tau)\sin(n\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}x(\tau)\sin(n\tau)\,d\tau = \pi b_n(x).$$

Таким образом, $\sigma_N(x) = S_N(x)$ для любого $N \in \mathbb{N}$. Следовательно, предположив базисность системы S в пространстве $CP[-\pi,\pi]$, получаем, что ряд Фурье любой функции из $CP[-\pi,\pi]$ сходится к ней равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$. Как известно, для любой функции $x \in CP[-\pi,\pi]$ и любого номера N справедливо равенство

$$\Big(S_N(x)\Big)(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_N(\tau - t)x(\tau)\,d\tau \qquad \forall\, t \in [-\pi,\pi],$$

где $D_N(\tau) = \dfrac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}$ — ядро Дирихле. Таким образом, S_N является линейным оператором, действующим в линейном нормированном пространстве $CP[-\pi,\pi]$, причём $S_N(x) \to x$ при $N \to \infty$ для любой функции $x \in CP[-\pi,\pi]$. Следовательно, последовательность линейных операторов $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ поточечно сходится к тождественному оператору в пространстве $CP[-\pi,\pi]$.

Обозначим через $\|\cdot\|_C$ операторную норму в пространстве линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}\Big(C[-\pi,\pi]\Big)$, а через $\|\cdot\|_{CP}$ — операторную норму в пространстве $\mathcal{L}\Big(CP[-\pi,\pi]\Big)$. Рассмотрим оператор S_N, действующий в пространстве $C[-\pi,\pi]$. Тогда, как показано в примере 3.4.3, справедливо равенство

$$\|S_N\|_C = \sup_{\substack{x\in C[-\pi,\pi]\\ \|x\|_c\le 1}} \|S_N(x)\|_c = \max_{t\in[-\pi,\pi]} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big|D_N(\tau-t)\Big|\,d\tau =$$

$$= \max_{t\in[-\pi,\pi]} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-t}^{\pi-t} \Big|D_N(\tau)\Big|\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big|D_N(\tau)\Big|\,d\tau.$$

В силу включения $CP[-\pi,\pi]\subset C[-\pi,\pi]$ справедливо неравенство $\|S_N\|_{CP}\le\|S_N\|_C$. С другой стороны, для любого $\varepsilon\in(0,1)$ существует функция $x_\varepsilon\in C[-\pi,\pi]$, такая, что $\|x_\varepsilon\|_c\le 1$ и

$$\|S_N\|_C \le \|S_N(x_\varepsilon)\|_c+\varepsilon.$$

Определим функцию $y_\varepsilon\in CP[-\pi,\pi]$ следующим образом:

$$y_\varepsilon(t)=\begin{cases} x(t), & \varepsilon-\pi\le t\le\pi-\varepsilon,\\[2ex] \frac{(\pi-t)}{\varepsilon}\,x(\pi-\varepsilon), & \pi-\varepsilon\le t\le\pi,\\[2ex] \frac{(\pi+t)}{\varepsilon}\,x(\varepsilon-\pi), & -\pi\le t\le\varepsilon-\pi.\end{cases}$$

Тогда $\|y_\varepsilon\|_c\le 1$, и справедливо неравенство

$$\|S_N(x_\varepsilon)-S_N(y_\varepsilon)\|_c \le \frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)}{\pi}\,4\varepsilon < (2N+1)\varepsilon.$$

Следовательно, получаем

$$\|S_N\|_{CP}\le\|S_N\|_C\le\|S_N(x_\varepsilon)\|_c+\varepsilon\le$$

$$\le \|S_N(y_\varepsilon)\|_c+(2N+2)\,\varepsilon \le \|S_N\|_{CP}+(2N+2)\,\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем равенство

$$\|S_N\|_{CP} = \|S_N\|_C.$$

Так как пространство $CP[-\pi, \pi]$ является полным, то по теореме 3.4.2 Банаха—Штейнгауза получаем, что $\sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\|_{CP} < +\infty$. С другой стороны, непосредственным вычислением находим

$$\pi\|S_N\|_{CP} = \int\limits_0^\pi \frac{\left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau\right|}{\sin\frac{\tau}{2}}\,d\tau \geq \int\limits_0^\pi \frac{2\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau}{\tau}\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} \frac{2|\sin\xi|}{\xi}\,d\xi \geq \int\limits_1^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} \frac{2\sin^2\xi}{\xi}\,d\xi =$$

$$= \int\limits_1^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} \frac{1-\cos(2\xi)}{\xi}\,d\xi \sim \ln N \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\|_{CP} \geq \varliminf_{N\to\infty} \|S_N\|_{CP} = +\infty.$$

Получили противоречие. Таким образом, доказано, что система S не является базисом в пространстве $CP[-\pi, \pi]$. Отсюда, в частности, следует, что существует функция $x_0 \in CP[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой не сходится к ней равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Определение 3.4.11. *Пусть (X, τ_1) и (Y, τ_2) — топологические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется открытым, если для любого τ_1-открытого множества V его образ $f(V)$ является τ_2-открытым.*

Утверждение 3.4.5. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A\colon X \to$ $\to Y$ является открытым отображением тогда и только тогда, когда существует положительное число δ_0, такое, что $O^Y_{\delta_0}(0) \subset A\left(O^X_1(0)\right)$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Если линейный оператор A является открытым отображением, то образ открытого шара $O_1^X(0) \subset X$ под действием оператора A является открытым в пространстве Y множеством. Так как $0 = A(0) \in A\left(O_1^X(0)\right)$ — открытое множество, то существует $\delta_0 > 0$, такое, что

$$O_{\delta_0}^Y(0) \subset A\left(O_1^X(0)\right).$$

Докажем достаточность. Рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset X$ и вектор $y \in A(V)$. Тогда существует вектор $x \in V$, такой, что $y = A(x)$. В силу открытости множества V существует число $\varepsilon > 0$, такое, что $O_\varepsilon^X(x) = x + \varepsilon O_1^X(0) \subset V$. Следовательно, справедливо включение

$$A(V) \supset A(x) + \varepsilon A\left(O_1^X(0)\right) \supset y + \varepsilon O_{\delta_0}^Y(0) = O_{\varepsilon\delta_0}^Y(y),$$

что означает открытость множества $A(V)$.

Теорема 3.4.5 (*Банах, об открытом отображении*). *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — полные линейные нормированные пространства, а линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ является сюръективным (т. е. $A(X) = Y$). Тогда оператор A является открытым отображением.*

Доказательство. Так как справедливы равенства

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(O_n^X(0)\right) = X$$

и $A(X) = Y$, то получаем

$$Y = A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n^X(0)\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(nA\left(O_1^X(0)\right)\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\left[A\left(O_1^X(0)\right)\right] \subset Y.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\left[A\left(O_1^X(0)\right)\right].$$

Таким образом, полное пространство Y представлено в виде счётного объединения замкнутых множеств. Тогда по теореме 1.4.2 Бэра одно из этих замкнутых множеств имеет непустую внутренность. Следовательно, существует номер n_0, положительное число δ_0 и вектор $u_0 \in Y$, такой, что выполнено включение $O^Y_{\delta_0}(u_0) \subset n_0 \left[A\left(O^X_1(0)\right)\right]$. Пусть $r_0 = \frac{\delta_0}{n_0}$ и $v_0 = \frac{u_0}{n_0}$, тогда получаем $O^Y_{r_0}(v_0) \subset \left[A\left(O^X_1(0)\right)\right]$. Отсюда следует, что

$$O^Y_{r_0}(-v_0) = -O^Y_{r_0}(v_0) \subset -\left[A\left(O^X_1(0)\right)\right] = \\ = \left[A\left(-O^X_1(0)\right)\right] = \left[A\left(O^X_1(0)\right)\right].$$

Следовательно, в силу замечания 3.1.3 находим

$$O^Y_{r_0}(0) = \tfrac{1}{2}O^Y_{r_0}(v_0) + \tfrac{1}{2}O_{r_0}(-v_0) \subset \tfrac{1}{2}\left[A\left(O^X_1(0)\right)\right] + \tfrac{1}{2}\left[A\left(O^X_1(0)\right)\right].$$

Так как по замечанию 3.1.5 выполнено равенство

$$\frac{1}{2}\left[A\left(O^X_1(0)\right)\right] = \left[\frac{1}{2}A\left(O^X_1(0)\right)\right] = \left[A\left(O^X_{\frac{1}{2}}(0)\right)\right]$$

и справедливо включение

$$\left[A\left(O^X_{\frac{1}{2}}(0)\right)\right] + \left[A\left(O^X_{\frac{1}{2}}(0)\right)\right] \subset \\ \subset \left[A\left(O^X_{\frac{1}{2}}(0)\right) + A\left(O^X_{\frac{1}{2}}(0)\right)\right] = \left[A\left(O^X_1(0)\right)\right],$$

то окончательно получаем включение $O^Y_{r_0}(0) \subset \left[A\left(O^X_1(0)\right)\right]$. Следовательно, для любого положительного числа ε выполнено включение $O^Y_{\varepsilon r_0}(0) \subset \left[A\left(O^X_\varepsilon(0)\right)\right]$.

Покажем, что выполнено включение $\left[A\left(O^X_1(0)\right)\right] \subset A\left(O^X_3(0)\right)$. Рассмотрим произвольный вектор $y_1 \in \left[A\left(O^X_1(0)\right)\right]$. Обозначим для любого номера n число $\varepsilon_n = 2^{1-n}$. Тогда выполнено включение

$$y_1 \in \left[A\left(O^X_{\varepsilon_1}(0)\right)\right].$$

Предположим, рассуждая по индукции, что определён вектор

$$y_n \in \left[A\left(O^X_{\varepsilon_n}(0)\right)\right].$$

Тогда справедливо соотношение

$$\varnothing \neq \left(y_n - O^Y_{r_0\varepsilon_{n+1}}(0)\right) \cap A\left(O^X_{\varepsilon_n}(0)\right) \subset$$
$$\subset \left(y_n - \left[A\left(O^X_{\varepsilon_{n+1}}(0)\right)\right]\right) \cap A\left(O^X_{\varepsilon_n}(0)\right).$$

Следовательно, существуют вектор $y_{n+1} \in \left[A\left(O^X_{\varepsilon_{n+1}}(0)\right)\right]$ и вектор $x_n \in O^X_{\varepsilon_n}(0)$, такие, что выполнено равенство $y_n - y_{n+1} = A(x_n)$. Для любого номера n определим вектор $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Так как для любых номеров n и m выполнено неравенство

$$\|z_{n+m} - z_n\|_X \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \|x_k\|_X \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{1-k} = 2^{1-n},$$

то последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в полном пространстве X. Следовательно, существует вектор $z_0 \in X$, такой, что $\|z_n - z_0\|_X \to 0$ при $n \to \infty$. При этом выполнено неравенство $\|z_0\|_X \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} = 2 < 3$, т. е. $z_0 \in O^X_3(0)$. Далее для любого номера n выполнено равенство

$$A(z_n) = \sum_{k=1}^{n} A(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - y_{k+1}\right) = y_1 - y_{n+1}.$$

Так как справедливо неравенство

$$\|y_n\|_Y \leq \sup_{\|x\|_X \leq \varepsilon_n} \|A(x)\|_Y \leq \|A\|\varepsilon_n \to 0$$

при $n \to \infty$, то получаем $A(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} A(z_n) = y_1$. Следовательно, $y_1 \in A\left(O^X_3(0)\right)$. Таким образом, имеем соотношения

$$O^Y_{r_0}(0) \subset \left[A\left(O^X_1(0)\right)\right] \subset A\left(O^X_3(0)\right),$$

т. е. для числа $\delta_0 = \frac{r_0}{3}$ выполнено включение $O^Y_{\delta_0}(0) \subset A\left(O^X_1(0)\right)$. Следовательно, в силу утверждения 3.4.5 линейный оператор A является открытым.

Пример 3.4.11. Приведём пример полного линейного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$, неполного линейного пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$ и линейного сюръективного оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, который не является открытым отображением. Рассмотрим те же линейные нормированные пространства, что и в примере 3.4.6, т. е. $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_2)$. Пусть $A\colon X \to Y$ — тождественное отображение, т. е. $Ax = x$ для любого $x \in \ell_1$. Тогда, как показано в примере 3.1.2, для любого $x \in \ell_1$ выполнено неравенство $\|Ax\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2} \leq \leq \|x\|_{\ell_1}$, т. е. $\|A\| \leq 1$ (и даже $\|A\| = 1$, так как для элемента $e_1 \in \ell_1$ вида $e_1(1) = 1$ и $e_1(k) = 0$ для $k > 1$ получаем $1 \geq \|A\| \geq \|A(e_1)\|_2 = = 1$). Таким образом, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Сюръективность тождественного оператора A очевидна. Покажем, что оператор A не является открытым отображением. Рассмотрим образ открытого единичного шара с центром в нуле из пространства X под действием оператора A. Это множество $O = \left\{ x \in \ell_1 \;\middle|\; \|x\|_1 < 1 \right\}$. Покажем, что множество O не является открытым в пространстве Y. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида $y_n(k) = \frac{1}{k}$ для $1 \leq k \leq n$ и $y_n(k) = 0$ при $k > n$. Для любого элемента $x_0 \in O$ и любого положительного числа ε определим $x_{n,\varepsilon} = x_0 + \varepsilon y_n$. Тогда справедливы неравенства

$$\|x_{n,\varepsilon} - x_0\|_2 < \frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{6}} \quad \text{и} \quad \|x_{n,\varepsilon}\|_1 \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \|x_0\|_1 \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, для любого числа $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \frac{\delta\sqrt{6}}{\pi}$, такое, что для любого номера n выполнено включение $x_{n,\varepsilon} \in O_{\delta}^{Y}(x_0)$, но при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\|x_{n,\varepsilon}\|_1 > 1$. Следовательно, $x_{n,\varepsilon} \notin O$. Таким образом, ни одна точка множества O не является внутренней для O в пространстве Y. Таким образом, множество O не является открытым в пространстве Y, что и требовалось.

3.5. Обратимость линейных операторов

Определение 3.5.1. *Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Отображение $A_{\text{пр.}}^{-1}\colon \operatorname{Im} A \to X$ называется правым обратным оператором для оператора A, если для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ выполнено равенство $A\left(A_{\text{пр.}}^{-1}(y)\right) = y$.*

Определение 3.5.2. *Пусть X, Y — линейные пространства, $A: X \to Y$ — линейный оператор. Отображение $A^{-1}_{\text{лев.}}: \operatorname{Im} A \to X$ называется левым обратным оператором для оператора A, если для любого вектора $x \in X$ выполнено равенство $A^{-1}_{\text{лев.}}\Big(A(x)\Big) = x$.*

Замечание 3.5.1. Пусть X, Y — линейные пространства, $A: X \to Y$ — линейный оператор. Тогда правый обратный оператор для оператора A всегда существует, вообще говоря, не является единственным и может быть нелинейным. Действительно, по определению образа оператора A для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ существует вектор $x(y) \in X$, такой, что $A(x(y)) = y$. Следовательно, определив для любого $y \in \operatorname{Im} A$ значение, $A^{-1}_{\text{пр.}}(y) = x(y)$, получим правый обратный оператор для оператора A. Покажем на примере возможную неединственность и нелинейность правого обратного оператора. Рассмотрим линейный оператор $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида $A(x_1, x_2) = x_1$. Тогда $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}$, а два различных оператора $B: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ и $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ вида $B(x_1) = (x_1, 0)$ и $C(x_1) = (x_1, x_1^2)$ являются правыми обратными для оператора A, при этом оператор C является нелинейным.

Замечание 3.5.2. Пусть X, Y — линейные пространства, $A: X \to Y$ — линейный оператор. Тогда правый обратный оператор для оператора A единственен, если и только если для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ существует единственный вектор $x(y) \in X$, такой, что $A(x(y)) = y$, т. е. если оператор A является взаимно однозначным отображением из пространства X на $\operatorname{Im} A$. Это очевидным образом следует из определения правого обратного оператора. При этом взаимная однозначность линейного оператора A равносильна тривиальности его ядра. Действительно, если вектор $x \in \operatorname{Ker} A$, то выполнены равенства $A(x) = 0 = A(0)$. Тогда в силу взаимной однозначности оператора A получаем равенство $x = 0$, т. е. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Обратно, если ядро оператора A тривиально, а для вектора $y \in \operatorname{Im} A$ имеются два вектора $x \in X$ и $z \in X$ вида $y = A(x) = A(z)$, то $A(x - z) = 0$, т. е. $x - z \in \operatorname{Ker} A = \{0\}$. Следовательно, выполнено равенство $x = z$, т. е. оператор A является взаимно однозначным.

Утверждение 3.5.1. *Пусть X, Y — линейные пространства, $A: X \to Y$ — линейный оператор. Тогда левый обратный оператор для оператора A существует тогда и только тогда, когда ядро оператора A тривиально, т. е. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. При этом левый обратный оператор единственен и линеен.*

Доказательство. Пусть оператор A имеет левый обратный оператор $A^{-1}_{\text{лев.}}$. Пусть вектор $x \in \operatorname{Ker} A$. Так как нулевой вектор также принадлежит ядру оператора A, то по определению левого обратного оператора получаем

$$x = A^{-1}_{\text{лев.}}(A(x)) = A^{-1}_{\text{лев.}}(0) = A^{-1}_{\text{лев.}}(A(0)) = 0,$$

т. е. $x = 0$. Таким образом, $\operatorname{Ker} A = 0$. Обратно, пусть ядро оператора A тривиально. Тогда, как следует из замечания 3.5.2, оператор A является взаимно однозначным отображением пространства X на $\operatorname{Im} A$, т. е. для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ существует единственный вектор $x(y) \in X$, такой, что $A(x(y)) = y$. Определим для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ значение $A^{-1}_{\text{лев.}}(y) = x(y)$. Тогда для любого вектора $z \in X$ получаем $A^{-1}_{\text{лев.}}(A(z)) = x(A(z)) = z$ в силу взаимной однозначности оператора A. Таким образом, определённый оператор $A^{-1}_{\text{лев.}}$ действительно является левым обратным для оператора A. Если при этом существует другой оператор $B\colon \operatorname{Im} A \to X$ вида $B(A(x)) = x$ для любого $x \in X$, то для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ получаем $B(y) = B(A(x(y))) = x(y) = A^{-1}_{\text{лев.}}(y)$, т. е. $B = A^{-1}_{\text{лев.}}$. Таким образом, левый обратный оператор единственен. Покажем линейность левого обратного оператора. Для любых векторов $u, v \in \operatorname{Im} A$ и любых скаляров α и β находим

$$\begin{aligned} A^{-1}_{\text{лев.}}(\alpha u + \beta v) &= A^{-1}_{\text{лев.}}\Big(\alpha A(x(u)) + \beta A(x(v))\Big) = \\ &= A^{-1}_{\text{лев.}}\Big(A(\alpha x(u) + \beta x(v))\Big) = \alpha x(u) + \beta x(v) = \\ &= \alpha\, A^{-1}_{\text{лев.}}(u) + \beta\, A^{-1}_{\text{лев.}}(v), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Замечание 3.5.3. Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор с тривиальным ядром. Тогда в силу замечания 3.5.2 и утверждения 3.5.1 оператор A имеет единственный правый и левый обратный операторы, которые совпадают. При этом левый, а значит, и правый обратный оператор линейны.

Определение 3.5.3. *Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Оператор $A^{-1}\colon \operatorname{Im} A \to X$ называется обратным для оператора A, если он является одновременно левым и правым обратным оператором.*

Утверждение 3.5.2. *Пусть X, Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда обратный оператор для оператора A существует тогда и только тогда, когда ядро оператора A тривиально. При этом обратный оператор единственен и линеен.*

Доказательство. Сразу следует из утверждения 3.5.1 и замечаний 3.5.2, 3.5.3.

Определение 3.5.4. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A\colon X \to Y$ называется непрерывно обратимым, если он имеет непрерывный обратный оператор, т. е. существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, X)$.*

Утверждение 3.5.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Тогда линейный оператор $A\colon X \to Y$ является непрерывно обратимым тогда и только тогда, когда он является взаимно однозначным открытым отображением из пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ на пространство $(\operatorname{Im} A, \|\cdot\|_Y)$.*

Доказательство. В силу утверждения 3.5.2 существование линейного обратного оператора A^{-1} у линейного оператора A равносильно взаимной однозначности оператора A. В силу утверждения 1.1.6 непрерывность оператора A^{-1} равносильна тому, что для любого $\|\cdot\|_X$-открытого множества $V \subset X$ его прообраз

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}(V) \subset \operatorname{Im} A$$

под действием оператора A^{-1} является $\|\cdot\|_Y$-открытым в пространстве $\operatorname{Im} A$. Справедливо равенство

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}(V) = \left\{\, y \in \operatorname{Im} A \;\middle|\; A^{-1}(y) \in V \,\right\} = \\ = \left\{\, y \in \operatorname{Im} A \;\middle|\; y \in A(V) \,\right\} = A(V).$$

Следовательно, $\left(A^{-1}\right)^{-1}(V) = A(V)$. Тогда открытость прообраза произвольного открытого множества $V \subset X$ под действием обратного оператора A^{-1} равносильна открытости его образа $A(V) \subset \operatorname{Im} A$ под действием оператора A. Последнее по определению 3.4.11 равносильно открытости отображения $A\colon X \to \operatorname{Im} A$, что и требовалось.

Определение 3.5.5. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A: X \to Y$ называется ограниченным снизу, если существует число $L > 0$, такое, что для любого вектора $x \in X$ выполнено неравенство $\|A(x)\|_Y \geq L\|x\|_X$.*

Утверждение 3.5.4. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A: X \to Y$ является непрерывно обратимым тогда и только тогда, когда он является ограниченным снизу.*

Доказательство. Пусть линейный оператор A является непрерывно обратимым, т. е. существует оператор $A^{-1} \in \mathfrak{L}(\operatorname{Im} A, X)$. Следовательно, для любого вектора $x \in X$ получаем

$$\|x\|_X = \left\|A^{-1}(A(x))\right\|_X \leq \left\|A^{-1}\right\| \|A(x)\|_Y,$$

т. е. число $L = \frac{1}{\|A^{-1}\|} > 0$ является искомым для ограниченности снизу оператора A.

Пусть линейный оператор A является ограниченным снизу, т. е. существует число $L > 0$, такое, что для любого вектора $x \in X$ выполнено неравенство $\|A(x)\|_Y \geq L\|x\|_X$. Если вектор $x \in \operatorname{Ker} A$, то получаем $A(x) = 0$ и $0 = \|A(x)\|_Y \geq L\|x\|_X$. Следовательно, $x = 0$, т. е. справедливо равенство $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Тогда в силу утверждения 3.5.2 линейный обратный оператор $A^{-1}: \operatorname{Im} A \to X$ существует. При этом в силу ограниченности снизу оператора A для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ получаем

$$\left\|A^{-1}(y)\right\|_X \leq \frac{\left\|A\left(A^{-1}(y)\right)\right\|_Y}{L} = \frac{\|y\|_Y}{L}.$$

Последнее неравенство означает, что $\left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{1}{L}$, т. е. справедливо включение $A^{-1} \in \mathfrak{L}(\operatorname{Im} A, X)$, что и требовалось.

Утверждение 3.5.5. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейное нормированное пространство, оператор $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$ является непрерывно обратимым. Тогда $\operatorname{Im} A$ является замкнутым подпространством в Y.*

Доказательство. В силу утверждения 3.5.4 оператор A является ограниченным снизу, т. е. существует число $L > 0$, такое, что

$\|A(x)\|_Y \geq L\|x\|_X$ для любого $x \in X$. Пусть вектор $y \in [\operatorname{Im} A]$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, такая, что выполнено соотношение $\|A(x_n) - y\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, получаем $\|x_n - x_m\|_X \leq \frac{1}{L}\|A(x_n) - A(x_m)\|_Y \to 0$ при $n, m \to \infty$. Таким образом, последовательность x_n является фундаментальной в полном пространстве X. Поэтому существует вектор $z \in X$, такой, что $\|x_n - z\|_X \to 0$ при $n \to \infty$. Так как оператор A является непрерывным, то $\|A(x_n) - A(z)\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, получаем $\|A(z) - y\|_Y = 0$, т. е. $y = A(z)$, что означает включение $y \in \operatorname{Im} A$. Таким образом, подпространство $\operatorname{Im} A$ является замкнутым.

Теорема 3.5.1 (*Банах, об обратном операторе*). *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банаховы пространства, а линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A = 0$ и $\operatorname{Im} A = Y$.*

Доказательство. Если существует обратный оператор A^{-1}, определённый на всём пространстве Y, то по определению обратного оператора сразу получаем равенство $\operatorname{Im} A = Y$, а по утверждению 3.5.2 находим $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Пусть теперь у линейного ограниченного оператора A имеем равенства $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $\operatorname{Im} A = Y$. Тогда по теореме 3.4.5 Банаха об открытом отображении оператор A является открытым отображением из пространства X на пространство Y. Следовательно, в силу утверждения 3.5.3 оператор A непрерывно обратим, т. е. существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, что и требовалось.

Пример 3.5.1. Приведём пример полного линейного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$, неполного линейного пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$ и линейного сюръективного оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ с тривиальным ядром, обратный оператор к которому не является непрерывным. Рассмотрим те же линейные нормированные пространства и тот же линейный оператор, что и в примере 3.4.11, т. е. $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_2)$, $A\colon X \to Y$ — тождественный оператор. Очевидно, что $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $\operatorname{Im} A = \ell_1 = Y$. Следовательно, обратный оператор $A^{-1}\colon Y \to X$ существует и тоже является тождественным, т. е. $A^{-1}(y) = y$ для любого $y \in \ell_1$. Как показано в примере 3.4.11, оператор A является непрерывным и не является открытым отображением. Следовательно, в силу утверждения 3.5.3 оператор A^{-1} не является непрерывным, т. е. $A^{-1} \notin \mathcal{L}(Y, X)$.

З а д а ч а 3.5.1. Пусть X — линейное пространство, а $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_{**}$ — две нормы в X. Пусть пространства $(X, \|\cdot\|_*)$ и $(X, \|\cdot\|_{**})$ являются полными, и существует число $L > 0$, такое, что $\|x\|_* \leq \leq L\|x\|_{**}$ для всех $x \in X$. Доказать, что нормы $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_{**}$ эквивалентны в X.

Р е ш е н и е. Рассмотрим тождественный оператор

$$I\colon (X, \|\cdot\|_{**}) \to (X, \|\cdot\|_*)\,.$$

Так как для любого $x \in X$ выполнено $\|I(x)\|_* = \|x\|_* \leq L\|x\|_{**}$, то получаем неравенство $\|I\| \leq L$. Следовательно, тождественный оператор I является непрерывным. По определению оператора I очевидно, что выполнены равенства $\operatorname{Ker} I = \{0\}$ и $\operatorname{Im} I = X$. По теореме 3.5.1 Банаха об обратном операторе оператор $I^{-1}\colon (X, \|\cdot\|_*) \to \to (X, \|\cdot\|_{**})$ является непрерывным. Тогда получаем соотношения $\|I^{-1}(x)\|_{**} = \|x\|_{**} \leq \|I^{-1}\|\,\|x\|_*$ для любого $x \in X$. Таким образом, существуют числа $L > 0$ и $C = \frac{1}{\|I^{-1}\|} > 0$, такие, что для всех $x \in X$ справедливы неравенства

$$C\|x\|_{**} \leq \|x\|_* \leq L\|x\|_{**},$$

т. е. нормы $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_{**}$ эквивалентны в X.

Глава 4

Мера и интеграл Лебега

4.1. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрение теории меры и интеграла Лебега проводится по книге [4, гл. 10].

Определение 4.1.1. *Семейство множеств $\mathcal{R}$ называется кольцом, если для любых множеств $A \in \mathcal{R}$ и $B \in \mathcal{R}$ выполнены включения $A \cup B \in \mathcal{R}$ и $A \backslash B \in \mathcal{R}$. Кольцо $\mathcal{R}$ называется σ-кольцом, если дополнительно для любой последовательности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \subset \mathcal{R}$ выполнено включение $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$.*

Замечание 4.1.1. Если $\mathcal{R}$ — кольцо, то $\varnothing \in \mathcal{R}$, так как для любого множества $A \in \mathcal{R}$ по определению 4.1.1 получаем $\varnothing = A \backslash A \in \in \mathcal{R}$.

Замечание 4.1.2. Если $\mathcal{R}$ — кольцо, а конечная совокупность множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M} \subset \mathcal{R}$, то справедливо включение $\bigcup\limits_{m=1}^{M} A_m \in \mathcal{R}$.

Доказательство проведём индукцией по номеру M. Для $M = 1$ включение очевидно. Если включение выполнено для некоторого номера M, то для совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M+1} \subset \mathcal{R}$ получаем $B = \bigcup\limits_{m=1}^{M} A_m \in \mathcal{R}$ по предположению индукции и $\bigcup\limits_{m=1}^{M+1} A_m = B \cup \cup A_{M+1} \in \mathcal{R}$ по определению 4.1.1 кольца $\mathcal{R}$.

Замечание 4.1.3. Если $\mathcal{R}$ — кольцо, множества $A, B \in \mathcal{R}$, то $A \cap B = A \backslash (A \backslash B) \in \mathcal{R}$. Если $\mathcal{R}$ — σ-кольцо, а последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$, то $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m = A_1 \Big\backslash \left(\bigcup\limits_{m=2}^{\infty} (A_1 \backslash A_m) \right) \in \mathcal{R}$.

Определение 4.1.2. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо. Функция*

$$\varphi\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

называется конечно-аддитивной, если для любых множеств $A, B \in \in \mathcal{R}$ вида $A \cap B = \varnothing$ справедливо равенство $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

Функция φ называется счётно-аддитивной, если для любой последовательности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$, такой, что $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$, а $A_m \cap A_k = \varnothing$ при всех $m \neq k$, справедливо равенство $\varphi(A) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m)$.

З а м е ч а н и е 4.1.4. В определении 4.1.2 сумма ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m)$ не зависит от порядка слагаемых в силу знакопостоянных (неотрицательных) значений функции φ.

З а м е ч а н и е 4.1.5. Если неотрицательная функция φ является конечно-аддитивной на кольце $\mathcal{R}$, то для любой конечной совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M} \subset \mathcal{R}$ вида $A_m \cap A_k = \varnothing$ для всех $m \neq k$ выполнено равенство $\varphi\left(\bigcup\limits_{m=1}^{M} A_m\right) = \sum\limits_{m=1}^{M} \varphi(A_m)$.

Доказательство проведём индукцией по номеру M. Для $M = 1$ равенство очевидно. Если равенство выполнено для некоторого номера M, то для совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M+1} \subset \mathcal{R}$ вида $A_m \cap A_k = \varnothing$ для всех $m \neq k$ получаем $B = \bigcup\limits_{m=1}^{M} A_m \in \mathcal{R}$ по замечанию 4.1.2, $\varphi(B) = \sum\limits_{m=1}^{M} \varphi(A_m)$ по предположению индукции, и выполнено $B \cap A_{M+1} = \varnothing$. Следовательно, получаем

$$\varphi\left(\bigcup_{m=1}^{M+1} A_m\right) = \varphi(B \cup A_{M+1}) = \varphi(B) + \varphi(A_{M+1}) = \sum_{m=1}^{M+1} \varphi(A_m),$$

что и требовалось.

З а м е ч а н и е 4.1.6. Если неотрицательная функция φ является счётно-аддитивной на кольце $\mathcal{R}$, то она является и конечно-аддитивной.

Действительно, если для любого множества $A \in \mathcal{R}$ выполнено $\varphi(A) = +\infty$, то утверждение очевидно. Пусть существует множество $A_0 \in \mathcal{R}$, такое, что $\varphi(A_0) < +\infty$. Определим последовательность множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$ вида $A_1 = A_0$, $A_m = \varnothing$ для $m > 1$. Тогда $A_0 = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ и $A_m \cap A_k = \varnothing$ при всех $m \neq k$. Следовательно, в силу счётной аддитивности φ получаем

$$\varphi(A_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m) = \varphi(A_0) + \sum_{m=2}^{\infty} \varphi(\varnothing).$$

Так как по условию $\varphi(A_0) < +\infty$, то $\sum\limits_{m=2}^{\infty} \varphi(\varnothing) = 0$, т. е. $\varphi(\varnothing) = 0$. Следовательно, для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$, таких, что $A \cap B =$ $= \varnothing$, рассмотрев последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$ вида $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_m = \varnothing$ при $m > 2$, получим $A \cup B = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, $A_m \cap A_k = \varnothing$ при всех $m \neq k$, т. е.

$$\varphi(A \cup B) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m) = \varphi(A) + \varphi(B) + \sum_{m=3}^{\infty} \varphi(\varnothing) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

что и требовалось.

Утверждение 4.1.1. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо, а функция*

$$\varphi : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

является конечно-аддитивной. Тогда

1) *для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$ выполнено*

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B);$$

2) *для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$ вида $A \subset B$ выполнено*

$$\varphi(A) \leq \varphi(B);$$

3) *если существует множество $A_0 \in \mathcal{R}$ вида $\varphi(A_0) < +\infty$, то $\varphi(\varnothing) = 0$;*

4) *для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$ вида $A \subset B$ и $\varphi(A) < +\infty$ выполнено*

$$\varphi(B \backslash A) = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Доказательство. Так как для любых множеств $A, B \in \mathcal{R}$ справедливо представление $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$ в виде объединения трёх попарно непересекающихся элементов кольца $\mathcal{R}$, то по замечанию 4.1.5 получаем

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A \backslash B) + \varphi(B \backslash A) + \varphi(A \cap B).$$

Следовательно,

$$\varphi(A\cup B)+\varphi(A\cap B)=\Big(\varphi(A\backslash B)+\varphi(A\cap B)\Big)+\Big(\varphi(B\backslash A)+\varphi(A\cap B)\Big).$$

Так как $A=(A\backslash B)\cup(A\cap B)$ и $(A\backslash B)\cap(A\cap B)=\varnothing$, то

$$\varphi(A\backslash B)+\varphi(A\cap B)=\varphi(A).$$

Так как $B=(B\backslash A)\cup(A\cap B)$ и $(B\backslash A)\cap(A\cap B)=\varnothing$, то

$$\varphi(B\backslash A)+\varphi(A\cap B)=\varphi(B).$$

Следовательно, $\varphi(A\cup B)+\varphi(A\cap B)=\varphi(A)+\varphi(B)$, т. е. свойство 1 доказано.

Если $A, B\in\mathcal{R}$ и $A\subset B$, то $B=A\cup(B\backslash A)$ и $A\cap(B\backslash A)=\varnothing$. Следовательно, получаем $\varphi(B)=\varphi(A)+\varphi(B\backslash A)\geq\varphi(A)$, т. е. свойство 2 доказано. Если при этом $\varphi(A)<+\infty$, то получаем $\varphi(B\backslash A)=\varphi(B)-\varphi(A)$, т. е. свойство 4 доказано.

Так как $\varnothing\in\mathcal{R}$, то $\varphi(A)=\varphi(A\cup\varnothing)=\varphi(A)+\varphi(\varnothing)$. Если существует множество $A_0\in\mathcal{R}$ вида $\varphi(A_0)<+\infty$, то для $A=A_0$ получаем $\varphi(\varnothing)=\varphi(A_0)-\varphi(A_0)=0$, т. е. свойство 3 доказано.

Следствие 4.1.1. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо, а функция $\varphi\colon\mathcal{R}\to[0,+\infty]$ является конечно-аддитивной. Тогда для любой конечной совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M}\subset\mathcal{R}$ справедливо неравенство $\varphi\left(\bigcup\limits_{m=1}^{M}A_m\right)\leq\sum\limits_{m=1}^{M}\varphi(A_m)$.*

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по номеру M. Для $M=1$ неравенство обращается в равенство. Если неравенство выполнено для некоторого номера M, то для совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{M+1}\subset\mathcal{R}$ определим множество $B=\bigcup\limits_{m=1}^{M}A_m\in\mathcal{R}$ и по свойству 1 утверждения 4.1.1 и в силу предположения индукции получим $\varphi\left(\bigcup\limits_{m=1}^{M+1}A_m\right)=\varphi(B\cup A_{M+1})\leq\varphi(B\cup A_{M+1})+\varphi(B\cap A_{M+1})=\varphi(B)+\varphi(A_{M+1})\leq\sum\limits_{m=1}^{M}\varphi(A_m)+\varphi(A_{M+1})$, что и требовалось.

Утверждение 4.1.2. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо, функция $\varphi\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ является счётно-аддитивной. Тогда для любой неубывающей по вложению последовательности $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$, т. е. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, для которой множество $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$, справедливо равенство $\varphi(A) = \lim\limits_{m\to\infty} \varphi(A_m)$.*

Доказательство. Для любого номера m определим множество $B_m \in \mathcal{R}$ вида $B_1 = A_1$ и $B_m = A_m \backslash A_{m-1}$ для $m \geq 2$. Тогда $B_m \cap B_k = \varnothing$ для всех $m \neq k$ и справедливы равенства $A_m = \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k$ для всех m и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Следовательно, в силу счётной аддитивности функции φ получаем $\varphi(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi(B_k) = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi(B_k) = \lim\limits_{m\to\infty} \varphi(A_m)$, что и требовалось.

Следствие 4.1.2. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо, а функция $\varphi\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ является счётно-аддитивной. Тогда для любой счётной совокупности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$, такой, что $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$, справедливо неравенство $\varphi(A) \leq \sum\limits_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m)$.*

Доказательство. Для любого номера m определим множество $B_m = \bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k \in \mathcal{R}$. По следствию 4.1.1 имеем неравенство

$$\varphi(B_m) \leq \sum_{k=1}^{m} \varphi(A_k).$$

Имеем также $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A$. Следовательно, в силу утверждения 4.1.2 получаем

$$\varphi(A) = \lim_{m\to\infty} \varphi(B_m) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \varphi(A_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k),$$

что и требовалось.

О п р е д е л е н и е 4.1.3. *Для произвольных чисел* $a_1, \ldots, a_n$ *и* $b_1, \ldots, b_n$, *где* $a_k \le b_k$ *при всех* $k \in \overline{1,n}$, *множество*

$$\varPi = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \forall\, k \in \overline{1,n} \quad \begin{array}{l} a_k \le x_k \le b_k, \text{ или} \\ a_k \le x_k < b_k, \text{ или} \\ a_k < x_k \le b_k, \text{ или} \\ a_k < x_k < b_k \end{array} \right\}$$

назовём клеткой в $\mathbb{R}^n$. *Множество в* $\mathbb{R}^n$, *представляющее собой конечное объединение клеток, назовём клеточным или элементарным. Совокупность всех клеточных множеств обозначим* $\mathcal{E}$.

У т в е р ж д е н и е 4.1.3. *Совокупность всех клеточных множеств* $\mathcal{E}$ *является кольцом в* $\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как каждое клеточное множество является конечным объединением клеток, то конечное объединение клеточных множеств также представляет собой конечное объединение клеток, т. е. само является клеточным. Рассмотрим два клеточных множества A и B. Существуют клетки $\varPi_1, \ldots, \varPi_M$ и $\tilde{\varPi}_1, \ldots, \tilde{\varPi}_N$, такие, что $A = \bigcup\limits_{m=1}^{M} \varPi_m$ и $B = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \tilde{\varPi}_k$. Тогда имеем равенство

$$A \cap B = \bigcup_{m=1}^{M} \bigcup_{k=1}^{N} \left(\varPi_m \cap \tilde{\varPi}_k \right).$$

Так как пересечение двух клеток является клеткой, то получаем, что $A \cap B \in \mathcal{E}$. Следовательно, пересечение двух клеточных множеств само является клеточным. Отсюда по индукции легко показать, что конечное пересечение клеточных множеств является клеточным. Так как теоретико-множественная разность двух клеток является клеточным множеством, то $A \backslash B = \bigcup\limits_{m=1}^{M} \bigcap\limits_{k=1}^{N} \left(\varPi_m \backslash \tilde{\varPi}_k \right)$ является клеточным как конечное объединение и пересечение клеточных множеств. Следовательно, по определению 4.1.1 семейство $\mathcal{E}$ является кольцом.

О п р е д е л е н и е 4.1.4. *Разбиением клеточного множества* A *назовём конечную совокупность попарно непересекающихся клеток, объединение которых равно* A.

Замечание 4.1.7. Любое клеточное множество имеет разбиение, причём это разбиение неединственно.

Определение 4.1.5. *Пусть $\mathit{\Pi}$ — клетка, отвечающая числам $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$, где $a_k \leq b_k$ при всех $k \in \overline{1,n}$, в соответствии с определением 4.1.3. Мерой клетки $\mathit{\Pi}$ называется число $\mu(\mathit{\Pi}) = \prod\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$. Мерой клеточного множества A, имеющего разбиение $\{\mathit{\Pi}_m\}_{m=1}^{M}$, т. е. $A = \bigcup\limits_{m=1}^{M} \mathit{\Pi}_m$ и $\mathit{\Pi}_m \cap \mathit{\Pi}_k = \varnothing$ при всех $m \neq k$, называется число $\mu(A) = \sum\limits_{m=1}^{M} \mu(\mathit{\Pi}_m)$.*

Утверждение 4.1.4. *Определение меры клеточного множества не зависит от выбора его разбиения.*

Доказательство. Для $A \in \mathcal{E}$ рассмотрим два его разбиения $\{\mathit{\Pi}_m\}_{m=1}^{M}$ и $\left\{\tilde{\mathit{\Pi}}_k\right\}_{k=1}^{N}$. Для любых $m \in \overline{1,M}$ и $k \in \overline{1,N}$ определим клетку $\hat{\mathit{\Pi}}_{m,k} = \mathit{\Pi}_m \cap \tilde{\mathit{\Pi}}_k$. Ясно, что совокупность клеток $\left\{\hat{\mathit{\Pi}}_{m,k}\right\}_{\substack{m=\overline{1,M}\\ k=\overline{1,N}}}$ образует разбиение множества A. Для любого $m \in \overline{1,M}$ имеем $\mathit{\Pi}_m = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \hat{\mathit{\Pi}}_{m,k}$ и $\mu(\mathit{\Pi}_m) = \sum\limits_{k=1}^{N} \mu\left(\hat{\mathit{\Pi}}_{m,k}\right)$, также для любого $k \in \overline{1,K}$ имеем $\tilde{\mathit{\Pi}}_k = \bigcup\limits_{m=1}^{M} \hat{\mathit{\Pi}}_{m,k}$ и $\mu\left(\tilde{\mathit{\Pi}}_k\right) = \sum\limits_{m=1}^{M} \mu\left(\hat{\mathit{\Pi}}_{m,k}\right)$. Следовательно, получаем $\mu(A) = \sum\limits_{m=1}^{M} \mu(\mathit{\Pi}_m) = \sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{k=1}^{N} \mu\left(\hat{\mathit{\Pi}}_{m,k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{N} \mu\left(\tilde{\mathit{\Pi}}_k\right)$, что и требовалось.

Утверждение 4.1.5. *Определённая мера $\mu\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ является конечно-аддитивной.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \cap B = \varnothing$. Пусть $\mathcal{P} = \{\mathit{\Pi}_m\}_{m=1}^{M}$ — разбиение множества A, а $\tilde{\mathcal{P}} = \left\{\tilde{\mathit{\Pi}}_k\right\}_{k=1}^{N}$ — разбиение множества B. Тогда в силу $A \cap B = \varnothing$ объединение этих разбиений $\mathcal{P} \cup \tilde{\mathcal{P}}$ является разбиением множества $A \cup B$. Следовательно, получаем равенство $\mu(A \cup B) = \sum\limits_{m=1}^{M} \mu(\mathit{\Pi}_m) + \sum\limits_{k=1}^{N} \mu\left(\tilde{\mathit{\Pi}}_k\right) = \mu(A) + \mu(B)$, что и требовалось.

О п р е д е л е н и е 4.1.6. *Мера* $\mu: \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ *называется регулярной, если для любого множества* $A \in \mathcal{E}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует замкнутое множество* $F_\varepsilon \in \mathcal{E}$ *и открытое множество* $G_\varepsilon \in \mathcal{E}$*, такие, что* $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$ *и* $\mu(A \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon$, $\mu(G_\varepsilon \backslash A) < \varepsilon$.

З а м е ч а н и е 4.1.8. Для конечно-аддитивной меры

$$\mu: \mathcal{E} \to [0, +\infty),$$

принимающей только конечные неотрицательные значения, свойство регулярности в силу свойства 4 утверждения 4.1.1 эквивалентно для множеств $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$ неравенствам $\mu(A) < \mu(F_\varepsilon) + \varepsilon$, $\mu(G_\varepsilon) < < \mu(A) + \varepsilon$.

У т в е р ж д е н и е 4.1.6. *Определённая мера* $\mu: \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ *является регулярной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала проверим определение регулярности меры μ для произвольной клетки Π, отвечающей числам

$$a_1, \ldots, a_n \quad \text{и} \quad b_1, \ldots, b_n,$$

где $a_k \leq b_k$ при всех $k \in \overline{1, n}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для произвольного числа $\delta > 0$ определим открытую клетку

$$G(\delta) = \left\{ \, x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_k - \delta < x_k < b_k + \delta \quad \forall\, k \in \overline{1, n} \, \right\}.$$

Тогда справедливы включение $\Pi \subset G(\delta)$ и соотношение

$$\mu(G(\delta)) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k + 2\delta) = \mu(\Pi) + O(\delta) < \mu(\Pi) + \varepsilon$$

при достаточно малом $\delta = \delta(\varepsilon)$. Если $\mu(\Pi) = 0$, то для замкнутого множества $F = \varnothing \in \mathcal{R}$ получаем включение $F \subset \Pi$ и неравенство $\mu(\Pi) < \mu(F) + \varepsilon = \varepsilon$. Если же $\mu(\Pi) > 0$, то $a_k < b_k$ для всех $k \in \in \overline{1, n}$. Для любого положительного числа $\delta < \min\limits_{1 \leq k \leq n} \frac{b_k - a_k}{2}$ определим замкнутую клетку

$$F(\delta) = \left\{ \, x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_k + \delta \leq x_k \leq b_k - \delta \quad \forall\, k \in \overline{1, n} \, \right\}.$$

Тогда справедливы включение $F(\delta) \subset \Pi$ и соотношение

$$\mu(F(\delta)) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k - 2\delta) = \mu(\Pi) + O(\delta) > \mu(\Pi) - \varepsilon$$

при достаточно малом $\delta = \delta(\varepsilon)$. Таким образом, доказана регулярность меры μ для произвольной клетки Π. Теперь рассмотрим произвольное множество $A \in \mathcal{E}$. Пусть конечная совокупность клеток $\{\Pi_m\}_{m=1}^{M}$ образует разбиение множества A, т. е. $A = \bigcup\limits_{m=1}^{M} \Pi_m$ и $\Pi_m \cap \cap \Pi_k = \varnothing$ при $m \neq k$. Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$. Как показано выше, для каждой клетки Π_m существует замкнутая клетка F_m и открытая клетка G_m, такие, что справедливы включения $F_m \subset \Pi_m \subset G_m$ и неравенства $\mu(\Pi_m) < \mu(F_m) + \frac{\varepsilon}{M}$ и $\mu(G_m) < < \mu(\Pi_m) + \frac{\varepsilon}{M}$. Определим клеточные множества $F = \bigcup\limits_{m=1}^{M} F_m$ и $G = = \bigcup\limits_{m=1}^{M} G_m$. Множество F является замкнутым как конечное объединение замкнутых множеств, а множество G является открытым как объединение открытых множеств. Так как при $m \neq k$ выполнено $\Pi_m \cap \Pi_k = \varnothing$, то и $F_m \cap F_k = \varnothing$. Следовательно, $\mu(F) = \sum\limits_{m=1}^{M} \mu(F_m)$. По построению справедливы включения $F \subset A \subset G$. Наконец, применяя следствие 4.1.1, получаем

$$\mu(G) \leq \sum_{m=1}^{M} \mu(G_m) < \sum_{m=1}^{M} \mu(\Pi_m) + \varepsilon = \mu(A) + \varepsilon,$$

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{M} \mu(\Pi_m) < \sum_{m=1}^{M} \mu(F_m) + \varepsilon = \mu(F) + \varepsilon,$$

что и требовалось.

Всюду далее считаем, что нам задано некоторое кольцо $\mathcal{E}$ элементарных множеств, содержащее только ограниченные подмножества $\mathbb{R}^n$, в котором существует последовательность открытых множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, образующих покрытие $\mathbb{R}^n$, т. е. $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, и задана регулярная конечно-аддитивная функция $\mu\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty)$. Если нам понадобится конкретный вид кольца $\mathcal{E}$, как, например, введённое выше кольцо клеточных множеств, и явный вид функции μ, как, например, введённая выше мера клеточного множества, то это будет специально оговорено. Нашей целью является продолжение функции μ с кольца элементарных множеств $\mathcal{E}$ до счётно-аддитивной регулярной функции на некотором σ-кольце, содержащем кольцо $\mathcal{E}$.

Приводимая ниже конструкция продолжения меры с кольца на содержащее его σ-кольцо называется лебеговым продолжением меры.

Определение 4.1.7. *Верхней мерой произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется величина $\mu^*(E) = \inf \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$, где нижняя грань берётся по всевозможным счётным открытым покрытиям $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ множества E, т. е. $E \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, а множество $A_m \in \mathcal{E}$ открыто для любого номера m.*

Ясно, что для любого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ для его верхней меры выполнено $\mu^*(E) \in [0, +\infty]$, причём для множеств $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$, так как всякое открытое покрытие элементарными множествами множества E_2 является и покрытием множества E_1.

Утверждение 4.1.7. *Для любого множества $A \in \mathcal{E}$ справедливо равенство $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

Доказательство. Так как функция μ является регулярной, то по определению 4.1.6 для данного множества $A \in \mathcal{E}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G \in \mathcal{E}$, такое, что $A \subset G$ и $\mu(G) < \mu(A) + \varepsilon$. По определению 4.1.7 верхней меры множества A выполнено неравенство $\mu^*(A) \leq \mu(G)$. Получаем $\mu^*(A) < \mu(A) + \varepsilon$, и после предельного перехода при $\varepsilon \to +0$ имеем неравенство $\mu^*(A) \leq \leq \mu(A)$. В силу регулярности функции μ для множества $A \in \mathcal{E}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \in \mathcal{E}$, такое, что $F \subset A$ и $\mu(A) < \mu(F) + \varepsilon$. Рассмотрим произвольное счётное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ множества A. Так как $F \subset A$, то $\mathcal{P}$ является открытым покрытием множества F. Так как множество F замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^n$ (напомним, что кольцо $\mathcal{E}$ содержит только ограниченные множества $\mathbb{R}^n$), то F является компактом в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, открытое покрытие $\mathcal{P}$ компакта F имеет конечное подпокрытие $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{N}$, т. е. $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} A_{m_k}$. По свойству полуаддитивности конечно-аддитивной функции μ (см. следствие 4.1.1) получаем $\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{N} A_{m_k}\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{N} \mu(A_{m_k}) \leq \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$. Переходя в последнем неравенстве к точной нижней грани по всевозможным счётным покрытиям множества A открытыми элементарными множествами, получаем неравенство $\mu(F) \le \mu^*(A)$. Таким образом, $\mu(A) \le \mu^*(A) + \varepsilon$, и после предельного перехода при $\varepsilon \to +0$ имеем неравенство $\mu(A) \le \mu^*(A)$. Следовательно, $\mu(A) = \mu^*(A)$, что и требовалось.

Утверждение 4.1.8. *Верхняя мера μ^* является полуаддитивной на множестве всех подмножеств $\mathbb{R}^n$, т. е. для любой последовательности множеств $\{E_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\mu^*\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m\right) \le \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m)$.*

Доказательство. Если существует номер m_0, такой, что $\mu^*(E_{m_0}) = +\infty$, то доказываемое неравенство очевидно. Предположим, что для любого номера m выполнено $\mu^*(E_m) < +\infty$. Тогда по определению верхней меры для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого номера m существует счётное покрытие множества E_m открытыми элементарными множествами $\{A_{m,k}\}_{k=1}^{\infty}$, такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{m,k}) \le \mu^*(E_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Тогда открытые элементарные множества $\{A_{m,k}\}_{m,k=1}^{\infty}$ образуют покрытие множества $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Следовательно,

$$\mu^*\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) \le \sum_{m,k=1}^{\infty} \mu(A_{m,k}) \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m) + \varepsilon,$$

откуда предельным переходом при $\varepsilon \to +0$ получаем требуемое неравенство.

Определение 4.1.8. *Симметрической разностью двух множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.*

Замечание 4.1.9. Так как для любых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $A \backslash B = B^c \backslash A^c$ (здесь $A^c = \mathbb{R}^n \backslash A$ — дополнение множества A), то $A \triangle B = A^c \triangle B^c$.

Утверждение 4.1.9. *Симметрическая разность множеств из $\mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:*

1) $A \triangle B = B \triangle A$ *и* $A \triangle A = \varnothing$ *для любых множеств* $A, B \subset \mathbb{R}^n$*;*

2) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$ *для любых множеств* $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$*;*

3) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ *для любых множеств* $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$*;*

4) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ *для любых множеств* $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$*;*

5) $(A_1 \backslash A_2) \triangle (B_1 \backslash B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ *для любых множеств* $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$*.*

Доказательство. Свойство 1 сразу следует из определения 4.1.8. Свойство 2 следует из включений

$$A \backslash B \subset (A \backslash C) \cup (C \backslash B) \quad \text{и} \quad B \backslash A \subset (B \backslash C) \cup (C \backslash A)\,, \quad \text{т. е.}$$

$$A \triangle B \subset (A \backslash C) \cup (C \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A) = (A \triangle C) \cup (B \triangle C)\,.$$

Свойство 3 следует из включений

$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \backslash B_1) \cup (A_2 \backslash B_2)\,,$$

$$(B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2) \subset (B_1 \backslash A_1) \cup (B_2 \backslash A_2)\,, \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) &\subset \\ &\subset (A_1 \backslash B_1) \cup (A_2 \backslash B_2) \cup (B_1 \backslash A_1) \cup (B_2 \backslash A_2) = \\ &= (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)\,.\end{aligned}$$

Далее, используя доказанное свойство 3 и замечание 4.1.9, получаем

$$\begin{aligned}(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) &= (A_1 \cap A_2)^c \triangle (B_1 \cap B_2)^c = \\ &= (A_1^c \cup A_2^c) \triangle (B_1^c \cup B_2^c) \subset (A_1^c \triangle B_1^c) \cup (A_2^c \triangle B_2^c) = \\ &= (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)\,,\end{aligned}$$

т. е. свойство 4 доказано. Наконец, используя равенство $A \backslash B = A \cap B^c$ для любых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ и доказанное свойство 4, получаем

$$\begin{aligned}(A_1 \backslash A_2) \triangle (B_1 \backslash B_2) &= (A_1 \cap A_2^c) \triangle (B_1 \cap B_2^c) \subset \\ &\subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2^c \triangle B_2^c) = (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)\,,\end{aligned}$$

т. е. свойство 5 доказано.

О п р е д е л е н и е 4.1.9. *Расстоянием между двумя множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется величина $d(A,B) = \mu^*(A \triangle B)$. Для последовательности множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ и множества $B \subset \mathbb{R}^n$ будем писать $A_m \to B$ при $m \to \infty$, если $d(A_m, B) \to 0$ при $m \to \infty$.*

Покажем, что введённая функция d обладает основными свойствами метрики на множестве всех подмножеств $\mathbb{R}^n$.

У т в е р ж д е н и е 4.1.10. *Расстояние d обладает следующими свойствами:*

1) $d(A,B) = d(B,A)$ и $d(A,A) = 0$ для всех множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$;

2) $d(A,B) \le d(A,C) + d(B,C)$ для всех множеств $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$;

3) $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$ для любых множеств $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$;

4) $d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$ для любых множеств $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$;

5) $d(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2) \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$ для любых множеств $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$;

6) если для множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ хотя бы одно из чисел $\mu^*(A)$ или $\mu^*(B)$ конечно, то $\Big|\mu^*(A) - \mu^*(B)\Big| \le d(A,B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство 1 сразу следует из первого свойства утверждения 4.1.9 и равенства $\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$, которое следует из утверждения 4.1.7 и включения $\varnothing \in \mathcal{E}$. Свойства 2—5 следуют из соответствующих свойств 2—5 утверждения 4.1.9 и полуаддитивности верхней меры (см. утверждение 4.1.8). Для доказательства свойства 6 рассмотрим произвольные множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$, причём $\mu^*(B) < +\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu^*(B) \le \mu^*(A)$. Тогда по свойству 2 (неравенство треугольника для расстояния d) получаем

$$\mu^*(A) = d(A, \varnothing) \le d(A,B) + d(B, \varnothing) = d(A,B) + \mu^*(B).$$

Следовательно,

$$\Big|\mu^*(A) - \mu^*(B)\Big| = \mu^*(A) - \mu^*(B) \le d(A,B),$$

что и требовалось.

З а м е ч а н и е 4.1.10. Расстояние d, вообще говоря, не удовлетворяет всем свойствам метрики на множестве всех подмножеств $\mathbb{R}^n$, так как оно может принимать значение $+\infty$ и быть равным нулю на паре разных множеств.

Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств, а μ — мера клеточного множества. Тогда $d(\mathbb{R}^n, \varnothing) = \mu^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$, так как для любой клетки $\varPi \subset \mathbb{R}^n$ выполнено $\mu^*(\mathbb{R}^n) \geq \mu^*(\varPi) = \mu(\varPi)$, а число $\mu(\varPi)$ может быть сколь угодно велико.

Далее, если $E = \{x(m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ — счётное множество, то $\mu^*(E) = 0$. Действительно, для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого номера m рассмотрим открытую клетку

$$\varPi_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x_k - x_k(m)| < \frac{\sqrt[n]{2^{-m}\varepsilon}}{2} \quad \forall\, k \in \overline{1,n} \right\}.$$

Тогда для любого m получаем $x(m) \in \varPi_m$ и $\mu(\varPi_m) = \frac{\varepsilon}{2^m}$. Следовательно, $E \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \varPi_m$ и $\mu^*(E) \leq \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(\varPi_m) \leq \varepsilon$, т. е. при $\varepsilon \to +0$ получаем $\mu^*(E) = 0$. Тогда $d(E, \varnothing) = \mu^*(E) = 0$, но $E \neq \varnothing$.

Определение 4.1.10. *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ будем называть конечно μ-измеримым, если существует последовательность элементарных множеств $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, такая, что $A_m \to A$ при $m \to \infty$ (т. е. $d(A_m, A) \to 0$ по определению 4.1.9). Совокупность всех конечно μ-измеримых множеств обозначим $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Множество $E \subset \subset \mathbb{R}^n$ назовём μ-измеримым, если оно может быть представлено в виде счётного объединения конечно μ-измеримых множеств. Совокупность всех μ-измеримых множеств обозначим $\mathfrak{M}(\mu)$.*

Замечание 4.1.11. Ясно, что $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}_F(\mu)$, так как для любого $A \in \mathcal{E}$ можно взять для любого номера m множество $A_m = = A$. Тогда по свойству 1 утверждения 4.1.10 получаем $d(A_m, A) = = d(A, A) = 0$ для любого m, т. е. $A_m \to A$. Далее, если множество $B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ таковы, что $A_m \to \to B$, то числовая последовательность $\{\mu(A_m)\}_{m=1}^{\infty}$ является сходящейся к $\mu^*(B)$. Действительно, по свойству 6 утверждения 4.1.10 получаем $\Big|\mu^*(B) - \mu(A_m)\Big| \leq d(A_m, B) \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, $\mu^*(B) < +\infty$ и $\mu(A_m) \to \mu^*(B)$.

Теорема 4.1.1 (*Лебег*). *Множество μ-измеримых множеств $\mathfrak{M}(\mu)$ является σ-кольцом, а функция $\mu^*\colon \mathfrak{M}(\mu) \to [0, +\infty]$ является счётно-аддитивной и регулярной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что множество $\mathfrak{M}_F(\mu)$ является кольцом, а функция $\mu^*\colon \mathfrak{M}_F(\mu) \to [0, +\infty)$ — конечно-аддитивной. Для этого рассмотрим два произвольных множества $A, B \in \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. По определению 4.1.10 существуют последовательности $A_m \in \mathcal{E}$ и $B_m \in \mathcal{E}$, такие, что $A_m \to A$ и $B_m \to B$ при $m \to \infty$. По замечанию 4.1.11 имеем $\mu(A_m) \to \mu^*(A) < +\infty$ и $\mu(B_m) \to \mu^*(B) < < +\infty$. По свойствам 3, 4, 5 утверждения 4.1.10 получаем

$$\begin{array}{rcccl} d(A_m \cup B_m, A \cup B) & \leq & d(A_m, A) + d(B_m, B) & \to & 0, \\ d(A_m \cap B_m, A \cap B) & \leq & d(A_m, A) + d(B_m, B) & \to & 0, \\ d(A_m \backslash B_m, A \backslash B) & \leq & d(A_m, A) + d(B_m, B) & \to & 0 \end{array}$$

при $m \to \infty$. Следовательно, $A_m \cup B_m \to A \cup B$, $A_m \cap B_m \to A \cap \cap B$, $A_m \backslash B_m \to A \backslash B$ при $m \to \infty$. Так как $\mathcal{E}$ — кольцо, то для любого m имеем $A_m \cup B_m \in \mathcal{E}$, $A_m \cap B_m \in \mathcal{E}$, $A_m \backslash B_m \in \mathcal{E}$. По определению 4.1.10 получаем $A \cup B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, $A \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, $A \backslash B \in \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, т. е. $\mathfrak{M}_F(\mu)$ — кольцо. По свойству 1 утверждения 4.1.1, для любого m имеем $\mu(A_m) + \mu(B_m) = \mu(A_m \cup B_m) + \mu(A_m \cap B_m)$. Переходя в этом равенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то $\mu^*(A \cap B) = \mu^*(\varnothing) = 0$ и $\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B)$, т. е. функция μ^* является конечно-аддитивной на $\mathfrak{M}_F(\mu)$.

Теперь покажем, что функция μ^* счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}(\mu)$. Рассмотрим произвольное множество $E \in \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда по определению 4.1.10 существует последовательность $\left\{\tilde{E}_m\right\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_F(\mu)$, такая, что $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{E}_m$. Представим множество E в виде счётного объединения попарно непересекающихся конечно μ-измеримых множеств. Для этого определим множество $E_1 = \tilde{E}_1 \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, а для $m > 1$ определим множество $E_m = \left(\bigcup\limits_{k=1}^{m} \tilde{E}_k\right) \Bigg\backslash \left(\bigcup\limits_{k=1}^{m-1} \tilde{E}_k\right) \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, так как $\mathfrak{M}_F(\mu)$ — кольцо. Тогда $E_m \cap E_k = \varnothing$ для всех $m \neq k$ и $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. В силу утверждения 4.1.8 имеем неравенство

$$\mu^*(E) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m).$$

С другой стороны, для любого номера m справедливо включение $E \supset \bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k$. Следовательно,

$$\mu^*(E) \geq \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{m} E_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \mu^*(E_k)$$

в силу конечной аддитивности функции μ^* на кольце $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Тогда, переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем $\mu^*(E) \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$. Таким образом, справедливо равенство

$$\mu^*(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m).$$

Если предположить, что $\mu^*(E) < +\infty$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$ сходится к числу $\mu^*(E)$, и для множества $S_m = \bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ получаем $d(E, S_m) = \mu^* \left(\bigcup\limits_{k=m+1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \mu^*(E_k) \to 0$ при $m \to \infty$. Так как $S_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, то по определению 4.1.10 существует множество $A_m \in \mathcal{E}$, такое, что $d(S_m, A_m) \leq \frac{1}{m}$. Следовательно, $d(E, A_m) \leq$ $\leq d(E, S_m) + d(S_m, A_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, справедливо включение $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Поэтому любое μ-измеримое множество с конечной верхней мерой является конечно μ-измеримым. Теперь рассмотрим произвольную последовательность попарно непересекающихся множеств $E_m \in \mathfrak{M}(\mu)$, таких, что множество $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m \in$ $\in \mathfrak{M}(\mu)$. Если существует номер m_0, такой, что $\mu^*(E_{m_0}) = +\infty$, то $\mu^*(E) \geq \mu^*(E_{m_0}) = +\infty$, т. е. $\mu^*(E) = +\infty$, и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m) = +\infty$, т. е. справедливо равенство $\mu^*(E) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m) = +\infty$. Если же $\mu^*(E_m) < +\infty$ для любого номера m, то для любого m имеет место включение $E_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, и требуемое равенство $\mu^*(E) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m)$ уже установлено выше.

Теперь докажем, что множество $\mathfrak{M}(\mu)$ является σ-кольцом. Рассмотрим последовательность множеств $\{E_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда для любого номера m существует последовательность множеств

$$\{A_{m,k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_F(\mu),$$

такая, что выполнено равенство $E_m = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{m,k}$. Следовательно,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{m,k} \in \mathfrak{M}(\mu)$$

как счётное объединение конечно μ-измеримых множеств. Пусть теперь два множества $A, B \in \mathfrak{M}(\mu)$. По определению 4.1.10 существуют $A_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и $B_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, такие, что

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \quad \text{и} \quad B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Тогда для любого номера m имеем $A_m \cap B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (A_m \cap B_k)$. Так как $A_m \cap B_k \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, то множество $A_m \cap B \in \mathfrak{M}(\mu)$. Так как $\mu^*(A_m \cap B) \leq \mu^*(A_m) < +\infty$, то множество $A_m \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ как μ-измеримое множество с конечной верхней мерой. Следовательно, $A_m \backslash B = A_m \backslash (A_m \cap B) \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Но тогда $A \backslash B = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (A_m \backslash B) \in$ $\in \mathfrak{M}(\mu)$. Таким образом, доказано, что множество $\mathfrak{M}(\mu)$ является σ-кольцом.

Докажем регулярность функции μ^* на σ-кольце $\mathfrak{M}(\mu)$. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ по определению 4.1.7 существует покрытие $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ открытыми элементарными множествами, такое, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m) < \mu^*(E) + \varepsilon$. Определим открытое множество $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \supset E$. Тогда по утверждению 4.1.8 имеем $\mu^*(G) \leq \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m) < \mu^*(E) + \varepsilon$, т. е. $\mu^*(G \backslash E) =$ $= \mu^*(G) - \mu^*(E) < \varepsilon$. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ существует последовательность конечно μ-измеримых множеств E_m, таких, что $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого номера m существует открытое множество $G_m \supset E_m$, такое, что выполнено неравенство $\mu^*(G_m \backslash E_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$. Определим открытое множество $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m \supset E$. Тогда $G \backslash E \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (G_m \backslash E_m)$, поэтому получаем неравенство $\mu^*(G \backslash E) \leq \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(G_m \backslash E_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ справедливо включение $E^c = \mathbb{R}^n \backslash E \in \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $S \supset E^c$, такое, что $\mu^*(S \backslash E^c) < \varepsilon$. Поэтому множество $F = S^c$ является замкнутым, и $F \subset E$. При этом справедливы равенства $E \backslash F = F^c \backslash E^c = S \backslash E^c$. Следовательно, $\mu^*(E \backslash F) < \varepsilon$, т. е. регулярность функции μ^* на $\mathfrak{M}(\mu)$ доказана.

Определение 4.1.11. *Любое множество σ-кольца $\mathfrak{M}(\mu)$ будем называть μ-измеримым по Лебегу, а значение функции μ^* на этом множестве будем называть его мерой Лебега. Функцию μ^* будем называть мерой Лебега.*

Замечание 4.1.12. Если множество $A \subset \mathbb{R}^n$ таково, что его верхняя мера $\mu^*(A) = 0$, то оно является конечно μ-измеримым, т. е. $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.

Действительно, рассмотрим $A_m = \varnothing \in \mathcal{E}$ для любого номера m. Тогда $d(A, A_m) = d(A, \varnothing) = \mu^*(A) = 0$ для любого m, т. е. получаем $A_m \to A$ при $m \to \infty$, что по определению 4.1.10 означает включение $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Множества с тривиальной верхней мерой будем называть множествами лебеговой меры нуль. Любое подмножество множества лебеговой меры нуль само является μ-измеримым по Лебегу и имеет лебегову меру нуль. Действительно, если множество $B \subset A$, а $\mu^*(A) = 0$, то $0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A) = 0$, т. е. $\mu^*(B) = 0$, что и требовалось. Все множества лебеговой меры нуль образуют σ-кольцо. Действительно, для любой последовательности $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ множеств лебеговой меры нуль в силу утверждения 4.1.8 получаем неравенство $\mu^*\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m\right) \leq \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m) = 0$, т. е. множество $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ имеет лебегову меру нуль. Для любых двух множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ лебеговой меры нуль множество $A \backslash B$ также имеет лебегову меру нуль как подмножество множества A лебеговой меры нуль. σ-кольцо множеств лебеговой меры нуль обозначим $\mathfrak{M}_0(\mu)$.

Определение 4.1.12. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо. Счётно-аддитивная функция $\varphi\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ называется полной, если для любого* *множества $A \in \mathcal{R}$ вида $\varphi(A) = 0$ и любого множества $B \subset A$ следует $B \in \mathcal{R}$.*

Замечание 4.1.13. В силу замечания 4.1.12 мера Лебега μ^* является полной на σ-кольце $\mathfrak{M}(\mu)$.

Замечание 4.1.14. Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств, а μ — мера клеточного множества. Тогда любое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ является μ-измеримым по Лебегу.

Действительно, для любого элемента $x \in G$ существует число $\delta(x) > 0$, такое, что открытая клетка

$$\varPi_{\delta(x)}(x) = \left\{ \, z \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x_k - z_k| < \delta(x) \;\; \forall\, k \in \overline{1,n} \, \right\} \subset G.$$

Если $G = \mathbb{R}^n$, то получаем соотношение $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \varPi_m(0) \in \mathfrak{M}(\mu)$. Пусть $G \neq \mathbb{R}^n$. Определим счётное подмножество множества G — множество $S = \left\{ \, z \in G \;\middle|\; z_k \in \mathbb{Q} \;\; \forall\, k \in \overline{1,n} \, \right\}$. Множество S не пусто, так как для любого $x \in G$ клетка $\varPi_{\delta(x)}(x)$ содержит векторы с рациональными координатами. Так как для любого $x \in G$ и любого числа $\varepsilon \in (0, \delta(x))$ выполнено $S \cap \varPi_\varepsilon(x) \neq \varnothing$, то множество S всюду плотно в G. Для любого элемента $z \in S$ определим число $\gamma(z) = \sup\left\{ \, \varepsilon > 0 \;\middle|\; \varPi_\varepsilon(z) \subset G \, \right\}$. Тогда для любого $z \in S$ выполнено включение $\varPi_{\gamma(z)}(z) \subset G$ и справедливо равенство $G = \bigcup\limits_{z \in S} \varPi_{\gamma(z)}(z)$. Действительно, для любого $x \in G$ существует $z \in S \cap \varPi_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)$. Следовательно, справедливы включения $x \in \varPi_{\frac{\delta(x)}{2}}(z) \subset \varPi_{\delta(x)}(x) \subset G$. Тогда $\frac{\delta(x)}{2} \leq \gamma(z)$ и $x \in \varPi_{\gamma(z)}(z) \subset G$, что и требовалось. Таким образом, всякое открытое множество из $\mathbb{R}^n$ представимо в виде счётного объединения открытых клеток. Так как каждая клетка является конечно μ-измеримым множеством, то по определению 4.1.10 получаем μ-измеримость открытого множества. Так как любое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$ есть дополнение подходящего открытого множества, то оно также является μ-измеримым по Лебегу.

Обозначим через $\mathcal{B}$ наименьшее по вложению σ-кольцо, содержащее все открытые подмножества $\mathbb{R}^n$. Ясно, что множество $E \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда оно может быть получено применением к некоторой не более чем счётной совокупности открытых множеств не более чем счётного числа операций объединения, пересечения и взятия дополнения. Любое множество $E \in \mathcal{B}$ называется борелевским множеством. Все борелевские множества являются μ-измеримыми по Лебегу, т. е. $\mathcal{B} \subset \mathfrak{M}(\mu)$.

В силу регулярности меры Лебега μ^* на $\mathfrak{M}(\mu)$ для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ и любого номера m существуют замкнутое множество F_m и открытое множество G_m, такие, что выполнены включения $F_m \subset E \subset G_m$ и неравенства $\mu^*(E \backslash F_m) < \frac{1}{m}$, $\mu^*(G_m \backslash E) < \frac{1}{m}$. Определим множества $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$ и $B = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} G_m$. Тогда $A, B \in \mathcal{B}$, т. е. множества A и B являются борелевскими, и справедливы следующие включения $A \subset E \subset B$. При этом для любого номера m справедливы неравенства $\mu^*(B \backslash E) \leq \mu^*(G_m \backslash E) < \frac{1}{m}$ и $\mu^*(E \backslash A) \leq \mu^*(E \backslash F_m) < \frac{1}{m}$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем $\mu^*(B \backslash E) = \mu^*(E \backslash A) = 0$, т. е. $B \backslash E \in \mathfrak{M}_0(\mu)$ и $E \backslash A \in \mathfrak{M}_0(\mu)$. Так как справедливо равенство $E = A \cup (E \backslash A)$, то получаем, что всякое μ-измеримое по Лебегу множество представляет собой объединение борелевского множества и множества лебеговой меры нуль.

Утверждение 4.1.11. *Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, μ — мера клеточного множества. Тогда для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$, вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и скаляра $t \neq 0$ выполнены $x + tE \in \mathfrak{M}(\mu)$ и $\mu^*(x + tE) = |t|^n \mu^*(E)$.*

Доказательство. Для любого множества $A \in \mathcal{E}$ включение $x + tA \in \mathcal{E}$ и равенство $\mu(x + tA) = |t|^n \mu(A)$ очевидны по определению клеточного множества и меры клеточного множества. Рассмотрим произвольное множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Открытые клеточные множества $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ образуют покрытие множества E, если и только если открытые клеточные множества $\{x + tA_m\}_{m=1}^{\infty}$ образуют покрытие множества $x + tE$. Действительно, включение $E \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ равносильно включению $x + tE \subset x + t \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (x + tA_m)$. Следовательно, справедливы равенства $\mu^*(x + tE) = \inf \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(x + tA_m) = \inf \sum\limits_{m=1}^{\infty} |t|^n \mu(A_m) = |t|^n \inf \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) = |t|^n \mu^*(E)$, где нижняя грань берётся по всевозможным счётным покрытиям множества E открытыми клеточными множествами $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Осталось доказать, что для любого μ-измеримого множества E множество $x + tE$ также является μ-измеримым. Рассмотрим сначала произвольное множество $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Тогда существует последовательность клеточных множеств $A_m \to E$ при $m \to \infty$. Так как для любых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $(x+tA)\backslash(x+tB) = x + t(A\backslash B)$, то получаем

$$(x+tE) \triangle (x+tA_m) = \Big(x + t(E\backslash A_m)\Big) \cup \Big(x + t(A_m\backslash E)\Big) = \\ = x + t\Big((E\backslash A_m) \cup (A_m\backslash E)\Big) = x + t(E \triangle A_m).$$

Следовательно,

$$d(x+tE, x+tA_m) = \mu^*(x + t(E \triangle A_m)) = \\ = |t|^n \mu^*(E \triangle A_m) = |t|^n d(E, A_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Таким образом, $x + tA_m \to x + tE$ при $m \to \infty$, т. е. множество $x + tE$ является конечно μ-измеримым. Теперь, взяв произвольное μ-измеримое множество E, находим последовательность конечно μ-измеримых множеств $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$, такую, что $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Тогда получаем равенство $x+tE = x+t \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (x+tE_m) \in \mathfrak{M}(\mu)$, так как $x + tE_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ для любого номера m, что и требовалось.

Замечание 4.1.15. Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств, μ — мера клеточного множества. Пусть $J(\mu)$ — кольцо множеств, измеримых по Жордану, μ_J — мера Жордана. Тогда любое множество $E \in J(\mu)$, т. е. измеримое по Жордану, является конечно μ-измеримым по Лебегу, т. е. $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, причём $\mu_J(E) = \mu^*(E)$.

Действительно, по определению измеримости множества по Жордану включение $E \in J(\mu)$ означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют клеточные множества A_ε и B_ε, такие, что $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon\backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$. При этом существует $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \mu(A_\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \mu(B_\varepsilon) = \mu_J(E)$. Следовательно, $d(E, A_\varepsilon) = \mu^*(E\backslash A_\varepsilon) \le \mu(B_\varepsilon\backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда получаем, что последовательность клеточных множеств $A_{\frac{1}{m}} \to E$ при $m \to \infty$, т. е. $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. При этом $\mu^*(E) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu\left(A_{\frac{1}{m}}\right) = \mu_J(E)$, что и требовалось.

Примером конечно μ-измеримого множества, не измеримого по Жордану, может служить множество E всех векторов из куба $[0,1]^n$ с рациональными координатами. Это множество является счётным, и поэтому имеет лебегову меру нуль (см. замечание 4.1.10). Следовательно, оно является конечно μ-измеримым по Лебегу в силу замечания 4.1.12. Однако верхняя мера Жордана множества E равна единице, а нижняя — нулю. Следовательно, множество E не является измеримым по Жордану.

Пример 4.1.1. Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, μ — мера клеточного множества. Приведём пример множества $E \subset \mathbb{R}^n$, не являющегося μ-измеримым по Лебегу. Рассмотрим клетку $\mathit{\Pi} = [0,1]^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ 0 \le x_k \le 1 \ \ \forall\, k \in \overline{1,n} \ \right\}$. Скажем, что элементы $x, y \in \mathit{\Pi}$ эквивалентны, если для любого $k \in \overline{1,n}$ выполнено включение $x_k - y_k \in \mathbb{Q}$. Эквивалентные элементы x, y клетки $\mathit{\Pi}$ обозначим $x \sim y$. Введённое на $\mathit{\Pi}$ отношение эквивалентности удовлетворяет условиям:

1) $x \sim x$,

2) $x \sim y \iff y \sim x$,

3) $x \sim y$ и $y \sim z \implies x \sim z$

для всех $x, y, z \in \mathit{\Pi}$. Следовательно, клетку $\mathit{\Pi}$ можно разбить на классы эквивалентных элементов. Определим множество $E \subset \mathit{\Pi}$, выбрав по одному элементу каждого класса эквивалентности и поместив его в E. Предположим, что $E \in \mathfrak{M}(\mu)$. Пусть

$$R = \Big([-1,1] \cap \mathbb{Q}\Big)^n = \left\{ x \in \mathbb{Q}^n \ \middle|\ -1 \le x_k \le 1 \ \ \forall\, k \in \overline{1,n} \ \right\}.$$

Множество R счётно, поэтому пусть $R = \{r(m)\}_{m=1}^{\infty}$, причём $r(m) \neq r(k)$ при $m \neq k$. Для любого номера m определим множество $E_m = r(m) + E$. Тогда по утверждению 4.1.11 имеем $E_m \in \mathfrak{M}(\mu)$ и $\mu^*(E_m) = \mu^*(E)$. Заметим, что для любых $m \neq k$ имеем $E_m \cap E_k = \varnothing$. Действительно, если для $m \neq k$ существует $x \in E_m \cap E_k$, то существуют $y, z \in E$, такие, что $x = r(m) + y = r(k) + z$. Но тогда $y - z = r(k) - r(m) \in \mathbb{Q}^n$, т. е. $y \sim z$. Так как множество E содержит только один вектор из каждого класса эквивалентности, то $y = z$. Следовательно, $r(m) = r(k)$, что противоречит условию $m \neq k$. Определим множество $S = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Тогда по теореме 4.1.1 получаем $S \in \mathfrak{M}(\mu)$ и $\mu^*(S) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(E)$. Заметим, что $S \subset [-1,2]^n$, т. е. $\mu^*(S) \le 3^n$. Следовательно, числовой ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu^*(E)$

сходится, что возможно только при $\mu^*(E) = 0$. Поэтому $\mu^*(S) = 0$. Однако справедливо включение $\varPi = [0,1]^n \subset S$. Действительно, для любого вектора $x \in \varPi$ существует класс эквивалентных векторов $\mathcal{A}$ клетки $\varPi$, содержащий x. Тогда существует вектор $y \in \mathcal{A}$, такой, что $y \in E$. Следовательно, $x - y = r \in \mathbb{Q}^n$, причём $x_k - y_k = r_k \in [-1,1]$ для любого $k \in \overline{1,n}$. Поэтому $r \in R$, т. е. выполнено включение $x = y + r \in S$. Но тогда получаем $0 = \mu^*(S) \geq \mu(\varPi) = 1$ — противоречие. Таким образом, множество $E \notin \mathfrak{M}(\mu)$.

Утверждение 4.1.12. *Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, μ — мера клеточного множества. Тогда для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ положительной меры Лебега (т. е. $\mu^*(E) > 0$) существует его неизмеримое подмножество $S \subset E$, $S \notin \mathfrak{M}(\mu)$.*

Доказательство. Для любого номера m рассмотрим множество

$$E_m = \left\{ \, x \in E \;\; \middle| \;\; |x_k| \leq m \;\; \forall \, k \in \overline{1,n} \, \right\} = E \cap [-m,m]^n.$$

Следовательно, $E_m \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и $\mu^*(E_m) \leq (2m)^n$. Так как $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ и $\mu^*(E) > 0$, то существует номер m_0, такой, что $\mu^*(E_{m_0}) > 0$. Введём то же отношение эквивалентности между векторами $\mathbb{R}^n$, что и в примере 4.1.1, и разобьём множество E_{m_0} на классы эквивалентных векторов. Построим множество $S \subset E_{m_0} \subset E$, поместив в S по одному элементу из каждого класса. Предположим, что множество $S \in \mathfrak{M}(\mu)$. Рассмотрим счётное множество $R = \Big([-2m_0, 2m_0] \cap \mathbb{Q}\Big)^n = \{r(s)\}_{s=1}^{\infty}$, где $r(s) \neq r(k)$ при $s \neq k$. Для любого номера s определим множество $S_s = r(s) + S$. Тогда по утверждению 4.1.11 получаем, что $S_s \in \mathfrak{M}(\mu)$ и $\mu^*(S_s) = \mu^*(S)$. Для любых $s \neq k$ имеем $S_s \cap S_k = \varnothing$. Действительно, если при $s \neq k$ найдётся вектор $x \in S_s \cap S_k$, то существуют векторы $y, z \in S$, такие, что $x = r(s) + y = r(k) + z$. Следовательно, $y - z = r(k) - r(s) \in \mathbb{Q}^n$, т. е. $y \sim z$. Так как множество S содержит по одному элементу каждого класса эквивалентности, то получаем равенство $y = z$. Но тогда получаем равенство $r(s) = r(k)$, которое невозможно при $s \neq k$. Определим множество $A = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} S_s \in \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда $\mu^*(A) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \mu^*(S_s) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \mu^*(S)$. Так как для любого номера s справедливо включение $S_s \subset [-3m_0, 3m_0]^n$, то и $A \subset [-3m_0, 3m_0]^n$. Следовательно, $\mu^*(A) \leq (6m_0)^n$, т. е. числовой ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \mu^*(S)$ сходится. Это возможно только в случае $\mu^*(S) = 0$. Поэтому $\mu^*(A) = 0$. Однако справедливо включение $E_{m_0} \subset A$. Действительно, по построению множества S, для любого вектора $x \in E_{m_0}$ существует вектор $y \in S$, такой, что $x \sim y$. Тогда $x - y = r \in \mathbb{Q}^n$, причём $|r_k| \leq 2m_0$ для всех $k \in \overline{1,n}$. Следовательно, $r \in R$, поэтому $x = r + y \in r + S \subset A$. Но тогда $0 < \mu^*(E_{m_0}) \leq \mu^*(A) = 0$ — противоречие. Таким образом, множество $S \notin \mathfrak{M}(\mu)$.

4.2. Измеримые функции

Определение 4.2.1. *Измеримым пространством будем называть тройку $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, где X — множество, $\mathfrak{M}$ — σ-кольцо подмножеств из X, причём выполнено включение $X \in \mathfrak{M}$, а $\mu\colon \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ — полная счётно-аддитивная функция, которую будем называть мерой. Любое множество $E \in \mathfrak{M}$ назовём измеримым, а величину $\mu(E)$ — мерой множества E.*

Определение 4.2.2. *Пусть X — некоторое множество, функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Для любого элемента $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ определим множества*

$$L_<(f,a) = \{\ x \in X \ |\ f(x) < a\ \}, \qquad L_\leq(f,a) = \{\ x \in X \ |\ f(x) \leq a\ \},$$
$$L_>(f,a) = \{\ x \in X \ |\ f(x) > a\ \}, \qquad L_\geq(f,a) = \{\ x \in X \ |\ f(x) \geq a\ \}.$$

Введённые множества назовём лебеговыми множествами функции f.

Определение 4.2.3. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Функцию $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ будем называть измеримой, если для любого числа a лебегово множество $L_<(f,a)$ является измеримым, т. е. выполнено включение $L_<(f,a) \in \mathfrak{M}$.*

Утверждение 4.2.1. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*

1) *функция f является измеримой;*
2) *для любого числа a выполнено $L_\geq(f,a) \in \mathfrak{M}$;*
3) *для любого числа a выполнено $L_>(f,a) \in \mathfrak{M}$;*
4) *для любого числа a выполнено $L_\leq(f,a) \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие 1. Для любого числа a по определению σ-кольца получаем $L_{\geq}(f,a) = X \setminus L_{<}(f,a) \in \mathfrak{M}$, так как $X \in \mathfrak{M}$. Следовательно, выполнено условие 2. Если выполнено условие 2, то для любого числа a получаем $L_{>}(f,a) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} L_{\geq}\left(f, a + \frac{1}{m}\right) \in \mathfrak{M}$ как счётное объединение множеств σ-кольца $\mathfrak{M}$. Следовательно, выполнено условие 3. Если выполнено условие 3, то для любого числа a по определению σ-кольца получаем $L_{\leq}(f,a) = X \setminus L_{>}(f,a) \in \mathfrak{M}$, так как $X \in \mathfrak{M}$. Следовательно, выполнено условие 4. Наконец, если выполнено условие 4, то для любого числа a получаем $L_{<}(f,a) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} L_{\leq}\left(f, a - \frac{1}{m}\right) \in \mathfrak{M}$ как счётное объединение множеств σ-кольца $\mathfrak{M}$. Следовательно, выполнено условие 1.

Следствие 4.2.1. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Тогда функция $g(x) = -f(x)$ для любого $x \in X$ является измеримой.*

Доказательство. Для любого числа a получаем $L_{<}(g,a) = L_{>}(f,-a) \in \mathfrak{M}$, что и требовалось.

Утверждение 4.2.2. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Пусть задана последовательность $f_m\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ измеримых для любого номера m функций. Пусть*

$$g(x) = \sup_{m \in \mathbb{N}} f_m(x), \qquad \tilde{g}(x) = \inf_{m \in \mathbb{N}} f_m(x),$$

$$h(x) = \varlimsup_{m \to \infty} f_m(x), \quad \tilde{h}(x) = \varliminf_{m \to \infty} f_m(x)$$

для любого $x \in X$. Тогда функции $g, \tilde{g}, h, \tilde{h}\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ являются измеримыми.

Доказательство. Для любого числа a получаем $L_{\leq}(g,a) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} L_{\leq}(f_m, a) \in \mathfrak{M}$ в силу замечания 4.1.3. Следовательно, в силу утверждения 4.2.1 функция g является измеримой. Так как $\tilde{g}(x) = -\sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \Big(-f_m(x)\Big)$ для любого $x \in X$, то получаем измеримость функции $\tilde{g}$ в силу следствия 4.2.1. Для любого $x \in X$ по определению верхнего предела получаем $h(x) = \lim\limits_{k \to \infty} \sup\limits_{m \geq k} f_m(x) = \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} \sup\limits_{m \geq k} f_m(x)$.

Следовательно, по доказанному выше функция h является измеримой. Наконец, так как $\tilde{h}(x) = -\varlimsup\limits_{m\to\infty}\Big(-f_m(x)\Big)$ для любого $x \in X$, то получаем измеримость функции $\tilde{h}$ в силу следствия 4.2.1.

Следствие 4.2.2. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Пусть последовательность $f_m\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ измеримых для любого номера m функций такова, что для любого $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = g(x) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Тогда функция $g\colon X \to \mathbb{R}\cup\cup\{\pm\infty\}$ является измеримой.*

Доказательство. Так как для любого $x \in X$ выполнено равенство $g(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = \varlimsup\limits_{m\to\infty} f_m(x) = \varliminf\limits_{m\to\infty} f_m(x)$, то измеримость g сразу следует из утверждения 4.2.2.

Утверждение 4.2.3. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, а множество $G \subset \mathbb{R}^2$ открыто. Пусть функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ измеримы, причём для любого $x \in X$ справедливо включение $\Big(f(x), g(x)\Big) \in G$. Пусть функция $F\colon G \to \mathbb{R}$ является непрерывной на G. Тогда функция $h(x) = F\Big(f(x), g(x)\Big)$ для всех $x \in X$ является измеримой.*

Доказательство. Для любого $a \in \mathbb{R}$ рассмотрим прообраз открытого луча $(-\infty, a) \subset \mathbb{R}$ по действием функции F, т. е. множество $F^{-1}(-\infty, a) = \{\ (u, v) \in G \ \mid\ F(u, v) < a\ \}$. Так как функция F непрерывна на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^2$, то в силу утверждения 1.1.6 множество $F^{-1}(-\infty, a)$ открыто в $\mathbb{R}^2$. Как показано в замечании 4.1.14, любое открытое в $\mathbb{R}^2$ множество представимо в виде счётного объединения открытых клеток. Следовательно, существует последовательность открытых клеток

$$\varPi_m = \left\{\ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ a_m < u < b_m,\ \ c_m < v < d_m\ \right\},$$

такая, что $F^{-1}(-\infty, a) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \varPi_m$. Тогда лебегово множество функции h имеет вид

$$L_<(h, a) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{\ x \in X \ \middle|\ (f(x), g(x)) \in \varPi_m\ \right\}.$$

Так как для любого номера m справедливо равенство

$$\left\{ x \in X \;\middle|\; (f(x), g(x)) \in \Pi_m \right\} = \\ = L_>(f, a_m) \cap L_<(f, b_m) \cap L_>(g, c_m) \cap L_<(g, d_m) \in \mathfrak{M},$$

то множество $L_<(h, a) \in \mathfrak{M}$ как счётное объединение измеримых множеств. Таким образом, функция h является измеримой.

Следствие 4.2.3. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, а функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ измеримы. Тогда функции $f + g$, $f - g$ и fg тоже являются измеримыми. Если $g \neq 0$ на X, то функция $\dfrac{f}{g}$ является измеримой.*

Доказательство. Для доказательства измеримости функций $f+g$, $f-g$ и fg надо применить утверждение 4.2.3 соответственно для функций $F(u, v) = u + v$, $F(u, v) = u - v$ и $F(u, v) = uv$ на множестве $G = \mathbb{R}^2$. Для доказательства измеримости функции $\dfrac{f}{g}$ при условии $g \neq 0$ на X надо применить утверждение 4.2.3 для функции $F(u, v) = \dfrac{u}{v}$ на открытом множестве $G = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \neq 0 \right\}$.

Пример 4.2.1. Покажем, что суперпозиция $f(g)$ измеримой функции f с непрерывной функцией g может не быть измеримой. Пусть $X = [0, 1]$, $\mathfrak{M}$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств отрезка $[0, 1]$, μ — мера Лебега. Пусть компакт $K \subset X$ — канторово множество (см. [4, гл. 2, п. 2.44, с. 51] или [1, гл. II, § 2, с. 63]). Тогда открытое множество $G = X \backslash K$ представляет собой счётное объединение попарно непересекающихся интервалов I_m суммарной длины 1, т. е. $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_m$, $\mu(G) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(I_m) = 1$. Следовательно, $\mu(K) = 1 - \mu(G) = 0$. Обозначим через $\ell\colon [0, 1] \to [0, 1]$ канторову лестницу (см. [1, гл. VI, § 4, с. 341]), представляющую собой непрерывную на отрезке $[0, 1]$ неубывающую функцию, такую, что $\ell(0) = 0$, $\ell(1) = 1$, и постоянную на каждом интервале I_m, т. е. для любого номера m существует число $c_m \in (0, 1)$, такое, что $\ell(x) = c_m$ для любого $x \in I_m$. Рассмотрим функцию $h(x) = \frac{1}{2}\left(\ell(x) + x\right)$ для $x \in [0, 1]$. Тогда функция h строго возрастает на отрезке $[0, 1]$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. Следовательно, существует обратная непрерывная строго возрастающая функция $h^{-1}\colon [0, 1] \to [0, 1]$. Рассмотрим образ множества G

под действием функции h. Имеем $h(G) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} h(I_m)$. При этом в силу непрерывности и строгого возрастания функции h для любого номера m множество $h(I_m)$ является открытым интервалом и $h(I_m)\cap \cap h(I_k) = \varnothing$ при $m \neq k$. Следовательно, $\mu(h(G)) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(h(I_m)) = = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu\left(\frac{1}{2}(c_m + I_m)\right) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}\mu(I_m) = \frac{1}{2}\mu(G) = \frac{1}{2}$. Тогда множество $h(K) = [0,1]\backslash h(G) \in \mathfrak{M}$ и $\mu(h(K)) = 1 - \mu(h(G)) = \frac{1}{2}$. Поэтому в силу утверждения 4.1.12 множество положительной меры $h(K)$ содержит неизмеримое по Лебегу подмножество S, т. е. $S \subset h(K)$ и $S \notin \mathfrak{M}$. Но в силу полноты меры Лебега (см. замечания 4.1.12 и 4.1.13) множество $E = h^{-1}(S) \subset K$ является измеримым по Лебегу как подмножество канторова множества K меры нуль. Определим измеримую функцию $f\colon [0,1] \to [0,1]$ вида $f(x) = 0$ при $x \in E$ и $f(x) = 1$ при $x \in [0,1]\backslash E$. Ясно, что функция f измерима, так как для любого числа a получаем

$$L_<(f,a) = \left\{ \begin{array}{ll} X, & a > 1, \\ E, & 0 < a \leq 1, \\ \varnothing, & a \leq 0 \end{array} \right\} \in \mathfrak{M}.$$

Пусть непрерывная функция $g = h^{-1}$. Тогда функция $f(g)\colon [0,1] \to \to [0,1]$ является неизмеримой, так как её лебегово множество

$$L_<(f(g),1) = \left\{\ x \in [0,1]\ \middle|\ h^{-1}(x) \in E\ \right\} = \\ = \{\ x \in [0,1]\ \mid x \in h(E) = S\ \} = S \notin \mathfrak{M},$$

т. е. неизмеримо.

Определение 4.2.4. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Измеримые функции $f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ назовём эквивалентными, если они отличаются на множестве меры нуль, т. е.*

$$\mu\{\ x \in X\ \mid\ f(x) \neq g(x)\ \} = 0.$$

Эквивалентные измеримые функции f и g будем обозначать $f \sim g$.

Замечание 4.2.1. Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, и заданы измеримые функции $f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Тогда множество $E = \{\ x \in X\ \mid\ f(x) \neq g(x)\ \} \in \mathfrak{M}$. Докажем это. Определим множество

$$X_0 = \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} -\infty < f(x) < +\infty \\ -\infty < g(x) < +\infty \end{array} \right\} =$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} -m < f(x) < m \\ -m < g(x) < m \end{array} \right\} \in \mathfrak{M}.$$

Рассмотрим множества

$$\begin{array}{rcl} E_0 & = & \{\, x \in X_0 \mid f(x) - g(x) \neq 0 \,\}, \\ E_1 & = & \{\, x \in X \mid f(x) = -\infty,\ g(x) > -\infty \,\}, \\ E_2 & = & \{\, x \in X \mid f(x) = +\infty,\ g(x) < +\infty \,\}, \\ E_3 & = & \{\, x \in X \mid f(x) > -\infty,\ g(x) = -\infty \,\}, \\ E_4 & = & \{\, x \in X \mid f(x) < +\infty,\ g(x) = +\infty \,\}. \end{array}$$

Тогда справедливо равенство $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$. Функции $f, g\colon X_0 \to \mathbb{R}$ являются измеримыми, так как для любого числа a имеем измеримость лебеговых множеств

$$\begin{array}{rcl} \{\, x \in X_0 \mid f(x) < a \,\} & = & X_0 \cap L_<(f, a) \in \mathfrak{M}, \\ \{\, x \in X_0 \mid g(x) < a \,\} & = & X_0 \cap L_<(g, a) \in \mathfrak{M}. \end{array}$$

Следовательно, по следствию 4.2.3 получаем измеримость функции $(f - g)\colon X_0 \to \mathbb{R}$. Тогда множество $E_0 = \{\, x \in X_0 \mid f(x) - g(x) < < 0 \,\} \cup \{\, x \in X_0 \mid f(x) - g(x) > 0 \,\} \in \mathfrak{M}$. Далее имеем соотношения

$$E_1 = \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} L_<(f, -m)\right] \cap \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} L_>(g, -m)\right] \in \mathfrak{M},$$

$$E_2 = \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} L_>(f, \quad m)\right] \cap \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} L_<(g, \quad m)\right] \in \mathfrak{M},$$

$$E_3 = \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} L_>(f, -m)\right] \cap \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} L_<(g, -m)\right] \in \mathfrak{M},$$

$$E_4 = \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} L_<(f, \quad m)\right] \cap \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} L_>(g, \quad m)\right] \in \mathfrak{M}.$$

Следовательно, $E \in \mathfrak{M}$, что и требовалось.

Замечание 4.2.2. Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ измерима. Тогда изменение функции

f на множестве меры нуль даёт измеримую функцию, естественно, эквивалентную f.

Действительно, пусть множество $A \in \mathfrak{M}$ имеет меру нуль, а функция $g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ такова, что $g(x) = f(x)$ для всех $x \in X \backslash A$. Тогда для любого числа a получаем

$$L_<(g,a) = \Big(L_<(f,a) \backslash A\Big) \cup \{\, x \in A \ \mid\ g(x) < a \,\}\,.$$

В силу измеримости функции f имеем $L_<(f,a) \backslash A \in \mathfrak{M}$. Множество $\{\, x \in A \ \mid\ g(x) < a \,\} \in \mathfrak{M}$ как подмножество множества A меры нуль в силу полноты меры μ. Следовательно, $L_<(g,a) \in \mathfrak{M}$, т. е. функция g является измеримой.

Утверждение 4.2.4. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Тогда справедливы следующие свойства:*

1) *$f \sim f$ для любой измеримой функции $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;*

2) *$f \sim g$ равносильно $g \sim f$ для измеримых функций $f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;*

3) *если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$ для измеримых функций $f, g, h\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Доказательство. Свойства 1 и 2 очевидным образом следуют из определения 4.2.4. Покажем свойство 3. Пусть измеримые функции f, g, h таковы, что $f \sim g$ и $g \sim h$. Рассмотрим множества $A = \{\, x \in X \mid f(x) \neq g(x) \,\}$, $B = \{\, x \in X \mid g(x) \neq h(x) \,\}$ и $C = \{\, x \in X \mid f(x) \neq h(x) \,\}$. По условию $\mu(A) = \mu(B) = 0$. Если $x \in C$, то либо $f(x) \neq g(x)$, т. е. $x \in A$, либо $f(x) = g(x)$, и тогда $x \in B$. Следовательно, $C \subset A \cup B$ и $\mu(C) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$. Таким образом, $f \sim h$, что и требовалось.

Определение 4.2.5. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Будем говорить, что некоторое свойство $\mathcal{P}$ выполнено почти всюду (п. в.) на X, если существует множество $A \in \mathfrak{M}$, такое, что $\mu(X \backslash A) = 0$, а свойство $\mathcal{P}$ выполнено для любого $x \in A$.*

Замечание 4.2.3. Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство, и заданы измеримые функции $f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Тогда $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f = g$ п. в. на X.

4.3. Интеграл Лебега

В этом параграфе рассматриваем измеримое пространство $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

О п р е д е л е н и е 4.3.1. *Пусть $E \subset X$ — произвольное множество. Функция $\delta_E\colon X \to \mathbb{R}$ вида $\delta_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \neq E \end{cases}$ называется характеристической функцией множества E.*

О п р е д е л е н и е 4.3.2. *Функция $s\colon X \to \mathbb{R}$ называется простой, если она принимает конечное множество значений.*

З а м е ч а н и е 4.3.1. Пусть $s\colon X \to \mathbb{R}$ — простая функция, а $c_1, \ldots, c_m$ — все её различные значения. Для каждого $k \in \overline{1,m}$ определим множество $E_k = \{\ x \in X \mid s(x) = c_k\ \}$. Тогда для любого $x \in X$ справедливо равенство $s(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k \delta_{E_k}(x)$.

У т в е р ж д е н и е 4.3.1. *Пусть $c_1, \ldots, c_m$ — различные числа, а $E_1, \ldots, E_k$ — попарно непересекающиеся множества из X. Тогда простая функция $s(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k \delta_{E_k}(x)$, $x \in X$, измерима тогда и только тогда, когда $E_k \in \mathfrak{M}$ для любого $k \in \overline{1,m}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть простая функция s измерима. Тогда для любого номера $k \in \overline{1,m}$ получаем $E_k = L_{\le}(s, c_k) \cap L_{\ge}(s, c_k) \in \mathfrak{M}$ в силу утверждения 4.2.1. Обратно, пусть множество E_k измеримо при каждом $k \in \overline{1,m}$. Тогда характеристическая функция δ_{E_k} измерима, так как для любого числа a имеем соотношение

$$L_{<}(\delta_{E_k}, a) = \left\{ \begin{array}{cl} X, & a > 1, \\ X \backslash E_k, & 0 < a \le 1, \\ \varnothing, & a \le 0 \end{array} \right\} \in \mathfrak{M}.$$

Следовательно, функция s измерима по следствию 4.2.3 как сумма измеримых функций.

О п р е д е л е н и е 4.3.3. *Для функции $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ определим её положительную и отрицательную составляющие — соответственно функции $f_+ = \max\{0, f\}$ и $f_- = \max\{0, -f\}$, так что $f = f_+ - f_-$.*

Утверждение 4.3.2. *Пусть функция* $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *является измеримой. Тогда функции* f_+ *и* f_- *также являются измеримыми.*

Доказательство. Сразу следует из утверждения 4.2.2.

Утверждение 4.3.3. *Пусть функция* $f\colon X \to [0,+\infty]$ *измерима. Тогда существует монотонно возрастающая последовательность простых неотрицательных измеримых функций* $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$*, поточечно сходящаяся к функции* f*, т. е. для любого* $x \in X$ *выполнены равенство* $\lim\limits_{m\to\infty} s_m(x) = f(x)$ *и неравенство* $s_m(x) \le s_\ell(x)$ *при всех* $m \le \ell$*.*

Доказательство. Для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{1, m2^m}$ определим попарно непересекающиеся множества

$$E_{m,k} = \left\{ x \in X \;\middle|\; \tfrac{k-1}{2^m} \le f(x) < \tfrac{k}{2^m} \right\},$$

$$F_m = \{ x \in X \mid f(x) \ge m \}.$$

Так как функция f измерима, то по утверждению 4.2.1 множества $E_{m,k}$ и F_m измеримы. Тогда простая функция

$$s_m(x) = \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m} \delta_{E_{m,k}}(x) + m\delta_{F_m}(x)$$

измерима. Покажем, что $s_m(x) \le s_{m+1}(x)$ для всех $x \in X$ и $m \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть сначала $x \in E_{m,k}$ при некотором $k \in \overline{1, m2^m}$. Тогда справедливы неравенства $\frac{2k-2}{2^{m+1}} \le f(x) < \frac{2k}{2^{m+1}}$ и $2k \le m2^{m+1}$. Если выполнено $\frac{2k-2}{2^{m+1}} \le f(x) < \frac{2k-1}{2^{m+1}}$, т. е. $x \in E_{m+1,2k-1}$, то получаем $s_{m+1}(x) = \frac{2k-2}{2^{m+1}} = s_m(x)$. Если же выполнено $\frac{2k-1}{2^{m+1}} \le f(x) < \frac{2k}{2^{m+1}}$, т. е. $x \in E_{m+1,2k}$, то получаем $s_{m+1}(x) = \frac{2k-1}{2^{m+1}} > \frac{k-1}{2^m} = s_m(x)$. Пусть $x \in F_m$, т. е. $f(x) \ge m$. Если выполнено $f(x) \ge m+1$, т. е. $x \in F_{m+1}$, то $s_{m+1}(x) = m+1 > s_m(x)$. Если выполнено $m \le f(x) < m+1$, то существует номер k вида $m2^{m+1} + 1 \le k \le (m+1)2^{m+1}$, такой, что выполнены неравенства $\frac{k-1}{2^{m+1}} \le f(x) < \frac{k}{2^{m+1}}$, т. е. $x \in E_{m+1,k}$. Тогда $s_{m+1}(x) = \frac{k-1}{2^{m+1}} \ge m = s_m(x)$. Таким образом, при любом $x \in X$ и любых $m \le \ell$ справедливо неравенство $s_m(x) \le s_\ell(x)$.

Теперь покажем поточечную сходимость последовательности s_m к функции f. Если $f(x) < +\infty$, то существует номер $m(x)$, такой, что $f(x) < m(x)$. Следовательно, при всех $m > m(x)$ получаем $0 \leq$ $\leq f(x) - s_m(x) \leq \frac{1}{2^m} \to 0$ при $m \to \infty$. Если же $f(x) = +\infty$, то для любого номера m имеем $x \in F_m$ и $s_m(x) = m \to +\infty = f(x)$, что и требовалось.

Следствие 4.3.1. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ является измеримой. Тогда существует последовательность простых измеримых функций $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$, поточечно сходящаяся к функции f, т. е. для любого $x \in X$ выполнено равенство $\lim\limits_{m\to\infty} s_m(x) = f(x)$.*

Доказательство. Измеримую функцию f в силу замечания 4.3.3 представим в виде $f = f_+ - f_-$, где измеримые функции $f_+, f_-\colon X \to [0, +\infty]$. Тогда по утверждению 4.3.3 существуют последовательности измеримых простых функций $s_{m,+}$ и $s_{m,-}$, поточечно сходящиеся к f_+ и f_- соответственно. Следовательно, последовательность измеримых простых функций $s_m = s_{m,+} - s_{m,-}$ является поточечно сходящейся к функции f.

Определение 4.3.4. *Пусть $c_1, \ldots, c_m$ — различные положительные числа, $E_1, \ldots, E_k$ — попарно непересекающиеся измеримые множества из X. Пусть $s(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k \delta_{E_k}(x)$ — простая измеримая неотрицательная функция. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}$ интегралом Лебега функции s по множеству E называется величина $I_E(s) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k \mu(E_k \cap E) \in [0, +\infty]$.*

Определение 4.3.5. *Пусть функция $f\colon X \to [0, +\infty]$ является измеримой. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}$ интегралом Лебега функции f по множеству E называется величина*

$$\int\limits_E f\, d\mu = \sup I_E(s),$$

где верхняя грань берётся по всем простым измеримым функциям s, таким, что $0 \leq s \leq f$. Ясно, что величина $\int\limits_E f\, d\mu \in [0, +\infty]$.

Замечание 4.3.2. Для неотрицательной простой измеримой функции s и измеримого множества $E \in \mathfrak{M}$ величина $I_E(s)$ не зависит от значений функции s на множестве $X \backslash E$. Поэтому для любой неотрицательной измеримой функции f значение её интеграла Лебега по множеству E равно точной верхней грани множества чисел $I_E(s)$ по всем неотрицательным простым измеримым функциям s, таким, что $s(x) \le f(x)$ только для всех $x \in E$.

Утверждение 4.3.4. *Пусть s — простая неотрицательная измеримая функция. Тогда для любого множества $E \in \mathfrak{M}$ справедливо равенство $\int\limits_E s\,d\mu = I_E(s)$.*

Доказательство. Для любой простой измеримой функции $\tilde{s}$ вида $0 \le \tilde{s} \le s$ очевидно неравенство $I_E(\tilde{s}) \le I_E(s)$. Тогда получаем $I_E(s) \le \int\limits_E s\,d\mu = \sup\limits_{0\le\tilde{s}\le s} I_E(\tilde{s}) \le I_E(s)$, что и требовалось.

Определение 4.3.6. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ является измеримой, множество $E \in \mathfrak{M}$. Если хотя бы один из интегралов $\int\limits_E f_+\,d\mu$ или $\int\limits_E f_-\,d\mu$ конечен, то интегралом Лебега функции f по множеству E называется величина*

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu.$$

Если величина $\int\limits_E f\,d\mu$ конечна (т. е. конечны оба интеграла $\int\limits_E f_+\,d\mu$ и $\int\limits_E f_-\,d\mu$), то функция f называется интегрируемой по Лебегу на множестве E. Совокупность всех измеримых функций, интегрируемых по Лебегу на множестве E, обозначим $\mathfrak{L}(E)$.

Утверждение 4.3.5. *Пусть измеримые функции $f, g\colon X \to \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ эквивалентны на измеримом множестве E, т. е. $\mu\{\, x \in \in E \mid f(x) \ne g(x) \,\} = 0$. Тогда интеграл Лебега $\int\limits_E f\,d\mu$ существует тогда и только тогда, когда существует интеграл Лебега $\int\limits_E g\,d\mu$. Если указанные интегралы существуют, то они равны. В частности, включение $f \in \mathfrak{L}(E)$ равносильно $g \in \mathfrak{L}(E)$.*

Доказательство. Эквивалентность функций f и g на множестве E влечёт $f_+ \sim g_+$ и $f_- \sim g_-$ на E. Следовательно, доказываемое утверждение будет установлено, если доказать равенство интегралов Лебега по множеству E двух неотрицательных измеримых эквивалентных на E функций f_+ и g_+. Пусть множество $E_0 = \{\, x \in E \mid f_+(x) \neq g_+(x) \,\} \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mu(E_0) = 0$. Так как для любого множества $S \in \mathfrak{M}$ справедливо равенство $\mu(S) = \mu(S \backslash E_0)$, то для любой неотрицательной измеримой простой функции s справедливо равенство $I_E(s) = I_{E\backslash E_0}(s)$. Следовательно,

$$\int\limits_E f_+\, d\mu = \sup_{0\le s\le f_+} I_E(s) = \sup_{0\le s\le f_+} I_{E\backslash E_0}(s) =$$

$$= \sup_{0\le s\le g_+} I_{E\backslash E_0}(s) = \sup_{0\le s\le g_+} I_E(s) = \int\limits_E g_+\, d\mu,$$

что и требовалось.

Утверждение 4.3.6. *Пусть измеримая функции $f\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ интегрируема по Лебегу на множестве $E \in \mathfrak{M}$. Тогда функция f почти всюду конечна на множестве E, т. е. выполнено равенство*

$$\mu\left\{\, x \in E \;\middle|\; |f(x)| = +\infty \,\right\} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned}
E_0 &= \left\{ x \in E \;\middle|\; |f(x)| = +\infty \right\}, \\
E_+ &= \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) = +\infty \right\} = \left\{ x \in E \;\middle|\; f_+(x) = +\infty \right\}, \\
E_- &= \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) = -\infty \right\} = \left\{ x \in E \;\middle|\; f_-(x) = +\infty \right\}.
\end{aligned}$$

Тогда $E_0 = E_+ \cup E_-$. Предположим, рассуждая от противного, что $\mu(E_0) > 0$. Тогда выполнено неравенство — либо $\mu(E_+) > 0$, либо $\mu(E_-) > 0$.

Сначала рассмотрим случай $\mu(E_+) > 0$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим неотрицательную измеримую простую функцию

$$s_m(x) = m\delta_{E_+}(x) \quad \text{для любого} \quad x \in X.$$

Тогда для любого m справедливо неравенство $s_m(x) \le f_+(x)$ для всех $x \in X$. Следовательно, получаем неравенства

$$+\infty > \int\limits_E f_+\, d\mu \ge I_E(s_m) = m\mu(E_+) \to +\infty \quad \text{при } m \to \infty,$$

т. е. получили противоречие.

Теперь рассмотрим случай $\mu(E_-) > 0$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим неотрицательную измеримую простую функцию

$$s_m(x) = m\delta_{E_-}(x) \le f_-(x) \quad \text{для любого} \quad x \in X.$$

Тогда для любого m справедливо неравенство $s_m(x) \le f_-(x)$ для всех $x \in X$. Следовательно, получаем неравенства

$$+\infty > \int\limits_E f_- \, d\mu \ge I_E(s_m) = m\mu(E_-) \to +\infty \quad \text{при } m \to \infty,$$

т. е. получили противоречие.

Утверждение 4.3.7. *Пусть измеримая функции $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ограничена на множестве $E \in \mathfrak{M}$, т. е. существуют числа a и b, такие, что для всех $x \in E$ выполнены неравенства $a \le f(x) \le b$. Пусть $\mu(E) < +\infty$. Тогда $f \in \mathcal{L}(E)$ и справедливы неравенства*

$$a\mu(E) \le \int\limits_E f \, d\mu \le b\mu(E).$$

Доказательство. Если $a \ge 0$, то $f(x) = f_+(x)$ для всех $x \in E$. Тогда для всех $x \in E$ имеем неравенства $0 \le a\delta_E(x) \le f_+(x) \le b\delta_E(x)$, следовательно:

$$a\mu(E) = I_E(a\delta_E) \le \sup_{0 \le s \le f_+} I_E(s) = \int\limits_E f_+ \, d\mu = \int\limits_E f \, d\mu \le I_E(b\delta_E) = b\mu(E).$$

Если $b \le 0$, то $f(x) = -f_-(x)$ для всех $x \in E$. Тогда для всех $x \in E$ имеем неравенства $0 \le -b\delta_E(x) \le f_-(x) \le -a\delta_E(x)$, следовательно:

$$-b\mu(E) = I_E(-b\delta_E) \le \sup_{0 \le s \le f_-} I_E(s) = \int\limits_E f_- \, d\mu = -\int\limits_E f \, d\mu \le I_E(-a\delta_E) = -a\mu(E).$$

Пусть теперь $a < 0$ и $b > 0$. Тогда для всех $x \in E$ имеем неравенства

$$0 \le f_+(x) \le b\delta_E(x), \quad 0 \le f_-(x) \le -a\delta_E(x),$$

следовательно:

$$\begin{array}{lclclcl} \int\limits_E f_+\,d\mu & = & \sup\limits_{0\le s\le f_+} I_E(s) & \le & I_E(b\delta_E) & = & b\mu(E), \\ \int\limits_E f_-\,d\mu & = & \sup\limits_{0\le s\le f_-} I_E(s) & \le & I_E(-a\delta_E) & = & -a\mu(E). \end{array}$$

Тогда получаем

$$a\mu(E) \le \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu \le b\mu(E).$$

Утверждение 4.3.8. *Пусть измеримые функции*

$$f, g\colon X \to [0, +\infty]$$

таковы, что $f \le g$ на множестве $E \in \mathfrak{M}$. Тогда справедливо неравенство $\int\limits_E f\,d\mu \le \int\limits_E g\,d\mu$.

Доказательство. Для любой простой измеримой функции s вида $0 \le s \le f$ на множестве E получаем $0 \le s \le g$ на E. Следовательно, $\int\limits_E f\,d\mu = \sup\limits_{0\le s\le f} I_E(s) \le \sup\limits_{0\le s\le g} I_E(g) = \int\limits_E g\,d\mu$, что и требовалось.

Утверждение 4.3.9. *Пусть измеримые функции*

$$f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

интегрируемы на измеримом множестве E, причём $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in E$. Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_E f\,d\mu \le \int\limits_E g\,d\mu.$$

Доказательство. Неравенство $f \le g$ на E влечёт неравенства $f_+ \le g_+$ и $f_- \ge g_-$ на E. Тогда в силу утверждения 4.3.8 получаем неравенства

$$\int\limits_E f_+\,d\mu \le \int\limits_E g_+\,d\mu, \qquad \int\limits_E f_-\,d\mu \ge \int\limits_E g_-\,d\mu.$$

Следовательно, $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu \le \int\limits_E g_+\,d\mu - \int\limits_E g_-\,d\mu = $ $= \int\limits_E g\,d\mu$, что и требовалось.

Утверждение 4.3.10. *Пусть измеримая функция $f\colon X \to$ $\to [0,+\infty]$. Тогда для любых измеримых множеств E_1 и E_2 вида $E_1 \subset E_2$ выполнено неравенство $\int\limits_{E_1} f\,d\mu \le \int\limits_{E_2} f\,d\mu$.*

Доказательство. Для любого измеримого множества E выполнено неравенство $\mu(E \cap E_1) \le \mu(E \cap E_2)$. Тогда для любой простой неотрицательной измеримой функции s имеем неравенство $I_{E_1}(s) \le I_{E_2}(s)$. Следовательно, получаем

$$\int\limits_{E_1} f\,d\mu = \sup_{0\le s\le f} I_{E_1}(s) \le \sup_{0\le s\le f} I_{E_2}(s) = \int\limits_{E_2} f\,d\mu,$$

что и требовалось.

Утверждение 4.3.11. *Измеримая функция*

$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

является интегрируемой по Лебегу на измеримом множестве E тогда и только тогда, когда функция $|f| \in \mathcal{L}(E)$. При этом выполнено неравенство $\left|\int\limits_E f\,d\mu\right| \le \int\limits_E |f|\,d\mu$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}(E)$, т. е. по определению 4.3.6 имеем неравенства $\int\limits_E f_+\,d\mu < +\infty$ и $\int\limits_E f_-\,d\mu < +\infty$. Определим следующие множества:

$$E_+ = \{\, x \in E \;\mid\; f(x) \ge 0 \,\}, \quad E_- = \{\, x \in E \;\mid\; f(x) \le 0 \,\}.$$

Ясно, что $|f(x)| = f_+(x)$ при $x \in E_+$ и $|f(x)| = f_-(x)$ при $x \in$ $\in E_-$. Тогда для любой простой измеримой функции s вида $0 \le s \le$ $\le |f|$ получаем $0 \le s \le f_+$ на E_+, $0 \le s \le f_-$ на E_-. Так как для любого измеримого множества $A \subset E$ в силу утверждения 4.1.1 выполнено неравенство $\mu(A) \le \mu(A \cap E_+) + \mu(A \cap E_-)$, то, используя утверждение 4.3.10, получаем

$$I_E(s) \le I_{E_+}(s) + I_{E_-}(s) \le \int\limits_{E+} f_+\,d\mu + \int\limits_{E_-} f_-\,d\mu \le \int\limits_E f_+\,d\mu + \int\limits_E f_-\,d\mu.$$

Следовательно, $\int\limits_E |f|\,d\mu = \sup\limits_{0\le s\le |f|} I_E(s) \le \int\limits_E f_+\,d\mu + \int\limits_E f_-\,d\mu < +\infty$, т. е. выполнено включение $|f| \in \mathcal{L}(E)$.

Если справедливо включение $|f| \in \mathcal{L}(E)$, то в силу неравенств $0 \le f_+ \le |f|$ и $0 \le f_- \le |f|$ получаем

$$\int\limits_E f_+\,d\mu \le \int\limits_E |f|\,d\mu < +\infty, \quad \int\limits_E f_-\,d\mu \le \int\limits_E |f|\,d\mu < +\infty.$$

Таким образом, $f \in \mathcal{L}(E)$. Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu \quad &\le \quad \int\limits_E f_+\,d\mu \quad \le \quad \int\limits_E |f|\,d\mu, \\ \int\limits_E f_-\,d\mu - \int\limits_E f_+\,d\mu \quad &\le \quad \int\limits_E f_-\,d\mu \quad \le \quad \int\limits_E |f|\,d\mu. \end{aligned}$$

Поэтому $\left|\int\limits_E f\,d\mu\right| = \left|\int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu\right| \le \int\limits_E |f|\,d\mu$, что и требовалось.

С л е д с т в и е 4.3.2. *Пусть измеримые функции*

$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \text{и} \quad g\colon X \to [0, +\infty]$$

таковы, что $g \in \mathcal{L}(E)$ и $|f| \le g$ на множестве $E \in \mathfrak{M}$. Тогда $f \in \mathcal{L}(E)$ и выполнено неравенство $\left|\int\limits_E f\,d\mu\right| \le \int\limits_E g\,d\mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство $|f| \le g$ на E по утверждению 4.3.8 влечёт неравенство $\int\limits_E |f|\,d\mu \le \int\limits_E g\,d\mu < +\infty$, т. е. получаем $|f| \in \mathcal{L}(E)$. Следовательно, по утверждению 4.3.11 выполнены включение $f \in \mathcal{L}(E)$ и неравенство $\left|\int\limits_E f\,d\mu\right| \le \int\limits_E |f|\,d\mu \le \int\limits_E g\,d\mu$.

У т в е р ж д е н и е 4.3.12. *Пусть измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ интегрируема на измеримом множестве E. Тогда для любого числа $c \ne 0$ выполнено $cf \in \mathcal{L}(E)$, причём*

$$\int\limits_E cf\,d\mu = c\int\limits_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Пусть $c > 0$. Тогда $(cf)_+ = cf_+$ и $(cf)_- = cf_-$. Следовательно, выполнены соотношения

$$\int_E (cf)_+ \, d\mu = \sup_{0 \le s \le cf_+} I_E(s) = \sup_{0 \le \frac{s}{c} \le f_+} cI_E\left(\frac{s}{c}\right) = c \int_E f_+ \, d\mu,$$
$$\int_E (cf)_- \, d\mu = \sup_{0 \le s \le cf_-} I_E(s) = \sup_{0 \le \frac{s}{c} \le f_-} cI_E\left(\frac{s}{c}\right) = c \int_E f_- \, d\mu.$$

Тогда получаем

$$\int_E (cf) \, d\mu = \int_E (cf)_+ \, d\mu - \int_E (cf)_- \, d\mu =$$
$$= c \int_E f_+ \, d\mu - c \int_E f_- \, d\mu = c \int_E f \, d\mu.$$

Пусть $c < 0$. Тогда $(cf)_+ = (-c)f_-$ и $(cf)_- = (-c)f_+$. Следовательно, выполнены соотношения

$$\int_E (cf)_+ \, d\mu = \sup_{0 \le s \le (-c)f_-} I_E(s) =$$
$$= \sup_{0 \le \frac{s}{-c} \le f_-} (-c)I_E\left(\frac{s}{-c}\right) = (-c) \int_E f_- \, d\mu,$$

$$\int_E (cf)_- \, d\mu = \sup_{0 \le s \le (-c)f_+} I_E(s) =$$
$$= \sup_{0 \le \frac{s}{-c} \le f_+} (-c)I_E\left(\frac{s}{-c}\right) = (-c) \int_E f_+ \, d\mu.$$

Тогда получаем

$$\int_E (cf) \, d\mu = \int_E (cf)_+ \, d\mu - \int_E (cf)_- \, d\mu =$$
$$= (-c) \int_E f_- \, d\mu - (-c) \int_E f_+ \, d\mu = c \int_E f \, d\mu.$$

Утверждение 4.3.13. *Пусть измеримое множество E имеет меру нуль. Тогда любая измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ интегрируема по Лебегу на E, причем $\int\limits_E f\,d\mu = 0$.*

Доказательство. Так как $\mu(E) = 0$, то для любой простой измеримой функции s вида $0 \le s \le f_+$ или $0 \le s \le f_-$ по определению 4.3.4 выполнено равенство $I_E(s) = 0$. Следовательно, $\int\limits_E f_+\,d\mu = \int\limits_E f_-\,d\mu = 0$, откуда сразу следует интегрируемость функции f на множестве E и равенство $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu = 0$.

Утверждение 4.3.14. *Пусть измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ интегрируема по Лебегу на измеримом множестве E. Тогда для любого измеримого множества $A \subset E$ выполнено $f \in \mathfrak{L}(A)$.*

Доказательство. Для любой простой измеримой функции s вида $0 \le s \le f_+$ или $0 \le s \le f_-$ по определению 4.3.4 и в силу свойства 2 утверждения 4.1.1 выполнено неравенство $I_A(s) \le I_E(s)$. Следовательно, получаем неравенства $\int\limits_A f_+\,d\mu \le \int\limits_E f_+\,d\mu$ и $\int\limits_A f_-\,d\mu \le \int\limits_E f_-\,d\mu$. Так как $f \in \mathfrak{L}(E)$, то величины $\int\limits_E f_\pm\,d\mu$ конечны. Тогда конечны величины $\int\limits_A f_\pm\,d\mu$, т. е. $f \in \mathfrak{L}(A)$.

Теорема 4.3.1 (*счётная аддитивность интеграла Лебега*). *Пусть функция $f\colon X \to [0,+\infty]$ измерима. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}$ определим величину $\varphi(E) = \int\limits_E f\,d\mu$. Тогда функция $\varphi\colon \mathfrak{M} \to [0,+\infty]$ является счётно-аддитивной.*

Доказательство. Пусть последовательность измеримых множеств $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ такова, что $E_m \cap E_k = \varnothing$ для всех $m \ne k$, а множество $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Требуется доказать равенство $\varphi(E) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \varphi(E_m)$. Если функция f является характеристической функцией измеримого множества A, т. е. $f = \delta_A$, то $\varphi(E) = \mu(A \cap E)$.

Поэтому в силу счётной аддитивности меры μ получаем требуемое равенство

$$\varphi(E) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}(A \cap E_m)\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\mu(A \cap E_m) = \sum_{m=1}^{\infty}\varphi(E_m).$$

Если f является простой неотрицательной функцией, то в силу определения 4.3.4 функция φ является конечной линейной комбинацией счётно-аддитивных функций с положительными коэффициентами, т. е. тоже является счётно-аддитивной. В общем случае для любой простой измеримой функции s вида $0 \leq s \leq f$ имеем

$$I_E(s) = \sum_{m=1}^{\infty} I_{E_m}(s) \leq \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{E_m} f\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty}\varphi(E_m).$$

Следовательно, получаем неравенство

$$\varphi(E) = \sup_{0 \leq s \leq f} I_E(s) \leq \sum_{m=1}^{\infty}\varphi(E_m).$$

Так как $E_m \subset E$ для любого номера m, то в силу утверждения 4.3.10 имеем неравенство $\varphi(E_m) = \int\limits_{E_m} f\,d\mu \leq \int\limits_{E} f\,d\mu = \varphi(E)$. Следовательно, если существует номер m_0, такой, что $\varphi(E_{m_0}) = +\infty$, то получаем

$$\varphi(E) = +\infty = \sum_{m=1}^{\infty}\varphi(E_m).$$

Поэтому далее считаем, что $\varphi(E_m) < +\infty$ для всех m. Тогда для любых $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ по определению 4.3.5 существует простая измеримая функция s вида $0 \leq s \leq f$, такая, что для всех $m \in \overline{1, N}$ выполнено неравенство

$$I_{E_m}(s) \geq \int\limits_{E_m} f\,d\mu - \frac{\varepsilon}{N} = \varphi(E_m) - \frac{\varepsilon}{N}.$$

Следовательно, получаем $\varphi(E) \geq I_E(s) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} I_{E_m}(s) \geq \sum\limits_{m=1}^{N} I_{E_m}(s) \geq$ $\geq \sum\limits_{m=1}^{N}\varphi(E_m) - \varepsilon$. Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ и $N \to \infty$, получаем неравенство $\varphi(E) \geq \sum\limits_{m=1}^{\infty}\varphi(E_m)$, что и требовалось.

С л е д с т в и е 4.3.3. *Пусть измеримая функция*

$$f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

интегрируема на измеримом множестве E. *Тогда для любой последовательности измеримых множеств* $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ *вида* $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ *и* $E_m \cap E_k = \varnothing$ *при всех* $m \neq k$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_E f\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\,d\mu,$$

при этом последний ряд сходится абсолютно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 4.3.1 получаем равенства

$$\int\limits_E f_+\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f_+\,d\mu < +\infty, \qquad \int\limits_E f_-\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f_-\,d\mu < +\infty.$$

Так как для любого m имеем $\left|\int\limits_{E_m} f\,d\mu\right| \le \int\limits_{E_m} f_+\,d\mu + \int\limits_{E_m} f_-\,d\mu$ — член сходящегося ряда, то числовой ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\,d\mu$ сходится абсолютно. Следовательно, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int\limits_{E_m} f_+\,d\mu - \int\limits_{E_m} f_-\,d\mu \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{N} \int\limits_{E_m} f_+\,d\mu - \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{E_m} f_-\,d\mu \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{N} \int\limits_{E_m} f_+\,d\mu \right) - \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{N} \int\limits_{E_m} f_-\,d\mu \right) =$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f_+\,d\mu \right) - \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f_-\,d\mu \right) = \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu,$$

что и требовалось.

Утверждение 4.3.15. *Пусть функция* $f\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ *измерима, множество* $E \in \mathfrak{M}$. *Пусть последовательность измеримых множеств* $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ *вида* $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ *и* $E_m \cap E_k = \varnothing$ *при всех* $m \neq k$, *такова, что* $f \in \mathcal{L}(E_m)$ *для любого* m. *Пусть числовой ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} |f|\, d\mu$ *сходится. Тогда* $f \in \mathcal{L}(E)$, *причём выполнено равенство*

$$\int\limits_E f\, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\, d\mu,$$

а последний ряд сходится абсолютно.

Доказательство. Так как $0 \le f_\pm \le |f|$, то для любого m получаем $\int\limits_{E_m} f_\pm\, d\mu \le \int\limits_{E_m} |f|\, d\mu$ — член сходящегося ряда. Следовательно, по теореме 4.3.1 получаем

$$\int\limits_E f_\pm\, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f_\pm\, d\mu \le \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} |f|\, d\mu < +\infty.$$

Тогда по определению 4.3.6 получаем $f \in \mathcal{L}(E)$. При этом равенство $\int\limits_E f\, d\mu = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\, d\mu$ и абсолютная сходимость последнего ряда следует из следствия 4.3.3.

Пример 4.3.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств на $\mathbb{R}$, построенное на основе кольца клеточных подмножеств из $\mathbb{R}$. Предъявим пример множества $E \in \mathfrak{M}$, его представления в виде $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$, где $E_m \in \mathfrak{M}$ для любого m и $E_m \cap E_k = \varnothing$ при всех $m \neq k$, и измеримой функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, такой, что $f \in \mathcal{L}(E_m)$ для любого m, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} f\, d\mu$ сходится, но $f \notin \mathcal{L}(E)$.

Пусть множество $E = (0,1]$, а множество $E_m = \left(\frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2m-1}\right]$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Тогда $(0,1] = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ и $E_m \cap E_k = \varnothing$ при всех $m \neq k$. Функция $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ имеет вид $f(x) = m$ при $\frac{1}{2m+1} < x \le \frac{1}{2m}$ и $f(x) = -m$ при $\frac{1}{2m} < x \le \frac{1}{2m-1}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. На каждом множестве E_m функция f является простой, и $\int\limits_{E_m} f\,d\mu =$ $= m\left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1}\right) - m\left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2(2m+1)} - \frac{1}{2(2m-1)} = -\frac{1}{4m^2-1}$ — член сходящегося ряда, т. е. ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\int\limits_{E_m} f\,d\mu = -\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}$ является сходящимся. Однако по теореме 4.3.1 получаем равенства

$$\int\limits_E f_+\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{E_m} f_+\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2(2m+1)} = +\infty,$$
$$\int\limits_E f_-\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{E_m} f_-\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2(2m-1)} = +\infty,$$

т. е. $f \notin \mathfrak{L}(E)$.

Утверждение 4.3.16 (*неравенство Чебышева*)**.** *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ интегрируема по Лебегу на E. Тогда для любого положительного числа c справедливо неравенство*

$$\mu\left\{\, x\in E \;\middle|\; |f(x)| \geq c \,\right\} \leq \frac{1}{c}\int\limits_E |f|\,d\mu.$$

Доказательство. Определим измеримые множества

$$A = \left\{\, x\in E \;\middle|\; |f(x)| \geq c \,\right\}, \quad B = \left\{\, x\in E \;\middle|\; |f(x)| < c \,\right\}.$$

Тогда имеем равенства $A\cap B = \varnothing$ и $A\cup B = E$. Следовательно, по теореме 4.3.1 получаем

$$\int\limits_E |f|\,d\mu = \int\limits_A |f|\,d\mu + \int\limits_B |f|\,d\mu \geq \int\limits_A |f|\,d\mu \geq c\,\mu(A),$$

откуда сразу получаем $\mu(A) \leq \frac{1}{c}\int\limits_E |f|\,d\mu$, что и требовалось.

Следствие 4.3.4. *Пусть измеримая функция*

$$f\colon X \to [0,+\infty],$$

множество $E\in\mathfrak{M}$. Пусть $\int\limits_E f\,d\mu = 0$. Тогда $f(x) = 0$ для почти всех $x\in E$.

Доказательство. Определим множества

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) > 0 \right\}, \\ A_m &= \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) \geq \tfrac{1}{m} \right\}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Тогда выполнено равенство $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. По утверждению 4.3.16 для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем неравенство $\mu(A_m) \leq m \int\limits_E f\, d\mu = 0$. Следовательно, $\mu(A) \leq \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) = 0$, что и требовалось.

Утверждение 4.3.17. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ интегрируема по Лебегу на E. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon > 0$, такое, что для любого измеримого множества $A \subset E$ вида $\mu(A) \leq \delta_\varepsilon$ выполнено неравенство $\left| \int\limits_A f\, d\mu \right| \leq \varepsilon$.*

Это свойство называется абсолютной непрерывностью интеграла Лебега.

Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим измеримое множество

$$E_m = \left\{ x \in E \;\middle|\; m - 1 \leq |f(x)| < m \right\}.$$

Тогда при всех $m \neq k$ справедливо равенство $E_m \cap E_k = \varnothing$, и в силу утверждения 4.3.6 выполнено равенство $\mu\left(E \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m \right) = 0$. В силу теоремы 4.3.1 и утверждения 4.3.13 получаем

$$\int\limits_E |f|\, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{E_m} |f|\, d\mu.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое, что справедливо неравенство

$$\sum_{m=N_\varepsilon+1}^{\infty} \int\limits_{E_m} |f|\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Определим число $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2N_\varepsilon} > 0$. Тогда для любого измеримого множества $A \subset E$ вида $\mu(A) \le \delta_\varepsilon$ получаем неравенства

$$\left|\int\limits_A f\,d\mu\right| \le \int\limits_A |f|\,d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{A\cap E_m} |f|\,d\mu \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{N_\varepsilon} \int\limits_{A\cap E_m} |f|\,d\mu + \sum_{m=N_\varepsilon+1}^{\infty} \int\limits_{E_m} |f|\,d\mu \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{N_\varepsilon} N_\varepsilon \mu(A\cap E_m) + \frac{\varepsilon}{2} \le N_\varepsilon \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon,$$

что и требовалось.

Теорема 4.3.2 (*Б. Леви, о монотонной сходимости*). *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, а последовательность $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ измеримых функций $f_m\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ такова, что $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots$ для всех $x \in E$. Пусть функция $f\colon E \to [0,+\infty]$ определяется равенством $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ для всех $x \in E$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_E f_m(x)\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu$.*

Доказательство. В силу утверждения 4.3.8 получаем

$$0 \le \int\limits_E f_1\,d\mu \le \int\limits_E f_2\,d\mu \le \ldots$$

Следовательно, существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\,d\mu = \ell \in [0,+\infty]$. Так как на множестве E выполнено $0 \le f_m \le f$ для любого m, то $\int\limits_E f_m\,d\mu \le \int\limits_E f\,d\mu$. Следовательно, $\ell \le \int\limits_E f\,d\mu$. Для любого числа $c \in \in (0,1)$ и любой простой измеримой функции s, такой, что $0 \le s \le f$ на E, определим последовательность измеримых множеств:

$$E_m = \left\{\, x \in E \;\middle|\; f_m(x) \ge cs(x) \,\right\}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ является неубывающей при любом $x \in E$, то получаем включения $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ Так как для любого $x \in E$ имеем $f_m(x) \to f(x)$ при $m \to \infty$ и $f(x) \ge \ge s(x) \ge cs(x)$, то существует $m(x)$, что при всех $m > m(x)$ выполнено $f(x) \ge f_m(x) \ge cs(x)$, т. е. $x \in E_m$. Следовательно, справедливо равенство $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Тогда для любого номера m получаем

$\int\limits_E f_m\,d\mu \geq \int\limits_{E_m} f_m\,d\mu \geq c\int\limits_{E_m} s\,d\mu$. По теореме 4.3.1 и утверждению 4.1.2 получаем, что $\lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_{E_m} s\,d\mu = \int\limits_E s\,d\mu$. Следовательно, $\ell \geq c\int\limits_E s\,d\mu$. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $c \to 1-0$, получаем $\ell \geq \int\limits_E s\,d\mu = I_E(s)$. Тогда в силу произвольности простой функции s получаем $\ell \geq \sup\limits_{0\leq s\leq f} I_E(s) = \int\limits_E f\,d\mu$, что и требовалось.

Теорема 4.3.3 (*линейность интеграла Лебега*). *Пусть измеримые функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Лебегу на множестве $E \in \mathfrak{M}$. Пусть функция $h = f + g$. Тогда $h \in \mathcal{L}(E)$ и справедливо равенство $\int\limits_E h\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $f \geq 0$ и $g \geq 0$ на множестве E. Если f и g — простые функции, то по определению 4.3.4 сразу получаем требуемое равенство

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu = I_E(f+g) = I_E(f) + I_E(g) = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu.$$

Для произвольных неотрицательных на E функций f и g в силу утверждения 4.3.3 существуют неубывающие по m последовательности $\tilde{s}_m$ и $\hat{s}_m$ неотрицательных простых измеримых функций, таких, что для любого $x \in E$ выполнены равенства

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{s}_m(x) = f(x), \quad \lim_{m\to\infty} \hat{s}_m(x) = g(x).$$

Тогда последовательность $\tilde{s}_m + \hat{s}_m$ является неубывающей по m последовательностью простых неотрицательных измеримых функций, поточечно сходящейся на множестве E к функции $h = f + g$. Тогда по теореме 4.3.2 получаем равенства

$$\int\limits_E h\,d\mu = \lim_{m\to\infty}\left(\int\limits_E (\tilde{s}_m + \hat{s}_m)\,d\mu\right) = \\ = \lim_{m\to\infty}\int\limits_E \tilde{s}_m\,d\mu + \lim_{m\to\infty}\int\limits_E \hat{s}_m\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu.$$

Отсюда, в частности, следует неравенство $\int\limits_E h\,d\mu < +\infty$, т. е. получаем включение $h \in \mathcal{L}(E)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $f \geq 0$ и $g \leq 0$ на множестве E. Определим два измеримых множества

$$A = \left\{ x \in E \;\middle|\; h(x) \geq 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \in E \;\middle|\; h(x) < 0 \right\}.$$

Тогда $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = E$. На множестве A функции h, f и $(-g)$ являются неотрицательными и $f = h + (-g)$. Следовательно, как было показано в первом случае, справедливо равенство

$$\int\limits_A f\,d\mu = \int\limits_A h\,d\mu + \int\limits_A (-g)\,d\mu = \int\limits_A h\,d\mu - \int\limits_A g\,d\mu,$$

т. е. $\int\limits_A h\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \int\limits_A g\,d\mu$ и $h \in \mathcal{L}(A)$. На множестве B функции $(-h)$, f и $(-g)$ являются неотрицательными и $(-g) = f + (-h)$. Следовательно, как было показано в первом случае, справедливо равенство

$$-\int\limits_B g\,d\mu = \int\limits_B (-g)\,d\mu = \int\limits_B f\,d\mu + \int\limits_B (-h)\,d\mu,$$

т. е. $\int\limits_B (-h)\,d\mu = -\int\limits_B f\,d\mu - \int\limits_B g\,d\mu$ и $(-h) \in \mathcal{L}(B)$. Тогда $h \in \mathcal{L}(B)$ и $\int\limits_B h\,d\mu = -\int\limits_B (-h)\,d\mu = \int\limits_B f\,d\mu + \int\limits_B g\,d\mu$. Следовательно, по утверждению 4.3.15 получаем включение $h \in \mathcal{L}(E)$ и равенство $\int\limits_E h\,d\mu = \int\limits_A h\,d\mu + \int\limits_B h\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu$.

В общем случае, множество E представим в виде объединения четырёх попарно непересекающихся измеримых множеств E_k, $k \in \overline{1,4}$, на каждом из которых функции f и g сохраняют знак. Тогда, как было показано в первом и втором случаях, для каждого $k \in \overline{1,4}$ получаем включение $h \in \mathcal{L}(E_k)$ и равенство $\int\limits_{E_k} h\,d\mu = \int\limits_{E_k} f\,d\mu + \int\limits_{E_k} g\,d\mu$. Таким образом, по утверждению 4.3.15 получаем включение $h \in \mathcal{L}(E)$ и требуемое равенство $\int\limits_E h\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu$.

Следствие 4.3.5. *Пусть множество* $E \in \mathfrak{M}$, *а последовательность* $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ *измеримых функций* $f_m\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *такова, что* $f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots$ *для почти всех* $x \in E$, *причём* $f_m \in \mathcal{L}(E)$ *для любого* $m \in \mathbb{N}$. *Пусть функция* $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *определяется равенством* $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ *для почти всех* $x \in E$. *Пусть существует число* M, *такое, что* $\int\limits_E f_m \, d\mu \le M$ *для всех* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда* $f \in \mathcal{L}(E)$ *и* $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_E f_m(x) \, d\mu = \int\limits_E f \, d\mu$.

Доказательство. Для любого номера m определим измеримое множество

$$F_m = \left\{ x \in E \;\middle|\; |f_m(x)| = +\infty \right\}.$$

В силу утверждения 4.3.6 $\mu(F_m) = 0$. Пусть

$$F_0 = E \Big\backslash \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) \right\}.$$

По условию $\mu(F_0) = 0$. Определим множество $E_0 = E \backslash \left(\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} F_m \right)$. Тогда $\mu(E \backslash E_0) = 0$. На множестве E_0 определим последовательность измеримых функций $g_m = f_m - f_1$ и $h = f - f_1$. По определению на E_0 имеем $0 = g_1 \le g_2 \le g_3 \le \ldots$, причём $g_m(x) \to h(x)$ для любого $x \in E_0$. Следовательно, по теореме 4.3.2 получаем

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_0} g_m \, d\mu = \int\limits_{E_0} h \, d\mu.$$

Так как по теореме 4.3.3 имеем

$$\int\limits_{E_0} g_m \, d\mu = \int\limits_{E_0} f_m \, d\mu - \int\limits_{E_0} f_1 \, d\mu = \\ = \int\limits_{E} f_m \, d\mu - \int\limits_{E} f_1 \, d\mu \le M - \int\limits_{E} f_1 \, d\mu = M_0 \ge 0,$$

то получаем неравенство $\int\limits_{E_0} h \, d\mu \le M_0 < +\infty$. Следовательно, справедливо включение $h \in \mathcal{L}(E_0)$. Поэтому по теореме 4.3.3 имеем на

E_0 соотношение $f = h + f_1 \in \mathcal{L}(E_0)$, а в силу утверждения 4.3.5 получаем $f \in \mathcal{L}(E)$. Тогда

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_{E_0} h\,d\mu + \int\limits_{E_0} f_1\,d\mu =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\int\limits_{E_0} f_m\,d\mu - \int\limits_{E_0} f_1\,d\mu\right) + \int\limits_{E_0} f_1\,d\mu =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int\limits_{E_0} f_m\,d\mu = \lim_{m\to\infty}\int\limits_E f_m\,d\mu,$$

что и требовалось.

Теорема 4.3.4 (*Фату*). *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, последовательность измеримых функций $f_m\colon X \to [0,+\infty]$, измеримая функция $f\colon X \to [0,+\infty]$, причём $f(x) = \varliminf\limits_{m\to\infty} f_m(x)$, $x \in X$. Тогда справедливо неравенство $\int\limits_E f\,d\mu \le \varliminf\limits_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\,d\mu$.*

Доказательство. Определим для любого $m \in \mathbb{N}$ неотрицательную измеримую функцию $g_m(x) = \inf\limits_{k\ge m} f_k(x)$, $x \in X$. Тогда для любого $x \in X$ имеем $0 \le g_1(x) \le g_2(x) \le \ldots$ и $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} g_m(x)$ для всех $x \in X$. Следовательно, по теореме 4.3.2 получаем $\lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_E g_m\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu$. Так как для любых $m \in \mathbb{N}$ и $x \in X$ справедливо неравенство $g_m(x) \le f_m(x)$, то в силу утверждения 4.3.8 для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем неравенство $\int\limits_E g_m\,d\mu \le \int\limits_E f_m\,d\mu$. Следовательно, $\int\limits_E f\,d\mu = \lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_E g_m\,d\mu = \varliminf\limits_{m\to\infty}\int\limits_E g_m\,d\mu \le \varliminf\limits_{m\to\infty}\int\limits_E f_m\,d\mu$, что и требовалось.

Следствие 4.3.6. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, последовательность измеримых функций $f_m\colon X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ такова, что $f_m \in \mathcal{L}(E)$ для всех $m \in \mathbb{N}$, и для почти всех $x \in E$ существует $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Тогда, если существует положительное число M, такое, что для всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\int\limits_E |f_m|\,d\mu \le M$, то справедливы включение $f \in \mathcal{L}(E)$ и неравенство $\int\limits_E |f|\,d\mu \le M$.*

Доказательство. Определим измеримое множество

$$E_0 = \left\{ x \in E \ \middle| \ \exists \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) \right\}.$$

Тогда по условию $\mu(E \backslash E_0) = 0$ и $|f_m(x)| \to |f(x)|$ при $m \to \infty$ для всех $x \in E_0$. Следовательно, по теореме 4.3.4 Фату получаем неравенства $\int\limits_{E_0} |f|\, d\mu \le \varliminf\limits_{m\to\infty} \int\limits_{E_0} |f_m|\, d\mu \le M$, что означает $|f| \in \mathfrak{L}(E_0)$. По утверждению 4.3.11 это равносильно включению $f \in \mathfrak{L}(E_0)$, а в силу утверждения 4.3.5 получаем включение $f \in \mathfrak{L}(E)$ и соотношение $\int\limits_E |f|\, d\mu = \int\limits_{E_0} |f|\, d\mu \le M$, что и требовалось.

Пример 4.3.2. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, последовательность $f_m \in \mathfrak{L}(E)$ почти всюду на множестве E сходится к функции $f \in \mathfrak{L}(E)$. Пусть существует число $M > 0$, такое, что $\left|\int\limits_E f_m\, d\mu\right| \le M$ для всех m. При этом может оказаться, что имеет место $\left|\int\limits_E f\, d\mu\right| > M$. Рассмотрим на $E = [0,1]$ для любого $m \in \mathbb{N}$ простую функцию $f_m\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ вида

$$f_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{1}{m}, 1\right], \\ 1-m, & x \in \left[0, \frac{1}{m}\right). \end{cases}$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$\int\limits_{[0,1]} f_m\, d\mu = \int\limits_{\left[\frac{1}{m},1\right]} d\mu - \int\limits_{\left[0,\frac{1}{m}\right)} (m-1)\, d\mu = 1 - \frac{1}{m} - (m-1)\frac{1}{m} = 0.$$

При $m \to \infty$ имеем $f_m(x) \to 1 = f(x)$ для любого $x \in (0,1]$. Ясно, что $\int\limits_{[0,1]} f\, d\mu = 1$. Следовательно, получаем $0 = \left|\int\limits_{[0,1]} f_m\, d\mu\right| < \frac{1}{2} = M < 1 = \left|\int\limits_{[0,1]} f\, d\mu\right|$, что и требовалось.

Теорема 4.3.5 (*Лебег, об ограниченной сходимости*)**.** *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, а последовательность измеримых функций*

$$f_m\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

почти всюду на E сходится к функции f. Пусть существует измеримая функция $g\colon X \to [0, +\infty]$, такая, что $g \in \mathcal{L}(E)$, и для почти всех $x \in E$ и всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|f_m(x)| \leq g(x)$. Тогда справедливы включения $f_m \in \mathcal{L}(E)$ для всех m и $f \in \mathcal{L}(E)$, и существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E f_m \, d\mu = \int\limits_E f \, d\mu.$$

Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$E_m = \left\{ \; x \in E \;\; \middle| \;\; |f_m(x)| \leq g(x) \; \right\}.$$

По условию $\mu(E \backslash E_m) = 0$. В силу следствия 4.3.2 имеем $f_m \in \mathcal{L}(E_m)$, откуда по утверждению 4.3.5 получаем $f_m \in \mathcal{L}(E)$. Определим множество $F = \left\{ \; x \in E \;\; \middle| \;\; \exists \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) \; \right\}$. По условию $\mu(E \backslash F) = 0$. Пусть множество $H = F \backslash \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (E \backslash E_m)$. В силу неравенства

$$\mu \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \backslash E_m) \right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \backslash E_m) = 0$$

получаем $\mu(F \backslash H) = 0$. Так как $E \backslash H \subset (E \backslash F) \cup (F \backslash H)$, то $\mu(E \backslash H) = 0$. Для любого $x \in H$ имеем $|f_m(x)| \leq g(x)$ для всех m и $f_m(x) \to f(x)$ при $m \to \infty$. Следовательно, неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ справедливо для всех $x \in H$. Тогда по следствию 4.3.2 имеем $f \in \mathcal{L}(H)$, откуда по утверждению 4.3.5 получаем включение $f \in \mathcal{L}(E)$. Определим множество $G = \left\{ \; x \in E \;\; \middle| \;\; g(x) = +\infty \; \right\}$. По утверждению 4.3.6 получаем $\mu(G) = 0$. Определим множество $Z = H \backslash G$. Так как справедливо включение $E \backslash Z \subset G \cup (E \backslash H)$, то получаем $\mu(E \backslash Z) = 0$. На множестве Z все функции f_m, f и g конечны. Так как на Z имеем $g + f_m \geq 0$ и $g + f_m \to g + f$ при $m \to \infty$, то по теореме 4.3.4 Фату получаем неравенство

$$\int\limits_Z (g + f) \, d\mu \leq \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_Z (g + f_m) \, d\mu = \int\limits_Z g \, d\mu + \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m \, d\mu.$$

Следовательно, в силу теоремы 4.3.3 получаем неравенство

$$\int\limits_Z f \, d\mu \leq \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m \, d\mu.$$

Аналогично, так как на Z имеем $g - f_m \geq 0$ и $g - f_m \to g - f$ при $m \to \infty$, то по теореме 4.3.4 Фату получаем неравенство

$$\int\limits_Z (g-f)\,d\mu \leq \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_Z (g-f_m)\,d\mu = \int\limits_Z g\,d\mu - \varlimsup_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\,d\mu.$$

Следовательно, в силу теоремы 4.3.3 получаем неравенство

$$\int\limits_Z f\,d\mu \geq \varlimsup_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\,d\mu.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\int\limits_Z f\,d\mu \geq \varlimsup_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\,d\mu \geq \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\,d\mu \geq \int\limits_Z f\,d\mu,$$

откуда следует существование предела $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_Z f_m\,d\mu = \int\limits_Z f\,d\mu$. Так как $\mu(E \backslash Z) = 0$, то в силу утверждения 4.3.5 получаем для любого m равенства $\int\limits_Z f_m\,d\mu = \int\limits_E f_m\,d\mu$ и $\int\limits_Z f\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu$. Следовательно, существует $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu$, что и требовалось.

Следствие 4.3.7. (*об "аквариуме"*) *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) < +\infty$. Пусть последовательность измеримых функций $f_m\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ почти всюду на E сходится к функции f и почти всюду на E ограничена, т. е. существует число $M > 0$, такое, что для почти всех $x \in E$ и всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|f_m(x)| \leq M$. Тогда справедливы включения $f_m \in \mathfrak{L}(E)$ для всех m и $f \in \mathfrak{L}(E)$, и существует предел*

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Сразу следует из утверждения 4.3.7 и теоремы 4.3.5, если рассмотреть функцию $g(x) = M$, $x \in X$.

Пример 4.3.3. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, а последовательность $f_m\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ интегрируемых по Лебегу на E функций является сходящейся почти всюду на множестве E к функции

$f \in \mathcal{L}(E)$. При этом может оказаться, что либо конечного предела $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\,d\mu$ не существует, либо существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_E f_m\,d\mu \neq \int\limits_E f\,d\mu$. Например, рассмотрим на множестве $E = [0,1]$ для любого $m \in \mathbb{N}$ последовательность функций $f_m(x) = m^2\delta_{[0,\frac{1}{m}]}(x)$. Тогда для любого $x \in (0,1]$ выполнено соотношение $f_m(x) \to 0 = f(x)$ при $m \to \infty$, но $\int\limits_{[0,1]} f_m\,d\mu = m \to +\infty$. А для последовательности функций $f_m(x) = m\delta_{[0,\frac{1}{m}]}(x)$ также получаем $f_m(x) \to 0 = f(x)$ при $m \to \infty$ для любого $x \in (0,1]$, при этом для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $\int\limits_{[0,1]} f_m\,d\mu = 1 \neq 0 = \int\limits_{[0,1]} f\,d\mu$.

Теорема 4.3.6. *Пусть $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное на кольце клеточных множеств. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является измеримым по Жордану, а функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ является интегрируемой по Риману на E. Тогда $f \in \mathcal{L}(E)$ и имеет место равенство интегралов Римана и Лебега функции f по множеству E, т. е. $\int\limits_E f\,dx = \int\limits_E f\,d\mu$.*

Доказательство. В силу замечания 4.1.15 всякое измеримое по Жордану множество из $\mathbb{R}^n$ является измеримым по Лебегу, а его меры Жордана и Лебега совпадают. Рассмотрим последовательность $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ вложенных измельчающихся разбиений множества E его измеримыми по Жордану подмножествами, т. е. для любого m имеем $T_m = \{E_{m,k}\}_{k=1}^{N_m}$, где множество $E_{m,k}$ измеримо по Жордану для любого $k \in \overline{1N_m}$ и справедливы соотношения: $E = \bigcup\limits_{k=1}^{N_m} E_{m,k}$, $E_{m,k} \cap E_{m,s} = \varnothing$ при $k \neq s$. При этом $T_{m+1} \prec T_m$, т. е. для любого $k \in \overline{1, N_{m+1}}$ существует $s \in \overline{1, N_m}$, такое, что $E_{m+1,k} \subset E_{m,s}$. Мелкость разбиения $|T_m| = \max\limits_{1\le k\le N_m} \operatorname{diam}(E_{m,k}) \to 0$ при $m \to \infty$. Для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{1, N_m}$ определим числа $M_{m,k} = \sup\limits_{x\in E_{m,k}} f(x)$ и $L_{m,k} = \inf\limits_{E_{m,k}} f(x)$. Рассмотрим измеримые функции

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{N_m} M_{m,k}\delta_{E_{m,k}}(x), \quad h_m(x) = \sum_{k=1}^{N_m} L_{m,k}\delta_{E_{m,k}}(x), \quad x \in E.$$

Тогда $\int\limits_E g_m\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^{N_m} M_{m,k}\mu_J(E_{m,k})$ — верхняя сумма Дарбу функции f, соответствующая разбиению T_m, а $\int\limits_E h_m\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^{N_m} L_{m,k}\mu_J(E_{m,k})$ — нижняя сумма Дарбу функции f, соответствующая разбиению T_m. Следовательно, по определению интеграла Римана имеем равенства $\lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_E g_m\,d\mu = \lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_E h_m\,d\mu = \int\limits_E f\,dx$. С другой стороны, так как для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение вложенности $T_{m+1} \prec T_m$, то справедливы неравенства $g_{m+1}(x) \le g_m(x)$ и $h_{m+1}(x) \ge h_m(x)$ для всех $x \in E$. При этом по определению функций g_m и h_m для всех $x \in$ $\in E$ также выполнены неравенства $g_m(x) \ge f(x) \ge h_m(x)$. Это означает, что для любого $x \in E$ существуют пределы $\lim\limits_{m\to\infty} g_m(x) = g(x)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} h_m(x) = h(x)$, удовлетворяющие неравенствам $g(x) \ge f(x) \ge$ $h(x)$. Тогда по следствию 4.3.5 получаем, что функции $g, h \in \mathcal{L}(E)$, и выполнены равенства $\lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_E g_m\,d\mu = \int\limits_E g\,d\mu$, $\lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_E h_m\,d\mu = \int\limits_E h\,d\mu$. Следовательно, имеем равенства $\int\limits_E g\,d\mu = \int\limits_E h\,d\mu = \int\limits_E f\,dx$. Тогда измеримая функция $(g-h)$ неотрицательна на E и $\int\limits_E (g-h)\,d\mu = 0$. Следовательно, по следствию 4.3.4 получаем $g(x) - h(x) = 0$ для почти всех $x \in E$. Но тогда $f(x) = g(x) = h(x)$ для почти всех $x \in E$. Следовательно, по замечанию 4.2.2 получаем, что функция f измерима на E и эквивалентна на E функциям g и h. Тогда по утверждению 4.3.5 получаем включение $f \in \mathcal{L}(E)$ и равенство $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E g\,d\mu = \int\limits_E h\,d\mu =$ $= \int\limits_E f\,dx$, что и требовалось.

П р и м е р 4.3.4. Примером функции, интегрируемой по Лебегу и не интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a, b]$, $a < b$, может служить функция Дирихле $\mathcal{D}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$\mathcal{D}(x) = \delta_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Здесь $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, а $\mathbb{I}$ — множество всех иррациональных чисел. Рассматриваем на вещественной оси семейство измеримых по Лебегу множеств $\mathfrak{M}(\mu)$, построенное с помощью кольца клеточных множеств из $\mathbb{R}$. Так как множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно, то оно представляет собой счётное объединение одноточечных множеств нулевой меры, и поэтому само имеет Лебегову меру нуль. Следовательно, функция Дирихле эквивалентна тождественно нулевой функции. Поэтому в силу утверждения 4.3.5 получаем следующее включение $\mathcal{D} \in \mathcal{L}([a,b])$ и равенство $\int\limits_{[a,b]} \mathcal{D}\, d\mu = \int\limits_{[a,b]} 0\, d\mu = 0$. Неинтегрируемость функции Дирихле по Риману на любом отрезке ненулевой длины известна из курса математического анализа (см., например, упражнение 7 из [4, гл. 6, с. 156]).

Утверждение 4.3.18. *Пусть $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств на вещественной оси $\mathbb{R}$, построенное на кольце клеточных множеств. Пусть $a < b \le +\infty$, функция $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ является интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a,c] \subset [a,b)$. Пусть несобственный интеграл Римана $I = \int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{c \to b-0} \int\limits_a^c f(x)\, dx$ сходится абсолютно (т. е. сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$). Тогда $f \in \mathcal{L}\Big([a,b)\Big)$, причём справедливо равенство $I = \int\limits_{[a,b)} f\, d\mu$. Если же несобственный интеграл Римана I абсолютно расходится (т. е. $\lim\limits_{c \to b-0} \int\limits_a^c |f(x)|\, dx = +\infty$), то выполняется соотношение $f \notin \mathcal{L}\Big([a,b)\Big)$.*

Доказательство. По теореме 4.3.6 для любого числа c вида $a \le c < b$ выполнено включение $f \in \mathcal{L}\Big([a,c]\Big)$ и справедливы равенства $\int\limits_a^c f(x)\, dx = \int\limits_{[a,c]} f\, d\mu$ и $\int\limits_a^c |f(x)|\, dx = \int\limits_{[a,c]} |f|\, d\mu$. Измеримость функции f на любом отрезке $[a,c] \subset [a,b)$ влечёт её измеримость на промежутке $[a,b)$. Действительно, пусть числовая последовательность $c_m \in [a,b)$ строго возрастает и сходится к b. Тогда справедливо равенство $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} [a, c_m] = [a,b)$. Следовательно, для любого числа α получаем

$$L_<(f,\alpha) = \left\{ x \in [a,b) \;\Big|\; f(x) < \alpha \right\} = \\ = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ x \in [a,c_m] \;\Big|\; f(x) < \alpha \right\} \in \mathfrak{M}(\mu).$$

Тогда в силу счётной аддитивности интеграла Лебега (теорема 4.3.1) и утверждения 4.1.2 имеем равенства

$$\int\limits_{[a,b)} |f|\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{[a,c_m]} |f|\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_a^{c_m} |f(x)|\,dx = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Следовательно, если несобственный интеграл I сходится абсолютно, то получаем $\int\limits_{[a,b)} |f|\,d\mu = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$. Тогда справедливо включение $|f| \in \mathcal{L}\Big([a,b)\Big)$, которое в силу утверждения 4.3.11 равносильно включению $f \in \mathcal{L}\Big([a,b)\Big)$. При этом в силу теоремы 4.3.1 и утверждения 4.1.2 выполнены равенства

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_a^{c_m} f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{[a,c_m]} f\,d\mu =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\int\limits_{[a,c_m]} f_+\,d\mu - \int\limits_{[a,c_m]} f_-\,d\mu \right) =$$

$$= \left(\lim_{m\to\infty} \int\limits_{[a,c_m]} f_+\,d\mu \right) - \left(\lim_{m\to\infty} \int\limits_{[a,c_m]} f_-\,d\mu \right) =$$

$$= \int\limits_{[a,b)} f_+\,d\mu - \int\limits_{[a,b)} f_-\,d\mu = \int\limits_{[a,b)} f\,d\mu.$$

Если же несобственный интеграл I абсолютно расходится, то получаем

$$\int\limits_{[a,b)} |f|\,d\mu = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx = +\infty.$$

Тогда справедливо соотношение $|f| \notin \mathcal{L}\Big([a,b)\Big)$, которое в силу утверждения 4.3.11 равносильно соотношению $f \notin \mathcal{L}\Big([a,b)\Big)$.

4.4. Пространство $\mathbb{L}_p$

В этом параграфе рассматриваем измеримое пространство $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и множество $E \in \mathfrak{M}$.

О п р е д е л е н и е 4.4.1. *Для любого числа $p \geq 1$ множеством $\mathbb{L}_p(E)$ назовём совокупность классов эквивалентных на множестве E измеримых функций $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, таких, что $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$.*

З а м е ч а н и е 4.4.1. Договоримся, что включение $f \in \mathbb{L}_p(E)$ означает, что выбрана произвольная измеримая на E функция f вида $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$ из некоторого класса эквивалентных на множестве E измеримых функций, входящего во множество $\mathbb{L}_p(E)$. Функции, находящиеся в одном классе эквивалентности из $\mathbb{L}_p(E)$, будем называть равными.

Пусть функция g определена на измеримом множестве $G \subset E$ вида $\mu(E \backslash G) = 0$ (т. е. почти всюду на E), измерима и $|g|^p \in \mathcal{L}(G)$. Будем считать её элементом $\mathbb{L}_p(E)$ в следующем смысле: доопределим функцию g произвольным образом на множестве $E \backslash G$ нулевой меры. Получим в силу утверждения 4.2.2 измеримую на E функцию, принадлежащую в силу утверждения 4.3.13 и утверждения 4.3.15 множеству $\mathbb{L}_p(E)$. При этом при различных способах доопределения g на $E \backslash G$ получаются эквивалентные на E функции, т. е. это элементы одного класса эквивалентности из $\mathbb{L}_p(E)$.

У т в е р ж д е н и е 4.4.1. *Множество $\mathbb{L}_p(E)$ является линейным пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нулём в $\mathbb{L}_p(E)$ будем считать класс измеримых функций, эквивалентных на E нулевой функции. Для любой функции $f \in \mathbb{L}_p(E)$ и числа $\alpha \neq 0$ в силу утверждения 4.3.12 получаем $|\alpha f|^p = |\alpha|^p |f|^p \in \mathcal{L}(E)$, т. е. $\alpha f \in \mathbb{L}_p(E)$. Включение $|f|^p \in \in \mathcal{L}(E)$ в силу утверждения 4.3.6 означает, что функция f почти всюду конечна на E. Следовательно, для почти всех $x \in E$ определено произведение $0f(x) = 0$. Таким образом, определённая почти всюду на E функция $0f$ эквивалентна на E нулевой функции, т. е. функция $0f$ равна нулю в $\mathbb{L}_p(E)$. Пусть $f_1 \in \mathbb{L}_p(E)$ и $f_2 \in \mathbb{L}_p(E)$. Тогда существует множество $E_0 \subset E$, такое, $\mu(E \backslash E_0) = 0$, а функции f_1 и f_2 конечны на E_0. Тогда на множестве E_0, т. е. почти всюду на E, определена измеримая функция $f = f_1 + f_2$. Покажем, что справедливо включение $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$, которое в силу утверждения 4.3.5 равносильно включению $|f|^p \in \mathcal{L}(E_0)$. Так как на множестве E_0 выполнено неравенство $|f| \le |f_1| + |f_2|$, то в силу утверждения 4.3.8 достаточно показать включение $\big(|f_1| + |f_2|\big)^p \in \mathcal{L}(E_0)$. В силу утверждения 4.3.3, существуют монотонно возрастающие последовательности неотрицательных измеримых простых функций s'_m и s''_m, поточечно сходящиеся на E_0 соответственно к функциям $|f_1|$ и $|f_2|$. Тогда на E_0 при $m \to \infty$ имеем:

$$(s'_m)^p \uparrow |f_1|^p, \quad (s''_m)^p \uparrow |f_2|^p, \quad (s'_m + s''_m)^p \uparrow \big(|f_1| + |f_2|\big)^p.$$

По теореме 4.3.2 при $m \to \infty$ получаем соотношения:

$$\int\limits_{E_0} (s'_m)^p \, d\mu \to \int\limits_{E_0} |f_1|^p \, d\mu, \qquad \int\limits_{E_0} (s''_m)^p \, d\mu \to \int\limits_{E_0} |f_2|^p \, d\mu,$$
$$\int\limits_{E_0} (s'_m + s''_m)^p \, d\mu \to \int\limits_{E_0} \big(|f_1| + |f_2|\big)^p \, d\mu.$$

Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$. По определению простой неотрицательной измеримой функции s'_m существуют попарно непересекающиеся измеримые подмножества $A_1, \ldots, A_N$ множества E_0 и различные положительные числа $a_1, \ldots, a_N$, такие, что

$$s'_m(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \delta_{A_k}(x), \quad \forall\, x \in E_0.$$

Аналогично, для функции s''_m существуют попарно непересекающиеся измеримые подмножества $B_1, \ldots, B_M$ множества E_0 и различные положительные числа $b_1, \ldots, b_M$, такие, что

$$s''_m(x) = \sum_{r=1}^{M} b_r \delta_{B_r}(x), \quad \forall\, x \in E_0.$$

Пусть множества $A_0 = E_0 \Big\backslash \left(\bigcup\limits_{k=1}^{N} A_k\right)$, $B_0 = E_0 \Big\backslash \left(\bigcup\limits_{r=1}^{M} B_r\right)$. Тогда $s'_m(x) = 0$ для любого $x \in A_0$, а $s''_m(x) = 0$ для любого $x \in B_0$. Определим попарно непересекающиеся множества

$$C_{kr} = A_k \cap B_r \quad \forall\, k \in \overline{0, N}, \quad r \in \overline{0, M}.$$

Тогда для любого $x \in E_0$ получаем:

$$(s'_m + s''_m)(x) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{M} (a_k + b_r) \delta_{C_{kr}}(x) + \sum_{k=1}^{N} a_k \delta_{C_{k0}}(x) + \sum_{r=1}^{M} b_r \delta_{C_{0r}}(x).$$

По определению 4.3.4 и утверждению 4.3.4 имеем равенства:

$$\int\limits_{E_0} (s'_m)^p \, d\mu = I_{E_0}\Big((s'_m)^p\Big) = \sum_{k=1}^{N} (a_k)^p \mu(A_k),$$

$$\int\limits_{E_0} (s''_m)^p \, d\mu = I_{E_0}\Big((s''_m)^p\Big) = \sum_{r=1}^{M} (b_r)^p \mu(B_r).$$

$$\int\limits_{E_0} (s'_m + s''_m)^p = I_{E_0}\Big((s'_m + s''_m)^p\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{M} (a_k + b_r)^p \mu(C_{kr}) + \sum_{k=1}^{N} (a_k)^p \mu(C_{k0}) + \sum_{r=1}^{M} (b_r)^p \mu(C_{0r}).$$

Для любых $k \in \overline{1,N}$ и $r \in \overline{1,M}$ определим следующие числа:

$$\alpha_{kr} = a_k \sqrt[p]{\mu(C_{kr})}, \quad \beta_{kr} = b_r \sqrt[p]{\mu(C_{kr})},$$

$$\alpha_{k0} = a_k \sqrt[p]{\mu(C_{k0})}, \quad \beta_{0r} = b_r \sqrt[p]{\mu(C_{0r})}.$$

Тогда в силу неравенства Минковского для конечных сумм имеем:

$$\sqrt[p]{\int\limits_{E_0} (s'_m + s''_m)^p \, d\mu} = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{M} (\alpha_{kr} + \beta_{kr})^p + \sum_{k=1}^{N} (\alpha_{k0})^p + \sum_{r=1}^{M} (\beta_{0r})^p} \leq$$

$$\leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{M} (\alpha_{kr})^p + \sum_{k=1}^{N} (\alpha_{k0})^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{M} (\beta_{kr})^p + \sum_{r=1}^{M} (\beta_{0r})^p} =$$

$$= \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{N} (a_k)^p \left(\sum_{r=0}^{M} \mu(C_{kr})\right)} + \sqrt[p]{\sum_{r=1}^{M} (b_r)^p \left(\sum_{k=0}^{N} \mu(C_{kr})\right)}.$$

Так как множества C_{kr} при различных k или r не пересекаются, то для любого $k \in \overline{1,N}$ в силу аддитивности меры μ получаем равенства:

$$\sum_{r=0}^{M} \mu(C_{kr}) = \mu\left(\bigcup_{r=0}^{M}(A_k \cap B_r)\right) = \mu\left(A_k \cap \left(\bigcup_{r=0}^{M} B_r\right)\right) = \mu(A_k),$$

так как $\bigcup\limits_{r=0}^{M} B_r = E_0$. Аналогично для любого $r \in \overline{1,M}$ находим, что

$$\sum_{k=0}^{N} \mu(C_{kr}) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{N}(A_k \cap B_r)\right) = \mu\left(B_r \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N} A_k\right)\right) = \mu(B_r),$$

так как $\bigcup\limits_{k=0}^{N} A_k = E_0$. Следовательно, получаем неравенство:

$$\sqrt[p]{\int\limits_{E_0} (s'_m + s''_m)^p \, d\mu} \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{N} (a_k)^p \mu(A_k)} + \sqrt[p]{\sum_{r=1}^{M} (b_r)^p \mu(B_r)} =$$

$$= \sqrt[p]{I_{E_0}\left((s'_m)^p\right)} + \sqrt[p]{I_{E_0}\left((s''_m)^p\right)} = \sqrt[p]{\int\limits_{E_0} (s'_m)^p \, d\mu} + \sqrt[p]{\int\limits_{E_0} (s''_m)^p \, d\mu},$$

переходя в котором к пределу при $m \to \infty$, получаем неравенство

$$\sqrt[p]{\int\limits_{E_0} \big(|f_1| + |f_2|\big)^p \, d\mu} \leq \sqrt[p]{\int\limits_{E_0} |f_1|^p \, d\mu} + \sqrt[p]{\int\limits_{E_0} |f_2|^p \, d\mu} < +\infty,$$

что и требовалось. Следовательно, $f_1 + f_2 \in \mathbb{L}_p(E)$.

Определение 4.4.2. *Для любого $f \in \mathbb{L}_p(E)$ нормой f назовём число $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int\limits_E |f|^p \, d\mu}$.*

Утверждение 4.4.2. *Норма $\|\cdot\|_p$ в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$ удовлетворяет аксиомам нормы из определения 3.1.1 нормированного пространства.*

Доказательство. Ясно, что для любого $f \in \mathbb{L}_p(E)$ и числа α выполнены соотношения $\|f\|_p \geq 0$ и $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$. Неравенство треугольника $\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$ для любых $f_1, f_2 \in \mathbb{L}_p(E)$ доказано при доказательстве утверждения 4.4.1. Наконец, для $f \in \in \mathbb{L}_p(E)$ вида $\|f\|_p = 0$ в силу утверждения 4.3.4 получаем $|f|^p = 0$ почти всюду на E. Следовательно, $f = 0$ почти всюду на E, т. е. f является нулём в $\mathbb{L}_p(E)$.

Теорема 4.4.1. *Линейное нормированное пространство $\mathbb{L}_p(E)$ является полным.*

Доказательство. В силу утверждения 3.1.2 достаточно показать, что любой абсолютно сходящийся ряд из $\mathbb{L}_p(E)$ сходится в $\mathbb{L}_p(E)$. Рассмотрим последовательность $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{L}_p(E)$, такую, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_p = M < +\infty$. Требуется доказать, что существует $g \in \in \mathbb{L}_p(E)$, такой, что выполнено соотношение $\left\| g - \sum\limits_{m=1}^{N} f_m \right\|_p \to 0$ при $N \to \infty$. Для любого номера N определим неотрицательную измеримую функцию $S_N = \left(\sum\limits_{m=1}^{N} |f_m| \right)^p \in \mathfrak{L}(E)$. Ясно, что для любого $x \in E$ и любого номера N выполнено неравенство $S_N(x) \leq S_{N+1}(x)$. Следовательно, последовательность S_N является поточечно сходящейся на E к функции $F\colon E \to [0, +\infty]$. При этом в силу неравенства треугольника для нормы в $\mathbb{L}_p(E)$ для любого N получаем неравенство

$$\sqrt[p]{\int\limits_E S_N \, d\mu} = \left\| \sum_{m=1}^{N} |f_m| \right\|_p \leq \sum_{m=1}^{N} \|f_m\|_p \leq M.$$

Тогда по теореме 4.3.2 получаем при $N \to \infty$ соотношение $\int\limits_E S_N \, d\mu \to \to \int\limits_E F \, d\mu \leq M^p$. Следовательно, справедливо включение $F \in \mathfrak{L}(E)$, которое в силу утверждения 4.3.6 означает конечность почти всюду на множестве E значений функции F. Тогда для почти всех $x \in \in E$ ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |f_m(x)| = \sqrt[p]{F(x)} < +\infty$. Следовательно, для почти всех $x \in E$ числовой ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m(x)$ сходится к величине $g(x)$ вида $|g(x)| \leq \sqrt[p]{F(x)} < +\infty$. Определённая таким образом почти всюду на E измеримая функция g удовлетворяет для почти всех $x \in E$ неравенству $|g(x)|^p \le F(x)$. Так как $F \in \mathcal{L}(E)$, то в силу утверждения 4.3.2 получаем $|g|^p \in \mathcal{L}(E)$, т. е. $g \in \mathbb{L}_p(E)$. Для почти всех $x \in E$ имеем при $N \to \infty$ соотношение

$$\left|g(x) - \sum_{m=1}^{N} f_m(x)\right|^p \to 0$$

и для всех N неравенство

$$\left|g(x) - \sum_{m=1}^{N} f_m(x)\right|^p \le \left(|g(x)| + \sum_{m=1}^{N} |f_m(x)|\right)^p \le$$
$$\le \left(\sqrt[p]{F(x)} + \sqrt[p]{F(x)}\right)^p = 2^p F(x).$$

Следовательно, по теореме 4.3.5 при $N \to \infty$ получаем

$$\left\|g - \sum_{m=1}^{N} f_m\right\|_p = \sqrt[p]{\int\limits_E \left|g(x) - \sum_{m=1}^{N} f_m(x)\right|^p} \to 0,$$

что и требовалось.

Теорема 4.4.2. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}(\mu)$ — σ-кольцо измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, построенное по кольцу $\mathcal{E}$. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда множество $CL_p(E) = \left\{ h\colon E \to \mathbb{R} \;\middle|\; |h|^p \in \mathcal{L}(E) \text{ и } h \in C(E) \right\}$ является всюду плотным в пространстве $\mathbb{L}_p(E)$.*

Доказательство. Для любого $f \in \mathbb{L}_p(E)$ в силу утверждения 4.3.3 существует последовательность простых измеримых на E функций s_m, такая, что на E выполнены неравенства $0 \le (s_m)_+ \le f_+$, $0 \le (s_m)_- \le f_-$, а при $m \to \infty$ справедливы соотношения $(s_m)_+ \to f_+$, $(s_m)_- \to f_-$. Тогда на множестве E имеем неравенство $|s_m| = (s_m)_+ + (s_m)_- \le f_+ + f_- = |f|$. Так как $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$, то по утверждению 4.3.6 функция f почти всюду конечна на E. Следовательно, для почти всех $x \in E$ при $m \to \infty$ получаем соотношение

$$|f - s_m| \le \Big(f_+ - (s_m)_+\Big) + \Big(f_- - (s_m)_-\Big) \to 0.$$

Отсюда почти всюду на E при $m \to \infty$ получаем $|f - s_m|^p \to 0$. Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ на E имеем также неравенство

$$|f - s_m|^p \leq \Big(|f| + |s_m|\Big)^p \leq 2^p |f|^p \in \mathfrak{L}(E),$$

то по теореме 4.3.5 при $m \to \infty$ получаем соотношение $\|f - s_m\|_p = = \sqrt[p]{\int\limits_E |f - s_m|^p \, d\mu} \to 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что справедливо неравенство $\|f - s_{m(\varepsilon)}\|_p \leq \varepsilon$. По замечанию 4.3.1 для простой измеримой функции $s_{m(\varepsilon)}$ существуют различные числа $\{c_k\}_{k=1}^N$ и попарно непересекающиеся измеримые множества $\{E_k\}_{k=1}^N$, такие, что $E = \bigcup\limits_{k=1}^N E_k$, а для любого $x \in E$ выполнено $s_{m(\varepsilon)}(x) = \sum\limits_{k=1}^N c_k \delta_{E_k}(x)$. В силу регулярности меры Лебега (см. теорему 4.1.1) для любого $\delta > 0$ и любого $k \in \overline{1,N}$ существуют замкнутое множество $F_k \subset \mathbb{R}^n$ и открытое множество $G_k \subset \mathbb{R}^n$, такие, что выполнены включения $F_k \subset E_k \subset G_k$ и неравенства $\mu(G_k \backslash E_k) \leq \delta$ и $\mu(E_k \backslash F_k) \leq \delta$.

Для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ определим функцию расстояния от любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ до множества A следующим образом: $\rho(x, A) = \inf\limits_{a \in A} |x - a|$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ получаем неравенство $\rho(x, A) \leq \inf\limits_{a \in A} \Big(|y - a| + |x - y|\Big) = \rho(y, A) + |x - y|$. Следовательно, справедливо неравенство $\Big|\rho(x, A) - \rho(y, A)\Big| \leq |x - y|$. Таким образом, функция $x \mapsto \rho(x, A)$ удовлетворяет на $\mathbb{R}^n$ условию Липшица с константой единица и, в частности, является непрерывной на $\mathbb{R}^n$.

Для любого $k \in \overline{1,N}$ определим функцию $h_k \colon E \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$h_k(x) = \frac{\rho(x, G_k^c)}{\rho(x, G_k^c) + \rho(x, F_k)}, \quad x \in E.$$

Следовательно, $0 \leq h_k(x) \leq 1$ для всех $x \in E$, для любого $x \in F_k$ имеем $h_k(x) = 1$, для любого $x \notin G_k$ имеем $h_k(x) = 0$. Так как множества G_k^c и F_k являются замкнутыми и непересекающимися (в силу $F_k \subset G_k$), то для любого $x \in E$ знаменатель $\rho(x, G_k^c) + \rho(x, F_k) > 0$. Тогда в силу показанной выше непрерывности функции расстояния от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ получаем, что функция h_k непрерывна на E. Определим непрерывную на множестве E

функцию $h(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k h_k(x)$, $x \in E$. Тогда для любого $k \in \overline{1,N}$ и любого $x \in F_k$ выполнено равенство $h(x) = c_k = s_{m(\varepsilon)}(x)$. Тогда в силу теоремы 4.3.1 получаем соотношения

$$\int\limits_E |h - s_{m(\varepsilon)}|^p \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{E_k} |h - s_{m(\varepsilon)}|^p \, d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{E_k \setminus F_k} |c_k|^p |h_k - 1|^p \, d\mu \leq \sum_{m=1}^{N} |2c_k|^p \mu(E_k \setminus F_k) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{m=1}^{N} |2c_k|^p \right) \delta \leq \varepsilon^p$$

при выборе $\delta = \frac{\varepsilon^p}{\sum\limits_{m=1}^{N} |2c_k|^p + 1}$. При этом имеем неравенство

$$\|h - s_{m(\varepsilon)}\|_p \leq \varepsilon.$$

Следовательно, справедливо включение $h \in \mathbb{L}_p(E)$, т. е. $h \in CL_p(E)$, и неравенство $\|f - h\|_p \leq 2\varepsilon$, что и требовалось.

Утверждение 4.4.3. *Пусть* $1 \leq p \leq q$, *а* $\mu(E) < +\infty$. *Тогда* $\mathbb{L}_q(E) \subset \mathbb{L}_p(E)$.

Доказательство. Для любого $f \in \mathbb{L}_q(E)$ определим измеримые множества

$$A = \left\{ x \in E \;\middle|\; |f(x)| \geq 1 \right\}, \quad B = \left\{ x \in E \;\middle|\; |f(x)| < 1 \right\}.$$

Тогда $A \cup B = E$ и $A \cap B = \varnothing$. Для любого $x \in A$ имеем неравенство $|f(x)|^p \leq |f(x)|^q$, а для любого $x \in B$ имеем $|f(x)|^p \leq 1$. Следовательно, в силу теоремы 4.3.1 и утверждения 4.3.8 получаем соотношения

$$\int\limits_E |f|^p \, d\mu = \int\limits_A |f|^p \, d\mu + \int\limits_B |f|^p \, d\mu \leq \int\limits_A |f|^q \, d\mu + \int\limits_B 1 \, d\mu \leq$$

$$\leq \int\limits_A |f|^q \, d\mu + \int\limits_B |f|^q \, d\mu + \int\limits_A 1 \, d\mu + \int\limits_B 1 \, d\mu =$$

$$= \int\limits_E |f|^q \, d\mu + \mu(E) < +\infty.$$

Это означает, что $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$, т. е. $f \in \mathbb{L}_p(E)$, что и требовалось.

О п р е д е л е н и е 4.4.3. *Множеством $\mathbb{L}_\infty(E)$ назовём совокупность классов эквивалентных на множестве E измеримых функций $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, ограниченных почти всюду на E.*

З а м е ч а н и е 4.4.2. Договоримся, что включение $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ означает, что выбрана произвольная измеримая ограниченная почти всюду на E функция f из некоторого класса эквивалентных на множестве E измеримых функций, входящего в множество $\mathbb{L}_\infty(E)$. Функции, находящиеся в одном классе эквивалентности из $\mathbb{L}_\infty(E)$, будем называть равными.

Пусть функция g определена на измеримом множестве $G \subset E$ вида $\mu(E \backslash G) = 0$ (т. е. почти всюду на E), измерима и является ограниченной почти всюду на G. Будем считать её элементом $\mathbb{L}_\infty(E)$ в следующем смысле: доопределим функцию g произвольным образом на множестве $E \backslash G$ нулевой меры, получим в силу утверждения 4.2.2 измеримую ограниченную почти всюду на E функцию, принадлежащую $\mathbb{L}_\infty(E)$. При этом при различных способах доопределения g на $E \backslash G$ получаются эквивалентные на E функции, т. е. это элементы одного класса эквивалентности из $\mathbb{L}_\infty(E)$.

У т в е р ж д е н и е 4.4.4. *Множество $\mathbb{L}_\infty(E)$ является линейным пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нулём в $\mathbb{L}_\infty(E)$ будем считать класс измеримых функций, эквивалентных на E нулевой функции. Для любого $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ существует число $M > 0$, такое, что для почти всех $x \in E$ выполнено неравенство $|f(x)| \le M$. Тогда для любого числа α почти всюду на E определена измеримая функция αf, ограниченная числом $|\alpha| M$. Следовательно, выполнено включение $\alpha f \in \mathbb{L}_\infty(E)$. Пусть $f_1 \in \mathbb{L}_\infty(E)$ и $f_2 \in \mathbb{L}_\infty(E)$. Тогда существуют числа $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, такие, что для почти всех $x \in E$ выполнены неравенства $|f_1(x)| \le M_1$ и $|f_2(x)| \le M_2$. Следовательно, почти всюду на E определена измеримая функция $f = f_1 + f_2$, причём для почти всех $x \in E$ выполнено неравенство $|f(x)| \le M_1 + M_2$. Таким образом, выполнено включение $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$.

О п р е д е л е н и е 4.4.4. *Пусть измеримая функция*

$$f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

ограничена почти всюду на E. Существенной верхней гранью функции f на E называется величина

$$\operatorname*{ess\,sup}_E f = \inf\left\{ M \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \le M \text{ для п. в. } x \in E \right\}.$$

Определение 4.4.5. *Для любого $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ нормой f назовём число $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_E |f|$.*

Утверждение 4.4.5. *Норма $\|\cdot\|_\infty$ в пространстве $\mathbb{L}_\infty(E)$ удовлетворяет аксиомам нормы из определения 3.1.1 нормированного пространства.*

Доказательство. Так как любая функция $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ ограничена почти всюду на E, т. е. существует число $M > 0$, такое, что $|f(x)| \le M$ для почти всех $x \in E$, то $0 \le \|f\|_\infty \le M$. Далее для любого числа $\alpha \ne 0$ имеем соотношения

$$\|\alpha f\|_\infty = \inf\left\{ M \ge 0 \;\middle|\; |\alpha f(x)| \le M \text{ для п. в. } x \in E \right\} =$$
$$= |\alpha| \inf\left\{ \frac{M}{|\alpha|} \ge 0 \;\middle|\; |f(x)| \le \frac{M}{|\alpha|} \text{ для п. в. } x \in E \right\} = |\alpha|\, \|f\|_\infty.$$

Равенство $\|0f\|_\infty = 0 = 0\|f\|_\infty$ очевидно. Для любых $f_1, f_2 \in \mathbb{L}_\infty(E)$ имеем

$$\|f_1+f_2\|_\infty = \inf\left\{ M \ge 0 \;\middle|\; |f_1(x) + f_2(x)| \le M \text{ для п. в. } x \in E \right\} \le$$
$$\le \inf\left\{ M \ge 0 \;\middle|\; |f_1(x)| + |f_2(x)| \le M \text{ для п. в. } x \in E \right\} \le$$
$$\le \inf\left\{ M_1 + M_2 \;\middle|\; |f_1(x)| \le M_1,\ \ |f_2(x)| \le M_2 \text{ для п. в. } x \in E \right\} =$$
$$= \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty.$$

Теорема 4.4.3. *Линейное нормированное пространство $\mathbb{L}_\infty(E)$ является полным.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{L}_\infty(E)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех $m, k \ge N(\varepsilon)$ имеем неравенство

$$\|f_m - f_k\|_\infty \le \varepsilon.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ существует множество $E_m \subset E$ меры нуль, такое, что функция f_m ограничена на $E \setminus E_m$. Тогда множество $E_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ имеет меру нуль, и каждая функция f_m ограничена на множестве $E \setminus E_0$. При этом для всех $m, k \geq N(\varepsilon)$ получаем

$$\sup_{x \in E \setminus E_0} |f_m(x) - f_k(x)| = \|f_m - f_k\|_\infty < \varepsilon.$$

Это означает, что существует функция $f \colon E \setminus E_0 \to \mathbb{R}$, такая, что $f_m \rightrightarrows f$ на $E \setminus E_0$ при $m \to \infty$. Тогда в силу утверждения 4.2.2 функция f измерима на $E \setminus E_0$, причём для любого $x \in E \setminus E_0$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq |f_{N(1)}(x)| + 1$. Так как функция $f_{N(1)}$ ограничена на множестве $E \setminus E_0$, то f также является ограниченной на $E \setminus E_0$. Следовательно, выполнено включение $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$, и

$$\|f_m - f\|_\infty = \sup_{x \in E \setminus E_0} |f_m(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

что и требовалось.

Утверждение 4.4.6. *Пусть* $0 < \mu(E) < +\infty$. *Тогда для любого* $f \in \mathbb{L}_\infty(E)$ *и любого числа* $p \geq 1$ *выполнено включение* $f \in \mathbb{L}_p(E)$ *и существует предел* $\lim\limits_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Доказательство. Так как для любого числа $p \geq 1$ функция $|f|^p$ ограничена почти всюду на E, то включение $|f|^p \in \mathcal{L}(E)$ следует из утверждения 4.3.7. Если $\|f\|_\infty = 0$, то $\|f\|_p = 0$ для любого $p \geq 1$. Поэтому далее считаем, что $\|f\|_\infty > 0$. Так как $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ для почти всех $x \in E$, то получаем неравенство $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \sqrt[p]{\mu(E)}$. С другой стороны, для любого положительного числа $R < \|f\|_\infty$ существует измеримое множество $E_R \subset E$ положительной меры, такое, что $|f(x)| \geq R$ для всех $x \in E_R$. Следовательно, получаем неравенство

$$\|f\|_p \geq \sqrt[p]{\int_{E_R} |f|^p \, d\mu} \geq R \sqrt[p]{\mu(E_R)}.$$

Так как при $p \to +\infty$ имеем соотношения $\sqrt[p]{\mu(E)} \to 1$ и $\sqrt[p]{\mu(E_R)} \to 1$, то получаем неравенства

$$R \leq \varliminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \leq \varlimsup_{p \to +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

Тогда после предельного перехода при $R \to \|f\|_\infty - 0$ получаем равенства
$$\varliminf_{p\to+\infty} \|f\|_p = \varlimsup_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$
Это означает, что существует $\lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$, что и требовалось.

4.5. Мера и интеграл Лебега—Стилтьеса

В этом параграфе $\mathcal{E}$ — кольцо клеточных множеств в $\mathbb{R}$, $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция.

Определение 4.5.1. *Мерой Стилтьеса на $\mathcal{E}$, соответствующей функции α, назовём функцию $\mu_\alpha\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, такую, что для любых чисел $a \le b$ выполнены равенства $\mu_\alpha[a,b] = \alpha(b+0) - \alpha(a-0)$,*
$$\mu_\alpha[a,b) = \alpha(b-0) - \alpha(a-0), \quad \mu_\alpha(a,b] = \alpha(b+0) - \alpha(a+0),$$
а при $a < b$ выполнено равенство $\mu_\alpha(a,b) = \alpha(b-0) - \alpha(a+0)$. Для любого клеточного множества $A \in \mathcal{E}$ и любого его разбиения попарно непересекающимися промежутками $\{I_m\}_{m=1}^N$, т. е.
$$A = \bigcup_{m=1}^N I_m, \quad I_m \cap I_k = \varnothing \quad \text{при всех} \quad m \ne k,$$
выполнено равенство $\mu_\alpha(A) = \sum\limits_{m=1}^N \mu_\alpha(I_m)$.

Замечание 4.5.1. Определение меры Стилтьеса клеточного множества не зависит от выбора его разбиения попарно непересекающимися промежутками. Доказательство аналогично доказательству утверждения 4.1.4.

Утверждение 4.5.1. *Мера Стилтьеса $\mu_\alpha\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ является конечно-аддитивной и регулярной.*

Доказательство. Пусть множества $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \cap B = \varnothing$. Пусть $\mathcal{P}_A = \{I_m\}_{m=1}^N$ — разбиение множества A, $\mathcal{P}_B = \{J_k\}_{k=1}^M$ —

разбиение множества B. Так как $A \cap B = \varnothing$, то получаем $I_m \cap J_k = \varnothing$ при всех $m \in \overline{1, N}$ и $k \in \overline{1, M}$. Следовательно, $\mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B$ является разбиением множества $A \cup B$, поэтому справедливо равенство

$$\mu_\alpha(A \cup B) = \sum_{m=1}^{N} \mu_\alpha(I_m) + \sum_{k=1}^{M} \mu_\alpha(J_k) = \mu_\alpha(A) + \mu_\alpha(B).$$

Таким образом, конечная аддитивность меры μ_α доказана.

Покажем регулярность μ_α для любого промежутка. Пусть числа $a \le b$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при всех $t \in (b, b + \delta)$ выполнено неравенство

$$\alpha(t) - \alpha(b + 0) \le \varepsilon,$$

а при всех $t \in (a - \delta, a)$ выполнено неравенство

$$\alpha(a - 0) - \alpha(t) \le \varepsilon.$$

Следовательно, открытый промежуток $G = (a - \delta, b + \delta) \supset [a, b]$ и справедливо неравенство

$$\mu_\alpha(G) - \mu_\alpha[a, b] = \alpha(b + \delta - 0) - \alpha(b + 0) + \alpha(a - 0) - \alpha(a - \delta + 0) \le 2\varepsilon.$$

Так как промежуток $[a, b]$ замкнут, то полагаем $F = [a, b]$. Следовательно, регулярность меры μ_α для промежутка $[a, b]$ доказана.

Если $a = b$, то $(a, b) = [a, b) = (a, b] = \varnothing$. Поэтому для проверки регулярности μ_α в этом случае полагаем $F = G = \varnothing$ — одновременно замкнутый и открытый промежуток.

Далее считаем, что $a < b$. Тогда для выбранного $\varepsilon > 0$ существует $\gamma = \gamma(\varepsilon) \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$, такое, что при всех $t \in (b - \gamma, b)$ выполнено неравенство $\alpha(b - 0) - \alpha(t) \le \varepsilon$, а при всех $t \in (a, a + \gamma)$ выполнено неравенство $\alpha(t) - \alpha(a + 0) \le \varepsilon$.

Рассмотрим промежуток $(a, b]$. Определим замкнутый промежуток $F = [a + \gamma, b] \subset (a, b]$ и открытый промежуток $G = (a, b + \delta) \supset (a, b]$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{array}{rcccl} \mu_\alpha(G) - \mu_\alpha(a, b] & = & \alpha(b + \delta - 0) - \alpha(b + 0) & \le & \varepsilon, \\ \mu_\alpha(a, b] - \mu_\alpha(F) & = & \alpha(a + \gamma - 0) - \alpha(a + 0) & \le & \varepsilon. \end{array}$$

Следовательно, регулярность меры μ_α для промежутка $(a, b]$ доказана.

Рассмотрим промежуток $[a, b)$. Определим замкнутый промежуток $F = [a, b-\gamma] \subset [a, b)$ и открытый промежуток $G = (a-\delta, b) \supset$ $\supset [a, b)$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{array}{rcccl} \mu_\alpha(G) - \mu_\alpha[a, b) & = & \alpha(a-0) - \alpha(a-\delta+0) & \leq & \varepsilon, \\ \mu_\alpha[a, b) - \mu_\alpha(F) & = & \alpha(b-0) - \alpha(b-\gamma+0) & \leq & \varepsilon. \end{array}$$

Следовательно, регулярность меры μ_α для промежутка $[a, b)$ доказана.

Рассмотрим промежуток (a, b). Определим замкнутый промежуток $F = [a+\gamma, b-\gamma] \subset (a, b)$ и открытый промежуток $G = (a, b)$. Тогда справедливо неравенство

$$\mu_\alpha(a, b) - \mu_\alpha(F) = \alpha(b-0) - \alpha(b-\gamma+0) + \alpha(a+\gamma-0) - \alpha(a+0) \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно, регулярность меры μ_α для промежутка (a, b) доказана.

Таким образом, доказана регулярность меры μ_α для любого промежутка. Далее доказательство регулярности меры μ_α для произвольного клеточного множества проводится совершенно аналогично соответствующему доказательству из утверждения 4.1.6.

Определение 4.5.2. *σ-кольцо μ_α-измеримых по Лебегу множеств $\mathfrak{M}(\mu_\alpha)$ называется σ-кольцом множеств, измеримых по Лебегу—Стилтьесу, а верхняя мера Лебега μ_α^* на $\mathfrak{M}(\mu_\alpha)$ называется мерой Лебега—Стилтьеса.*

Замечание 4.5.2. Если функция $\alpha_0(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то мера μ_{α_0} на кольце $\mathcal{E}$ является обычной мерой μ клеточного множества, значение которой на любом промежутке равно длине этого промежутка. Тогда $\mathfrak{M}(\mu_{\alpha_0}) = \mathfrak{M}(\mu)$ и $\mu_{\alpha_0}^* = \mu^*$.

Определение 4.5.3. *Пусть множество $E \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha)$, функция $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ является μ_α-измеримой. Интегралы Лебега $I_+ = \int\limits_E f_+ \, d\mu_\alpha$ и $I_- = \int\limits_E f_- \, d\mu_\alpha$ называются интегралами Лебега—Стилтьеса неотрицательных на E μ_α-измеримых функций f_+ и f_- соответственно. Если величины I_+ и I_- конечны, то функция f называется интегрируемой по Лебегу—Стилтьесу на множестве E, а её интеграл Лебега—Стилтьеса равен $\int\limits_E f \, d\mu_\alpha = I_+ - I_-$. Множество интегрируемых по Лебегу—Стилтьесу на множестве E функций обозначим $\mathcal{L}_\alpha(E)$.*

Известно, что неубывающая на $\mathbb{R}$ функция α имеет не более счётного числа разрывов первого рода. Пусть $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — все разрывы функции α, причём $x_m \neq x_k$ при всех $m \neq k$. Для определённости будем считать, что функция α является непрерывной слева на $\mathbb{R}$, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $\alpha(x-0) = \alpha(x)$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ определим $\lambda_m = \alpha(x_m + 0) - \alpha(x_m) > 0$ — скачок функции α в точке разрыва x_m. Выберем точку $x_0 \neq x_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и определим число $c_0 = \alpha(x_0)$. Тогда для любого $x > x_0$ имеем неравенство

$$\sum_{m\,:\,x_0 < x_m < x} \lambda_m \leq \alpha(x) - \alpha(x_0)$$

и для любого $x < x_0$ имеем неравенство

$$\sum_{m\,:\,x \leq x_m < x_0} \lambda_m \leq \alpha(x_0) - \alpha(x).$$

Определим два множества индексов

$$J_+ = \{\, m \in \mathbb{N} \mid x_0 < x_m \,\}, \qquad J_- = \{\, m \in \mathbb{N} \mid x_0 > x_m \,\}.$$

Определим две функции

$$\beta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \qquad \gamma(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Неубывающую функцию α будем называть функцией скачков, если для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\alpha(x) = c_0 + \sum_{m \in J_+} \lambda_m \beta(x - x_m) + \sum_{m \in J_-} (-\lambda_m) \gamma(x_m - x).$$

Тогда значение $\alpha(x)$ для любого $x > x_0$ определяется равенством

$$\alpha(x) = c_0 + \sum_{m\,:\,x_0 < x_m < x} \lambda_m,$$

а для любого $x < x_0$ — равенством

$$\alpha(x) = c_0 - \sum_{m\,:\,x \leq x_m < x_0} \lambda_m.$$

Для любого $x > x_0$ получаем

$$\alpha(x-0) = c_0 + \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x_0<x_m<x-\delta} \lambda_m = c_0 + \sum_{m\,:\,x_0<x_m<x} \lambda_m = \alpha(x),$$

для любого $x < x_0$ получаем

$$\alpha(x-0) = c_0 - \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x-\delta\le x_m<x_0} \lambda_m = c_0 - \sum_{m\,:\,x\le x_m<x_0} \lambda_m = \alpha(x),$$

а для $x = x_0$ получаем

$$\alpha(x_0-0) = c_0 - \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x_0-\delta\le x_m<x_0} \lambda_m = \\ = c_0 - \sum_{m\,:\,x_0\le x_m<x_0} \lambda_m = c_0 = \alpha(x_0),$$

т. е. функция скачков α является непрерывной слева на $\mathbb{R}$. Далее для любого $x \ge x_0$ вида $x \ne x_s$ при всех $s \in \mathbb{N}$ получаем

$$\alpha(x+0) = c_0 + \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x_0<x_m<x+\delta} \lambda_m = c_0 + \sum_{m\,:\,x_0<x_m\le x} \lambda_m = \alpha(x),$$

а для $x = x_s > x_0$ находим

$$\alpha(x_s+0) = c_0 + \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x_0<x_m<x_s+\delta} \lambda_m = \\ = c_0 + \sum_{m\,:\,x_0<x_m\le x_s} \lambda_m = \alpha(x_s) + \lambda_s.$$

Аналогично для любого $x < x_0$ вида $x \ne x_s$ при всех $s \in \mathbb{N}$ получаем

$$\alpha(x+0) = c_0 - \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x+\delta\le x_m<x_0} \lambda_m = c_0 - \sum_{m\,:\,x<x_m<x_0} \lambda_m = \alpha(x),$$

а для $x = x_s < x_0$ находим

$$\alpha(x_s+0) = c_0 - \lim_{\delta\to+0} \sum_{m\,:\,x_s+\delta\le x_m<x_0} \lambda_m = \\ = c_0 - \sum_{m\,:\,x_s<x_m<x_0} \lambda_m = \alpha(x_s) + \lambda_s.$$

Таким образом, функция α непрерывна справа в любой точке $x \neq x_s$ при всех s, а в каждой точке x_s она имеет разрыв справа со скачком, равным λ_s.

Для определённой выше непрерывной слева функции скачков α определим вид σ-кольца μ_α-измеримых множеств $\mathfrak{M}(\mu_\alpha)$ и значения меры Лебега—Стилтьеса μ_α^*. Для любых чисел $a \leq b$ имеем равенства

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha[a,b] = \alpha(b+0) - \alpha(a) &= \sum_{m\,:\,a \leq x_m \leq b} \lambda_m = \sum_{m\,:\,x_{m \in [a,b]}} \lambda_m, \\
\mu_\alpha[a,b) = \alpha(b) - \alpha(a) &= \sum_{m\,:\,a \leq x_m < b} \lambda_m = \sum_{m\,:\,x_{m \in [a,b)}} \lambda_m, \\
\mu_\alpha(a,b] = \alpha(b+0) - \alpha(a+0) &= \sum_{m\,:\,a < x_m \leq b} \lambda_m = \sum_{m\,:\,x_{m \in (a,b]}} \lambda_m, \\
\mu_\alpha(a,b) = \alpha(b) - \alpha(a+0) &= \sum_{m\,:\,a < x_m < b} \lambda_m = \sum_{m\,:\,x_{m \in (a,b)}} \lambda_m.
\end{aligned}$$

Таким образом, для любого числового промежутка I справедливо равенство

$$\mu_\alpha(I) = \sum_{m\,:\,x_m \in I} \lambda_m < +\infty.$$

Тогда для любого клеточного множества $A \in \mathcal{E}$ получаем равенство

$$\mu_\alpha(A) = \sum_{m\,:\,x_m \in A} \lambda_m < +\infty.$$

Так как для любого $A \in \mathcal{E}$ имеем включение $A \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha)$, то справедливо равенство

$$\mu_\alpha^* \left(A \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty \right) = \mu_\alpha^*(A) - \mu_\alpha^* \left(\bigcup_{m\,:\,x_m \in A} x_m \right) =$$
$$= \mu_\alpha^*(A) - \sum_{m\,:\,x_m \in A} \mu_\alpha(x_m) = \sum_{m\,:\,x_m \in A} \lambda_m - \sum_{m\,:\,x_m \in A} \lambda_m = 0.$$

Следовательно, для любого множества $A \in \mathcal{E}$ множество

$$A \backslash \{x_m\}_{m=1}^\infty \in \mathfrak{M}_0(\mu_\alpha).$$

Так как справедливо равенство $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} [k, k+1) \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha)$, то получаем равенство

$$\mu_\alpha^*(\mathbb{R}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_\alpha[k, k+1) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m = \sum_{m\,:\,x_m \in \mathbb{R}} \lambda_m.$$

Так как справедливо равенство

$$\mu_\alpha^*\left(\mathbb{R}\backslash\{x_m\}_{m=1}^\infty\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_\alpha^*\Big([k,k+1)\backslash\{x_m\}_{m=1}^\infty\Big) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0 = 0,$$

то для любого множества $E \subset \mathbb{R}$ имеем включения

$$E\backslash\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}\backslash\{x_m\}_{m=1}^\infty \in \mathfrak{M}_0(\mu_\alpha).$$

Следовательно, в силу замечания 4.1.12 получаем включение

$$E\backslash\{x_m\}_{m=1}^\infty \in \mathfrak{M}_0(\mu_\alpha).$$

Так как множество $\bigcup\limits_{m\,:\,x_m\in E} x_m \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha)$ как не более чем счетное объединение одноточечных промежутков, то получаем соотношение

$$E = \Big(E\backslash\{x_m\}_{m=1}^\infty\Big) \cup \left(\bigcup_{m\,:\,x_m\in E} x_m\right) \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha).$$

Следовательно, любое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является μ_α-измеримым, и справедливо равенство

$$\mu_\alpha^*(E) = \sum_{m\,:\,x_m\in E} \lambda_m.$$

Тогда любая функция $f\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ является μ_α-измеримой. Так как множество $E\backslash\{x_m\}_{m=1}$ имеет нулевую меру Лебега—Стилтьеса, то в силу утверждения 4.3.13 и теоремы 4.3.1 получаем равенства

$$\int\limits_E f_+\,d\mu_\alpha = \sum_{m\,:\,x_m\in E} \left(\int\limits_{x_m} f_+\,d\mu_\alpha\right) = \\ = \sum_{m\,:\,x_{m\in E}} f_+(x_m)\mu_\alpha(x_m) = \sum_{m\,:\,x_{m\in E}} f_+(x_m)\lambda_m,$$

$$\int\limits_E f_-\,d\mu_\alpha = \sum_{m\,:\,x_m\in E} \left(\int\limits_{x_m} f_-\,d\mu_\alpha\right) = \\ = \sum_{m\,:\,x_{m\in E}} f_-(x_m)\mu_\alpha(x_m) = \sum_{m\,:\,x_{m\in E}} f_-(x_m)\lambda_m.$$

Таким образом, $f \in \mathcal{L}_\alpha(E)$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\sum_{m\,:\,x_m \in E} |f(x_m)|\lambda_m < +\infty,$$

при этом интеграл Лебега—Стилтьеса от функции f по множеству E равен

$$\int\limits_E f\,d\mu_\alpha = \sum_{m\,:\,x_m \in E} f(x_m)\lambda_m.$$

Пусть $\mu\colon \mathcal{E} \to [0,+\infty)$ обозначает обычную меру клеточного множества, значение которой на любом числовом промежутке равно длине этого промежутка. Далее нам понадобится следующее

Утверждение 4.5.2. *Пусть функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда её производная f' является μ-измеримой функцией на $[a,b]$. Если производная f' ограничена на отрезке $[a,b]$, то $f' \in \mathcal{L}(E)$ и справедлива формула Ньютона—Лейбница:*

$$\int\limits_{[a,b]} f'\,d\mu = f(b) - f(a).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g\colon [a,b+1] \to \mathbb{R}$ вида

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b], \\ f(b) + f'(b)(x-b), & x \in [b,b+1]. \end{cases}$$

Тогда функция g дифференцируема на отрезке $[a,b+1]$, причём для любого $x \in [a,b]$ справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{m\to\infty} m\left(g\left(x+\tfrac{1}{m}\right) - g(x)\right).$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$h_m(x) = m\left(g\left(x+\frac{1}{m}\right) - g(x)\right),$$

где $x \in [a,b]$. Тогда при каждом $m \in \mathbb{N}$ в силу утверждения 4.2.3 и следствия 4.2.3 функция h_m является μ-измеримой. Так как для любого $x \in [a,b]$ имеем соотношение $h_m(x) \to f'(x)$ при $m \to \infty$, то в силу следствия 4.2.2 получаем μ-измеримость функции f' на $[a,b]$.

Предположим, что производная f' является ограниченной на отрезке $[a,b]$, т. е. существует число $M > 0$, такое, что для любого $x \in [a,b]$ выполнено неравенство $|f'(x)| \le M$. Тогда в силу утверждения 4.3.7 получаем, что функции f' и $|f'|$ являются μ-интегрируемыми по Лебегу на отрезке $[a,b]$. Для любого $x \in [a,b]$ и любого $m \in \mathbb{N}$ по теореме Лагранжа существует число $\xi_m \in \left(x, x+\frac{1}{m}\right)$, такое, что $h_m(x) = g'(\xi_m)$. Так как при $x \in [a,b]$ выполнено $g'(x) = f'(x)$, а при $x \in [b,b+1]$ выполнено $g'(x) = f'(b)$, то $|g'(x)| \le M$ для любого $x \in [a,b+1]$. Но тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ и $x \in [a,b]$ получаем неравенство $|h_m(x)| \le M$. Следовательно, по следствию 4.3.7 теоремы Лебега об ограниченной сходимости получаем равенство

$$\int\limits_{[a,b]} f'\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{[a,b]} h_m\,d\mu.$$

По теореме 4.3.6 для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем равенство $\int\limits_{[a,b]} h_m\,d\mu = \int\limits_a^b h_m(x)\,dx$ — интеграл Римана от функции h_m по отрезку $[a,b]$. Тогда получаем

$$\int\limits_a^b h_m(x)\,dx = m\int\limits_{a+\frac{1}{m}}^{b+\frac{1}{m}} g(x)\,dx - m\int\limits_a^b g(x)\,dx = m\int\limits_b^{b+\frac{1}{m}} g(x)\,dx - m\int\limits_a^{a+\frac{1}{m}} g(x)\,dx.$$

По теореме о среднем для интеграла Римана от непрерывной функции для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют числа $y_m \in \left[a, a+\frac{1}{m}\right]$ и $z_m \in \left[b, b+\frac{1}{m}\right]$, такие, что справедливы равенства

$$m\int\limits_a^{a+\frac{1}{m}} g(x)\,dx = g(y_m), \qquad m\int\limits_b^{b+\frac{1}{m}} g(x)\,dx = g(z_m).$$

Тогда при $m \to \infty$ имеем $y_m \to a + 0$ и $z_m \to b + 0$, следовательно, $g(y_m) \to g(a) = f(a)$ и $g(z_m) \to g(b) = f(b)$. Отсюда получаем формулу Ньютона—Лейбница:

$$\int\limits_{[a,b]} f'\,d\mu = \lim_{m\to\infty}\left(m\int\limits_b^{b+\frac{1}{m}} g(x)\,dx - m\int\limits_a^{a+\frac{1}{m}} g(x)\,dx\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\Big(g(z_m) - g(y_m)\Big) = f(b) - f(a).$$

Рассмотрим неубывающую функцию $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дифференцируемую на $\mathbb{R}$, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ существует производная $\alpha'(x) \geq 0$. Предположим, что функция α' ограничена на любом ограниченном множестве из $\mathbb{R}$. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ является ограниченным, т. е. существует отрезок $[a,b] \supset E$. Покажем, что в этом случае выполнено включение $E \in \mathfrak{M}_F(\mu_\alpha)$, причём $\mu_\alpha^*(E) = \int\limits_E \alpha'\,d\mu$.

Прежде всего заметим, что для любого промежутка I с концами $a \leq b$ в силу утверждения 4.5.2 имеем $\mu_\alpha(I) = \alpha(b) - \alpha(a) = \int\limits_I \alpha'\,d\mu$. Тогда для любого множества $A \in \mathcal{E}$ получаем равенство $\mu_\alpha(A) = \int\limits_A \alpha'\,d\mu$.

Рассмотрим теперь ограниченное множество $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Тогда по определению 4.1.10 существует последовательность клеточных множеств $\{A_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{E}$, такая, что $d(A_m, E) = \mu^*(A_m \triangle E) \to 0$ при $m \to \infty$. Так как множество E ограничено, то существует отрезок $[a,b] \supset E$. Тогда для множества $B_m = A_m \cap [a,b] \in \mathcal{E}$ получаем $B_m \triangle E \subset A_m \triangle E$. Следовательно, $d(B_m, E) = \mu^*(B_m \triangle E) \leq \mu^*(A_m \triangle E) = d(A_m, E) \to 0$ при $m \to \infty$. В силу регулярности меры Лебега μ^* на $\mathfrak{M}(\mu)$ существует открытое множество $G_m \supset (B_m \triangle E)$, такое, что $\mu^*\Big(G_m \backslash (B_m \triangle E)\Big) \leq \frac{1}{m}$. Так как выполнено включение $B_m \triangle E \subset [a,b]$, то для множества $H_m = G_m \cap [a,b] \supset (B_m \triangle E)$ верно включение $H_m \backslash (B_m \triangle E) \subset G_m \backslash (B_m \triangle E)$ и неравенство $\mu^*\Big(H_m \backslash (B_m \triangle E)\Big) \leq \mu^*\Big(G_m \backslash (B_m \triangle E)\Big) \leq \frac{1}{m}$. Открытое множество $G_m \subset \mathbb{R}$ можно представить в виде счётного объединения попарно непересекающихся открытых (быть может, пустых) интервалов $I_{m,k}$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. $G_m = \bigcup\limits_{k=1}^\infty I_{m,k}$, $I_{m,k} \cap I_{m,s} = \varnothing$ при $k \neq s$. Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $I_{m,k} \cap [a,b] \in \mathcal{E}$, то

$$\mu_\alpha \Big(I_{m,k} \cap [a,b] \Big) = \int\limits_{I_{m,k} \cap [a,b]} \alpha' \, d\mu.$$

Тогда в силу теоремы 4.3.1

$$\mu_\alpha^*(H_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\alpha \Big(I_{m,k} \cap [a,b] \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{I_{m,k} \cap [a,b]} \alpha' \, d\mu = \\ = \int\limits_{H_m} \alpha' \, d\mu \le \left(\sup_{x \in [a,b]} \alpha'(x) \right) \mu^*(H_m).$$

Так как

$$\mu^*(H_m) = \mu^* \Big(H_m \backslash (B_m \triangle E) \Big) + \mu^*(B_m \triangle E) \le \frac{1}{m} + d(B_m, E) \to 0$$

при $m \to \infty$, то справедливо соотношение $\mu_\alpha^*(B_m \triangle E) \le \mu_\alpha^*(H_m) \to \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, получаем требуемое включение $E \in \mathfrak{M}_F(\mu_\alpha)$ и равенство $\mu_\alpha^*(E) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_\alpha(B_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{B_m} \alpha' \, d\mu$. Так как при $m \to \infty$ выполнено соотношение

$$\left| \int\limits_{B_m} \alpha' \, d\mu - \int\limits_{E} \alpha' \, d\mu \right| = \left| \int\limits_{B_m \backslash E} \alpha' \, d\mu - \int\limits_{E \backslash B_m} \alpha' \, d\mu \right| \le \\ \le \int\limits_{B_m \triangle E} \alpha' \, d\mu \le \left(\sup_{x \in [a,b]} \alpha'(x) \right) \mu^*(B_m \triangle E) \to 0,$$

то окончательно находим $\mu_\alpha^*(E) = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{B_m} \alpha' \, d\mu = \int\limits_{E} \alpha' \, d\mu$.

Для произвольного множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ для любого целого m определим ограниченное множество $E_m = E \cap [m, m+1) \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Так как выполнено равенство $E = \bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty} E_m$, а для любого $m \in \in \mathbb{Z}$, как показано выше, выполнено включение $E_m \in \mathfrak{M}_F(\mu_\alpha)$, то по определению μ_α-измеримости выполнено включение $E \in \mathfrak{M}(\mu_\alpha)$.

Поскольку $E_m \cap E_k = \varnothing$ при всех $m \neq k$, то получаем равенства

$$\mu_\alpha^*(E) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_\alpha^*(E_m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_{E_m} \alpha'\, d\mu = \int\limits_E \alpha'\, d\mu.$$

Теперь для ограниченного множества $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ и функции $f \in \in \mathfrak{L}(E)$ покажем, что выполнены включение $f \in \mathfrak{L}_\alpha(E)$ и равенство $\int\limits_E f\, d\mu_\alpha = \int\limits_E f\alpha'\, d\mu$. Так как по предположению неотрицательная функция α' ограничена на ограниченном множестве E, то справедливы неравенства $0 \le M = \sup\limits_{x\in E} \Big(\alpha'\Big) < +\infty$. Тогда на множестве E получаем неравенство $|f\alpha'| \le |f|M \in \mathfrak{L}(E)$, т. е. в силу утверждения 4.3.2 получаем включение $f\alpha' \in \mathfrak{L}(E)$.

Если функция f — простая, то существуют попарно непересекающиеся μ-измеримые множества $E_m \subset E$ и различные числа c_m, $m \in \overline{1,N}$, такие, что $E = \bigcup\limits_{m=1}^{N} E_m$, а $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{N} c_m \delta_{E_m}(x)$, $x \in E$. Следовательно, получаем

$$\int\limits_E f\, d\mu_\alpha = \sum_{m=1}^{N} c_m \mu_\alpha^*(E_m) = \sum_{m=1}^{N} c_m \int\limits_{E_m} \alpha'\, d\mu = \int\limits_E f\alpha'\, d\mu.$$

Если произвольная μ-измеримая функция $f \in \mathfrak{L}(E)$, то по утверждению 4.3.3 существует последовательность простых μ-измеримых функций $s_m\colon E \to \mathbb{R}$ вида $(s_m)_+(x) \uparrow f_+(x)$ и $(s_m)_-(x) \uparrow f_-(x)$ для любого $x \in E$ при $m \to \infty$. Тогда справедливы соотношения

$$(s_m\alpha')_+(x) = (s_m)_+(x)\alpha'(x) \uparrow f_+(x)\alpha'(x),$$

$$(s_m\alpha')_-(x) = (s_m)_-(x)\alpha'(x) \uparrow f_-(x)\alpha'(x)$$

для любого $x \in E$ при $m \to \infty$. Следовательно, по теореме 4.3.2 находим

$$\int\limits_E f_+\alpha'\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E (s_m)_+\alpha'\, d\mu, \qquad \int\limits_E f_-\alpha'\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E (s_m)_-\alpha'\, d\mu,$$

$$\int\limits_E f_+\, d\mu_\alpha = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E (s_m)_+\, d\mu_\alpha, \qquad \int\limits_E f_-\, d\mu_\alpha = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E (s_m)_-\, d\mu_\alpha.$$

С другой стороны, справедливы равенства

$$\int\limits_E (s_m)_+ \, d\mu_\alpha = \int\limits_E (s_m)_+ \alpha' \, d\mu, \qquad \int\limits_E (s_m)_- \, d\mu_\alpha = \int\limits_E (s_m)_- \alpha' \, d\mu.$$

Тогда

$$\int\limits_E f_+ \, d\mu_\alpha = \int\limits_E f_+ \alpha' \, d\mu < +\infty, \qquad \int\limits_E f_- \, d\mu_\alpha = \int\limits_E f_- \alpha' \, d\mu < +\infty.$$

Таким образом, получаем включение $f \in \mathcal{L}_\alpha(E)$ и равенство

$$\int\limits_E f \, d\mu_\alpha = \int\limits_E f_+ \, d\mu_\alpha - \int\limits_E f_- \, d\mu_\alpha = \int\limits_E f_+ \alpha' \, d\mu - \int\limits_E f_- \alpha' \, d\mu = \int\limits_E f \alpha' \, d\mu,$$

что и требовалось.

Глава 5

Сопряжённое пространство

5.1. Теорема Хана—Банаха

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — комплексное линейное нормированное пространство. Понятие сопряжённого пространства $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ было дано в определении 3.4.6.

Определение 5.1.1. *Функционал $f: X \to \mathbb{R}$ назовём вещественно-линейным, если для любых $x, y \in X$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.*

Пусть $f: X \to \mathbb{C}$ — линейный функционал (т. е. комплексно-линейный — для любых $x, y \in X$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$). Тогда функционал $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, очевидно, является вещественно-линейным, причём для любого $x \in X$ справедливо равенство

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re}\Big(if(x)\Big) = u(x) - iu(ix).$$

С другой стороны, для любого вещественно-линейного функционала $w: X \to \mathbb{R}$ определим функционал $g(x) = w(x) - iw(ix)$, $x \in X$. Тогда для любых $x, y \in X$ имеем $g(x+y) = w(x) + w(y) - iw(ix) - iw(iy) = g(x) + g(y)$. Для любого $x \in X$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем равенство

$$g\Big((\alpha + i\beta)x\Big) = \alpha w(x) + \beta w(ix) - i\alpha w(ix) + i\beta w(x) = \\ = (\alpha + i\beta)\Big(w(x) - iw(ix)\Big) = (\alpha + i\beta) g(x).$$

Следовательно, функционал $g: X \to \mathbb{C}$ является комплексно-линейным. Таким образом, всякий комплексный линейный функционал $f: X \to \mathbb{C}$ является непрерывным, т. е. $f \in X^*$, тогда и только тогда, когда вещественно-линейный функционал $\operatorname{Re} f: X \to \mathbb{R}$ является непрерывным, а всякий непрерывный вещественно-линейный функционал $w: X \to \mathbb{R}$ является вещественной частью единственного непрерывного линейного функционала $g \in X^*$ вида $g(x) = w(x) - iw(ix)$ для всех $x \in X$.

Лемма 5.1.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — комплексные линейные пространства, причём пространство $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банахово. Пусть $Z \subset X$ — подпространство, всюду плотное в X. Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{L}(Z, Y)$. Тогда существует единственный линейный оператор $B \in \mathcal{L}(X, Y)$, такой, что $B(z) = A(z)$ для всех $z \in Z$. При этом $\|A\| = \|B\|$.*

Доказательство. Для любого $x \in X$ существует последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$, такая, что $\|z_n - x\|_X \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда получаем $\|A(z_n) - A(z_m)\|_Y \le \|A\|\,\|z_n - z_m\|_X \to 0$ при $n, m \to \to \infty$, т. е. последовательность $\{A(z_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ является фундаментальной. В силу полноты пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$ существует вектор $y \in Y$, такой, что $\|A(z_n) - y\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим, что указанный вектор $y \in Y$ не зависит от выбора последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$, сходящейся к вектору $x \in X$. Действительно, если другая последовательность $\{\tilde{z}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ является сходящейся к x, то $\|A(\tilde{z}_n) - A(z_n)\|_Y \le \|A\|\,\|\tilde{z}_n - z_n\|_X \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} A(\tilde{z}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A(z_n) = y$, что и требовалось. Поэтому вектор $y = y(x)$ зависит только от вектора $x \in X$. Положим $B(x) = y(x)$ для любого $x \in X$. Тогда для любых векторов $\tilde{x}, \hat{x} \in X$, последовательностей $\{\tilde{z}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ и $\{\hat{z}\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ вида $\tilde{z}_n \to \tilde{x}$ и $\hat{z}_n \to \hat{x}$ при $n \to \infty$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ получаем

$$B(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} A(\alpha \tilde{z}_n + \beta \hat{z}_n) = \\ = \alpha \lim_{n\to\infty} A(\tilde{z}_n) + \beta \lim_{n\to\infty} A(\hat{z}_n) = \alpha B(\tilde{x}) + \beta B(\hat{x}).$$

Следовательно, отображение $B\colon X \to Y$ является линейным оператором. Так как для любого $z \in Z$ стационарная последовательность $z_n = z$ для любого $n \in \mathbb{N}$ является сходящейся к z, то $B(z) = = \lim\limits_{n\to\infty} A(z_n) = A(z)$. Тогда справедливы соотношения

$$\|A\| = \sup_{z \in Z\colon \|z\|_X = 1} \|A(z)\|_Y = \sup_{z \in Z\colon \|z\|_X = 1} \|B(z)\|_Y \le \\ \le \sup_{x \in X\colon \|x\|_X = 1} \|B(x)\|_Y = \|B\|.$$

С другой стороны, для любого $x \in X$ вида $\|x\| = 1$ существует последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$, такая, что $\|z_n - x\|_X \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\|z_n\| \to 1$ при $n \to \infty$ и выполнено

$$\|B(x)\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|A(z_n)\|_Y \le \|A\| \lim_{n\to\infty} \|z_n\|_X = \|A\|.$$

Следовательно, получаем неравенство

$$\|B\| = \sup_{x \in X:\ \|x\|_X = 1} \|B(x)\|_Y \leq \|A\|.$$

Таким образом, доказано равенство $\|A\| = \|B\|$. Отсюда, в частности, следует включение $B \in \mathfrak{L}(X, Y)$.

Покажем единственность построенного оператора B. Предположим, что некоторый оператор $C \in \mathfrak{L}(X, Y)$ таков, что $C(z) = A(z)$ для любого $z \in Z$. Тогда для любого $x \in X$ и любой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ вида $z_n \to x$ при $n \to \infty$ в силу непрерывности оператора C и определения оператора B получаем $C(x) = \lim\limits_{n \to \infty} C(z_n) = \lim\limits_{n \to \infty} A(z_n) = B(x)$, т. е. справедливо равенство $B = C$, что и требовалось.

Теорема 5.1.1 (*Хан, Банах*)**.** *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированое пространство, $L \subset X$ — вещественно-линейное подпространство (т. е. $x + y \in L$ и $tx \in L$ для любых $x, y \in L$ и $t \in \mathbb{R}$). Пусть функция $p: X \to \mathbb{R}$ положительно однородна (т. е. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для любых $x \in X$, $\lambda \geq 0$), полуаддитивна (т. е. $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ для любых $x, y \in X$) и ограничена на единичной сфере (т. е. $M = \sup\limits_{\|x\|=1} |p(x)| < +\infty$). Пусть вещественно-линейный функционал $u: L \to \mathbb{R}$ для любого $x \in L$ удовлетворяет неравенству $u(x) \leq p(x)$. Тогда существует вещественно-линейный функционал $v: X \to \mathbb{R}$, такой, что для любого $x \in L$ выполнено $v(x) = u(x)$, а для любого $x \in X$ выполнено $-p(-x) \leq v(x) \leq p(x)$.*

Доказательство. Доказательство проведём в предположении сепарабельности пространства $(X, \|\cdot\|_X)$, т. е. в X существует счётное всюду плотное подмножество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Общий случай без предположения сепарабельности пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ можно найти, например, в [2, ч. I, гл. 3, с. 68–70].

Для любого вектора $x \in X$ определим его вещественную линейную оболочку $\mathrm{Lin}\{x\} = \{\ tx \mid t \in \mathbb{R}\ \}$. Ясно, что $\mathrm{Lin}\{x\}$ — вещественно-линейное подпространство пространства X. Определим последовательность $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ вещественно-линейных подпространств пространства X следующим образом: $L_0 = L$, $L_n = L_{n-1} + \mathrm{Lin}\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $L_{n-1} \subset L_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть функционал $u_0 = u: L_0 \to \mathbb{R}$. Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $k \in \overline{0, n-1}$ определены функционалы

$u_k\colon L_k \to \mathbb{R}$, такие, что для любого $k \in \overline{1, n-1}$ и для любого $x \in L_{k-1}$ выполнено равенство $u_k(x) = u_{k-1}(x)$, а для любого $x \in L_k$ выполнено неравенство $u_k(x) \le p(x)$. Тогда $u_k(-x) = -u_k(x) \le p(-x)$. Следовательно, получаем

$$\|u_k\| = \sup_{x \in L_k\colon \|x\|_X = 1} |u_k(x)| \le$$
$$\le \sup_{x \in L_k\colon \|x\|_X = 1} \max\{p(x), p(-x)\} \le \sup_{x \in L_k\colon \|x\|_X = 1} |p(x)| \le M,$$

т. е. функцинал u_k является непрерывным на подпространстве L_k. Если $x_n \in L_{n-1}$, то имеет место равенство $L_n = L_{n-1}$, тогда полагаем $u_n = u_{n-1}$. Пусть выполнено $x_n \notin L_{n-1}$. Тогда получаем $L_n = L_{n-1} \oplus \mathrm{Lin}\{x_n\} \ne L_{n-1}$, а для любого вектора $x \in L_n$ существует единственный вектор $y = y(x) \in L_{n-1}$ и скаляр $t = t(x) \in \mathbb{R}$, такие, что $x = y + tx_n$. Определим вещественно-линейный функционал $u_n\colon L_n \to \mathbb{R}$ следующим образом: $u_n(y + tx_n) = u_{n-1}(y) + ta$ для любых $y \in L_{n-1}$ и $t \in \mathbb{R}$. Здесь число $a \in \mathbb{R}$ будет определено ниже. Ясно, что $u_n = u_{n-1}$ на подпространстве L_{n-1}. Мы хотим добиться выполнения неравенства $u_n(y + tx_n) \le p(y + tx_n)$ для любых $y \in L_{n-1}$ и $t \in \mathbb{R}$. При $t = 0$ это неравенство является верным, так как по предположению индукции $u_n(y) = u_{n-1}(y) \le p(y)$ для любого $y \in L_{n-1}$. При $t > 0$ получаем

$$a \le \frac{1}{t}\Big(p(y + tx_n) - u_{n-1}(y)\Big) = p\left(\frac{y}{t} + x_n\right) - u_{n-1}\left(\frac{y}{t}\right).$$

При $t < 0$ получаем

$$a \ge \frac{1}{t}\Big(p(y + tx_n) - u_{n-1}(y)\Big) = u_{n-1}\left(\frac{y}{|t|}\right) - p\left(\frac{y}{|t|} - x_n\right).$$

Заметим, что для любых векторов $y, z \in L_{n-1}$ выполнено

$$u_{n-1}(y) + u_{n-1}(z) = u_{n-1}(y + z) \le p(y + z) \le p(y + x_n) + p(z - x_n).$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$u_{n-1}(z) - p(z - x_n) \le p(y + x_n) - u_{n-1}(y), \qquad \forall\, y, z \in L_{n-1}.$$

Тогда получаем

$$-\infty < \tilde{a}_n = \sup_{z \in L_{n-1}} \Big(u_{n-1}(z) - p(z - x_n)\Big) \le$$
$$\le \hat{a}_n = \inf_{y \in L_{n-1}} \Big(p(y + x_n) - u_{n-1}(y)\Big) < +\infty.$$

Следовательно, выбрав число $a \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенствам $\tilde{a}_n \le a \le \hat{a}_n$, получаем требуемое неравенство $u_n(y+tx_n) \le p(y+tx_n)$ для любых $y \in L_{n-1}$ и $t \in \mathbb{R}$.

Определим множество $N = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$, которое является вещественно-линейным подпространством в X. Действительно, для любых $x, y \in N$ существуют $m, n \in \mathbb{N}$, такие, что $x \in L_n$, $y \in L_m$. Тогда для $k = \max\{n, m\}$ получаем $x, y \in L_k$. Следовательно, $x + y \in L_k \subset N$ и $tx \in L_k \subset N$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Определим вещественно-линейный функционал $w\colon N \to \mathbb{R}$ следующим образом: $w = u_n$ на L_n для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $\|u_n\| \le M$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $\|w\| \le M$, т. е. функционал w является непрерывным. Так как множество N содержит всюду плотное подмножество множества X, то само N является всюду плотным в X. Тогда в силу леммы 5.1.1 существует единственный непрерывный вещественно-линейный функционал $v\colon X \to \mathbb{R}$, такой, что $v = w$ на N и $\|v\| = \|w\|$. По построению $v(x) = w(x) = u(x)$ для любого $x \in L$. Докажем неравенство $-p(-x) \le v(x) \le p(x)$ для любого $x \in X$. Прежде всего заметим, что если $y_m \to 0$ при $m \to \infty$, то $|p(y_m)| \le \|y_m\| M \to 0$. Следовательно, если $z_m \to z$ при $m \to \infty$, то $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, p(z_m) \le p(z) + \lim\limits_{m\to\infty} p(z_m - z) = p(z)$. Так как для любого $x \in X$ существует последовательность $z_m \in N$, такая, что $z_m \to x$ и $w(z_m) \to v(x)$ при $m \to \infty$, то в силу неравенства $w(z_m) \le p(z_m)$ получаем $v(x) = \lim\limits_{m\to\infty} w(z_m) \le \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, p(z_m) \le p(x)$. Отсюда $v(-x) \le p(-x)$, т. е. $v(x) \ge -p(-x)$, что и требовалось.

Следствие 5.1.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированное пространство, $L \subset X$ — подпространство. Пусть линейный функционал $f\colon L \to \mathbb{C}$ является непрерывным. Тогда существует непрерывный линейный функционал $g\colon X \to \mathbb{C}$, такой, что $g(x) = f(x)$ для всех $x \in L$, и справедливо равенство $\|g\| = \|f\|$.*

Доказательство. Определим функцию $p\colon X \to \mathbb{R}$ вида

$$p(x) = \|f\|\,\|x\|_X$$

для всех $x \in X$. Тогда функция p является полуаддитивной положительно однородной и $M = \sup\limits_{\|x\|_X=1} |p(x)| = \|f\| < +\infty$. Рассмотрим вещественно-линейный функционал $u\colon L \to \mathbb{R}$ вида $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$ для любого $x \in L$. Тогда $u(x) \le |f(x)| \le \|f\|\,\|x\|_X = p(x)$ при всех

$x \in X$. По теореме 5.1.1 существует вещественно-линейный функционал $v: X \to \mathbb{R}$, такой, что $v(x) = u(x)$ для любого $x \in L$, а для всех $x \in X$ выполнены неравенства $-p(-x) \le v(x) \le p(x)$. Это означает, что $|v(x)| \le \|f\| \, \|x\|$ при всех $x \in X$. Вещественно-линейный функционал v порождает линейный функционал $g: X \to \mathbb{C}$ вида

$$g(x) = v(x) - iv(ix)$$

для всех $x \in X$. Так как для любого $x \in L$ выполнено равенство $f(x) = u(x) - iu(ix)$, то $g(x) = f(x)$ при $x \in L$. Далее для любого $x \in X$ запишем комплексное число $g(x)$ в экспоненциальной форме $g(x) = |g(x)|e^{i\varphi(x)}$, где $\varphi(x) \in [0, 2\pi)$. Тогда получаем соотношения

$$|g(x)| = g(x)e^{-i\varphi(x)} = g\left(xe^{-i\varphi(x)}\right) =$$
$$= \operatorname{Re} g\left(xe^{-i\varphi(x)}\right) = v\left(xe^{-i\varphi(x)}\right) \le p\left(xe^{-i\varphi(x)}\right) = \|f\| \, \|x\|_X.$$

Следовательно, $\|g\| \le \|f\|$. С другой стороны, справедливо обратное неравенство

$$\|f\| = \sup_{x \in L:\ \|x\|_X \le 1} |f(x)| = \sup_{x \in L:\ \|x\|_X \le 1} |g(x)| \le \sup_{x \in X:\ \|x\|_X \le 1} |g(x)| = \|g\|.$$

Следовательно, $\|f\| = \|g\|$, что и требовалось.

Следствие 5.1.2. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированное пространство. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $L \subset X$ — замкнутое подпространство, а вектор $x_0 \notin L$, то существует функционал $f \in X^*$, такой, что $f(x) = 0$ при всех $x \in L$, $f(x_0) = 1$, а $\|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}$;*

2) *для любого $x_0 \ne 0$ существует функционал $f \in X^*$, такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|_X$;*

3) *если для вектора $x_0 \in X$ и для любого функционала $f \in X^*$ выполнено $f(x_0) = 0$, то $x_0 = 0$;*

4) *для любого $x \in X$ выполнено равенство*

$$\|x\|_X = \sup_{f \in X^*:\ \|f\| = 1} |f(x)|.$$

Доказательство. 1. На подпространстве

$$M = L \oplus \{ \alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{C} \}$$

рассмотрим линейный функционал $h: M \to \mathbb{C}$ вида $h(y + \alpha x_0) = \alpha$ при всех $y \in L$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Имеем равенство

$$\|h\| = \sup_{\substack{y \in L \\ \alpha \neq 0}} \frac{|\alpha|}{\|y + \alpha x_0\|_X} = \sup_{z \in L} \frac{1}{\|z + x_0\|_X} = \frac{1}{\inf\limits_{z \in L} \|z - x_0\|_X} = \frac{1}{\rho(x_0, L)}.$$

Следовательно, линейный функционал h является непрерывным на M. По следствию 5.1.1 существует функционал $f \in X^*$, такой, что $f(x) = h(x)$ при всех $x \in M$, откуда, в частности, следуют равенства $f(y) = h(y) = 0$ при всех $y \in L$ и $f(x_0) = h(x_0) = 1$, а также выполнено соотношение $\|f\| = \|h\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}$.

2. Пусть $L = \{ 0 \}$ — нулевое подпространство в X. Так как $x_0 \neq 0$, то $x_0 \notin L$. Тогда в силу 1 существует функционал $g \in X^*$, такой, что $g(x_0) = 1$ и $\|g\| = \frac{1}{\|x_0\|_X}$. Следовательно, функционал $f(x) = \|x_0\|_X g(x)$, $x \in X$, является искомым.

3. Если предположить, что $x_0 \neq 0$, то в силу 2 существует функционал $f \in X^*$, такой, что $f(x_0) = \|x_0\|_X \neq 0$, что противоречит условию $f(x_0) = 0$.

4. Если $x = 0$, то $f(x) = 0$ для любого $f \in X^*$ и доказываемое равенство очевидно. Если $x \neq 0$, то для любого $f \in X^*$ выполнено неравенство $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|_X$. Отсюда получаем неравенство $\sup\limits_{f \in X^*:\, \|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|$. Так как в силу 2 существует функционал $g \in X^*$, такой, что $\|g\| = 1$, и для данного x выполнено равенство $g(x) = \|x\|$, то получаем

$$\|x\|_X = g(x) = |g(x)| \leq \sup_{f \in X^*:\, \|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|_X,$$

что и требовалось.

Следствие 5.1.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — нетривиальное линейное нормированное пространство, а $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — неполное линейное нормированное пространство. Тогда пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является неполным.*

Доказательство. В силу неполноты линейного нормированного пространства Y в нём существует фундаментальная расходящаяся последовательность $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$. По условию существует нетривиальный вектор $x_0 \in X$. В силу пункта 2 следствия 5.1.2 существует $f \in X^*$, такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим линейный оператор $A_m \colon X \to Y$ вида

$$A_m(x) = f(x) y_m$$

для любого $x \in X$. Тогда $\|A_m\| = \|f\| \, \|y_m\|_Y = \|y_m\|_Y < +\infty$, т. е. $A_m \in \mathcal{L}(X,Y)$, и $\|A_m - A_n\| = \|y_m - y_n\|_Y \to 0$ при $m, n \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ является фундаментальной. Предположим, что она является сходящейся в $\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда существует линейный оператор $B \in \mathcal{L}(X,Y)$, такой, что

$$\|A_m - B\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Следовательно, получаем

$$\left\| \frac{B(x_0)}{\|x_0\|_X} - y_m \right\|_Y \leq \frac{\Big\| B(x_0) - \|x_0\|_X y_m \Big\|_Y}{\|x_0\|} =$$
$$= \frac{\Big\| B(x_0) - A_m(x_0) \Big\|_Y}{\|x_0\|_X} \leq \Big\| B - A_m \Big\| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Таким образом, расходящаяся фундаментальная последовательность $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ оказывается сходящейся в пространстве Y к вектору $\frac{B(x_0)}{\|x_0\|_X}$, т. е. получили противоречие.

Теорема 5.1.2 (*об отделимости*)**.** *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированное пространство, $A, B \subset X$ — непустые выпуклые непересекающиеся множества. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если множество A открыто, то существуют нетривиальный функционал $f \in X^*$ и число $\gamma \in \mathbb{R}$, такие, что $\operatorname{Re} f(a) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(b)$ при всех $a \in A$, $b \in B$. При этом говорят, что множества A и B строго отделимы;*

2) *если множество A компактно, а B — замкнуто, то существуют нетривиальный функционал $f \in X^*$ и числа $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, такие, что $\operatorname{Re} f(a) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} f(b)$ при всех $a \in A$, $b \in B$. При этом говорят, что множества A и B сильно отделимы.*

Доказательство. 1. Зафиксируем векторы $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ и определим $x_0 = b_0 - a_0$. Так как $A \cap B = \varnothing$, то $x_0 \neq 0$. Определим множество $C = A - B + x_0$ — открытое (в силу открытости A), выпуклое (в силу выпуклости A и B), содержащее ноль. Следовательно, существует число $R > 0$, такое, что $B_R(0) \subset C$. Рассмотрим функцию Минковского множества C:

$$\mu_C(x) = \inf \left\{ \, t > 0 \;\; \middle| \;\; \tfrac{x}{t} \in C \, \right\} \qquad \forall \, x \in X.$$

Тогда для любого $x \in X$ выполнено неравенство $\mu_C(x) \leq \frac{\|x\|_X}{R}$.

Для любого $x \in X$ и $\lambda > 0$ получаем

$$\mu_C(\lambda x) = \inf \left\{ \, t > 0 \;\; \middle| \;\; \tfrac{\lambda x}{t} \in C \, \right\} = \inf \left\{ \, \lambda\tau > 0 \;\; \middle| \;\; \tfrac{x}{\tau} \in C \, \right\} = \lambda \mu_C(x).$$

Если же $\lambda = 0$, то очевидны следующие равенства:

$$\mu_C(0x) = \mu_C(0) = 0 = 0\mu_C(x).$$

Таким образом, доказана положительная однородность функции μ_C.

Далее заметим, что для любого $x \in X$ и любого числа $t > \mu_C(x)$ выполнено включение $\frac{x}{t} \in C$. Действительно, по определению нижней грани для любого $t > \mu_C(x)$ существует положительное $\tau_t < t$, такое, что $\frac{x}{\tau_t} \in C$. Так как множество C выпукло и содержит ноль, то $\frac{\tau_t}{t} C = \frac{\tau_t}{t} C + \left(1 - \frac{\tau_t}{t}\right) 0 \subset C$. Следовательно, $\frac{x}{t} = \frac{\tau_t}{t} \frac{x}{\tau_t} \in \frac{\tau_t}{t} C \subset C$. Тогда для любых векторов $x, y \in X$ и любых чисел $\alpha > \mu_C(x)$ и $\beta > \mu_C(y)$ получаем включения $\frac{x}{\alpha} \in C$ и $\frac{y}{\beta} \in C$. В силу выпуклости множества C получаем $\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{y}{\beta} \in C$. Следовательно, $\mu_C(x+y) \leq \alpha + \beta$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\alpha \to \mu_C(x) + 0$ и $\beta \to \mu_C(y) + 0$, получим свойство полуаддитивности $\mu_C(x+y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$.

Так как $0 \notin A - B$, то $x_0 \notin C$. Следовательно, $\mu_C(x_0) \geq 1$. На вещественно-линейном подпространстве $\mathrm{Lin}\{x_0\} = \{ \, tx_0 \mid t \in \mathbb{R} \, \}$ определим вещественно-линейный функционал $u(tx_0) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Если $t \geq 0$, то получаем $u(tx_0) = t \leq t\mu_C(x_0) = \mu_C(tx_0)$. Если же $t < 0$, то $u(tx_0) = t < 0 \leq \mu_C(tx_0)$. Таким образом, для любого $x \in \mathrm{Lin}\{x_0\}$ выполнено неравенство $u(x) \leq \mu_C(x)$. Следовательно, по теореме 5.1.1 существует вещественно-линейный функционал $v \colon X \to \mathbb{R}$, такой, что $v(x) = u(x)$ для всех $x \in \mathrm{Lin}\{x_0\}$ и $v(x) \leq \mu_C(x)$ при всех $x \in X$. Отсюда, в частности, следует неравенство $|v(x)| \leq \frac{\|x\|_X}{R}$ для всех $x \in X$, т. е. функционал v является непрерывным. Так как множество C открыто, то для любого $x \in C$ имеем неравенство $\mu_C(x) < 1$. Так как $v(x_0) = u(x_0) = 1$, то для любых векторов $a \in A$, $b \in B$ получаем

$$v(a) - v(b) + 1 = v(a - b + x_0) \leq \mu_C(a - b + x_0) < 1.$$

Следовательно, $v(a) < v(b)$ при всех $a \in A$, $b \in B$. Таким образом, выпуклые множества $v(A)$ и $v(B)$ не пересекаются, а множество $v(A)$ является открытым в силу открытости множества A. Действительно, для любого $a \in A$ существует $\delta > 0$, такое, что $a + tx_0 \in A$ при всех $t \in (-\delta, \delta)$. Так как $v(a + tx_0) = v(a) + t$, то получаем, что интервал $(v(a) - \delta, v(a) + \delta) \subset v(A)$. Возьмём $\gamma = \sup v(A)$. Тогда $v(a) < \gamma \leq$ $\leq v(b)$ при всех $a \in A$, $b \in B$. Осталось рассмотреть функционал $f \in X^*$, такой, что $\operatorname{Re} f = v$, т. е. $f(x) = v(x) - iv(ix)$ при всех $x \in$ $\in X$. Тогда для всех $a \in A$ и $b \in B$ получаем требуемые неравенства $\operatorname{Re} f(a) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(b)$.

2. В силу замкнутости множества B и равенства $A \cap B = \varnothing$ для любого $x \in A$ существует $\varepsilon(x) > 0$, такое, что $O_{2\varepsilon(x)}(x) \cap B = \varnothing$. Так как семейство открытых шаров $\left\{ O_{\varepsilon(x)}(x) \;\middle|\; x \in A \right\}$ образует открытое покрытие компакта A, то существует конечное подпокрытие $\left\{O_{\varepsilon(x_n)}(x_n)\right\}_{n=1}^{N}$. Пусть $\delta = \min\limits_{1 \leq n \leq N} \varepsilon(x_n)$. Рассмотрим открытое выпуклое множество $A_0 = A + O_\delta(0)$. Тогда для любого вектора $a \in A_0$ существует вектор $x \in A$, такой, что $a \in O_\delta(x)$. Тогда существует номер $n \in \overline{1, N}$, такой, что $x \in O_{\varepsilon(x_n)}(x_n)$. Следовательно, получаем включение $a \in O_{\delta+\varepsilon(x_n)}(x_n) \subset O_{2\varepsilon(x_n)}(x_n) \subset B^c$. Поэтому $A_0 \cap B = \varnothing$. Тогда в силу пункта 1 существует функционал $f \in X^*$ и число $\gamma \in \mathbb{R}$, такие, что $\operatorname{Re} f(a) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(b)$ при всех $a \in A_0$, $b \in B$. В силу компактности множества A и непрерывности функционала f получаем, что $\operatorname{Re} f(A)$ — компактное подмножество открытого множества $\operatorname{Re} f(A_0)$. Тогда $\max \operatorname{Re} f(A) < \gamma$, т. е. существуют числа γ_1 и γ_2 вида $\max \operatorname{Re} f(A) < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma$. Поэтому для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем неравенства $\operatorname{Re} f(a) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} f(b)$, что и требовалось.

Пример 5.1.1. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированное пространство, $A, B \subset X$ — непустые выпуклые непересекающиеся множества. Может оказаться, что множества A и B неотделимы, т. е. не существует нетривиального функционала $f \in$ $\in X^*$, такого, что $\operatorname{Re} f(a) \leq \operatorname{Re} f(b)$ при всех $a \in A$, $b \in B$. Пусть

$X = CL_1[0,1]$ — множество, состоящее из всех комплекснозначных непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, норма в котором определяется соотношением $\|x\|_1 = \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt$. Рассмотрим множества

$$A = \left\{ \, x \in CL_1[0,1] \;\middle|\; x(0) = 1 \, \right\}, \qquad B = \{ \, 0 \, \}.$$

Тогда A, B — выпуклые непересекающиеся множества, причём A всюду плотно в $CL_1[0,1]$. Предположим, что существует нетривиальный функционал $f \in X^*$, такой, что $\operatorname{Re} f(a) \le \operatorname{Re} f(0) = 0$ при всех $a \in A$. Для любого $x \in CL_1[0,1]$ существуют последовательности $a_n \in A$ и $b_n \in A$, такие, что $\|x - a_n\|_1 \to 0$ и $\|x + b_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\operatorname{Re} f(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} f(a_n) \le 0,$$

$$\Big(- \operatorname{Re} f(x) \Big) = \operatorname{Re} f(-x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} f(b_n) \le 0.$$

Следовательно, $\operatorname{Re} f(x) = 0$ для любого $x \in X$. Но тогда получаем равенство $f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) = 0$ при всех $x \in X$, что противоречит нетривиальности функционала f.

Утверждение 5.1.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное линейное нормированное пространство. Тогда линейное отображение $F\colon X \to X^{**}$ вида $(Fx)(f) = f(x)$ для любого $x \in X$ и $f \in X^*$ осуществляет изометрический изоморфизм из X на подпространство $\operatorname{Im} F \subset X^{**}$, т. е. F взаимно однозначно отображает X на $\operatorname{Im} F$ и $\|Fx\| = \|x\|_X$ для любого $x \in X$.*

Доказательство. Если для векторов $x, y \in X$ выполнено равенство $Fx = Fy$, то для любого $f \in X^*$ получаем $f(x) = f(y)$. Следовательно, $f(x - y) = 0$ для любого $f \in X^*$. Тогда в силу пункта 3 следствия 5.1.2 получаем $x - y = 0$, т. е. $x = y$. Таким образом, доказана взаимная однозначность отображения F из X на $\operatorname{Im} F$. Далее для любого $x \in X$ в силу пункта 4 следствия 5.1.2 получаем

$$\|Fx\| = \sup_{f \in X^* : \|f\| = 1} |(Fx)(f)| = \sup_{f \in X^* : \|f\| = 1} |f(x)| = \|x\|_X,$$

что и требовалось.

Определение 5.1.2. *Комплексное линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ называется рефлексивным, если $\operatorname{Im} F = X^{**}$, т. е. если F является изометрическим изоморфизмом из X на X^{**}.*

Определение 5.1.3. *Линейные нормированные пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ будем называть равными, если они изометрически изоморфны, т. е. существует линейное взаимно однозначное отображение Φ из X на Y, такое, что $\|x\|_X = \|\Phi(x)\|_Y$ для любого $x \in X$. В этом случае будем писать $X = Y$.*

Если пространство X рефлексивно, то получаем равенство $X = X^{**}$, которое реализует изометрический изоморфизм F.

5.2. Малые лебеговы пространства

Для любого числа $p \geq 1$ определим линейное нормированное пространство

$$\ell_p = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty \right\},$$

норма в котором определяется равенством

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p}, \qquad x \in \ell_p.$$

Рассмотрим непрерывную слева функцию скачков $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$\alpha(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:\ k<x} 1, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда включение $x \in \ell_p$ равносильно тому, что функция x определена μ_α-почти всюду на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет включению $|x|^p \in \mathcal{L}_\alpha(\mathbb{R})$. При этом выполнено равенство $\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^p \, d\mu_\alpha = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p$. Следовательно, получаем равенство $\ell_p = \mathbb{L}_p(\mathbb{R}, \mu_\alpha)$. Поэтому по теореме 4.4.1 пространство ℓ_p является полным.

Определим ещё линейное нормированное пространство

$$\ell_\infty = \left\{ x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| < +\infty \right\},$$

норма в котором определяется равенством

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|, \qquad x \in \ell_\infty,$$

и два его подпространства

$$\begin{aligned} c &= \left\{ x \in \ell_\infty \;\middle|\; \exists \lim_{k\to\infty} x(k) = x(\infty) \in \mathbb{C} \right\}, \\ c_0 &= \left\{ x \in c \;\middle|\; x(\infty) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ясно, что включение $x \in \ell_\infty$ равносильно тому, что функция x определена μ_α-почти всюду на $\mathbb{R}$ и является μ_α-почти всюду ограниченной на $\mathbb{R}$. При этом, очевидно, выполнено равенство

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|.$$

Следовательно, получаем равенство $\ell_\infty = \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}, \mu_\alpha)$. Поэтому по теореме 4.4.3 пространство ℓ_∞ является полным. Очевидно, что подпространства c и c_0 являются замкнутыми в пространстве ℓ_∞. Следовательно, линейные пространства c и c_0 с нормой $\|\cdot\|_\infty$ также являются полными.

Утверждение 5.2.1. *Для любого числа $p \geq 1$ в пространствах ℓ_p и в пространстве c_0 существует счётный базис $\{e_m\}_{m=1}^\infty$, где*

$$e_m(k) = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases}$$

Доказательство. Для любого $x \in \ell_p$ получаем

$$\left\| x - \sum_{m=1}^{N} x(m) e_m \right\|_p = \sqrt[p]{\sum_{m=N+1}^{\infty} |x(m)|^p} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

а для любого $y \in c_0$ получаем

$$\left\| y - \sum_{m=1}^{N} y(m) e_m \right\|_\infty = \sup_{m>N} |y(m)| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Если же для $x \in \ell_p$ существует последовательность $\{\gamma_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ вида $x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \gamma_m e_m$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ и номера $N > m$ получаем

$$|x(m) - \gamma_m| \leq \left\| x - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m e_m \right\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

т. е. $x(m) = \gamma_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Аналогично, если для $y \in c_0$ существует последовательность $\{\gamma_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ вида $y = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \gamma_m e_m$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ и номера $N > m$ получаем

$$|y(m) - \gamma_m| \leq \left\| y - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m e_m \right\|_\infty \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

т. е. $y(m) = \gamma_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Утверждение 5.2.2. *В пространстве c существует счётный базис $\{e_m\}_{m=0}^\infty$, где элемент $e_0 \in c$ имеет вид $e_0(k) = 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Для любого $z \in c$ выполнено включение $z - z(\infty)e_0 \in c_0$. Следовательно, $z - z(\infty)e_0 = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \Big(z(m) - z(\infty) \Big) e_m$. Таким образом, получаем следующее разложение:

$$z = z(\infty)e_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Big(z(m) - z(\infty) \Big) e_m.$$

Если же для $z \in c$ существует последовательность $\{\gamma_m\}_{m=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ вида $z = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \gamma_m e_m$, то для любого $N \in \mathbb{N}$ получаем

$$|z(N+1) - \gamma_0| \leq \left\| z - \sum_{m=0}^{N} \gamma_m e_m \right\|_\infty \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Так как $z(N+1) \to z(\infty)$ при $N \to \infty$, то получаем равенство $\gamma_0 = z(\infty)$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ и $N > m$ получаем

$$|z(m) - z(\infty) - \gamma_m| \le \left\| z - \sum_{m=0}^{N} \gamma_m e_m \right\|_\infty \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

т. е. $\gamma_m = z(m) - z(\infty)$, что и требовалось.

Утверждение 5.2.3. *Справедливо равенство $\ell_1^* = \ell_\infty$.*

Доказательство. Требуется определить изометрический изоморфизм $\varPhi$ из ℓ_1^* на ℓ_∞. Для любого $f \in \ell_1^*$ и $x \in \ell_1$ справедливо равенство $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m)$. Определим $z(m) = f(e_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Тогда $|z(m)| \le \|f\|\,\|e_m\|_1 = \|f\|$. Следовательно, выполнено неравенство $\|z\|_\infty \le \|f\|$, т. е. $z \in \ell_\infty$. С другой стороны, справедливы неравенства

$$|f(x)| \le \sum_{m=1}^{\infty} |x(m)|\,|z(m)| \le \|z\|_\infty\,\|x\|_1.$$

Следовательно, выполнено неравенство $\|f\| \le \|z\|_\infty$, т. е. доказано равенство $\|f\| = \|z\|_\infty$. Таким образом, определено линейное отображение $\varPhi\colon \ell_1^* \to \ell_\infty$ вида $(\varPhi f)(m) = f(e_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, причём справедливо равенство $\|f\| = \|\varPhi f\|_\infty$. Если для двух функционалов $f, g \in \ell_1^*$ выполнено равенство $\varPhi f = \varPhi g$, то для любого $x \in \ell_1$ получаем $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m) g(e_m) = g(x)$, т. е. $f = g$. Осталось показать, что $\operatorname{Im} \varPhi = \ell_\infty$. Для любого $z \in \ell_\infty$ определим линейный функционал $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m) z(m)$, $x \in \ell_1$. Тогда выполнено неравенство $\|f\| \le \|z\|_\infty$, т. е. справедливо включение $f \in \ell_1^*$, и $f(e_m) = z(m)$ при каждом $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, доказано равенство $\varPhi f = z$, что и требовалось.

Утверждение 5.2.4. *При $1 < p < +\infty$ справедливо равенство $\ell_p^* = \ell_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Доказательство. Требуется определить изометрический изоморфизм $\varPhi$ из ℓ_p^* на ℓ_q. Для любого $f \in \ell_p^*$ и $x \in \ell_p$ справедливо равенство $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m)$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим

$z(m) = f(e_m)$ и число

$$s_m = \begin{cases} \frac{\overline{z(m)}}{|z(m)|}, & z(m) \neq 0, \\ 0, & z(m) = 0. \end{cases}$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим вектор $x_N \in \ell_p$ вида

$$x_N(m) = \begin{cases} |z(m)|^{\frac{q}{p}} s_m, & m \in \overline{1, N}, \\ 0, & m > N. \end{cases}$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$x_N(m) z(m) = \begin{cases} |z(m)|^q, & m \in \overline{1, N}, \\ 0, & m > N. \end{cases}$$

Следовательно, при каждом $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$|f(x_N)| = \sum_{m=1}^{N} |z(m)|^q \leq \|f\| \, \|x_N\|_p = \|f\| \left(\sum_{m=1}^{N} |z(m)|^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

т. е. справедливо неравенство

$$\left(\sum_{m=1}^{N} |z(m)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|.$$

Тогда при $N \to \infty$ получаем $\|z\|_q \leq \|f\|$, т. е. $z \in \ell_q$. С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера для любого $x \in \ell_p$ справедливы неравенства

$$|f(x)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |x(m)| \, |z(m)| \leq \|z\|_q \, \|x\|_p.$$

Следовательно, выполнено неравенство $\|f\| \leq \|z\|_q$, т. е. доказано равенство $\|f\| = \|z\|_q$. Таким образом, определено линейное отображение $\varPhi \colon \ell_p^* \to \ell_q$ вида $(\varPhi f)(m) = f(e_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, причём справедливо равенство $\|f\| = \|\varPhi f\|_q$. Если для двух функционалов $f, g \in \ell_p^*$ выполнено равенство $\varPhi f = \varPhi g$, то для любого $x \in \ell_p$ получаем $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m) g(e_m) = g(x)$, т. е. $f = g$.

Осталось показать, что $\operatorname{Im}\Phi = \ell_q$. Для любого $z \in \ell_q$ определим линейный функционал $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m)z(m)$, $x \in \ell_p$. Тогда в силу неравенства Гёльдера выполнено неравенство $\|f\| \le \|z\|_q$, т. е. справедливо включение $f \in \ell_p^*$, и $f(e_m) = z(m)$ при каждом $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, доказано равенство $\Phi f = z$, что и требовалось.

Утверждение 5.2.5. *Справедливо равенство* $c_0^* = \ell_1$.

Доказательство. Требуется определить изометрический изоморфизм Φ из c_0^* на ℓ_1. Для любого $f \in c_0^*$ и $x \in c_0$ справедливо равенство $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m)f(e_m)$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим $z(m) = f(e_m)$ и число

$$s_m = \begin{cases} \frac{\overline{z(m)}}{|z(m)|}, & z(m) \neq 0, \\ 0, & z(m) = 0. \end{cases}$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим вектор $x_N \in c_0$ вида

$$x_N(m) = \begin{cases} s_m, & m \in \overline{1,N}, \\ 0, & m > N. \end{cases}$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$x_N(m)z(m) = \begin{cases} |z(m)|, & m \in \overline{1,N}, \\ 0, & m > N. \end{cases}$$

Следовательно, при каждом $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$|f(x_N)| = \sum_{m=1}^{N} |z(m)| \le \|f\|\,\|x_N\|_\infty \le \|f\|.$$

Тогда при $N \to \infty$ получаем $\|z\|_1 \le \|f\|$, т. е. $z \in \ell_1$. С другой стороны, для любого $x \in c_0$ справедливы неравенства

$$|f(x)| \le \sum_{m=1}^{\infty} |x(m)|\,|z(m)| \le \|z\|_1\,\|x\|_\infty.$$

Следовательно, выполнено неравенство $\|f\| \le \|z\|_1$, т. е. доказано равенство $\|f\| = \|z\|_1$. Таким образом, определено линейное отображение $\Phi\colon c_0^* \to \ell_1$ вида $(\Phi f)(m) = f(e_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, причём справедливо равенство $\|f\| = \|\Phi f\|_1$. Если для двух функционалов $f, g \in \ell_1^*$ выполнено равенство $\Phi f = \Phi g$, то для любого $x \in c_0$ получаем $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m) g(e_m) = g(x)$, т. е. $f = g$. Осталось показать, что $\operatorname{Im} \Phi = \ell_1$. Для любого $z \in \ell_1$ определим линейный функционал $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m) z(m)$, $x \in c_0$. Тогда выполнено неравенство $\|f\| \le \|z\|_1$, т. е. справедливо включение $f \in c_0^*$, и $f(e_m) = z(m)$ при каждом $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, доказано равенство $\Phi f = z$, что и требовалось.

Утверждение 5.2.6. *Справедливо равенство $c^* = \ell_1$.*

Доказательство. Требуется определить изометрический изоморфизм Φ из c^* на ℓ_1. Для любого $f \in c^*$ и $x \in c$ справедливо равенство $f(x) = x(\infty) f(e_0) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \Big(x(m) - x(\infty) \Big) f(e_m)$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим число

$$s_m = \begin{cases} \frac{\overline{f(e_m)}}{|f(e_m)|}, & f(e_m) \ne 0, \\ 0, & f(e_m) = 0. \end{cases}$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим вектор $x_N \in c$ вида

$$x_N(m) = \begin{cases} s_m, & m \in \overline{1, N}, \\ 0, & m > N. \end{cases}$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$x_N(m) f(e_m) = \begin{cases} |f(e_m)|, & m \in \overline{1, N}, \\ 0, & m > N, \end{cases}$$

а $x_N(\infty) = 0$. Следовательно, при каждом $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$|f(x_N)| = \sum_{m=1}^{N} |f(e_m)| \le \|f\| \, \|x_N\|_\infty \le \|f\|.$$

Тогда при $N \to \infty$ получаем $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |f(e_m)| \le \|f\|$. Следовательно, справедливо равенство

$$f(x) = x(\infty) \left(f(e_0) - \sum_{m=1}^{\infty} f(e_m) \right) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m) f(e_m).$$

Определим $z_f \in \ell_1$ вида $z_f(1) = f(e_0) - \sum\limits_{m=1}^{\infty} f(e_m)$, а $z_f(m) = f(e_{m-1})$ при $m \geq 2$. Тогда получаем

$$f(x) = x(\infty) z_f(1) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m) z_f(m+1).$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим число

$$t_m = \begin{cases} \frac{\overline{z_f(m)}}{|z_f(m)|}, & z_f(m) \neq 0, \\ 0, & z_f(m) = 0. \end{cases}$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим вектор $y_N \in c$ вида

$$y_N(m) = \begin{cases} t_{m+1}, & m \in \overline{1, N}, \\ t_1, & m > N. \end{cases}$$

Тогда $y_N(\infty) = t_1$, т. е. $y_N(\infty) z_f(1) = |z_f(1)|$, а для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$y_N(m) z_f(m+1) = \begin{cases} |z_f(m+1)|, & m \in \overline{1, N}, \\ t_1 z_f(m+1), & m > N. \end{cases}$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$f(y_N) = |z_f(1)| + \sum_{m=1}^{N} |z_f(m+1)| + t_1 \sum_{m=N+1}^{\infty} z_f(m+1).$$

Так как $z_f \in \ell_1$, то

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} z_f(m+1) \to 0 \quad \text{и} \quad f(y_N) \to \|z_f\|_1 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Тогда в силу неравенства $|f(y_N)| \leq \|f\| \, \|y_N\|_\infty \leq \|f\|$ получаем

$$\lim_{N \to \infty} |f(y_N)| = \|z_f\|_1 \leq \|f\|.$$

С другой стороны, для любого $x \in c$ справедливы неравенства

$$|f(x)| \leq |x(\infty)| \, |z_f(1)| + \sum_{m=1}^{\infty} |x(m)| \, |z_f(m+1)| \leq \|z_f\|_1 \, \|x\|_\infty.$$

Следовательно, выполнено неравенство $\|f\| \leq \|z_f\|_1$, т. е. доказано равенство $\|f\| = \|z_f\|_1$. Таким образом, определено линейное отображение $\Phi\colon c^* \to \ell_1$ вида $(\Phi f)(m) = z_f(m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, причём $\|f\| = \|\Phi f\|_1$. Если для двух функционалов $f, g \in \ell_1^*$ выполнено равенство $\Phi f = \Phi g$, т. е. $z_f = z_g$, то для любого $x \in c_0$ получаем

$$f(x) = x(\infty)z_f(1) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z_f(m+1) =$$

$$= x(\infty)z_g(1) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z_g(m+1) = g(x),$$

т. е. $f = g$. Осталось показать, что $\operatorname{Im}\Phi = \ell_1$. Для любого $z \in \ell_1$ определим линейный функционал

$$f(x) = x(\infty)z(1) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z(m+1) \quad \forall\, x \in c.$$

Тогда выполнено неравенство $\|f\| \leq \|z\|_1$, т. е. справедливо включение $f \in c^*$. При этом $f(e_m) = z(m+1)$ при каждом $m \in \mathbb{N}$, а

$$f(e_0) = z(1) + \sum_{m=1}^{\infty} z(m+1) = z(1) + \sum_{m=1}^{\infty} f(e_m),$$

т. е. $z(1) = f(e_0) - \sum\limits_{m=1}^{\infty} f(e_m)$. Следовательно, доказано равенство $\Phi f = z$, что и требовалось.

Из всего вышеизложенного в этом параграфе следует, что для любого числа $p > 1$ пространство ℓ_p является рефлексивным, а пространства ℓ_1, c_0 и c рефлексивными не являются. Из утверждения 5.2.4 сразу ясно, что для любого числа $p > 1$ выполнены равенства $\ell_p^{**} = \ell_q^* = \ell_p$, где $q = \frac{p}{p-1}$. Т. е. пространства ℓ_p^{**} и ℓ_p изометрически изоморфны. Однако для обоснования рефлексивности пространства мало указать какой-то изометрический изоморфизм между ним и его вторым сопряжённым. По определению 5.1.2 рефлексивности линейного нормированного пространства требуется доказать, что отображение F, введённое в утверждении 5.1.1, осуществляет этот изометрический изоморфизм. Из утверждений 5.2.5, 5.2.6 и 5.2.3 следует, что $c_0^{**} = \ell_1^* = \ell_\infty \neq c_0$ и $c^{**} = \ell_1^* = \ell_\infty \neq c$, т. е. пространства

c_0^{**} и c^{**} изометрически изоморфны пространству ℓ_∞. Однако этот факт, естественно, ещё не объясняет их нерефлексивность. Для этого по определению 5.1.2 требуется обосновать неравенство $\operatorname{Im} F \neq c_0^{**}$ для отображения $F\colon c_0 \to c_0^{**}$ и неравенство $\operatorname{Im} F \neq c^{**}$ для отображения $F\colon c \to c^{**}$. Докажем все эти факты.

Утверждение 5.2.7. *Пусть число $p > 1$. Тогда пространство ℓ_p рефлексифно.*

Доказательство. Пусть число $q = \frac{p}{p-1}$. В силу утверждения 5.2.4, имеем равенства $\ell_p^* = \ell_q$ и $\ell_q^* = \ell_p$. Пусть $\Phi\colon \ell_p^* \to \ell_q$ и $\Psi\colon \ell_q^* \to \ell_p$ — изометрические изоморфизмы, реализующие указанные равенства. Нам требуется для введённого в утверждении 5.1.1 отображения $F\colon \ell_p \to \ell_p^{**}$ доказать равенство $\operatorname{Im} F = \ell_p^{**}$, т. е. для любого функционала $H \in \ell_p^{**}$ требуется предъявить элемент $x \in \ell_p$, такой, что

$$H(f) = f(x) \qquad \forall\, f \in \ell_p^*.$$

Для любого $f \in \ell_p^*$ рассмотрим элемент $y = \Phi(f) \in \ell_q$. Тогда получаем равенство

$$H(f) = H\left(\Phi^{-1}(y)\right) = \left(H \circ \Phi^{-1}\right)(y).$$

Отображение $g = H \circ \Phi^{-1}\colon \ell_q \to \mathbb{C}$ является линейным и непрерывным как суперпозиция линейных непрерывных отображений. Следовательно, справедливо включение $g \in \ell_q^*$. Определив элемент $x = \Psi(g) = \Psi\left(H \circ \Phi^{-1}\right) \in \ell_p$, сразу получаем требуемое равенство:

$$H(f) = g(y) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)y(m) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)\left(\Phi(f)\right)(m) = f(x).$$

Заметим, что отображение $F\colon \ell_p \to \ell_p^{**}$ имеет вид

$$Fx = \left(\Psi^{-1}(x)\right) \circ \Phi \qquad \forall\, x \in \ell_p.$$

Утверждение 5.2.8. *Пространство c_0 нерефлексифно.*

Доказательство. В силу утверждений 5.2.5 и 5.2.3 имеем равенства $c_0^* = \ell_1$ и $\ell_1^* = \ell_\infty$. Пусть $\Phi\colon c_0^* \to \ell_1$ и $\Psi\colon \ell_1^* \to \ell_\infty$ — изометрические изоморфизмы, реализующие указанные равенства.

Требуется для введённого в утверждении 5.1.1 отображения $F\colon c_0 \to$ $\to c_0^{**}$ доказать неравенство $\operatorname{Im} F \neq c_0^{**}$, т. е. предъявить функционал $H \in c_0^{**} \setminus \operatorname{Im} F$.

Рассмотрим произвольный функционал $H \in c_0^{**}$. Определим отображение $g = H \circ \Phi^{-1}\colon \ell_1 \to \mathbb{C}$. Отображение g линейно и непрерывно как суперпозиция линейных и непрерывных отображений. Следовательно, $g \in \ell_1^*$. Определим элемент $z = \Psi(g) = \Psi\left(H \circ \Phi^{-1}\right) \in \ell_\infty$. Тогда для любого $f \in c_0^*$ получаем равенство:

$$H(f) = g\left(\Phi(f)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} z(m)\left(\Phi(f)\right)(m).$$

Обратно, любой элемент $z \in \ell_\infty$ порождает линейный функционал $H = \left(\Psi^{-1}(z)\right) \circ \Phi \in c_0^{**}$, который в свою очередь определяет тот же элемент $z = \Psi\left(H \circ \Phi^{-1}\right) \in \ell_\infty$. Если же функционал $H \in \operatorname{Im} F$, т. е. для него существует единственный элемент $x \in c_0$ вида $H = Fx$, то для любого $f \in c_0^*$ получаем

$$H(f) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)\left(\Phi(f)\right)(m) = \left(\Psi^{-1}(x)\right)\left(\Phi(f)\right).$$

Таким образом, выполнено равенство $H = \left(\Psi^{-1}(x)\right) \circ \Phi$. Следовательно, для любого элемента $z \in \ell_\infty \setminus c_0$ соответствующий ему функционал $H = \left(\Psi^{-1}(z)\right) \circ \Phi \in c_0^{**} \setminus \operatorname{Im} F$, что и требовалось.

Утверждение 5.2.9. *Пространство с нерефлексифно.*

Доказательство. В силу утверждений 5.2.6 и 5.2.3 имеем равенства $c^* = \ell_1$ и $\ell_1^* = \ell_\infty$. Пусть $\Phi\colon c^* \to \ell_1$ и $\Psi\colon \ell_1^* \to \ell_\infty$ — изометрические изоморфизмы, реализующие указанные равенства. Требуется для введённого в утверждении 5.1.1 отображения $F\colon c \to$ $\to c^{**}$ доказать неравенство $\operatorname{Im} F \neq c^{**}$, т. е. предъявить функционал $H \in c^{**} \setminus \operatorname{Im} F$.

Рассмотрим произвольный функционал $H \in c^{**}$. Определим отображение $g = H \circ \Phi^{-1}\colon \ell_1 \to \mathbb{C}$. Отображение g линейно и непрерывно как суперпозиция линейных и непрерывных отображений. Следовательно, $g \in \ell_1^*$. Определим элемент $z = \Psi(g) = \Psi\left(H \circ \Phi^{-1}\right) \in \ell_\infty$. Тогда для любого $f \in c^*$ получаем равенство:

$$H(f) = g\left(\Phi(f)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} z(m)\left(\Phi(f)\right)(m).$$

Обратно, любой элемент $z \in \ell_\infty$ порождает линейный функционал $H = \bigl(\Psi^{-1}(z)\bigr) \circ \Phi \in c^{**}$, который в свою очередь определяет тот же элемент $z = \Psi\left(H \circ \Phi^{-1}\right) \in \ell_\infty$. Если же функционал $H \in \operatorname{Im} F$, т. е. для него существует единственный элемент $x \in c$ вида $H = Fx$, то для любого $f \in c^*$ получаем

$$H(f) = f(x) = x(\infty)\bigl(\Phi(f)\bigr)(1) + \sum_{m=1}^{\infty} x(m)\bigl(\Phi(f)\bigr)(m+1).$$

Определив элемент $y \in c$ вида $y(1) = x(\infty)$ и $y(m+1) = x(m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, получим равенство

$$H(f) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} y(m)\bigl(\Phi(f)\bigr)(m) = \bigl(\Psi^{-1}(y)\bigr)\bigl(\Phi(f)\bigr)$$

Таким образом, выполнено равенство $H = \bigl(\Psi^{-1}(y)\bigr) \circ \Phi$. Следовательно, для любого элемента $z \in \ell_\infty \backslash c$ соответствующий ему функционал $H = \bigl(\Psi^{-1}(z)\bigr) \circ \Phi \in c^{**} \backslash \operatorname{Im} F$, что и требовалось.

Утверждение 5.2.10. *Пространство ℓ_1 нерефлексифно.*

Доказательство. В силу утверждения 5.2.3 имеем равенство $\ell_1^* = \ell_\infty$. Пусть $\Phi\colon \ell_1^* \to \ell_\infty$ — изометрический изоморфизм, реализующий указанное равенство. Требуется для введённого в утверждении 5.1.1 отображения $F\colon \ell_1 \to \ell_1^{**}$ доказать неравенство $\operatorname{Im} F \neq \ell_1^{**}$, т. е. предъявить функционал $H \in \ell_1^{**} \backslash \operatorname{Im} F$.

Заметим, что для любого элемента $x \in \ell_1$ и любого функционала $f \in \ell_1^*$ справедливо равенство

$$(Fx)(f) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)\bigl(\Phi(f)\bigr)(m).$$

Для любого функционала $H \in \ell_1^{**}$ определим $g = H \circ \Phi^{-1} \in \ell_\infty^*$. Тогда для любого функционала $f \in \ell_1^*$, обозначив $y = \Phi(f) \in \ell_\infty$, получаем равенство $H(f) = g(y)$. Следовательно, функционал H попадёт в $\operatorname{Im} F$ тогда и только тогда, когда для функционала $g = H \circ \Phi^{-1} \in \ell_\infty^*$ найдётся элемент $x \in \ell_1$, такой, что

$$g(y) = \sum_{m=1}^{\infty} x(m) y(m) \qquad \forall\, y \in \ell_\infty.$$

Предъявим функционал $g \in \ell_\infty^*$, для которого это равенство не выполняется, и тогда функционал $H = g \circ \Phi \in \ell_1^{**} \setminus \operatorname{Im} F$.

Рассмотрим линейный функционал $g_0 \colon c \to \mathbb{C}$ вида $g(z) = z(\infty)$ для любого $z \in c$. Очевидно, что $\|g_0\| = 1$, т. е. g_0 — непрерывный линейный функционал, определённый на подпространстве c пространства ℓ_∞. По следствию 5.1.1 теоремы Хана-Банаха, существует функционал $g \in \ell_\infty$, такой, что $g = g_0$ на подпространстве c, причём $\|g\| = \|g_0\| = 1$. Предположим,что для этого функционала g найдётся элемент $x \in \ell_1$, такой, что для всех $y \in \ell_\infty$ выполнено $g(y) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x(m)y(m)$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем:

$$x(m) = g(e_m) = g_0(e_m) = e_m(\infty) = 0.$$

Следовательно, функционал g — нулевой, что противоречит равенству $\|g\| = 1$. Таким образом, функционал $H = g \circ \Phi \in \ell_1^{**}$ не принадлежит $\operatorname{Im} F$, что и требовалось.

Нерефлексивность пространства ℓ_1 также вытекает из следующего важного утверждения.

Утверждение 5.2.11. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — линейное нормированное пространство, такое, что его сопряжённое пространство сепарабельно. Тогда пространство X тоже является сепарабельным.*

Доказательство. По условию в пространстве X^* существует счётное всюду плотное подмножество $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$. Без ограничения общности считаем, что $f_m \neq 0$ при каждом $m \in \mathbb{N}$. Тогда по определению нормы линейного функционала для любого $m \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_m \in X$, такой, что $\|x_m\|_X = 1$ и $|f_m(x_m)| > \frac{\|f_m\|}{2}$. Определим множество M как совокупность всевозможных конечных линейных комбинаций векторов $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ с комплексными коэффициентами, имеющими рациональные компоненты. Тогда множество M счётно. Действительно, пусть $\mathbb{Q} = \{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ — все рациональные числа, каким-то образом занумерованные. Для любых $N, L \in \mathbb{N}$ определим множество

$$M_{N,L} = \left\{ \sum_{k=1}^{N} (r_{m_k} + i r_{n_k}) x_k \;\middle|\; 1 \le m_k, n_k \le L \right\}.$$

Тогда множество $M_{N,L}$ конечно, и справедливо равенство

$$M = \bigcup_{N,L=1}^{\infty} M_{N,L}.$$

Следовательно, множество M является счётным как счётное объединение конечных множеств. Покажем, что множество M является всюду плотным в пространстве X, т. е. замыкание $[M] = X$. Предположим, что это не так, т. е. $[M] \neq X$. Очевидно, что замкнутое множество $[M]$ является подпространством в X. Тогда по пункту 1 следствия 5.1.2 существует ненулевой функционал $f \in X^*$, такой, что $f(x) = 0$ для любого $x \in [M]$. В частности, $f(x_m) = 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что $\|f - f_{m(\varepsilon)}\| < \varepsilon$. Так как выполнены неравенства

$$\Big\|f - f_{m(\varepsilon)}\Big\| \geq \Big|f(x_{m(\varepsilon)}) - f_{m(\varepsilon)}(x_{m(\varepsilon)})\Big| = \Big|f_{m(\varepsilon)}(x_{m(\varepsilon)})\Big| > \frac{\|f_{m(\varepsilon)}\|}{2},$$

то получаем $\|f_{m(\varepsilon)}\| < 2\varepsilon$. Следовательно, $\|f\| < 3\varepsilon$, что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ означает равенство $\|f\| = 0$. Тогда $f = 0$, что противоречит нетривиальности функционала f.

Следствие 5.2.1. *Пространство ℓ_∞^* не равно ℓ_1, но содержит подпространство, изометрически изоморфное ℓ_1. В частности, пространство ℓ_1 не является рефлексивным.*

Доказательство. В утверждении 5.2.3 показано равенство $\ell_1^* = \ell_\infty$. Следовательно, выполнено равенство $\ell_\infty^* = \ell_1^{**}$. Тогда в силу утверждения 5.1.1 пространство ℓ_∞^* содержит подпространство, изометрически изоморфное ℓ_1. Пространство ℓ_1 является сепарабельным, так как по утверждению 5.2.1 имеет счётный базис. Если предположить равенство $\ell_1 = \ell_\infty^*$, то в силу утверждения 5.2.11 получаем сепарабельность пространства ℓ_∞, что неверно. Действительно, рассмотрим множество $S \subset \ell_\infty$, такое, что включение $x \in S$ равносильно $x(k) = 0$ или $x(k) = 1$ при каждом $k \in \mathbb{N}$, причём для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $k > m$, такое, что $x(k) = 0$. Тогда функция $\alpha \colon S \to$ $\to [0,1)$ вида $\alpha(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{2^k}$ для любого $x \in S$ является биекцией между множеством S и промежутком $[0,1)$. Таким образом, множество S равномощно промежутку $[0,1)$, т. е. является несчётным.

При этом для любых векторов $x, y \in S$, $x \neq y$ имеет место равенство $\|x-y\|_\infty = 1$. Если предположить наличие в ℓ_∞ счётного всюду плотного множества $\{z_m\}_{m=1}^\infty \subset \ell_\infty$, то для любого $x \in S$ существует $m(x) \in \mathbb{N}$, такое, что $\|x - z_{m(x)}\|_\infty < \frac{1}{3}$. Тогда для любых $x, y \in S$, $x \neq y$ получаем

$$\|z_{m(x)} - z_{m(y)}\|_\infty \geq \|x-y\|_\infty - \|x - z_{m(x)}\|_\infty - \|y - z_{m(y)}\|_\infty > \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $z_{m(x)} \neq z_{m(y)}$. Поэтому множество

$$A = \{\, z_{m(x)} \mid x \in S \,\}$$

равномощно множеству S, т. е. является несчётным. С другой стороны, A является подмножеством счётного множества, т. е. не более чем счётно. Получили противоречие.

5.3. Сопряжённое гильбертово пространство

Теорема 5.3.1 (*Рисс, Фреше*)**.** *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Тогда для любого линейного функционала $f \in \mathcal{H}^*$ существует единственный вектор $z(f) \in \mathcal{H}$, такой, что $f(x) = (x, z(f))$ для любого $x \in \mathcal{H}$, причём $\|f\| = \|z(f)\|$. Отображение $z\colon \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ является взаимно однозначным отображением пространства $\mathcal{H}^*$ на $\mathcal{H}$, изометричным и сопряжённо-линейным, т. е. $z(f+g) = z(f) + z(g)$ и $z(\alpha f) = \overline{\alpha} z(f)$ для всех $f, g \in \mathcal{H}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Если функционал $f = 0$, то положим $z(0) = 0$. Рассмотрим произвольный нетривиальный функционал $f \in \mathcal{H}^*$. Тогда $\operatorname{Ker} f$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$, не совпадающее с $\mathcal{H}$. Так как по теореме 3.2.2 имеем $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp$ и $\operatorname{Ker} f \neq \mathcal{H}$, то $(\operatorname{Ker} f)^\perp \neq 0$. Рассмотрим нетривиальный вектор $y \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Тогда $f(y) \neq 0$, и для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ выполнено включение $x - \frac{f(x)}{f(y)} y \in \operatorname{Ker} f$. Следовательно, получаем равенство $0 = \Big(x - \frac{f(x)}{f(y)} y, y\Big) = (x, y) - \frac{f(x)}{f(y)} (y, y)$, т. е. справедливо соотношение $f(x) = \Big(x, \frac{\overline{f(y)}}{(y,y)} y\Big)$. Определим вектор $z(f) = \frac{\overline{f(y)}}{(y,y)} y$, тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем равенство $f(x) = \Big(x, z(f)\Big)$.

Предположим, существует другой вектор $w \in \mathcal{H}$, такой, что

$$f(x) = (x, w) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{H}.$$

Тогда получаем равенство $\Big(x, z(f) - w\Big) = 0$ для любого $x \in \mathcal{H}$. Следовательно, для вектора $x = z(f) - w \in \mathcal{H}$ получаем

$$\Big(z(f) - w, z(f) - w\Big) = 0,$$

т. е. $z(f) = w$. Таким образом, доказана единственность вектора $z(f)$.

В силу неравенства Коши—Буняковского получаем

$$|f(x)| \leq \|x\| \, \|z(f)\| \quad \text{для любого} \quad x \in \mathcal{H}.$$

Следовательно, $\|f\| \leq \|z(f)\|$. С другой стороны,

$$\|z(f)\| = \frac{\Big(z(f), z(f)\Big)}{\|z(f)\|} = \frac{f(z(f))}{\|z(f)\|} \leq \|f\|.$$

Следовательно, доказано равенство $\|f\| = \|z(f)\|$.

Для любых функционалов $f, g \in \mathcal{H}^*$ и любого $x \in \mathcal{H}$ имеем равенства

$$(f+g)(x) = \Big(x, z(f+g)\Big) = f(x) + g(x) =$$
$$= \Big(x, z(f)\Big) + \Big(x, z(g)\Big) = \Big(x, z(f) + z(g)\Big).$$

Следовательно, для любого $x \in \mathcal{H}$ получаем

$$\Big(x, z(f+g) - z(f) - z(g)\Big) = 0.$$

Тогда для вектора $x = z(f+g) - z(f) - z(g)$ получаем

$$\Big(z(f+g) - z(f) - z(g), z(f+g) - z(f) - z(g)\Big) = 0,$$

т. е. выполнено равенство $z(f+g) = z(f) + z(g)$.

Для любого $f \in \mathcal{H}^*$ и скаляра $\alpha \in \mathbb{C}$ для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$(\alpha f)(x) = \Big(x, z(\alpha f)\Big) = \alpha f(x) = \alpha \Big(x, z(f)\Big) = \Big(x, \overline{\alpha} z(f)\Big).$$

Следовательно, для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ получаем

$$\Big(x, z(\alpha f) - \overline{\alpha} z(f)\Big) = 0.$$

Тогда для вектора $x = z(\alpha f) - \overline{\alpha} z(f)$ получаем

$$\Big(z(\alpha f) - \overline{\alpha} z(f), z(\alpha f) - \overline{\alpha} z(f)\Big) = 0,$$

т. е. выполнено равенство $z(\alpha f) = \overline{\alpha} z(f)$.

Осталось показать, что образ отображения $z\colon \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ совпадает с $\mathcal{H}$, т. е. для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ существует линейный функционал $f \in \mathcal{H}^*$, такой, что $z(f) = y$. Для любого $y \in \mathcal{H}$ рассмотрим линейный функционал $f(x) = (x, y)$, $x \in \mathcal{H}$. Так как $|f(x)| \le \|x\|\,\|y\|$, то $\|f\| \le \|y\|$. Следовательно, $f \in \mathcal{H}^*$. Так как для функционала f существует единственный вектор $z(f) \in \mathcal{H}$ вида $f(x) = \Big(x, z(f)\Big)$ для любого $x \in \mathcal{H}$, то получаем равенство $z(f) = y$, что и требовалось.

С л е д с т в и е 5.3.1. *Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ является рефлексивным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение $F\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{**}$ вида $(Fx)(f) = f(x)$ для любых $x \in \mathcal{H}$ и $f \in \mathcal{H}^*$. По определению 5.1.2 требуется доказать, что для любого функционала $\Phi \in \mathcal{H}^{**}$ существует вектор $y \in \mathcal{H}$, такой, что $Fy = \Phi$. Пусть $z\colon \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ — сопряжённо-линейное изометрическое взаимно однозначное отображение, определённое в теореме 5.3.1. Для любого функционала $\Phi \in \mathcal{H}^{**}$ определим линейный функционал $f = \overline{\Phi \circ z^{-1}}$, т. е. $f(x) = \overline{\Phi\left(z^{-1}(x)\right)}$ для любого $x \in \mathcal{H}$. Тогда имеем неравенство $|f(x)| \le \|\Phi\|\,\|z^{-1}(x)\| = \|\Phi\|\,\|x\|$ для любого $x \in \mathcal{H}$, т. е. $\|f\| \le \|\Phi\|$. Следовательно, справедливо включение $f \in \mathcal{H}^*$. Определим вектор $y = z\,(f)$. Тогда для любого функционала $g \in \mathcal{H}^*$ получаем

$$(Fy)(g) = g(y) = \Big(z\,(f)\,, z(g)\Big) = \overline{f\,\Big(z(g)\Big)} = \Phi\left(z^{-1}\,\Big(z(g)\Big)\right) = \Phi(g),$$

т. е. $Fy = \Phi$, что и требовалось.

П р и м е р 5.3.1. Для любого множества $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ полное пространство $\mathbb{L}_2(E)$, скалярное произведение в котором задано соотношением $(x, y) = \int\limits_E x\,\overline{y}\,d\mu$ для любых $x, y \in \mathbb{L}_2(E)$, является гильбертовым пространством. Действительно, для любых $x, y \in \mathbb{L}_2(E)$ имеем при каждом $t \in E$ неравенство

$$|x(t)\overline{y(t)}| = |x(t)|\,|y(t)| \leq \frac{|x(t)|^2 + |y(t)|^2}{2}.$$

Так как функция $\frac{|x|^2+|y|^2}{2} \in \mathcal{L}(E)$, то в силу утверждения 4.3.2 получаем $|x\overline{y}| \in \mathcal{L}(E)$, т. е. величина (x, y) существует для любых $x, y \in \mathbb{L}_2(E)$ и, очевидно, удовлетворяет свойствам 1—4 определения 3.2.1 скалярного произведения. При этом выполнено равенство $(x, x) = \|x\|_2$. По теореме 5.3.1 Рисса—Фреше получаем, что любой линейный непрерывный функционал $f \in \Big(\mathbb{L}_2(E)\Big)^*$ порождается единственным элементом $z \in \mathbb{L}_2(E)$ по формуле

$$f(x) = \int\limits_E x\,\overline{z}\,d\mu \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2(E),$$

причём справедливо равенство $\|f\| = \|z\|_2$.

5.4. Слабая топология

В этом параграфе будем рассматривать комплексное линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$.

Определение 5.4.1. *Для любого вектора $x_0 \in X$, функционала $f \in X^*$ и числа $\varepsilon > 0$ определим множество*

$$V(x_0, f, \varepsilon) = \Big\{\ x \in X \ \Big|\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \Big\}.$$

Топология в множестве X, предбазой которой является семейство множеств

$$\sigma_w = \Big\{\ V(x_0, f, \varepsilon)\ \Big|\ x_0 \in X,\ f \in X^*,\ \varepsilon > 0\ \Big\},$$

называется слабой топологией в X и обозначается τ_w.

Замечание 5.4.1. Заметим, что семейство σ_w удовлетворяет условию утверждения 1.1.10, так как для любого $x \in X$ и любого $f \in X^*$ выполнено $x \in V(x, f, 1)$. Причём само множество X является элементом семейства σ_w, так как $X = V(0, 0, 1) \in \sigma_w$. Следовательно, семейство σ_w действительно является предбазой некоторой топологии в X, которая по определению 5.4.1 называется слабой.

Замечание 5.4.2. По определению предбазы σ_w слабой топологии в пространстве $(X, \|\cdot\|)$ получаем, что любой функционал $f \in$ $\in X^*$ будет непрерывным относительно слабой топологии τ_w. Действительно, для любых функционала $f \in X^*$, вектора $x_0 \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ существует слабая окрестность вектора x_0 вида $V(x_0, f, \varepsilon) \in$ $\in \tau_w$, такая, что для любого $x \in V(x_0, f, \varepsilon)$ по определению 5.4.1 получаем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следовательно, функционал $f \in X^*$ является слабо непрерывным на X.

Верно и обратное утверждение, т. е. если линейный функционал $f: X \to \mathbb{C}$ является слабо непрерывным на X, то f является непрерывным относительно нормированной топологии в X, т. е. справедливо включение $f \in X^*$. Действительно, если линейный функционал f является слабо непрерывным в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ существует слабая окрестность нуля $U_0 \in \tau_w$, такая, что для любого $x \in U_0$ выполнено неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. По определению слабой топологии существуют номер N, векторы $\{x_k\}_{k=1}^N \subset X$, функционалы $\{f_k\}_{k=1}^N \subset X^*$ и положительные числа $\{\delta_k\}_{k=1}^N$, такие, что выполнены включения

$$0 \in \bigcap_{k=1}^{N} V(x_k, f_k, \delta_k) \subset U_0.$$

Тогда $|f_k(x_k)| < \delta_k$ для любого $k \in \overline{1, N}$. Рассмотрим число

$$\delta = \min_{k \in \overline{1,N}} \Big(\delta_k - |f_k(x_k)|\Big) > 0.$$

Тогда для любого вектора $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} V(0, f_k, \delta)$ получаем неравенства

$$|f_k(x) - f_k(x_k)| \le |f_k(x)| + |f_k(x_k)| < \delta + |f_k(x_k)| \le \delta_k \quad \forall\, k \in \overline{1, N}.$$

Следовательно, $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} V(x_k, f_k, \delta_k)$, т. е. справедливо включение

$$\bigcap_{k=1}^{N} V(0, f_k, \delta) \subset \bigcap_{k=1}^{N} V(x_k, f_k, \delta_k) \subset U_0.$$

Это означает, что для любого вектора x вида $|f_k(x)| < \delta$ при всех значениях $k \in \overline{1, N}$ справедливо неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. В частности, для любого вектора $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$ и любого числа $t > 0$ получаем $|f_k(tx)| = |tf_k(x)| = 0 < \delta$. Отсюда $|f(tx)| < \varepsilon$, т. е. $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{t} \to 0$ при $t \to +\infty$. Следовательно, $f(x) = 0$, т. е. $x \in \operatorname{Ker} f$. Таким образом, справедливо включение

$$\bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \subset \operatorname{Ker} f.$$

Рассмотрим линейное отображение $\varPhi\colon X \to \mathbb{C}^N$ вида

$$\varPhi(x) = \Big(f_1(x), \ldots, f_N(x)\Big) \quad \forall\, x \in X.$$

Определим отображение $H\colon \operatorname{Im}\varPhi \to \mathbb{C}$ вида $H\Big(\varPhi(x)\Big) = f(x)$ для любого $x \in X$. Определение отображения H корректно, так как если векторы $x \in X$ и $y \in X$ порождают одну и ту же точку в линейном пространстве $\operatorname{Im}\varPhi$, т. е. имеет место равенство $\varPhi(x) = \varPhi(y)$, то справедливо включение $x - y \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \subset \operatorname{Ker} f$. Следовательно, $f(x) = f(y)$, т. е. $H\Big(\varPhi(x)\Big) = H\Big(\varPhi(y)\Big)$. Очевидно, что отображение H линейно, так как для любых векторов $x, y \in X$ и скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем равенства

$$H\Big(\alpha\varPhi(x) + \beta\varPhi(y)\Big) = H\Big(\varPhi(\alpha x + \beta y)\Big) =$$
$$= f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha H\Big(\varPhi(x)\Big) + \beta H\Big(\varPhi(y)\Big).$$

В силу линейности отображения H, определённом на конечномерном линейном пространстве $\operatorname{Im}\varPhi$, существуют скаляры $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N} \subset \mathbb{C}$, такие, что для любого $x \in X$ справедливо равенство

$$H\Big(\varPhi(x)\Big) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k(x) = f(x),$$

т. е. $f = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k f_k$. Так как $f_k \in X^*$ для любого $k \in \overline{1,N}$, то окончательно получаем $f \in X^*$, что и требовалось.

З а м е ч а н и е 5.4.3. Всегда слабая топология τ_w в X содержится в нормированной топологии τ_n, т. е. справедливо включение $\tau_w \subset \tau_n$, которое следует из включения $\sigma_w \subset \tau_n$. Покажем это последнее включение. Для любого вектора $x_0 \in X$, функционала $f \in \in X^*$ и числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим произвольный вектор $z \in V(x_0, f, \varepsilon)$. Определим положительное число $r = \varepsilon - |f(z) - f(x_0)|$. Тогда для любого вектора x вида $\|x - z\| < \frac{r}{\|f\|+1}$ получаем

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(x_0)| \le \\ \le \|f\|\,\|x - z\| + |f(z) - f(x_0)| < r + |f(z) - f(x_0)| = \varepsilon.$$

Следовательно, $x \in V(x_0, f, \varepsilon)$. Таким образом, любая точка множества $V(x_0, f, \varepsilon)$ входит в него вместе с некоторым τ_n-открытым шаром, т. е. справедливо включение $V(x_0, f, \varepsilon) \in \tau_n$. Следовательно, $\sigma_w \subset \tau_n$, что и требовалось.

Отсюда, в частности, легко следует, что всякий слабо непрерывный линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{C}$ является непрерывным относительно нормированной топологии в X, т. е. $f \in X^*$. Действительно, если функционал f слабо непрерывен, то, по утверждению 1.1.6, для любого открытого в $\mathbb{C}$ множества G его прообраз $f^{-1}(G) = \{\, x \in \in X \mid f(x) \in G\}$ является слабо открытым множеством в X. Поэтому он принадлежит и нормированной топологии пространства X. Следовательно, в силу того же утверждения 1.1.6, получаем включение $f \in X^*$.

Пусть линейное пространство X бесконечномерно. Тогда слабая топология τ_w в X строго слабее нормированной топологии τ_n, т. е. $\tau_w \subsetneq \tau_n$. Увидим, что τ_n-открытый шар $O_1^X(0) \notin \tau_w$. Для этого докажем, что любая слабая окрестность нуля U_0 не содержится в шаре $O_1^X(0)$. Действительно, как показано в замечании 5.4.2, для любой слабой окрестности нуля U_0 существуют номер N, функционалы $\{f_k\}_{k=1}^N \subset X^*$ и число $\delta > 0$, такие, что $\bigcap\limits_{k=1}^N V(0, f_k, \delta) \subset U_0$. Так как $\bigcap\limits_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k \subset \bigcap\limits_{k=1}^N V(0, f_k, \delta)$, то получаем включение $\bigcap\limits_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k \subset U_0$. Покажем, что подпространство $\bigcap\limits_{k=1}^N \operatorname{Ker} f_k$ нетривиально. Для доказательства этого факта увидим, что существуют векторы $\{z_k\}_{k=1}^N \subset X$, такие, что справедливо равенство

$$\bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_N\} = X.$$

Покажем это равенство индукцией по N. Действительно, существует вектор $z_1 \in X$, такой, что $\operatorname{Ker} f_1 \oplus \operatorname{Lin}\{z_1\} = X$. Если $f_1 = 0$, то подойдёт $z_1 = 0$. Если же $f_1 \neq 0$, то существует $z_1 \in X$, такой, что $f(z_1) \neq 0$. Тогда для любого $x \in X$ получаем $x = y + \frac{f_1(x)}{f_1(z_1)} z_1$, где вектор $y = x - \frac{f_1(x)}{f_1(z_1)} z_1 \in \operatorname{Ker} f_1$. Следовательно, справедливо равенство $X = \operatorname{Ker} f_1 + \operatorname{Lin}\{z_1\}$. Если же вектор $x \in \operatorname{Ker} f_1 \cap$ $\cap \operatorname{Lin}\{z_1\}$, то $x = tz_1$ и $0 = f(x) = tf(z_1)$, т. е. $t = 0$ и $x = 0$. Поэтому $\operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Lin}\{z_1\} = \{0\}$, т. е. сумма подпространств $\operatorname{Ker} f_1$ и $\operatorname{Lin}\{z_1\}$ прямая. Теперь, рассуждая по индукции, предположим, что $\bigcap\limits_{k=1}^{N-1} \operatorname{Ker} f_k \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_{N-1}\} = X$. Рассмотрим сужение функционала f_N на подпространство $L_N = \bigcap\limits_{k=1}^{N-1} \operatorname{Ker} f_k$. Как показано выше в первом шаге индукции, существует вектор $z_N \in L_N$, такой, что справедливо равенство

$$\Big(L_N \cap \operatorname{Ker} f_N\Big) \oplus \operatorname{Lin}\{z_N\} = L_N.$$

Тогда получаем

$$X = L_N \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_{N-1}\} =$$

$$= \Big(L_N \cap \operatorname{Ker} f_N\Big) \oplus \operatorname{Lin}\{z_N\} \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_{N-1}\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_N\},$$

что и требовалось. Так как по условию $\dim X = +\infty$, а

$$\dim \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_N\} \leq N,$$

то получаем, что $\dim \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k = +\infty$. Следовательно, бесконечномерное подпространство $\bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$ заведомо является нетривиальным. Но тогда для любого нетривиального вектора $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \subset$ $\subset U_0$ получаем, что вектор $z = \frac{2x}{\|x\|} \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$ удовлетворяет соотношениям: $\|z\| = 2 > 1$, т. е. $z \notin O_1^X(0)$, но $z \in U_0$. Таким образом, мы доказали, что $U_0 \not\subset O_1^X(0)$, т. е. $O_1^X(0) \notin \tau_w$.

Определение 5.4.2. *Нормированную топологию τ_n в X будем называть сильной топологией.*

Замечание 5.4.4. Пусть пространство X конечномерно, а его размерность $\dim X = n$. Тогда слабая топология в X совпадает с его сильной нормированной топологией. Достаточно доказать, что существует слабая окрестность нуля U_0, которая содержится в $O_1^X(0)$. Предположим, что существование окрестности U_0 установлено. Для любого сильно открытого множества $G \subset X$ и любого вектора $x \in G$ существует число $r(x) > 0$, такое, что $O_{r(x)}^X(x) \subset G$. Тогда множество $V(x) = x + r(x)U_0$ является слабой окрестностью точки x, причём $V(x) \subset x + r(x)O_1^X(0) = O_{r(x)}^X(x) \subset G$. Следовательно, справедливы включения
$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} V(x) \subset G.$$
Таким образом, выполнено равенство $G = \bigcup\limits_{x \in G} V(x)$, т. е. множество G является слабо открытым как объединение слабо открытых множеств. Так как в силу замечания 5.4.3 любое слабо открытое в X множество является сильно открытым, то получаем равенство сильной нормированной и слабой топологий в конечномерном пространстве X.

Осталось доказать существование слабой окрестности нуля $U_0 \subset$ $\subset O_1^X(0)$. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — некоторый базис в пространстве X. Тогда для любого вектора $x \in X$ существуют единственные скаляры $\alpha_k(x)$, такие, что $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(x) e_k$. Ясно, что отображение $\alpha_k \colon X \to \mathbb{C}$ является линейным, а функция $\|x\|_e = \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k(x)|$ есть норма в X. По теореме 3.1.1 нормы $\|\cdot\|_e$ и $\|\cdot\|_X$ эквивалентны. Следовательно, существуют числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, такие, что для всех $x \in X$ справедливы неравенства
$$C_1 \|x\|_X \le \|x\|_e \le C_2 \|x\|_X.$$

Тогда для любого номера $k \in \overline{1,n}$ и вектора $x \in X$ имеем неравенство $|\alpha_k(x)| \le \|x\|_e \le C_2\|x\|_X$. Следовательно, $\|\alpha_k\| \le C_2$, т. е. справедливо включение $\alpha_k \in X^*$. Рассмотрим слабую окрестность нуля вида

$$U_0 = \bigcap_{k=1}^{n} V\left(0, \alpha_k, \frac{C_1}{n}\right).$$

Тогда включение $x \in U_0$ равносильно выполнению неравенств

$$|\alpha_k(x)| < \frac{C_1}{n} \quad \text{для всех} \quad k \in \overline{1,n}.$$

Следовательно, если $x \in U_0$, то $\|x\|_e < C_1$ и выполнено неравенство $\|x\|_X \le \frac{\|x\|_e}{C_1} < 1$, т. е. $x \in O_1^X(0)$. Таким образом, справедливо включение $U_0 \subset O_1^X(0)$, что и требовалось.

Утверждение 5.4.1. *Последовательность векторов*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

является слабо сходящейся к вектору $y \in X$, т. е. $x_n \xrightarrow{\tau_w} y$ при $n \to \to \infty$, тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in X^*$ выполнено соотношение $f(x_n) \to f(y)$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{\tau_w} y$ при $n \to \infty$. По замечанию 5.4.2 любой функционал $f \in X^*$ является слабо непрерывным. Следовательно, в силу утверждения 1.1.7 функционал f является секвенциально непрерывным, т. е. получаем соотношение $f(x_n) \to \to f(y)$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь для любого функционала $f \in X^*$ выполнено соотношение $f(x_n) \to f(y)$ при $n \to \infty$. Рассмотрим произвольную слабую окрестность $U(y)$ вектора y. По определению слабой топологии существует номер M, векторы $\{z_m\}_{m=1}^M \subset X$, функционалы $\{f_m\}_{m=1}^M \subset X^*$ и положительные числа $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^M$, такие, что справедливо включение

$$y \in \bigcap_{m=1}^{M} V(z_m, f_m, \varepsilon_m) \subset U(y).$$

Для любого $m \in \overline{1,M}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_m(x_n) = f_m(y)$ и неравенство $|f_m(y) - f_m(z_m)| < \varepsilon_m$. Определим число

$$\varepsilon = \min_{m\in\overline{1,M}} \Big(\varepsilon_m - |f_m(y) - f_m(z_m)|\Big) > 0.$$

Существует номер N, такой, что для всех $n > N$ и всех $m \in \overline{1,M}$ выполнено неравенство $|f_m(x_n) - f_m(y)| < \varepsilon$. Тогда для любого $n > N$ получаем

$$|f_m(x_n) - f_m(z_m)| \le |f_m(x_n) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(z_m)| < \\ < \varepsilon + |f_m(y) - f_m(z_m)| \le \varepsilon_m \quad \forall\, m \in \overline{1,M}.$$

Следовательно, для всех $n > N$ получаем включение

$$x_n \in \bigcap_{m=1}^{M} V(z_m, f_m, \varepsilon_m) \subset U(y),$$

т. е. $x_n \xrightarrow{\tau_w} y$ при $n \to \infty$, что и требовалось.

Утверждение 5.4.2. *Предел слабо сходящейся в пространстве X последовательности единственен.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ является слабо сходящейся к векторам y и z. Тогда по утверждению 5.4.1 для любого функционала $f \in X^*$ имеем равенства $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(z)$. Следовательно, $f(y-z) = 0$ для любого $f \in X^*$. Тогда по пункту 3 следствия 5.1.2 теоремы Хана—Банаха получаем $y - z = 0$, т. е. $y = z$, что и требовалось.

Пример 5.4.1. Приведём пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. В гильбертовом пространстве $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ рассмотрим последовательность базисных векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \ne n. \end{cases}$$

Так как для любых $m \ne n$ имеем $\|e_m - e_n\|_2 = \sqrt{2}$, то данная последовательность не является $\|\cdot\|_2$-фундаментальной и, значит, не является сильно сходящейся в пространстве ℓ_2. По теореме 5.3.1 Рисса—Фреше, для любого функционала $f \in (\ell_2)^*$ существует единственный вектор $z \in \ell_2$, такой, что $f(x) = (x, z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{z(k)}$ для любого $x \in \in \ell_2$. Тогда получаем

$$f(e_n) = (e_n, z) = \overline{z(n)} \to 0 = f(0) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $e_n \xrightarrow{\tau_w} 0$ при $n \to \infty$.

Утверждение 5.4.3. *Пусть последовательность*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

слабо сходится к вектору $x \in X$. Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной по норме пространства X (сильно ограничена), и справедливо неравенство

$$\|x\| \leq \varliminf_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность линейных функционалов $\{\varPhi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^{**}$ вида

$$\varPhi_n(f) = f(x_n) \quad \forall\, f \in X^*, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

В силу пункта 4 следствия 5.1.2 теоремы Хана—Банаха имеем

$$\|\varPhi_n\| = \sup_{f \in X^* \colon \|f\|=1} |f(x_n)| = \|x_n\|.$$

По условию для любого $f \in X^*$ существует

$$\lim_{n \to \infty} \varPhi_n(f) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x).$$

По определению 3.4.6 сопряжённого пространства имеем равенство $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$, а пространство $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ является полным по теореме 3.4.1 в силу полноты комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Следовательно, последовательность линейных непрерывных операторов $\varPhi_n \colon X^* \to \mathbb{C}$ является поточечно сходящейся и, значит, поточечно ограниченной в $\mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$. Следовательно, по теореме 3.4.2 Банаха—Штейнгауза она является ограниченной по норме пространства X^{**}, т. е. $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|\varPhi_n\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$, что и требовалось.

Для любого функционала $f \in X^*$ и номера n справедливо неравенство $|f(x_n)| \leq \|f\| \, \|x_n\|$, переходя в котором к нижнему пределу по $n \to \infty$ получаем

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \varliminf_{n\to\infty} |f(x_n)| \leq \|f\| \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Следовательно, в силу пункта 4 следствия 5.1.2 теоремы Хана—Банаха получаем

$$\|x\| = \sup_{f \in X^* \colon \|f\|=1} |f(x)| \leq \sup_{f \in X^* \colon \|f\|=1} \left(\|f\| \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \right) = \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

З а м е ч а н и е 5.4.5. Как показано в замечании 5.4.3, в случае бесконечномерного пространства X его слабая топология строго слабее сильной нормированной топологии. Тем не менее даже в этом случае может оказаться, что слабая и сильная сходимости последовательности будут равносильными. Пример такой ситуации даёт следующая

Т е о р е м а 5.4.1 (*Шур*). *В пространстве ℓ_1 всякая слабо сходящаяся последовательность является сильно сходящейся.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, рассуждая от противного, существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_1$, слабо сходящаяся в ℓ_1 к вектору $x \in \ell_1$ и не сходящаяся к нему сильно, т. е. выполнено $\|x_n - x\|_1 \not\to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность $y_n = x_n - x$. Тогда y_n слабо, но не сильно сходится в ℓ_1 к нулю. Так как в силу утверждения 5.4.3 последовательность $\|y_n\|_1$ ограничена и по предположению не сходится к нулю, то существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \|y_{n_k}\|_1 = c > 0$. Тогда существует номер k_0, такой, что для всех $k > k_0$ выполнено $y_{n_k} \neq 0$. Определим последовательность

$$z_m = \frac{y_{n_{m+k_0}}}{\|y_{n_{m+k_0}}\|_1} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Для любого функционала $f \in \ell_1^*$ получаем

$$\lim_{m\to\infty} f(z_m) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{f(y_{n_{m+k_0}})}{\|y_{n_{m+k_0}}\|_1} \right) = \frac{\lim\limits_{m\to\infty} f(y_{n_{m+k_0}})}{\lim\limits_{m\to\infty} \|y_{n_{m+k_0}}\|_1} = \frac{0}{c} = 0 = f(0),$$

т. е. последовательность z_m слабо сходится в ℓ_1 к нулю и $\|z_m\|_1 = 1$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим линейный функционал $f_k\colon \ell_1 \to \mathbb{C}$ вида $f_k(x) = x(k)$ для любого $x \in X$. Имеем равенство

$$\|f_k\| = \sup_{x\in\ell_1\colon \|x\|_1=1} |x(k)| = 1,$$

т. е. справедливо включение $f_k \in \ell_1^*$. Следовательно, для любого $k \in \in \mathbb{N}$ имеем соотношение $f_k(z_m) = z_m(k) \to 0$ при $m \to \infty$.

Пусть $m_1 = 1$ и $p_0 = 0$. Так как

$$\|z_{m_1}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |z_{m_1}(k)| = 1,$$

то существует номер p_1, такой, что выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{p_1} |z_{m_1}(k)| > \frac{3}{4}.$$

Далее, рассуждая по индукции, предположим, что для некоторого $j \in \mathbb{N}$ выбраны номера

$$1 = m_1 < m_2 < \ldots < m_j \quad \text{и} \quad 0 = p_0 < p_1 < \ldots < p_j,$$

такие, что для любого номера $s \in \overline{1,j}$ выполнены неравенства

$$\sum_{k=1}^{p_{s-1}} |z_{m_s}(k)| < \frac{1}{4}, \qquad \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |z_{m_s}(k)| > \frac{3}{4}.$$

Так как для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $z_m(k) \to 0$ при $m \to \infty$, то существует номер $m_{j+1} > m_j$, такой, что

$$\sum_{k=1}^{p_j} |z_{m_{j+1}}(k)| < \frac{1}{4}.$$

Так как $\|z_{m_{j+1}}\|_1 = 1$, то получаем

$$\sum_{k=p_j+1}^{\infty} |z_{m_{j+1}}(k)| = 1 - \sum_{k=1}^{p_j} |z_{m_{j+1}}(k)| > \frac{3}{4}.$$

Тогда существует номер $p_{j+1} > p_j$, такой, что выполнено неравенство

$$\sum_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} |z_{m_{j+1}}(k)| > \frac{3}{4}.$$

Для любого комплексного числа w определим число

$$\sigma(w) = \begin{cases} \frac{\overline{w}}{|w|}, & w \neq 0, \\ 0, & w = 0, \end{cases}$$

так что $w\sigma(w) = |w|$. Определим элемент $\eta \in \ell_\infty = \ell_1^*$ следующим образом:

$$\eta(k) = \sigma\left(z_{m_s}(k)\right)$$

для всех k вида $p_{s-1} < k \leq p_s$ для любого $s \in \mathbb{N}$. Тогда $\|\eta\|_\infty \leq 1$. Рассмотрим функционал $f_0 \in \ell_1^*$, соответствующий построенному элементу $\eta \in \ell_\infty$, т. е.

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(k)x(k) \qquad \forall\, x \in \ell_1.$$

При этом $\|f_0\| = \|\eta\|_\infty \leq 1$. Получаем для любого $s \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \Big|f_0(z_{m_s})\Big| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \eta(k) z_{m_s}(k)\right| \geq \left|\sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} \sigma\left(z_{m_s}(k)\right) z_{m_s}(k)\right| - \\ - \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\eta(k)|\,|z_{m_s}(k)| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |\eta(k)|\,|z_{m_s}(k)| \geq \\ \geq \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |z_{m_s}(k)| - \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |z_{m_s}(k)| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |z_{m_s}(k)| = \\ = 2 \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |z_{m_s}(k)| - \|z_{m_s}\|_1 > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Однако по предположению z_{m_s} слабо сходится в ℓ_1 к нулю при $s \to \to \infty$, т. е., в частности, выполняется соотношение $f_0(z_{m_s}) \to 0$ при $s \to \infty$, которое противоречит доказанному неравенству $|f_0(z_{m_s})| > > \frac{1}{2}$ для любого $s \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие означает, что произвольная слабо сходящаяся в ℓ_1 последовательность является сильно сходящейся.

Задача 5.4.1. Пусть линейное пространство X бесконечномерно. Пусть

$$S = \left\{ x \in X \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\}$$

— единичная сфера в пространстве X. Доказать, что слабое замыкание сферы S совпадает с единичным замкнутым шаром в X, т. е. справедливо равенство

$$[S]_{\tau_w} = B_1(0) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \|x\| \leq 1 \right\}.$$

Решение. Рассмотрим произвольный вектор $x_0 \notin B_1(0)$, т. е. $\|x_0\| > 1$. В силу пункта 2 следствия 5.1.2 существует функционал $f_0 \in X^*$, такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$. Тогда для любого $x \in V(x_0, f_0, \|x_0\| - 1)$ получаем

$$\|x\| \geq |f_0(x)| \geq |f_0(x_0)| - |f_0(x) - f_0(x_0)| > \|x_0\| - \Big(\|x_0\| - 1\Big) = 1,$$

т. е. $x \notin B_1(0)$. Следовательно, справедливо соотношение

$$S \cap V(x_0, f_0, \|x_0\| - 1) = \varnothing,$$

что означает $x_0 \notin [S]_{\tau_w}$. Следовательно, имеет место включение $[S]_{\tau_w} \subset B_1(0)$.

Теперь рассмотрим произвольный вектор $z_0 \in B_1(0)$, т. е. $\|z_0\| \leq$ ≤ 1, и произвольную слабую окрестность $U(z_0)$ вектора z_0. Тогда существует номер N, векторы $\{z_k\}_{k=1}^N \subset X$, функционалы $\{f_k\}_{k=1}^N \subset$ $\subset X^*$ и положительные числа $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^N$, такие, что справедливы включения

$$z_0 \subset \bigcap_{k=1}^{N} V(z_k, f_k, \varepsilon_k) \subset U(z_0).$$

Тогда для любого вектора $x \in z_0 + \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$ получаем для любого номера $k \in \overline{1, N}$ равенство $f_k(x) = f_k(z_0)$. Поэтому $|f_k(x) - f_k(z_k)| =$ $= |f_k(z_0) - f_k(z_k)| < \varepsilon_k$ для любого $k \in \overline{1, N}$. Следовательно, справедливо включение

$$z_0 + \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \subset \bigcap_{k=1}^{N} V(z_k, f_k, \varepsilon_k) \subset U(z_0).$$

Как показано в замечании 5.4.3, в случае $\dim X = +\infty$ выполнено $\dim \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k = +\infty$. Поэтому существует нетривиальный вектор $y \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ получаем включения $ty \in \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$ и $z_0 + ty \in U(z_0)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \|z_0 + ty\|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что функция φ непрерывна на $\mathbb{R}$, так как в силу неравенства треугольника для нормы, для любых $t, \tau \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leq |t - \tau| \, \|y\|$. Так как $\varphi(0) = \|z_0\| \leq 1$ и $\varphi(t) \geq |t| \, \|y\| - \|z_0\| \to +\infty$ при $t \to \infty$, то по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции существует $t_0 \in \mathbb{R}$, такое, что $\varphi(t_0) = 1$. Следовательно, справедливо включение $z_0 + t_0 y \in S$. Тогда получаем $S \cap U(z_0) \neq \varnothing$, т. е. $z_0 \in [S]_{\tau_w}$. Таким образом, доказано включение $B_1(0) \subset [S]_{\tau_w}$, что и требовалось.

Теорема 5.4.2 (*Мазур*). *Пусть множество $A \subset X$ является выпуклым. Тогда множество A является слабо замкнутым тогда и только тогда, когда оно является сильно замкнутым.*

Доказательство. Пусть множество A слабо замкнуто. Тогда его дополнение $A^c = X \backslash A$ слабо открыто, т. е. $A^c \in \tau_w$. Так как по замечанию 5.4.3 всякое слабо открытое множество в X является сильно открытым, то получаем, что $A^c \in \tau_n$. Следовательно, множество A сильно замкнуто. Заметим, что мы пока не использовали выпуклость множества A.

Пусть теперь множество A сильно замкнуто. Покажем, что его дополнение A^c слабо открыто. Рассмотрим произвольный элемент $x_0 \notin A$. Одноточечное множество $\{x_0\}$ является выпуклым компактом в пространстве $(X, \|\cdot\|)$, не пересекающимся с выпуклым и замкнутым в пространстве $(X, \|\cdot\|)$ множеством A. Следовательно, по теореме 5.1.2 об отделимости существуют функционал $f_0 \in X^*$ и вещественные числа $\gamma_1 < \gamma_2$, такие, что для любого вектора $a \in A$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} f_0(x_0) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} f_0(a).$$

Пусть число $\varepsilon = \gamma_2 - \gamma_1 > 0$. Тогда для любого вектора $x \in V(x_0, f_0, \varepsilon)$ получаем

$$\operatorname{Re} f_0(x) = \operatorname{Re} f_0(x_0) + \Big(\operatorname{Re} f_0(x) - \operatorname{Re} f_0(x_0) \Big) < \\ < \gamma_1 + |f_0(x) - f_0(x_0)| < \gamma_1 + \varepsilon = \gamma_2 < \operatorname{Re} f_0(a)$$

для любого вектора $a \in A$. Следовательно, множество $V(x_0, f_0, \varepsilon)$ строго отделено от множества A функционалом f_0. Это означает, что $V(x_0, f_0, \varepsilon) \cap A = \varnothing$, т. е. $V(x_0, f_0, \varepsilon) \subset A^c$. Таким образом, для любого вектора $x_0 \in A^c$ существует его слабая окрестность $V(x_0, f_0, \varepsilon)$, содержащаяся в A^c. Следовательно, множество A^c является слабо открытым, и соответственно A является слабо замкнутым в X.

З а м е ч а н и е 5.4.6. Выпуклость сильно замкнутого множества из X существенна для его слабой замкнутости. Например, как следует из результата задачи 5.4.1, невыпуклая единичная сфера S в любом бесконечномерном пространстве X не является слабо замкнутым множеством, хотя, конечно, является сильно замкнутым.

О п р е д е л е н и е 5.4.3. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется слабо фундаментальной в X, если для любой слабой окрестности нуля $U(0)$ существует номер M, такой, что для всех $n, m \geq M$ выполнено включение $x_n - x_m \in U(0)$.*

У т в е р ж д е н и е 5.4.4. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо фундаментальной в X тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in X^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо фундаментальной в X. Для любого функционала $f \in \in X^*$ и любого числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим слабую окрестность нуля вида $V(0, f, \varepsilon)$. Тогда по определению 5.4.3 существует номер $M = = M(f, \varepsilon)$, такой, что для всех номеров $n, m \geq M$ выполнено включение

$$x_n - x_m \in V(0, f, \varepsilon),$$

которое равносильно неравенству

$$|f(x_n - x_m) - f(0)| = |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Это означает, что числовая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}$.

Пусть теперь для любого функционала $f \in X^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}$. Рассмотрим произвольную слабую окрестность нуля $U(0)$. Как показано в замечании 5.4.2, для слабой окрестности нуля $U(0)$ существует номер N, функционалы $\{f_k\}_{k=1}^{N} \subset X^*$ и число $\delta > 0$, такие, что справедливо включение

$$\bigcap_{k=1}^{N} V(0, f_k, \delta) \subset U(0).$$

Так как для любого $k \in \overline{1,N}$ последовательность $\{f_k(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}$, то существует номер M_k, такой, что для всех $n, m \geq M_k$ выполнено неравенство $|f_k(x_n) - f_k(x_m)| < \delta$, которое равносильно включению $x_n - x_m \in V(0, f_k, \delta)$. Определим номер $M = \max\limits_{k \in \overline{1,N}} M_k$. Тогда для всех $n, m \geq M$ получаем включение

$$x_n - x_m \in \bigcap_{k=1}^{N} V(0, f_k, \delta) \subset U(0).$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо фундаментальной в X.

Определение 5.4.4. *Линейное нормированное пространство X называется слабо полным, если любая слабо фундаментальная последовательность из X является слабо сходящейся в X.*

Утверждение 5.4.5. *Пусть линейное нормированное пространство X является слабо полным. Тогда оно является сильно полным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную сильно фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $M = M(\varepsilon)$, такой, что для всех $n, m \geq M$ выполнено неравенство $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$. Следовательно, для любого функционала $f \in X^*$ получаем $|f(x_n) - f(x_m)| \leq \|f\| \, \|x_n - x_m\| \leq \|f\| \, \varepsilon$ для любых $n, m \geq M$. Таким образом, в силу утверждения 5.4.4 последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо фундаментальной в X. Тогда существует вектор $y \in X$, такой, что $x_n \overset{\tau_w}{\to} y$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого функционала $f \in X^*$ и номеров $n, m \geq M$ получаем

$$|f(x_n - y)| \leq |f(x_n - x_m)| + |f(x_m) - f(y)| \leq \|f\|\,\varepsilon + |f(x_m) - f(y)|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$ и используя соотношение $|f(x_m) - f(y)| \to 0$ при $m \to \infty$, получаем неравенства

$$|f(x_n - y)| \leq \|f\|\,\varepsilon \quad \forall n \geq M(\varepsilon), \quad \forall\, f \in X^*.$$

Следовательно, в силу пункта 4 следствия 5.1.2 получаем

$$\|x_n - y\| = \sup_{f \in X^*:\, \|f\|=1} |f(x_n - y)| \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq M(\varepsilon),$$

т. е. x_n сильно сходится в X к вектору y при $n \to \infty$. Это означает, что пространство X является сильно полным.

Утверждение 5.4.6. *Пусть пространство X является рефлексивным. Тогда оно является слабо полным.*

Доказательство. Так как пространство X рефлексивно, то оно изометрически изоморфно пространству $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$, которое является полным относительно операторной нормы по теореме 3.4.1. Следовательно, пространство X тоже является сильно полным. Изометрический изоморфизм между пространствами X и X^{**} осуществляет отображение $F\colon X \to X^{**}$ вида $(Fx)(f) = f(x)$ для всех $x \in X$ и $f \in X^*$. Рассмотрим в пространстве X произвольную слабо фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда в силу утверждения 5.4.4 последовательность линейных операторов $\{Fx_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X^*, \mathbb{C}) = X^{**}$ является поточечно фундаментальной в $\mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$. Так как линейные нормированные пространства $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ и $\mathbb{C}$ являются полными, то по теореме 3.4.4 пространство $\mathcal{L}(X^*, \mathbb{C}) = X^{**}$ является полным относительно поточечной сходимости. Следовательно, существует элемент $\Phi \in X^{**}$, такой, что для любого $f \in X^*$ выполнено соотношение $(Fx_n)(f) = f(x_n) \to \Phi(f)$ при $n \to \infty$. В силу рефлексивности пространства X существует вектор $y \in X$, такой, что справедливо равенство $Fy = \Phi$. Поэтому $\Phi(f) = (Fy)(f) = f(y)$ для любого $f \in X^*$. Следовательно, получаем соотношение $f(x_n) \to f(y)$ при $n \to \infty$ для любого $f \in X^*$. В силу утверждения 5.4.1 получаем, что $x_n \overset{\tau_w}{\to} y$ при $n \to \infty$, что и требовалось.

П р и м е р 5.4.2. Приведём пример банахова нерефлексивного пространства, которое не является слабо полным. Рассмотрим банахово пространство c_0, описанное в параграфе 5.2. Как показано в утверждении 5.2.8, пространство c_0 нерефлексивно. Покажем, что c_0 не является слабо полным. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} (-1)^k, & k \le n, \\ 0, & k > n \end{cases} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Для любого функционала $f \in c_0^*$ существует единственный элемент $z \in \ell_1$, такой, что для любого $x \in c_0$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z(k).$$

Тогда для любых номеров m, n вида $m > n$ получаем соотношения

$$|f(x_n) - f(x_m)| \le \sum_{k=n+1}^{m} |z(k)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |z(k)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность x_n является слабо фундаментальной в c_0. Предположим, что она слабо сходится в c_0 к элементу $y \in c_0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим функционал $f_k \in c_0^*$ вида $f_k(x) = x(k)$ для любого $x \in c_0$. Получаем

$$f_k(x_n) = x_n(k) \to f_k(y) = y(k) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $n > k$ имеем $x_n(k) = (-1)^k$, то получаем равенство $y(k) = (-1)^k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Но тогда $y \notin c_0$, т. е. получили противоречие. Следовательно, слабо фундаментальная в c_0 последовательность x_n не является слабо сходящейся в c_0, что и требовалось.

У т в е р ж д е н и е 5.4.7. *Пусть множество $S \subset X^*$ образует в пространстве X^* полную систему. Тогда последовательность*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

является слабо сходящейся в X к вектору $y \in X$ тогда и только тогда, когда она является сильно ограниченной в X, т. е. существует число $R > 0$, такое, что $\|x_n\| \leq R$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и для любого функционала $f \in S$ справедливо соотношение $f(x_n) \to f(y)$ при $n \to \to \infty$.

Доказательство. Необходимость условий слабой сходимости последовательности сразу следует из утверждений 5.4.1 и 5.4.3. Покажем достаточность. Так как любой функционал $g \in \operatorname{Lin} S$ является конечной линейной комбинацией функционалов из множества S, то справедливо соотношение $g(x_n) \to g(y)$ при $n \to \infty$. Так как множество $\operatorname{Lin} S$ является всюду плотным в X^* в силу полноты системы S, то для любого функционала $f \in X^*$ и числа $\varepsilon > 0$ существует функционал $g \in \operatorname{Lin} S$, такой, что $\|f - g\| \leq \frac{\varepsilon}{R+\|y\|}$. Существует номер N, такой, что для всех $n \geq N$ выполнено неравенство $|g(x_n) - - g(y)| \leq \varepsilon$. Следовательно, для любого $n \geq N$ получаем

$$|f(x_n) - f(y)| \leq |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(y)| + |g(y) - f(y)| \leq \\ \leq \|f - g\| \Big(\|x_n\| + \|y\|\Big) + \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{R + \|y\|} \Big(R + \|y\|\Big) + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Таким образом, для любого функционала $f \in X^*$ справедливо соотношение $f(x_n) \to f(y)$ при $n \to \infty$, что в силу утверждения 5.4.1 означает слабую сходимость последовательности x_n к вектору y.

Следствие 5.4.1. *Для любого числа $p > 1$ последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_p$ слабо сходится в ℓ_p к элементу $y \in \ell_p$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что $\|x_n\|_p \leq R$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $x_n(k) \to y(k)$ при $n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. В силу утверждения 5.2.4 имеем равенство $\ell_p^* = \ell_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Изометрический изоморфизм $\Phi \colon \ell_p^* \to \ell_q$ имеет вид: для любого функционала $f \in \ell_p^*$ существует единственный элемент $\Phi(f) = z \in \ell_q$, такой, что $\|f\| = \|z\|_q$, и для любого $x \in \ell_p$ справедливо равенство $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x(k)z(k)$. В пространстве ℓ_q существует счётный базис $E = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, где

$$e_m(k) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим функционал $f_m = \Phi^{-1}(e_m)$, т. е. $f_m(x) = x(m)$ для любого $x \in \ell_p$. Так как Φ является изометрическим изоморфизмом между ℓ_p^* и ℓ_q, то система функционалов $S = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве ℓ_p^*. Следовательно, система S является полной в ℓ_p^*. Тогда в силу утверждения 5.4.7 получаем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_p$ слабо сходится в ℓ_p к элементу $y \in \ell_p$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что $\|x_n\|_p \leq R$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $f_k(x_n) = x_n(k) \to f_k(y) = y(k)$ при $n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$, что и требовалось.

Следствие 5.4.2. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ слабо сходится в c_0 к элементу $y \in c_0$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что $\|x_n\|_\infty \leq R$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $x_n(k) \to y(k)$ при $n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. В силу утверждения 5.2.5 $c_0^* = \ell_1$. Изометрический изоморфизм $\Phi \colon c_0^* \to \ell_1$ имеет вид: для любого функционала $f \in c_0^*$ существует единственный элемент $\Phi(f) = z \in \ell_1$, такой, что $\|f\| = \|z\|_1$, и для любого элемента $x \in c_0$ справедливо равенство $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x(k)z(k)$. Используя счётный базис $E = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве ℓ_1, для любого номера m определим функционал $f_m = \Phi^{-1}(e_m)$, т. е. $f_m(x) = x(m)$ для любого элемента $x \in c_0$. Так как Φ является изометрическим изоморфизмом между c_0^* и ℓ_1, то система функционалов $S = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве c_0^*. Следовательно, система S является полной в c_0^*. Тогда в силу утверждения 5.4.7 получаем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ слабо сходится в c_0 к элементу $y \in c_0$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что $\|x_n\|_\infty \leq R$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $f_k(x_n) = x_n(k) \to f_k(y) = y(k)$ при $n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$, что и требовалось.

Следствие 5.4.3. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c$ слабо сходится в c к элементу $y \in c$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что $\|x_n\|_\infty \leq R$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $x_n(k) \to y(k)$, $x_n(\infty) \to y(\infty)$ при $n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. В силу утверждения 5.2.6 справедливо равенство $c^* = \ell_1$. Изометрический изоморфизм $\Phi \colon c^* \to \ell_1$ имеет вид: для любого функционала $f \in c^*$ существует единственный элемент $\Phi(f) = z \in \ell_1$, такой, что $\|f\| = \|z\|_1$, и для любого элемента

$x \in c$ справедливо равенство $f(x) = x(\infty)z(1) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} x(k)z(k+1)$. Используя счётный базис $E = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве ℓ_1, для любого номера m определим функционал $f_m = \Phi^{-1}(e_m)$, т. е. $f_1(x) = x(\infty)$ и $f_{m+1}(x) = x(m)$ для любого элемента $x \in c$. Так как Φ является изометрическим изоморфизмом между c^* и ℓ_1, то система функционалов $S = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве c^*. Следовательно, система S является полной в c^*. Тогда в силу утверждения 5.4.7 получаем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c$ слабо сходится в c к элементу $y \in c$ тогда и только тогда, когда существует число $R > 0$, такое, что $\|x_n\|_{\infty} \le R$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и справедливы соотношения $f_1(x_n) = x_n(\infty) \to f_1(y) = y(\infty)$, $f_{k+1}(x_n) = x_n(k) \to f_{k+1}(y) = y(k)$ при $n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$, что и требовалось.

Пример 5.4.3. Покажем, что слабая топология в пространстве ℓ_2 неметризуема. Для этого предъявим множество $S \subset \ell_2$, первое слабое секвенциальное замыкание которого не совпадает со вторым. Так как в случае метрической топологии секвенциальное замыкание любого множества совпадает с его топологическим замыканием, то наличие в ℓ_2 такого множества S сразу приводит к неметризуемости слабой топологии в ℓ_2. Пример такого множества принадлежит фон Нейману (см. [2, ч. I, гл. 3, с. 100, упр. 9]). Рассмотрим в ℓ_2 счётный базис $E = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $\|e_m\|_2 = 1$ и $e_m(k) = 0$ при $m > k$, то по следствию 5.4.1 получаем, что e_m слабо сходится к нулю в ℓ_2 при $m \to \infty$. Определим множество

$$S = \left\{ \, e_m + m e_n \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \, \right\}.$$

Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $e_m + m e_n \overset{\tau_w}{\to} e_m$ при $n \to \infty$, то получаем $e_m \in [S]_{\text{сл.секв.}}$. Следовательно, справедливо включение $S \cup E \subset [S]_{\text{сл.секв.}}$. Теперь рассмотрим произвольный элемент $z \in [S]_{\text{сл.секв.}}$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел m_k и n_k, такие, что $e_{m_k} + m_k e_{n_k} \overset{\tau_w}{\to} z$ при $k \to \infty$. Так как справедливо неравенство $\|e_{m_k} + m_k e_{n_k}\|_2 \ge m_k - 1$, то по следствию 5.4.1 получаем, что последовательность натуральных чисел m_k ограничена. Следовательно, она содержит стационарную подпоследовательность $m_{k_r} = m_0$. Далее, если последовательность n_{k_r} ограничена, то она содержит стационарную подпоследовательность $n_{k_{r_s}} = n_0$, и в этом случае получаем $z = e_{m_0} + m_0 e_{n_0} \in S$. Если же последовательность n_{k_r} неограничена, то она содержит бесконечно большую подпоследовательность $n_{k_{r_s}} \to \infty$ при $s \to \infty$. Следовательно, получаем соотношения $e_{m_{k_{r_s}}} + m_{k_{r_s}} e_{n_{k_{r_s}}} = e_{m_0} + m_0 e_{n_{k_{r_s}}} \xrightarrow{\tau_w} e_{m_0}$ при $s \to \infty$, т. е. $z = e_{m_0} \in E$. Таким образом, доказано включение $[S]_{\text{сл.секв.}} \subset S \cup E$, т. е. справедливо равенство $[S]_{\text{сл.секв.}} = S \cup E$. Так как $e_m \xrightarrow{\tau_w} 0$ при $m \to \infty$, то имеет место включение

$$0 \in [S \cup E]_{\text{сл.секв.}} = \Big[[S]_{\text{сл.секв.}}\Big]_{\text{сл.секв.}}.$$

Однако $0 \notin S \cup E = [S]_{\text{сл.секв.}}$. Таким образом, доказано неравенство

$$[S]_{\text{сл.секв.}} \neq \Big[[S]_{\text{сл.секв.}}\Big]_{\text{сл.секв.}},$$

что и требовалось.

Утверждение 5.4.8. *Пусть сопряжённое пространство X^* является сепарабельным. Для любого $R > 0$ рассмотрим слабую топологию на шаре $B_R(0) \subset X$, т. е. семейство*

$$\tau_w(R) = \left\{ U \cap B_R(0) \;\middle|\; U \in \tau_w \right\}.$$

Тогда топологическое пространство $\Big(B_R(0), \tau_w(R)\Big)$ является метрическим пространством, т. е. топология $\tau_w(R)$ метризуема.

Доказательство. Так как сопряжённое пространство X^* сепарабельно, то на единичной сфере в пространстве X^* существует счётное всюду плотное множество $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$, т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем равенство $\|f_n\| = 1$, и для любого функционала $g \in X^*$ вида $\|g\| = 1$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $m = m(g, \varepsilon)$, такой, что $\|g - f_m\| \leq \varepsilon$. Определим для любых векторов $x, y \in B_R(0)$ величину

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \Big| f_n(x - y) \Big|.$$

Покажем, что функция ρ является метрикой на шаре $B_R(0)$. Так как справедливо неравенство $|f_n(x - y)| \leq \|f_n\| \, \|x - y\| \leq 2R$, то $0 \leq \rho(x, y) \leq 2R$ для всех $x, y \in B_R(0)$. Далее, если $\rho(x, y) = 0$, то получаем $f_n(x - y) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольный ненулевой функционал $g \in X^*$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$, такое, что $\left\| \frac{g}{\|g\|} - f_m \right\| \leq \varepsilon$. Следовательно,

$$|g(x-y)| = \|g\| \left| \left(\frac{g}{\|g\|} - f_m \right)(x-y) \right| \leq \|g\| 2R\varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Таким образом, для любого функционала $g \in X^*$ справедливо равенство $g(x-y) = 0$. Тогда в силу пункта 3 следствия 5.1.2 теоремы Хана—Банаха получаем $x - y = 0$, т. е. $x = y$. Равенство $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ очевидно. Для любых $x, y, z \in B_R(0)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|f_n(x-y)| = |f_n(x-z) + f_n(z-y)| \leq |f_n(x-z)| + |f_n(z-y)|.$$

Следовательно, получаем $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, т. е. для функции ρ справедливо неравенство треугольника.

Пусть $\tau_\rho(R)$ — метрическая топология в $B_R(0)$, порождённая метрикой ρ. Покажем, что справедливо равенство $\tau_w(R) = \tau_\rho(R)$. Заметим, что предбазу топологии $\tau_w(R)$ образует семейство

$$\sigma_w(R) = \left\{ V(x,f,\varepsilon) \cap B_R(0) \;\middle|\; x \in X, \;\; f \in X^*, \;\; \varepsilon > 0 \right\}.$$

Следовательно, включение $\tau_w(R) \subset \tau_\rho(R)$ следует из включения $\sigma_w(R) \subset \tau_\rho(R)$. Докажем это последнее включение. Зафиксируем произвольные вектор $x \in X$, функционал $f \in X^*$ и число $\varepsilon > 0$. Если $f = 0$, то $V(x,f,\varepsilon) = X$ и $V(x,f,\varepsilon) \cap B_R(0) = B_R(0) \in \tau_\rho(R)$, т. е. в этом случае доказывать нечего. Поэтому пусть $f \neq 0$. Определим функционал $g = \frac{f}{\|f\|}$ и число $\delta = \frac{\varepsilon}{\|f\|}$. Тогда получаем $V(x,f,\varepsilon) = V(x,g,\delta)$. Рассмотрим произвольный вектор $y \in V(x,g,\delta) \cap B_R(0)$, т. е. $|g(y-x)| < \delta$ и $\|y\| \leq R$. Существует номер m, такой, что $\|g - f_m\| < \frac{\delta - |g(y-x)|}{4R}$. Пусть число $r = \frac{\delta - |g(y-x)|}{2^{m+1}} > 0$. Рассмотрим произвольный вектор $z \in B_R(0)$ вида $\rho(y,z) < r$. Тогда справедливо неравенство $|f_m(z-y)| < 2^m r = \frac{\delta - |g(y-x)|}{2}$. Следовательно, получаем

$$\begin{gathered} |g(z-x)| \leq |g(z-y)| + |g(y-x)| \leq \\ \leq \|(g - f_m)(z-y)| + |f_m(z-y)| + |g(y-x)| < \\ < \|g - f_m\| 2R + \frac{\delta + |g(y-x)|}{2} < \frac{\delta - |g(y-x)|}{2} + \frac{\delta + |g(y-x)|}{2} = \delta, \end{gathered}$$

т. е. выполнено включение $z \in V(x, g, \delta) \cap B_R(0) = V(x, f, \varepsilon) \cap B_R(0)$. Следовательно, любой вектор y множества $V(x, f, \varepsilon) \cap B_R(0)$ является его ρ-внутренней точкой. Но тогда справедливо включение

$$V(x, f, \varepsilon) \cap B_R(0) \in \tau_\rho(R),$$

что и требовалось.

Теперь докажем обратное включение $\tau_\rho(R) \subset \tau_w(R)$. Так как базой $\beta_\rho(R)$ метрической топологии $\tau_\rho(R)$ служат ρ-открытые шары вида

$$O_r^\rho(x) = \left\{ y \in B_R(0) \;\middle|\; \rho(x, y) < r \right\}, \quad x \in B_R(0), \quad r > 0,$$

то достаточно доказать включение $\beta_\rho(R) \subset \tau_w(R)$. Зафиксируем вектор $x \in B_R(0)$ и число $r > 0$. Рассмотрим произвольный вектор $y \in \in O_r^\rho(x)$, т. е. $y \in B_R(0)$ и $\rho(x, y) < r$. Существует номер N, такой, что $2^{-N} < \frac{r - \rho(x,y)}{4R}$. Пусть число $\delta = \frac{r - \rho(x,y)}{2} > 0$. Рассмотрим произвольный вектор $z \in \left(\bigcap\limits_{n=1}^{N} V(y, f_n, \delta) \right) \cap B_R(0) = U(y) \in \tau_w(R)$. Тогда получаем

$$\rho(x, z) \le \rho(y, z) + \rho(x, y) \le \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} |f_n(y - z)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} 2R + \rho(x, y) <$$

$$< \delta + 2^{-N} 2R + \rho(x, y) < \frac{r - \rho(x, y)}{2} + \frac{r - \rho(x, y)}{2} + \rho(x, y) = r.$$

Следовательно, $z \in O_r^\rho(x)$, т. е. справедливо включение $U(y) \subset O_r^\rho(x)$. Получаем

$$O_r^\rho(x) = \bigcup_{y \in O_r^\rho(x)} \{y\} \subset \bigcup_{y \in O_r^\rho(x)} U(y) \subset O_r^\rho(x),$$

т. е. справедливо соотношение $O_r^\rho(x) = \bigcup\limits_{y \in O_r^\rho(x)} U(y) \in \tau_w(R)$, что и требовалось.

Следствие 5.4.4. *Пусть пространство X бесконечномерно, а пространство X^* сепарабельно. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, такая, что $\|x_n\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \overset{\tau_w}{\to} 0$ при $n \to \infty$. Иными словами, в пространстве X существует последовательность из единичной сферы, слабо сходящаяся к нулю.*

Доказательство. Как показано в решении задачи 5.4.1, слабое замыкание единичной сферы $S = \left\{ x \in X \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\}$ равно единичному шару $B_1(0)$, т. е. $[S]_{\tau_w} = B_1(0)$. Так как $S \subset B_1(0)$, а слабая топология на шаре $B_1(0)$ метризуема в силу утверждения 5.4.8, то согласно следствию 1.2.1 слабое замыкание сферы S совпадает с её слабым секвенциальным замыканием. Следовательно, для любого вектора $x \in B_1(0)$ существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, слабо сходящаяся к x, т. е. $x_n \overset{\tau_w}{\to} x$ при $n \to \infty$. В частности это верно для $x = 0$.

Замечание 5.4.7. Заметим, что сепарабельность сопряжённого пространства X^* существенна для метризуемости слабой топологии в X на шарах. Действительно, для пространства ℓ_1 его сопряжённое $\ell_1^* = \ell_\infty$ несепарабельно. В силу теоремы 5.4.1 Шура слабая и сильная сходимости последовательности в ℓ_1 эквивалентны. Следовательно, единичная сфера S в ℓ_1 является сильно и поэтому слабо секвенциально замкнутым множеством. Однако в силу утверждения 5.4.1 сфера S не является топологически слабо замкнутым множеством в бесконечномерном пространстве ℓ_1. Следовательно, в силу следствия 1.2.1 получаем неметризуемость слабой топологии в ℓ_1 на единичном шаре.

Замечание 5.4.8. Пусть пространство X бесконечномерно, а пространство X^* сепарабельно. Пусть $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ — счётное всюду плотное на единичной сфере в пространстве X^* множество. Пусть

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left| f_n(x - y) \right| \qquad \forall\, x, y \in X$$

— метрика в X, определённая в утверждении 5.4.8. Покажем, что в пространстве X существует последовательность, сходящаяся по метрике ρ к нулевому вектору и не являющаяся сходящейся слабо. Как показано в замечании 5.4.3, для любого номера n существует конечномерное подпространство $L_n \subset X$, такое, что $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k \oplus L_n = X$. Так как пространство X бесконечномерно, то подпространство $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k$ нетривиально. Следовательно, существует вектор $x_n \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k$, такой, что $\|x_n\| = n$. Получили неограниченную по норме пространства X последовательность векторов x_n, которая поэтому не является слабо сходящейся в силу утверждения 5.4.3. Покажем, что $\rho(x_n, 0) \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, так как по определению вектора x_n имеем $f_k(x_n) = 0$ для всех $k \in \overline{1, n}$, то получаем

$$\rho(x_n, 0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \left| f_k(x_n) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} n = \frac{n}{2^n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. Это замечание показывает, что сходимость по метрике ρ не равносильна слабой сходимости без условия ограниченности последовательности по норме пространства X.

5.5. Слабая* топология

В этом параграфе будем рассматривать комплексное линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$. Обозначим τ_w^* и σ_w^* соответственно слабую топологию в X^* и её предбазу.

Определение 5.5.1. *Для любого вектора $x \in X$, функционала $f_0 \in X^*$ и числа $\varepsilon > 0$ определим множество*

$$V^*(x, f_0, \varepsilon) = \left\{ \; f \in X^* \; \middle| \; |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \; \right\}.$$

Топология в множестве X^*, предбазой которой является семейство множеств

$$\sigma_{w^*} = \left\{ \; V^*(x, f_0, \varepsilon) \; \middle| \; x \in X, \; f_0 \in X^*, \; \varepsilon > 0 \; \right\},$$

называется слабой топологией в X^* и обозначается τ_{w^*}.*

Замечание 5.5.1. Заметим, что семейство σ_{w^*} удовлетворяет условию утверждения 1.1.10, так как для любого $x \in X$ и любого $f \in$ $\in X^*$ выполнено $f \in V^*(x, f, 1)$. Причём само множество X^* является элементом семейства σ_{w^*}, так как $X^* = V(0, 0, 1) \in \sigma_{w^*}$. Следовательно, семейство σ_{w^*} действительно является предбазой некоторой топологии в X^*, которая по определению 5.5.1 называется слабой*.

Замечание 5.5.2. Пусть $F \colon X \to X^{**}$ — изометрический изоморфизм вида $(Fx)(f) = f(x)$ для всех $x \in X$ и $f \in X^*$, введённый в утверждении 5.1.1. Тогда для любых $x \in X$, $f_0 \in X^*$ и $\varepsilon > 0$ получаем

$$V^*(x, f_0, \varepsilon) = \left\{ \, f \in X^* \;\middle|\; |(Fx)(f) - (Fx)(f_0)| < \varepsilon \, \right\} = \\ = V(f_0, Fx, \varepsilon) \in \sigma_w^*,$$

т. е. справедливы включения $\sigma_{w^*} \subset \sigma_w^*$ и $\tau_{w^*} \subset \tau_w^*$. Если пространство X рефлексивно, т. е. по определению 5.1.2 выполнено равенство $\operatorname{Im} F = X^{**}$, то получаем равенства $\sigma_{w^*} = \sigma_w^*$ и $\tau_{w^*} = \tau_w^*$.

Замечание 5.5.3. По определению предбазы σ_{w^*} слабой* топологии в пространстве X^* получаем, что любой функционал $\varPhi \in \operatorname{Im} F \subset X^{**}$ будет непрерывным относительно слабой* топологии τ_{w^*}. Действительно, для любого функционала $\varPhi \in \operatorname{Im} F$ существует вектор $x \in X$, такой, что $\varPhi = Fx$, т. е. $\varPhi(f) = f(x)$ для любого $f \in X^*$. Тогда для любого функционала $f_0 \in X^*$ и числа $\varepsilon > 0$ существует слабая* окрестность функционала f_0 вида $V^*(x, f_0, \varepsilon) \in \tau_{w^*}$, такая, что для любого $f \in V^*(x, f_0, \varepsilon)$ по определению 5.5.1 получаем $|f(x) - f(x_0)| = |\varPhi(f) - \varPhi(f_0)| < \varepsilon$. Следовательно, функционал $\varPhi \in \operatorname{Im} F$ является слабо* непрерывным на X^*.

Верно и обратное утверждение, т. е. если линейный функционал $\varPhi\colon X^* \to \mathbb{C}$ является слабо* непрерывным на X^*, то $\varPhi \in \operatorname{Im} F$, т. е. справедливо равенство $\varPhi = Fx \in X^{**}$ для подходящего вектора $x \in X$. Действительно, если линейный функционал $\varPhi$ является слабо* непрерывным в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ существует слабая* окрестность нуля $U_0 \in \tau_{w^*}$, такая, что для любого $f \in U_0$ выполнено неравенство $|\varPhi(f)| < \varepsilon$. По определению слабой* топологии, существуют номер N, векторы $\{x_k\}_{k=1}^N \subset X$, функционалы $\{f_k\}_{k=1}^N \subset X^*$ и положительные числа $\{\delta_k\}_{k=1}^N$, такие, что выполнены включения

$$0 \in \bigcap_{k=1}^N V^*(x_k, f_k, \delta_k) \subset U_0.$$

Тогда $|f_k(x_k)| < \delta_k$ для любого $k \in \overline{1, N}$. Рассмотрим число

$$\delta = \min_{k \in \overline{1,N}} \Big(\delta_k - |f_k(x_k)| \Big) > 0.$$

Тогда для любого функцинала $f \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} V^*(x_k, 0, \delta)$ получаем неравенства

$$|f(x_k) - f_k(x_k)| \leq |f(x_k)| + |f_k(x_k)| < \delta + |f_k(x_k)| \leq \delta_k \quad \forall\, k \in \overline{1, N}.$$

Следовательно, $f \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} V^*(x_k, f_k, \delta_k)$, т. е. справедливо включение

$$\bigcap_{k=1}^{N} V^*(x_k, 0, \delta) \subset \bigcap_{k=1}^{N} V^*(x_k, f_k, \delta_k) \subset U_0.$$

Это означает, что для любого функционала $f \in X^*$ вида $|f(x_k)| = |(Fx_k)(f)| < \delta$ при $k \in \overline{1, N}$ справедливо неравенство $|\Phi(f)| < \varepsilon$. В частности, для любого функционала $f \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker}(Fx_k)$ и любого числа $t > 0$ получаем $|(tf)(x_k)| = |t(Fx_k)(f)| = 0 < \delta$, что означает $|\Phi(tf)| < \varepsilon$, т. е. $|\Phi(f)| < \frac{\varepsilon}{t} \to 0$ при $t \to +\infty$. Следовательно, $\Phi(f) = 0$, т. е. $f \in \operatorname{Ker} \Phi$. Таким образом, справедливо включение

$$\bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker}(Fx_k) \subset \operatorname{Ker} \Phi.$$

Рассмотрим линейное отображение $\Psi\colon X^* \to \mathbb{C}^N$ вида

$$\Psi(f) = \Big(f(x_1), \ldots, f(x_N)\Big) \quad \forall\, f \in X^*.$$

Определим отображение $H\colon \operatorname{Im} \Psi \to \mathbb{C}$ вида $H\Big(\Psi(f)\Big) = \Phi(f)$ для любого $f \in X^*$. Определение отображения H корректно, так как если функционалы $f \in X^*$ и $g \in X^*$ порождают одну и ту же точку в линейном пространстве $\operatorname{Im} \Psi$, т. е. имеет место равенство $\Psi(f) = \Psi(g)$, то справедливо включение $f - g \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker}(Fx_k) \subset \operatorname{Ker} \Phi$. Следовательно, $\Phi(f) = \Phi(g)$, т. е. выполнено равенство $H\Big(\Psi(f)\Big) = H\Big(\Psi(g)\Big)$. Очевидно, что отображение H линейно, так как для любых функционалов $f, g \in X^*$ и скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем равенства

$$H\Big(\alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g)\Big) = H\Big(\Psi(\alpha f + \beta g)\Big) = \Phi(\alpha f + \beta g) = \\ = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g) = \alpha H\Big(\Psi(f)\Big) + \beta H\Big(\Psi(g)\Big).$$

В силу линейности отображения H, определённом на конечномерном линейном пространстве $\operatorname{Im}\Psi$, существуют скаляры $\{\alpha_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$, такие, что для любого $f \in X^*$ справедливо равенство

$$H\Big(\Psi(f)\Big) = \sum_{k=1}^N \alpha_k f(x_k) = \sum_{k=1}^N \alpha_k (Fx_k)(f) = \Phi(f),$$

т. е. $\Phi = \sum\limits_{k=1}^N \alpha_k(Fx_k) = F\left(\sum\limits_{k=1}^N \alpha_k x_k\right)$. Таким образом, получаем включение $\Phi \in \operatorname{Im} F \subset X^{**}$, что и требовалось.

Замечание 5.5.4. Пусть пространство X нерефлексивно, т. е. $\operatorname{Im} F \neq X^{**}$. Тогда слабая* топология в X^* строго слабее слабой топологии в X^*. Действительно, существует функционал

$$\Phi \in X^{**} \setminus \operatorname{Im} F.$$

Тогда в силу замечаний 5.5.3 и 5.4.2 функционал Φ не является слабо* непрерывным и является слабо непрерывным в X^*. Следовательно, используя замечание 5.5.2, получаем $\tau_{w^*} \subsetneq \tau_w^*$.

Утверждение 5.5.1. *Последовательность функционалов*

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$$

является слабо сходящейся к функционалу $g \in X^*$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $x \in X$ выполнено соотношение $f_n(x) \to g(x)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $f_n \xrightarrow{\tau_{w^*}} g$ при $n \to \infty$. По замечанию 5.5.3 для любого вектора $x \in X$ функционал $Fx \in X^{**}$ является слабо* непрерывным. Следовательно, в силу утверждения 1.1.7 функционал Fx является секвенциально непрерывным, т. е. получаем соотношение $(Fx)(f_n) = f_n(x) \to (Fx)(g) = g(x)$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь для любого вектора $x \in X$ выполнено $f_n(x) \to g(x)$ при $n \to \infty$. Рассмотрим произвольную слабую* окрестность $U(g)$ функционала g. По определению слабой* топологии существует номер M, векторы $\{z_m\}_{m=1}^M \subset X$, функционалы $\{h_m\}_{m=1}^M \subset X^*$ и положительные числа $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^M$, такие, что справедливо включение

$$g \in \bigcap_{m=1}^M V^*(z_m, h_m, \varepsilon_m) \subset U(g).$$

Для любого $m \in \overline{1,M}$ имеем соотношения

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_m) = g(z_m) \quad \text{и} \quad |g(z_m) - h_m(z_m)| < \varepsilon_m.$$

Определим число $\varepsilon = \min\limits_{m\in\overline{1,M}} \Big(\varepsilon_m - |g(z_m) - h_m(z_m)|\Big) > 0$. Существует номер N, такой, что для всех $n > N$ и всех $m \in \overline{1,M}$ выполнено неравенство $|g(z_m) - f_n(z_m)| < \varepsilon$. Тогда для любого $n > N$ получаем

$$|f_n(z_m) - h_m(z_m)| \le |f_n(z_m) - g(z_m)| + |g(z_m) - h_m(z_m)| <$$
$$< \varepsilon + |g(z_m) - h_m(z_m)| \le \varepsilon_m \quad \forall\, m \in \overline{1,M}.$$

Следовательно, для всех $n > N$ получаем включение

$$f_n \in \bigcap_{m=1}^{M} V^*(z_m, h_m, \varepsilon_m) \subset U(g),$$

т. е. $f_n \overset{\tau_{w^*}}{\to} g$ при $n \to \infty$, что и требовалось.

Утверждение 5.5.2. *Предел слабо* сходящейся в пространстве X^* последовательности единственен.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ является слабо* сходящейся к функционалам $g \in X^*$ и $h \in X^*$. Тогда по утверждению 5.5.1 для любого вектора $x \in X$ имеем равенства $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = h(x)$. Следовательно, $g(x) = h(x)$ для любого $x \in X$, что и означает равенство функционалов $g = h$.

Пример 5.5.1. Приведём пример нерефлексивного банахова пространства X, такого, что в его сопряжённом пространстве X^* существует слабо* сходящаяся и слабо расходящаяся последовательность. Рассмотрим пространство $X = c_0$. Тогда в силу утверждений 5.2.5 и 5.2.3 имеем равенства $X^* = \ell_1$ и $X^{**} = \ell_\infty$. Рассмотрим последовательность функционалов $f_n \in c_0^*$ вида $f_n(y) = y(n)$ для любого $y \in c_0$. В силу утверждения 5.2.5 функционал f_n реализуется базисным элементом e_n из пространства ℓ_1 по формуле

$$f_n(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y(k) e_n(k).$$

Для любого $y \in c_0$ получаем $f_n(y) = y(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность f_n является слабо* сходящейся к нулю в c_0^*, т. е. базисная последовательность e_n слабо* сходится к нулю в ℓ_1. Рассмотрим функционал $\Phi \in c_0^{**} = \ell_1^* = \ell_\infty$, который реализуется элементом $z \in \ell_\infty$ вида $z(k) = (-1)^k$ согласно утверждению 5.2.3 по формуле $\Phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x(k)z(k)$ для любого $x \in \ell_1$. Получаем последовательность $\Phi(e_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e_n(k)z(k) = (-1)^n$, которая не имеет предела при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность e_n не является слабо сходящейся в ℓ_1, т. е. последовательность функционалов f_n не является слабо сходящейся в c_0^*.

З а м е ч а н и е 5.5.5. Наличие в линейном нормированном пространстве, являющемся сопряжённым к некоторому линейному нормированному пространству, слабо* сходящейся и одновременно слабо расходящейся последовательности, служит доказательством его нерефлексивности. Этот замечательный факт можно использовать для доказательства нерефлексивности пространства ℓ_∞, которое, в силу утверждения 5.2.3, является сопряжённым к пространству ℓ_1. Пусть $\Phi\colon \ell_1^* \to \ell_\infty$ — изометрический изоморфизм, описанный в утверждении 5.2.3. Рассмотрим последовательность $z_n \in \ell_\infty$ вида

$$z_n(k) = \begin{cases} 1, & k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

и элемент $z \in \ell_\infty$ вида $z(k) = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Для любого $x \in \ell_1$ получаем

$$\Big| \big(\Phi^{-1}(z)\big)(x) - \big(\Phi^{-1}(z_n)\big)(x) \Big| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x(k) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)| \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, в силу утверждения 5.5.1, последовательность z_n слабо* сходится к элементу z. Так как согласно замечанию 5.5.2 слабая сходимость всегда влечёт слабую*, то, в силу утверждения 5.5.2, последовательность z_n может сходиться слабо только к тому же элементу z. Но как раз этот факт не имеет места ! Действительно, рассмотрим подпространство $L = \mathrm{Lin}\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, очевидно состоящее из всех финитных числовых последовательностей.

Ясно, что расстояние от элемента z до подпространства L в пространстве ℓ_∞ не меньше единицы. Поэтому $z \notin [L]$. Следовательно, в силу пункта 1 следствия 5.1.2 теоремы Хана-Банаха существует функционал $f \in \ell_\infty^*$, такой, что $f(z) = 1$ и $f = 0$ на $[L]$. Но тогда $f(z_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. числовая последовательность $f(z_n)$ не сходится к $f(z)$ при $n \to \infty$. Таким образом, последовательность z_n является слабо расходящейся и одновременно слабо* сходящейся в пространстве ℓ_∞, что и доказывает нерефлексивность этого пространства.

Утверждение 5.5.3. *Пусть пространство X является сепарабельным. Для любого $R > 0$ рассмотрим слабую* топологию на шаре $B_R^*(0) \subset X^*$, т. е. семейство*

$$\tau_{w^*}(R) = \left\{ \, U \cap B_R^*(0) \; \Big| \; U \in \tau_{w^*} \, \right\}.$$

Тогда топологическое пространство $\Big(B_R^*(0), \tau_{w^*}(R)\Big)$ является метрическим пространством, т. е. топология $\tau_{w^*}(R)$ метризуема.

Доказательство. Так как пространство X сепарабельно, то на единичной сфере в пространстве X существует счётное всюду плотное множество $A = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем равенство $\|x_n\| = 1$, и для любого вектора $x \in X$ вида $\|x\| = 1$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $m = m(x, \varepsilon)$, такой, что $\|x - x_m\| \leq \varepsilon$. Определим для любых функционалов $f, g \in B_R^*(0)$ величину

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \Big| f(x_n) - g(x_n) \Big| .$$

Покажем, что функция ρ является метрикой на шаре $B_R^*(0)$. Так как справедливо неравенство $|f(x_n) - g(x_n)| \leq \Big(\|f\| + \|g\|\Big) \|x_n\| \leq 2R$, то $0 \leq \rho(f,g) \leq 2R$ для всех $f, g \in B_R^*(0)$. Далее, если $\rho(f,g) = 0$, то получаем $f(x_n) = g(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $f(x) = g(x)$ для любого вектора $x \in E = \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Так как множество E является всюду плотным в X, то в силу непрерывности функционалов f и g получаем равенство $f(x) = g(x)$ для любого вектора $x \in X$, т. е. $f = g$. Равенство $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ очевидно. Для любых $f, g, h \in B_R^*(0)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|f(x_n) - g(x_n)| \leq |f(x_n) - h(x_n)| + |h(x_n) - g(x_n)|$. Следовательно, получаем $\rho(f,g) \le \rho(f,h) + \rho(g,h)$, т. е. для функции ρ справедливо неравенство треугольника.

Пусть $\tau^*_\rho(R)$ — метрическая топология в $B^*_R(0)$, порождённая метрикой ρ. Покажем, что справедливо равенство $\tau_{w^*}(R) = \tau^*_\rho(R)$. Заметим, что предбазу топологии $\tau_{w^*}(R)$ образует семейство

$$\sigma_{w^*}(R) = \left\{ \, V^*(x,f,\varepsilon) \cap B^*_R(0) \;\middle|\; x \in X, \;\; f \in X^*, \;\; \varepsilon > 0 \, \right\}.$$

Следовательно, включение $\tau_{w^*}(R) \subset \tau^*_\rho(R)$ следует из включения $\sigma_{w^*}(R) \subset \tau^*_\rho(R)$. Докажем это последнее включение. Зафиксируем произвольные вектор $x \in X$, функционал $f \in X^*$ и число $\varepsilon > 0$. Если $x = 0$, то $V^*(x,f,\varepsilon) = X^*$ и $V^*(x,f,\varepsilon) \cap B^*_R(0) = B^*_R(0) \in \tau^*_\rho(R)$, т. е. в этом случае доказывать нечего. Поэтому пусть $x \ne 0$. Определим вектор $y = \frac{x}{\|x\|}$ и число $\delta = \frac{\varepsilon}{\|x\|}$. Тогда получаем равенство $V^*(x,f,\varepsilon) = V^*(y,f,\delta)$. Рассмотрим произвольный функционал

$$g \in V^*(y,f,\delta) \cap B^*_R(0),$$

т. е. $|g(y) - f(y)| < \delta$ и $\|g\| \le R$. Существует номер m, такой, что $\|y - x_m\| < \frac{\delta - |g(y)-f(y)|}{4R}$. Пусть число $r = \frac{\delta - |g(y)-f(y)|}{2^{m+1}} > 0$. Рассмотрим произвольный функционал $h \in B^*_R(0)$ вида $\rho(g,h) < r$. Тогда справедливо неравенство $|h(x_m) - g(x_m)| < 2^m r = \frac{\delta - |g(y)-f(y)|}{2}$. Следовательно, получаем

$$\begin{gathered} |h(y) - f(y)| \le |h(y) - g(y)| + |g(y) - f(y)| \le \\ \le \|(h-g)(y-x_m)| + |(h-g)(x_m)| + |(g-f)(y)| < \\ < \|y - x_m\| 2R + \frac{\delta + |(g-f)(y)|}{2} < \frac{\delta - |(g-f)(y)|}{2} + \frac{\delta + |(g-f)(y)|}{2} = \delta, \end{gathered}$$

т. е. выполнено включение $h \in V^*(y,f,\delta) \cap B^*_R(0) = V^*(x,f,\varepsilon) \cap B^*_R(0)$. Следовательно, любой функционал g из множества $V^*(x,f,\varepsilon) \cap B^*_R(0)$ является его ρ-внутренней точкой. Но тогда справедливо включение $V^*(x,f,\varepsilon) \cap B^*_R(0) \in \tau^*_\rho(R)$, что и требовалось.

Теперь докажем обратное включение $\tau^*_\rho(R) \subset \tau_{w^*}(R)$. Так как базой $\beta^*_\rho(R)$ метрической топологии $\tau^*_\rho(R)$ служат ρ-открытые шары вида

$$O^\rho_r(f) = \left\{ \, g \in B^*_R(0) \;\middle|\; \rho(f,g) < r \, \right\}, \quad f \in B^*_R(0), \quad r > 0,$$

то достаточно доказать включение $\beta^*_\rho(R) \subset \tau_{w^*}(R)$. Зафиксируем функционал $f \in B^*_R(0)$ и число $r > 0$. Рассмотрим произвольный функционал $g \in O_r^\rho(f)$, т. е. $g \in B_R^*(0)$ и $\rho(f,g) < r$. Существует номер N, такой, что $2^{-N} < \frac{r-\rho(f,g)}{4R}$. Пусть число $\delta = \frac{r-\rho(f,g)}{2} > 0$. Рассмотрим произвольный функционал

$$h \in \left(\bigcap_{n=1}^{N} V(x_n, g, \delta)\right) \cap B_R^*(0) = U^*(g) \in \tau_{w^*}(R).$$

Тогда получаем

$$\rho(f,h) \le \rho(g,h) + \rho(f,g) \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}|(g-h)(x_n)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}2R + \rho(f,g) <$$
$$< \delta + 2^{-N}2R + \rho(f,g) < \frac{r-\rho(f,g)}{2} + \frac{r-\rho(f,g)}{2} + \rho(f,g) = r.$$

Следовательно, $h \in O_r^\rho(f)$, т. е. справедливо включение $U^*(g) \subset \subset O_r^\rho(f)$. Получаем

$$O_r^\rho(f) = \bigcup_{g \in O_r^\rho(f)} \{g\} \subset \bigcup_{g \in O_r^\rho(f)} U^*(g) \subset O_r^\rho(f),$$

т. е. справедливо соотношение $O_r^\rho(f) = \bigcup\limits_{g \in O_r^\rho(f)} U^*(g) \in \tau_{w^*}(R)$, что и требовалось.

Утверждение 5.5.4. *Пусть линейное нормированное пространство X является полным, а последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ является слабо* сходящейся к функционалу $g \in X^*$. Тогда справедливы неравенства*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < +\infty \qquad \text{и} \qquad \|g\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|.$$

Доказательство. Так как для любого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ является сходящейся к числу $g(x)$, то она является ограниченной. Следовательно, так как пространство X полно, по теореме 3.4.2 Банаха—Штейнгауза получаем ограниченность последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $\mathcal{L}(X,\mathbb{C}) = X^*$, т. е. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < +\infty$. Для любого $x \in X$ имеем равенство $|g(x)| = = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)|$. Тогда для любого $x \in X$ вида $\|x\| = 1$ и любого $\varepsilon > 0$

существует номер N, такой, что для всех $n \geq N$ выполнено неравенство $|g(x)| \leq |f_n(x)| + \varepsilon \leq \|f_n\| + \varepsilon$. Переходя в правой части последнего неравенства к нижнему пределу при $n \to \infty$, получаем $|g(x)| \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\| + \varepsilon$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|g\| = \sup_{\|x\|=1} |g(x)| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\| + \varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon \to +0$ получаем требуемое неравенство $\|g\| \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$.

Пример 5.5.2. Приведём пример неполного линейного нормированного пространства X и слабо* сходящейся последовательности функционалов из X^*, которая не является ограниченной в X^*. Рассмотрим неполное пространство $(X, \|\cdot\|) = (\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ (см. пример 1.4.4). Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функционал $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ вида

$$f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} x(k), \quad x \in X.$$

Тогда для любого $x \in X$ справедливо неравенство $|f_n(x)| \leq n\|x\|_\infty$, т. е. $\|f_n\| \leq n$, а для вектора $z_n \in X$ вида

$$z_n(k) = \begin{cases} 1, & n+1 \leq k \leq 2n, \\ 0, & 1 \leq k \leq n \text{ или } k > 2n \end{cases}$$

имеем соотношения $\|z_n\|_\infty = 1$ и $\|f_n\| \geq |f_n(z_n)| = n$. Следовательно, $\|f_n\| = n$, т. е. последовательность функционалов $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ не является ограниченной в X^*. Однако для любого вектора $x \in X = \ell_1$ получаем $|f_n(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} |x(k)| \to 0$ при $n \to \infty$ в силу критерия Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|$. Поэтому последовательность функционалов f_n слабо* сходится к нулевому функционалу в пространстве X^*.

Замечание 5.5.6. Пусть пространство X полное бесконечномерное и сепарабельное. Пусть $A = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ — счётное всюду плотное на единичной сфере в пространстве X множество. Пусть

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left| f(x_n) - g(x_n) \right| \qquad \forall\, f, g \in X^*$$

— метрика в X^*, определённая в утверждении 5.5.3. Покажем, что в пространстве X^* существует последовательность, сходящаяся по метрике ρ к нулевому функционалу и не являющаяся слабо* сходящейся. Для любого номера n рассмотрим конечномерное подпространство $L_n = \mathrm{Lin}\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Так как пространство X бесконечномерно, то существует вектор $z_n \in X$, такой, что $z_n \notin L_n$. Конечномерное подпространство L_n является замкнутым в X по следствию 3.1.1. Тогда в силу пункта 1 следствия 5.1.2 теоремы Хана—Банаха существует нетривиальный функционал $g_n \in X^*$, равный нулю на подпространстве L_n, а $g_n(z_n) = 1$. Определим функционал $f_n = \frac{n}{\|g_n\|} g_n$. Тогда $\|f_n\| = n$. Следовательно, последовательность функционалов f_n является неограниченной по норме пространства X^*. Поэтому в силу полноты пространства X и утверждения 5.5.4 получаем, что последовательность f_n не является слабо* сходящейся. Покажем, что $\rho(f_n, 0) \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, так как по определению функционала f_n имеем $f_n(x_k) = 0$ для всех $k \in \overline{1, n}$, то получаем

$$\rho(f_n, 0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \left| f_n(x_k) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} n = \frac{n}{2^n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. Это замечание показывает, что сходимость по метрике ρ не равносильна слабой* сходимости без условия ограниченности последовательности функционалов по норме сопряжённого пространства X^*.

Определение 5.5.2. *Последовательность функционалов*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$$

называется слабо фундаментальной, если для любого вектора* $x \in$ $\in X$ *числовая последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *является фундаментальной в* $\mathbb{C}$. *Пространство* X^* *называется слабо* полным, если любая слабо* фундаментальная последовательность из* X^* *является слабо* сходящейся.*

Утверждение 5.5.5. *Пусть пространство* X *является полным. Тогда пространство* X^* *является слабо* полным.*

Доказательство. Заметим, что слабая* сходимость и слабая* фундаментальность последовательности функционалов из пространства $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ является поточечной сходимостью и поточечной фундаментальностью этой последовательности линейных ограниченных операторов, действующих из X в $\mathbb{C}$. В силу полноты пространств X и $\mathbb{C}$ по теореме 3.4.4 пространство $\mathcal{L}(X, \mathbb{C}) = X^*$ является полным относительно поточечной сходимости, т. е. слабо* полным.

Пример 5.5.3. Приведём пример неполного пространства X, для которого пространство X^* не является слабо* полным. Рассмотрим неполное пространство $(X, \|\cdot\|) = (\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ (см. пример 1.4.4). Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функционал $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ вида

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k), \quad x \in X.$$

Так как для любого вектора $x \in X = \ell_1$ выполнено неравенство $|f_n(x)| \le n\|x\|_\infty$, то имеем $\|f_n\| \le n$. С другой стороны, для вектора $z_n \in X = \ell_1$ вида

$$z_n(k) = \begin{cases} 1, & 1 \le k \le n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

имеем $\|z_n\|_\infty = 1$ и $\|f_n\| \ge |f_n(z_n)| = n$. Следовательно, $\|f_n\| = n$. Последовательность функционалов $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ является слабо* фундаментальной, так как для любого $x \in X = \ell_1$ и любых номеров m, n имеем

$$|f_n(x) - f_{n+m}(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+m} |x(k)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При этом для любого $x \in X = \ell_1$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x(k) = g(x)$. Покажем, что функционал $g\colon X \to \mathbb{C}$ не является ограниченным, т. е. $g \notin X^*$. Действительно, справедливы соотношения $\|g\| \ge |g(z_n)| = n \to \infty$, т. е. имеет место равенство $\|g\| = +\infty$. Следовательно, слабо* фундаментальная последовательность ограниченных функционалов f_n не является слабо* сходящейся в пространстве X^*.

Теорема 5.5.1 (*Банах, Алаоглу*)**.** *Пусть пространство X является сепарабельным. Тогда для любого $R > 0$ шар $B_R^*(0) \subset X^*$ является слабо* компактным.*

Доказательство. В силу утверждения 5.5.3 слабая* топология на шаре $B_R^*(0)$ метризуема. Следовательно, по теореме 2.2.1 слабая* компактность шара $B_R^*(0)$ эквивалентна его слабой* секвенциальной компактности. Для доказательства слабой* секвенциальной компактности шара $B_R^*(0)$ рассмотрим произвольную последовательность функционалов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_R^*(0)$ и покажем, что она содержит слабо* сходящуюся подпоследовательность к некоторому функционалу $g \in B_R^*(0)$.

Пусть $E = \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ — счётное всюду плотное подмножество пространства X. Так как числовая последовательность $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена (в силу неравенства $|f_n(x_1)| \leq R\|x_1\|$ для любого $n \in \in \mathbb{N}$), то по теореме Больцано—Вейерштрасса она имеет сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k(1)}(x_1)\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, рассуждая по индукции, что для номера m имеем строго возрастающую последовательность $\{n_k(m)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, такую, что для любого $s \in \overline{1,m}$ числовая последовательность $\{f_{n_k(m)}(x_s)\}_{k=1}^{\infty}$ является сходящейся. Так как числовая последовательность $\{f_{n_k(m)}(x_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена (в силу неравенства $|f_{n_k(m)}(x_{m+1})| \leq R\|x_{m+1}\|$ для любого $k \in \in \mathbb{N}$), то по теореме Больцано—Вейерштрасса она имеет сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k(m+1)}(x_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}$. Рассмотрим последовательность функционалов $\{f_{n_k(k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено включение $\{n_k(m+1)\}_{k=1}^{\infty} \subset \{n_k(m)\}_{k=1}^{\infty}$, то имеет место неравенство $n_{m+1}(m+1) \geq n_{m+1}(m) > n_m(m)$. Поэтому последовательность натуральных чисел $\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$ является строго возрастающей, а последовательность функционалов $\{f_{n_k(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как для любого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\{n_k(k)\}_{k=m}^{\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\{n_k(m)\}_{k=1}^{\infty}$, то существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k(k)}(x_m) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k(m)}(x_m) = g(x_m)$. Покажем, что для любого вектора $x \in X$ числовая последовательность $\{f_{n_k(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является сходящейся. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер m, такой, что $\|x - x_m\| \leq \varepsilon$. Тогда для всех $k, s \geq m$ получаем неравенства

$$\begin{aligned}
&\left|f_{n_k(k)}(x) - f_{n_s(s)}(x)\right| \leq \\
&\quad \leq \left|f_{n_k(k)}(x - x_m)\right| + \left|f_{n_s(s)}(x - x_m)\right| + \left|(f_{n_k(k)} - f_{n_s(s)})(x_m)\right| \leq \\
&\qquad\qquad \leq 2R\varepsilon + \left|(f_{n_k(k)} - f_{n_s(s)})(x_m)\right|.
\end{aligned}$$

Так как $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ s\to\infty}} \left|(f_{n_k(k)} - f_{n_s(s)})(x_m)\right| = \left|g(x_m) - g(x_m)\right| = 0$, то существует номер $M \geq m$, такой, что для всех $k, s \geq M$ выполнено неравенство $\left|(f_{n_k(k)} - f_{n_s(s)})(x_m)\right| \leq \varepsilon$. Следовательно, при всех $k, s \geq$ $\geq M$ получаем неравенство $\left|f_{n_k(k)}(x) - f_{n_s(s)}(x)\right| \leq (2R+1)\varepsilon$. Таким образом, числовая последовательность $\{f_{n_k(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной и поэтому сходящейся. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k(k)}(x) = g(x)$. Таким образом, определён линейный функционал $g\colon X \to \mathbb{C}$ как поточечный предел на X последовательности $f_{n_k(k)}$. При этом для любого вектора $x \in X$ вида $\|x\| = 1$ имеем $|g(x)| = \lim\limits_{k\to\infty} |f_{n_k(k)}(x)| \leq R$, т. е. справедливо неравенство $\|g\| \leq R$. Следовательно, функционал $g \in B_R^*(0) \subset X^*$, и последовательность $f_{n_k(k)}$ поточечно на X, а значит, и слабо* сходится к функционалу g, что и требовалось.

Теорема 5.5.2 (*Банах, Тихонов*)**.** *Пусть пространство X рефлексивно и сепарабельно. Тогда любая ограниченная в X последовательность содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $F\colon X \to X^{**}$ — изометрический изоморфизм между X и X^{**} вида $(Fx)(f) = f(x)$ для всех $x \in X$ и $f \in X^*$. Так как пространство X сепарабельно, то пространство $X^{**} = \operatorname{Im} F$ тоже является сепарабельным в силу изометричности отображения F. Следовательно, в силу утверждения 5.2.11 получаем, что пространство X^* является сепарабельным. Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Тогда существует $R > 0$, такое, что $\|x_n\| \leq R$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность $\Phi_n = Fx_n \in X^{**}$ является ограниченной в X^{**}, и $\|\Phi_n\| = \|x_n\| \leq R$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как пространство X^* является сепарабельным, то по теореме 5.5.1 Банаха—Алаоглу существует подпоследовательность Φ_{n_k}, слабо* сходящаяся в X^{**} к функционалу $\Psi \in X^{**}$. Следовательно, существует вектор $y \in X$, такой, что $\Psi = Fy$, и для любого функционала $f \in X^*$ получаем

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_{n_k}(f) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \Psi(f) = f(y).$$

Таким образом, в силу утверждения 5.4.1 последовательность x_{n_k} слабо сходится к вектору $y \in X$ при $k \to \infty$, что и требовалось.

Замечание 5.5.7. Заметим, что в сепарабельном нерефлексивном пространстве ℓ_1 ограниченная последовательность базисных векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет слабо сходящейся подпоследовательности, так как по теореме 5.4.1 Шура слабая и сильная сходимости в ℓ_1 эквивалентны, а любая подпоследовательность последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является сильно фундаментальной.

Утверждение 5.5.6. *Пусть пространство X рефлексивно и сепарабельно. Пусть множество $S \subset X$ является выпуклым и замкнутым. Тогда для любого вектора $x \in X$ в множестве S существует ближайший элемент, т. е. вектор $y = y(x) \in S$, такой, что*

$$\|x - y\| = \rho(x, S) = \inf_{z \in S} \|x - z\|.$$

Доказательство. По определению точной нижней грани числовой функции для вектора $x \in X$ существует минимизирующая последовательность $z_n \in S$, такая, что выполнено равенство $\rho(x, S) = \lim\limits_{n \to \infty} \|x - z_n\|$. Так как $\|z_n\| \le \|x\| + \|x - z_n\|$, а сходящаяся числовая последовательность $\|x - z_n\|$ является ограниченной, то последовательность z_n является ограниченной в пространстве X. Следовательно, по теореме 5.5.2 Банаха—Тихонова она имеет слабо сходящуюся подпоследовательность z_{n_k} к вектору $y \in X$. Так как по теореме 5.4.2 Мазура выпуклое замкнутое множество S является слабо замкнутым, то выполнено включение $y \in S$. В силу пункта 2 следствия 5.1.2 теоремы Хана—Банаха существует функционал $f \in X^*$ вида $\|f\| = 1$ и $|f(x - y)| = \|x - y\|$. Следовательно, получаем соотношения

$$\rho(x, S) \le \|x - y\| = |f(x - y)| = \lim_{k \to \infty} |f(x - z_{n_k})| \le \\ \le \lim_{k \to \infty} \|x - z_{n_k}\| = \rho(x, S),$$

откуда сразу получаем равенство $\rho(x, S) = \|x - y\|$. Таким образом, вектор $y \in S$ является ближайшим к вектору x элементом множества S, что и требовалось.

Пример 5.5.4. Приведём пример выпуклого замкнутого ограниченного множества из нерефлексивного сепарабельного банахова пространства X, не имеющего ближайшего элемента для заданного вектора $x \in X$. Этот пример предложил студент 574 группы МФТИ Р. Гимадеев. В нерефлексивном сепарабельном банаховом пространстве $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ рассмотрим стандартный счётный базис $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и определим множество $M = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right) e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. В качестве выпуклого замкнутого ограниченного множества S из пространства ℓ_1 рассмотрим замыкание в ℓ_1 выпуклой оболочки множества M, т. е. $S = [\operatorname{conv} M]$. Напомним, что выпуклой оболочкой множества линейного пространства называется совокупность всевозможных конечных выпуклых комбинаций точек этого множества, т. е. выпуклой оболочкой множества M является множество

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, \quad \begin{array}{c} x_1 \in M, \dots, x_N \in M, \\ \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_N \geq 0, \end{array} \quad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1 \right\}.$$

Будем изучать расстояние от нуля до множества S, т. е. $\rho(0, S) = \inf\limits_{z \in S} \|z\|_1$. Рассмотрим произвольную точку $z \in S = [\operatorname{conv} M]$. Так как все элементы множества M имеют вещественные неотрицательные компоненты, то тем же свойством обладают элементы множеств $\operatorname{conv} M$ и $S = [\operatorname{conv} M]$. Следовательно, $z(k) \geq 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Определим для любого номера k число $\beta_k = \frac{z(k)}{1+\frac{1}{k}} \geq 0$. Тогда получаем $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z(k) e_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_k e_k$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют номер N, неотрицательные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ вида $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k = 1$, такие, что выполнено неравенство

$$\varepsilon \geq \left\| z - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(1 + \frac{1}{k}\right) e_k \right\|_1 = \\ = \sum_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\beta_k - \alpha_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_k \geq \\ \geq \sum_{k=1}^{N} |\beta_k - \alpha_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k.$$

Следовательно, получаем неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = \varepsilon + 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \geq -\varepsilon + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k \geq -\varepsilon + 1.$$

Таким образом, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k = 1$. Получаем неравенство

$$\|z\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_k > \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = 1.$$

Следовательно, справедлива оценка $\rho(0, S) \geq 1$. С другой стороны, имеем неравенства $\rho(0, S) \leq \rho(0, M) \leq \lim\limits_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1$. Таким образом, $\rho(0, S) = 1 < \|z\|_1$ для любого $z \in S$, т. е. нулевой элемент из ℓ_1 не имеет ближайшего элемента в выпуклом замкнутом ограниченном множестве $S \subset \ell_1$.

Приведём аналогичный пример в нерефлексивном банаховом пространстве $\Big(C[0,1], \|\cdot\|_c\Big)$. Этот пример предложил студент 673 группы МФТИ И. Цыбулин. Рассмотрим множество

$$M = \left\{ x \in C[0,1] \;\middle|\; x(0) = 0, \;\; \|x\|_c \leq 2, \;\; \int\limits_0^1 x(t)\,dt = 1 \right\}.$$

Множество M является выпуклым, так как для любых $x, y \in M$ и числа $\lambda \in [0,1]$ получаем

$$\Big(\lambda x + (1-\lambda) y\Big)(0) = \lambda x(0) + (1-\lambda) y(0) = 0,$$

$$\Big\|\lambda x + (1-\lambda) y\Big\|_c \leq \lambda \|x\|_c + (1-\lambda)\|y\|_c \leq 2$$

и $\int\limits_0^1 \Big(\lambda x + (1-\lambda) y\Big)(t)\,dt = \lambda + 1 - \lambda = 1$, т. е. $\lambda x + (1-\lambda) y \in M$. Множество M является ограниченным, так как $\|x\|_c \leq 2$ для любого $x \in M$. Множество M является замкнутым. Действительно, для любой функции $z \in [M]$ имеем последовательность $x_n \in M$, такую, что

$$\|x_n - z\|_c = \sup_{t \in [0,1]} |x_n(t) - z(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда получаем соотношения

$$z(0) = \lim_{n \to \infty} x_n(0) = 0, \quad \|z\|_c = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|_c \leq 2,$$

$$\left|\int_0^1 z(t)\,dt - 1\right| = \left|\int_0^1 \Big(z(t) - x_n(t)\Big)\,dt\right| \le \|z - x_n\|_c \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. $\int\limits_0^1 z(t)\,dt = 1$. Следовательно, выполнено включение $z \in M$. Покажем, что для любой функции $x \in M$ выполнены соотношения $\rho(0, M) = 1 < \|x\|_c$. Для любого $x \in M$ имеем

$$\|x\|_c \ge \int_0^1 |x(t)|\,dt \ge \left|\int_0^1 x(t)\,dt\right| = 1,$$

т. е. справедливо неравенство $\rho(0, M) \ge 1$. Для любых чисел $\varepsilon \in (0, 1)$ и $a \in (0, 1)$ определим функцию

$$x_{a,\varepsilon}(t) = (1+\varepsilon)\begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 \le t \le a, \\ 1, & a \le t \le 1. \end{cases}$$

Тогда $\int\limits_0^1 x_{a,\varepsilon}(t)\,dt = (1+\varepsilon)\left(1 - \frac{a}{2}\right) = 1$ при $a = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \in (0, 1)$. Следовательно, для такого a получаем включение $x_{a,\varepsilon} \in M$ и равенство $\|x_{a,\varepsilon}\|_c = 1 + \varepsilon$, т. е. выполнено неравенство $\rho(0, M) \le 1 + \varepsilon$. Таким образом, при $\varepsilon \to +0$ получаем $1 \le \rho(0, M) \le 1$, т. е. справедливо равенство $\rho(0, M) = 1$. Предположим, что для некоторой функции $x \in M$ выполнено неравенство $\|x\|_c \le 1$. Так как $x(0) = 0$, то существует $\delta \in (0, 1)$, такое, что $|x(t)| \le \frac{1}{2}$ при $0 \le t \le \delta$. Тогда получаем $1 = \int\limits_0^1 x(t)\,dt \le \frac{\delta}{2} + 1 - \delta = 1 - \frac{\delta}{2} < 1$ — противоречие. Таким образом, для любого $x \in M$ выполнено строгое неравенство $\|x\|_c > 1$, что и требовалось.

5.6. Сопряжённый оператор

Определение 5.6.1. *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор*

$$A^*: Y^* \to X^*$$

называется сопряжённым к оператору A, если для всех $x \in X$ и $g \in Y^*$ выполнено равенство $g(Ax) = (A^*g)(x)$.

Утверждение 5.6.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда существует единственный сопряжённый оператор A^*, причём он является линейным и ограниченным, т. е. выполнено включение $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. При этом справедливо равенство $\|A\| = \|A^*\|$.*

Доказательство. Для произвольного фиксированного $g \in \in Y^*$ рассмотрим линейный функционал $\Phi_g\colon X \to \mathbb{C}$ вида $\Phi_g(x) = = g(Ax)$ для любого $x \in X$. Так как $|\Phi_g(x)| \le \|g\|\,\|A\|\,\|x\|_X$ для любого $x \in X$, то получаем $\|\Phi_g\| \le \|g\|\,\|A\|$. Следовательно, выполнено включение $\Phi_g \in X^*$. Определим значение оператора $A^*\colon Y^* \to X^*$ по формуле $A^*g = \Phi_g$. Тогда для любых $x \in X$ и $g \in Y^*$ выполнено равенство $(A^*g)(x) = \Phi_g(x) = g(Ax)$, т. е. оператор A^* удовлетворяет определению 5.6.1 и поэтому является сопряжённым к оператору A. Если некоторый оператор $B\colon Y^* \to X^*$ является сопряжённым к оператору A, то по определению 5.6.1 для любого $g \in Y^*$ получаем равенство $Bg = \Phi_g = A^*g$, т. е. $B = A^*$. Таким образом, установлена единственность сопряжённого оператора. Для любых функционалов $g_1, g_2 \in Y^*$ и скаляров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ при каждом $x \in X$ получаем равенство

$$\Big(A^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)\Big)(x) = \\ = (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)(Ax) = \alpha_1 g_1(Ax) + \alpha_2 g_2(Ax) = \\ = \Big(\alpha_1 A^*(g_1) + \alpha_2 A^*(g_2)\Big)(x),$$

т. е. справедливо равенство $A^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 A^*(g_1) + \alpha_2 A^*(g_2)$. Следовательно, оператор A^* является линейным. Доказанное выше для любого функционала $g \in Y^*$ неравенство $\|A^*g\| = \|\Phi_g\| \le \le \|g\|\,\|A\|$ означает оценку $\|A^*\| \le \|A\|$, т. е. линейный оператор A^* является ограниченным и справедливо включение $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. С другой стороны, в силу следствия 5.1.2 для любого $x \in X$ получаем

$$\|Ax\|_Y = \sup_{\substack{g \in Y^*,\\ \|g\|=1}} \Big|g(Ax)\Big| = \sup_{\substack{g \in Y^*,\\ \|g\|=1}} \Big|(A^*g)(x)\Big| \le \\ \le \sup_{\substack{g \in Y^*,\\ \|g\|=1}} \|A^*g\|\,\|x\|_X = \|A^*\|\,\|x\|_X.$$

Следовательно, справедливо неравенство $\|A\| \le \|A^*\|$. Таким образом, доказано равенство $\|A\| = \|A^*\|$.

Замечание 5.6.1. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, линейные операторы $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, скаляр $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда справедливы равенства

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \qquad (\alpha A)^* = \alpha A^*.$$

Действительно, для любых $x \in X$ и $g \in Y^*$ получаем соотношения

$$\Big((A+B)^* g\Big)(x) = g\Big((A+B)(x)\Big) = g(Ax) + g(Bx) =$$
$$= (A^*g)(x) + (B^*g)(x) = \Big((A^* + B^*)(g)\Big)(x),$$

т. е. $(A+B)^*g = (A^* + B^*)(g)$, что в силу произвольности функционала $g \in Y^*$ означает равенство $(A+B)^* = A^* + B^*$. Аналогично для любых $x \in X$ и $g \in Y^*$ получаем соотношения

$$\Big((\alpha A)^*(g)\Big)(x) = g\Big((\alpha A)(x)\Big) = g\Big(\alpha(Ax)\Big) =$$
$$= \alpha g(Ax) = \alpha (A^*g)(x) = \Big((\alpha A^*)(g)\Big)(x),$$

т. е. $(\alpha A)^* g = \alpha(A^* g)$, что в силу произвольности функционала $g \in$ $\in Y^*$ означает равенство $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.

Замечание 5.6.2. Пусть $X = Y = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(H)$. В этом случае можно естественным образом изменить определение сопряжённого оператора A^*, отождествляя пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$ по теореме 5.3.1 Рисса—Фреше. Согласно этой теореме любой функционал из $\mathcal{H}^*$ реализуется единственным вектором из $\mathcal{H}$ с помощью скалярного произведения. Поэтому естественно полагать, что сопряжённый оператор A^* действует в пространстве $\mathcal{H}$, и для любых векторов $x, y \in \mathcal{H}$ выполнено равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$. Это соотношение определяет единственный линейный оператор $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, причём $\|A\| = \|A^*\|$. Действительно, любой фиксированный $y \in \mathcal{H}$ определяет линейный функционал $\varPhi_y \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ вида $\varPhi_y(x) = (Ax, y)$ для любого вектора $x \in \mathcal{H}$. При этом $|\varPhi_y(x)| \le \|Ax\|\,\|y\| \le \Big(\|A\|\,\|y\|\Big)\|x\|$. Следовательно, для любого $y \in \mathcal{H}$ получаем $\|\varPhi_y\| \le \|A\|\,\|y\|$, т.е. справедливо включение $\varPhi_y \in \mathcal{H}^*$. Тогда по теореме 5.3.1 Рисса—Фреше, $\varPhi_y(x) =$ $= \Big(x, z(\varPhi_y)\Big)$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$, где $z \colon \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ — определённая в теореме Рисса—Фреше сопряженно-линейная изометрическая биекция.

Таким образом, определён оператор $A^*\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ вида $A^*y = z(\varPhi_y)$. Так как для любых векторов $y, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ и скаляра $\alpha \in \mathbb{C}$, очевидно, выполнены равенства $\varPhi_{y_1+y_2} = \varPhi_{y_1} + \varPhi_{y_2}$ и $\varPhi_{\alpha y} = \overline{\alpha}\varPhi_y$, то получаем

$$A^*(y_1 + y_2) = z(\varPhi_{y_1} + \varPhi_{y_2}) = z(\varPhi_{y_1}) + z(\varPhi_{y_2}) = A^*y_1 + A^*y_2,$$

$$A^*(\alpha y) = z\left(\overline{\alpha}\varPhi_y\right) = \alpha z(\varPhi_y) = \alpha A^*(y).$$

Следовательно, оператор A^* является линейным, а доказанное выше для любого $y \in \mathcal{H}$ неравенство $\|A^*y\| = \|z(\varPhi_y)\| = \|\varPhi_y\| \le \|A\|\,\|y\|$ означает неравенство $\|A^*\| \le \|A\|$, т. е. $A^* \in \mathcal{L}(H)$. Также получаем оценку

$$\|A^*y\| = \sup_{\|x\|=1}\Big|(x, A^*y)\Big| = \sup_{\|x\|=1}\Big|(Ax, y)\Big| \le \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|\,\|y\| = \|A\|\,\|y\|,$$

т. е. $\|A^*\| \le \|A\|$. Следовательно, доказано равенство $\|A\| = \|A^*\|$.

Заметим, что при таком определении операции сопряжения линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве она становится сопряжённо-линейной. Действительно, для любых операторов $A, B \in \mathcal{L}(H)$ и любого скаляра $\alpha \in \mathbb{C}$ при всех $x, y \in \mathcal{H}$ имеем равенства

$$\Big(x, (A+B)^*(y)\Big) = \Big((A+B)x, y\Big) = \\ = (Ax, y) + (Bx, y) = \Big(x, (A^* + B^*)y\Big),$$

$$\Big(x, (\alpha A)^*y\Big) = \alpha(Ax, y) = \alpha\Big(x, A^*y\Big) = \Big(x, \overline{\alpha}A^*y\Big),$$

откуда получаем

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*.$$

Определение 5.6.2. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $L \subset X$ и $N \subset X^*$ — подпространства. Правым аннулятором подпространства L называется множество*

$$L^{\perp} = \left\{\, f \in X^* \;\;\middle|\;\; f(x) = 0 \quad \forall\, x \in L \,\right\}.$$

Левым аннулятором подпространства N называется множество

$$^{\perp}N = \left\{\, x \in X \;\;\middle|\;\; f(x) = 0 \quad \forall\, f \in N \,\right\}.$$

Замечание 5.6.3. Заметим, что правый аннулятор подпространства $L \subset X$ является замкнутым подпространством в X^*, а левый аннулятор подпространства $N \subset X^*$ является замкнутым подпространством в X. Действительно, для любых функционалов $f, g \in L^\perp$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ для любого вектора $x \in L$ получаем $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = 0$, так как $f(x) = g(x) = 0$. Следовательно, $\alpha f + \beta g \in L^\perp$. Если функционал $f \in X^*$ является точкой прикосновения множества $L^\perp$, то существует последовательность $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subset L^\perp$, такая, что $\|f - f_m\| \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда для любого вектора $x \in L$ получаем соотношения

$$|f(x)| = |(f - f_m)(x)| \le \|f - f_m\| \, \|x\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

т. е. $f(x) = 0$. Следовательно, справедливо включение $f \in L^\perp$, что означает замкнутость подпространства $L^\perp$.

Аналогично для любых векторов $x, y \in {}^\perp N$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ для любого функционала $f \in N$ получаем $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$, так как $f(x) = f(y) = 0$. Следовательно, $\alpha x + \beta y \in {}^\perp N$. Если вектор $x \in X$ является точкой прикосновения подпространства ${}^\perp N$, то существует последовательность $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset {}^\perp N$, такая, что $\|x - x_m\| \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда для любого функционала $f \in N$ получаем соотношения

$$|f(x)| = |f(x - x_m)| \le \|f\| \, \|x - x_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

т. е. $x \in {}^\perp N$. Следовательно, справедливо включение $x \in {}^\perp N$, что означает замкнутость подпространства ${}^\perp N$.

Утверждение 5.6.2. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $L \subset X$ и $N \subset X^*$ — подпространства. Тогда справедливы соотношения*

$${}^\perp\left(L^\perp\right) = [L], \qquad \left({}^\perp N\right)^\perp \supset [N],$$

при этом равенство $\left({}^\perp N\right)^\perp = [N]$ имеет место, если пространство X рефлексивно.

Доказательство. Для любых $x \in L$ и $f \in L^\perp$ справедливо равенство $f(x) = 0$. Следовательно, выполнено включение $x \in {}^\perp\left(L^\perp\right)$, т. е. $L \subset {}^\perp\left(L^\perp\right)$. Так как в силу замечания 5.6.3 множество

${}^{\perp}\left(L^{\perp}\right)$ замкнуто, то получаем включение $[L] \subset {}^{\perp}\left(L^{\perp}\right)$. Предположим, что существует вектор $x \in {}^{\perp}\left(L^{\perp}\right) \setminus [L]$. Тогда в силу пункта 1 следствия 5.1.2 существует функционал $f \in X^*$, такой, что $f(z) = 0$ для всех $z \in [L]$, а $f(x) = 1$. Но тогда получаем, что $f \in L^{\perp}$, что влечёт равенство $f(x) = 0$, т. е. получили противоречие. Таким образом, доказано равенство $[L] = {}^{\perp}\left(L^{\perp}\right)$.

Для любых $f \in N$ и $x \in {}^{\perp}N$ справедливо равенство $f(x) = 0$. Следовательно, выполнено включение $f \in \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$, т. е. $N \subset \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$. Так как в силу замечания 5.6.3 множество $\left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$ замкнуто, то получаем включение $[N] \subset \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$. Далее считаем, что пространство X является рефлексивным. Предположим, что существует функционал $f \in \left({}^{\perp}N\right)^{\perp} \setminus [N]$. Тогда в силу пункта 1 следствия 5.1.2 существует функционал $\Phi \in X^{**}$, такой, что $\Phi(g) = 0$ для всех $g \in [N]$, а $\Phi(f) = 1$. В силу рефлексивности пространства X для функционала $\Phi \in X^{**}$ существует вектор $x \in X$, такой, что $\Phi = Fx$, т. е. $\Phi(g) = (Fx)(g) = g(x)$ для всех $g \in X^*$. Следовательно, получаем $g(x) = 0$ для всех $g \in [N]$. Это означает включение $x \in {}^{\perp}N$. Но тогда соотношение $0 = f(x) = (Fx)(f) = \Phi(f)$ противоречит равенству $\Phi(f) = 1$. Таким образом, доказано равенство $[N] = \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$.

Пример 5.6.1. Покажем, что в случае нерефлексивного пространства X может оказаться, что для некоторого подпространства N имеет место неравенство $[N] \neq \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$. Рассмотрим пространство $X = c_0$, тогда $X^* = \ell_1$. Пусть подпространство $N \subset \ell_1$ имеет вид

$$N = \left\{ x \in \ell_1 \;\middle|\; \sum_{m=1}^{\infty} x(m) = 0 \right\}.$$

Очевидно, что N — собственное замкнутое подпространство в ℓ_1, т. е. $[N] = N \neq \ell_1$. Рассмотрим произвольный вектор $z \in {}^{\perp}N \subset c_0$. Для любых различных номеров $m, n \in \mathbb{N}$ определим вектор $x \in N$ вида $x = e_m - e_n$. Тогда справедливо равенство

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} z(k)x(k) = z(m) - z(n).$$

Следовательно, z — стационарная последовательность из c_0, т. е. z — нулевая последовательность. Таким образом, выполнено равенство ${}^{\perp}N = \{0\}$. Следовательно, $\left({}^{\perp}N\right)^{\perp} = \ell_1 \neq N = [N]$, что и требовалось.

Т е о р е м а 5.6.1 (*Фредгольм*)**.** *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда справедливы соотношения*

$$\operatorname{Ker} A = {}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*)\,, \qquad \operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу пункта 3 следствия 5.1.2 включение $x \in \operatorname{Ker} A$, т. е. равенство $Ax = 0$ равносильно соотношению $g(Ax) = 0$ для любого $g \in Y^*$, что в свою очередь равносильно $(A^*g)(x) = 0$ для любого $g \in Y^*$, а это равносильно включению $x \in {}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*)$. Таким образом, доказано равенство $\operatorname{Ker} A = {}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*)$.

Включение $g \in \operatorname{Ker} A^*$, т. е. равенство $A^*g = 0$ равносильно соотношению $(A^*g)(x) = 0$ для любого $x \in X$, что в свою очередь равносильно $g(Ax) = 0$ для любого $x \in X$, а это равносильно включению $g \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$. Таким образом, доказано равенство $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

С л е д с т в и е 5.6.1. *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда справедливы соотношения*

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \supset [\operatorname{Im} A^*]\,, \qquad {}^{\perp}(\operatorname{Ker} A^*) = [\operatorname{Im} A]\,.$$

Если пространство X рефлексивно, то выполнено равенство

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = [\operatorname{Im} A^*]\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждения 5.6.2 и теоремы 5.6.1 получаем

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \Big({}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*)\Big)^{\perp} \supset [\operatorname{Im} A^*]\,,$$

$${}^{\perp}(\operatorname{Ker} A^*) = {}^{\perp}\Big((\operatorname{Im} A)^{\perp}\Big) = [\operatorname{Im} A]\,.$$

Если пространство X рефлексивно, то для подпространства $\operatorname{Im} A^* \subset X^*$ в силу утверждения 5.6.2 имеем равенство

$$\Big({}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*)\Big)^{\perp} = [\operatorname{Im} A^*]\,.$$

Следовательно, в этом случае выполнено равенство

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = [\operatorname{Im} A^*]\,.$$

Пример 5.6.2. В случае, когда пространство X не является рефлексивным, для линейного оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ может иметь место неравенство $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \neq [\operatorname{Im} A^*]$. Приведём два таких примера.

Сначала рассмотрим пространства $X = Y = \ell_1$ и линейный оператор $A\colon \ell_1 \to \ell_1$ вида $(Ax)(k) = \frac{x(k)}{k}$ для всех $x \in \ell_1$ и для всех $k \in \mathbb{N}$. Очевидно неравенство $\|A\| \leq 1$, так как для всех $x \in \ell_1$ имеем

$$\|Ax\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x(k)}{k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| = \|x\|_1,$$

т. е. выполнено включение $A \in \mathcal{L}(\ell_1)$. Очевидно, что $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Действительно, равенство $Ax = 0$ для некоторого $x \in \ell_1$ равносильно равенству $\frac{x(k)}{k} = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, т. е. $x(k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В силу утверждения 5.2.3 справедливо равенство $\ell_1^* = \ell_\infty$. Тогда сопряжённый линейный оператор $A^*\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$ имеет вид $(A^*z)(k) = \frac{z(k)}{k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, где $z \in \ell_\infty$. Действительно, для всех $x \in \ell_1$ и $z \in \ell_\infty$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Ax)(k) z(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \, \frac{1}{k} \, z(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) (A^*z)(k).$$

Так как $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \ell_\infty$. Покажем, что $[\operatorname{Im} A^*] \neq \ell_\infty$. Рассмотрим вектор $z \in \ell_\infty$ вида $z(k) = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что выполнено $z \notin [\operatorname{Im} A^*]$. Действительно, для любого $x \in \ell_\infty$ имеем

$$\|z - A^*x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| 1 - \frac{x(k)}{k} \right| \geq \lim_{k \to \infty} \left| 1 - \frac{x(k)}{k} \right| = 1.$$

Следовательно, $\rho(z, \operatorname{Im} A^*) \geq 1$, т. е. действительно $z \notin [\operatorname{Im} A^*]$, что и требовалось.

Теперь рассмотрим пространства $X = Y = \mathbb{L}_1[0,1]$ и линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_1[0,1] \to \mathbb{L}_1[0,1]$ вида $(Ax)(t) = tx(t)$ для всех $x \in \mathbb{L}_1[0,1]$ и для п. в. $t \in [0,1]$. Очевидно неравенство $\|A\| \leq 1$, так как для всех $x \in \mathbb{L}_1[0,1]$ имеем

$$\|Ax\|_1 = \int\limits_{[0,1]} |tx(t)| \, d\mu \leq \int\limits_{[0,1]} |x(t)| \, d\mu = \|x\|_1,$$

т. е. выполнено включение $A \in \mathcal{L}(\mathbb{L}_1[0,1])$. Очевидно, что $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Действительно, равенство $Ax = 0$ для некоторого $x \in \mathbb{L}_1[0,1]$ равносильно равенству $tx(t) = 0$ для п. в. $t \in [0,1]$, что влечёт равенство $x(t) = 0$ для п. в. $t \in [0,1]$, т. е. $x = 0$ в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$. Известно, что $(\mathbb{L}_1[0,1])^* = \mathbb{L}_\infty[0,1]$, причём для любого функционала $f \in (\mathbb{L}_1[0,1])^*$ существует единственный элемент $z_f \in \mathbb{L}_\infty[0,1]$, такой, что $\|f\| = \|z_f\|_\infty$, и для всех $x \in \mathbb{L}_1[0,1]$ выполнено равенство

$$f(x) = \int\limits_{[0,1]} x(t) z_f(t)\, d\mu.$$

Тогда сопряжённый линейный оператор $A^*\colon \mathbb{L}_\infty[0,1] \to \mathbb{L}_\infty[0,1]$ имеет вид $(A^*z)(t) = tz(t)$ для п. в. $t \in [0,1]$, где $z \in \mathbb{L}_\infty[0,1]$. Действительно, для всех $x \in \mathbb{L}_1[0,1]$ и $z \in \mathbb{L}_\infty[0,1]$ выполнено равенство

$$\int\limits_{[0,1]} (Ax)(t) z(t)\, d\mu = \int\limits_{[0,1]} x(t) t z(t)\, d\mu = \int\limits_{[0,1]} x(t) (A^*z)(t)\, d\mu.$$

Так как $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \mathbb{L}_\infty[0,1]$. Покажем, что $[\operatorname{Im} A^*] \neq \mathbb{L}_\infty[0,1]$. Рассмотрим функцию $z \in \mathbb{L}_\infty[0,1]$, равную единице почти всюду на $[0,1]$, т. е. $z(t) = 1$ для п. в. $t \in [0,1]$. Покажем, что выполнено $z \notin [\operatorname{Im} A^*]$. Действительно, для любого $x \in \mathbb{L}_\infty[0,1]$ и любого числа $\delta \in (0,1)$ имеем

$$\|z - A^*x\|_\infty \geq \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,\delta]} |1 - tx(t)| \geq 1 - \delta \|x\|_\infty \to 1 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Следовательно, $\rho(z, \operatorname{Im} A^*) \geq 1$, т. е. действительно $z \notin [\operatorname{Im} A^*]$, что и требовалось.

Теорема 5.6.2. *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда если существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, то существует и оператор $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$, причём выполнено равенство $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Обратно, если существует оператор $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$, а пространство X рефлексивно, то существует и оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, причём выполнено равенство $A^{-1} = F^{-1}\left((A^*)^{-1}\right)^* H$, где $F\colon X \to X^{**}$ и $H\colon Y \to Y^{**}$ — изометрические изоморфизмы, введённые в утверждении 5.1.1.*

Доказательство. Пусть существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Тогда существует оператор $(A^{-1})^* \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$. Для любого функционала $f \in X^*$ и любого вектора $x \in X$ имеем

$$\Big(A^*(A^{-1})^* f\Big)(x) = \Big((A^{-1})^* f\Big)(Ax) = f(A^{-1}Ax) = f(x).$$

В силу произвольности вектора $x \in X$ получаем равенство

$$A^*(A^{-1})^* f = f \quad \text{для любого} \quad f \in X^*.$$

Следовательно, оператор $(A^{-1})^*$ является правым обратным оператором для A^*. Аналогично для любого функционала $g \in Y^*$ и любого вектора $y \in Y$ имеем

$$\Big((A^{-1})^* A^* g\Big)(y) = \Big(A^* g\Big)(A^{-1}y) = g(AA^{-1}y) = g(y).$$

В силу произвольности вектора $y \in Y$ получаем равенство

$$(A^{-1})^* A^* g = g \quad \text{для любого} \quad g \in Y^*.$$

Следовательно, оператор $(A^{-1})^*$ является левым обратным оператором для A^*. Таким образом, по определению 3.5.3 оператор $(A^{-1})^*$ является обратным оператором для A^*, т. е. существует оператор $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Пусть теперь оператор $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ существует. Тогда по доказанному выше линейный оператор $B = \big((A^*)^{-1}\big)^* \in \mathcal{L}(Y^{**}, X^{**})$ является обратным к оператору $A^{**} \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$. Так как пространство X рефлексивно, то по определению 5.1.2 имеем равенство $\operatorname{Im} F = X^{**}$. Следовательно, оператор $F^{-1}BH \in \mathcal{L}(Y, X)$. Тогда для любого вектора $y \in Y$ и функционала $g \in Y^*$ имеем

$$g\Big(AF^{-1}BHy\Big) = (A^*g)\Big(F^{-1}BHy\Big) = (BHy)(A^*g) =$$
$$= (Hy)\Big((A^*)^{-1}A^*g\Big) = (Hy)(g) = g(y).$$

В силу произвольности функционала $g \in Y^*$ согласно пункту 3 следствия 5.1.2 получаем равенство $AF^{-1}BHy = y$ для любого вектора $y \in \in Y$. Следовательно, оператор $F^{-1}BH$ является правым обратным для оператора A. Аналогично для любого вектора $x \in X$ и функционала $f \in X^*$ имеем

$$f\Big(F^{-1}BHAx\Big) = (BHAx)(f) = (HAx)\Big((A^*)^{-1}f\Big) =$$
$$= \Big((A^*)^{-1}f\Big)(Ax) = \Big(A^*(A^*)^{-1}f\Big)(x) = f(x).$$

Тогда в силу произвольности функционала $f \in X^*$ согласно пункту 3 следствия 5.1.2 получаем равенство $F^{-1}BHAx = x$ для любого вектора $x \in X$. Следовательно, оператор $F^{-1}BH$ является левым обратным для оператора A. Таким образом, по определению 3.5.3 оператор $F^{-1}BH$ является обратным оператором для A, т. е. существует оператор $A^{-1} = F^{-1}BH$.

Замечание 5.6.4. Пусть X, Y — банаховы пространства, оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда существование оператора $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ равносильно существованию оператора $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$. В силу теоремы 5.6.2 достаточно показать, что непрерывная обратимость оператора A^* влечёт непрерывную обратимость оператора A. Согласно теореме 4.14 из [2, ч. I, гл. 4, с. 115] образ $\operatorname{Im} A$ оператора A замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ $\operatorname{Im} A^*$ сопряжённого оператора A^*. Пусть существует оператор $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$. По теореме 3.5.1 Банаха об обратном операторе это равносильно равенствам $\operatorname{Ker} A^* = \{0\}$ и $\operatorname{Im} A^* = X^*$. Следовательно, в силу замкнутости $\operatorname{Im} A^*$ в X^* подпространство $\operatorname{Im} A$ замкнуто в Y. Поэтому по теореме 5.6.1 и следствию 5.6.1 получаем равенства $\operatorname{Ker} A = {}^\perp(\operatorname{Im} A^*) = {}^\perp(X^*) = \{0\}$, $\operatorname{Im} A = [\operatorname{Im} A] = {}^\perp(\operatorname{Ker} A^*) = {}^\perp(\{0\}) = Y$. Следовательно, по теореме 3.5.1 Банаха об обратном операторе существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

5.7. Спектр линейного оператора

В этом параграфе рассматриваем нетривиальное комплексное банахово пространство X и линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X)$. Тождественный оператор, действующий в X, обозначим I, т. е. $I(x) = x$ для всех $x \in X$. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ будем рассматривать линейный оператор $A_\lambda = A - \lambda I$.

Определение 5.7.1. *Линейный оператор A будем называть непрерывно обратимым на X, если существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

Замечание 5.7.1. В силу теоремы 3.5.1 Банаха об обратном операторе линейный оператор A является непрерывно обратимым на X тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $\operatorname{Im} A = X$.

Т е о р е м а 5.7.1 (*Дж. фон Нейман*)**.** *Пусть* $\|A\| < 1$. *Тогда линейный оператор* $I - A$ *является непрерывно обратимым на* X, *причём справедливо равенство*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что ряд

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

сходится абсолютно в полном пространстве $\mathfrak{L}(X)$ по признаку сравнения, так как $\|A^k\| \le \|A\|^k$ — член сходящегося ряда в силу неравенства $\|A\| < 1$. Рассмотрим последовательность $\{S_m\}_{m=0}^{\infty}$ частичных сумм этого ряда, т. е. $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} A^k$. Она является фундаментальной и, значит, сходящейся в полном пространстве $\mathfrak{L}(X)$ к оператору $S \in \mathfrak{L}(X)$. Далее, $(I - A)S_m = S_m(I - A) = I - A^{m+1} \to I$ при $m \to \infty$ в силу соотношения $\|A^{m+1}\| \le \|A\|^{m+1} \to 0$ при $m \to \infty$. С другой стороны, так как $S_m \to S$, то $(I - A)S_m \to (I - A)S$ и $S_m(I - A) \to S(I - A)$ при $m \to \infty$. Следовательно, $(I - A)S = S(I - A) = I$. Таким образом, оператор $S \in \mathfrak{L}(X)$ является как правым, так и левым обратным для оператора $I - A$ на всём X, что означает непрерывную обратимость оператора $I - A$ на X и равенство $(I - A)^{-1} = S$, что и требовалось.

С л е д с т в и е 5.7.1. *Пусть оператор* A *является непрерывно обратимым на* X, *а оператор* $\Delta A \in \mathfrak{L}(X)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Тогда оператор $A + \Delta A$ *является непрерывно обратимым на* X, *причём справедливо неравенство*

$$\big\|(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\big\| \le \frac{\|A^{-1}\|^2 \|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $A + \Delta A = A\big(I + A^{-1}\Delta A\big)$, а $\|A^{-1}\Delta A\| \le \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| < 1$, то по теореме 5.7.1 оператор $I + A^{-1}\Delta A$ является непрерывно обратимым на X. Следовательно, оператор $B = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ является обратным для оператора $A + \Delta A$, т. е. оператор $A + \Delta A$ является непрерывно обратимым на X, причём справедливо равенство

$$(A + \Delta A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}\Delta A)^k A^{-1}.$$

Тогда получаем

$$\left\|(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}\Delta A)^k A^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\|A^{-1}\|^{k+1}\|\Delta A\|^k = \frac{\|A^{-1}\|^2\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}.$$

Определение 5.7.2. *Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярным для оператора A, если оператор A_λ непрерывно обратим на X. Совокупность всех регулярных скаляров для оператора A называется его резольвентным множеством и обозначается $\rho(A)$. Для любого $\lambda \in \rho(A)$ линейный оператор $R_A(\lambda) = (A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ называется резольвентой оператора A.*

Утверждение 5.7.1. *Резольвентное множество $\rho(A)$ является открытым в $\mathbb{C}$, а любое число $\lambda \in \mathbb{C}$ вида $|\lambda| > \|A\|$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$. Отображение $R_A\colon \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$ является непрерывным, и для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$ справедливо тождество Гильберта:*

$$R_A(\lambda_1) - R_A(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)R_A(\lambda_2)R_A(\lambda_1).$$

Доказательство. Если $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет неравенству $|\lambda| > \|A\|$, то по теореме 5.7.1 оператор $A_\lambda = -\lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)$ является непрерывно обратимым, причём справедливо равенство

$$R_A(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Следовательно, число $\lambda \in \rho(A)$, т. е. резольвентное множество оператора A содержит внешность замкнутого круга из $\mathbb{C}$ с центром в нуле радиуса $\|A\|$.

Для любого $\lambda \in \rho(A)$ и скаляра $\Delta\lambda$ вида $|\Delta\lambda| < \frac{1}{\|R_A(\lambda)\|}$ в силу следствия 5.7.1 получаем, что оператор $A_{\lambda+\Delta\lambda} = A_\lambda - \Delta\lambda I$ является непрерывно обратимым на X, причём справедливо неравенство

$$\Big\|R_A(\lambda+\Delta\lambda) - R_A(\lambda)\Big\| \le \frac{\|R_A(\lambda)\|^2|\Delta\lambda|}{1 - \|R_A(\lambda)\|\,|\Delta\lambda|}.$$

Следовательно, множество $\rho(A)$ открыто, и $\|R_A(\lambda+\Delta\lambda) - R_A(\lambda)\| = O(|\Delta\lambda|) \to 0$ при $\Delta\lambda \to 0$. Поэтому отображение $R_A\colon \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$ является непрерывным. Наконец, для любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$ получаем равенства

$$R_A(\lambda_1) - R_A(\lambda_2) = R_A(\lambda_2)\,(A_{\lambda_2} - A_{\lambda_1})\,R_A(\lambda_1) = \\ = (\lambda_1 - \lambda_2)R_A(\lambda_2)R_A(\lambda_1).$$

Определение 5.7.3. *Спектром оператора A называется множество $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$. Спектральным радиусом оператора A называется величина $r(A) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$.*

Теорема 5.7.2. *Спектр оператора A является непустым компактным множеством в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. В силу утверждения 5.7.1 резольвентное множество $\rho(A)$ открыто в $\mathbb{C}$. Следовательно, спектр $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ замкнут в $\mathbb{C}$. В силу утверждения 5.7.1 любое число $\lambda \in \mathbb{C}$ вида $|\lambda| > \|A\|$ является регулярным значением оператора A. Следовательно, для любого $\lambda \in \sigma(A)$ выполнено неравенство $|\lambda| \le \|A\|$. Таким образом, спектр $\sigma(A)$ является ограниченным множеством в $\mathbb{C}$. Поэтому $\sigma(A)$ как ограниченное замкнутое множество является компактом в $\mathbb{C}$. Покажем, что $\sigma(A) \ne \varnothing$. Предположим противное. Тогда $\rho(A) = \mathbb{C}$. Для любого функционала $\varPhi \in \Big(\mathcal{L}(X)\Big)^*$ рассмотрим функцию $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вида $\varphi(z) = \varPhi\Big(R_A(z)\Big)$ для любого $z \in \mathbb{C}$. В силу равенства Гильберта для любых чисел $z, \Delta z \in \mathbb{C}$ имеем

$$\varphi(z+\Delta z) - \varphi(z) = \varPhi\Big(\Delta z R_A(z) R_A(z+\Delta z)\Big) = \\ = \Delta z \varPhi\Big(R_A(z) R_A(z+\Delta z)\Big).$$

Так как резольвента R_A непрерывна на резольвентном множестве, т. е. для рассматриваемого случая в $\mathbb{C}$, то получаем

$$\varphi'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)}{\Delta z} = \varPhi\left(R_A^2(z)\right) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, производная $\varphi(z)$ непрерывна на $\mathbb{C}$ как суперпозиция непрерывных отображений. Поэтому комплексная функция φ является целой функцией. При этом для всех $z \in \mathbb{C}$ вида $|z| > \|A\|$ в силу теоремы 5.7.1 получаем

$$|\varphi(z)| \leq \frac{\|\varPhi\|}{|z|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{|z|^k} = \frac{\|\varPhi\|}{|z| - \|A\|} \to 0 \qquad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Следовательно, в силу теоремы Лиувилля из теории функций комплексного переменного получаем, что $\varphi(z) = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Но тогда получается, что для любого $z \in \mathbb{C}$ и любого функционала $\varPhi \in \in \left(\mathcal{L}(X)\right)^*$ выполнено $\varPhi\left(R_A(z)\right) = 0$. Тогда в силу пункта 3 следствия 5.1.2 получаем $R_A(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$, что противоречит взаимной однозначности оператора $R_A(z) = (A - zI)^{-1}$. Следовательно, полученное противоречие доказывает непустоту спектра $\sigma(A)$ оператора A.

З а м е ч а н и е 5.7.2. В силу замечания 5.6.4 для произвольного числа $\lambda \in \mathbb{C}$ существует оператор $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ тогда и только тогда, когда существует оператор $((A - \lambda I)^*)^{-1} = (A^* - \lambda I^*)^{-1} \in \in \mathcal{L}(X^*)$. Здесь оператор I^* является тождественным оператором в пространстве X^*. Следовательно, включение $\lambda \in \rho(A)$ равносильно включению $\lambda \in \rho(A^*)$, т. е. справедливо равенство $\rho(A) = \rho(A^*)$. Следовательно, $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

Т е о р е м а 5.7.3. *Существует* $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ определим оператор $B_{\lambda,n} = \sum\limits_{m=0}^{n-1} A^m \lambda^{n-1-m}$. Тогда справедливо равенство $A^n - \lambda^n I = (A - \lambda I) B_{\lambda,n} = B_{\lambda,n}(A - \lambda I)$. Следовательно, если выполнено включение $\lambda^n \in \rho(A^n)$, то оператор A_λ имеет левый обратный оператор $R_{A^n}(\lambda^n) B_{\lambda,n} \in \mathcal{L}(X)$ и правый обратный оператор

$B_{\lambda,n}R_{A^n}(\lambda^n) \in \mathcal{L}(X)$. Поэтому согласно замечанию 3.5.3 эти операторы совпадают и равны $R_A(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$, т. е. $\lambda \in \rho(A)$. Таким образом, имеет место включение $\rho(A^n) \subset (\rho(A))^n$, которое влечёт включение $(\sigma(A))^n \subset \sigma(A^n)$. Поэтому для любого $\lambda \in \sigma(A)$ справедливо неравенство $|\lambda|^n \leq \|A^n\|$, откуда получаем оценку $|\lambda| \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$r(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| \leq \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Для произвольного функционала $\Phi \in \Big(\mathcal{L}(X)\Big)^*$ рассмотрим функцию $\varphi(z) = \Phi(R_A(z))$ при $z \in \rho(A)$. Как показано в доказательстве теоремы 5.7.2, функция φ регулярна в $\rho(A)$, а в окрестности бесконечности $|z| > \|A\|$ имеет разложение в ряд Лорана по степеням z вида

$$\varphi(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi(A^n)}{z^{n+1}}.$$

Так как $\|A\| \geq r(A)$, то в окрестности бесконечности $|z| > r(A)$ функция φ имеет такой же ряд Лорана по степеням z в силу теоремы единственности разложения регулярной в кольце комплексной функции в ряд Лорана. Следовательно, для любого $z \in \mathbb{C}$ вида $|z| > r(A)$ и любого функционала $\Phi \in \Big(\mathcal{L}(X)\Big)^*$ существует число $M(\Phi, z) >$ > 0, такое, что $\left|\frac{\Phi(A^n)}{z^n}\right| \leq M(\Phi, z)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда при каждом $z \in \mathbb{C}$ вида $|z| > r(A)$ последовательность линейных функционалов $H_{n,z} \in \Big(\mathcal{L}(X)\Big)^{**}$ вида $H_{n,z}(\Phi) = \frac{\Phi(A^n)}{z^n}$ является поточечно ограниченной, так как при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|H_{n,z}(\Phi)| \leq$ $\leq M(\Phi, z)$. Тогда по теореме 3.4.2 Банаха—Штейнгауза последовательность функционалов $H_{n,z}$ ограничена в пространстве $\Big(\mathcal{L}(X)\Big)^{**}$ по операторной норме, т. е. существует число $L(z) > 0$, такое, что $\|H_{n,z}\| \leq L(z)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как по пункту 4 следствия 5.1.2 теоремы Хана—Банаха справедливо равенство

$$\|H_{n,z}\| = \sup_{\|\Phi\|=1} \frac{|\Phi(A^n)|}{|z|^n} = \frac{\|A^n\|}{|z|^n},$$

то имеем неравенство $|z| > \frac{\sqrt[n]{\|A^n\|}}{\sqrt[n]{L(z)}}$ при всех $|z| > r(A)$ и $n \in \mathbb{N}$. Так как $\sqrt[n]{L(z)} \to 1$ при $n \to \infty$, то получаем неравенство $|z| \geq$ $\geq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ при всех $|z| > r(A)$. Следовательно, при $|z| \to r(A)+0$ получаем неравенство $r(A) \geq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Таким образом, доказаны следующие неравенства:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A) \leq \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|},$$

откуда получаем, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$.

Замечание 5.7.3. По теореме 3.5.1 Банаха об обратном операторе число $\lambda \in \rho(A)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ и $\operatorname{Im} A_\lambda = X$. Следовательно, включение $\lambda \in \sigma(A)$ возможно либо при $\operatorname{Ker} A_\lambda \neq \{0\}$ (в этом случае оператор A_λ не имеет левого обратного оператора), либо $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$, но $\operatorname{Im} A_\lambda \neq X$. В этом случае существует обратный оператор $(A_\lambda)^{-1}\colon \operatorname{Im} A_\lambda \to X$, но $(A_\lambda)^{-1} \notin \mathcal{L}(X)$ в силу неравенства $\operatorname{Im} A_\lambda \neq X$. Однако если подпространство $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнуто в X, то оно является полным, и по теореме 3.5.1 Банаха об обратном операторе выполнено включение $(A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A_\lambda, X)$. Если же подпространство $\operatorname{Im} A_\lambda$ незамкнуто, то в силу утверждения 3.5.5 имеет место равенство $\|(A_\lambda)^{-1}\| = +\infty$.

Определение 5.7.4. *Множество $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$ называется точечным спектром оператора A, если включение $\lambda \in \sigma_p(A)$ равносильно выполнению соотношения $\operatorname{Ker} A_\lambda \neq \{0\}$. Любое число $\lambda \in$ $\in \sigma_p(A)$ называется собственным числом оператора A, а любой нетривиальный вектор из ядра $\operatorname{Ker} A_\lambda$ называется собственным вектором оператора A, соответствующим числу λ.*

Определение 5.7.5. *Множество $\sigma_c(A) \subset \sigma(A)$ называется непрерывным спектром оператора A, если включение $\lambda \in \sigma_c(A)$ равносильно выполнению соотношений*

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}, \quad \operatorname{Im} A_\lambda \neq X, \quad [\operatorname{Im} A_\lambda] = X.$$

Определение 5.7.6. *Множество $\sigma_r(A) \subset \sigma(A)$ называется остаточным спектром оператора A, если включение $\lambda \in \sigma_r(A)$ равносильно выполнению соотношений*

$$\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}, \quad [\operatorname{Im} A_\lambda] \neq X.$$

Утверждение 5.7.2. *Справедливо равенство*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Доказательство. Сразу следует из замечания 5.7.3.

Утверждение 5.7.3. *Пусть число* $\lambda \in \sigma(A)$. *Тогда включение* $\lambda \in \sigma_c(A)$ *равносильно соотношениям* $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ *и* $\operatorname{Ker} A_\lambda^* = \{0\}$, *а включение* $\lambda \in \sigma_r(A)$ *равносильно соотношениям* $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ *и* $\operatorname{Ker} A_\lambda^* \neq \{0\}$.

Доказательство. По теореме 5.6.1 Фредгольма справедливо равенство

$$(\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp = \operatorname{Ker} A_\lambda^*.$$

Если число $\lambda \in \sigma_c(A)$, то $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ и $[\operatorname{Im} A_\lambda] = X$. Так как для любого подпространства $L \subset X$ выполнено равенство $L^\perp = [L]^\perp$, то получаем $\operatorname{Ker} A_\lambda^* = X^\perp = \{0\}$. Обратно, если $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ и $\operatorname{Ker} A_\lambda^* = \{0\}$, то в силу утверждения 5.6.2 получаем

$$[\operatorname{Im} A_\lambda] = {}^\perp\Big((\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp\Big) = {}^\perp(\operatorname{Ker} A_\lambda^*) = {}^\perp\Big(\{0\}\Big) = X,$$

т. е. $\lambda \in \sigma_c(A)$.

Если число $\lambda \in \sigma_r(A)$, то $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ и $[\operatorname{Im} A_\lambda] \neq X$. В силу пункта 1 следствия 5.1.2 теоремы Хана—Банаха существует нетривиальный функционал $f \in X^*$, такой, что

$$f \in [\operatorname{Im} A_\lambda]^\perp = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp = \operatorname{Ker} A_\lambda^*,$$

т. е. $\operatorname{Ker} A_\lambda^* \neq \{0\}$. Обратно, если $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ и $\operatorname{Ker} A_\lambda^* \neq \{0\}$, то $(\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp \neq \{0\}$. Следовательно, получаем соотношения

$$[\operatorname{Im} A_\lambda] = {}^\perp\Big((\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp\Big) \neq {}^\perp\Big(\{0\}\Big) = X,$$

т. е. $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Теорема 5.7.4 (*об отображении спектра многочленом*)**.** *Пусть* $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^k$ — *комплексный многочлен степени* $N \in \mathbb{N}$ (*т. е.* $a_N \neq 0$). *Тогда справедливо равенство*

$$\sigma\Big(P(A)\Big) = P\Big(\sigma(A)\Big).$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что оператор $P(A)$ непрерывно обратим на X тогда и только тогда, когда выполнено $0 \notin P\Big(\sigma(A)\Big)$. Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — все различные комплексные корни многочлена P кратности $r_1, \ldots, r_m$ соответственно. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем равенство $P(z) = a_N \prod\limits_{k=1}^{m} (z - z_k)^{r_k}$. Следовательно, получаем $P(A) = a_N A_{z_1}^{r_1} \ldots A_{z_m}^{r_m}$. Если имеем соотношение $0 \notin P\Big(\sigma(A)\Big)$, т. е. $z_k \notin \sigma(A)$ для любого $k \in \overline{1,m}$, то существует обратный оператор

$$\Big(P(A)\Big)^{-1} = \frac{1}{a_N} \left(A_{z_N}^{-1}\right)^{r_N} \ldots \left(A_{z_1}^{-1}\right)^{r_1} \in \mathfrak{L}(X).$$

Обратно, пусть оператор $P(A)$ непрерывно обратим на X, т. е. существует обратный оператор $\Big(P(A)\Big)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)$. Рассмотрим произвольное $n \in \overline{1,m}$. Так как линейные операторы A_{z_k} при всех $k \in \overline{1,m}$ перестановочны, то, определив оператор $T = a_N A_{z_n}^{r_n - 1} \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{m} A_{z_k}^{r_k}$, получаем равенство $P(A) = A_{z_n} T = T A_{z_n}$. Следовательно, получаем $I = A_{z_n} T \Big(P(A)\Big)^{-1} = \Big(P(A)\Big)^{-1} T A_{z_n}$. Таким образом, оператор A_{z_n} имеет левый и правый обратные операторы, непрерывные на X. Следовательно, по замечанию 3.5.3 получаем $T\Big(P(A)\Big)^{-1} = \Big(P(A)\Big)^{-1} T = \Big(A_{z_n}\Big)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)$, т. е. выполнено $z_n \notin \sigma(A)$. Таким образом, справедливо соотношение $0 \notin P\Big(\sigma(A)\Big)$.

В силу вышеизложенного получаем, что соотношение $\lambda \notin \sigma\Big(P(A)\Big)$ равносильно непрерывной обратимости на X оператора $\Big(P(A)\Big)_\lambda = (P - \lambda)(A)$, что в свою очередь равносильно $0 \notin (P - \lambda)\Big(\sigma(A)\Big)$, т. е. $\lambda \notin P\Big(\sigma(A)\Big)$. Следовательно, включение $\lambda \in \sigma\Big(P(A)\Big)$ равносильно включению $\lambda \in P\Big(\sigma(A)\Big)$, т. е. справедливо равенство $\sigma\Big(P(A)\Big) = P\Big(\sigma(A)\Big)$, что и требовалось.

5.8. Компактный оператор

В этом параграфе рассматриваются банаховы пространства X, Y и линейный оператор $A: X \to Y$.

Определение 5.8.1. *Линейный оператор A называется компактным, если для любого ограниченного множества $S \subset X$ его образ $A(X)$ является вполне ограниченным в Y.*

Замечание 5.8.1. Так как вполне ограниченность множества влечёт его ограниченность, то компактный оператор является ограниченным оператором. Примером некомпактного линейного ограниченного оператора может служить тождественный оператор на бесконечномерном банаховом пространстве, так как по теореме 3.1.2 Рисса единичная сфера в бесконечномерном банаховом пространстве не является вполне ограниченным множеством. В банаховом пространстве вполне ограниченность множества равносильна тому, что его замыкание является компактом (см. замечание 2.2.3). Следовательно, оператор A является компактным тогда и только тогда, когда замыкание образа любого ограниченного множества из X под действием A является компактом в Y. Компактность оператора A равносильна тому, что $A\Big(B_1(0)\Big)$ является вполне ограниченным множеством в Y. Необходимость этого условия очевидна. Покажем достаточность. Для любого ограниченного множества $S \subset X$ существует число $R > 0$, такое, что $S \subset B_R(0)$. Следовательно, $\frac{S}{R} \subset B_1(0)$ и множество $A\left(\frac{S}{R}\right) \subset A\Big(B_1(0)\Big)$ является вполне ограниченным как подмножество вполне ограниченного множества. Но тогда вполне ограниченным является и множество $RA\left(\frac{S}{R}\right) = A(S)$, что и требовалось. Так как сумма вполне ограниченных множеств и умножение вполне ограниченного множества на скаляр тоже являются вполне ограниченными множествами, то конечная линейная комбинация компактных операторов тоже является компактным оператором. Таким образом, множество всех компактных операторов, действующих из X в Y, образует в пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$ подпространство, которое обозначим $\mathcal{K}(X,Y)$. Если $Y = X$, то обозначим $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X,X)$.

Утверждение 5.8.1. *Если линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ имеет конечномерный образ, то он компактный.*

Доказательство. Так как оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то для любого ограниченного множества $S \subset X$ имеем $A(S)$ — ограниченное подмножество конечномерного подпространства $\operatorname{Im} A$. По следствию 3.1.1 конечномерное подпространство $\operatorname{Im} A$ полно в Y. Следовательно, выполнено включение $[A(S)] \subset \operatorname{Im} A$. В силу следствия 3.1.1 любое замкнутое ограниченное подмножество конечномерного подпространства из Y является компактом в Y. Поэтому $[A(S)]$ — компакт, и в силу замечания 5.8.1 получаем, что A — компактный оператор.

Утверждение 5.8.2. *Пусть линейный оператор A является компактным, а его образ $\operatorname{Im} A$ замкнут. Тогда оператор A имеет конечномерный образ.*

Доказательство. Пусть $Z = \operatorname{Im} A$ — замкнутое подпространство в банаховом пространстве Y. Следовательно, подпространство Z само является полным. Тогда по теореме 3.4.5 $A \in \mathcal{L}(X, Z)$ является открытым отображением. Следовательно, множество $A\Big(O_1(0)\Big)$ открыто в банаховом пространстве Z. Так как оператор A компактен, то открытое множество $A\Big(O_1(0)\Big)$ является вполне ограниченным в Z. Следовательно, в Z существует вполне ограниченная сфера положительного радиуса. Тогда по теореме 3.1.2 Рисса получаем, что пространство $Z = \operatorname{Im} A$ является конечномерным.

Утверждение 5.8.3. *Пусть последовательность операторов $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ является сходящейся к оператору A по операторной норме, т. е. $\|A_m - A\| \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда A является компактным оператором, т. е. $A \in \mathcal{K}(X, Y)$. Иными словами, подпространство $\mathcal{K}(X, Y)$ замкнуто в $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Доказательство. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех $m \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\|A_m - A\| \leq \varepsilon$. Тогда для любого $x \in B_1(0)$ получаем неравенство $\|A_m(x) - A(x)\| \leq \|A_m - A\| \leq \varepsilon$ при $m \geq N(\varepsilon)$. Зафиксируем произвольное $m \geq N(\varepsilon)$. Так как множество $A_m\Big(B_1(0)\Big)$ вполне ограничено в Y, то существуют векторы $x_1, \ldots, x_M \in B_1(0)$, такие, что конечное множество $\{A_m(x_k)\}_{k=1}^{M}$ является ε-сетью множества $A_m\Big(B_1(0)\Big)$. Покажем, что конечное множество $\{A(x_k)\}_{k=1}^{M}$ является 3ε-сетью множества $A\Big(B_1(0)\Big)$. Действительно, для любого $x \in B_1(0)$ существует $k \in \overline{1, M}$, такой, что $\|A_m(x) - A_m(x_k)\| \leq \varepsilon$.

Тогда получаем следующие неравенства:

$$\|A(x) - A(x_k)\| \leq$$
$$\leq \|A(x) - A_m(x)\| + \|A_m(x) - A_m(x_k)\| + \|A_m(x_k) - A(x_k)\| \leq 3\varepsilon,$$

что и требовалось.

Определение 5.8.2. *Оператор A называется конечномерным, если он является пределом последовательности линейных непрерывных операторов с конечномерными образами.*

Замечание 5.8.2. В силу утверждений 5.8.1 и 5.8.3 всякий конечномерный оператор является компактным.

Утверждение 5.8.4. *Пусть $Y = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство, а линейный оператор A является компактным. Тогда A — конечномерный оператор.*

Доказательство. Так как A — компактный оператор, то множество $A\Big(B_1(0)\Big)$ является вполне ограниченным в $\mathcal{H}$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $\{y_m\}_{m=1}^{M} \subset \subset A\Big(B_1(0)\Big)$ множества $A\Big(B_1(0)\Big)$. Определим конечномерное подпространство

$$L_\varepsilon = \mathrm{Lin}\{y_1, \ldots, y_M\} \subset \mathcal{H}.$$

Так как подпространство L_ε конечномерно, то в силу следствия 3.1.1 оно является замкнутым в пространстве $\mathcal{H}$. Тогда по теореме 3.2.2 Рисса об ортогональном дополнении справедливо равенство $\mathcal{H} = L_\varepsilon \oplus (L_\varepsilon)^\perp$. Поэтому для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ существуют единственные векторы $y_\parallel \in L_\varepsilon$ и $y_\perp \in (L_\varepsilon)^\perp$, такие, что $y = y_\parallel + y_\perp$. Определим линейный оператор $P_\varepsilon \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ортогонального проектирования на подпространство L_ε по формуле $P_\varepsilon(y) = y_\parallel$ для любого $y \in \mathcal{H}$. Так как для любого $y \in \mathcal{H}$ выполнены соотношения $\|y\| = \sqrt{(y_\parallel + y_\perp, y_\parallel + y_\perp)} = \sqrt{(y_\parallel, y_\parallel) + (y_\perp, y_\perp)} = \sqrt{\|y_\parallel\|^2 + \|y_\perp\|^2} \geq \|y_\parallel\| = \|P_\varepsilon(y)\|$, то получаем $\|P_\varepsilon\| \leq 1$. Следовательно, $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Определим линейный оператор $A_\varepsilon = P_\varepsilon A \in \mathcal{L}(X, \mathcal{H})$. Так как $\mathrm{Im}\, A_\varepsilon \subset L_\varepsilon$, то оператор A_ε имеет конечномерный образ. Рассмотрим в X произвольный вектор $x \in B_1(0)$. Для него существует номер $m \in \overline{1, M}$, такой, что $\|A(x) - y_m\| \leq \varepsilon$. При этом по определению оператора P_ε справедливо равенство $P_\varepsilon(y_m) = y_m$. Отсюда получаем

$$\|A(x) - A_\varepsilon(x)\| \leq \|A(x) - y_m\| + \|P_\varepsilon(y_m - A(x))\| \leq \\ \leq (1 + \|P_\varepsilon\|)\|A(x) - y_m\| \leq 2\varepsilon.$$

В силу произвольности вектора $x \in B_1(0)$ получаем неравенство $\|A - A_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$. Тогда, выбрав последовательность $\varepsilon_n \to +0$ при $n \to \infty$, получаем последовательность линейных операторов $A_{\varepsilon_n} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{H})$ с конечномерными образами, такую, что $\|A - A_{\varepsilon_n}\| \leq 2\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, оператор A является конечномерным.

Пример 5.8.1. Пусть функция $K\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ такова, что $K \in \mathbb{L}_2\left([0,1]^2\right)$. Рассмотрим линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_{[0,1]} K(t,\tau)x(\tau)\, d\mu(\tau) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1] \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

Покажем, что оператор A является компактным. Прежде всего покажем, что оператор A является непрерывным, т. е. справедливо включение $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{L}_2[0,1]\right)$. Для любого $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ имеем соотношения

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\int\limits_{[0,1]} d\mu(t) \left| \int\limits_{[0,1]} K(t,\tau)x(\tau)\, d\mu(\tau)\right|^2} \leq \\ \leq \sqrt{\int\limits_{[0,1]} d\mu(t) \left(\int\limits_{[0,1]} |K(t,\tau)|^2\, d\mu(\tau)\right)\left(\int\limits_{[0,1]} |x(\tau)|^2\, d\mu(\tau)\right)} = \\ = \sqrt{\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} |K(t,\tau)|^2\, d\mu(t,\tau)}\, \sqrt{\int\limits_{[0,1]} |x(\tau)|^2\, d\mu(\tau)} = \|K\|_2 \|x\|_2.$$

Следовательно, справедливо неравенство $\|A\| \leq \|K\|_2 < +\infty$, т. е. оператор A является непрерывным. Счётная система

$$S = \left\{f_n(t) = \sin(\pi n t)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2[0,1]$. Тогда счётная система $E = \Big\{f_n(t)f_m(\tau)\Big\}_{n,m=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2\Big([0,1]^2\Big)$. Занумеруем элементы системы E с помощью одного индекса, получим

$$E = \Big\{g_k(t,\tau) = f_{n_k}(t)f_{m_k}(\tau)\Big\}_{k=1}^{\infty}.$$

Для любого номера N рассмотрим N-ю сумму Фурье функции K по системе E в пространстве $\mathbb{L}_2\Big([0,1]^2\Big)$:

$$S_N(t,\tau) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(K,g_k)}{(g_k,g_k)}\, g_k(t,\tau).$$

Справедливо соотношение $\|S_N - K\|_2 \to 0$ при $N \to \infty$. Для любого номера N определим линейный оператор $A_N\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$ следующим образом:

$$(A_N x)(t) = \int\limits_{[0,1]} S_N(t,\tau)x(\tau)\,d\mu(\tau) \text{ для п. в. } t \in [0,1] \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

Так как выполнено неравенство $\|A_N\| \le \|S_N\|_2 < +\infty$, то оператор A_N является непрерывным. Также для любой функции $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ справедливо включение $A_N x \in \mathrm{Lin}\{f_{n_1},\dots,f_{n_N}\}$. Следовательно, $\mathrm{Im}\,A_N \subset \mathrm{Lin}\{f_{n_1},\dots,f_{n_N}\}$. Поэтому $\dim \mathrm{Im}\,A_N \le N$, т. е. оператор A_N имеет конечномерный образ. Наконец, для любой функции $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ и для п. в. $t \in [0,1]$ имеем

$$\Big((A - A_N)(x)\Big)(t) = \int\limits_{[0,1]} \Big(K(t,\tau) - S_N(t,\tau)\Big)\,x(\tau)\,d\mu(\tau).$$

Следовательно, получаем $\|A - A_N\| \le \|K - S_N\|_2 \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, доказано, что оператор A является конечномерным. Следовательно, по утверждению 5.8.2 получаем компактность оператора A.

Утверждение 5.8.5. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $A \in \mathcal{K}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z,X)$, $C \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Тогда операторы $AB \in \mathcal{K}(Z,Y)$ и $CA \in \mathcal{K}(X,Z)$.*

Доказательство. Так как для любого ограниченного множества $S \subset Z$ множество $B(S)$ ограничено в X, то множество $A\Big(B(S)\Big)$ является вполне ограниченным в Y. Следовательно, $AB \in \in \mathcal{K}(Z, Y)$. Для любого ограниченного множества $S \subset X$ множество $A(S)$ является вполне ограниченным в Y. Тогда множество $C\Big(A(S)\Big)$ тоже является вполне ограниченным в Z. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим произвольную конечную ε-сеть множества $A(S)$. Ограниченный оператор C переведёт элементы этой сети в конечное множество, которое очевидно будет $\|C\|\varepsilon$-сетью множества $C\Big(A(S)\Big)$. Следовательно, $CA \in \mathcal{K}(X, Z)$.

Утверждение 5.8.6. *Пусть пространство X является рефлексивным и сепарабельным. Тогда оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ является компактным тогда и только тогда, когда он любую слабо сходящуюся последовательность из X переводит в сильно сходящуюся последовательность в Y.*

Доказательство. Пусть оператор A является компактным. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, слабо сходящуюся к вектору $z \in X$. Тогда последовательность $A(x_n)$ является слабо сходящейся к $A(z)$, так как для любого функционала $g \in Y^*$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} g(Ax_n) = \lim_{n\to\infty} (A^*g)(x_n) = (A^*g)(z) = g(Az).$$

Предположим, что $A(x_n)$ не является сильно сходящейся к вектору $A(z)$. Следовательно, существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $A(x_{n_m})$, такие, что $\|A(x_{n_m}) - A(z)\| \geq \varepsilon_0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Так как слабо сходящаяся последовательность x_n ограничена в X в силу утверждения 5.4.3, то в силу компактности оператора A последовательность $A(x_{n_m})$ является вполне ограниченным множеством в пространстве Y. Следовательно, она содержит сильно фундаментальную подпоследовательность $A(x_{n_{m_k}})$. Так как пространство Y является полным, то существует вектор $y \in Y$, к которому сильно сходится последовательность $A(x_{n_{m_k}})$. Так как последовательность $A(x_{n_{m_k}})$ является также и слабо сходящейся к вектору $A(z)$, то в силу утверждения 5.4.2 получаем равенство $A(z) = y$. Однако это противоречит неравенству $\|y - A(z)\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|A(x_{n_{m_k}}) - A(z)\| \geq \varepsilon_0$. Следовательно, последовательность $A(x_n)$ является сильно сходящейся к вектору $A(z)$. Заметим, что мы пока не пользовались рефлексивностью и сепарабельностью пространства X.

Предположим теперь, что линейный ограниченный оператор A всякую слабо сходящуюся последовательность из X переводит в сильно сходящуюся последовательность в Y. Рассмотрим образ единичного шара $A(B_1(0))$. Для любой последовательности y_n $A(B_1(0))$ существует последовательность $x_n \in B_1(0) \subset X$, такая, что $A(x_n) = y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как последовательность x_n ограничена в рефлексивном сепарабельном пространстве X, то по теореме 5.5.2 Банаха—Тихонова она содержит слабо сходящуюся подпоследовательность x_{n_m}. Следовательно, последовательность $A(x_{n_m})$ является сильно сходящейся. Таким образом, любая последовательность из множества $A(B_1(0))$ имеет сильно сходящуюся подпоследовательность. Если при этом множество $A(B_1(0))$ не является вполне ограниченным, то существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $y_n \in A(B_1(0))$, такие, что $\|y_n - y_m\| \geq \varepsilon_0$ при всех $n \neq m$. Следовательно, любая подпоследовательность последовательности y_n не является сильно фундаментальной, и поэтому не является сильно сходящейся. Полученное противоречие означает, что множество $A(B_1(0))$ является вполне ограниченным. Следовательно, в силу замечания 5.8.1 получаем компактность оператора A.

Задача 5.8.1. Пусть X — рефлексивное сепарабельное пространство. Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, \ell_1)$. Доказать, что A — компактный оператор.

Решение. Так как оператор A является линейным и ограниченным, то, как показано в доказательстве утверждения 5.8.6, он всякую слабо сходящуюся последовательность пространства X переводит в слабо сходящуюся последовательность пространства ℓ_1. В силу теоремы 5.4.1 Шура в пространстве ℓ_1 слабая и сильная сходимости эквивалентны. Следовательно, оператор A всякую слабо сходящуюся последовательность рефлексивного сепарабельного пространства X переводит в сильно сходящуюся последовательность пространства ℓ_1. В силу утверждения 5.8.6 это означает компактность оператора A.

Утверждение 5.8.7. *Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$, а комплексное число $\lambda \neq 0$. Тогда $\operatorname{Ker} A_\lambda$ конечномерно, а $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{Ker} A_\lambda$ — ограниченная последовательность. Тогда существует $R > 0$, такое, что $\|x_n\| \leq \leq R$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как в силу компактности оператора A множество $\left[A\left(B_R(0)\right)\right]$ компактно в X, то по теореме 2.2.1 оно является секвенциально компактным, поэтому последовательность $y_n = A(x_n) \in \left[A\left(B_R(0)\right)\right]$ имеет сходящуюся подпоследовательность $y_{n_k} \to z$ при $k \to \infty$. Но тогда получаем $x_{n_k} = \frac{y_{n_k}}{\lambda} \to \frac{z}{\lambda}$ при $k \to \infty$. Следовательно, любое ограниченное замкнутое подмножество из $\operatorname{Ker} A_\lambda$ является секвенциально компактным, а в силу теоремы 2.2.1 это равносильно компактности. Следовательно, по теореме 3.1.2 Рисса о некомпактности единичной сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве получаем, что $\dim \operatorname{Ker} A_\lambda = N < +\infty$.

Рассмотрим в конечномерном пространстве $\operatorname{Ker} A_\lambda$ произвольный базис $\{e_n\}_{n=1}^{N}$. Тогда для любого вектора $x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$ существуют единственные скаляры $\alpha_n(x) \in \mathbb{C}$, такие, что выполнено равенство $x = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n(x) e_n$. Очевидно, что $\alpha_n \colon \operatorname{Ker} A_\lambda \to \mathbb{C}$ является линейным функционалом для любого $n \in \overline{1, N}$, а функция $\|x\|_e = \sum\limits_{n=1}^{N} |\alpha_n(x)|$ является нормой в конечномерном пространстве $\operatorname{Ker} A_\lambda$. По теореме 3.1.1 все нормы в $\operatorname{Ker} A_\lambda$ эквивалентны. Поэтому существует число $C > 0$, такое, что для всех $x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$ выполнено неравенство $\|x\|_e \leq C\|x\|$. Тогда $|\alpha_n(x)| \leq C\|x\|$ для всех $x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$ и $n \in \overline{1, N}$. Следовательно, функционал α_n является непрерывным на $\operatorname{Ker} A_\lambda$ при каждом $n \in \overline{1, N}$. По следствию 5.1.1 теоремы Хана—Банаха для любого $n \in \overline{1, N}$ существует линейный функционал $f_n \in X^*$, такой, что $f = \alpha_n$ на $\operatorname{Ker} A_\lambda$. Определим замкнутое подпространство $M = \bigcap\limits_{n=1}^{N} \operatorname{Ker} f_n$. Тогда справедливо равенство

$$X = M \oplus \operatorname{Ker} A_\lambda.$$

Действительно, для любого вектора $x \in X$ определим вектор

$$y = \sum_{n=1}^{N} f_n(x) e_n \in \operatorname{Ker} A_\lambda.$$

Так как выполнены равенства $f_k(e_n) = \alpha_k(e_n) = 0$ при $k \neq n$, и $f_k(e_k) = 1$, то для любого $k \in \overline{1,N}$ получаем

$$f_k(x-y) = f_k(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) f_k(e_n) = f_k(x) - f_k(x) = 0.$$

Следовательно, $x - y \in M$, т. е. справедливо равенство $X = M + {}$ $+ \operatorname{Ker} A_\lambda$. Покажем, что сумма прямая, т. е. $M \cap \operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$. Действительно, если $x \in M \cap \operatorname{Ker} A_\lambda$, то $f_n(x) = \alpha_n(x) = 0$ для любого $n \in \overline{1,N}$, т. е. выполнено $x = 0$.

Теперь докажем, что $\operatorname{Im} A_\lambda$ — замкнутое подпространство. Ясно, что $\operatorname{Im} A_\lambda = A_\lambda(M)$. Покажем, что оператор A_λ ограничен снизу на M, т. е. существует число $L > 0$, такое, что для всех $x \in M$ выполнено неравенство $\|A_\lambda(x)\| \geq L\|x\|$. Предположим, рассуждая от противного, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_n \in M$, такой, что $\|A_\lambda(x_n)\| < \frac{\|x_n\|}{n}$. Тогда $x_n \neq 0$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Определим вектор $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \in M$ вида $\|z_n\| = 1$. Тогда $\|A_\lambda(z_n)\| < \frac{1}{n}$. Так как последовательность z_n ограничена, то в силу компактности оператора A последовательность $A(z_n)$ имеет сходящуюся подпоследовательность $A(z_{n_k}) \to u \in X$. Так как $A_\lambda(z_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то получаем, что $z_{n_k} = \frac{A(z_{n_k}) - A_\lambda(z_{n_k})}{\lambda} \to \frac{u}{\lambda} = v \in M$ при $k \to \infty$, причём выполнено равенство $\|v\| = 1$. Но тогда $\|A_\lambda(v)\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|A_\lambda(z_{n_k})\| = {}$ $= 0$, т. е. $A_\lambda(v) = 0$. Следовательно, выполнено включение $v \in M \cap{}$ $\cap \operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$, т. е. $v = 0$, что противоречит равенству $\|v\| = 1$. Итак, оператор A_λ является ограниченным снизу на M. Следовательно, в силу утверждения 3.5.4 оператор A_λ является непрерывно обратимым на M и по утверждению 3.5.5 его образ $A_\lambda(M) = \operatorname{Im} A_\lambda$ замкнут в X, что и требовалось.

Пример 5.8.2. Приведём пример оператора $A \in \mathcal{L}(X)$, у которого для некоторого скаляра $\lambda \neq 0$ ядро $\operatorname{Ker} A_\lambda$ бесконечномерно, а образ $\operatorname{Im} A_\lambda$ незамкнут. Пусть $X = C[0,2]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,2]$ вещественных функций x с нормой равномерной сходимости $\|x\|_c = \max\limits_{t\in[0,2]} |x(t)|$. Рассмотрим линейный оператор

$T\colon C[0,2] \to C[0,2]$ вида

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau, & t \in [0,1], \\ \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\|T\| \le 2$, т. е. T является непрерывным оператором. Тогда $x \in \operatorname{Ker} T$ тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau = 0$ и $x(t) = 0$ при всех $t \in [1,2]$. Следовательно, ядро $\operatorname{Ker} T$ бесконечномерно. Образ $\operatorname{Im} T$ состоит из всех непрерывных на отрезке $[0,2]$ функций, постоянных на отрезке $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемых на отрезке $[1,2]$. Тогда замыкание $[\operatorname{Im} T]$ будет совпадать с множеством $S \subset C[0,2]$, состоящим из всех непрерывных на отрезке $[0,2]$ функций, постоянных на отрезке $[0,1]$. Действительно, включение $[\operatorname{Im} T] \subset S$ очевидно, покажем обратное включение. Рассмотрим произвольную функцию $x \in S$. По теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P_ε, такой, что $|x(t) - P_\varepsilon(t)| \le \varepsilon$ при всех $t \in [1,2]$. Так как $x(t) = x(1)$ при всех $t \in [0,1]$, то $|x(t) - P_\varepsilon(1)| \le \varepsilon$ при $t \in [0,1]$. Определим функцию $z_\varepsilon \in C[0,2]$ вида

$$z_\varepsilon(t) = P'_\varepsilon(t) + \begin{cases} 2(1-t)P_\varepsilon(0), & t \in [0,1], \\ 0, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Тогда получаем $\int\limits_0^1 z_\varepsilon(\tau)\,d\tau = P_\varepsilon(0) + P_\varepsilon(1) - P_\varepsilon(0) = P_\varepsilon(1)$, а для любого $t \in [1,2]$ имеем равенство $\int\limits_0^t z_\varepsilon(\tau)\,d\tau = P_\varepsilon(1) + \int\limits_1^t P'_\varepsilon(\tau)\,d\tau = P_\varepsilon(t)$. Следовательно, получаем $\|x - T(z_\varepsilon)\|_c \le \varepsilon$, что означает включение $S \subset [\operatorname{Im} T]$. Таким образом, доказано равенство $[\operatorname{Im} T] = S$. При этом очевидно неравенство $S \ne \operatorname{Im} T$, так как в множестве S имеются недифференцируемые на отрезке $[1,2]$ функции. Тогда искомый оператор $A = T + I$ и число $\lambda = 1$, т. е. $A_\lambda = T$.

Утверждение 5.8.8. *Линейный оператор A является компактным тогда и только тогда, когда компактен сопряжённый оператор A^*.*

Доказательство. Пусть линейный оператор A является компактным. Тогда множество $K = \left[A\left(B_1(0)\right)\right]$ является компактом в Y. Для доказательства компактности оператора A^* покажем, что для любой последовательности $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y^*$ вида $\|g_n\| \leq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$ существует сходящаяся подпоследовательность $A^*(g_{n_k}) \in$ $\in X^*$. В пространстве $C(K)$ рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(K)$ вида $\varphi_n(y) = g_n(y)$ для всех $y \in K$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ получаем неравенства

$$\|\varphi_n\|_c = \sup_{y\in K} |g_n(y)| = \sup_{x\in B_1(0)} \left|g_n\left(A(x)\right)\right| =$$
$$= \sup_{x\in B_1(0)} \left|(A^*g_n)(x)\right| = \|A^*g_n\| \leq \|A^*\|.$$

Следовательно, последовательность φ_n является ограниченной в пространстве $C(K)$. Для любых векторов $y, z \in K$ и номера $n \in \mathbb{N}$ получаем неравенство

$$|\varphi_n(y) - \varphi_n(z)| = |g_n(y - z)| \leq \|g_n\| \, \|y - z\| \leq \|y - z\|.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, такое, что для любых векторов $y, z \in K$ вида $\|y - z\| \leq \delta(\varepsilon)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|\varphi_n(y) - \varphi_n(z)| \leq \varepsilon$. Поэтому множество $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является равностепенно непрерывным и ограниченным в пространстве $C(K)$. Тогда по теореме 2.2.4 Арцелла—Асколи множество $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является вполне ограниченным в пространстве $C(K)$. Следовательно, последовательность φ_n имеет равномерно сходящуюся на K подпоследовательность φ_{n_k}, т. е. $\|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_m}\|_c \to 0$ при $k, m \to \infty$. Получаем

$$\left\|A^*(g_{n_k}) - A^*(g_{n_m})\right\| = \sup_{x\in B_1(0)} \left|\left(A^*(g_{n_k} - g_{n_m})\right)(x)\right| =$$
$$= \sup_{x\in B_1(0)} \left|(g_{n_k} - g_{n_m})\left(A(x)\right)\right| = \sup_{y\in K} \left|g_{n_k}(y) - g_{n_m}(y)\right| =$$
$$= \|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_m}\|_c \to 0 \quad \text{при} \quad k, m \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $A^*(g_{n_k})$ является фундаментальной и поэтому сходящейся в пространстве X^*. Таким образом, оператор A^* является компактным.

Пусть теперь оператор A^* является компактным. Тогда компактным является оператор A^{**}. Рассмотрим линейные изометрические отображения $F: X \to X^{**}$ и $H: Y \to Y^{**}$ вида $(Fx)(f) = f(x)$ и $(Hy)(g) = g(y)$ при всех $x \in X$, $f \in X^*$, $y \in Y$, $g \in Y^*$. Тогда для всех $x \in X$ и $g \in Y^*$ получаем

$$\Big(H(Ax)\Big)(g) = g(Ax) = (A^*g)(x) = (Fx)(A^*g) = (A^{**}Fx)(g).$$

Следовательно, справедливо равенство $HA = A^{**}F$. Так как отображение F — изометрия, то выполнено включение $F\Big(B_1(0)\Big) \subset$ $\subset B_1^{**}(0)$ — единичный шар в пространстве X^{**}. Отсюда получаем $A^{**}F\Big(B_1(0)\Big) \subset A^{**}\Big(B_1^{**}(0)\Big)$ — вполне ограниченное множество в пространстве Y^{**} в силу компактности оператора A^{**}. Тогда множество $HA\Big(B_1(0)\Big)$ является вполне ограниченным в Y^{**}. Так как отображение H — изометрия, то множество $A\Big(B_1(0)\Big)$ является вполне ограниченным в пространстве Y. Таким образом, оператор A является компактным.

Следствие 5.8.1 (*Фредгольм*). *Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда для любого скаляра $\lambda \neq 0$ справедливо равенство*

$$\operatorname{Im} A_\lambda = {}^\perp(\operatorname{Ker} A_\lambda^*)\,.$$

Если пространство X рефлексивно, то справедливо равенство

$$\operatorname{Im} A_\lambda^* = (\operatorname{Ker} A_\lambda)^\perp\,.$$

Доказательство. В силу следствия 5.6.1 и утверждения 5.8.7 получаем равенства

$$\operatorname{Im} A_\lambda = [\operatorname{Im} A_\lambda] = {}^\perp(\operatorname{Ker} A_\lambda^*)\,,$$

а для рефлексивного пространства X получаем равенства

$$\operatorname{Im} A_\lambda^* = [\operatorname{Im} A_\lambda^*] = (\operatorname{Ker} A_\lambda)^\perp\,.$$

Задача 5.8.2. Пусть Y — рефлексивное сепарабельное пространство. Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{L}(c_0, Y)$. Доказать, что A — компактный оператор.

Решение. В силу утверждения 5.2.5 имеет место равенство $(c_0)^* = \ell_1$. Следовательно, сопряжённый оператор $A^*: Y^* \to \ell_1$. Заметим, что в силу рефлексивности пространства Y имеет место рефлексивность сопряжённого пространства Y^*. Так как пространство Y ещё и сепарабельно, то изометричное ему пространство Y^{**} тоже является сепарабельным. Тогда в силу утверждения 5.2.11 получаем сепарабельность пространства Y^*. Следовательно, в силу утверждения задачи 5.8.1 получаем компактность сопряжённого оператора A^*. Отсюда в силу утверждения 5.8.8 получаем компактность оператора A.

Утверждение 5.8.9. *Пусть оператор $A \in \mathcal{K}(X)$, а нетривиальный скаляр $\lambda \in \sigma_p(A)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\operatorname{Im} A_\lambda \neq X.$$

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что $\operatorname{Im} A_\lambda = X$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим замкнутое подпространство $M_n = \operatorname{Ker}(A_\lambda)^n$. Так как $\lambda \in \sigma_p(A)$, то $\operatorname{Ker} A_\lambda = M_1 \neq \{0\}$. Следовательно, существует нетривиальный вектор $x_1 \in M_1$. Так как $\operatorname{Im} A_\lambda = X$, то существует вектор $x_2 \in X$, такой, что $A_\lambda(x_2) = x_1 \neq 0$, т. е. $x_2 \notin M_1$, но $(A_\lambda)^2(x_2) = A_\lambda(x_1) = 0$, т. е. $x_2 \in M_2$. Отсюда, в частности, следует, что $M_1 \subsetneq M_2$. Предположим, рассуждая по индукции, что для номера $n \geq 2$ и любого $m \in \overline{1, n}$ определены нетривиальные векторы $x_m \in M_m$ вида $A_\lambda(x_k) = x_{k-1}$ для всех $k \in \overline{2, m}$. Так как $\operatorname{Im} A_\lambda = X$, то существует вектор $x_{n+1} \in X$, такой, что $A_\lambda(x_{n+1}) = x_n \in M_n$. Следовательно, $(A_\lambda)^n(x_{n+1}) = x_1 \neq 0$, т. е. $x_{n+1} \notin M_n$, а $(A_\lambda)^{n+1}(x_{n+1}) = A_\lambda(x_1) = 0$, т. е. $x_{n+1} \in M_{n+1}$. Следовательно, справедливо неравенство $M_n \neq M_{n+1}$, а включение $M_n \subset M_{n+1}$ очевидно. При каждом $n \in \mathbb{N}$ для любого вектора $x \in M_{n+1}$ получаем равенство $(A_\lambda)^n \Big(A_\lambda(x)\Big) = (A_\lambda)^{n+1}(x) = 0$, т. е. $A_\lambda(x) \in M_n$. Следовательно, справедливо включение $A_\lambda(M_{n+1}) \subset M_n$. Для любого вектора $x \in M_n$ получаем $(A_\lambda)^n(Ax) = A\Big((A_\lambda)^n(x)\Big) = 0$, т. е. $A(x) \in M_n$. Следовательно, справедливо включение $A(M_n) \subset M_n$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ применим лемму 3.1.1 Рисса о почти перпендикуляре в линейном нормированном пространстве M_{n+1} для его собственного замкнутого подпространства M_n. Получаем, что существует вектор $z_n \in M_{n+1}$, такой, что $\|z_n\| = 1$ и $\rho(z_n, M_n) \geq \frac{1}{2}$.

Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$ вида $m < n$ получаем, что $A(z_m) \in \in A(M_{m+1}) \subset M_{m+1} \subset M_n$, $A_\lambda(z_n) \in A_\lambda(M_{n+1}) \subset M_n$, следовательно, вектор $w = A(z_m) - A_\lambda(z_n) \in M_n$. Тогда получаем

$$\|A(z_n) - A(z_m)\| = \|\lambda z_n - w\| \geq |\lambda|\, \rho(z_n, M_n) \geq \tfrac{|\lambda|}{2}.$$

Следовательно, последовательность $A(z_n)$ не имеет фундаментальной подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A.

Пример 5.8.3. Приведём пример оператора $A \in \mathcal{L}(X)$, у которого для некоторого скаляра $\lambda \neq 0$ выполнены соотношения

$$\operatorname{Ker} A_\lambda \neq \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A_\lambda = X.$$

Рассмотрим линейный оператор $T\colon \ell_1 \to \ell_1$ вида $(Tx)(k) = x(k+1)$ для всех $x \in \ell_1$ и $k \in \mathbb{N}$. Имеем $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Lin}\{e_1\} \neq \{0\}$, а $\operatorname{Im} T = \ell_1$. Тогда искомый оператор $A = T + I$ и число $\lambda = 1$, т. е. $A_\lambda = T$.

Утверждение 5.8.10. *Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда для любого $\delta > 0$ множество $\Lambda_\delta = \Big\{ \lambda \in \sigma_p(A) \;\Big|\; |\lambda| \geq \delta \Big\}$ конечно (быть может, пусто).*

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что множество Λ_δ бесконечно для некоторого $\delta > 0$. Тогда оно содержит счётное подмножество $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty \subset \Lambda_\delta$ различных собственных чисел оператора A. Пусть $x_m \in X$ — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному числу λ_m. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы, как собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным числам. Для любого $n \in N$ определим конечномерное (и поэтому замкнутое) подпространство $M_n = \operatorname{Lin}\{x_m\}_{m=1}^n$. Тогда $M_n \subset M_{n+1}$, $M_n \neq M_{n+1}$, $A(M_n) \subset M_n$ и $A_{\lambda_{n+1}}(M_{n+1}) \subset M_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ применим лемму 3.1.1 Рисса о почти перпендикуляре в линейном нормированном пространстве M_{n+1} для его собственного замкнутого подпространства M_n. Получаем, что существует вектор $z_n \in M_{n+1}$, такой, что $\|z_n\| = 1$ и $\rho(z_n, M_n) \geq \frac{1}{2}$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$ вида $m < n$ получаем, что $A(z_m) \in \in A(M_{m+1}) \subset M_{m+1} \subset M_n$, $A_{\lambda_{n+1}}(z_n) \in A_{\lambda_{n+1}}(M_{n+1}) \subset M_n$, следовательно, вектор $w = A(z_m) - A_{\lambda_{n+1}}(z_n) \in M_n$. Тогда получаем

$$\|A(z_n) - A(z_m)\| = \|\lambda_{n+1} z_n - w\| \geq |\lambda_{n+1}|\, \rho(z_n, M_n) \geq \tfrac{\delta}{2}.$$

Поэтому последовательность $A(z_n)$ не имеет фундаментальной подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A.

Следствие 5.8.2. *Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда точечный спектр $\sigma_p(A)$ является не более чем счётным (быть может, пустым) множеством.*

Доказательство. Справедливо равенство

$$\sigma_p(A)\backslash\{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{\frac{1}{n}},$$

а множество $\Lambda_{\frac{1}{n}}$ конечно или пусто для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, множество $\sigma_p(A)\backslash\{0\}$ не более чем счётно как счётное объединение конечных или пустых множеств. Тогда и $\sigma_p(A)$ не более чем счётно.

Утверждение 5.8.11. *Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда для любого комплексного числа $\lambda \neq 0$ имеет место равенство* $\dim \operatorname{Ker} A_\lambda = \dim \operatorname{Ker} A_\lambda^*$.

Доказательство. Доказательство проведём для $X = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Для доказательства общего случая см. теорему 4.25 из [2, ч. I, гл. 4, с. 123].

По утверждению 5.8.8 оператор $A^* \in \mathcal{K}(X^*)$. В силу утверждения 5.8.7 справедливы неравенства $\dim \operatorname{Ker} A_\lambda < +\infty$ и $\dim \operatorname{Ker} A_\lambda^* < +\infty$, а подпространства $\operatorname{Im} A_\lambda$ и $\operatorname{Im} A_\lambda^*$ замкнуты. По теореме 5.6.1 Фредгольма имеем равенства $\operatorname{Ker} A_\lambda = {}^\perp(\operatorname{Im} A_\lambda^*)$ и $\operatorname{Ker} A_\lambda^* = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$. Обозначим

$$m = \dim \operatorname{Ker} A_\lambda, \quad n = \dim \left((\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp\right),$$

$$m^* = \dim \operatorname{Ker} A_\lambda^*, \quad n^* = \dim \left({}^\perp(\operatorname{Im} A_\lambda^*)\right).$$

Тогда $m = n^*$ и $m^* = n$. Если для оператора A доказать неравенство $m \leq n$, то аналогичными рассуждениями для оператора A^* будем иметь неравенство $m^* \leq n^*$. Следовательно, получим $m^* \leq n^* = m \leq n = m^*$, т. е. $m = m^*$, что и требуется. Предположим, рассуждая от противного, что $m > n$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим ортогональные дополнения

$$M = (\operatorname{Ker} A_\lambda)^\perp \subset \mathcal{H}, \quad N = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp \subset \mathcal{H}.$$

Тогда по теореме 3.2.2 Рисса об ортогональном дополнении справедливы равенства

$$\mathcal{H} = \operatorname{Ker} A_\lambda \oplus M, \quad \mathcal{H} = \operatorname{Im} A_\lambda \oplus N.$$

По предположению имеем $n = \dim N < m = \dim \operatorname{Ker} A_\lambda$. Тогда существует линейный оператор $F\colon \operatorname{Ker} A_\lambda \to N$, такой, что $\operatorname{Ker} F \neq \{0\}$ и $\operatorname{Im} F = N$. В силу конечномерности $\operatorname{Ker} A_\lambda$ по утверждению 3.4.4 оператор F является непрерывным, а в силу конечномерности N по утверждению 5.8.1 оператор F является компактным. Рассмотрим линейный непрерывный оператор P проектирования из $\mathcal{H}$ на $\operatorname{Ker} A_\lambda$, т. е. $P\colon \mathcal{H} \to \operatorname{Ker} A_\lambda$ и $x - P(x) \in M$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Определим линейный оператор $\Phi = A + FP \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Он является компактным в силу компактности оператора A и компактности оператора FP по утверждению 5.8.5. Заметим, что $\Phi_\lambda = A_\lambda + FP$. По определению оператора F существует нетривиальный вектор $x_0 \in \operatorname{Ker} A_\lambda$, такой, что $F(x_0) = 0$. При этом в силу включения $x_0 \in \operatorname{Ker} A_\lambda$ по определению проектора P выполнено равенство $P(x_0) = x_0$. Тогда $\Phi_\lambda(x_0) = A_\lambda(x_0) + F(x_0) = 0$, т. е. $x_0 \in \operatorname{Ker} \Phi_\lambda$. Следовательно, $\lambda \in \sigma_p(\Phi)$. Поэтому по утверждению 5.8.9 получаем неравенство $\operatorname{Im} \Phi_\lambda \neq \mathcal{H}$. С другой стороны, имеем равенства $P(\operatorname{Ker} A_\lambda) = \operatorname{Ker} A_\lambda$, $\Phi_\lambda(\operatorname{Ker} A_\lambda) = FP(\operatorname{Ker} A_\lambda) = F(\operatorname{Ker} A_\lambda) = N$, $P(M) = \{0\}$, $A_\lambda(M) = A_\lambda(M + \operatorname{Ker} A_\lambda) = A_\lambda(\mathcal{H}) = \operatorname{Im} A_\lambda$. Следовательно, получаем

$$\operatorname{Im} \Phi_\lambda = \Phi_\lambda(\mathcal{H}) = \Phi_\lambda(M + \operatorname{Ker} A_\lambda) = \\ = A_\lambda(M) + FP(M) + \Phi_\lambda(\operatorname{Ker} A_\lambda) = \operatorname{Im} A_\lambda + N = \mathcal{H},$$

т. е. получили противоречие.

Теорема 5.8.1. *Пусть оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда любой нетривиальный элемент спектра оператора A является собственным значением оператора A, т. е. $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$. Спектр оператора A не более чем счётен и не имеет предельных точек, кроме, быть может, точки ноль.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$. Если предположить, что $\lambda \notin \sigma_p(A)$, то $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$. Так как по утверждению 5.8.11 имеем $\dim \operatorname{Ker} A_\lambda = 0 = \dim \operatorname{Ker} A^*_\lambda$, то $\operatorname{Ker} A^*_\lambda = \{0\}$. Тогда по следствию 5.8.1 получаем $\operatorname{Im} A_\lambda = {}^\perp(\{0\}) = X$. Следовательно, в силу замечания 5.7.3 получаем $\lambda \in \rho(A)$ — противоречие. Таким образом, справедливо включение $\lambda \in \sigma_p(A)$. Следовательно, доказано равенство $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$. По следствию 5.8.2 получаем, что спектр $\sigma(A)$ не более чем счётен. По утверждению 5.8.10 получаем, что любое нетривиальное собственное значение оператора A является изолированной точкой спектра $\sigma(A)$. Поэтому если спектр $\sigma(A)$ счётен, то его единственной предельной точкой может быть только ноль.

Замечание 5.8.3. Пусть X является бесконечномерным пространством, а линейный оператор $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда $0 \in \sigma(A)$. Действительно, если предположить противное, то получим $\operatorname{Im} A = X$. Тогда подпространство $\operatorname{Im} A$ замкнуто в X. Поэтому в силу утверждения 5.8.2 получаем, что $\operatorname{Im} A = X$ конечномерно. Это противоречит бесконечномерности пространства X.

5.9. Самосопряжённый оператор

В этом параграфе рассматриваются гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. В силу теоремы 5.3.1 Рисса—Фреше будем отождествлять пространства $\mathcal{H}^*$ и $\mathcal{H}$. Тогда для любого подпространства $L \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^*$ имеем $L^{\perp} = {}^{\perp}L$ — ортогональное дополнение подпространства L в $\mathcal{H}$ (см. определение 3.2.6). По замечанию 5.6.2 рассматриваем сопряжённый оператор $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ вида $(Ax, y) = (x, A^*y)$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$. При этом операция сопряжения линейного ограниченного оператора в $\mathcal{H}$ является сопряжённолинейной (см. замечание 5.6.2).

Определение 5.9.1. *Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется самосопряжённым, если $A = A^*$, т. е. $(A(x), y) = (x, A(y))$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$.*

Теорема 5.9.1 (*Хеллингер, Теплиц*)**.** *Пусть линейный оператор $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является симметричным, т. е. для всех $x, y \in \mathcal{H}$ справедливо равенство $(T(x), y) = (x, T(y))$. Тогда $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, и поэтому T является самосопряжённым оператором.*

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что $\|T\| = +\infty$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$, такая, что $\|x_n\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и справедливо соотношение

$\|T(x_n)\| \to +\infty$ при $n \to \infty$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функционал $f_n \in \mathcal{H}^*$ следующего вида:

$$f_n(y) = \left(y, \frac{T(x_n)}{\sqrt{\|T(x_n)\|}} \right) \quad \forall\, y \in \mathcal{H}.$$

Тогда по теореме 5.3.1 Рисса—Фреше имеем $\|f_n\| = \left\| \frac{T(x_n)}{\sqrt{\|T(x_n)\|}} \right\| = \sqrt{\|T(x_n)\|} \to +\infty$ при $n \to \infty$, а в силу симметричности оператора T для каждого вектора $y \in \mathcal{H}$ получаем

$$|f_n(y)| = \frac{|(T(y), x_n)|}{\sqrt{\|T(x_n)\|}} \leq \frac{\|T(y)\|}{\sqrt{\|T(x_n)\|}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность функционалов f_n является поточечно ограниченной в $\mathcal{H}$, поэтому по теореме 3.4.2 Банаха—Штейнгауза она является ограниченной в $\mathcal{H}^*$. Тогда существует $M > 0$, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\|f_n\| = \sqrt{\|T(x_n)\|} \leq \leq M$, т. е. получили противоречие.

Далее в этом параграфе рассматриваем самосопряжённый оператор A.

Утверждение 5.9.1. *Справедливы следующие свойства:*

1) $(A(x), x) \in \mathbb{R}$ *для любого* $x \in \mathcal{H}$;

2) *точечный спектр оператора* A *вещественен, т. е.* $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$;

3) *для любых двух различных собственных чисел оператора* A *любые соответствующие им собственные векторы ортогональны;*

4) $\|A^n\| = \|A\|^n$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, $r(A) = \|A\|$.

Доказательство. Свойство 1 следует из равенств

$$(A(x), x) = (x, A(x)) = \overline{(A(x), x)},$$

т. е. мнимая часть $\operatorname{Im}(A(x), x) = 0$. Рассмотрим произвольное собственное число $\lambda \in \sigma_p(A)$ оператора A. Пусть $x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$ — собственный вектор A, соответствующий λ. Тогда получаем равенства $(A(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2$. Следовательно, в силу свойства 1 получаем $\lambda = \frac{(A(x),x)}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, т. е. свойство 2 доказано. Рассмотрим теперь два различных собственных числа

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ оператора A. Пусть $x_1 \in \operatorname{Ker} A_{\lambda_1}$ и $x_2 \in \operatorname{Ker} A_{\lambda_2}$ — соответствующие им собственные векторы. Тогда получаем

$$\lambda_1(x_1, x_2) = (A(x_1), x_2) = (x_1, A(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2).$$

Следовательно, $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$. Так как $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то получаем $(x_1, x_2) = 0$, т. е. свойство 3 доказано. Далее, по определению операторной нормы очевидно неравенство $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и для всех $k \in \overline{1, m}$ справедливо равенство $\|A^k\| = \|A\|^k$ (для $m = 1$ это верно). Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ вида $\|x\| = 1$ получаем

$$\|A^m(x)\|^2 = \Big(A^m(x), A^m(x)\Big) = \Big(A^{m+1}(x), A^{m-1}(x)\Big) \leq$$
$$\leq \|A^{m+1}(x)\| \, \|A^{m-1}(x)\| \leq \|A^{m+1}\| \, \|A^{m-1}\| = \|A^{m+1}\| \, \|A\|^{m-1}.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\|A\|^{2m} = \|A^m\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|A^m(x)\|^2 \leq \|A^{m+1}\| \, \|A\|^{m-1}.$$

Отсюда получаем $\|A\|^{m+1} \leq \|A^{m+1}\|$, т. е. справедливо равенство $\|A\|^{m+1} = \|A^{m+1}\|$, что и требовалось. Наконец, спектральный радиус $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \|A\|$, т. е. свойство 4 доказано.

П р и м е р 5.9.1. Приведём пример самосопряжённого оператора A с пустым точечным спектром. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2\Big([0,1]\Big)$ и линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ вида

$$(Ax)(t) = tx(t) \text{ для п. в. } t \in [0,1] \quad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Так как для всех $x, y \in \mathcal{H}$ справедливо равенство

$$(A(x), y) = \int\limits_{[0,1]} t\, x(t)\, \overline{y(t)}\, d\mu = \int\limits_{[0,1]} x(t)\, \overline{t\, y(t)}\, d\mu = (x, A(y)),$$

то оператор A является самосопряжённым. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим $x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$. Тогда для п. в. $t \in [0,1]$ имеем $(t - \lambda)x(t) = 0$. Так как $t - \lambda \neq 0$ для п. в. $t \in [0,1]$, то получаем $x(t) = 0$ для п. в. $t \in [0,1]$. Следовательно, $x = 0$ в $\mathcal{H}$, т. е. $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Следовательно, $\sigma_p(A) = \varnothing$, что и требовалось.

Утверждение 5.9.2. *Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\operatorname{Ker} A_\lambda \oplus [\operatorname{Im} A_\lambda] = \mathcal{H}.$$

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем $(A_\lambda)^* = A^* - \overline{\lambda} I^* = A - \overline{\lambda} I = A_{\overline{\lambda}}$. Следовательно, по следствию 5.6.1 теоремы Фредгольма получаем $\left(\operatorname{Ker} A_{\overline{\lambda}}\right)^\perp = [\operatorname{Im} A_\lambda]$. Следовательно, по теореме 3.2.2 об ортогональном дополнении получаем равенство

$$\operatorname{Ker} A_{\overline{\lambda}} \oplus [\operatorname{Im} A_\lambda] = \mathcal{H}.$$

Если мнимая часть числа λ нетривиальна, то по свойству 2 утверждения 5.9.1 получаем соотношения $\lambda \notin \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$ и $\overline{\lambda} \notin \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$. Следовательно, $\operatorname{Ker} A_\lambda = \operatorname{Ker} A_{\overline{\lambda}} = \{0\}$. Если же $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda = \overline{\lambda}$, и поэтому $\operatorname{Ker} A_\lambda = \operatorname{Ker} A_{\overline{\lambda}}$. Следовательно, получаем требуемое равенство

$$\operatorname{Ker} A_\lambda \oplus [\operatorname{Im} A_\lambda] = \mathcal{H}.$$

Утверждение 5.9.3. *Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ с нетривиальной мнимой частью $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ справедливы включение $\lambda \in \rho(A)$ и оценка для нормы резольвенты $\|R_A(\lambda)\| \le \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda = \mu + i\nu$, где $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, причём $\nu \neq 0$. Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ получаем

$$\|A_\lambda(x)\|^2 = (A_\mu(x) - i\nu x, A_\mu(x) - i\nu x) = \\ = \|A_\mu(x)\|^2 - i\nu(x, A_\mu(x)) + i\nu(A_\mu(x), x) + \nu^2\|x\|^2.$$

Так как $\mu \in \mathbb{R}$, то имеем равенство $(A_\mu)^* = A_\mu$. Поэтому $(x, A_\mu(x)) = (A_\mu(x), x)$. Следовательно, получаем

$$\|A_\lambda(x)\|^2 = \|A_\mu(x)\|^2 + \nu^2\|x\|^2 \ge \nu^2\|x\|^2.$$

Таким образом, для любого $x \in \mathcal{H}$ справедливо неравенство

$$\|A_\lambda(x)\| \ge |\nu| \, \|x\|,$$

т. е. оператор A_λ ограничен снизу на $\mathcal{H}$. Тогда в силу утверждения 3.5.4 получаем, что оператор A_λ непрерывно обратим, т. е. существует обратный оператор $(A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A_\lambda, \mathcal{H})$. При этом в силу утвержения 3.5.5 образ оператора A_λ является замкнутым. Но тогда в силу $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ и утверждения 5.9.2 получаем равенство $\operatorname{Im} A_\lambda = \mathcal{H}$. Поэтому $(A_\lambda)^{-1} = R_A(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т. е. справедливо включение $\lambda \in \rho(A)$. При этом для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$\|R_A(\lambda)x\| \leq \frac{\|A_\lambda R_A(\lambda)(x)\|}{|\nu|} = \frac{\|x\|}{|\nu|},$$

т. е. справедливо неравенство $\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\nu|}$, что и требовалось.

Следствие 5.9.1. *Спектр самосопряжённого оператора вещественен, т. е. справедливо включение $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения спектра $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ и утверждения 5.9.3.

Утверждение 5.9.4. *Число $\lambda \in \rho(A)$ тогда и только тогда, когда оператор A_λ является ограниченным снизу на $\mathcal{H}$, т. е. существует число $L > 0$, такое, что для всех $x \in \mathcal{H}$ выполнено неравенство $\|A_\lambda(x)\| \geq L\|x\|$.*

Доказательство. Необходимость условия ограниченности снизу оператора A_λ на $\mathcal{H}$ для выполнения включения $\lambda \in \rho(A)$ сразу следует из утверждения 3.5.4, при этом $L = \frac{1}{\|R_\lambda(A)\|}$. Докажем достаточность. Пусть оператор A_λ является ограниченным снизу на $\mathcal{H}$. Тогда в силу утверждения 3.5.4 получаем, что оператор A_λ непрерывно обратим, т. е. существует обратный оператор $(A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A_\lambda, \mathcal{H})$. При этом в силу утверждения 3.5.5 образ оператора A_λ является замкнутым. Но тогда в силу $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ и утверждения 5.9.2 получаем равенство $\operatorname{Im} A_\lambda = \mathcal{H}$. Следовательно, $(A_\lambda)^{-1} = R_A(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т. е. справедливо включение $\lambda \in \rho(A)$, что и требовалось.

Следствие 5.9.2. *Число $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность векторов $x_n \in \mathcal{H}$ вида $\|x_n\| = 1$, таких, что $\|A_\lambda(x_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Включение $\lambda \in \sigma(A)$ равносильно соотношению $\lambda \notin \rho(A)$, которое в силу утверждения 5.9.4 выполняется тогда и только тогда, когда оператор A_λ не является ограниченным снизу на $\mathcal{H}$. Это в свою очередь равносильно тому, что для любого

$n \in \mathbb{N}$ существует вектор $z_n \in \mathcal{H}$, такой, что выполнено неравенство $\|A_\lambda(z_n)\| < \frac{\|z_n\|}{n}$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $z_n \neq 0$. Определим единичный вектор $x_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$. Получаем $\|A_\lambda(x_n)\| < \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось.

Утверждение 5.9.5. *Определим вещественные числа*

$$m_- = \inf_{\|x\|=1}(A(x), x), \quad m_+ = \sup_{\|x\|=1}(A(x), x).$$

Тогда справедливо включение $\sigma(A) \subset [m_-, m_+]$, причём $m_\pm \in \sigma(A)$.

Доказательство. По определению чисел $m_\pm$ для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ справедливы неравенства $m_-\|x\|^2 \leq (A(x), x) \leq$ $\leq m_+\|x\|^2$. Тогда для любого вещественного числа $\lambda > m_+$ и любого $x \in \mathcal{H}$ получаем

$$(\lambda - m_+)\|x\|^2 \leq (\lambda x, x) - (A(x), x) = -(A_\lambda(x), x) \leq \|A_\lambda(x)\|\,\|x\|,$$

т. е. справедливо неравенство $(\lambda - m_+)\|x\| \leq \|A_\lambda(x)\|$. Следовательно, оператор A_λ ограничен снизу на $\mathcal{H}$, и в силу утверждения 5.9.4 получаем включение $\lambda \in \rho(A)$. Аналогично для любого вещественного числа $\lambda < m_-$ и любого $x \in \mathcal{H}$ получаем

$$(m_- - \lambda)\|x\|^2 \leq (A(x), x) - (\lambda x, x) = (A_\lambda(x), x) \leq \|A_\lambda(x)\|\,\|x\|,$$

т. е. справедливо неравенство $(m_- - \lambda)\|x\| \leq \|A_\lambda(x)\|$. Следовательно, оператор A_λ ограничен снизу на $\mathcal{H}$, и в силу утверждения 5.9.4 получаем включение $\lambda \in \rho(A)$. Так как по следствию 5.9.1 спектр оператора A вещественен, то получаем включение $\sigma \subset [m_-, m_+]$.

Докажем, что $m_+ \in \sigma(A)$. В силу утверждения 5.9.2 для этого требуется найти последовательность векторов $x_n \in \mathcal{H}$ вида $\|x_n\| = 1$, таких, что $\|A_{m_+}(x_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$. По определению числа m_+ существует последовательность векторов $x_n \in \mathcal{H}$ вида $\|x_n\| = 1$, таких, что $(A(x_n), x_n) \to m_+$ при $n \to \infty$. Следовательно, $(A_{m_+}(x_n), x_n) \to$ $\to 0$ при $n \to \infty$. По определению числа m_+ для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ выполнено неравенство $(A_{m_+}(x), x) \leq 0$. Определим в $\mathcal{H}$ "полускалярное" произведение $\langle x, y\rangle = -(A_{m_+}(x), y)$ для любых $x, y \in$ $\in \mathcal{H}$. Тогда при всех $x \in \mathcal{H}$ выполнено неравенство $\langle x, x\rangle \geq 0$, а в силу равенства $(A_{m_+})^* = A_{m_+}$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$ получаем равенство $\langle x, y\rangle = -(x, (A_{m_+}(y))) = -\overline{(A_{m_+}(y), x)} = \overline{\langle y, x\rangle}$. Следовательно, для “полускалярного” произведения справедливо неравенство Коши—Буняковского. Действительно, для любых векторов $x, y \in \mathcal{H}$ и любого $t \in \mathbb{R}$ получаем неравенство

$$0 \leq \langle x - ty, x - ty\rangle = \langle x, x\rangle - 2t \operatorname{Re}\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle.$$

Следовательно, справедливо неравенство $\left(\operatorname{Re}\langle x, z\rangle\right)^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq \leq 0$. Записав комплексное число $\langle x, y\rangle$ в экспоненциальной форме $\langle x, y\rangle = e^{i\varphi}|\langle x, y\rangle|$, получим

$$|\langle x, y\rangle| = \langle x, e^{i\varphi}y\rangle = \operatorname{Re}\langle x, e^{i\varphi}y\rangle \leq \\ \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle e^{i\varphi}y, e^{i\varphi}y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle},$$

т. е. получаем неравенство Коши—Буняковского $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем соотношения

$$\|A_{m_+}(x_n)\|^2 = \Big(A_{m_+}(x_n), A_{m_+}(x_n)\Big) = -\Big\langle x_n, A_{m_+}(x_n)\Big\rangle \leq \\ \leq \Big|\Big\langle x_n, A_{m_+}(x_n)\Big\rangle\Big| \leq \langle x_n, x_n\rangle \Big\langle A_{m_+}(x_n), A_{m_+}(x_n)\Big\rangle \leq \\ \leq \Big|\Big(A_{m_+}(x_n), x_n\Big)\Big| \, \|A_{m_+}\|^3 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, в силу утверждения 5.9.2 получаем требуемое включение $m_+ \in \sigma(A)$. Совершенно аналогично доказывается другое включение $m_- \in \sigma(A)$.

Следствие 5.9.3. *Справедливы равенства*

$$\|A\| = \max\Big\{|m_-|, |m_+|\Big\} = r(A).$$

Доказательство. По определению спектрального радиуса оператора A имеем равенство $r(A) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$. Так как по утверждению 5.9.5 выполнены включения $m_\pm \in \sigma(A)$, то имеет место неравенство $|m_\pm| \leq r(A)$. Тогда $\max\Big\{|m_-|, |m_+|\Big\} \leq r(A)$. С другой стороны, по тому же утверждению 5.9.5 в силу включения $\sigma \subset [m_-, m_+]$ для любого $\lambda \in \sigma(A)$ получаем неравенство $|\lambda| \leq \max\Big\{|m_-|, |m_+|\Big\}$. Следовательно, $r(A) \leq \max\Big\{|m_-|, |m_+|\Big\}$. Таким образом, справедливо равенство $\max\Big\{|m_-|, |m_+|\Big\} = r(A)$. В силу пункта 4 утверждения 5.9.1 имеем равенство $r(A) = \|A\|$. Отсюда получаем требуемые равенства

$$\max\Big\{|m_-|, |m_+|\Big\} = \|A\| = r(A).$$

С л е д с т в и е 5.9.4. *Пусть нетривиальный линейный оператор $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Тогда справедливы равенства*

$$\|T\| = \sqrt{r(T^*T)} = \sqrt{\max_{\lambda\in\sigma_p(T^*T)} |\lambda|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор T^*T является самосопряжённым. Поэтому по следствию 5.9.3 получаем равенства

$$r(T^*T) = \|T^*T\| = \max\Big\{ \Big|m_+(T^*T)\Big|, \Big|m_-(T^*T)\Big|\Big\} =$$
$$= \sup_{\|x\|=1} \Big|\Big(T^*T(x), x\Big)\Big| = \sup_{\|x\|=1} \Big|\Big(T(x), T(x)\Big)\Big| =$$
$$= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|^2 = \|T\|^2.$$

По теореме 5.8.8 и утверждению 5.8.5 оператор T^*T является компактным. Так как оператор $T \neq 0$, то имеем $r(T^*T) = \|T^*T\| = \|T\|^2 > 0$. Поэтому по теореме 5.8.1 получаем $\sigma_p(T^*T) \neq \varnothing$ и имеем равенство $r(T^*T) = \max\limits_{\lambda\in\sigma_p(T^*T)} |\lambda|$, что и требовалось.

П р и м е р 5.9.2. Рассмотрим линейный оператор Вольтерра:

$$A\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1],$$

который имеет вид

$$(Ax)(t) = \int\limits_{[0,t]} x(\tau)\, d\mu(\tau) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1] \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

Вычислим норму этого линейного оператора. Заметим, что оператор Вольтерра можно записать в виде $(Ax)(t) = \int\limits_{[0,1]} K(t,\tau)\, d\mu(\tau)$ для п. в. $t \in [0,1]$ и всех функций $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$, где функция $K \in \mathbb{L}_2\Big([0,1]^2\Big)$ имеет вид

$$K(t,\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le \tau \le t \le 1, \\ 0, & 0 \le t < \tau \le 1. \end{cases}$$

Следовательно, как показано в примере 5.8.1, оператор Вольтерра является компактным в $\mathbb{L}_2[0,1]$, т. е. справедливо включение $A \in \in \mathcal{K}\Big(\mathbb{L}_2[0,1]\Big)$. Для вычисления нормы оператора A воспользуемся следствием 5.9.4, согласно утверждению которого справедливо равенство

$$\|A\| = \sqrt{r\left(A^*A\right)} = \sqrt{\max_{\lambda \in \sigma_p(A^*A)} |\lambda|}.$$

Вычислим сопряжённый оператор $A^*\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$. Рассмотрим произвольные функции $x, y \in CL_2[0,1]$. Так как в силу утверждения 4.3.6 интегралы Римана и Лебега непрерывной функции совпадают, то получаем

$$(Ax, y) = \int_0^1 dt \left(\int_0^t x(\tau)\, d\tau\right) \overline{y(t)} = \int_0^1 d\tau\, x(\tau) \overline{\left(\int_\tau^1 y(t)\, dt\right)} = (x, A^*y).$$

Следовательно, для любой непрерывной функции $y \in CL_2[0,1]$ для п. в. $t \in [0,1]$ справедливо равенство

$$(A^*y)(t) = \int_t^1 y(\tau)\, d\tau = \int_{[t,1]} y(\tau)\, d\mu(\tau).$$

Так как пространство $CL_2[0,1]$ является всюду плотным в $\mathbb{L}_2[0,1]$, то для любого $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ существует последовательность $y_n \in CL_2[0,1]$, такая, что $\|x - y_n\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в силу непрерывности оператора A^* получаем $\|A^*x - A^*y_n\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Для любого $t \in [0,1]$ в силу неравенства Коши—Буняковского имеем

$$\left|\int_{[t,1]} x(\tau)\, d\mu(\tau) - \int_{[t,1]} y_n(\tau)\, d\mu(\tau)\right| \le \int_{[0,1]} \Big|x(\tau) - y_n(\tau)\Big|\, d\mu(\tau) \le \|x - y_n\|_2.$$

Следовательно, получаем

$$\left\|\int_{[t,1]} x(\tau)\, d\mu(\tau) - \int_{[t,1]} y_n(\tau)\, d\mu(\tau)\right\|_2 =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \left| \int_{[t,1]} x(\tau)\, d\mu(\tau) - \int_{[t,1]} y_n(\tau)\, d\mu(\tau) \right|^2 d\mu(t)} \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^1 \Big(\|x - y_n\|_2 \Big)^2 d\mu(t)} = \|x - y_n\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, при $n \to \infty$ выполнено соотношение

$$\left\| (A^*x)(t) - \int_{[t,1]} x(\tau)\, d\mu(\tau) \right\|_2 = \lim_{n\to\infty} \left\| (A^*y_n)(t) - \int_{[t,1]} x(\tau)\, d\mu(\tau) \right\|_2 = 0.$$

Следовательно, получаем равенство

$$(A^*x)(t) = \int_{[t,1]} x(\tau)\, d\mu(\tau) \quad \text{для п. в.} \quad t \in [0,1] \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

Рассмотрим самосопряжённый компактный оператор

$$A^*A \colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1],$$

который имеет вид

$$(A^*Ax)(t) = \int_{[t,1]} d\mu(\tau) \int_{[0,\tau]} d\mu(\xi)\, x(\xi) \text{ для п. в. } t \in [0,1]\ \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

Вычислим его точечный спектр. Нетривиальное число λ является собственным числом оператора A^*A тогда и только тогда, когда существует ненулевая функция $x_\lambda \in \mathbb{L}_2[0,1]$, такая, что $x_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(A^*Ax_\lambda)(t)$ для п. в. $t \in [0,1]$. Так как для любой функции $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ отображение $t \mapsto (A^*Ax)(t)$ является непрерывным на отрезке $[0,1]$, то без ограничения общности считаем функцию x_λ непрерывной на отрезке $[0,1]$, а равенство $x_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(A^*Ax_\lambda)(t)$ выполненым для всех $t \in [0,1]$. Так как для любой непрерывной функции $x \in C[0,1]$ отображение $t \mapsto (A^*Ax)(t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0,1]$ функцией, то функция x_λ также является дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0,1]$.

Дважды дифференцируя равенство $x_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(A^*Ax_\lambda)(t)$ по $t \in [0,1]$, получаем

$$x'_\lambda(t) = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau, \quad x''_\lambda(t) = -\frac{x(t)}{\lambda} \quad \forall\, t \in [0,1],$$

причём $x_\lambda(1) = 0$ и $x'_\lambda(0) = 0$. Так как выполнены соотношения $\lambda\Big(\|x_\lambda\|_2\Big)^2 = (\lambda x_\lambda, x_\lambda) = (A^*Ax_\lambda, x_\lambda) = (Ax_\lambda, Ax_\lambda) = \Big(\|Ax_\lambda\|_2\Big)^2 >$ > 0, то получаем неравенство $\lambda > 0$. Следовательно, $x_\lambda = C\cos\Big(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\Big)$ для числа $C \neq 0$. Условие $x_\lambda(1) = 0$ означает $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{\pi}{2} + \pi n$ для $n \in$ $\in \mathbb{N}$. Поэтому точечный спектр оператора A^*A имеет вид

$$\sigma_p(A^*A)\backslash\{0\} = \left\{ \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^{-2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Отсюда окончательно находим

$$\|A\| = \sqrt{\max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right)^2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Заметим, что $0 \notin \sigma_p(A^*A)$, хотя это соотношение не нужно для вычисления $\|A\|$. Тем не менее докажем его. Если $x \in \operatorname{Ker}\Big(A^*A\Big)$, то получаем включение $Ax \in \operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$. Но также $Ax \in \operatorname{Im} A$. Следовательно, $Ax = 0$, т. е. $x \in \operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$. Рассмотрим подпространство $E = A^*\Big(CL_2[0,1]\Big) \subset \operatorname{Im} A^*$. Так как справедливо равенство

$$E = \left\{ z \in CL_2[0,1] \;\middle|\; \begin{array}{l} z \text{ — непрерывно дифференцируема} \\ \text{на отрезке } [0,1] \text{ и } z(1) = 0 \end{array} \right\},$$

то очевидно, что подпространство E всюду плотно в $\mathbb{L}_2[0,1]$. Следовательно, $E^\perp = \{0\}$. Тогда получаем $\{0\} \subset (\operatorname{Im} A^*)^\perp \subset E^\perp = \{0\}$. Поэтому $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, т. е. $x = 0$ в $\mathbb{L}_2[0,1]$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\Big(A^*A\Big)$ тривиально в $\mathbb{L}_2[0,1]$, и поэтому ноль не принадлежит точечному спектру оператора A^*A.

Т е о р е м а 5.9.2 (*Гильберт, Шмидт*)**.** *Пусть A — нетривиальный компактный самосопряжённый оператор. Тогда в замкнутом подпространстве $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ существует не более чем счётная ортогональная полная система из собственных векторов оператора A, т. е. существует не более чем счётное множество $E \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, состоящее из попарно ортогональных собственных векторов оператора A, такое, что справедливо равенство $[\operatorname{Lin} E] = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как оператор A нетривиален, то имеем неравенство $\|A\| > 0$. Так как по свойству 4 утверждения 5.9.1 имеем $r(A) = \|A\| > 0$, то существует нетривиальное число $\lambda \in \sigma(A)$. По теореме 5.8.1 число λ является собственным числом компактного оператора A. По той же теореме 5.8.1 точечный спектр компактного оператора A не более чем счётен. В силу утверждения 5.8.7 для любого нетривиального числа $\lambda \in \sigma_p(A)\backslash\{0\}$ ядро $\operatorname{Ker} A_\lambda$ конечномерно, т. е. $N_\lambda = \dim \operatorname{Ker} A_\lambda \in \mathbb{N}$, а в $\operatorname{Ker} A_\lambda$ существует ортогональный базис $\{x_m(\lambda)\}_{m=1}^{N_\lambda}$ из собственных векторов оператора A, соответствующих числу λ. В силу пункта 3 утверждения 5.9.1 собственные векторы самосопряжённого оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Таким образом, множество

$$E = \left\{ x_m(\lambda) \;\middle|\; m \in \overline{1, N_\lambda},\ \lambda \in \sigma_p(A)\backslash\{0\} \right\}$$

не пусто, не более чем счётно, и состоит из попарно ортогональных собственных векторов оператора A. Заметим, что в случае $\operatorname{Ker} A \neq$ $\neq \{0\}$ в силу пункта 3 утверждения 5.9.1 получаем включение $E \subset$ $\subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. Если же $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то также имеем $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \mathcal{H} \supset$ $\supset E$. Определим замкнутое подпространство $L = [\operatorname{Lin} E]$. Требуется доказать, что справедливо равенство $L = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. Так как $E \subset$ $\subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, то и $\operatorname{Lin} E \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. Следовательно, в силу замкнутости подпространства $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ получаем включение $L \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. Так как $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ как замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$ само является гильбертовым пространством, то по теореме 3.2.2 Рисса об ортогональном дополнении для ортогонального дополнения L в $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ — замкнутого подпространства

$$M = \left\{ x \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp} \;\middle|\; (x, y) = 0 \ \ \forall\, y \in L \right\},$$

получаем равенство $L \oplus M = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. По определению множества E справедливо включение $A(\operatorname{Lin} E) \subset \operatorname{Lin} E$. Следовательно, в силу непрерывности оператора A получаем $A(L) \subset L$. Тогда для любого $x \in M$ и любого $y \in L$ в силу самосопряжённости оператора A получаем $(A(x), y) = (x, A(y)) = 0$. Поэтому $A(x) \in M$, т. е. справедливо включение $A(M) \subset M$. Множество M как замкнутое подпространство $\mathcal{H}$ само является гильбертовым пространством. Таким образом, оператор $A\colon M \to M$ является компактным и самосопряжённым в гильбертовом пространстве M. Если оператор A является нетривиальным на M, т. е. $A(M) \neq \{0\}$, то в силу утверждения 5.9.1 и теоремы 5.8.1 оператор A имеет собственный вектор $z \in M$, отвечающий некоторому числу $\mu \in \sigma_p(A)\backslash\{0\}$. Но тогда по определению множества E получаем включения $z \in \operatorname{Ker} A_\mu \subset \operatorname{Lin} E \subset L$. Так как к тому же $z \in M$, то получаем равенство $(z, z) = 0$, т. е. $z = 0$, что противоречит определению собственного вектора. Поэтому $A(M) = \{0\}$. Но тогда $M \subset \operatorname{Ker} A$, а по определению $M \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp$. Следовательно, $M \subset (\operatorname{Ker} A) \cap (\operatorname{Ker} A)^\perp = \{0\}$, т. е. $M = \{0\}$ — тривиальное подпространство. Таким образом, получаем $L = (\operatorname{Ker} A)^\perp$, что и требовалось.

Следствие 5.9.5. *Пусть A — нетривиальный компактный самосопряжённый оператор. Тогда в замкнутом подпространстве $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ существует не более чем счётный ортогональный базис $E = \{e_n\}_{n=1}^N$, где $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, из собственных векторов оператора A. При этом для любого $x \in \mathcal{H}$ существует единственный вектор $x_0 \in \operatorname{Ker} A$, такой, что справедливо равенство*

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n.$$

Иными словами, справедливо следующее разложение гильбертова пространства:

$$\mathcal{H} = \operatorname{Ker} A \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{N} \operatorname{Lin} e_n \right).$$

Доказательство. Определённое в теореме 5.9.2 Гильберта—Шмидта множество

$$E = \{e_n\}_{n=1}^N \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp, \quad \text{где} \quad N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

состоящее из попарно ортогональных собственных векторов e_n оператора A, образует в $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ не более чем счётную полную ортогональную систему векторов. Следовательно, по теореме 3.3.2 система $\{e_n\}_{n=1}^N$ образует в гильбертовом пространстве $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ ортогональный базис, а любой вектор $z \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ представляется сходящимся в $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ рядом Фурье $z = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(z,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n$. По теореме 3.2.2 Рисса об ортогональном дополнении справедливо равенство $\operatorname{Ker} A \oplus (\operatorname{Ker} A)^\perp = \mathcal{H}$. Следовательно, для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ существуют единственные векторы $x_0 \in \operatorname{Ker} A$ и $z \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$, такие, что $x = x_0 + z$. Так как $(x_0, e_n) = 0$ для любого номера $n \in \overline{1,N}$, то получаем равенство $(z, e_n) = (x, e_n)$ для всех номеров $n \in \overline{1,N}$. Следовательно, получаем требуемое равенство

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(z,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n = x_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(x,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n.$$

При этом в силу равенства Парсеваля имеем равенство

$$\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{|(x,e_n)|^2}{\|e_n\|^2}.$$

Замечание 5.9.1. Пусть A — нетривиальный компактный самосопряжённый оператор, а $E = \{e_n\}_{n=1}^N$ — ортогональный базис из собственных векторов оператора A в замкнутом подпространстве $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ (здесь $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$). Рассмотрим линейные операторы ортогонального проектирования из $\mathcal{H}$ на ядро $\operatorname{Ker} A$ и на одномерное подпространство $\operatorname{Lin}\{e_n\}$ для любого номера $n \in \overline{1,N}$. Пусть оператор $P_0 \colon \mathcal{H} \to \operatorname{Ker} A$ — ортогональный проектор на ядро $\operatorname{Ker} A$, а оператор $P_n \colon \mathcal{H} \to \operatorname{Lin}\{e_n\}$ — ортогональный проектор на одномерное подпространство $\operatorname{Lin} e_n$, где номер $n \in \overline{1,N}$. Для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ справедливо равенство

$$P_n(x) = \frac{(x,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n.$$

По определению ортогонального проектора для любого номера $n \in \overline{1,N}$ справедливы равенства $\|P_n\| = 1$. Если $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, то имеем $\|P_0\| = 1$, если же $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то оператор P_0 тривиален. По следствию 5.9.5 получаем для любого $x \in \mathcal{H}$ равенство

$$x = P_0(x) + \sum_{n=1}^{N} P_n(x).$$

Так как $AP_0 = 0$, а для любого номера $n \in \overline{1,N}$ выполнено $AP_n = \lambda_n P_n$, где λ_n — собственное число оператора A, соответствующее собственному вектору e_n, то для любого $x \in \mathcal{H}$ получаем равенство

$$A(x) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n(x).$$

Если $N \in \mathbb{N}$, то оператор A представляет собой конечную линейную комбинацию ортогональных проекторов

$$A = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n.$$

Если же имеем $N = +\infty$, то для любого $x \in \mathcal{H}$ в силу равенства Парсеваля справедливо соотношение

$$\left\| A(x) - \sum_{m=1}^{n} \lambda_m P_m(x) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)} e_m \right\| = \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} |\lambda_m|^2 \frac{|(x, e_m)|^2}{\|e_m\|^2}} \leq$$

$$\leq \left(\sup_{m>n} |\lambda_m| \right) \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|(x, e_m)|^2}{\|e_m\|^2}} \leq \left(\sup_{m>n} |\lambda_m| \right) \|x\|.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left\| A - \sum_{m=1}^{n} \lambda_m P_m \right\| \leq \sup_{m>n} |\lambda_m|.$$

Так как по теореме 5.8.1 имеет место предельное соотношение $\lambda_m \to 0$ при $m \to \infty$, то получаем $\left\| A - \sum\limits_{m=1}^{n} \lambda_m P_m \right\| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому справедливо равенство $A = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda_m P_m$.

Для любого $\lambda \in \rho(A)$ вычислим резольвенту $R_A(\lambda) = (A_\lambda)^{-1}$ оператора A. Для этого при каждом $y \in \mathcal{H}$ вычислим единственный вектор $x \in \mathcal{H}$ вида $A_\lambda(x) = y$. Это уравнение в силу вышеизложенного равносильно равенству

$$A_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{N} (\lambda_n - \lambda) P_n(x) - \lambda P_0(x) = P_0(y) + \sum_{n=1}^{N} P_n(y).$$

Следовательно, получаем $(\lambda_n - \lambda)P_n(x) = P_n(y)$ для любого номера $n \in \overline{1, N}$, и $-\lambda P_0(x) = P_0(y)$. Таким образом, справедливы равенства

$$x = (A_\lambda)^{-1}(y) = P_0(x) + \sum_{n=1}^{N} P_n(x) = -\frac{P_0(y)}{\lambda} + \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n(y)}{\lambda_n - \lambda}.$$

Итак, для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ получаем равенство

$$(A_\lambda)^{-1}(y) = -\frac{P_0(y)}{\lambda} + \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n(y)}{\lambda_n - \lambda}.$$

Если $N \in \mathbb{N}$, то резольвента оператора A имеет вид конечной линейной комбинации проекторов

$$R_A(\lambda) = -\frac{P_0}{\lambda} + \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n}{\lambda_n - \lambda}.$$

Если же имеем $N = +\infty$, то последовательность линейных ограниченных операторов

$$S_n = -\frac{P_0}{\lambda} + \sum_{m=1}^{n} \frac{P_m}{\lambda_m - \lambda}$$

является поточечно сходящейся в пространстве $\mathcal{H}$ при $n \to \infty$ к резольвенте $R_A(\lambda)$, но не является фундаментальной в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \frac{\|P_{n+1}\|}{|\lambda_{n+1} - \lambda|} \geq \frac{1}{|\lambda_{n+1}| + |\lambda|} \geq \frac{1}{\|A\| + |\lambda|}.$$

Следовательно, поточечно сходящаяся к резольвенте $R_A(\lambda)$ последовательность операторов S_n является расходящейся в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Заключение

Представленный курс призван дать читателю начальные представления о предмете функционального анализа, его основных идеях и конструкциях. Аппарат функционального анализа является тем математическим языком, на котором решается большое количество современных прикладных задач, например, из теории оптимального управления или математической физики. Естественным продолжением этого курса является изучение теории неограниченных линейных операторов, имеющей многочисленные приложения в современной математической физике, спектральной теории линейных операторов и теории банаховых алгебр. Это можно сделать, например, по книге У. Рудина "Функциональный анализ" [2]. В заключение остаётся пожелать всем читателям успехов в изучении и применении функционального анализа для решения самых разнообразных физико-математических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976, 542 с.

2. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975, 443 с.

3. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002, 488 с.

4. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976, 319 с.

5. Гелбаум Г., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967, 251 с.