

**Российский государственный университет
Имени Иммануила Канта**

Кафедра математического анализа

В.Н. Худенко,

**УЧЕБНО МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ПО ТОПОЛОГИИ**

Калининград 2008

Введение :

Топология, как наука, сформировалась по общему мнению в трудах великого французского математика Анри Пуанкаре (на рубеже XIX и XX столетий). Начало топологических исследований можно отнести к середине XIX века к работам Римана. Им была сделана попытка сформулировать понятие многомерного многообразия, ввести понятие связности.

Пуанкаре так определял содержание *Analysis situs* (геометрия положения) “*Analysis situs* есть наука, которая позволяет нам узнавать качественные свойства геометрических фигур не только в обычном пространстве, но также в пространстве более трех измерений.

Отдельные результаты по топологии были получены Л. Эйлером, Жорданом, Г. Кантором и др. Но только после того как в начале XX века М. Фреше и Ф. Хаусдорф заложили основы теории метрических и топологических пространств, топология стала самостоятельным разделом математики.

В 20 - 30 годах сложилась Московская топологическая школа, яркими представителями которой являются П.С. Александров, П.С. Урысон, А.Н. Колмогоров, А.Н. Тихонов, Л.С. Понтрягин.

Топология находит широкое применение в дифференциальной геометрии, в теории относительности, в математическом и функциональном анализе, современной алгебре, теоретической физике и других разделах математики.



Пуанкаре Жуль Анри (Poincaré Jules Henri 1854-1912) – французский математик и астроном. Учился в Политехнической, а затем в Горной школах Парижа. С 1886 года профессор Парижского университета. Большой цикл работ Пуанкаре касается дифференциальных уравнений. Докторская диссертация посвящена особым точкам систем дифференциальных уравнений. Построил качественную теорию дифференциальных уравнений, исследовал характер интегральных кривых на плоскости. Эти и некоторые другие работы привели Пуанкаре к созданию топологии.



Леонард Эйлер (Euler Leonard 1707-1783) математик механик физик.

Во время учебы в Базельском университете слушал лекции Иоганна Бернулли. С 1727 года работает в только что созданной Петербургской Академии наук. В Петербурге Эйлер прожил с 1727 по 1741 и с 1966 до конца жизни. За первый период подготовил к печати 80 трудов. Работал по многим направлениям, даже участвовал в составлении карт России, подготовил фундаментальный труд по теории кораблестроения. 25 лет прожил в Берлине, где фактически руководил

Берлинской академией наук. Живя в Берлине не переставал работать для Петербургской АН. Во второй период в Петербурге, несмотря на почти полную слепоту подготовил более 400 трудов, в том числе несколько больших книг.



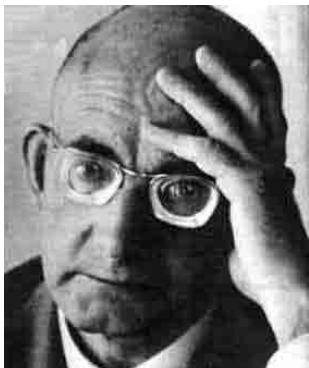
Жордан Мари Энмон Камиль (Jordan Marie Ennemond Camille 1838-1922) – французский математик. Основные труды по алгебре, теории функций, топологии и кристаллографии. Ему принадлежат первые систематические труды по теории групп и группам Галуа и трехтомный труд по анализу.



Кантор Георг (Cantor Georg 1845-1918) – немецкий математик. Окончил Берлинский университет в 1867. 1879-1913 профессор университета в г. Галле. Разработал теорию бесконечных множеств и теорию трансфинитных чисел. Общепризнанный основоположник теории множеств. Ввел понятие предельной точки множества, производного множества, построил пример совершенного множества, развил одну из теорий иррациональных чисел.



Фреше Морис Рене (Fréchet Maurice René 1878-1973) французский математик. Основные труды по топологии и функциональному анализу, где ввел современные понятия метрического пространства, компактности, полноты и др. Работал также в области теории вероятностей. Работал в Страсбургском университете (1919-1927 гг.) и Парижском университете (1928-1949).

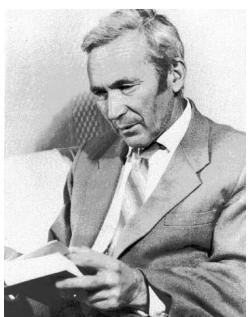


Александров Павел Сергеевич 1896-1982 советский математик, член Академии наук (с 1953 г., член-корреспондент с 1929), герой социалистического труда. В 1917 г. Окончил Московский университет, с 1929 года его профессор. Создатель отечественной топологической школы. Ввел вместе с П.С. Урысоном понятие бикомпактного пространства. Ввел ряд фундаментальных понятий топологии (нерв покрытия, аппроксимация общих топологических пространств полиэдрами и т.д.).



Павел Самуилович Урысон (1898—1924)

Урысон Павел Самуилович (1898-1924). Отечественный математик. Окончил Московский университет 1919 году. Был сотрудником института математики и механики Московского университета, профессором 2-го Московского университета (ныне Московский государственный педагогический университет). Основные труды по топологии. В 1921-1922 годах впервые в нашей стране прочел курс топологии. Погиб от несчастного случая при купании во Франции.



Колмогоров Андрей Николаевич (1903-1987) отечественный математик член Академии наук, герой социалистического труда. В 1925 г. Окончил Московский университет с 1931 года профессор этого университета. Научную деятельность начал в области теории функций действительного переменного где ему принадлежат фундаментальные результаты по тригонометрическим рядам, теории меры, теории множеств, теории интеграла, теории приближений функций. В дальнейшем внес существенный вклад в развитие конструктивистской логики, топологии, функционального анализа, и особенно, - в теории вероятностей.



Тихонов Андрей Николаевич род 1906 г. Отечественный математик. В 1927 г. Окончил Московский университет, с 1936 года преподает в нем, с 1970 года декан факультета вычислительной математики и кибернетики. С 1953 г. в работает в Институте прикладной математики им. Келдыша. Первые работы по топологии и функциональному анализу, введено понятие тихоновского произведения пространств, теорема о бикомпактности произведения бикомпактных пространств и

т.д.



Л. Понтрягин.

Понtryгин Лев Семенович (1908-1988 гг.). В 13 лет в результате несчастного случая лишился зрения. Окончил Московский университет (1929). С 1939 года зав. отделом Института математики им. В.А. Стеклова и одновременно профессор Московского университета. Основные труды по топологии и математической теории оптимальных процессов. В топологии открыл общий закон двойственности и построил теорию характеров непрерывных коммутативных групп, получил ряд важных результатов в теории гомотопий.

ГЛАВА I ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

Некоторые сведения из теории множеств

Множество - одно из основных неопределяемых понятий.

Под *множеством* понимают рассматриваемую как единую целость совокупность (семейство, набор и т.д.) предметов произвольной природы.

Множество A состоящее из элементов x_α , где α пробегает некоторое множество N , называемое **множеством индексов**, обозначается $A = \{x_\alpha, \alpha \in N\}$.

Примеры задания множеств:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$$

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (1; 2), x_2 \in [-2; \infty)\}$$

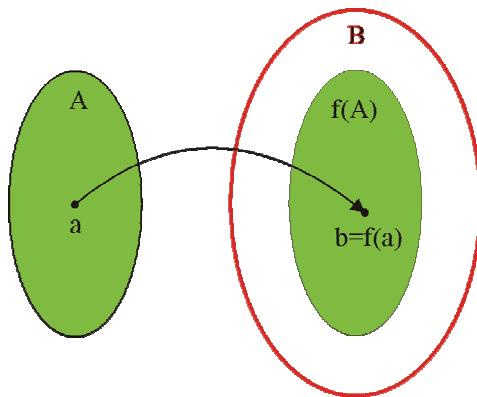
Множеством является пустое множество, т.е. множество, не содержащее никаких элементов (обозначается \emptyset)

Приняты обозначения $a \in B$, $A \subset B$.

Два множества называются равными $A = B$, если $A \subset B$, и $B \subset A$.

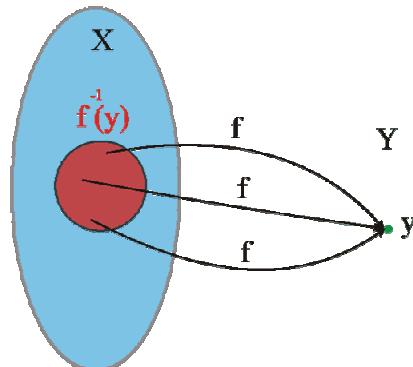
П.2 Отображение множеств.

Пусть задано два непустых множества X и Y . Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят что задано отображение из X в Y и пишут $f: X \rightarrow Y$.



Элемент $y \in Y$ называют образом элемента x и обозначают $y = f(x)$.

Пусть $y \in Y$. Совокупность всех элементов $x \in X$, имеющих y своим образом называется **прообразом (полным прообразом)** элемента y и обозначают $f^{-1}(y)$.



Если $A \subset X$, то множество всех образов элементов из A обозначается $f(A)$. Пусть $B = f(A)$. Если $B = Y$ то отображение f называется сюръективным.

Если $f(x) = y_0$ для любых $x \in X$, то отображение f называется постоянным.

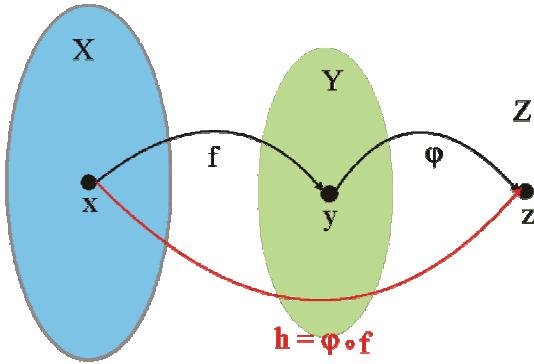
Если $f(x) = x$ для любого $x \in X$, то отображение называется **тождественным** на X и обозначается I_x .

Если при отображении $f: X \rightarrow Y$ для любых $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ то отображение f называется инъективным.

Отображение f одновременно являющееся инъективным и сюръективным называют биективным или взаимно-однозначным.

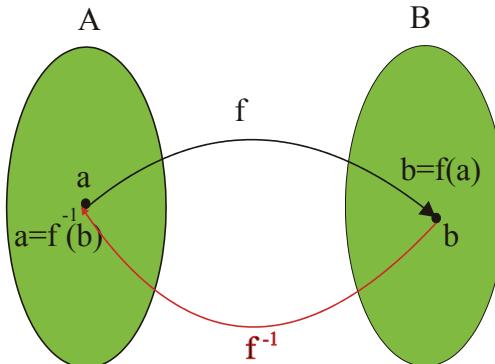
Отображение $i: A \rightarrow X$, где $A \subset X$, ставящее в соответствие каждому элементу x его самого, т.е. $i(x) = x$ для $\forall x \in A$ называется вложением (или отображением включения).

Пусть имеются два отображения: $f: X \rightarrow Y$ и $\varphi: Y \rightarrow Z$, тогда отображение $\psi: X \rightarrow Z$, такое что $\psi(x) = \varphi(f(x))$ для $\forall x \in X$ называется композицией отображений и обозначается $\psi = \varphi \circ f$.



Определение Отображение f^{-1} называют обратным к отображению f , если элементу $b \in B$ ставится в соответствие элемент $a \in A$, образом которого при отображении f является b :

$$f^{-1}: B \rightarrow A \Leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A: a = f^{-1}(b).$$



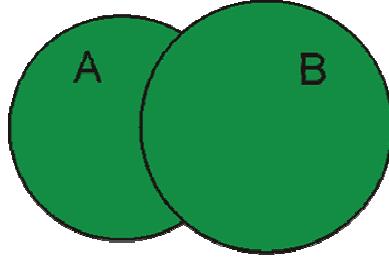
П. 3 Операции над множествами

Пусть задано произвольное семейство множеств $X = \{A_\alpha, \alpha \in N\}$. Множество, состоящее из всех тех элементов, каждый из которых принадлежит, по крайней ме-

ре, одному из множеств A_α называют **объединением** множеств семейства X и обозначают $\bigcup_{\alpha \in N} A_\alpha$.

Для объединения множеств справедливы законы коммутативности и ассоциативности:

$$1. A \cup B = B \cup A; \quad 2. A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$



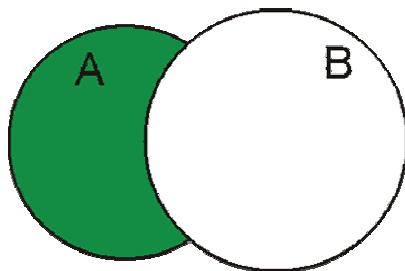
$$A \cup B$$

Разностью между множествами A и B (или **дополнением** множества B до множества A, если $B \subset A$) называются те элементы множества A, которые не входят во множество B.

$$A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

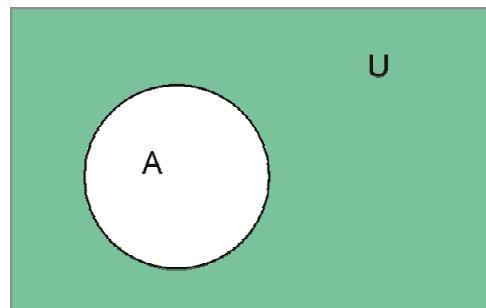
Очевидные свойства этой операции:

$$1. A \setminus A = \emptyset, \quad 2. A \setminus \emptyset = A.$$



$$A \setminus B$$

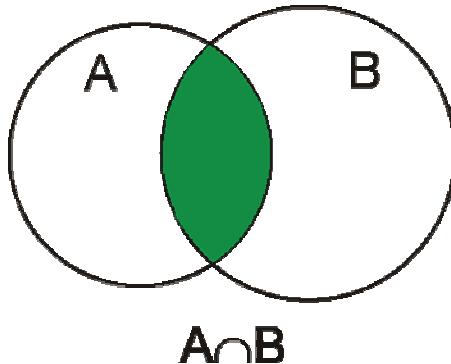
Дополнение до универсального множества.



$$U \setminus A$$

Пусть задано произвольное семейство множеств $X = \{A_\alpha, \alpha \in N\}$. Множество, состоящее из всех тех элементов, каждый из которых принадлежит каждому из мно-

жеств A_α называют **пересечением** множеств семейства X и обозначают $\bigcap_{\alpha \in N} A_\alpha$. Для этой операции также справедливы законы коммутативности и ассоциативности.



В дальнейшем будут использоваться формулы де Моргана:

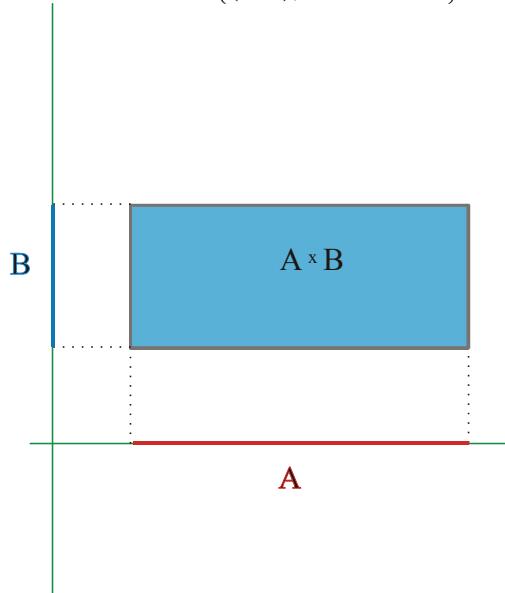
$$1. A \setminus \bigcup_{\alpha} B_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (A \setminus B_{\alpha}); \quad 2. A \setminus \bigcap_{\alpha} B_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (A \setminus B_{\alpha});$$

Докажем первое равенство. Пусть $x \in A \setminus \bigcup_{\alpha} B_{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \notin \bigcup_{\alpha} B_{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B_{\alpha}, \forall \alpha \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in A \setminus B_{\alpha}, \forall \alpha \Rightarrow x \in \bigcap_{\alpha} A \setminus B_{\alpha}.$

Пусть $y \in \bigcap_{\alpha} A \setminus B_{\alpha} \Rightarrow y \in A \setminus B_{\alpha}, \forall \alpha \Rightarrow \begin{cases} y \in A, \\ y \notin B_{\alpha}, \forall \alpha \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} y \in A, \\ y \notin \bigcup_{\alpha} B_{\alpha} \end{cases} \Rightarrow y \in A \setminus \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}.$

Введем еще одну операцию над множествами. Пусть A и B два произвольные множества. **Декартовым произведением** (или просто произведением) множества A на множество B называется множество упорядоченных пар (a,b), т.е.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$



Данное определение допускает обобщение на любое конечное число слагаемых.

П. 4 Общие свойства отображений.

Рассмотрим отображение $f: X \rightarrow Y$.

Теорема 1: Для любых двух множеств A и B из X образ объединения равен объединению образов; образ пересечения содержится в пересечении образов:

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B); \\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

Теорема 2: Для любых двух множеств M и N из Y прообраз объединения равен объединению прообразов; прообраз пересечения равен пересечению прообразов:

П.5 Мощность множества.

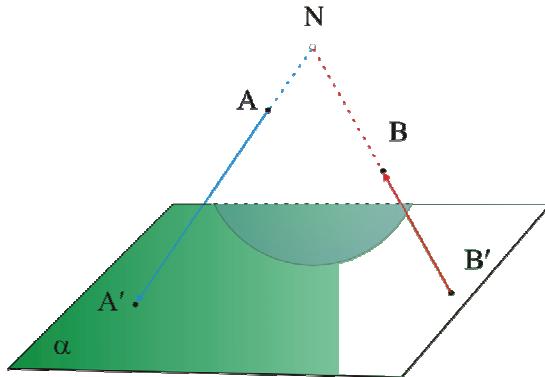
Если между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому элементу $a \in A$ поставлен в соответствие один и только один элемент $b \in B$, и наоборот, каждому элементу $b \in B$ соответствует один и только один элемент $a \in A$. Тогда множества A и B называются **эквивалентными** и обозначают $A \sim B$.

Примером эквивалентных множеств является два множества, содержащих одинаковое число элементов.

Множество точек отрезка $[0,1]$ эквивалентно множеству точек отрезка $[2,4]$ взаимно однозначное соответствие осуществляется функция (возможно подобрать и другую)

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - 2), \text{ где } x \in [2;4].$$

Еще одним примером эквивалентных множеств является так называемая "стереографическая проекция", показывающая, что множество точек сферы (с выколотым северным полюсом S) эквивалентно множеству точек плоскости α .



Проектирование с центром в точке S устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками N сферы и α плоскости. Интересен факт, что эта конструкция была известна математикам древней Греции.

Конечные множества различаются по количеству элементов. Возникает вопрос о возможности различать "количественно" различать бесконечные множества.

Пусть А - произвольное множество. Поставим этому множеству в соответствие число $m(A)$, называемое **кардиальным числом** или **мощностью** множества А. При этом

$$m(A) = m(B) \Leftrightarrow A \sim B$$

Мощность конечного множества $m(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = n$. Мощность пустого множества $m(\emptyset) = 0$. Мощность множества натуральных чисел: $m(N) = a$. Каждое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется счетным множеством.

Мощность множества $m((0;1]) = C$. Множество с кардиальным числом С называется **множеством мощности континум**.

Пусть А и В два множества и $m = m(A)$, $n = m(B)$. Будем считать, что $m > n$, если В эквивалентно некоторому подмножеству множества А и не эквивалентно самому множеству А.

П. 6 Элементарные мощности

Теорема *Каждое бесконечное множество имеет счетное подмножество.*

Доказательство: Пусть А - произвольное множество. Выберем какой - ни будь его элемент $x_1 \in A$. Рассмотрим множество $A \setminus \{x_1\}$, которое не пустое и бесконечное. Выделим из этого множества элемент $x_2 \in A \setminus \{x_1\}$. Далее рассматриваем бесконечное множество $A \setminus \{x_1, x_2\}$ и т.д. Так мы прейдем к определению подмножества $M \subset A$, $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, которое является счетным множеством.

Следствие:

Если m является мощностью некоторого бесконечного множества то $m \geq a$

Для счетных множеств справедливы следующие утверждения:

1. *Объединение счетного и конечного числа дизъюнктных множеств есть множество счетное.*
2. *Объединение конечного числа счетных дизъюнктных множеств есть множество счетное.*
3. *Объединение счетного числа счетных дизъюнктных множеств есть множество счетное.*

Докажем последнее утверждение

Для доказательства рассмотрим счетное семейство счетных множеств $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}, A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}, \dots, A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots\}$

Пронумеруем элементы объединения этих множеств в следующем порядке:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} \rightarrow a_{12} & a_{13} \rightarrow a_{14} \dots \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ a_{21} \leftarrow a_{22} & a_{23} & a_{24} \dots \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ a_{31} \rightarrow a_{32} \rightarrow & a_{33} & a_{34} \dots \\ \dots & & \end{array}$$

Этим мы показали, что множество $B = \bigcup_n A_n$ эквивалентно множеству натуральных чисел, т.е. счетно.

Имеет место следующая

Теорема Множество чисел $(0;1]$ несчетно.

Доказательство: Так как $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \subset (0;1]$ то $c \geq a$. Покажем, что $c \neq a$. Предположим противное, т.е. что любое число принадлежащее множеству $(0;1]$ можно занумеровать. Запишем эти числа, представив их в виде бесконечных десятичных дробей:

$$\alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots$$

$$\alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\dots$$

.....

$$\alpha_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn}\dots$$

.....

Рассмотрим некоторую дробь $\alpha_0 = 0, a_1a_2\dots a_n\dots$, где $a_1 \neq a_{11}, a_2 \neq a_{22}, \dots, a_n \neq a_{nn}$. Очевидно, что $\alpha_0 \in (0;1]$. Кроме того среди выписанных дробей этой дроби нет. Следовательно, мы получили противоречие, которое доказывает теорему.

Из этой теоремы следует, что $C > a$. Возникает вопрос о существовании множества промежуточной мощности. Г. Кантор предположил, что такого множества нет. Такое предположение было в математике названо континуум - гипотезой.



Только в середине 60-х годов американским математиком П. Коэном было доказано, что принятие или отрицание этой гипотезы не противоречит аксиомам теории множеств, т.е. континуум - гипотеза является одной из аксиом теории множеств.

§2. Метрические пространства

Одним из часто встречающихся в математике понятий является понятие **расстояния**. Оно используется в аналитической геометрии при изучении свойств геометрических объектов в евклидовых пространствах, в математическом анализе при определении такого фундаментального понятия как предел числовой последовательности (или функции) и.д. Обобщив некоторые понятия, французский математик **M. Фреше** построил теорию метрических пространств.

П.1 Понятие метрического пространства.

Пусть X произвольное непустое множество. Говорят, что на X задана **метрика** (расстояние), если для каждой пары элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие единственное неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим трем условиям (аксиомам метрического пространства)

1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для $\forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ $\forall x, y, z \in X$ (аксиома треугольника);

Пара (X, ρ) т.е. множество X с заданной на нем метрикой называется **метрическим пространством**.

Если (X, ρ) - метрическое пространство и $A \subset X$, то пара (A, ρ) , где $\rho(x, y)$ расстояние между точками $x, y \in A$ равно расстоянию между этими точками в пространстве (X, ρ) , также будет являться метрическим пространством и называется **подпространством** пространства (X, ρ) .

Примеры:

1. На любом непустом множестве X можно определить метрику следующим образом:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Такое пространство называется *пространством изолированных точек*.

2. Пусть X - множество действительных чисел. В качестве расстояния между точками возьмем функцию

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Справедливость аксиом метрического пространства вытекает из свойств функции абсолютная величина числа. Полученное метрическое пространство называется *одномерным арифметическим пространством или числовой прямой*.

3. Пусть X - множество упорядоченных наборов n вещественных чисел. Тогда для любых двух его точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ определим расстояние

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2};$$

Получим метрическое пространство, называемое *n-мерным арифметическим пространством*, которое обозначается R^n .

4. Множество оставим прежним, а метрику определим иначе

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

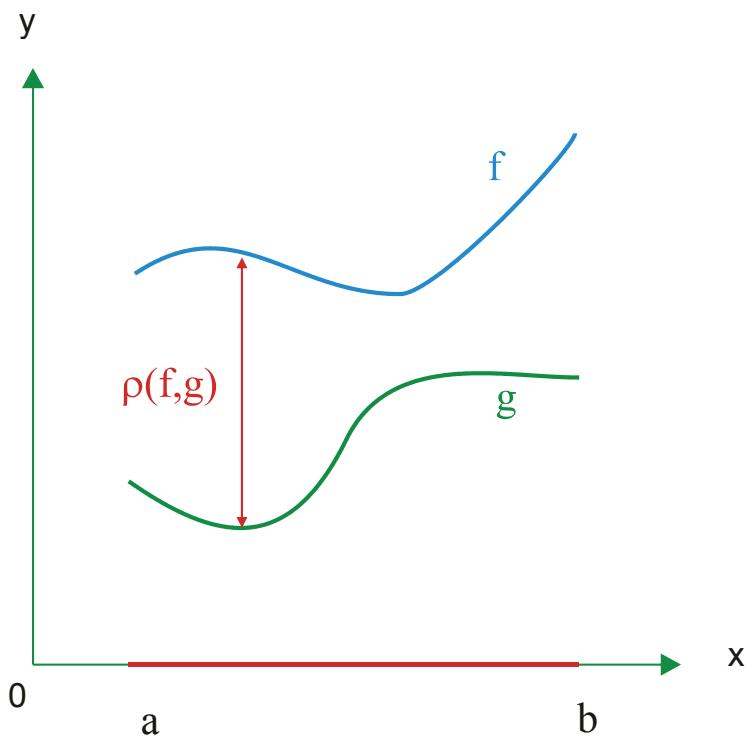
Полученное пространство обозначают R^0 .

5. Воспользуемся множеством вех функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$.

Расстоянием между двумя его элементами будем вычислять по формуле

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Получили пространство непрерывных на $[a; b]$ функций (обозначается $C_{[a; b]}$).



6. Возьмем множество числовых последовательностей, квадраты членов которых образуют сходящийся числовой ряд. Метрику определим аналогично метрики примера 3, т.е. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2};$$

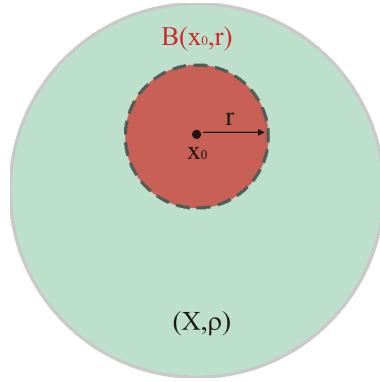
Получили метрическое пространство, называемое *координатным пространством Гильберта*.

П.2 Основные определения.

Пусть (X, ρ) произвольное метрическое пространство.

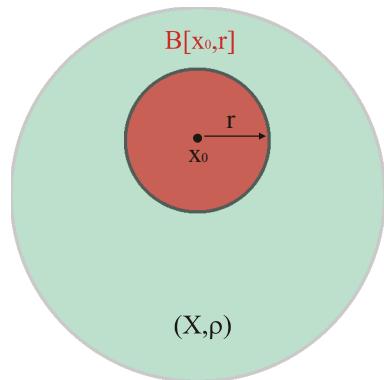
Открытым шаром радиуса r и с центром в точке x_0 называется множество точек этого пространства, расстояние до которых меньше r

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) < r\}.$$

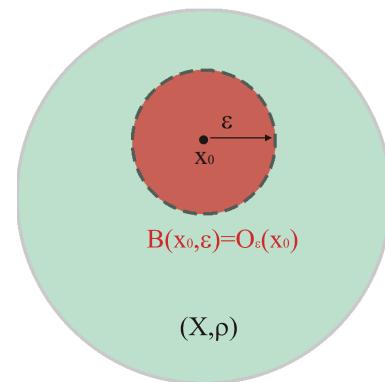


Замкнутым шаром радиуса r и с центром в точке x_0 называется множество точек этого пространства, расстояние до которых меньше или равно r

$$B[x_0, r] = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) \leq r\}.$$



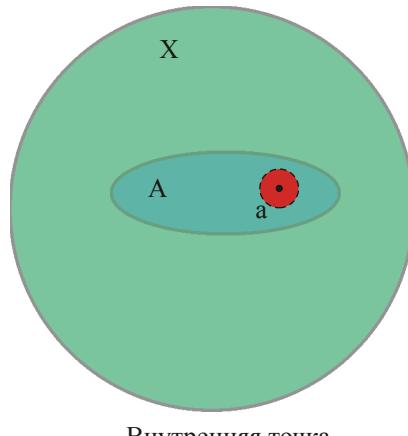
Окрестностью точки a (сферической окрестностью) называется открытый шар с центром в этой точке и радиуса ε .



В пространстве R^1 открытым шаром $B(x_0, r)$ является интервал $(x_0 - r, x_0 + r)$.

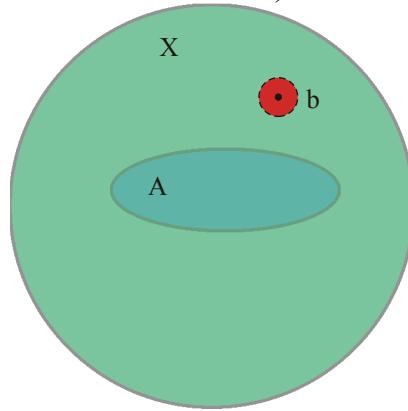
Пусть A - произвольное множество метрического пространства (X, ρ) .

Точка $a \in A$ называется **внутренней точкой множества** A , если существует окрестность этой точки, целиком входящая во множество A . Совокупность всех внутренних точек множества A называется **внутренностью** множества A и обозначается A^0 (другое обозначение $\text{int}A$). Множество, состоящее только из внутренних точек называется **открытым**.



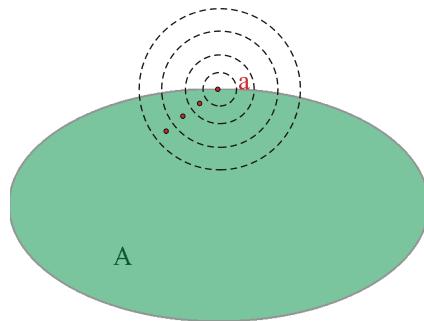
Внутренняя точка

Точка b называется ***внешней точкой*** множества A , если она является внутренней точкой дополнения т.е. множества $X \setminus A$ (т.е. существует окрестность точки b , не имеющая с множеством A общих точек).

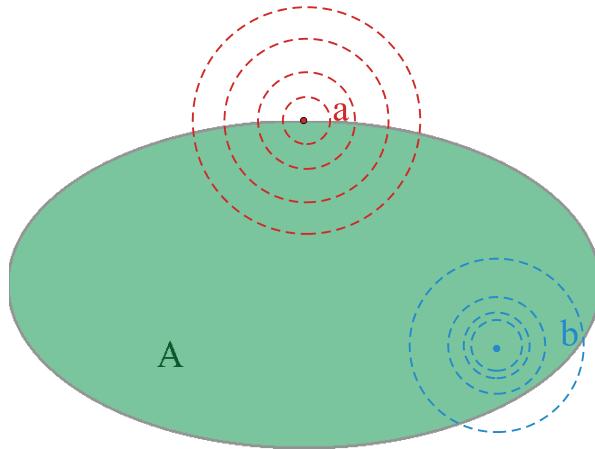


Внешняя точка

Точка $a \in A$ называется ***предельной точкой множества A***, если в любой окрестности точки содержится бесчисленное количество точек из множества A . Множество всех предельных точек множества A называется ***производным множеством*** и обозначается A' .



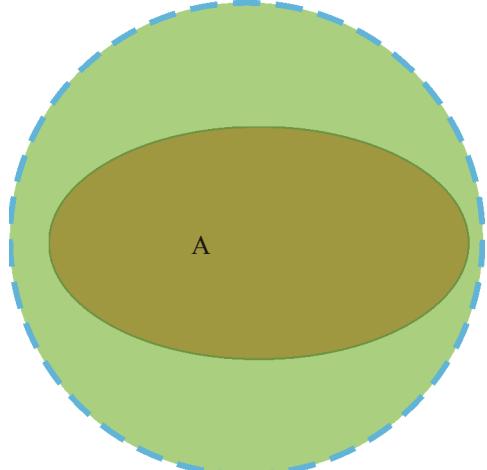
Точка a называется ***точкой прикосновения множества A***, если в любая окрестность точки a имеет с множеством A непустое пересечение.



Замечание: Каждая предельная точка является точкой прикосновения, но не наоборот.

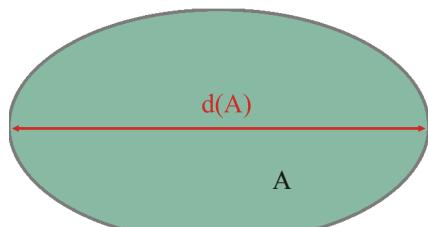
Точка множества A , не являющаяся предельной точкой называется **изолированной точкой** (если точка изолированная, то существует такая окрестность этой точки, которая содержит из множества только саму эту точку). Каждая точка прикосновения или предельная точка или изолированная.

Множество M метрического пространства (X, ρ) называется **ограниченным** если существует открытый шар, целиком содержащий множество M .



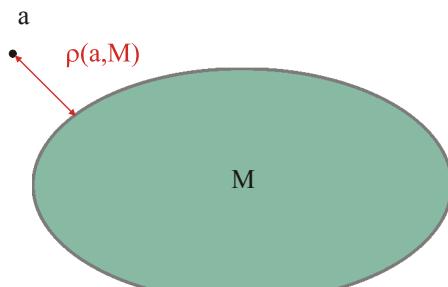
Диаметром множества M называется число

$$d(M) = \sup_{x, y \in M} \rho(x, y)$$



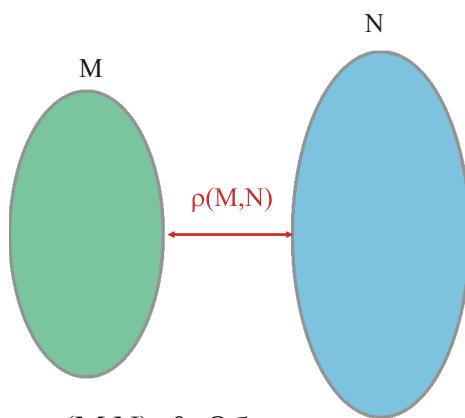
Расстоянием от точки a до множества M называется число

$$\rho(a, M) = \inf_{x \in M} \rho(a, x).$$



Расстоянием между двумя множествами M и N называется число

$$\rho(M, N) = \inf_{x \in M, y \in N} \rho(x, y)$$



Если $M \cap N \neq \emptyset$ то $\rho(M, N)=0$. Обратное, вообще говоря не верно.

Примеры:

- 1) В пространстве R^1 множество $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ обладает следующими свойствами:

- все точки изолированные (внутренних точек не имеется $A^0 = \emptyset$);
- точка $0 \notin A$ является точкой прикосновения этого множества;
- множество ограничено;
- диаметр множества $d(A)=1$;
- множеством внешних точек является множество

$$B = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} \right)$$

- 2) Множество $C = (a; b) \subset R^1$ обладает следующими свойствами:

- множество C открыто, т.к. все его точки внутренние;
- множество точек прикосновения совпадает с производным множеством $C^0 = [a; b]$;
- изолированных точек нет;
- множество C ограничено;
- диаметр множества $d(C)=b-a$;

П.3 Понятие сходимости.

Последовательность точек x_1, x_2, x_3, \dots метрического пространства (X, ρ) называется **сходящейся** к точке a , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow \rho(x_n, a) < \varepsilon$. При этом точку **a** называют **пределом** последовательности и записывают $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Теорема 1 Последовательность точек метрического пространства может иметь только один предел.

▷ Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a_2) = 0.$$

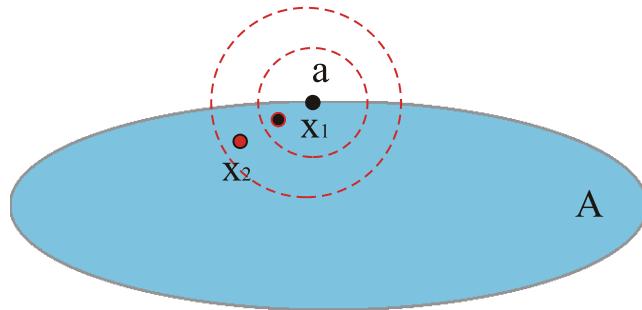
Тогда в неравенстве треугольника для точек a_1 и a_2 ($a_1 \neq a_2$)

$$\rho(a_1, a_2) \leq \rho(a_1, x_n) + \rho(x_n, a_2)$$

правая часть стремится к нулю, а левая часть постоянна и отлична от нуля. Полученное противоречие доказывает теорему. ◁

Теорема 2 Точка **a** метрического пространства (X, ρ) является точкой прикосновения множества A , тогда и только тогда, когда во множестве A существует последовательность точек, сходящихся к точке **a**.

▷ Если точка **a** точка прикосновения множества A , то любая ее окрестность, в частности, открытый шар $B(a, \frac{1}{n})$ имеет с множеством A непустое пересечение, следовательно в каждом таком шаре существует хотя бы одна точка $x_n \in A$. Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$. Следовательно $x_n \rightarrow a$. ◁



Теорема 3 Точка **a** метрического пространства (X, ρ) является предельной точкой множества A , тогда и только тогда, когда во множестве A существует последовательность попарно различных точек, сходящихся к точке **a**.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Определение.

Последовательность точек x_1, x_2, x_3, \dots пространства (X, ρ) называется **фундаментальной** если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число N , что для всех $n, m > N$ выполняется неравенство: $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Определение.

Метрическое пространство в котором всякая фундаментальная последовательность сходится называется **полным**.

В терминах теории метрических пространств известный критерий Коши сходимости числовой последовательности означает полноту метрического пространства \mathbb{R}^1 .

Полными являются пространства R^n , R_0^n , $C_{[a,b]}$.

П.4 Замыкание множества. Свойства операции замыкания.

Определение: Присоединение к множеству всех его точек прикосновения называется **замыканием множества**.

Замыкание множества M обозначается \bar{M} .

Определение: Множество M метрического пространства (X,ρ) называется **замкнутым** если оно совпадает со своим замыканием.

Операция замыкания обладает следующими свойствами:

1. $A \subset \bar{A}$;
2. $M \subset N \Rightarrow \bar{M} \subset \bar{N}$;
3. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$;
4. $\bar{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$;

(Доказательство этих свойств будет приведено для более общего случая топологических пространств).

П.5 Свойства открытых и замкнутых множеств метрического пространства.

Теорема 4 Множество метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

▷ Пусть F замкнутое множество. И точка $x_0 \in X \setminus F$. Так как множество F содержит все свои точки прикосновения, то x_0 не является таковой, а следовательно существует окрестность этой точки, целиком содержащаяся в дополнении множества F т.е. в $X \setminus F$. Таким образом мы получаем, что произвольная точка $X \setminus F$ является внутренней, а само множество - открыто.

Предположим теперь, что множество $X \setminus F$ - открытое множество. Докажем, что множество F содержит все свои точки прикосновения. Пусть точка $y_0 \in \bar{F}$ (т.е. y_0 точка прикосновения множества F) и $y_0 \notin F$. Тогда $y_0 \in X \setminus F$, в силу открытости множества $X \setminus F$ существует окрестность $B(y_0, \varepsilon) \subset X \setminus F$. Тогда точка y_0 не является точкой прикосновения множества F . Получили противоречие с тем что $y_0 \notin F$, следовательно множество F содержит все свои точки прикосновения т.е. замкнуто. ◁

Теорема 5 (О свойствах системы открытых множеств)

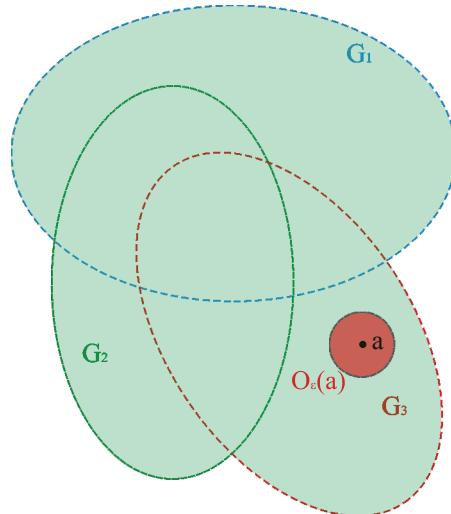
Открытые множества обладают следующими свойствами:

1. Все пространство X и \emptyset - открытые множества;
2. Объединение любого количества открытых множеств, есть множество открытое.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств есть множество открытое.

1 утверждение теоремы очевидно.

Пусть множества G_α - открыты в метрическом пространстве (X,ρ) . Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Так как точка x_0 принадлежит объединению множеств, то существует по крайней мере, одно множество G_β , которое содержит эту точку. Множество G_β - открытое, следовательно все его точки внутренние. Значит существует такой открытый шар

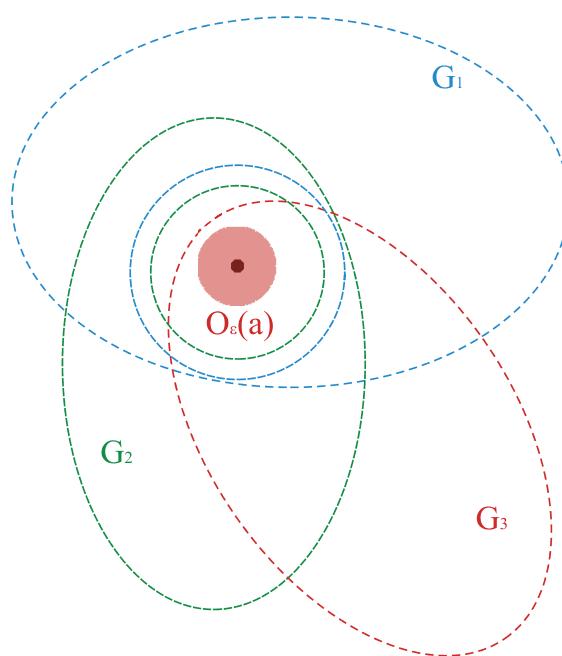
$B(x_0, \varepsilon) \subset G_\beta$. Следовательно $B(x_0, \varepsilon) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$. Таким образом произвольная точка $x_0 \in G$ оказалась внутренней, следовательно множество G - открытое.



3. Выберем произвольную точку $y_0 \in \tilde{G} = \bigcap_{n=1}^k G_n$. Так как все множества G_1, G_2, \dots, G_n открыты то

$$\exists B(y_0, \varepsilon_1) \subset G_1, \exists B(y_0, \varepsilon_2) \subset G_2, \dots, \exists B(y_0, \varepsilon_k) \subset G_k.$$

Все сферические окрестности точки y_0 отличаются лишь радиусами. Обозначим $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq k} \{\varepsilon_i\}$. Тогда сферическая окрестность $B(y_0, \varepsilon)$ будет входить во все множества G_1, G_2, \dots, G_n , а следовательно и в пересечение этих множеств. Таким образом произвольная точка $y_0 \in \tilde{G}$ оказалась внутренней, следовательно множество \tilde{G} - открытое. \triangleleft



Теорема Семейство всех замкнутых множеств обладает следующими свойствами:

1. Все пространство X и \emptyset - являются замкнутыми множествами;
2. Объединение конечного числа замкнутых множеств - замкнуто;
3. Пересечение любого числа замкнутых множеств - замкнуто.

Доказательство теоремы основано на применении формул Де Моргана.

Замечание:

Пересечение бесконечного числа открытых множеств может быть и не открыто. Рассмотрим, например, в пространстве R^1 пересечение множеств $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right) = \{0\}$. Результат пересечения одноточечное множество $\{0\}$ не является открытым множеством в R^1 .

§ 3 Понятие топологического пространства. Примеры

В теории метрических пространств открытые множества, окрестности предельные точки и другие понятия определяются с использованием понятия метрики. Возможен другой подход: определить сначала семейство множеств, называемых открытыми, а затем строить содержательную теории. Таким образом мы приходим к следующему определению:

*Пусть X - множество элементов произвольной природы. Семейство τ его подмножеств, называемых **открытыми множествами** называется **топологической структурой (топологией)** если выполнены следующие три условия (аксиомы топологического пространства)*

1. Пустое множество и все множество X принадлежат τ ;
2. Объединение любого количества множеств из τ принадлежит τ ;
3. Пересечение конечного числа множеств из τ содержится в τ .

Множество X с заданной на нем топологической структурой называется топологическим пространством.

Множество X носит название носителя топологии.

Как следует из определения из одного множества, задавая различные топологические структуры, можно получить несколько топологических пространств.

Примеры:

1. Пусть множество $X = \{a, b\}$, а семейство τ состоит из наименьшего количества множеств $\tau = \{X, \emptyset\}$. Проверкой можно убедиться, что выполнены аксиомы топологического пространства. Следовательно τ - топология, называемая **тривиальной топологией**. А пара (X, τ) называется тривиальным топологическим пространством (в случае двухэлементного носителя топологии оно называется **слипшимся двоеточием**).
2. Множество X , то же, что и в примере 1. Семейство $\tau_1 = \{X, \emptyset, a\}$ или $(\tau_1 = \{X, \emptyset, b\})$. Оно также является топологией. Пара (X, τ) в этом случае называется **связанным двоеточием**.
3. Пусть множество X по-прежнему состоит из двух точек. Определим семейство τ : $\tau_2 = \{X, \emptyset, a, b\}$. Заметим, что в данном случае семейство τ состоит из всех подмножеств множества X $\tau = G(X)$. Это семейство является топологической структурой и называется **дискретной топологией**. В нашем случае пара (X, τ) называется **простым двоеточием**.
4. Если (X, ρ) - произвольное метрическое пространство. Тогда в силу теоремы о свойстве системы открытых множеств метрического пространства это семейство удовлетворяет аксиомам топологического пространства. Таким образом всякое метрическое пространство является топологическим.
5. Обозначим единичный отрезок $I = [0;1]$. Семейство τ построим как всевозможные пересечения $I \cap u$, где u произвольные открытые множества из пространства R^1 . Можно показать, что для семейства τ выполняются аксиомы топологического пространства. Введенная таким образом топология называется естественной топологией на I .

П. 2 Сравнение топологий.

Определение

Пусть τ_1 и τ_2 - две топологии определенные на одном множестве. Если любое множество из топологии τ_2 входит в топологию τ_1 , то говорят что топология τ_1 сильнее топологии τ_2 , а топология τ_2 слабее, чем топология τ_1 .

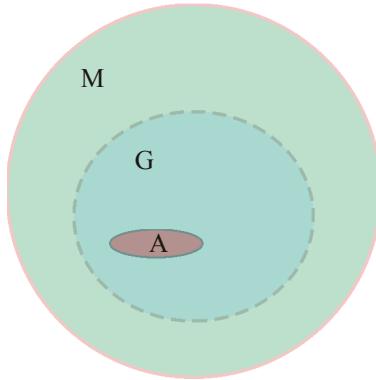
Самая слабая из всех топологий - тривиальная топология; самая сильная - дискретная.

П. 3 Окрестности. Характеристическое свойство открытых множеств.

Определение:

Окрестностью множества A называется любое множество M , содержащее открытое множество $G \supset A$.

Как следует из определения окрестностью множества A будет являться и само открытое множество G .

Примеры:

- Если (X, τ) тривиальное топологическое пространство, то любая произвольная точка имеет только одну окрестность - само множество X .
- В дискретном топологическом пространстве все множества (в том числе и одноточечные) открыты, следовательно окрестностью точки будет любое множество, содержащее эту точку.
- В пространстве R^1 окрестностью точки a будет являться не только интервал $(a-\delta, a+\delta)$, но и любой интервал (или их объединение), содержащий эту точку.

Теорема (Характеристический признак открытого множества)

Множество топологического пространства открыто тогда и только тогда, когда является окрестностью каждой своей точки.

▷ Необходимость.

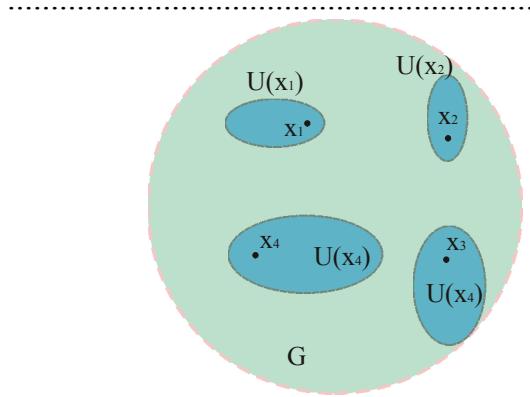
Если G - открыто, то можно записать включение $\forall x \in G \subset G$, причем $G \in \tau$. По определению G является окрестностью.

Достаточность.

Пусть некоторое множество G является окрестностью каждой своей точки. Тогда можно записать

$$\text{для точки } x_1 \exists U(x_1), x_1 \in U(x_1) \subset G, U(x_1) \in \tau$$

$$\text{для точки } x_2 \exists U(x_2), x_2 \in U(x_2) \subset G, U(x_2) \in \tau$$



Переберем все точки множества G и найдем объединение множеств участвующих во включениях, получим:

$$\bigcup_{\alpha} x_{\alpha} \subset \bigcup_{\alpha} U(x_{\alpha}) \subset G . (*)$$

Множество, стоящее в левой части включения есть множество G . Тогда включение (*) примет вид

$$G \subset \bigcup_{\alpha} U(x_{\alpha}) \subset G .$$

Откуда следует, что

$$G = \bigcup_{\alpha} U(x_{\alpha}) .$$

Объединение любого количества открытых множеств, есть множество открытое, следовательно G - открытое множество. \triangleleft

§ 4 Замкнутые множества. Свойства системы замкнутых множеств.

Определение Множество A топологического пространства называется **замкнутым**, если его дополнение открыто.

Если множество G открыто то его дополнение $X \setminus G$ замкнуто, так как множество $X \setminus (X \setminus G) = G$ открыто. Если множество $X \setminus G$ замкнуто, то его дополнение $X \setminus (X \setminus G)$ открыто. Таким образом имеет место следующее утверждение: **множество топологического пространства является открытым тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.**

Примеры

1. Если (X, τ) произвольное топологическое пространство, то X и \emptyset являются замкнутыми множествами (одновременно и открытыми по аксиоме топологического пространства), так как $X \setminus \emptyset = X$ - открытое множество и $X \setminus X = \emptyset$ - также открытое множество.
2. Если (X, τ) - дискретное пространство, то все множества в нем являются замкнутыми и открытыми.
3. В пространстве R^1 , замкнутым множеством, например, будет являться отрезок $[a;b]$, т.к. его дополнение $R \setminus [a;b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ - открыто.
4. В пространстве "связное двоеточие" $X = \{a, b\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ замкнутыми множествами являются $X, \emptyset, \{b\}$. Других замкнутых множеств в этом пространстве нет.

Теорема Система всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) обладает следующими свойствами:

1. X и \emptyset являются замкнутыми множествами;
2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто;
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

▷ Первое утверждение доказано в примере №1.

2. Пусть $\{F_\alpha\}$ система замкнутых множеств. Тогда, с учетом того факта, что замкнутое множество есть дополнение открытого, получаем
- $$\bigcap_{\alpha} F_\alpha = \bigcap_{\alpha} (X \setminus G_\alpha) = X \setminus \bigcup_{\alpha} G_\alpha, \text{ т.к. объединение открытых множеств есть множество}$$
- открытое, а его дополнение - замкнуто, то множество $X \setminus \bigcup_{\alpha} G_\alpha$ - замкнуто.

3. Аналогично найдем объединение конечного числа замкнутых множеств:

$$\bigcup_{n=1}^k F_n = \bigcup_{n=1}^k (X \setminus G_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^k G_n, \text{ так как пересечение конечного числа открытых мно-}$$

жеств G_k есть множество открытое, то множество $X \setminus \bigcap_{n=1}^k G_n$ - замкнуто. ◁

Свойства системы замкнутых множеств, целиком ее характеризуют, поэтому возможен подход, когда эти свойства принимают за систему аксиом при определении топологического пространства. Таким образом имеет место, следующая

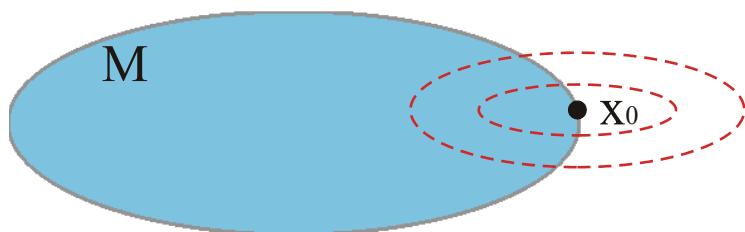
Теорема Пусть X - произвольное множество и λ семейство его подмножеств, обладающее следующими свойствами:

1. $X, \emptyset \in \lambda$;
2. Пересечение любого количества множеств из λ принадлежит λ ;
3. Объединение конечного числа множеств из λ принадлежит λ .

Обозначим через τ , семейство дополнений всевозможных множеств из λ . Тогда τ является топологией на X , а λ - система замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) .

§ 5 Замыкание множества. Оператор замыкания

Определение Точка x_0 топологического пространства X называется **точкой прикосновения** множества M , если любая окрестность этой точки имеет с множеством M непустое пересечение.



Определение Совокупность всех точек прикосновения множества M называется **замыканием** множества M и обозначается \bar{M} . Операция присоединения к множеству всех его точек прикосновения называется **операцией замыкания**.

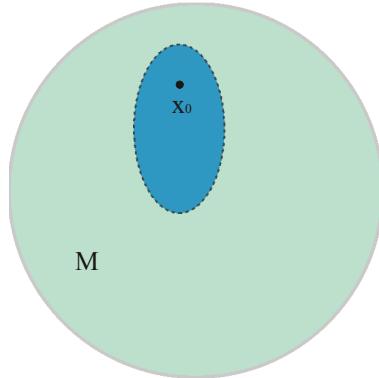
Пример

В метрическом пространстве замыканием открытого шара является замкнутый шар.

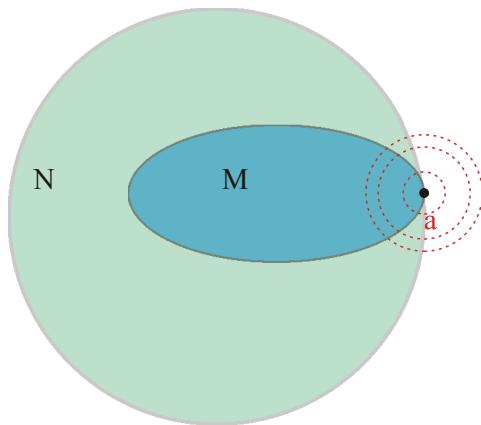
Теорема: Операция замыкания обладает следующими свойствами:

1. $M \subset \overline{M}$;
2. Если $M \subset N$ то $\overline{M} \subset \overline{N}$ (монотонность операции замыкания);
3. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$;
4. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$;

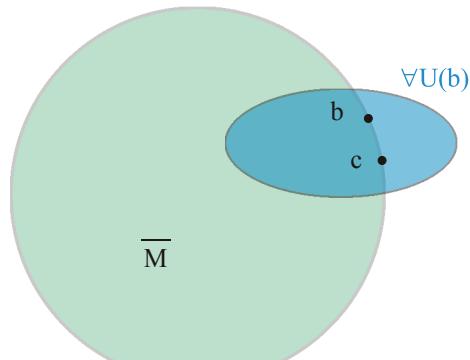
▷ Первое свойство вытекает непосредственно из определения, действительно пусть $\forall x_0 \in M$ и произвольная окрестность этой точки $U(x_0) \cap M \supset \{x_0\} \neq \emptyset$, что означает что точка x_0 является точкой прикосновения множества M .



2. Пусть $\forall a \in \overline{M} \Rightarrow \forall U(a) \cap M \neq \emptyset$, т.к. $M \subset N$ то $U(a) \cap N \neq \emptyset$ следовательно $a \in \overline{N} \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{N}$.



3. В силу свойств 1 и 2 $M \subset \bar{M} \Rightarrow \bar{M} \subset \overline{\bar{M}}$. Докажем противоположное включение, т.е. $\overline{\bar{M}} \subset \bar{M}$.



Пусть $\forall b \in \overline{\bar{M}}$ это означает, что произвольная окрестность точки b имеет с множеством \bar{M} непустое пересечение, т.е.

$$\forall U(b) \cap \bar{M} \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} \exists c \in U(b) \\ c \in \bar{M} \end{cases} \Rightarrow U(b) \cap M \neq \emptyset \Rightarrow b \in \bar{M},$$

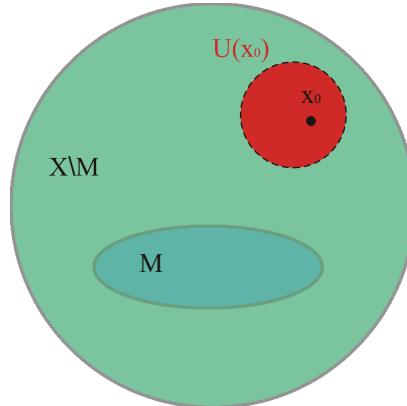
последнее означает, что $\overline{\bar{M}} \subset \bar{M}$.

(Свойство 4 будет доказано ниже).

Теорема Множество M топологического пространства X , замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием \bar{M} .

▷ Необходимость. Пусть M замкнуто, тогда $G = X \setminus M$ открыто. Докажем, что $\bar{M} \subset M$, т.е. каждая точка прикосновения принадлежит M . Пусть. Так как множество G открытое, то оно является окрестностью каждой своей точки, следовательно существует окрестность $U(x_0) \subset G$. Тогда $U(x_0) \cap M = \emptyset$. Следовательно точка x_0 не является точкой прикосновения множества M . Следовательно $\bar{M} \subset M$. Ранее было доказано $M \subset \bar{M}$, следовательно $M = \bar{M}$.

Достаточность. Пусть $M = \bar{M}$ докажем, что $G = X \setminus M$ является открытым множеством, а потому M - замкнуто. Пусть произвольная точка $x_0 \in G \Rightarrow x_0 \notin M$. Так как $M = \bar{M}$ то $x_0 \notin \bar{M}$ т.е. не является точкой прикосновения множества M . Следовательно существует такая окрестность этой точки, которая не пересекается с множеством M .



Мы получили, что множество $G = X \setminus M$ является окрестностью каждой своей точки. Следовательно G - открыто, а M - замкнуто. □

Следствие Замыкание \bar{M} множества M из пространства X является замкнутым множеством в топологическом пространстве X .

Теорема Замыкание любого множества M пространства X совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих M .

▷ Пусть M произвольное множество топологического пространства X и $N = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$, где пересечение происходит по всем замкнутым множествам, содержащим множество M . По построению множества N оно является замкнутым и является подмножеством любого замкнутого множества, содержащего M , в частности, является подмножеством \bar{M} , т.к. это множество замкнуто и содержит M . Таким образом $N \subset \bar{M}$.

Докажем обратное включение. Для этого возьмем произвольное замкнутое множество $F \supset M$. Так как для замкнутого множества $F = \bar{F}$ из монотонности операции замыкания получим $M \subset F \Rightarrow \bar{M} \subset \bar{F} = F$. Таким образом, замыкание \bar{M} содержится в каждом замкнутом множестве F , содержащим M , следовательно \bar{M} будет содержаться и в пересечении таких множеств, т.е. $\bar{M} \subset N$. Два противоположные включения означают, что множества равны т.е. $\bar{M} = N$ ◁.

Докажем свойство 4 операции замыкания.

Рассмотрим произвольные множества M и N . Имеют место очевидные включения $\begin{cases} M \subset M \cup N \\ N \subset M \cup N \end{cases}$. Используем монотонность операции замыкания

$$\begin{cases} M \subset M \cup N \\ N \subset M \cup N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{M} \subset \overline{M \cup N} \\ \bar{N} \subset \overline{M \cup N} \end{cases} \Rightarrow \bar{M} \cup \bar{N} \subset \overline{M \cup N};$$

С другой стороны

$$\begin{cases} M \subset \bar{M} \\ N \subset \bar{N} \end{cases} \Rightarrow M \cup N \subset \bar{M} \cup \bar{N} \Rightarrow \overline{M \cup N} \subset \overline{\bar{M} \cup \bar{N}}. \quad (*)$$

Так как $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$, то из включения (*) получаем $\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}$. Из двух противоположных включений следует равенство $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ что и требовалось доказать.

Имеет место следующая

Теорема (Куратовского) Пусть на произвольном множестве X задан оператор, ставящий в соответствие каждому подмножеству $A \subset X$ множество A^c таким образом, что выполняются следующие условия:

1. $\emptyset^c = \emptyset$;
2. $A \subset A^c$ для любого множества $A \subset X$;
3. $A^{cc} = A^c$;
4. $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$ для любых множеств $A \subset X$ и $B \subset X$;

Если λ семейство всех множеств A ($A \subset X$), для которых $A^c = A$, а τ семейство подмножеств X , состоящее из дополнений к множествам из λ , то τ - топология на X , причем для каждого множества $A \subset X$ множество A^c совпадает с \overline{A} - замыканием A в топологическом пространстве (X, τ) .



Биографическая справка

Куратовский Кажимеж (Kuratowski Kazimerz) 2.2. 1986-18.6.1980 - польский математик. С 1927 проф. Политехники во Львове, с 1934 профессор университета в Варшаве, с 1948 директор математического института Польской АН. Основные труды по теории множеств, топологии и теории функций действительного переменного.

Определение Точка x_0 топологического пространства X называется **предельной точкой** множества A , если любая окрестность этой точки, содержит хотя бы одну точку из A , отличную от x_0 .

Очевидно, что всякая предельная точка является точкой прикосновения. Обратное не верно. Так изолированные точки могут являться точками прикосновения но не являются предельными точками.

Очевидно, что каждая точка множества $\overline{M} \setminus M$ является предельной. Таким образом замыкание \overline{M} состоит из точек трех видов:

- изолированные точки;
- предельные точки, принадлежащие множеству;
- предельные точки, не принадлежащие множеству;

Определение Совокупность всех предельных точек множества M называется **производным множеством** и обозначается M' .

Определение Множество M топологического пространства X называется **совершенным**, если оно совпадает со своим производным множеством.

Очевидно, что множество совершенно тогда и только тогда, когда оно во - первых замкнуто, во- вторых лишено изолированных точек.

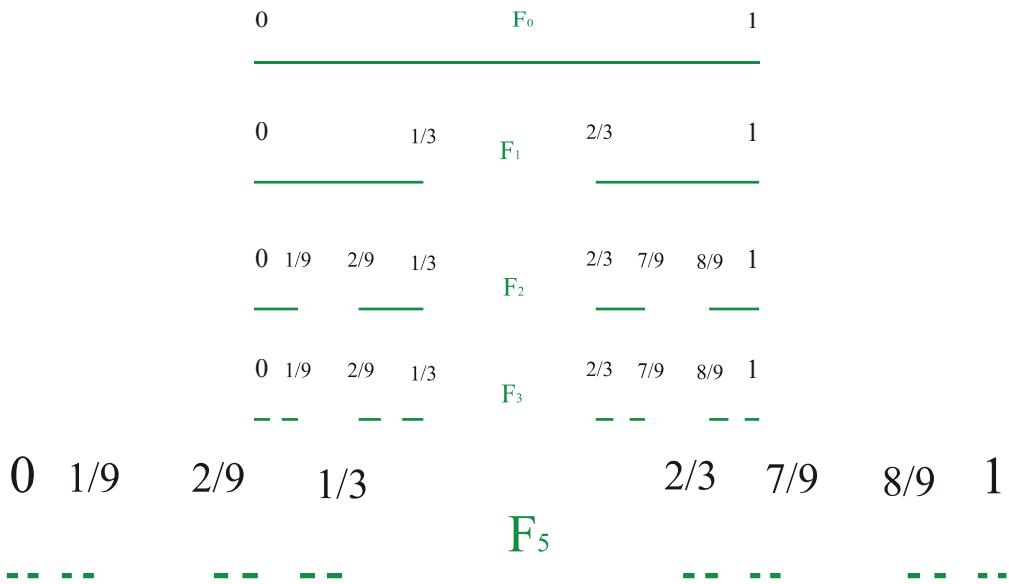
Примером совершенного множества является множество на числовой прямой, построенное создателем классической теории множеств, немецким математиком Георгом Кантором.

Рассмотрим замкнутое множество $[0;1]$. Обозначим его F_0 . Разделим этот отрезок на три равные части и удалим из него средний интервал $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ длиной $\frac{1}{3}$. Оставшееся множество $\left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right]$ обозначим F_1 . С каждым из оставшихся отрезков поступим как и с предыдущим: разделим на три равные части и удалим средний интервал. Таким образом из F_1 удаляются два интервала $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$, имеющие длину $\frac{1}{3^2}$. Объединение оставшихся четырех отрезков обозначается F_2 .

Продолжая этот процесс мы получаем бесконечную последовательность вложенных друг в друга множеств:

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset F_{n+1} \dots$$

Замкнутое множество $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$, которое является пересечением построенных выше множеств называется **канторовым совершенным множеством или канторовым дисконтиуумом**.



Приведем (без доказательства) два утверждения, которые описывают некоторые свойства этого множества:

Теорема Канторов дисконтиуум является совершенным множеством.

Теорема Канторов дисконтиуум имеет мощность континуума.

§ 6 Внутренность, внешность, граница

Определение Точка x множества A топологического пространства (X, τ) называется **внутренней точкой** множества A , если существует окрестность U точки x , целиком содержащаяся в A . Множество A° всех внутренних точек множества A называется **внутренностью** (или ядром) множества A .

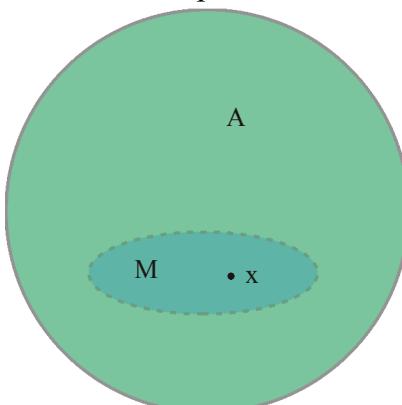
Теорема если A - произвольное множество топологического пространства, то

1. Внутренность A° множества A является открытым множеством;
2. Множество A° является наибольшим открытым множеством, содержащимся в A ;
3. Множество A открыто тогда и только тогда, когда $A = A^\circ$;
4. Множество всех точек из A , не являющихся предельными для $X \setminus A$ равно A° ;
5. $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$;

▷ Докажем некоторые свойства

1. Пусть $x \in A^\circ$, тогда x - внутренняя точка множества A т.е. существует окрестность $U \subset A$. Но множество U является окрестностью каждой своей точки. Следовательно все точки множества U - внутренние для A , поэтому $U \subset A^\circ$. Следовательно множество A° является окрестностью каждой своей точки и поэтому является открытым множеством.

2. Возьмем произвольное открытое множество M входящее в A .



Пусть произвольная точка $x \in M$, так как M является окрестностью каждой своей точки, то оно является окрестностью и для x . Имеем $x \in M \subset A$. Получаем, что точка x является внутренней точкой множества A , т.е. $x \in A^\circ$. Тем самым доказано включение $M \subset A^\circ$. Это означает, что любое открытое множество, входящее в A , входит и в A° , следовательно внутренность A° является максимальным открытым множеством, содержащимся в A .

3. Если A открыто, то оно совпадает с максимальным открытым множеством, входящим в A , т.е. $A = A^\circ$.

Наоборот, если $A = A^\circ$, то A - открытое множество, т.к. A° - открыто.

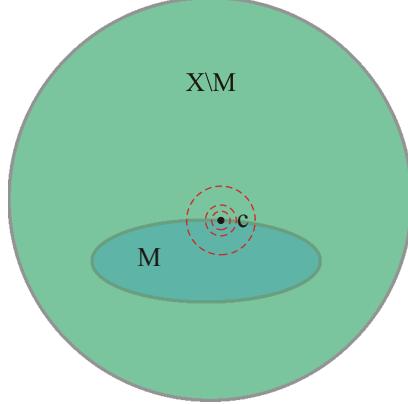
Примеры

1. В тривиальном пространстве (X, τ) у каждой точки только одна окрестность - X . Тогда $X^0 = X$, $\emptyset^0 = \emptyset$.
2. В дискретном топологическом пространстве все множества открыты (и замкнуты одновременно). Внутренностью каждого множества будет являться само множество.
3. В топологическом пространстве R^1 (т.е. на числовой прямой) внутренностью сегмента $[a;b]$ является интервал $(a;b)$.

Определение Точка с называется **граничной точкой множества M** , если она является точкой прикосновения одновременно для двух мно-

жеств: M и $X \setminus M$. Совокупность всех граничных точек множества M называется **границей** множества M .

Будем обозначать границу множества A $b(A)$. Сформулируем теорему о свойствах границы.



Теорема Если A - произвольное множество топологического пространства, то

1. $b(A) b(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$;
2. $X \setminus b(A) = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$;
3. $\overline{A} = A \cup b(A)$;
4. $A^\circ = A \setminus b(a)$;
5. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $b(A) \subset A$;
6. Множество A открыто тогда и только тогда, когда $A \cap b(A) = \emptyset$.

Данное утверждение примем без доказательства.

Определение Точка x называется **внешней точкой** множества A , если она является **внутренней точкой** дополнения множества A . Совокупность всех внешних точек множества A называется **внешностью** этого множества.

§ 7. База топологии. Аксиомы счетности

Известен факт, что в метрических пространствах открыты те и только те множества, которые можно представить в виде объединения открытых шаров. Эта идея привела к введению в топологических пространствах нового понятия.

Определение Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Базой топологии τ называется семейство подмножеств β , удовлетворяющее следующими свойствами:

1. $\beta \subset \tau$;
2. Для каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U существует такое множество $V \in \beta$, что $x \in V$ и $V \subset U$.

База топологии определяется неоднозначно. На числовой прямой базу топологии образует семейство всех открытых интервалов. Но семейство открытых интервалов с рациональными концами также будет образо-

вывать базу. В метрическом пространстве семейство открытых шаров образует базу метрического пространства. Множество шаров с рациональными радиусами так же образует базу.

Докажем теорему (критерий базы), которая часто принимается за определение базы

Теорема Подмножество β топологии τ топологического пространства (X, τ) тогда и только тогда образует базу этой топологии, когда каждое непустое множество из τ представимо в виде объединения некоторого количества множеств из β .

► Пусть β - база топологии и A - произвольное открытое множество, т.е. $A \in \tau$.

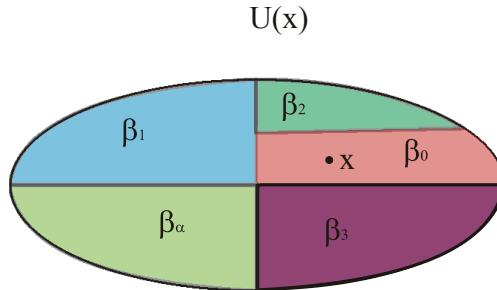
Пусть $x_1 \in A \Rightarrow \exists U_1 \in \beta, x_1 \in U_1 \subset A;$

$x_2 \in A \Rightarrow \exists U_2 \in \beta, x_2 \in U_2 \subset A;$

Переберем все точки множества A и найдем объединение всех включений, получаем

$$A \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \subset A \Leftrightarrow A = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}.$$

Таким образом получили, что A есть объединение множеств из β .



Пусть теперь $\beta \subset \tau$ и любое открытое множество можно представить в виде объединения множеств из β . Докажем, что β - база топологии τ . Возьмем произвольную точку x и произвольную окрестность U этой точки. Так как $U = \bigcup_{\alpha} \beta_{\alpha}$, где $\beta_{\alpha} \in \beta$. Очевидно, что $x \in \bigcup_{\alpha} \beta_{\alpha}$, следовательно $\exists \beta_0, x \in \beta_0$. Обозначим $V = \beta_0$. Мы получили, что для произвольной точки x и любой ее окрестности U существует множество $V \in \beta$ такое, что $x \in V$ и $V \subset U$. Следовательно β - база топологии τ . \triangleleft

Следствие Если на некотором множестве заданы две топологии, имеющие одну и ту же базу, то эти топологии совпадают.

Имеет место следующая

Теорема Семейство множеств $\beta = \{U_{\alpha}\}$ является базой некоторой топологии на множестве $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ тогда и только тогда, когда для любых двух множеств $U, V \in \beta$ и каждой точки $x \in U \cap V$ существует такое множество $W \in \beta$, что $x \in W$ и $W \subset U \cap V$.

Определение Конечным пресечением множеств некоторой совокупности называется пересечение любой конечной совокупности этих множеств.

Определение Пусть (X, τ) топологическое пространство. Семейство μ подмножеств X называется **предбазой** топологии τ , если совокупность всех конечных пересечений множеств из μ образует базу топологии τ .

Другими словами, μ - предбаза топологии τ , если каждое множество из τ представимо в виде объединения конечных пересечений из μ .

Определение Если в топологическом пространстве (X, τ) существует счетная база, то топологическое пространство (X, τ) называют **удовлетворяющим второй аксиоме счетности**.

Определение Множество A топологического пространства (X, τ) называется **всюду плотным в X** , если замыкание этого множества совпадает с пространством X , т.е. $\bar{A} = X$.

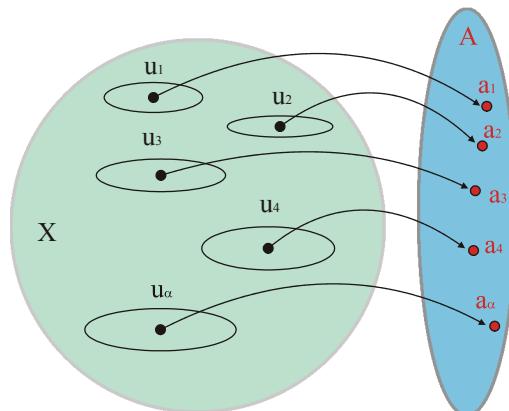
Определение Топологическое пространство называется **сепарабельным**, если в нем существует счетное, всюду плотное множество.

Примеры

- Числовая прямая удовлетворяет второй аксиоме счетности. Роль счетной базы выполняет система открытых интервалов с рациональными концами. Числовая прямая является также сепарабельным пространством, так как множество рациональных чисел счетно и всюду плотно в пространстве R^1 .
- В дискретном пространстве (X, τ) минимальной базой является семейство всех одноточечных множеств. Следовательно это пространство будет удовлетворять второй аксиоме счетности если носитель топологии будет счетным множеством.

Теорема Топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.

▷ Пусть (X, τ) топологическое пространство и $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ его счетная база.



Выделим из множества u_1 элемент a_1 , из множества u_2 элемент a_2 и т.д. Обозначим $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Очевидно, что A не более чем счетное

множество. Рассмотрим $X \setminus \bar{A}$. Так как \bar{A} замкнуто, то $X \setminus \bar{A}$ открыто. Следовательно как любое открытое множество оно может быть представлено в виде объединения некоторого количества множеств из базы т.е.

$$X \setminus \bar{A} = \bigcup_i u_i.$$

Элемент $\begin{cases} a_1 \in A \\ a_1 \in u_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 \in \bar{A} \Rightarrow a_1 \notin X \setminus \bar{A}$ следовательно u_1 не входит в объединение $\bigcup_i u_i$. Такие рассуждения справедливы для всех элементов a_i множества A . Следовательно ни одно из множеств базы не входит в объединение. Это означает, что $X \setminus \bar{A} = \emptyset \Leftrightarrow X = \bar{A}$. Последнее равенство, учитывая счетность множества A , означает сепарабельность топологического пространства X . \triangleleft

П. Система окрестностей точки. Первая аксиома счетности

Определение Системой окрестностей точки x топологического пространства (X, τ) называется совокупность всех окрестностей этой точки.

Определение Семейство окрестностей точки x называется базой системы окрестностей точки x или базой в x , если в каждой окрестности точки x содержится некоторая окрестность из совокупности.

Определение Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, если система окрестностей произвольной точки обладает счетной базой.

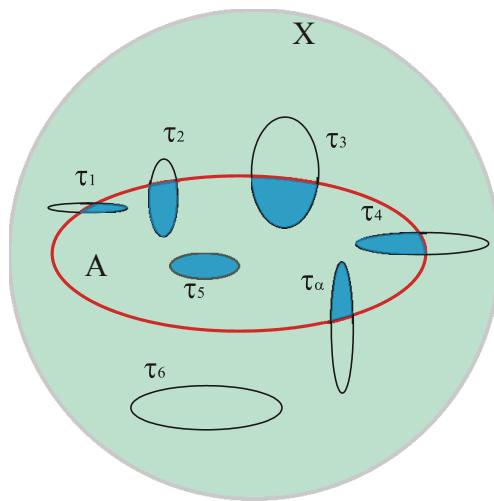
Примером пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности является любое метрическое пространство. Базой системы окрестностей точки образуют здесь открытые шары с центром в точке и имеющие рациональный радиус.

Очевидным является утверждение: Топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет и первой аксиоме счетности.

§ 8. Подпространства и отделенность

В метрическом пространстве каждое подмножество образует также метрическое пространство. Аналогичная идея имеет место и в топологических пространствах.

Пусть (X, τ) топологическое пространство и A - подмножество множества X . Обозначим через τ_A систему множеств, являющихся всевозможными пересечениями A и всех подмножеств из топологической структуры τ :



Другими словами множества системы τ_A представляют собой множества вида $\tau_j \cap A$, где $\tau = \{\tau_j\}$ - топология. Докажем, что совокупность τ_A удовлетворяет аксиомам топологического пространства.

1. Так как $X, \emptyset \in \tau$ $\emptyset = \emptyset \cap A$, $A = X \cap A$, следовательно $\emptyset, A \in \tau_A$;
2. Пусть множества U_α принадлежат семейству τ_A , тогда

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (V_{\alpha} \cap A) = \left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \right) \cap A, \text{ где множества } V_{\alpha} \in \tau. \text{ Так как}$$

$$\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \in \tau, \text{ то } \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \in \tau_A;$$

3. Выполнение третьей аксиомы доказывается аналогично п.2.

Определение Семейство τ_A называется **топологией на A , индуцированной топологией τ** . Топологическое пространство (A, τ_A) называется **подпространством топологического пространства (X, τ)** .

Определение Множества A и B топологического пространства (X, τ) называются **отделенными** в этом пространстве, если выполнены следующие два условия:

1. $\overline{A} \cap B = \emptyset$;
2. $A \cap \overline{B} = \emptyset$;

т.е. если в каждом из множеств нет ни точек другого множества ни его предельных точек.

Например множества $A=(0;1)$ и $B=(1;2)$ в пространстве R^1 являются отделенными.

Определение. Пусть на множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2 , если $\tau_1 \subset \tau_2$, то говорят что топология τ_1 мажорирует топологию τ_2 , если кроме того $\tau_1 \neq \tau_2$ то говорят, что топология τ_1 сильнее топологии τ_2 .

Замечание. Если топология τ_1 мажорирует топологию τ_2 , то всякое множество из X открытое в топологии τ_2 открыто и в топологии τ_1 .

Теорема. Пусть τ_1 и τ_2 две топологии на множестве X , тогда эквивалентны следующие утверждения:

- a) τ_1 мажорирует τ_2 .
- б) тождественное отображение из $X_1 \rightarrow X_2$ (где X_i – множество

X наделенное топологией τ_i , $i = 1, 2$) непрерывно.

в) Всякая окрестность точки $x \in X$ в топологии τ_2 является окрестностью точки x в топологии τ_1 .

г) Для всякого $A \subset X$ замыкание A в топологии τ_1 содержится в замыкании A в топологии τ_2 .

д) Всякое множество из X , замкнутое в топологии τ_2 , замкнуто в топологии τ_1 .

Доказательство. а) \Rightarrow б) Пусть τ_1 мажорирует τ_2 . Рассмотрим тождественное отображение $1_X : X_1 \rightarrow X_2$, если V открыто в X_2 , т.е.

$V \in \tau_2$, то $(1_X)^{-1}(V) = V \in \tau_1$, т.е. $(1_X)^{-1}(V)$ открыто в X_1 , что и означает отображение $1_X : X_1 \rightarrow X_2$ непрерывно.

б) \Rightarrow в) Пусть V_x - окрестность точки x в X_2 , т.к. $(1_X)(x) = x$ и по предположению 1_X - непрерывно, то $V_x = (1_X)^{-1}(V_x)$ окрестность точки x в X_1 .

в) \Rightarrow г) Пусть $A \subset X$ и пусть \bar{A}_i - замыкание A в топологии τ_i ($i = 1, 2$).

Если $x \in \bar{A}_1$ и V_x - окрестность точки x в топологии τ_2 , тогда V_x - окрестность точки x в топологии τ_1 и следовательно $V_x \cap A \neq \emptyset$, т.е. $x \in \bar{A}_2$. Т.о. $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$.

г) \Rightarrow д) Пусть B замкнуто в X_2 , тогда $\bar{B}_2 = B$, то из (2) следует $\bar{B}_1 \subset \bar{B}_2 = B$, т.о. $\bar{B}_1 = B$, что и означает B замкнуто в X_1 .

д) \Rightarrow а) Пусть V открыто в X_2 , тогда $X \setminus V$ - замкнуто в X_2 и следовательно $X \setminus V$ - замкнуто в X_1 и поэтому V открыто в X_1 .
Т.о. доказано, что если $V \in \tau_2$ то $V \in \tau_1$, т.е. $\tau_2 \subset \tau_1$.

Теорема доказана.

Пусть $f : X \rightarrow Y$, где X - множество, Y - топологическое пространство, если τ такая топология в X , что отображение f непрерывно, то f будет непрерывным отображением и для всякой топологии мажорирующей топологию τ .

Определение. Пусть $f : X \rightarrow Y$, где X - множество, Y - топологическое пространство, слабеющая топология на X , относительно которой отображение f непрерывно, называется прообразом топологии на Y относительно отображения f .

Замечание. Т.о. если τ - прообразом топологии на Y относительно отображения f , то τ состоит из всех множеств вида $f^{-1}(V)$, где V открыто в Y .

Определение. Пусть $f_i : X \rightarrow Y_i$ (где $i \in I$) - семейство отображений, где X - множество, $(Y_i)_{i \in I}$ - семейство топологических пространств, топология τ на X такая, что для всякого топологического пространства Z отображение $h : Z \rightarrow X$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны $f_i \circ h$ для всякого $i \in I$ называется инициальной топологией на X относительно семейства $f_i : X \rightarrow Y_i$.

Лемма. Пусть τ инициальная топология на X относительно

семейства $f_i : X \rightarrow Y_i$, если τ' такая топология на X , что все отображения $f_i : X \rightarrow Y_i$ непрерывны, то τ' мажорирует τ .

Доказательство. Обозначим X - топологическое пространство с топологией τ , а X' - с топологией τ' , и пусть $1_X : X' \rightarrow X$ - тождественное отображение, тогда $f_i \circ 1_X = f_i$ - непрерывны, следовательно отображение $1_X : X' \rightarrow X$ непрерывно, что и означает τ' мажорирует τ .

Следствие. Инициальная топология на X относительно семейства отображений $f_i : X \rightarrow Y_i$ - единственна.

Доказать самостоятельно.

Покажем что инициальная топология на X относительно семейства $\{f_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ существует. Пусть $U_i = f^{-1}(V_i)$, где V_i открыто в Y_i . Рассмотрим в X множество всех подмножеств вида $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_k}$, это множество является базой некоторой топологии τ на X (проверить самостоятельно). Относительно топологии τ все отображения f_i - непрерывны, и поэтому если $h : Z \rightarrow X$ непрерывное отображение, то и все $f_i \circ h$ - непрерывны.

Пусть теперь непрерывны все $f_i \circ h : Z \rightarrow Y_i$, покажем что в этом случае непрерывно отображение h , для этого достаточно проверить в случае когда открытыми в X берутся базисные множества топологии τ . Имеем $h^{-1}(U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_k}) = h^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap h^{-1}(U_{i_k})$, но $f_i \circ h$ - непрерывны, поэтому $h^{-1}(U_{i_s}) = h^{-1}(f_i^{-1}(V_{i_s})) = (f_i \circ h)^{-1}(V_{i_s})$ ($s = 1, 2, \dots, k$) открыто в Z , следовательно, $h^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap h^{-1}(U_{i_k})$ - открыто в Z . Т.о. $h : Z \rightarrow X$ - непрерывное отображение. Топология τ на X - инициальная топология относительно семейства отображений $f_i : X \rightarrow Y_i$. Кроме того, очевидно, что инициальная топология на X относительно семейства $f_i : X \rightarrow Y_i$ является слабейшей топологией на X , относительно которой непрерывны все отображения $f_i : X \rightarrow Y_i$.

Важнейшим примером инициальной топологии является произведение топологий.

Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ - семейство топологических пространств и $X = \prod_{i \in I} X_i$,

слабеющая топология на $\prod_{i \in I} X_i$ относительно которой непрерывны все

$pr_i : X \rightarrow X_i$ называется произведением топологий пространств X_i .

Определение. Пусть $\{f_i : Y_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ семейство отображений, причем X - множество, $\{Y_i\}_{i \in I}$ - семейство топологических пространств, топология τ на X , такая что для всякого топологического пространства Z отображение $h : X \rightarrow Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все отображения $h \circ f_i$ ($i \in I$) называется финальной топологией на X относительно семейства $\{f_i : Y_i \rightarrow X\}_{i \in I}$.

Лемма. Пусть τ - финальная топология на X относительно семейства $f_i : Y_i \rightarrow X$, если τ' такая топология на X , что все

отображения $f_i : Y_i \rightarrow X$ непрерывны, то τ мажорирует τ' .

Доказательство. аналогично для инициальных топологий
Также как и для инициальных топологий следует единственность
финальной топологии на X относительно семейства отображений $f_i : Y_i \rightarrow X$.
Покажем что финальная топология на X относительно семейства
отображений $f_i : Y_i \rightarrow X$ существует. Рассмотрим множество всех
подмножеств V в X таких, что $f_i^{-1}(V)$ открыто в Y_i для всякого $i \in I$.
Множество таких подмножеств в X является некоторой топологией
 τ на X . (проверить самостоятельно). Очевидно, что в этой топологии
на X непрерывны все отображения f_i , и поэтому если h - непрерывно,
то и все $h \circ f_i$ - непрерывны.

Пусть теперь непрерывны все $h \circ f_i : Y_i \rightarrow Z$. Покажем что в этом
случае h - непрерывно, пусть U открыто в Z , тогда
 $h^{-1}(U) = V$ и $f_i^{-1}(V) = f_i^{-1}(h^{-1}(U)) = (h \circ f_i)^{-1}(U)$ открыто в Y_i ($i \in I$), что и
означает V открыть в τ на X . Таким образом топология τ на X
является финальной относительно семейства отображений $f_i : Y_i \rightarrow X$.

Кроме того, очевидно, что финальная топология на X относительно
семейства отображений $f_i : Y_i \rightarrow X$ сильнейшая топология на X ,
относительно которой непрерывны все отображения $f_i : Y_i \rightarrow X$.

Простым, но очень важным примером финальной топологии является
фактортопология. Пусть X - топологическое пространство и на X
(как множестве) задано отношение эквивалентности, тогда возникает
фактор множество X/R и естественная проекция $\pi : X \rightarrow X/R$,
сильнейшая топология на X/R , при которой непрерывна проекция π ,
называется фактортопологией топологии пространства X .

§ 9. Связность

Понятие связности есть математически строгое отражение интуитивного представления о целостности геометрической фигуры.

Определение Топологическое пространство X называется **несвязным**, если его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых (замкнутых) множеств

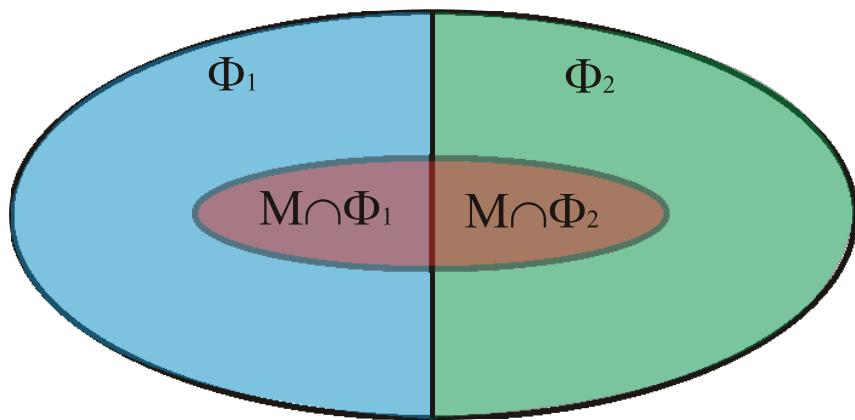
$$X = \Phi_1 \cup \Phi_2,$$

в противном случае пространство называется **связным**.

Замечание Множества Φ_1, Φ_2 связаны соотношениями $\Phi_1 = X \setminus \Phi_2$, $\Phi_2 = X \setminus \Phi_1$ поэтому эти множества одновременно и открыты и замкнуты. Все дальнейшие утверждения данного параграфа сформулированные для открытых множеств будут справедливы для замкнутых множеств и наоборот.

Множество M топологического пространства X называется связным, если оно является связным рассматриваемое как подпространство.

Теорема 1 Пусть в топологическом пространстве X даны два непустых непересекающихся замкнутых множества Φ_1 и Φ_2 и непустое связное множество M , содержащееся в объединении множеств $\Phi_1 \cup \Phi_2$, тогда множество M содержится в каком-нибудь одном множестве Φ_1 или Φ_2 .



▷ Имеем, что $M \subset \Phi_1 \cup \Phi_2$. Представим множество M в виде

$$M = (M \cap \Phi_1) \cup (M \cap \Phi_2).$$

Так как Φ_1 и Φ_2 замкнуты, то множества $M \cap \Phi_1$ и $M \cap \Phi_2$ замкнуты в M . Так как множество M связно, то одно из множеств $M \cap \Phi_1$ или $M \cap \Phi_2$ должно быть пустым, откуда и следует утверждение теоремы. ◁

Теорема 2 Если для любых двух точек x и y пространства X можно найти связное множество C_{xy} , содержащее эти точки, тогда все пространство X связно.

▷ Предположим, что все пространство X несвязно т.е.

$$X = \Phi_1 \cup \Phi_2,$$

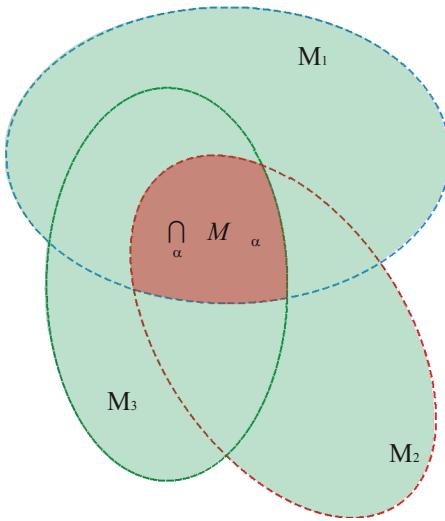
где Φ_1 и Φ_2 непустые непересекающиеся множества. Возьмем $x \in \Phi_1$, а $y \in \Phi_2$. Тогда связное множество C_{xy} , имеющее с множеством Φ_1 общую точку x должно содержаться в этом множестве. С другой стороны $y \in \Phi_2 \cap C_{xy}$ и, следовательно, мно-

жество C_{xy} должно содержаться во множестве Φ_2 . Но множества Φ_1 и Φ_2 не пересекаются. Полученное противоречие и доказывает теорему. \triangleleft

Теорема 3 *При соединяя к связному множеству C любое число точек прикосновения, получим связное множество.*

► Предположим противное, тогда полученное множество C_0 представимо в виде $C_0 = \Phi_1 \cup \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 непустые непересекающиеся замкнутые множества. Тогда связное множество $C \subset \Phi_1 \cup \Phi_2$ и по теореме 1 оно должно содержаться в одном из двух множеств, входящих в объединение. Пусть $C \subset \Phi_1$. Тогда, так как Φ_1 - замкнуто, то любая точка прикосновения множества $C \subset \Phi_1$ должна также принадлежать множеству Φ_1 , получили, что $C_0 \subset \Phi_1$, а следовательно $\Phi_2 = \emptyset$. Получили противоречие, которое доказывает теорему. \triangleleft

Теорема 4 *Пусть в топологическом пространстве X , дана система (любой мощности) связных множеств M_α , причем пересечение всех этих множеств не пусто. Тогда их объединение является связным множеством.*



► Предположим, что $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$ не связно, т.е.

$$M = \Phi_1 \cup \Phi_2,$$

тогда связные множества M_α должны содержаться либо в Φ_1 , либо в Φ_2 . По условию теоремы существует точка a , принадлежащая всем множествам M_α . Пусть $a \in \Phi_1$, тогда все $M_\alpha \subset \Phi_1$, а $\Phi_2 = \emptyset$. Получили противоречие, доказывающее теорему. \triangleleft

Определение *Компонентой топологического пространства называется любое его максимальное связное множество.*

Если топологическое пространство связно, то оно является единственной своей компонентой.

Теорема 5 *Каждое связное множество топологического пространства содержится в некоторой компоненте. Любая компонента топологического пространства является замкнутым множеством; любые различные компоненты отделены.*

▷ 1. Пусть M - произвольное непустое связное множество. Обозначим через K - объединение всех связных множеств, содержащих M . Эти множества пересекаются (по M). По теореме 4 множество K связно. Если некоторое связное множество A содержит K , то $A \supset M$ и, значит $A \subset K$. Следовательно $A = K$. Это означает что, K - максимальное связное множество, т.е. компонента, содержащая множество M .

2. Пусть K - произвольная компонента топологического пространства. По определению компоненты множество K связно. Но замыкание множества K , также связно. Учитывая максимальность компоненты K получаем включение $K \subset \bar{K}$. С учетом обычного включения $K \subset \bar{K}$ получаем $K = \bar{K}$. Последнее равенство означает замкнутость множества K .

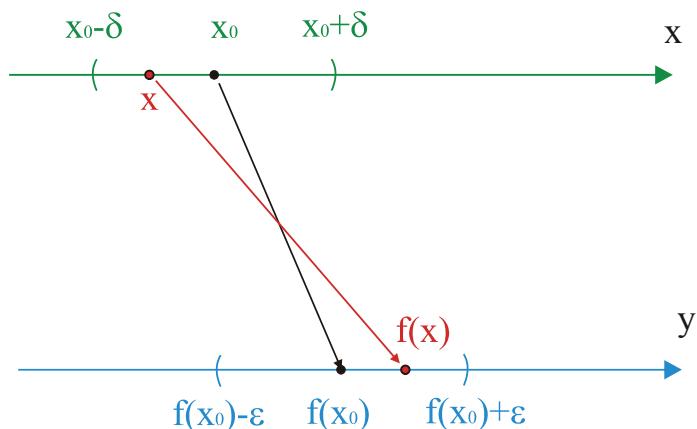
3. Если K_1 и K_2 - две различные не отделенные компоненты. Тогда $K_1 \cup K_2$ связно по теореме 4, причем каждое из множеств K_1 и K_2 и содержится в объединении $K_1 \cup K_2$, что противоречит определению компоненты. Итак две различные компоненты отделены. ◁

Определение Открытое и связное множество топологического пространства называется **областью**.

Определение Топологическое пространство называется **локально связным**, если семейство его областей образует базу топологии.

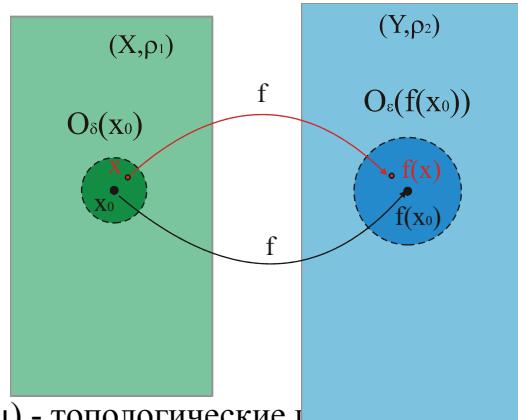
§ 10. Непрерывные отображения топологических пространств

Представим интерпретацию классического понятия непрерывной функции:



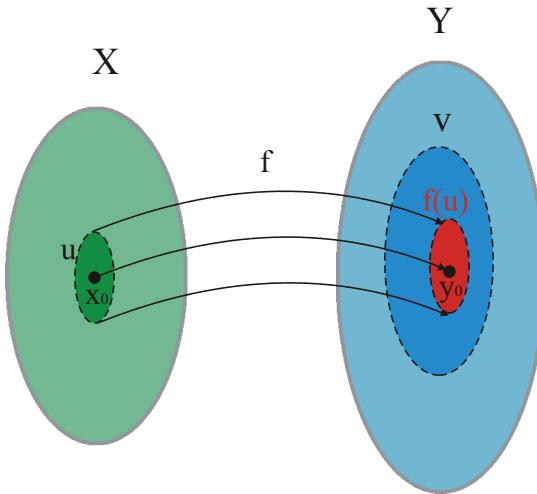
Обобщение этого понятия ведет к понятию непрерывного отображения в метрических пространствах:

Определение Отображение f метрического пространства (X, ρ_1) в метрическое пространство (Y, ρ_2) непрерывно в точке x_0 если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что из неравенства $\rho(x, x_0) < \delta$ следует неравенство $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.



Пусть (X, τ) и (Y, μ) - топологические пространства, $f: X \rightarrow Y$ - отображение из X в Y .

Определение Отображение f называется **непрерывным в точке** $x_0 \in X$, если для любой окрестности v точки $y_0 = f(x_0)$ существует такая окрестность u точки x_0 , что $f(u) \subset v$. Отображение f называется **непрерывным на множестве** X , если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.



Примеры.

1. Для произвольных метрических пространств X и Y постоянное отображение является непрерывным.
2. Тождественное отображение топологического пространства самого на себя является непрерывным.
3. Непрерывную функцию можно рассматривать как непрерывное отображение из топологического пространства \mathbb{R}^1 в топологическое пространство \mathbb{R}^1 .

Теорема. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - отображение топологических

пространств, тогда эквивалентны следующие условия:

1. f непрерывно на X ;
2. $f(\bar{A}) \subset \bar{f(A)}$;
3. для всякого B замкнутого в Y , $f^{-1}(B)$ замкнуто в X ;
4. для всякого V открытого в Y , $f^{-1}(V)$ открыто в X .

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) т.к. если $x \in \bar{A}$, то пусть W окрестность точки $f(x)$ в Y , тогда существует окрестность U точки x в X , т.ч. $f(U) \subset W$ (т.к. f непрерывно на X) и $U \cap A \neq \emptyset$, т.е. существует

$y \in U \cap A$, но тогда $f(y) \in W \cap f(A)$, т.е. $f(y) \in \overline{f(A)}$.

2) \Rightarrow 3) Пусть B замкнуто в Y , положим $A = f^{-1}(B)$, тогда из

(2) следует $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$, т.о. $f(\overline{A}) \subset B$, но тогда

$\overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$, следовательно

$\overline{A} = A$ (т.к. $A \subset \overline{A}$), т.о. A - замкнуто.

3) \Rightarrow 4) Пусть V открыто в Y , и пусть $U = f^{-1}(V)$, тогда $Y \setminus V$ - замкнуто в Y и $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V) = X \setminus U$ - замкнуто.

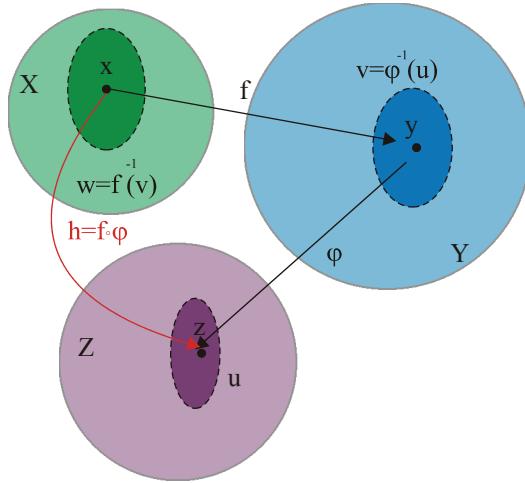
Т.о. U - открыто в X .

4) \Rightarrow 1) Пусть $x \in X$, и V окрестность точки $f(x)$ в Y , тогда (см. определение окрестности) существует открытое множество $W \subset V$, т.ч. $f(x) \in W$, тогда $f^{-1}(W)$ открыто в X и $x \in f^{-1}(W)$, т.е. $f^{-1}(W)$ - окрестность точки x в X . Теорема доказана.

Теорема 2 Отображение f топологического пространства (X, τ) в пространство (Y, μ) непрерывно тогда и только тогда, когда образ замыкания произвольного множества A пространства X содержитится в замыкании образа множества, т.е. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Данное утверждение примем без доказательства.

Теорема 3. Если f - непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y , а φ - непрерывное отображение Y в топологическое пространство Z , то композиция $\varphi \circ f$ является непрерывным отображением X в Z .



▷ Возьмем произвольное открытое множество U пространства Z . В силу непрерывности отображения $\varphi: Y \rightarrow Z$, прообраз $\varphi^{-1}(U)$ есть открытое множество топологического пространства Y . Аналогично $f^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ при непрерывном отображении $f: X \rightarrow Y$ открыт в X . Так как $f^{-1}(\varphi^{-1}(U)) = (\varphi \circ f)^{-1}(U)$, то мы получили, что при отображении $\varphi \circ f$ прообраз открытого множества открыт. Следовательно отображение непрерывно. <

Открытые и замкнутые отображения

Выше было доказано, что при непрерывном отображении прообраз непрерывного отображения открыт, а замкнутого замкнут. Для образов при непрерывных отображениях такого рода утверждения не имеют места. Рассмотрим несколько примеров:

Примеры

1. Непрерывное отображение $f: R^1 \rightarrow R^1$, где $f(x) = \arctg x$ отображает бесконечный интервал $R = (-\infty; +\infty)$ в интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. открытое и замкнутое множество в открытое но не замкнутое множество.
2. Непрерывное отображение $f: R^1 \rightarrow R^1$, где $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ отображает открытое и замкнутое множество $R = (-\infty; +\infty)$ в полуинтервал $(0; 1]$ который не является ни открытым ни замкнутым множеством.

Определение Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется **открытым**, если при этом отображении образ открытого множества открыт.

Определение Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется **замкнутым**, если при этом отображении образ замкнутого множества замкнут.

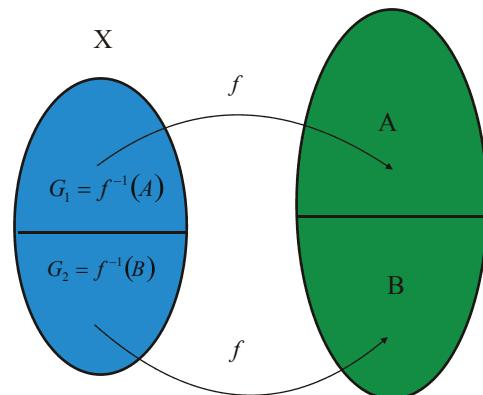
Примером одновременно открытого и замкнутого отображения является тождественное отображение.

Отображение вложения $i: A \rightarrow X$ ($A \subset X$, $i(x) = x$) открыто тогда и только тогда, когда множество A открыто в X , и замкнуто тогда и только тогда, когда A замкнуто в X .

Очевидно, что композиция открытых отображений - открытое отображение; композиция замкнутых отображений - замкнутое отображение.

Непрерывные отображения связных пространств.

Теорема Непрерывный образ связного пространства связан



▷ Пусть отображение $f:X \rightarrow Y$ непрерывно и сюръективно, т.е. $f(X) = Y$. Предположим, что пространство Y несвязно. Тогда его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых (замкнутых) множеств, т.е. $Y = A \cup B$. Рассмотрим $G_1 = f^{-1}(A)$ и $G_2 = f^{-1}(B)$. В силу непрерывности отображения эти множества открыты (замкнуты), не являются пустыми множествами и $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, кроме того, очевидно, что $X = G_1 \cup G_2$. Таким образом получили, что связное пространство X представлено в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых (замкнутых) множеств. Полученное противоречие доказывает теорему. ◁

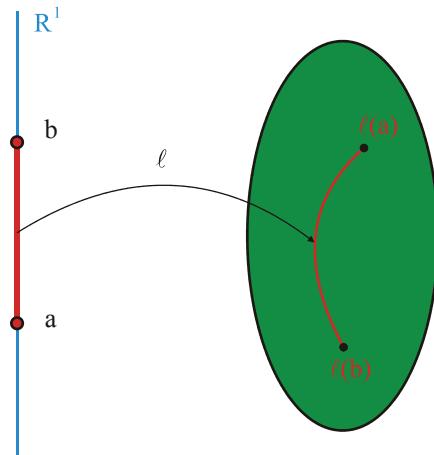
Следствие Если топологическое пространство связно и непрерывная функция $f:X \rightarrow R^1$ принимает в точках X значения a и b , ($a \neq b$) то в некоторой точке X она принимает любое значение, лежащее между a и b .

(Данное следствие обобщает теорему анализа о промежуточном значении).

Пусть X - топологическое пространство. **Путем** в X называется непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ числовой прямой в X . Путь $l:[a;b] \rightarrow X$ называют **соединяющим** точки x_1 и x_2 в X , если $l(a) = x_1$, $l(b) = x_2$. Пространство, любые две точки которого можно соединить путем называется **линейно связным**.

Теорема Всякое линейно связное пространство связно.

▷ Пусть x_1 и x_2 - произвольные точки линейно связного пространства X . Тогда существует непрерывное отображение $l:[a;b] \rightarrow X$, такое что $l(a) = x_1$, $l(b) = x_2$. В топологическом пространстве R^1 - отрезок $[a;b]$ - связан, следовательно при непрерывном отображении его образ также связан. Следовательно по теореме 2 предыдущего параграфа пространство X - связано. ◁



Замечание: Обратное утверждение не верно. Например, пространство $X = A_1 \cup A_2$, где

$$A_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 \in \left(0; \frac{1}{\pi}\right], x_2 = \sin \frac{1}{x_1} \right\},$$

$$A_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 ; x_1 = 0, x_2 \in [-1;1] \right\}$$

с естественной топологией является связным пространством, но не линейно связным.

Гомеоморфизм. Топологически эквивалентные пространства

Определение Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение одного топологического пространства на другое называется **гомеоморфизмом**.

Если существует гомеоморфное отображение одного пространства на другое, то пространства называются **гомеоморфными**.

Из теорем этого параграфа вытекает утверждение:

1. Гомеоморфизм является одновременно открытым и замкнутым отображением;
2. Взаимно однозначное открытое (замкнутое) отображение является гомеоморфизмом.
3. Взаимно однозначное отображение $f: X \rightarrow Y$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого множества $A \subset X$ $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Очевидно, что тождественное преобразование - гомеоморфизм, обратное к гомеоморфизму - гомеоморфизм, композиция двух гомеоморфизмов - гомеоморфизм. Следовательно отношение гомеоморфности является отношением эквивалентности.

Определение Два топологических пространства называются **топологически эквивалентными** или имеющими один топологический тип, если существует гомеоморфизм одного пространства на другое.

У топологически эквивалентных пространств топологии являются образами и прообразами. Поэтому такие пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами.

Примеры

1. Любое отображение дискретного пространства в топологическое пространство непрерывно. Следовательно два дискретных пространства гомеоморфны, тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение одного пространства на другое.
2. Числовая прямая гомеоморфна интервалу $(0;1)$. Гомеоморфизм устанавливает функция $y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$.
3. Сфера и поверхность куба в пространстве \mathbb{R}^3 гомеоморфны. (На сфере и кубе естественная топология индуцируется топологией пространства \mathbb{R}^3). Если совместить центры сферы и куба, то гомеоморфизмом будет отображение проектирования из общего центра.

Свойство топологического пространства, сохраняющееся при гомеоморфизме, называют **топологическим инвариантом** или **топологическим свойством**.

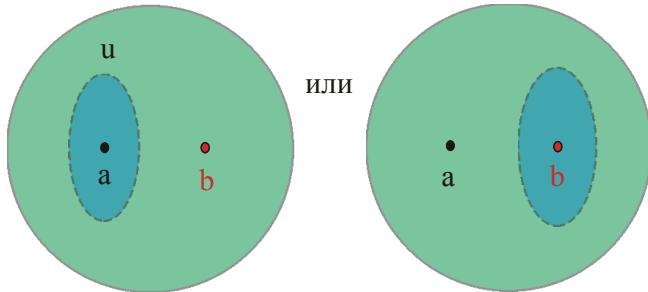
Другими словами, топологический инвариант - это такое свойство топологического пространства, которым обладают все гомеоморфные данному пространства.

Примерами топологических инвариантов являются связность, выполнимость первой или второй аксиом счетности, а также аксиом отдельности. Иногда и саму топологию определяют как науку о топологических инвариантах.

§11. Аксиомы отделимости

Понятие топологического пространства было введено в самом общем виде. Рассмотрим ограничения, накладываемые на топологические пространства.

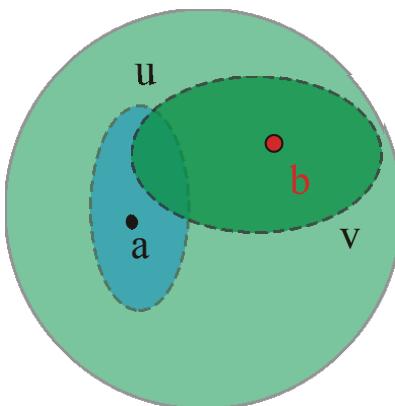
Определение Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 если для двух различных точек этого пространства, по крайней мере для одной из них существует окрестность не содержащая другую точку. Пространства удовлетворяющие аксиоме отделимости T_0 называются T_0 пространства или пространства Колмогорова.



Колмогоров Андрей Николаевич 12.4.1903 - 20.10.1987. Крупнейший отечественный математик. Окончил 1925г. Московский государственный университет, с 1931г. профессор этого университета. Научную деятельность начал в области теории функций действительного переменного, где ему принадлежат фундаментальные работы по тригонометрическим рядам, теории множеств, теории интеграла и приближения функций. В дальнейшем А.Н. Колмогоров внес фундаментальный вклад в топологию, математическую логику, теорию дифференциальных уравнений, механику. Особенно крупный вклад внес А.Н. Колмогоров в теорию вероятностей и теорию случайных процессов. Он имеет крупные достижения в прикладных областях: теории стрельбы, теории массового обслуживания, математических методах в биологии, математической лингвистике.

Замечание. Не все пространства удовлетворяют аксиоме отделимости T_0 . Примером пространства, не удовлетворяющего аксиоме отделимости T_0 , является слипающееся двоеточие.

Определение Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 если для каждой из двух различных точек этого пространства существует окрестность не содержащая другую точку. Пространства удовлетворяющие аксиоме отделимости T_1 называются T_1 пространства или пространства Рисса.





Рисс Фридьеш (Riesz Frigyes) 22.1.1880-28.2.1956 -венгерский математик. Учился в Цюрихе, Будапеште, Гётtingене и Париже. Основные труды по функциональному анализу. Изучал векторные пространства интегрируемых функций, исследовал системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных, является одним из основателей теории топологических пространств.

Теорема

1. Топологическое пространство тогда и только тогда является пространством Рисса, когда любое его одноточечное множество замкнуто.

2. Топологическое пространство тогда и только тогда является пространством Рисса, когда для любой его точки x пересечение всех ее окрестностей совпадает с одноточечным множеством $\{x\}$.

► Пусть топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости. Рассмотрим произвольное одноточечное множество $\{x\}$. Возьмем произвольную точку $y \in X, y \neq x$. По аксиоме T_1 для точки y существует окрестность U_y , не содержащая точку x . Следовательно $\exists U_y \cap \{x\} = \emptyset$. Это означает, что произвольная точка y , отличная от точки x не является точкой прикосновения одноточечного множества $\{x\}$. Следовательно, это одноточечное множество замкнуто.

Предположим, что все одноточечные множества некоторого топологического пространства замкнуты. Тогда для двух произвольных различных точек $y \neq x$ множества $X \setminus \{x\}$ и $X \setminus \{y\}$ являются открытыми множествами. Кроме того $y \in X \setminus \{x\}$, а $x \in X \setminus \{y\}$. Таким образом у двух различных точек пространства X найдены окрестности не содержащие другую точку, следовательно, пространство X - является пространством Рисса.

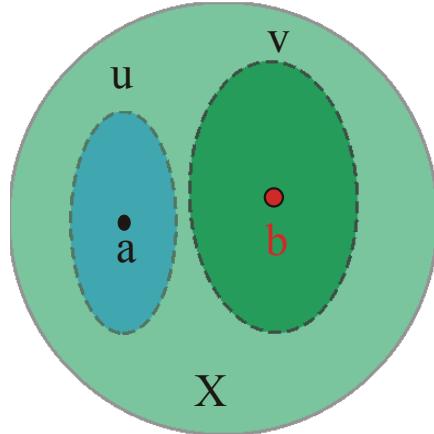
2. Если топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 , то пересечение всех окрестностей точки $x \bigcap_{\alpha} U_{\alpha} = \{x\}$, так как для любой точки $y \neq x$ существует окрестность, не содержащая x (поэтому $y \notin \bigcap_{\alpha} U_{\alpha}$). Обратное утверждение очевидно. ◇

Примером пространства, не удовлетворяющего аксиоме отделимости T_1 является слипшееся двоеточие, а связное двоеточие удовлетворяет этой аксиоме отделимости.

Сформулируем (без доказательства) некоторые свойства пространств Рисса. Если топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 то выполняются следующие свойства:

- В каждой окрестности любой предельной точки множества A содержится бесконечное число точек из A ;
 - Любое конечное множество точек замкнуто;
 - Производное множество любого множества T_1 пространства замкнуто;
- Определение Свойство топологического пространства, сохраняющееся в подпространствах называется **наследственным**.

Определение Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_2 , если любые две различные точки этого пространства можно отделить непересекающимися окрестностями. Пространства, удовлетворяющие аксиоме отделимости T_2 называют T_2 пространства или **хаусдорфовыми** пространствами.



Хаусдорф Феликс (Hausdorff Felix) 8.11.1868-26.1.1942 - немецкий математик. В 1891 окончил Лейпцигский университет, с 1902 г. профессор этого университета. С 1921 года профессор Боннского университета. Основные труды по теории множеств, топологии и функциональному анализу. Он впервые ввел понятие меры множества и топологического предела. В 1942 году покончил жизнь самоубийством, узнав, что он и его семья должны быть отправлены в концлагерь.

Теорема Топологическое пространство X является пространством Хаусдорфа тогда и только тогда, когда для произвольной точки $x \in X$ пересечение замыканий всевозможных ее окрестностей совпадает с одноточечным множеством $\{x\}$.

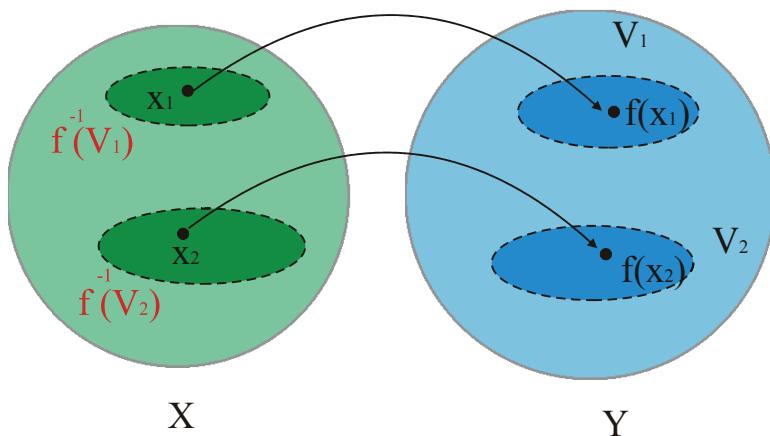
▷ Пусть $\forall x \in X$. A пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_2 .

Пусть $\{U_\alpha\}$ - семейство всех окрестностей точки x . Очевидно, что $x \in \bigcap_{\alpha} \overline{U_\alpha}$. Предположим, что некоторая точка $y \neq x$ также принадлежит указанному пересечению. Тогда при любом α $y \in \overline{U_\alpha}$. Это означает, что все окрестности точки y пересекаются с окрестностями точки x . Получили противоречие с выполнением аксиомы отделимости T_2 . Следовательно $\{x\} = \bigcap_{\alpha} \overline{U_\alpha}$.

Наоборот. Пусть x и y две различные точки топологического пространства X и $\{x\} = \bigcap_{\alpha} \overline{U}_{\alpha}$. Из того факта, что $y \notin \bigcap_{\alpha} \overline{U}_{\alpha}$ следует, что $y \notin \overline{U}_{\alpha} \Rightarrow y \in X \setminus \overline{U}_{\alpha}$ и это множество открыто. Очевидно, что $X \setminus \overline{U}_{\alpha} \cap \overline{U}_{\alpha} = \emptyset$. Таким образом две различные точки топологического пространства X , отделены непересекающимися окрестностями. \triangleleft

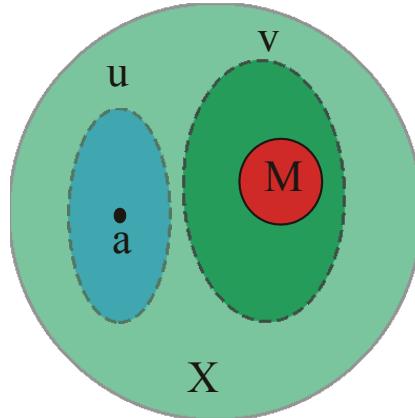
Теорема Для хаусдорфовости пространства X необходимо и достаточно, чтобы для пары различных точек x_1 и x_2 из X существовало непрерывное отображение f пространства X в хаусдорфово пространство Y такое, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

▷ Для доказательства необходимости в качестве пространства Y возьмем пространство X , а в качестве отображения f тождественное отображение на X .



Достаточность: Пусть x_1 и x_2 - различные точки в X и $f: X \rightarrow Y$ непрерывное отображение, а V_1 и V_2 непересекающиеся окрестности точек $f(x_1)$ и $f(x_2)$ в хаусдорфовом пространстве Y . В силу непрерывности отображения f прообраз окрестности - окрестность. Очевидно, что $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$, следовательно пространство X - хаусдорфово. \triangleleft

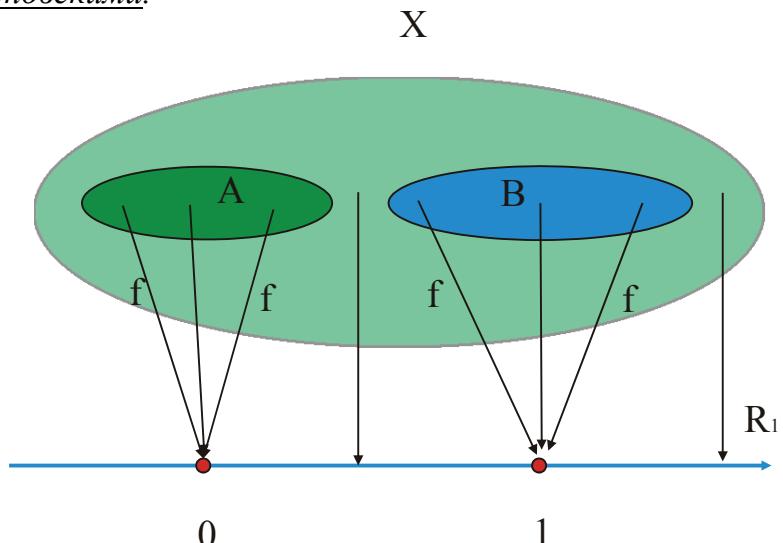
Определение Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_3 , если его любое замкнутое множество и не содержащуюся в этом точку можно отделить непересекающимися окрестностями. Пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости T_3 называют T_3 пространством или **регулярным** пространством.



Теорема (Критерий регулярности) T_1 пространство X регулярно тогда и только тогда, когда любая его точка x обладает регулярной системой окрестностей, т.е. любая ее окрестность U пїаїдәеð ҹәләібðр іедәпðйіпðй ýөіе ðі÷еे.

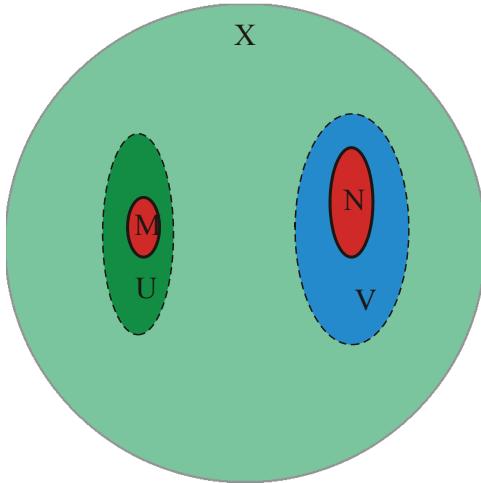
Данное утверждение примем без доказательства.

Определение Говорят, что топологическое T_1 пространство удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{\frac{3}{2}}$, если для любой точки x_0 и произвольного множества F существует непрерывная функция f , равная 0 в точке x_0 и 1 во всех точках F . Пространства, удовлетворяющие аксиоме отделимости $T_{\frac{3}{2}}$ называются вполне регулярным или тихоновскими.



Тихонов Андрей Николаевич (р. 17.10.1906) Советский математик, дважды Герой Социалистического труда, академик. Окончил в 1927 г МГУ. Профессор с 1936 г. этого университета. Первые работы посвящены топологии и функциональному анализу. Им введено понятие произведения топологических пространств (тихоновское произведение) доказан ряд важных теорем топологии. Значительны труды в теории дифференциальных уравнений, математической физике, геофизике и вычислительной математике. Под руководством А.Н. Тихонова разработаны алгоритмы решения многих прикладных задач. Совместно с А.А. Самарским разработана теория однородных разностных схем.

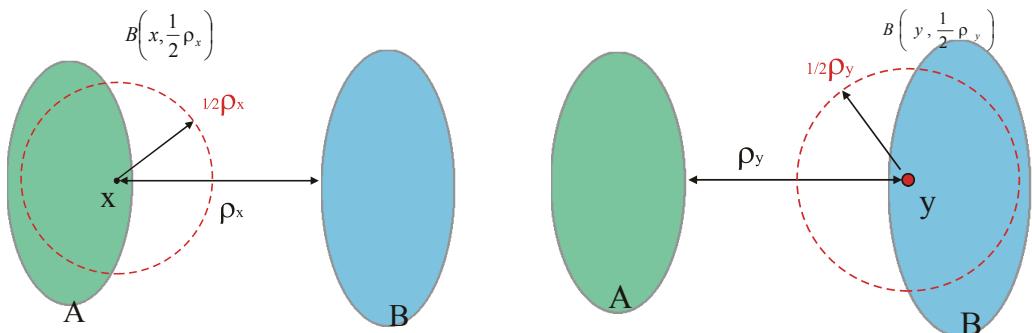
Определение. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_4 , если любые два непустых непересекающихся замкнутые множества можно отделить непересекающимися окрестностями. Пространства, удовлетворяющие аксиоме отделимости T_4 называют T_4 пространствами или нормальными пространствами.



Теорема. Всякое метрическое пространство нормально

▷ Пусть (X, ρ) - произвольное метрическое пространство. А и В два непустых непересекающихся замкнутых множества этого пространства. Пусть $x \in A \Rightarrow x \notin B$. Более того $x \notin \bar{B}$ (так как замкнутое множество В содержит все свои точки прикосновения). Тогда расстояние от точки х до множества В

$$\rho_x = \rho(x, B) = \inf_{y \in B} \{\rho(x, y)\} > 0.$$

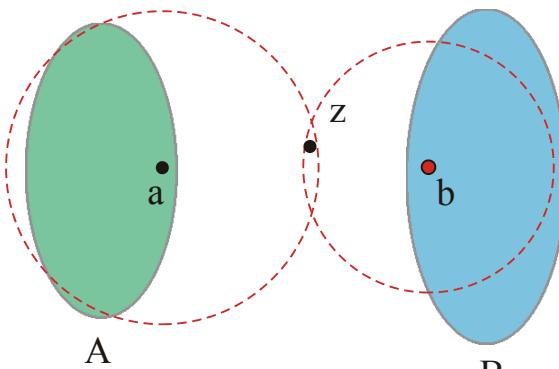


Аналогично $\rho_y = \rho(y, A) > 0$ для любой точки $y \in B$. Построим два множества:

$$U = \bigcup_{x \in A} B\left(x, \frac{1}{2}\rho_x\right), \quad V = \bigcup_{y \in B} B\left(y, \frac{1}{2}\rho_y\right),$$

где $B\left(x, \frac{1}{2}\rho_x\right)$ - открытый шар с центром в точке x и радиуса $\frac{1}{2}\rho_x$. Очевидно, что множества U и V являются открытыми окрестностями множеств A и B соответственно. Докажем, что они не пересекаются. Предположим противное, т.е. $\exists z \in U \cap V$. Тогда существуют такие точки $a \in A$ и $b \in B$ для которых

$$\rho(a, z) < \frac{1}{2}\rho_a \text{ и } \rho(b, z) < \frac{1}{2}\rho_b.$$



Пусть для определенности $\rho_a \geq \rho_b$. Воспользуемся аксиомой треугольника

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, z) + \rho(b, z) < \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b) \leq \rho_a,$$

т.е. мы получили, что

$$\rho(a, b) < \rho_a$$

и получили противоречие с определением расстояния ρ_a . Тем самым теорема доказана.

Теорема Пространство Рисса нормально тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества F и любой его окрестности U существует такая окрестность V , что $\bar{V} \subset U$.

§12. Сходимость в топологических пространствах

Определение Последовательность точек $\{x_n\}$ топологического пространства X называется **сходящейся** к точке $x_0 \in X$, если любая окрестность x_0 содержит все точки последовательности, за исключением, быть может их конечного числа. При этом саму точку x_0 называют **пределом последовательности** и обозначают $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

В метрических пространствах последовательность может иметь только один предел, а в топологических пространствах - несколько. Так в тривиальных топологических пространствах любая последовательность точек сходится к каждой точке $x \in X$, так как эта точка x имеет только одну окрестность - все множество X и эта окрестность содержит все точки последовательности.

В произвольном метрическом пространстве точка x_0 тогда и только тогда принадлежит замыканию некоторого множества, когда в этом множестве существует последовательность, сходящаяся к x_0 . В топологическом пространстве справедливо утверждение:

Если последовательность точек множества A топологического пространства (X, τ) сходится к некоторой точке $x_0 \in X$, то $x_0 \in \bar{A}$

Обратное утверждение не всегда верно.

Теорема В топологическом пространстве. Удовлетворяющим первой аксиоме счетности, точка x_0 тогда и только тогда является точкой приложения множества A этого пространства, когда в A существует последовательность, сходящаяся к точке x_0 .

▷ Предположим, что x_0 является точкой прикосновения множества A , и множества $\{u_n\}$ образуют счетную базу системы окрестностей в точке x_0 . Эту базу можно считать монотонно убывающей, действительно, если база в точке x_0 состоит из множеств $\{v_n\}$ то можно построить монотонно убывающее семейство множеств $\left\{u_n = \bigcap_{i=1}^n v_i\right\}$, образующее базу в точке x_0 .

Так как $x_0 \in \bar{A}$, то в любой окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка из множества A . Выберем в каждой окрестности u_n по одной точке $x_n \in A$. Полученная последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0 .

Обратное утверждение очевидно.

Определение Топологическое пространство, в котором для каждого множества A и любой точки $x \in \bar{A}$ существует последовательность точек множества A , сходящихся к x , называется **пространством Фреше-Урысона**.

<http://kvant.mccme.ru>



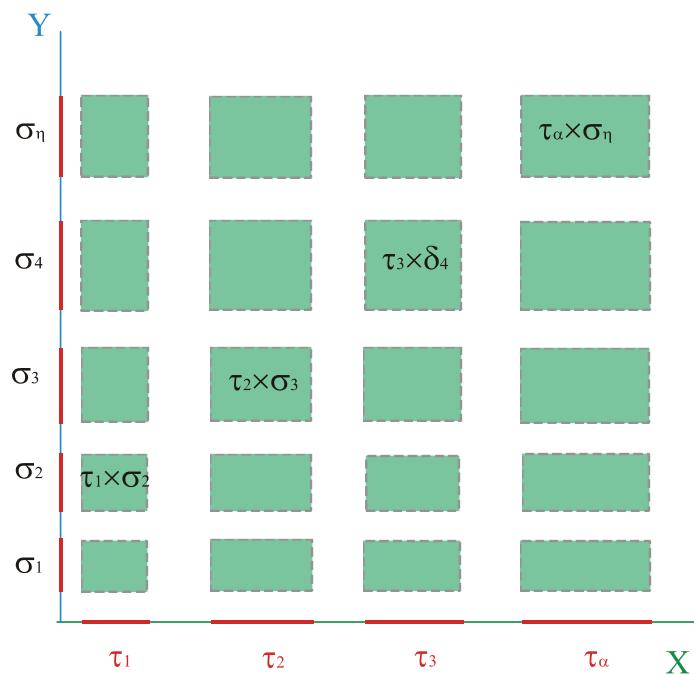
Урысон Павел Самуилович (22.1.1898- 17.8.1924) отечественный математик. Окончил МГУ в 1919 г. Был сотрудником Института математики и механики МГУ и профессором 2- московского университета (ныне Московский педагогический университет). В 1921-1922 годах впервые в нашей стране прочитал в Московском университете курс лекций по топологии. Трагически погиб, утонув в реке Луара во Франции.

Павел Самуилович Урысон (1898—1924)

§13. Операции над топологическими пространствами

Произведение топологических пространств.

Пусть (X, τ) и (Y, σ) два топологических пространства.

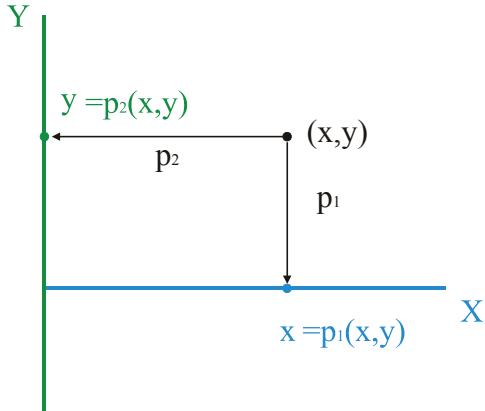


Обозначим через β - семейство множеств вида $\{\tau_i \times \sigma_j\}$, где $\tau_i \in \tau$, $\sigma_j \in \sigma$.

Легко заметить, что множества семейства β образуют базу некоторой топологии μ на декартовом произведении $X \times Y$.

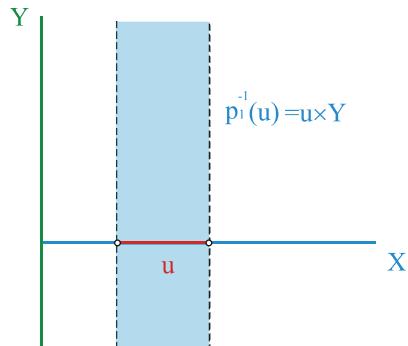
Произведением топологических пространств (X, τ) и (Y, σ) называется декартово произведение носителей топологии, наделенную топологией произведения.

Пусть X и Y топологические пространства и $X \times Y$ их произведение, то X и Y называются **координатными пространствами**. Отображения $p_1: X \times Y \rightarrow X$ и $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ действующие по закону $p_1(x, y) = x \in X$, $p_2(x, y) = y \in Y$ называются проектированиями на координатные пространства.



Теорема. Для произвольных топологических пространств отображения проектирования их произведения на координатные пространства непрерывны и открыты.

▷ Пусть $(X \times Y, \mu)$ произведение топологических пространств и $p_1: X \times Y \rightarrow X$ и $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ отображения проектирования. Докажем, что при отображении p_1 прообраз открытого множества открыт. Множество $p_1^{-1}(u) = u \times Y$ является произведением двух открытых множеств и, следовательно, открыто в $X \times Y$. Таким образом отображение p_1 непрерывно.



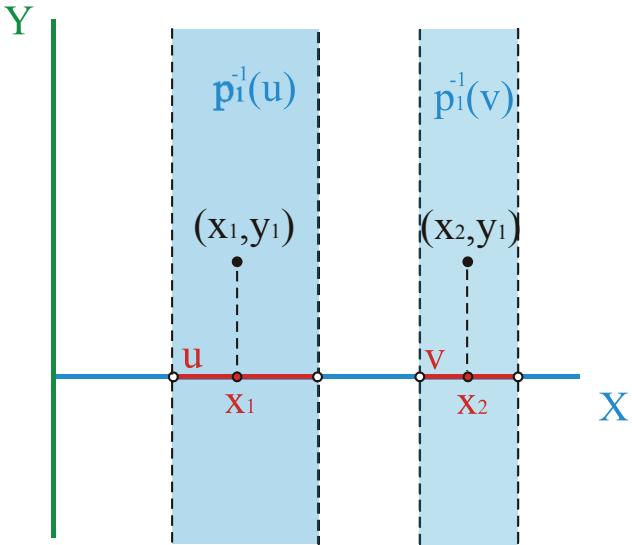
Докажем открытость отображения p_1 . Найдем образ $p_1(u \times v)$, где $u \in \tau, v \in \delta$. По определению $p_1(u \times v) = u$ т.е. при непрерывном отображении образ открытого множества открыт, что означает открытость отображения p_1 .

Теорема. Для произвольных топологических пространств (X, τ) и (Y, σ) топология произведения является наименьшей среди тех топологий на декартовом произведении $X \times Y$, относительно которых проектирования на координатные пространства непрерывны.

Данное утверждение примем без доказательства.

Теорема. Произведение хаусдорфовых пространств есть хаусдорфово пространство. Произведение регулярных пространств регулярно.

Докажем первое утверждение теоремы.



Пусть топологические пространства X и Y - хаусдорфовы. Возьмем две различные точки $a = (x_1, y_1)$ и $b = (x_2, y_2)$. Если точки различные, то, по крайней мере, они отличаются одной из компонент. Пусть $x_1 \neq x_2$. Воспользуемся тем, что пространство X хаусдорфово. Тогда точки x_1 и x_2 этого пространства можно отделить непересекающимися окрестностями u и v . Рассмотрим множества $p_1^{-1}(u)$ и $p_1^{-1}(v)$. Эти множества являются окрестностями (т.к. при непрерывном отображении прообраз окрестности - окрестность), они не пересекаются (т.к. $p_1^{-1}(u) \cap p_1^{-1}(v) = \emptyset$). Кроме того $a \in p_1^{-1}(u)$ $b \in p_1^{-1}(v)$. Следовательно, и пространство $X \times Y$ хаусдорфово.

Замечание

Можно доказать, что

- произведение сепарабельных пространств сепарабельно;
- произведение пространств Рисса, является просранством Рисса;
- произведение связных пространств связно;

Однако произведение нормальных пространств не всегда нормально.

Пусть $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$, $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$, где X_1, X_2, Y_1, Y_2 - топологические пространства. Отображение f произведения $X_1 \times X_2$ в произведение $Y_1 \times Y_2$, действующее по закону $f((x_1, x_2)) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ называется **произведением отображений** f_1 и f_2 . Обозначается $f = f_1 \times f_2$.

Фактор - топология

Известно, что при непрерывном отображении прообраз открытого множества открыт.

Поставим несколько иную задачу: пусть f отображает топологическое пространство (X, τ) в некоторое множество Y . Необходимо задать топологию на Y таким образом, что бы отображение f стало непрерывным. (Одно из решений вопроса - задание на Y тривиальной топологии). Имеет место следующая

Лемма. *Если $f: X \rightarrow Y$ и τ - топология на X , то семейство μ подмножеств Y , прообразы которых при отображении f открыты в X образуют топологию на Y .*

▷ Покажем выполнение аксиом топологического пространства:

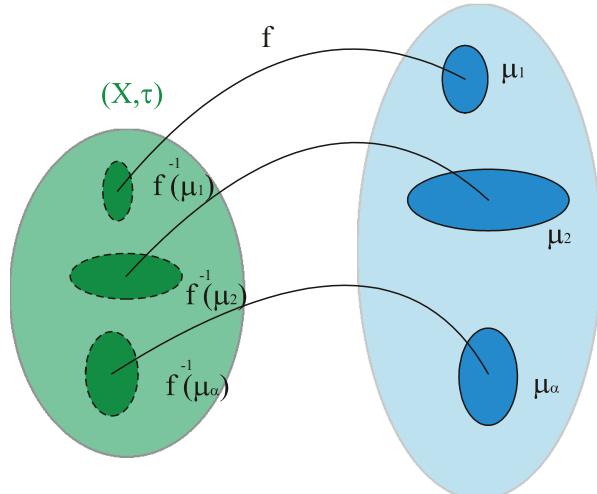
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(Y) = X$, то $\emptyset, Y \in \mu$. Воспользуемся свойством прообразов:

пусть $u_\alpha \in \mu \Rightarrow f^{-1}(u_\alpha) \in \tau$, тогда $f^{-1}\left(\bigcup_\alpha u_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(u_\alpha) \in \tau$

это означает, что $\bigcup_\alpha u_\alpha \in \mu$. Аналогично доказывается выполнение третьей аксиомы топологического пространства. ◁

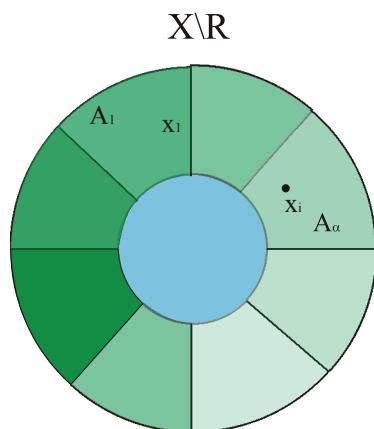
Замечание *Можно показать, что топология μ - наибольшая среди тех топологий на Y , относительно которых отображение f непрерывно.*

Определение *Семейство μ подмножеств Y , прообразы которых при отображении f топологического пространства X в множество Y открыты в X , называются **фактор-топологией на Y , порожденной отображением f .***



Определим на X , некоторым образом, отношение эквивалентности R . Рассмотрим фактор - множество X/R .

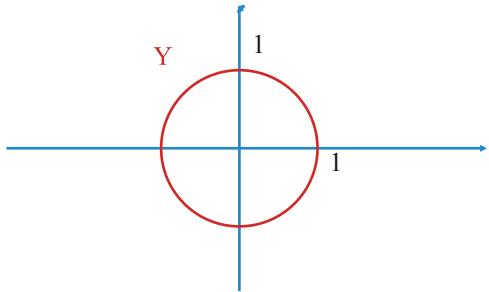
Определение *Отображение $r: X \rightarrow X/R$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ класс эквивалентности, которому он принадлежит, называется **фактор-отображением или отождествлением**.*



Определение Пусть X некоторое топологическое пространство, R - отношение эквивалентности в X , p - фактор отображение X на фактор- множество X/R . Фактор- множество X/R , наделенное фактор- топологией относительно отображения p называется **фактор- пространством** пространства X по отношению эквивалентности R .

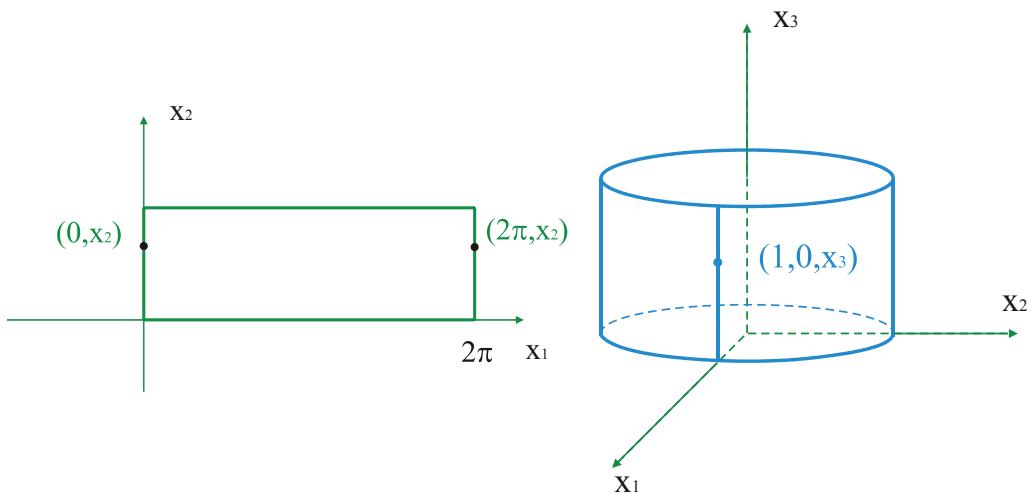
Примеры

1. Рассмотрим топологическое пространство $X = [0; 2\pi]$ с естественной топологией и множество $Y = \{x, y \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ точек единичной окружности с центром в начале координат. Отображение f можно определить формулой $f(t) = (\cos t, \sin t)$, где $t \in [0; 2\pi]$.



Фактор- топология на Y , порождаемая отображением f , совпадает с естественной топологией. Например множество точек окружности, лежащих между точками $(0;-1)$ и $(0;1)$ принадлежит фактор - топологии μ , так как прообразом этого множества является множество $\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ является открытым множеством в X .

Определим отношение эквивалентности: $0 \sim 2\pi$ и для всех $t \in (0; 2\pi)$ $t \sim t$. Получим один класс эквивалентности $\{0; 2\pi\}$, состоящий из двух точек; остальные классы эквивалентности - одноточечные. Можно показать, что фактор пространство X/R гомеоморфно пространству Y . В этом случае говорят, что фактор пространство X/R получено из отрезка $[0; 2\pi]$ путем отождествления его концов.



2. Аналогичный пример. Пусть X – прямоугольник

$$X = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \in [0; 2\pi], x_2 \in [0; 1]\}$$

с топологией, индуцированной R^2 . Множество Y :

$$Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 \in [0; 1]\}$$

Т.е. поверхность цилиндра единичного радиуса и единичной высоты. Определим отображение:

$$f: X \rightarrow Y \quad f(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, x_2)$$

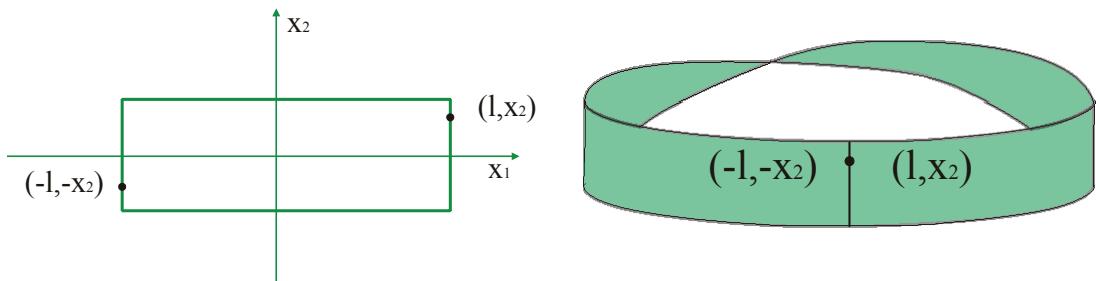
Фактор топология совпадает с естественной топологией. Определим отношение эквивалентности

$$(0; x_2) \sim (2\pi; x_2)$$

Все остальные точки эквивалентны сами себе. В результате получим фактор пространство (поверхность цилиндра) из прямоугольника путем склеивания его двух противоположных сторон.

3. **Листом Мёбиуса** называют поверхность, полученную прямоугольника поворотом одного из концов на 180° и склеиванием его противоположных концов. Определим математический лист Мёбиуса в терминах топологии.

$X = \{(x, y) \in R^2 : x \in [-l; l], y \in (-1; 1)\}$. Это прямоугольник в пространстве R^2 с естественной топологией. Зададим на этом прямоугольнике отношение эквивалентности: $(l, y) \sim (-l, -y)$, если $y \in (-1; 1)$ и $(x, y) \sim (x, y)$ для всех остальных точек. Таким образом мы получили фактор - пространство гомеоморфное листу Мёбиуса.

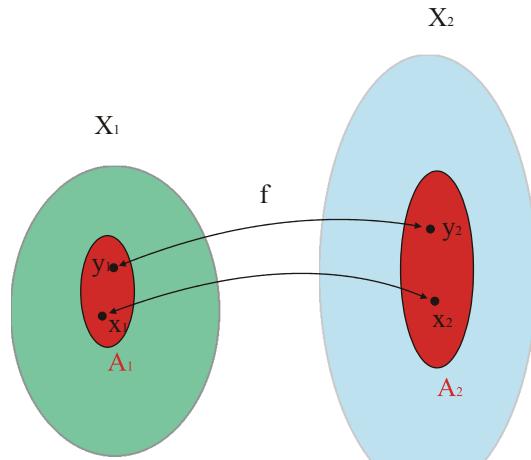


Топологическая сумма пространств. Склейивание пространств по непрерывному отображению.

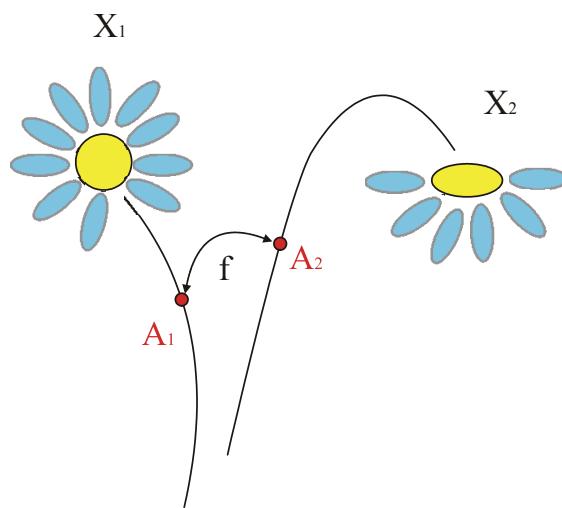
Пусть (X_i, τ_i) набор топологических пространств ($i=1, 2, \dots, n$), носители топологии здесь не пересекаются. Обозначим $X = \bigcup_i^n X_i$ и τ семейство множеств из X , допускающих представление в виде $\bigcup_{i=1}^n u_i$, где $u_i \in \tau_i$. Тогда пара (X, τ) называется **топологической суммой пространств** (X_i, τ_i) .

Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) – топологические пространства, причем $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и непрерывное отображение $f: A_1 \rightarrow A_2$, где $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$. На множестве $X_1 \cup X_2$ введем отношение эквивалентности:

если точка $y \in A_2$ то $y \sim f^{-1}(y)$; если точка не участвует в отображении, то она эквивалентна сама себе. Обозначим фактор - пространство $(X_1 \cup X_2)/R = X_1 \bigcup_f X_2$. Про топологическое пространство $X_1 \bigcup_f X_2$ говорят, что оно получено **приклеиванием** топологического пространства X_1 к топологическому пространству X_2 по непрерывному отображению f .



Если $(X_1 \cup X_2)$ топологическая сумма пространств, $A_1 = \{x_1\}$, $A_2 = \{x_2\}$ Отображение $f: A_1 \rightarrow A_2$ в данном случае непрерывно. В этом случае пространство $X_1 \bigcup_f X_2$ называется **букетом** и обозначается $X_1 \vee X_2$.



§14. Компактные топологические пространства

Известно, что многие факты математического анализа основаны на одном свойстве отрезка числовой прямой, которое называется леммой Гейне - Бореля - Лебега и заключается в том, что из любого покрытия отрезка открытыми интервалами можно выделить конечное подпокрытие.



Борель Феликс Эдуард Жустен Эмиль (Borel Félix Édouard Justin 1871-1956) - французский математик. Создатель нескольких отраслей современного математического анализа (понятие расширяющихся рядов, меры множества, расширение понятия аналитической функции, диофантовы приближения).



Лебег Анри Леон – (1896-1931) – французский математик, с 1910 г. профессор Парижского университета, один из основателей современной теории функций действительного переменного. Главная заслуга – создание теории меры, понятия измеримой функции и обобщение понятия интеграла (интеграл Лебега).

Обобщение этого факта привело отечественных математиков П.С. Александрова и П.С. Урысона к выделению класса топологических пространств - **компактным** (**бикомпактным**) топологическим пространствам.

Определение Система множеств $M = \{M_\alpha, \alpha \in I\}$, $M_\alpha \subset X$ называется **покрытием** пространства X , если $\bigcup_{\alpha} M_\alpha = X$. Покрытие называется **открытым** (замкнутым), если все множества M_α открыты (замкнуты).

Подсистема системы множеств M , сама являющаяся покрытием пространства X называется **подпокрытием** покрытия M .

Определение Топологическое пространство X называется **компактным**, если оно удовлетворяет условию Бореля - Лебега: из всякого открытого покрытия пространства X , можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема Для компактности топологического пространства X необходимо и достаточно, чтобы любое его семейство замкнутых подмножеств с пустым пересечением содержало конечное подсемейство с пустым пересечением

▷ Необходимость. Пусть X - компактно и $\{F_\alpha\}$ - произвольная совокупность замкнутых множеств, причем пересечение $\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset$. Рассмотрим семейство множеств $G = \{G_\alpha\}$, состоящее из дополнений замкнутых множеств $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$. Воспользуемся формулами де Моргана:

$$\bigcup_\alpha G_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus F_\alpha) = X \setminus \bigcap_\alpha F_\alpha = X,$$

т.е. система множеств G образует открытое покрытие X . В силу компактности X из покрытия G можно выделить конечную систему множеств $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$, также являющуюся покрытием. Тогда $\bigcap_{k=1}^n F_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus G_k) = X \setminus \bigcup_{k=1}^n G_k = X \setminus X = \emptyset$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $G = \{G_\alpha\}$ - произвольное открытое покрытие пространства X . тогда система множеств $\{F_\alpha = X \setminus G_\alpha\}$ представляет собой семейство замкнутых множеств с пустым пересечением, которое по условию теоремы содержит конечное подсемейство также с пустым пересечением. С точностью до обозначения, будем считать, что это множества $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ и $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$. Отсюда, по аналогии с первой частью теоремы, следует, что множества $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ образуют конечное подпокрытие.

△

Определение Система множеств $\{M_\alpha\}$ называется **центрированной**, если любое конечное пересечение этой системы не пусто.

Теорема Для компактности пространства X необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система его замкнутых множеств имела непустое пересечение.

▷ Необходимость. Пусть $\{F_\alpha\}$ - произвольная центрированная система замкнутых множеств топологического пространства X . Тогда эта система должна иметь непустое пересечение, потому что в противном случае она содержала бы конечную подсистему с пустым пересечением, что противоречило бы центрированности системы $\{F_\alpha\}$.

Достаточность. Пусть $\{F_\alpha\}$ - произвольное семейство замкнутых множеств топологического пространства X с пустым пересечением. Тогда оно должно содержать конечную подсистему с пустым пересечением, так как в противном случае семейство $\{F_\alpha\}$ было бы центрированным и имело, по условию непустое пересечение. Таким образом, мы получили, что любое семейство замкнутых множеств с пустым пересечением топологического пространства X содержит конечную подсистему множеств с пустым пересечением, значит пространство X - компактно. △

Компактность и замкнутость

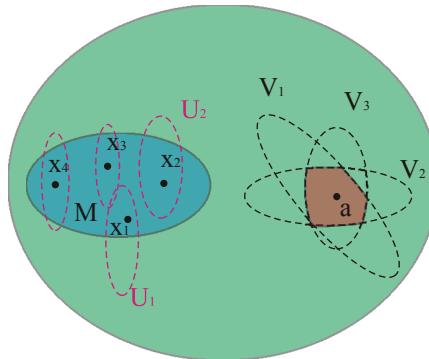
Определение Подмножество $M \subset X$ **компактным подмножеством**, если подпространство M (т.е. множество M с индуцированной топологией) представляет собой компактное пространство. Подмножество M называется **относительно компактным**, если компактно его замыкание.

Теорема Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

▷ Пусть множество F замкнуто и содержится в компактном топологическом пространстве и $\{F_\alpha\}$ - произвольная центрированная система замкнутых в M множеств. Так как M замкнуто, то и в X эта система будет центрированной системой замкнутых множеств, в силу компактности объемлющего пространства $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$ откуда следует компактность M . \triangleleft

Теорема Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

▷ Пусть F - произвольное компактное подмножество хаусдорфова пространства X . Возьмем произвольную точку $a \in X \setminus M$. Воспользуемся хаусдорфовостью пространства X : для точки a и произвольной точки $x \in X$ найдутся непересекающиеся окрестности $a \in V_x$ и $x \in U_x$. Совокупность всех множеств $\{U_x\}$ образует покрытие пространства X . В силу его компактности выделим конечное подпокрытие $\{U_{x1}, U_{x2}, \dots, U_{xn}\}$. Этим окрестностям соответствуют следующие окрестности точки a : $\{V_{x1}, V_{x2}, \dots, V_{xn}\}$. Пересечение этих окрестностей $\bigcap_{i=1}^n V_{xi} = V_0$ содержит точку a . Очевидно, что $V_0 \cap M = \emptyset$. Это означает, что точка a не является точкой прикосновения множества M , следовательно множество M содержит все свои точки прикосновения, а значит замкнуто. \triangleleft



Теорема (О нормальности компакта) Всякий компакт представляет собой нормальное множество.

(Компакт - хаудорфово и компактное пространство). Доказательство теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы.

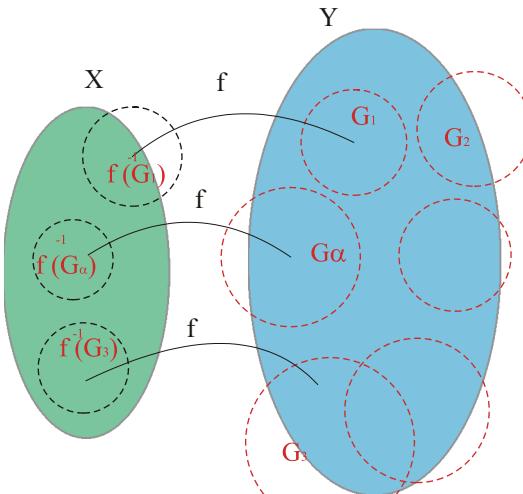
Определение (П.С. Александров) Точка x_0 пространства X называется **точкой полного накопления множества M** , если для любой окрестности U этой точки множества M и $M \cap U$ равномощны.

Теорема (П.С. Александров) Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любое его бесконечное подмножество содержит хотя бы одну точку полного накопления.

Данное утверждение примем без доказательства.

Непрерывные отображения компактных пространств

Теорема Непрерывный образ компактного пространства компактен.



▷ Пусть $f:X \rightarrow Y$ непрерывное отображение компактного пространства X на произвольное топологическое пространство Y и система множеств $G = \{G_\alpha\}$ является некоторым отрытым покрытием пространства Y . Рассмотрим систему множеств $U = f^{-1}(G_\alpha)$. В силу непрерывности отображения f эти все множества последней системы открыты. Очевидно, что система U образует покрытие пространства X . В силу компактности пространства X покрытие U содержит конечное подпокрытие \tilde{U} , а образы множеств, входящих в \tilde{U} , образуют подпокрытие, покрытия G , что означает компактность пространства Y . ◁

Замечание Из теоремы следует, что образ компактного подмножества - есть компактное множество.

Теорема Непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство есть отображение замкнутое.

▷ Пусть F произвольное замкнутое подмножество компактного пространства X , следовательно F само является компактным множеством.

В силу предыдущей теоремы и замечания образ этого множества т.е. $B = f(F)$ компактен, компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто. Следовательно, при непрерывном отображении f образ замкнутого множества - замкнут, значит отображение f замкнуто.

Теорема Непрерывное, взаимно-однозначное отображение f компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.

▷ Обозначим через $g: Y \rightarrow X$ отображение, обратное к f , а F - произвольное замкнутое подмножество пространства X . Тогда $g^{-1}(F) = f(F)$. Так как отображение f замкнуто, то и $g^{-1}(F)$ замкнуто. Следовательно, при отображении g прообраз замкнутого отображения замкнут, что означает непрерывность обратного к f отображения и, следовательно, отображение f является гомеоморфизмом. ◁

Теорема (Обобщение теорем Вейерштрасса) *Пусть A -компактное подмножество топологического пространства X , а f непрерывная на A вещественная функция, тогда f ограничена и достигает своей точной верхней и нижней граней.*

▷ Пусть выполнены условия теоремы. В данном случае функция - это непрерывное отображение множества A в пространство \mathbf{R}^1 , образ компактного множества при непрерывном отображении компактен. Следовательно множество $f(A)$ компактно. Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто, следовательно, $f(A)$ является замкнутым ограниченным множеством на числовой прямой откуда и следует утверждение теоремы ◁.

§13 Дифференцируемые многообразия

В евклидовых, аффинных и проективных пространствах, благодаря наличию систем координат можно широко применять аналитический аппарат. Проведем ряд рассуждений для топологических пространств, в которых систему координат можно построить в каждой точке.

Определение *Вещественным многообразием (или просто многообразием) называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, для каждой точки которой существует окрестность, гомеоморфная некоторой области пространства \mathbf{R}^n . При этом натуральное число n называется размерностью многообразия.*

Пусть M^n - n мерное многообразие и B - его произвольная точка. Тогда существует окрестность u точки B , для которой найдется гомеоморфизм $\varphi: u \rightarrow v \subset R^n$. Эта конструкция позволяет ввести систему координат в u . Если в \mathbf{R}^n задана система координат, то координаты точки $\varphi(B) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ можно считать координатами точки B . Они называют-

ся локальными координатами точки B . Гомеоморфизм φ называется локальным гомеоморфизмом, множество u - координатной окрестностью, пара (u, φ) -локальной картой.

Таким образом, локальная карта на M^n представляет собой локальную систему координат. Одна и также точка многообразия M^n может принадлежать различным локальным картам, например (u_1, φ_1) и (u_2, φ_2) . Пусть пресечение этих карт не является пустым множеством. Обозначим координаты точки $A \in u_1 \cap u_2$ в первой локальной карте $(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^n)$ и $(x_2^1, x_2^2, x_2^3, \dots, x_2^n)$ во второй. Тогда

$$\varphi_1(A) = (x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^n), \quad \varphi_2(A) = (x_2^1, x_2^2, x_2^3, \dots, x_2^n).$$

Рассмотрим гомеоморфизм

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(u_1 \cap u_2) \rightarrow \varphi_2(u_1 \cap u_2),$$

который определяет закон изменения координат и определяется совокупностью n непрерывных функций :

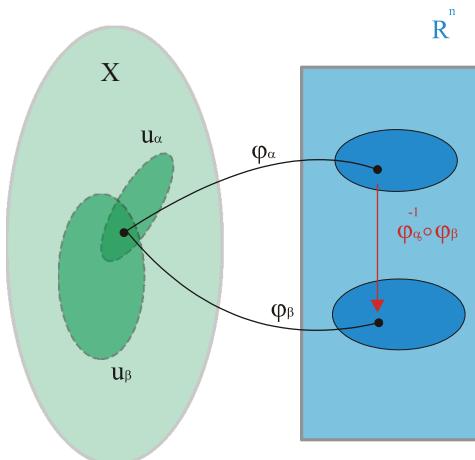
$$x_2^1 = x_2^1(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^n),$$

$$x_2^2 = x_2^2(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^n),$$

.....

$$x_2^n = x_2^n(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^n).$$

Эти функции называются функциями замены координат.



Семейство локальных карт $\{(u_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ называется атласом многообразия M^n . Очевидно, что совокупность всех координатных окрестностей образует покрытие многообразия M^n .

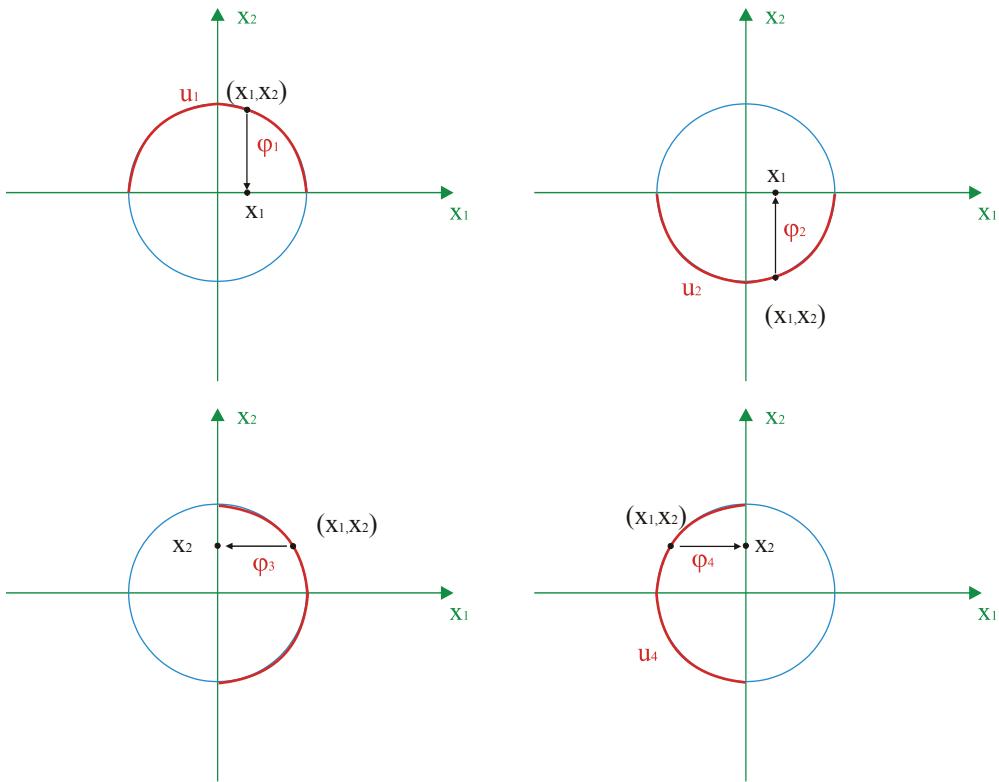
Примеры:

1. Пространство R^n является n -мерным многообразием. Действительно, пространство R^n является хаусдорфовым пространством со счетной базой. В качестве атласа можно взять атлас состоящий из одной карты: (R^n, I) , где I - тождественное отображение.

2. Рассмотрим единичную окружность, которую принято обозначать S^1 .

$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Пространство S^1 , как подпространство пространства \mathbb{R}^2 , является хаусдорфовым и удовлетворяет второй аксиоме счетности. Выберем следующие четыре карты:

- Карта (u_1, φ_1) : $u_1 = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_2 > 0\}$, координатный гомеоморфизм φ_1 действует по закону $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1$.
- Карта (u_2, φ_2) : $u_2 = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_2 < 0\}$, координатный гомеоморфизм φ_2 действует по закону $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1$.
- Карта (u_3, φ_3) : $u_3 = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_1 > 0\}$, координатный гомеоморфизм φ_3 действует по закону $\varphi_3(x_1, x_2) = x_2$.
- Карта (u_4, φ_4) : $u_4 = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_1 < 0\}$, координатный гомеоморфизм φ_4 действует по закону $\varphi_4(x_1, x_2) = x_2$.



Множества u_i являются дуговыми интервалами, гомеоморфизмы можно рассматривать как ортогональные проектирования на ось ОХ или ось ОY. Отображения φ_i^{-1} переводят интервал $(-1;1)$ в соответствующие дуговые интервалы:

$$\begin{aligned}\varphi_1^{-1}(x) &= \left(x, \sqrt{1-x^2} \right), & \varphi_2^{-1}(x) &= \left(x, -\sqrt{1-x^2} \right), \\ \varphi_3^{-1}(x) &= \left(\sqrt{1-x^2}, x \right), & \varphi_4^{-1}(x) &= \left(-\sqrt{1-x^2}, x \right).\end{aligned}$$

Таким образом S^1 представляет собой одномерное многообразие

Возьмем некоторую произвольную точку $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$, которая принадлежит множествам u_1 и u_2 . Относительно карты (u_1, φ_1) эта точка имеет координату $\varphi_1(A) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, относительно карты (u_3, φ_3) координату $\varphi_3(A) = \frac{1}{2}$. Для всех пересечений можно найти законы преобразования координат.

Напомним несколько определений, касающихся дифференцируемых отображений в R^n .

Действительная функция $f: u \rightarrow R^1$ называется гладкой или дифференцируемой класса C^r , если на множестве u у неё существуют непрерывные частные производные до порядка r включительно.

Пусть $g: U \rightarrow R^m$, где U - открытое множество пространства R^n . Тогда для произвольной точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ можно записать ее образ $g(M) = (g^1(M), g^2(M), \dots, g^m(M))$ т.е.

$$g^1(M) = g^1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$g^2(M) = g^2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

.....

$$g^m(M) = g^m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Отображение $g: U \rightarrow R^m$ называется дифференцируемым класса C^r , если для каждой функции $g^k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существуют непрерывные частные производные до порядка r включительно.

Рангом C^r отображения называется ранг его якобиевой матрицы.

Отображение $g: U \rightarrow V$ открытого множества $U \subset R^n$ на открытое множество $V \subset R^m$ называется дiffeоморфизмом класса C^r , если отображения g и g^{-1} принадлежат классу C^r . Дiffeоморфизмом класса C^0 очевидно является гомеоморфизм.

Понятие дифференцируемого многообразия

Рассмотрим многообразие M^n с атласом $A = \{(u_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Карты $(u_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (u_β, φ_β) называются C^r согласованными если выполнено одно из следующих двух условий:

1. $u_\alpha \cap u_\beta = \emptyset$;

2. $u_\alpha \cap u_\beta \neq \emptyset$ а гомеоморфизм $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ есть дiffeоморфизм класса C^r .

Атлас $A = \{(u_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообразия M^n называют атласом класса C^r если две его любые карты C^r согласованы.

На множестве C^r атласов введем отношение эквивалентности: два C^r атласа будем называть эквивалентными, если их объединение также является C^r атласом.

Введенное отношение эквивалентности разбивает множество C^r атласов многообразия M^n на непересекающиеся классы. Класс эквивалентности называют дифференцируемой структурой класса C^r .

Дифференцируемым многообразием класса C^r называется M^n многообразие на котором задана дифференцируемая структура класса C^r .

§13 Гомотопные отображения

Рассмотрим понятие гомотопии отображений, которое является обобщением физического процесса непрерывной деформации и было введено голландским математиком Л. Брауэром.

Прежде всего заметим, что произвольное семейство отображений $\{f_t, t \in T\}$ (здесь T - индексное множество) множества X в множество Y порождает отображение F декартова произведения $X \times T \rightarrow Y$, что $F(x, t) = f_t(x)$.

Пусть X, T, Y - топологические пространства. Семейство непрерывных отображений $\{f_t: X \rightarrow Y, t \in T\}$ называется непрерывным, если непрерывно отображение $F: X \times T \rightarrow Y$.

В дальнейшем мы будем рассматривать в качестве индексного множества единичный отрезок $I = [0;1]$.

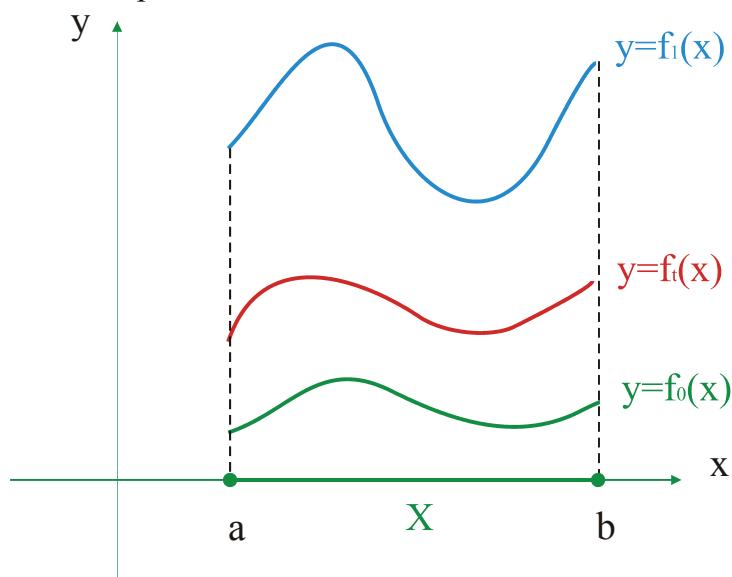
Определение: Два непрерывных отображения топологического пространства X в топологическое пространство Y называются гомотопными если, если существует такое непрерывное отображение $F: X \times I \rightarrow Y$, что

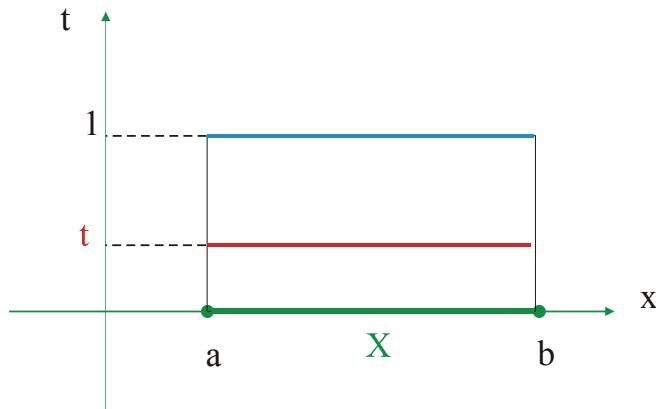
$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x)$$

для всех $x \in X$. При этом отображение F называется гомотопией от f_0 к f_1 .

Если отображения f_0 и f_1 гомотопны то пишут $f_0 \cong f_1$

На основании определений гомотопией от f_0 к f_1 можно считать непрерывное семейство отображений $f_t: X \rightarrow Y$, где $t \in I$. Если считать t - время, то в момент времени $t=0$ имеем отображение f_0 , далее на отрезке $[0;1]$ непрерывно меняется отображение f_t . В момент времени $t=1$ получаем отображение f_1 . Поэтому гомотопию часто называют непрерывной деформацией отображений.





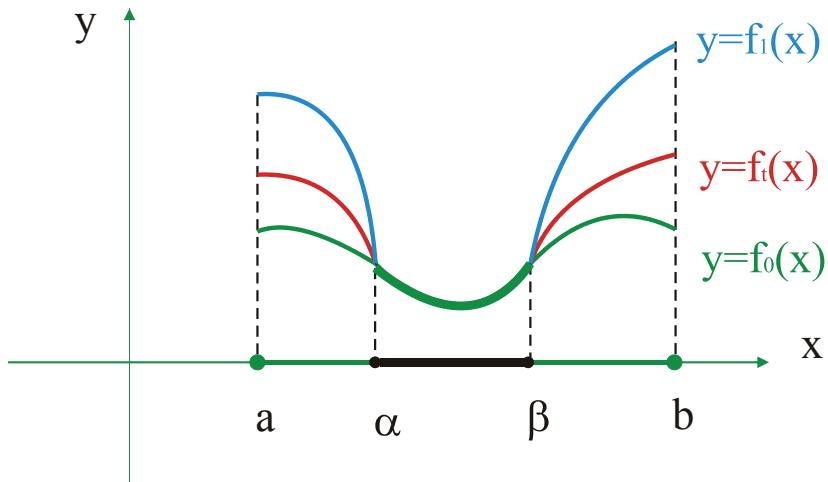
Определение: Гомотопию F непрерывного отображения $f_0: X \rightarrow Y$ к непрерывному отображению $f_1: X \rightarrow Y$ называют связанной множеством $A \subset Y$, если кроме условий $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ для всех $x \in X$, выполняются дополнительные условия

$$F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$$

для всех $a \in A$ и всех $t \in T$.

Гомотопию относительно множества A обозначают

$$f_0 \cong f_1 \text{ rel } A.$$



Имеет место следующая

Теорема: Гомотопия отображений есть отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений одного топологического пространства в другое.

▷ 1. Рефлексивность. Если $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, то положим $F(x, t) = f(x)$ для всех $t \in [0; 1]$, $x \in X$. Получим гомотопию от f к f . Следовательно $f \cong f$.

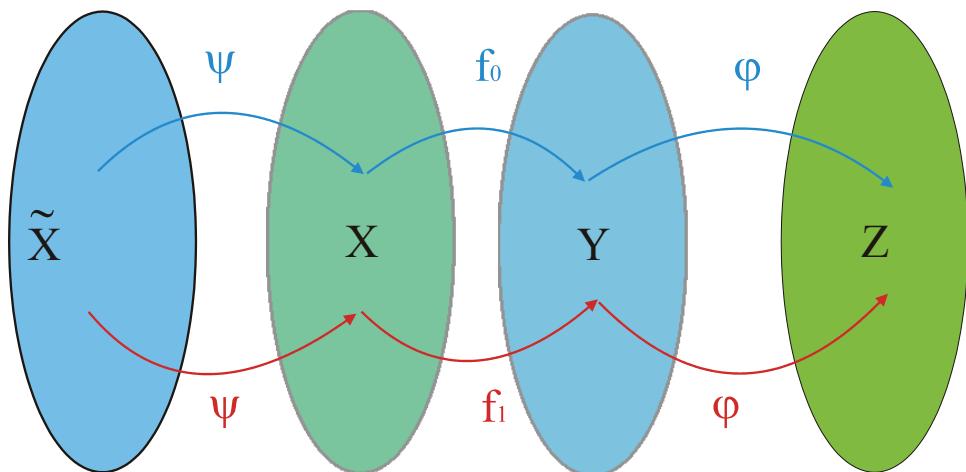
2. Симметричность. Если $f_0 \cong f_1$ то существует гомотопия $F(x,t)$ положим $\Phi(x,t) = F(x,1-t)$, осуществляющую гомотопию от f_1 к f_0 .

3. Транзитивность. Если $f_0 \cong f_1$, а $f_1 \cong f_2$. Докажем, что $f_0 \cong f_2$. Пусть F гомотопия от f_0 к f_1 , Φ гомотопия от f_1 к f_2 , тогда непрерывное отображение $\Psi: X \times I \rightarrow Y$, определяемое формулой

$$\Psi = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in [0; \frac{1}{2}], \\ \Phi(x, 2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

является гомотопией от f_0 к f_2 . \triangleleft

Обозначим через $H(X, Y)$ – множество всех непрерывных отображений топологического пространства X в пространство Y . На основании предыдущей теоремы, можно утверждать, что это множество разбивается на непересекающиеся классы гомотопных между собой отображений. Эти классы эквивалентности называются гомотопическими классами. Множество гомотопических классов отображений X в Y обозначим $\pi(X, Y)$.



Теорема Если отображения $f_0: X \rightarrow Y$ и $f_1: X \rightarrow Y$ гомотопны, то:

1. Для любого непрерывного отображения $\varphi: Y \rightarrow Z$ отображения $\varphi \circ f_0: X \rightarrow Z$ и $\varphi \circ f_1: X \rightarrow Z$ гомотопны;
2. Для любого непрерывного отображения $\psi: \tilde{X} \rightarrow X$ гомотопны отображения $f_0 \circ \psi: \tilde{X} \rightarrow Y$ и $f_1 \circ \psi: \tilde{X} \rightarrow Y$.

Определение Топологические пространства X и Y называются гомотопически эквивалентными если существуют такие непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$ и $\varphi: Y \rightarrow X$, что композиция $\varphi \circ f: X \rightarrow X$ гомотопна тождественному на X отображению, а композиция $f \circ \varphi: Y \rightarrow Y$ гомотопна тождественному на Y отображению.

Гомотопически эквивалентные пространства называют пространствами одного и того же гомотопического типа.

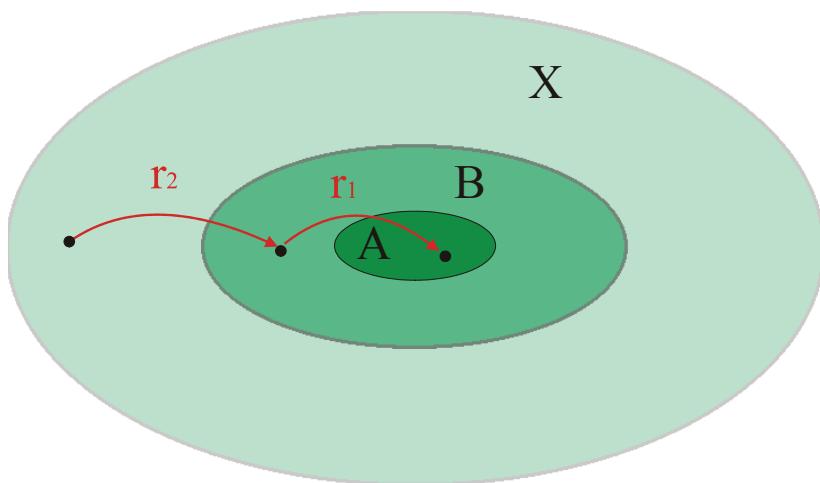
Если топологические пространства гомеоморфны, то они имеют один и тот же гомотопический тип. Обратное не всегда верно.

Ретракция и ретракт.

Одной из важных задач топологии является выяснение вопроса о возможности непрерывного продолжения некоторого отображения, заданного на подпространстве, на все пространство. Прояснит этот вопрос помогают следующие понятия.

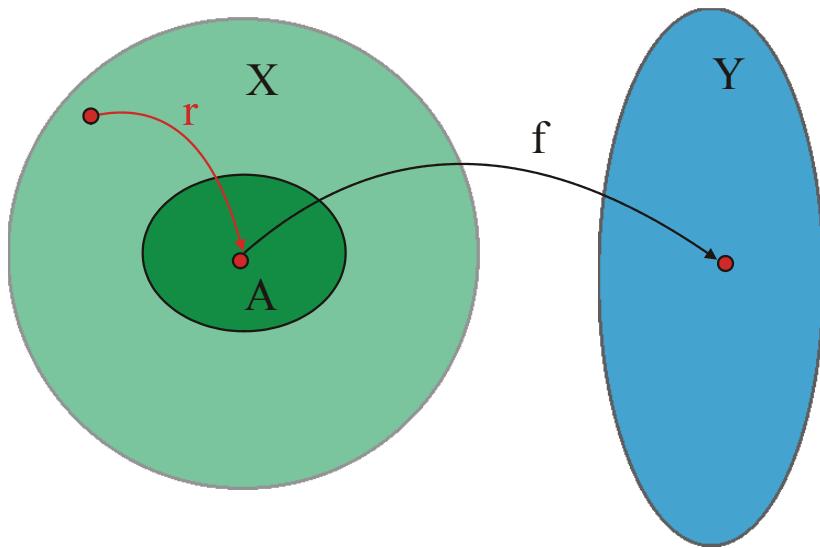
Определение Подпространство A топологического пространства X называется ретрактом этого пространства, если существует такое непрерывное отображение r пространства X на A , что $r(a)=a$ для каждой точки $a \in A$. Отображение $r: X \rightarrow Y$ называют ретракцией.

Теорема свойство быть ретрактом транзитивно, т.е. ретракт ретракта есть ретракт.



▷ Пусть A и B - подпространства топологического пространства X , $A \subset B$, $r_1:B \rightarrow A$ - ретракция B на A , $r_2:X \rightarrow B$ ретракция X на B . Рассмотрим композицию отображений $r = r_1 \circ r_2$. Найдем $r(a)$, где $a \in A$. $r(a) = r_1(r_2(a)) = r_1(a) = a$. Следовательно r есть ретракт X на A . ◁

Теорема *Подмножество A топологического пространства X тогда и только тогда является его ретрактом, когда любое непрерывное отображение $f:A \rightarrow Y$, где Y некоторое топологическое пространство, может быть непрерывно продолжено на все пространство X .*



Необходимость.

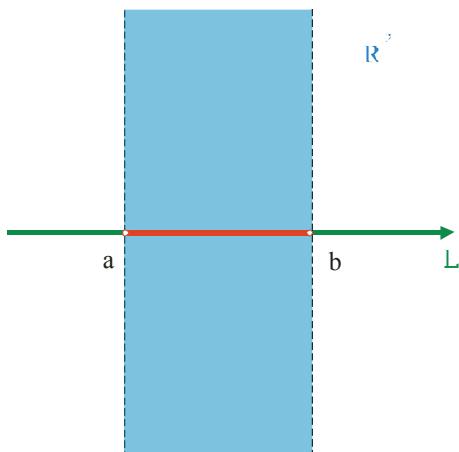
Пусть A - ретракт пространства X и $r:X \rightarrow A$ ретракция. Тогда композиция $r \circ f$ отображает X в Y и непрерывна.

Достаточность.

Если любое непрерывное отображение $f:A \rightarrow Y$ можно непрерывно продолжить на все пространство X , то для тождественного отображения $I_A:A \rightarrow A$ существует его непрерывное продолжение r на A . Отображение $r:X \rightarrow A$ есть ретракция пространства X на A . \triangleleft

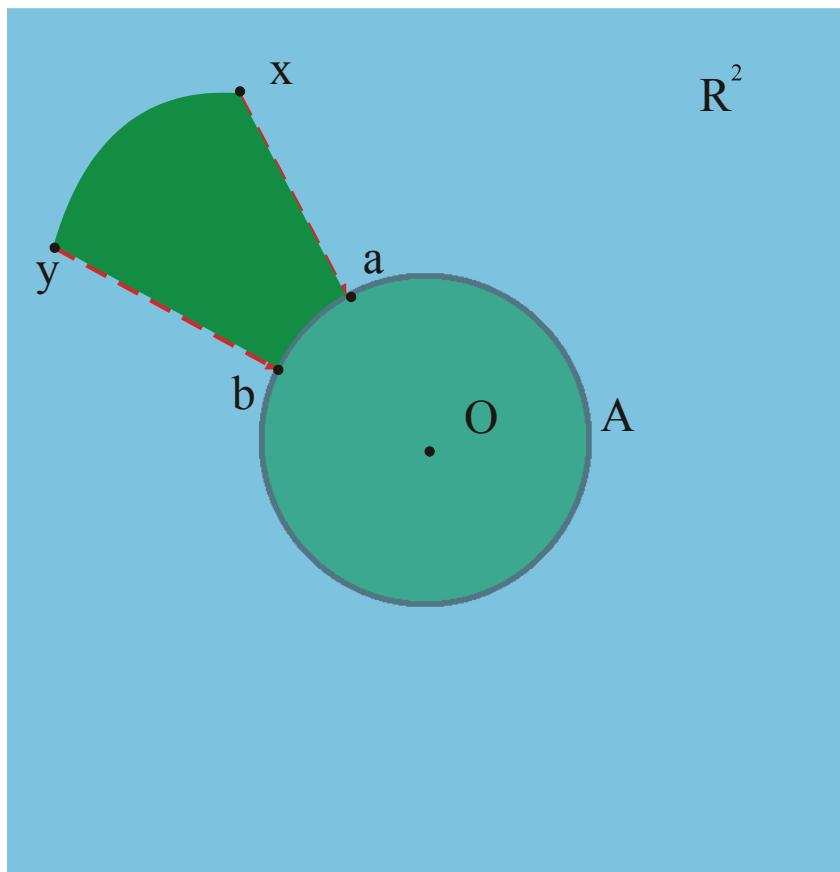
Примеры:

1. Каждая прямая L пространства \mathbf{R}^2 является его ретрактом. Здесь ретракцией является ортогональное проектирование \mathbf{R}^2 на L . Это отображение непрерывно т.к. при проектировании прообраз открытого множества открыт.



2. Любой замкнутый круг A в пространстве \mathbf{R}^2 является его ретрактом. Ретракцией $r:\mathbf{R}^2 \rightarrow A$ будет отображение, оставляющее на месте все точки A и переводящее любую точку \mathbf{R}^2 в точку на границе A , с помощью

центрального проектирования. Очевидно, что все точки окружности переходят сами в себя.



Деформационный ретракт

Промежуточное положение между гомеоморфизмом и ретракцией занимает отображение, называемое деформационной ретракцией.

Определение *Подпространство A топологического пространства X называется деформационным ретрактом X, если существует ретракция $r:X \rightarrow A$, гомотопная тождественному отображению I_x . Отображение r при этом называют деформационной ретракцией.*

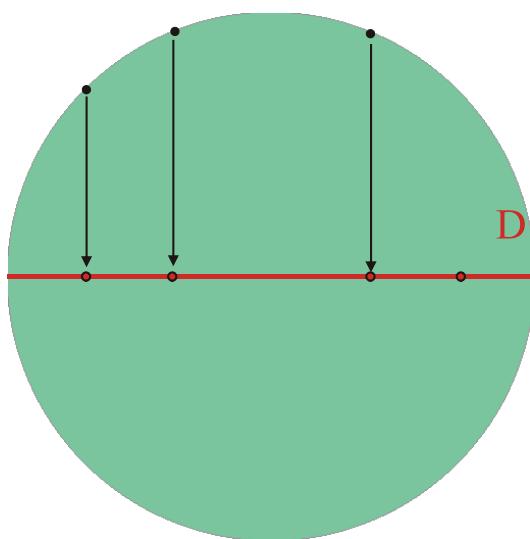
Таким образом, если подпространство A - деформационный ретракт пространства X, то существует такая ретракция $r:X \rightarrow A$ и гомотопия $F:X \times I \rightarrow X$, что для любого $x \in X$

$$F(x,0) = x, \quad F(x,1) = r(x)$$

и $F(a,t) = a$ для произвольных $a \in A, t \in I$.

Пример

Диаметр D любого круга A, пространства \mathbf{R}^2 является его деформационным ретрактом. Ортогональное проектирование точек A на D является ретракцией $r:A \rightarrow D$, а гомотопией от I_A к r - семейство непрерывных отображений $F(x,t) = (1-t)x + tr(x)$, где $t \in [0;1], x \in A$.



Самое простое непустое топологическое пространство состоит из одной точки. Охарактеризуем гомотопический тип такого пространства.

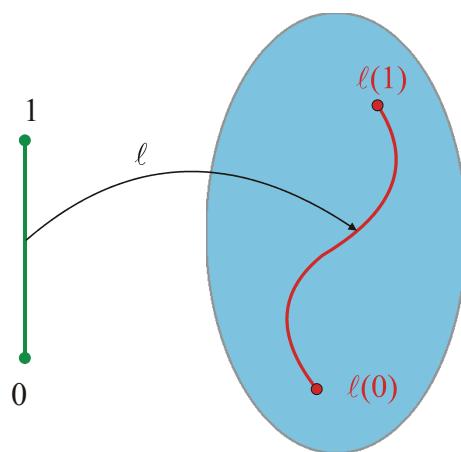
Топологическое пространство называется стягиваемым в точку, если существует такая точка $x_0 \in X$, что одноточечное множество $A = \{x_0\}$, является деформационным ретрактом x.

Теорема *Топологическое пространство стягиваемо в точку тогда и только тогда, когда оно гомотопически эквивалентно одноточечному множеству, т.е. имеет гомотопический тип одноточечного множества.*

§14 Фундаментальная группа

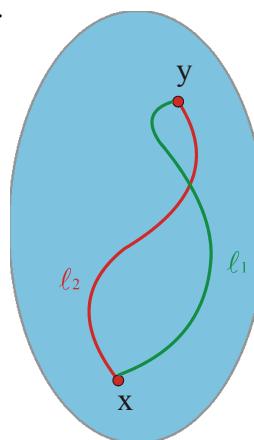
С помощью понятия фундаментальной группы, определяемого для любого топологического пространства в произвольной его точке многие топологические проблемы можно свести к чисто алгебраическим. Понятие фундаментальной группы было введено французским математиком А. Пуанкаре.

Определение *Путь в топологическом пространстве называется непрерывное отображение $l:[0;1] \rightarrow X$. Путь $l:[0;1] \rightarrow X$ называется соединяющим точки x и y , если $l(0) = x$, $l(1) = y$. При этом точка x называется начальной, а y конечной точкой пути.*



Определение *Путь l_0 в пространстве X называется единичным или нулевым, если отображение $l_0:[0;1] \rightarrow X$ постоянно.*

Определение *Два пути $l_1:[0;1] \rightarrow X$ и $l_2:[0;1] \rightarrow X$ с общими началом и концом называются эквивалентными, если существует гомотопия от l_1 к l_2 не смещающая концов.*



Следовательно, существует непрерывное отображение

$$F: [0;1] \times I \rightarrow X, \text{ что } F(s,0) = l_1(s), F(s,1) = l_2(s)$$

для каждой точки $s \in [0;1]$ и, кроме того,

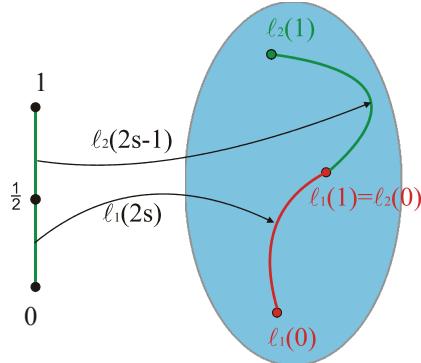
$$F(0,t) = l_1(0) = l_2(0); \quad F(1,t) = l_1(1) = l_2(1)$$

для каждой точки $t \in I$. Эквивалентные пути обозначаются $l_1 \sim l_2$

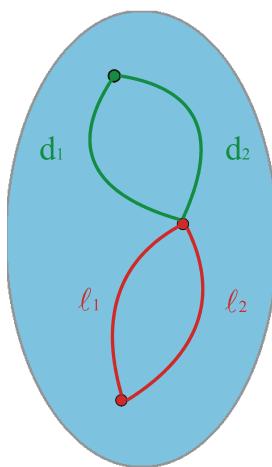
Введенное отношение является отношением эквивалентности.

Если $l_1: [0;1] \rightarrow X$ и $l_2: [0;1] \rightarrow X$ два пути в X , причем начальная точка второго пути совпадает с конечной точкой первого, т.е. $l_1(1) = l_2(0)$ тогда произведение путей $l_1 l_2$ определим следующим образом

$$(l_1 l_2)(s) = \begin{cases} l_1(2s), & s \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ l_2(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$



Теорема 1 Если, $d_1 \sim d_2$ и конечные точки путей l_1 и l_2 совпадают с начальными точками путей d_1 и d_2 соответственно (т.е. $l_1(1) = d_1(0)$ и $l_2(1) = d_2(0)$) то $l_1 d_1 \sim l_2 d_2$



▷ Обозначим через F_1 гомотопию от l_1 к l_2 , т.е.

$$F_1: I \times I \rightarrow X, \quad F_1(s,0) = l_1(s), \quad F_1(s,1) = l_2(s)$$

при всех $s \in I$. Кроме того,

$$F_1(0,t) = l_1(0) = l_2(0), \quad F_1(1,t) = l_1(1) = l_2(1)$$

Пусть F_2 гомотопия от d_1 к d_2 , т.е.

$$F_2: I \times I \rightarrow X, \quad F_2(s, 0) = d_1(s), \quad F_2(s, 1) = d_2(s)$$

при всех $s \in I$. Кроме того,

$$F_2(0, t) = d_1(0) = d_2(0), \quad F_2(1, t) = d_1(1) = d_2(1).$$

Найдем произведение путей

$$(l_1 d_1)(s) = \begin{cases} l_1(2s), & s \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ d_1(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

$$(l_2 d_2)(s) = \begin{cases} l_2(2s), & s \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ d_2(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

Эти пути имеют общие начало и конец. Гомотопию от $l_1 d_1$ к $l_2 d_2$ определим следующим образом:

$$F(s, t) = \begin{cases} F_1(2s, t), & s \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ F_2(2s-1, t), & s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \quad t \in I \end{cases}$$

Отображение $F(s, t)$ непрерывно (непрерывна каждая из компонент и при $s = \frac{1}{2}$ $F_1(1, t) = F_2(0, t)$). Кроме того

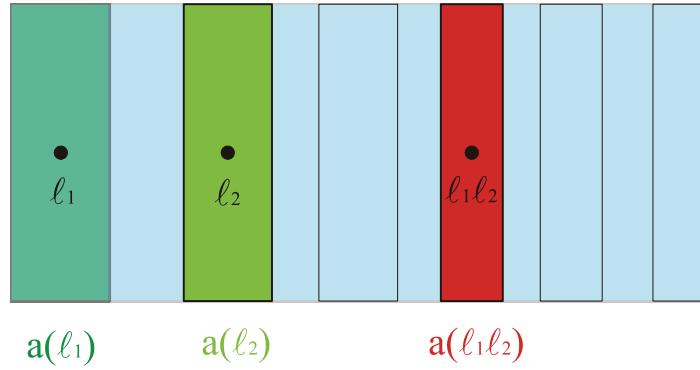
$$\begin{aligned} F(s, 0) &= (l_1 d_1)(s), \quad F(s, 1) = (l_2 d_2)(s), \quad s \in I; \\ F(0, t) &= F_1(0, t), \quad F(1, t) = F_2(1, t), \quad t \in I. \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Множество всех путей, заданных в топологическом пространстве, не образует группу относительно операции умножения. Это связано с тем, что операция умножения не всегда возможно (начало второго сомножителя должно совпадать с концом первого), кроме того, операция умножения путей не ассоциативна.

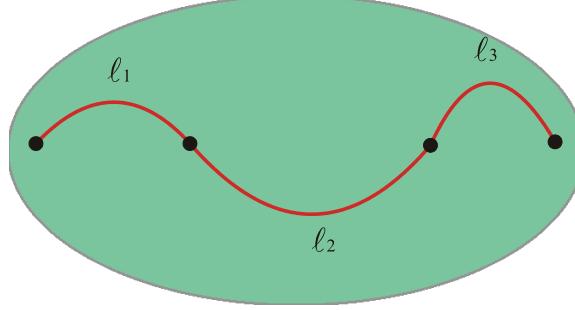
Возможен другой подход к построению группы: рассмотрение классов эквивалентностей.

Пусть $a(l_1)$ и $a(l_2)$ два класса эквивалентности путей $l_1 \in a(l_1)$ и $l_2 \in a(l_2)$, то произведением классов эквивалентности $a(l_1)$ $a(l_2)$ называют класс эквивалентности, содержащий путь $l_1 l_2$.



Предыдущая теорема показывает, что введенное определение корректно.

Теорема 2 *Произведение классов эквивалентности путей ассоциативно.*



Пусть l_1, l_2, l_3 – такие пути в топологическом пространстве X , что конечная точка пути l_1 совпадает с начальной точкой пути l_2 , а конечная точка этого пути совпадает с начальной точкой пути l_3 .

Для доказательства теоремы надо показать, что $(l_1 l_2) l_3 \sim l_1 (l_2 l_3)$

По определению произведения путей:

$$(l_1 l_2) l_3 = \begin{cases} (l_1 l_2)(2s), s \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ l_3(2s - 1), s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases} =$$

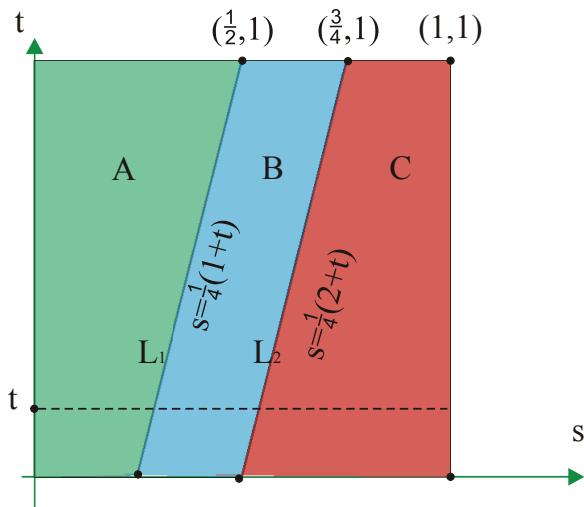
$$= \begin{cases} l_1(4s), s \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \\ l_2(4s - 1), s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]; \\ l_3(2s - 1), s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

$$l_1(l_2 l_3) = \begin{cases} l_1(2s), s \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ (l_2 l_3)(2s - 1), s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} l_1(2s), s \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ l_2(4s - 2), s \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]; \\ l_3(4s - 3), s \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой в формулы можно убедиться, что пути $(l_1 l_2) l_3$ и $l_1(l_2 l_3)$ имеют общие начало и конец.

Разобьем прямоугольник $I \times I$ на части А, В, С. Сделаем это с помощью прямых $s = \frac{1}{4}(1+t)$ и $s = \frac{1}{4}(2+t)$.



Перейдем к построению функции F . В точках множества А она будет принимать значения $l_1\left(\frac{4s}{1+t}\right)$. Аргумент выбран так, чтобы во всех точках прямой $s = \frac{1}{4}(1+t)$ он принимал значение 1. В точках множества В функция F принимает значения $l_2(4s - 1 - t)$ (аргумент равен 0 в точках прямой L_1 и единице на прямой L_2). В точках множества С $F = l_3\left(\frac{4s - t - 2}{2-t}\right)$ (аргумент равен 0 на прямой L_2 и единице на прямой $s=1$). Суммируя сказанное выше

$$F(s, t) = \begin{cases} l_1\left(\frac{4s}{1+t}\right), s \in \left[0; \frac{1}{4}(1+t)\right], \\ l_2(4s - 1 - t), s \in \left[\frac{1}{4}(1+t); \frac{1}{4}(2+t)\right], \\ l_3\left(\frac{4s - t - 2}{2-t}\right), s \in \left[\frac{1}{4}(2+t); 1\right]. \end{cases}$$

Для всех аргументов отображение F непрерывно как сложная функция, сстыкованная на границах. Кроме того,

$$F(s,0) = \begin{cases} l_1(4s), s \in \left[0; \frac{1}{4}\right], \\ l_2(4s-1), s \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], \\ l_3(2s-1), s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

$$F(s,1) = \begin{cases} l_1(2s), s \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ l_2(4s-2), s \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], \\ l_3(4s-3), s \in \left[\frac{3}{24}; 1\right]. \end{cases}$$

Таким образом, найдена гомотопия, не смещающая концов путей, следовательно

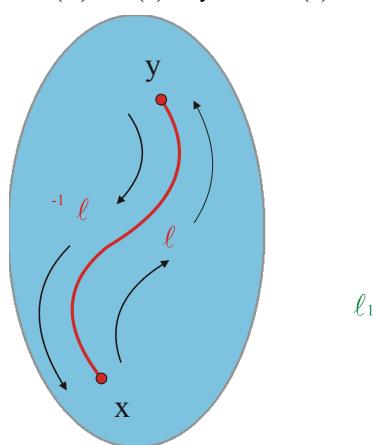
$$(l_1 l_2) l_3 \sim l_1 (l_2 l_3).$$

Теорема доказана.

Обозначим для произвольной точки x пространства X через e_x класс эквивалентности нулевого пути в этой точке, т.е. совокупность всех путей, гомотопных нулевому пути $l_0: I \rightarrow X$, для которого $l_0(I) = \{x\}$.

Теорема 3 Если α - класс эквивалентности путей с начальной точкой x и конечной точкой y , то $e_x \alpha = \alpha$ и $\alpha e_y = \alpha$.

Для произвольного пути $l: I \rightarrow X$ обратным к нему называется путь $l^{-1}(s) = l(1-s)$. Если x - начальная точка пути l , а y - конечная, т.е. $l(0) = x$, $l(1) = y$, то $l^{-1}(0) = l(1) = y$ и $l^{-1}(1) = l(0) = x$.



Теорема 4 Если α и α^{-1} - классы эквивалентности путей l и l^{-1} , то $\alpha \alpha^{-1} = e_x$ и $\alpha^{-1} \alpha = e_y$, где x - начальная точка пути l , а y - конечная.

Определение фундаментальной группы. Односвязные пространства.

Будем рассматривать частный случай путей, когда начало и конец пути совпадают. Такой путь называется петлей. Если начало и конец пути находятся в точке x_0 , то говорят о петле в этой точке. Для любых двух петель в точке x_0 определено их произведение. К одному классу эквивалентности относятся все петли в точке x_0 , эквивалентные между собой.

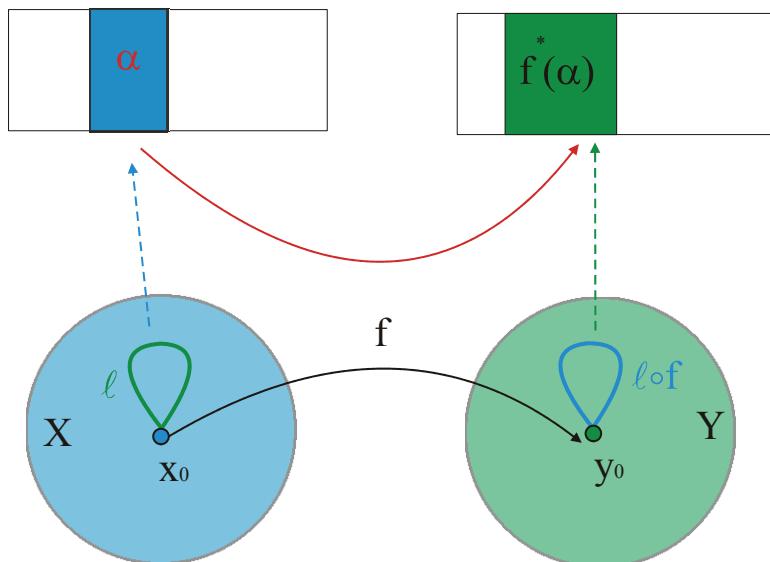
Теоремы 1-4 позволяют на множестве классов эквивалентности петель в точке x_0 ввести структуру группы.

Пусть x_0 - произвольная точка топологического пространства. Множество всех классов эквивалентности петель образуют группу относительно операции умножения классов эквивалентности. Эту группу называют фундаментальной группой или Группой Пуакара.

Обозначается фундаментальная группа как $\pi(X, x_0)$.

Теорема 5 *Если топологическое пространство X линейно связано, то для любых двух точек x_0 и x_1 группы $\pi(X, x_0)$ и $\pi(X, x_1)$ изоморфны.*

$$\pi(X, x_0) \quad \pi(Y, y_0)$$



Пусть X и Y - топологические пространства и отображение $f:X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда каждой петле $l:I \rightarrow X$ в точке $x_0 \in X$ ставится в соответствие петля $f \circ l:I \rightarrow Y$ в точке $y_0 = f(x_0)$.

Если петли $l_1:I \rightarrow X$ и $l_2:I \rightarrow X$, то гомотопны петли $f \circ l_1$ и $f \circ l_2$ в Y . Обозначим через α класс петель, к которому принадлежат l_1 и l_2 , а через $f^*(\alpha)$ класс путей в Y , в который входят пути $f \circ l_1$ и $f \circ l_2$. Очевидно этот класс есть образ. Тем самым мы определили отображение $f^*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0)$

Отображение $f^: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0)$, сохраняющее групповую операцию называют индуцированным отображением (или индуцированным гомоморфизмом)*

Определение *Линейно связное топологическое пространство называется односвязным, если его фундаментальная группа $\pi(X, x_0)$ для какой либо точки, а значит для любой точки x_0 тривиальна (т.е. состоит только из нейтрального элемента).*

Можно показать, что произвольное выпуклое множество пространства R^n , в частности, само пространство R^n односвязно.

Можно показать, что фундаментальная группа сферы S^2 пространства R^3 (а также S^n в пространстве R^{n+1}) тривиальна.

Имеет место следующая

Теорема *Фундаментальная группа окружности S^1 является бесконечной циклической группой с образующей α_1 , где α_1 - гомотопический класс петли $l_1: I \rightarrow S^1$, где $l_1(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in [0;1]$*

§ 15 Степень отображения

Определение *Многообразие M^n называется замкнутым, если оно компактно и не имеет границы.*

Например сфера S^n , тор T^n , поверхности с k -ручками.

Определение *Говорят, что на многообразии M^n задана ориентация, если оно разбито на области действия локальных координат*

$$M^n = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}; \quad x_{\alpha}^1, x_{\alpha}^2, x_{\alpha}^3, \dots, x_{\alpha}^n,$$

где в пересечениях областей $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ функции $x_{\beta}^q(x_{\alpha}^1, x_{\alpha}^2, \dots, x_{\alpha}^n)$, $q = 1, 2, \dots, n$ таковы, что якобиан $I > 0$, где

$$I = \det \left(\frac{dx_{\beta}^q}{dx_{\alpha}^p} \right).$$

Имеем два многообразия M_1^m и M_2^n . Пусть задано гладкое отображение:

$$f: M_1^m \rightarrow M_2^n$$

Определение: *Точка $P \in M_1^m$ называется правильной точкой для отображения f , если матрица Якоби I этого отображения в точке P имеет ранг m .*

Определение: *Точка $P' \in M_2^n$ называется регулярной точкой, если все точки $P \in f^{-1}(P')$ полного прообраза правильные.*

Имеет место важная (лемма Сарда)

Лемма *Если отображение f является гладким, то почти все точки $Q \in M_2^n$ регулярны.*

Слова «почти все» понимаются в смысле меры: они означают, что в любой близости каждой точки $Q \in M_2^n$ есть регулярные точки.

Примеры

1. Если $m < n$, то регулярны только те точки $Q \in M_2^n$, где полный прообраз $f^{-1}(Q)$ пуст (нет ни одной точки P , такой что $f(P) = Q$).
2. Если $m = n$, то полный прообраз $f^{-1}(Q) = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_N$ состоит из некоторого числа точек P_{α} . В каждой точке P_{α} можно определить знак

$$\operatorname{sgn} P_\alpha = \operatorname{sgn} \left(\det \frac{\partial x^p}{\partial y^q} \right), \quad \text{где } x^p -$$

локальные координаты в точке, а y^q - локальные координаты в точке Р.

Имеет место следующая

Теорема Если $f: M^m \rightarrow M^n$ гладкое отображение и $Q \in M^n$ - регулярная точка, то полный прообраз $f^{-1}(Q) \in M^m$ является гладким многообразием размерности $m-n$. Более того, в любой точке $P \in f^{-1}(Q)$ дифференциал отображения f (линейное отображение касательных пространств $\hat{f}: R^q \rightarrow R^n$, задаваемое матрицей Якоби отображения f) имеет ранг n .

Следствие 1 Если $m=n$ и многообразие M_1^n компактно (где $f: M_1^n \rightarrow M_2^n$), то полный прообраз регулярной точки $Q \in M_2^n$ состоит конечного числа точек P_j ($j=1, 2, \dots, N$); при малом движении точки $Q \rightarrow Q'$ новая точка $Q' \in M_2^n$ тоже регулярна, причем ее прообраз тоже сдвигается мало в многообразии M_1^n .

Следствие 1 Если $m=n$ и оба многообразия M_1^n и M_2^n ориентированы, причем M_1^n компактно, то в каждой точке полного прообраза $P \in f^{-1}(Q)$ корректно определен знак

$$\operatorname{sgn}(P) = \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \right)_P$$

Определение Степенью отображения ориентированных многообразий $f: M_1^n \rightarrow M_2^n$ в регулярной точке $Q \in M_2^n$, где полный прообраз $f^{-1}(Q)$ состоит из конечного числа точек P_α называется сумма

$$\boxed{\deg_Q(f) = \sum_{P_\alpha \in f^{-1}(Q)} \operatorname{sgn}(P_\alpha)}$$

Пример Пусть задано отображение окружности в окружность $f: S^1(x) \rightarrow S^1(y)$.

Это отображение задаётся функцией $y = f(x)$, где числа $x, x + 2\pi n$ и $y = 2\pi m$, при целых числах m и n определяют одинаковые точки обеих окружностей.

Функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(x + 2\pi) = f(x) + 2k\pi,$$

где k - целое число, т.к. точки x и $x + 2\pi$ совпадают, то должны совпадать и точки $y_1 = f(x)$ и $y_2 = f(x + 2\pi)$. Число k -постоянно т.к. отображение непрерывно. Отсюда следует, что

$$k = \deg(f)$$

(здесь степень отображения называется числом вращения).

Теорема Степень отображения $M_1^n \xrightarrow{f} S^n$ любого замкнутого ориентированного многообразия на сферу S^n не зависит от выбора регулярной точки $Q \in S^n$. Более того, степень не меняется при гладких гомотопиях.

§ 16 Интегрирование внешних дифференциальных форм

Интеграл от внешней формы по сингулярному кубу

Пусть R^k - декартово координатное представление k - мерного Евклидова пространства. Произвольную точку этого пространства будем обозначать t а её координаты $t=(t^1, t^2, \dots, t^k) \in R^k$. Обозначим через h стандартный куб в R^k , т.е.

$$h=[0;1]^k.$$

По определению

$$t \in [0;1]^k \Leftrightarrow 0 \leq t^i \leq 1 \quad (i=1,2,3,\dots,k).$$

Рассмотрим произвольную область U , $U \in R^k$, содержащую куб и допустим, что в области U задана внешняя дифференциальная форма σ степени k

$$\sigma = g(t^1, t^2, \dots, t^k) dt^1 \wedge dt^2 \wedge \dots \wedge dt^k.$$

Предположим, что σ непрерывна, т.е. непрерывна $g(t^1, t^2, \dots, t^k)$.

Определение Интеграл по кубу $h=[0;1]^k$ от формы σ определяется равенством:

$$\int_h \sigma = \int_{[0;1]^k} g(t^1, t^2, \dots, t^k) dt^1 dt^2 \dots dt^k,$$

где справа записан обычный k -кратный интеграл по $h=[0;1]^k$.

Пусть теперь ω - внешняя дифференциальная k -форма, заданная в некоторой области V пространства E

$$\dim E = n \geq k.$$

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение

$$C: U \rightarrow V \subset E.$$

Вместе с ним определено сужение на h , которое также обозначим буквой C

$$C: h \rightarrow V \quad (1)$$

Отображение (1) называется k-мерным сингулярным кубом в пространстве E.

Можно считать, что сингулярный куб - это множество пар вида (x, t) где $t \in h; x = C(t) \in E$.

Вместе с сингулярным кубом определено линейное отображение:

$$C': T_t \rightarrow T_x \quad (2)$$

т.е. производная C , здесь $T_t = T_t(R^k)$ касательное пространство к R^k в точке t , $T_x = T_x(E)$ касательное пространство к E в точке $x = C(t)$.

Отображение (2) индуцирует линейное отображение C^*

$$C^*: \Lambda^k(T_x) \rightarrow \Lambda^k(T_t) \quad (3)$$

С каждой k -формой ω в области $V \subset E$ сопоставляется k -форма $C^*\omega$ на стандартном кубе $h \in R^k$.

Определение *Интегралом от внешней дифференциальной k-формы ω по сингулярному n-мерному кубу C в области V называется число, определяемому равенством*

$$\int_C \omega = \int_h C^* \omega \quad (4)$$

Предположим, что в E введена декартова прямоугольная система координат $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, тогда отображение C получает координатное представление:

$$\begin{cases} x^1 = C^1(t^1, t^2, \dots, t^k), \\ x^2 = C^2(t^1, t^2, \dots, t^k), \\ \dots \\ x^k = C^k(t^1, t^2, \dots, t^k), \\ \dots \\ x^n = C^n(t^1, t^2, \dots, t^k). \end{cases} \quad (5)$$

Выведем формулы для вычисления $C^*\omega$ и интеграла от ω по C .

Пусть

$$\omega = G(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (6)$$

тогда

$$\begin{aligned} c^* \omega &= (G \circ c) c^*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^k) = (G \circ c) c^* dx^1 \wedge \dots \wedge c^* dx^k, \\ c^* dx^i &= (D_1 c^i) dt^1 + \dots + (D_k c^i) dt^k, \end{aligned} \quad (7)$$

следовательно

$$c^* \omega = (G \circ c) \det \left(\frac{x^1, \dots, x^k}{t^1, \dots, t^k} \right) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k \quad (8)$$

Окончательно получаем

$$\int_C \omega = \int_{[0:1]^k} G(x^1(t), \dots, x^n(t)) \det \left(\frac{x^1, \dots, x^k}{t^1, \dots, t^k} \right) dt^1 \wedge dt^2 \wedge \dots \wedge dt^k \quad (9)$$

Для простого случая

$$\omega = P dx^1$$

$P = P(x^1, x^2, x^3)$ (интеграл по 1 - мерному сингулярному кубу, т.е. ориентированной дуге

$$c: \begin{cases} x^1 = c^1(t), \\ x^2 = c^2(t), \\ x^3 = c^3(t). \end{cases}$$

Обозначим $P(t) = P(c^1(t), c^2(t), c^3(t))$, тогда соотношение (9) примет вид:

$$\int_c \omega = \int_{[0;1]} P(t) \frac{dx^1}{dt} dt$$

Формуле (9) можно придать краткую запись, если обозначить

$$\det \left(\begin{array}{c} x^1, \dots, x^k \\ t^1, \dots, t^k \end{array} \right) = \det \hat{c}'$$

$$\int_c \omega = \int_{[0;1]^k} (G \circ c)(\det \hat{c}')$$

Понятие цепи. Интеграл от формы по цепи.

Наглядный источник, приводящий к понятию цепи это дуга A_0A_p , состоящая из ориентированных дуг $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{p-1}A_p$. Будем рассматривать дугу A_0A_p как набор одномерных сингулярных кубов c_0, c_1, \dots, c_p .

Обозначим его как формальную сумму

$$c_0 + c_1 + \dots + c_p.$$

Одномерной цепью назовем любую формальную сумму

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_p c_p$$

Теперь будем рассматривать цепи любой размерности. Пусть c_0, c_1, \dots, c_p - некоторый набор k -мерных сингулярных кубов в E , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ - набор действительных чисел.

Совокупность таких наборов мы назовем k -мерной цепью пространства E^n

$$C = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_p c_p$$

Интеграл по цепи определим равенством

$$\int_c \omega = \lambda_1 \int_{c_1} \omega + \lambda_2 \int_{c_2} \omega + \dots + \lambda_p \int_{c_p} \omega$$

Можно показать, k -мерные цепи (точнее их классы эквивалентности) образуют линейное пространство. Обозначим его (это пространство бесконечномерное)

Обозначим W^k - линейное пространство всех внешних дифференциальных форм степени k , определенных и гладких (бесконечно дифференцируемых) в евклидовом пространстве E . Можно показать, что пространство W^k также бесконечномерное.

Зафиксируем k ($0 \leq k \leq n$), S^k и W^k . Пусть $C \in S^k$, $\omega \in W^k$, тогда введем обозначение "свертки элементов"

$$(\omega, c) = \int_c \omega$$

Пространства S^k и W^k назовем сопряженными относительно свертки.

Ранее был определен оператор внешнего дифференцирования d
 $d: W^k \rightarrow W^{k+1}$

Наряду с ним существует оператор ∂ , который произвольной k -мерной цепи S^k ставит в соответствие цепь S^{k-1} (границу цепи)

$$\partial: S^k \rightarrow S^{k-1}$$

или

$$\partial: S^{k+1} \rightarrow S^k$$

Операторы d и ∂ действуют в сопряженных пространствах. Эти операторы сами сопряжены $\forall \omega \in W^k$ и $\forall c \in S^{k+1}$ справедливо равенство

$$(d\omega, c) = (\omega, \partial c)$$

или

$$\boxed{\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega}$$

Последнее равенство представляет собой общую формулу Стокса.

Стокс Джордж Габриэль (Stokes George Gabriel) 13.8.1819 - 1.2.1903. английский физик и математик. Окончил Кембриджский университет (1841), с 1849 г профессор этого университета. Основные труды по физике. В математике одновременно с Зейделем ввел (1848) понятие равномерной сходимости последовательности и функционального ряда. Вывел в 1854 году одну из важнейших формул векторного анализа

§ 17 Топологическое многообразие с краем

Определение 1 *n*-мерным топологическим многообразием с краем называется всякое хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, удовлетворяющее условию: для всякой его точки существует окрестность, гомеоморфная либо пространству R^n , либо полупространству $R_0^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq 0\}$.

Определение 2 Множество всех точек многообразия M^n , имеющих окрестность, гомеоморфную R^n называют *внутренностью многообразия M^n* и обозначают $\text{int } M^n$.

Определение 3 Точка $q \in M^n$ называется *краевой точкой многообразия M^n* , если у нее имеется окрестность V_q , гомеоморфная полупространству R_0^n , причем связывающий их гомеоморфизм $\varphi: V_q \rightarrow R_0^n$ переводит точку q^n в некоторую точку гиперплоскости, граничной для R_0^n . Множество всех краевых точек называется *краем M^n* и обозначается ∂M^n .

Определение 4 Топологическое многообразие, множество краевых точек которого не пусто, называется *многообразием с краем*, а многообразие, все точки которого являются внутренними, называется *многообразием без края*.

Определение 5 Компактное топологическое многообразие без рая называется *замкнутым*. Топологическое многообразие называется *открытым*, если у него нет компактных компонент.

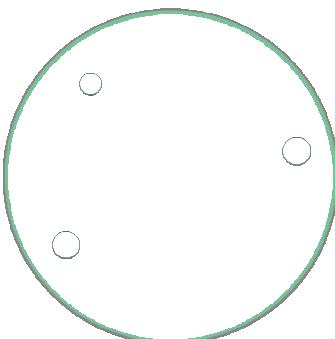
Пример 1 Полупространство $R_0^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq 0\}$ - *n* мерное многообразие с краем, краем ∂M^n является гиперплоскость R^{n-1} , заданная уравнением $x_n = 0$. Внутренность $\text{int } R_0^n$ – открытое полупространство R_+^n , заданное неравенством $x_n > 0$.

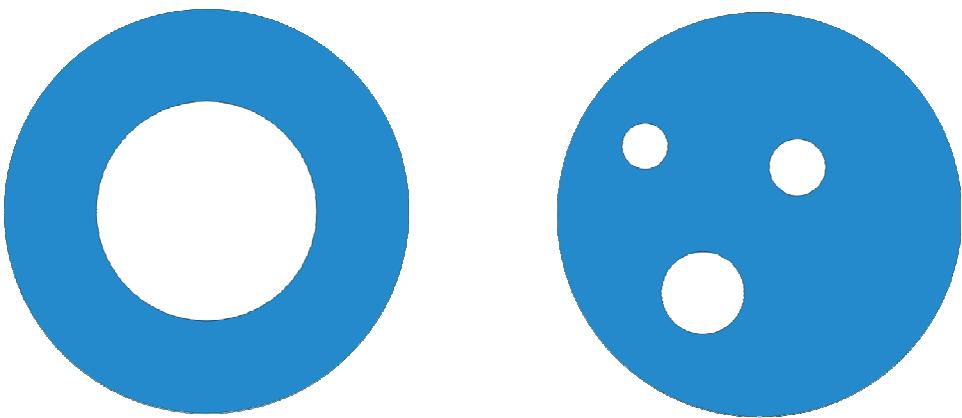
Пример 2 Замкнутый шар

$B^n[a, r] = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 \leq r^2\}$ - *n* мерное многообразие с краем. Краем ∂B^n является сфера $S^{n-1}(a, r)$, заданная уравнением $(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2$. Внутренность – это открытый шар $B^n(a, r) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2\}$.

Пример 3 Отрезок $[0; 1]$ одномерное многообразие с краем $\partial[0; 1] = \{0, 1\}$, $\text{int}[0; 1] = (0; 1)$ – открытый интервал.

Пример 4 Пусть M^n – замкнутое многообразие, а $M^{n+1} = M^n \times [0; 1]$. Тогда M^{n+1} – $(n+1)$ – мерное многообразие, называемое *цилиндром*, основания которого $M^n \times \{0\}$ и $M^n \times \{1\}$ являются краем.





На рисунках изображены различные двумерные многообразия с краем (фера с дырками, кольцо, круг с дырками).

§18 Клеточные разбиения. Характеристика Эйлера - Пуанкаре

Обозначим B^k замкнутый шар единичного радиуса в пространстве R^k , а через $\text{int } B^k$ - его внутренность. В случае $k=0$ будем считать, что нульмерный шар и его внутренность состоят из единственной точки.

Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство.

Определение 1. Подмножество e^k топологического пространства X называется *k-мерной открытой клеткой* в X , если существует такое непрерывное отображение $f : B^k \rightarrow X$, под действием которого $\text{int } B^k$ гомеоморфно отображается на e^k .

Такое отображение f называется *характеристическим* для клетки e^k .

Определение 2. *Клеточное разбиение* – это пара, состоящая из хаусдорфова топологического пространства X – *пространства разбиения*, - и системы его непересекающихся подмножеств $\{e_\alpha\}$, покрывающих пространство X , для которых выполняются следующие условия:

1. каждое подмножество e_α семейства $\{e_\alpha\}$ представляет собой открытую клетку размерности $n(\alpha) \geq 0$;
2. граница каждой k -мерной клетки семейства $\{e_\alpha\}$ содержится в объединении всех клеток из $\{e_\alpha\}$, размерности которых меньше k . Это объединение называется *(k-1)-мерным остовом разбиения* $\{e_\alpha\}$, обозначается T^{k-1} ;
3. подмножество пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто его пересечение с замыканием любой клетки из $\{e_\alpha\}$;
4. любая клетка содержится в замкнутом множестве, являющимся объединением конечного числа клеток семейства $\{e_\alpha\}$.

Определение 3. Хаусдорфово топологическое пространство X , для которого существует покрытие $\{e_\alpha\}$, удовлетворяющее требованиям определения 2, называется *клеточным пространством*.

Определение 4. Клеточное пространство называется *конечным (счетным)*, если оно допускает разбиение на конечное (счетное) число клеток.

Замечание: Возможен индуктивный подход к построению клеточных пространств.

Определение 5. Размерностью клеточного пространства X называется верхняя граница размерностей его клеток. Обозначается $\dim X$.

По определению $\dim T^k \leq k$ и $\dim T^k = k$ тогда и только тогда, когда $T^k \neq T^{k-1}$. Таким образом, если $\dim X = n$, то $T^m = X$ для любого $m \geq n$.

Клеточное пространство нульмерно тогда и только тогда, когда оно дискретно.

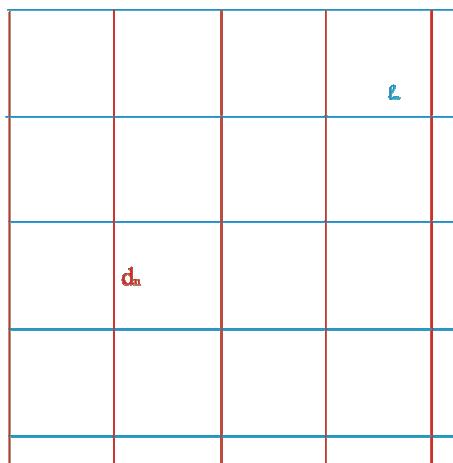
Все клеточные пространства, за исключением нульмерного, допускают бесконечно много клеточных разбиений.

Перечислим (без доказательства) некоторые свойства клеточных пространств.

- Клеточное пространство компактно в том и только в том случае, когда оно дискретно;
- Клеточное пространство связно в том и только в том случае, если связан его первый остов;
- Клеточное пространство сепарабельно в том и только в том случае, если оно счетно;
- Для того чтобы клеточное пространство обладала счетной базой, необходимо и достаточно чтобы оно было счетным и локально конечным (каждая точка должна обладать окрестностью, пересекающейся только с конечным числом клеток);
- Клеточное пространство метризуемо в том и только в том случае, если оно локально конечно.

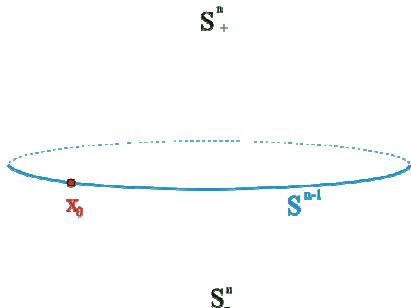
Пример 1. Плоскость E^2 допускает клеточное разбиение, состоящее из счетных совокупностей нульмерных, одномерных и двумерных клеток.

Для этого возьмем в E^2 два семейства прямых $\{l_m\}$ и $\{d_n\}$, заданных уравнениями: $l_m : x = m; d_n : y = n; m, n \in Z$. В результате плоскость разбивается на счетное семейство квадратов, внутренности которых – двумерные клетки, стороны (без концов) – одномерные клетки, а вершины – нульмерные клетки.

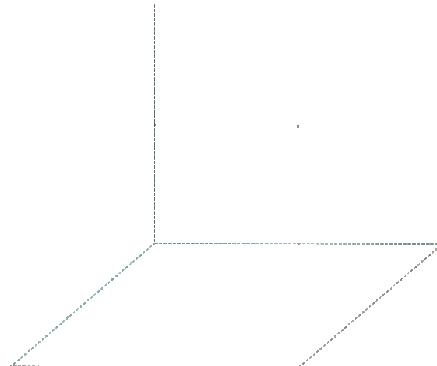


Пример 2. Сфера S^n допускает клеточное разбиение, состоящее из нульмерной клетки – точки x_0 и одной n - мерной клетки $S^n / \{x_0\}$.

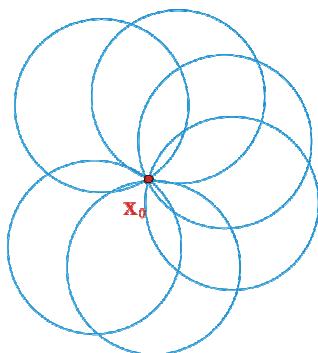
Пример 3. Сфера S^n может быть разбита на клетки другим способом: S_+^n и S_-^n («верхняя» и «нижняя» полусферы), одну $(n-1)$ - мерную клетку $S^{n-1} / \{x_0\}$, где S^{n-1} – «экватор», а x_0 – точка «экватора» и одну нульмерную клетку x_0 .



Пример 4. Выпуклый многогранник в E^3 допускает следующее клеточное разбиение: внутренность многогранника является трехмерной клеткой, внутренности граней – двумерные клетки, ребра (без концов) – одномерные клетки, вершины являются нульмерными клетками.



Пример 5. Букет B_m из m окружностей, склеенных в точке x_0 , допускает клеточное разбиение, состоящее из нульмерной клетки x_0 и m одномерных клеток – окружностей букета, проколотых в точке x_0 .



Замечание. Если клеточное разбиение состоит из конечного числа клеток, условия 3 и 4 определения клеточного разбиения выполняются автоматически из предыдущих условий. В случае бесконечного числа клеток это не так.

Известно, что всякое n -мерное топологическое многообразие M^n является клеточным пространством, причем размерность M^n равно n . Если M^n компактное многообразие, то для любого клеточного разбиения число клеток каждой размерности конечно.

Обозначим через ω_i количество клеток размерности i в некотором клеточном разбиении компактного многообразия M^n , причем клеток каких то промежуточных размерностей в разбиении может и не быть.

Определение 6. Число

$$\chi(M^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \omega_i$$

называется *характеристикой Эйлера – Пуанкаре* компактного топологического многообразия M^n .

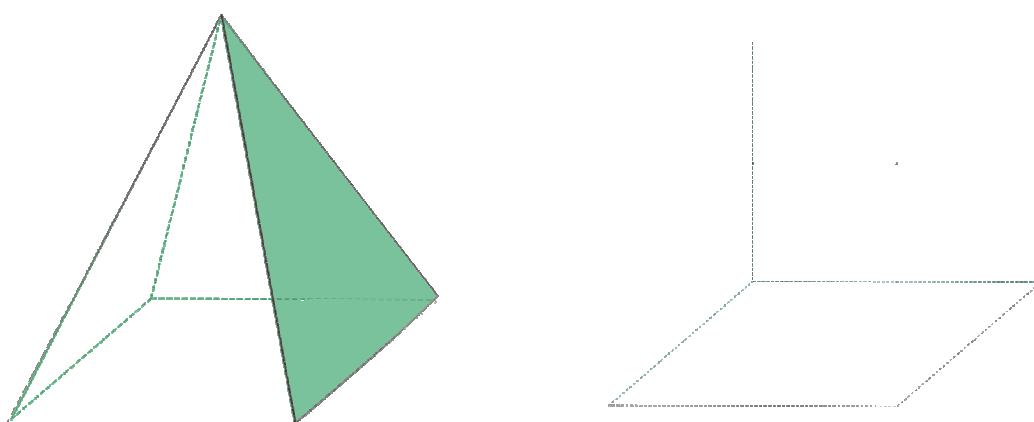
(Корректность такого определения обычно доказывается в курсах алгебраической топологии). Эта характеристика не зависит от разбиения, а зависит от строения самого многообразия и является одним из важнейших топологических инвариантов.

Пример 6. Используя клеточные разбиения сферы S^n , рассмотренные в примерах 2 и 3, получаем, что

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В частности нульмерная сфера состоит из двух точек – концов одномерного шара в R^1 , поэтому $\chi(S^0) = 2$.

Пример 7. Если M^2 – поверхность выпуклого многогранника в E^3 , то его вершины можно взять в качестве нульмерных клеток, ребра без концов – в качестве одномерных, а внутренности граней будут служить двумерными клетками. Легко подсчитать в случае куба, тетраэдра и т.д. что $\chi(M^2) = 2$.



Этот результат следует также из инвариантности χ и гомеорфности поверхности выпуклого многогранника поверхности сферы.

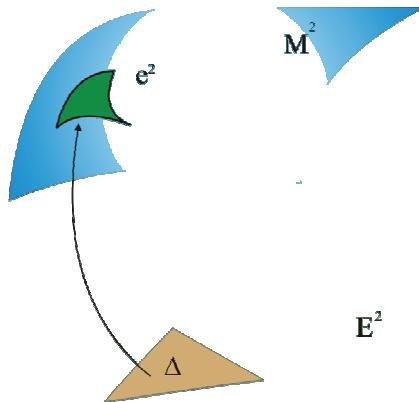
§19 Двумерные многообразия

П.1 Ориентируемые и неориентируемые многообразия

Связные n -мерные топологические многообразия подразделяются на 2 класса: ориентируемые и неориентируемые. Неориентируемые топологические многообразия иначе называются односторонними. Простейшим из них является лист Мёбиуса. Неориентируемыми будут двумерные многообразия, которые содержат лист Мёбиуса как свою часть.

Будем вводить понятие ориентируемости и неориентируемости с помощью специального клеточного разбиения – триангуляции. При этом рассматриваемые многообразия могут быть как с краем, так и без края.

Определение 1. Пусть M^2 двумерное топологическое многообразие, а Δ – некоторый треугольник в евклидовой плоскости E^2 , $\varphi: \Delta \rightarrow M^2$ – отображение переводящее треугольник Δ гомеоморфно на некоторое множество $e^2 \subset M^2$. Тогда подмножество e^2 называют *топологическим треугольником в M^2* , образы сторон треугольника Δ – *сторонами* треугольника e^2 , а образы вершин – *вершинами*.



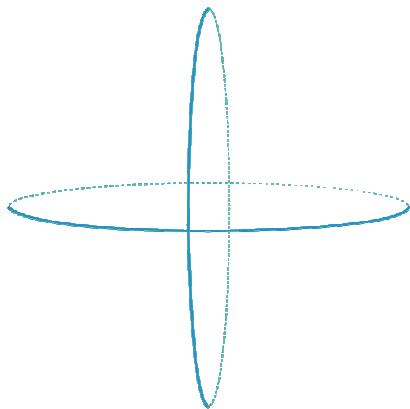
Определение 2 *Триангуляцией* двумерного топологического многообразия M^2 называется разбиение M^2 на такую совокупность топологических треугольников $\{e_\alpha^2\}$, для которой выполняются следующие условия:

1. множество треугольников $\{e_\alpha^2\}$ образуют покрытие многообразия M^2 ;
2. пересечение любых двух различных треугольников из $\{e_\alpha^2\}$ либо пусто, либо является их общей вершиной, или общей стороной;
3. для каждой точки $x \in M^2$ должна существовать такая окрестность, которая пересекается лишь с конечным числом треугольников из $\{e_\alpha^2\}$.

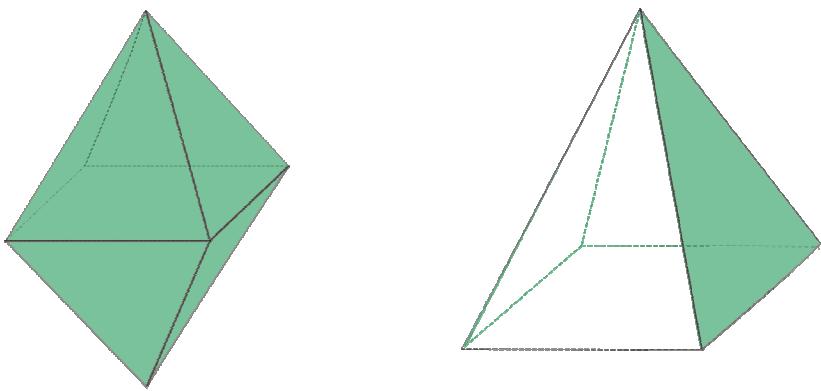
Очевидно, что любая триангуляция представляет собой клеточное разбиение. Условие 3 в определении триангуляции необходимо лишь для некомпактных многообразий.

Впервые существование триангуляции на произвольном двумерном многообразии было доказано в 1925 году венгерским математиком Тибором Радо.

Триангулированное многообразие – многообразие с заданной на нем триангуляцией – можно понимать как многообразие, построенное посредством склеивания его по определенным правилам из различных топологических треугольников. Так двумерную сферу можно склеить из восьми треугольников.



Возможны другие варианты склеивания для других двумерных многообразий.



Определение 3. Пусть e^2 – треугольник некоторой триангуляции $\{e_\alpha^2\}$ двумерного топологического многообразия M^2 . А, В, С – вершины треугольника e^2 . *Ориентацией* стороны АВ треугольника e^2 называется порядок в паре ее концов А и В.

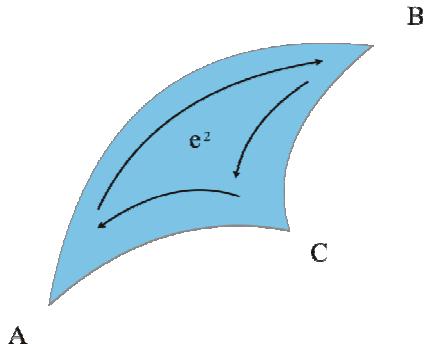
Каждая сторона имеет две ориентации (А, В) и (В, А), эти ориентации называются *противоположными*.

Определение 4. *Ориентацией (обходом)* треугольника e^2 с вершинами А, В, С называется порядок в тройке этих вершин. Две ориентации треугольника e^2 называются *эквивалентными*, если они получаются друг из друга циклической перестановкой.

Таким образом, совокупность всех ориентаций треугольников e^2 можно разбить на два класса, каждый из которых состоит из ориентаций, эквивалентных между собой – это класс $\{(A, B, C), (B, C, A), (C, A, B)\}$ и класс $\{(C, B, A), (B, A, C), (A, C, B)\}$. Тем самым треугольник можно наделить одной из двух ориентаций. Если

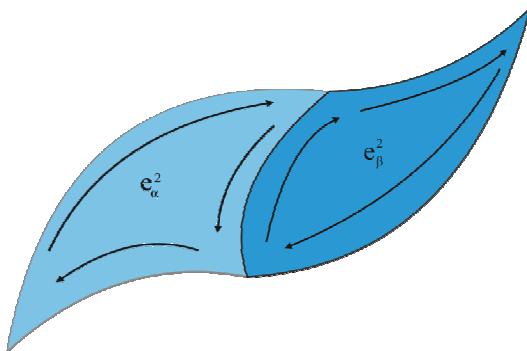
для треугольника выбрана одна из его ориентаций, то такой треугольник называют *ориентированным*.

Ориентация треугольника e^2 порождает (индуцирует) ориентацию каждой из его сторон.



Введем теперь понятие согласованности ориентаций для соседних треугольников триангуляции – треугольников имеющих общую сторону.

Определение 5. Говорят, что два соседних ориентированных треугольника триангуляции $\{e_\alpha^2\}$ многообразия M^2 имеют *согласованные* ориентации, если ориентации треугольников индуцируют противоположные ориентации общей стороны.

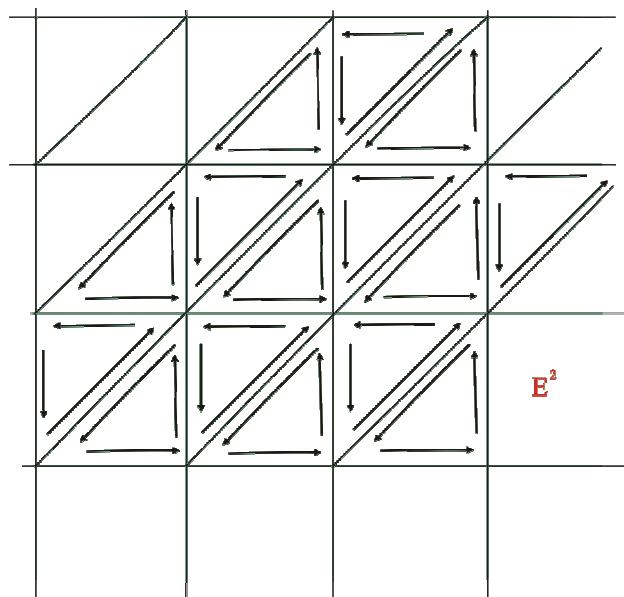


Определение 6. Двумерное топологическое многообразие M^2 называется *ориентируемым*, если существует такая его триангуляция, в которой треугольники ориентированы так, что ориентация любых двух соседних треугольников противоположны. Если же такой триангуляции не существует, то многообразие называется *неориентируемым*.

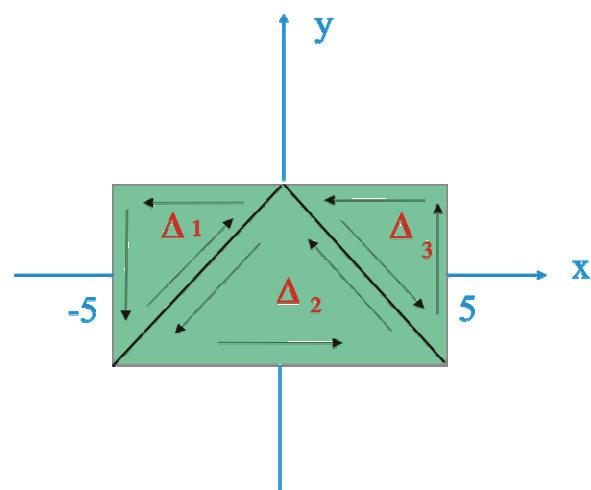
Замечание. В теории многообразий доказывается, что если для некоторой триангуляции многообразия M^2 можно задать согласованные ориентации ее треугольников, то это можно сделать и для любой другой триангуляции. Таким образом, определение 6 корректно.

Если указанная в определении триангуляция многообразия M^2 введена, то многообразие M^2 называется *ориентированным* (очевидно, что ориентируемое двумерное многообразие можно ориентировать точно двумя способами).

Пример 1. Евклидова плоскость E^2 – ориентируемое многообразие, ее триангуляция и согласованные ориентации приведены на рисунке.



Пример 2. Лист Мёбиуса неориентируем. Разобьем прямоугольник $\Pi \{ -5 \leq x \leq 5; -1 \leq y \leq 1 \}$ из которого склеивается лист Мёбиуса на три треугольника. При согласовании ориентаций не удается согласовать пару треугольников: (Δ_1, Δ_3) на их общей (после склеивания стороны).



П. 2 Классификация одномерных и замкнутых двумерных многообразий

Справедлива теорема (доказательство в кн. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука., 1997. – 488с.)

Теорема 1. Всякое связное одномерное топологическое многообразие без края гомеоморфно евклидовой прямой или окружности. Всякое связное одномерное многообразие с краем гомеоморфно отрезку или лучу.

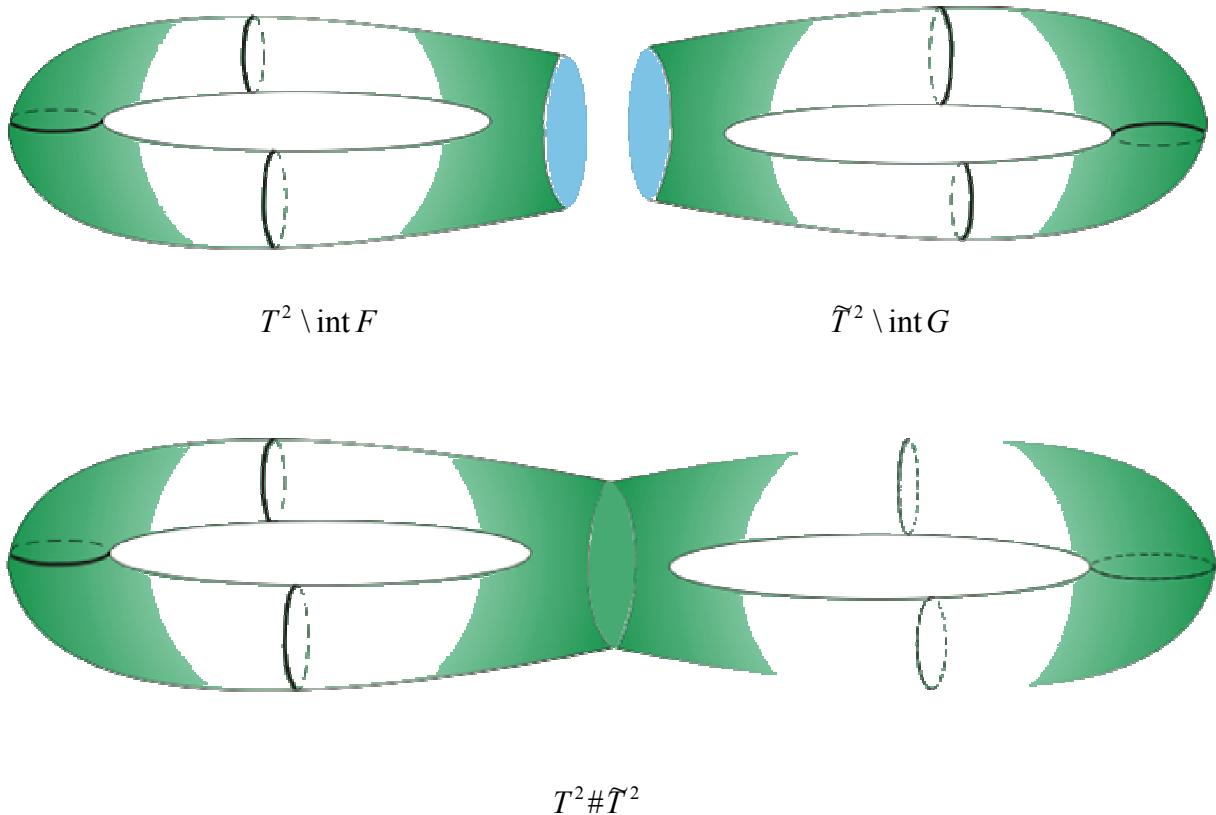
Для описания возможных типов двумерных замкнутых многообразий необходимо ввести новую операцию, которую назовем «связной суммой многообразий». Будем эту операцию обозначать значком $\#$.

Пусть M^2 и L^2 - связные замкнутые двумерные топологические многообразия, а F и G – компактные подмножества M^2 и L^2 , причем каждое из них гомеоморфно кругу B^2 евклидовой плоскости. Тогда границы $\gamma_1 = \partial F$ и $\gamma_2 = \partial G$ гомеоморфны окружности – границе ∂B^2 круга B^2 .

Пусть h – гомеоморфизм, связывающий $\partial F = \gamma_1$ и $\partial G = \gamma_2$.

Определение 1. Связной суммой двумерных связных замкнутых топологических многообразий M^2 и L^2 – $M^2 \# L^2$ – называется такое двумерное топологическое многообразие, которое является факторпространством пространства $(M^2 \setminus \text{int } F) \cup (L^2 \setminus \text{int } G)$, получаемым при отождествлении точек x и $h(x)$ для всех x на границе $\gamma_1 = \partial F$.

Пример 1. Пусть T^2 и \tilde{T}^2 – два двумерных тора, тогда их связная сумма $T^2 \# \tilde{T}^2$ является многообразием, называемым *кренделем*.



Классификационную теорему для замкнутых двумерных многообразий можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2. Всякое связное замкнутое двумерное ориентируемое многообразие гомеоморфно сфере, либо связной сумме конечного числа торов.

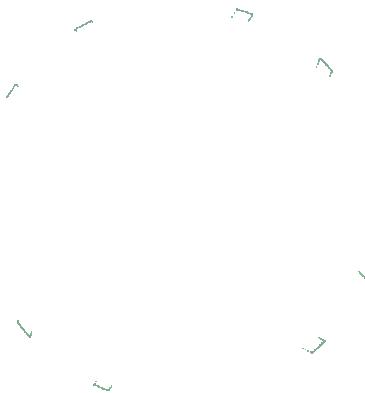
Всякое связное замкнутое двумерное неориентируемое многообразие гомеоморфно сумме конечного числа проективных плоскостей. можно сформулировать по-другому.

Всякое связное замкнутое двумерное неориентируемое многообразие гомеоморфно либо проективной плоскости, либо связной сумме бутылки Клейна и некоторого связного замкнутого ориентируемого двумерного многообразия.

Справедливо утверждение:

Теорема 3. Связная сумма двух проективных плоскостей гомеоморфна бутылке Клейна.

Замечание 2. Вторую теорему часто формулируют в терминах ручек и плёнок: ручкой называют двумерное топологическое многообразие с краем, гомеоморфное тору с дыркой, а плёнкой называют часть двумерного многообразия, эквивалентного листу Мёбиуса. Вместо операции связной суммы для торов и проективных плоскостей при конструировании различных топологических типов замкнутых двумерных многообразий можно использовать операции приклеивания ручек и плёнок к такому простому многообразию как сфера с дырами. Ясно, что число дыр в сфере должно совпадать с количеством приклеиваемых ручек и плёнок.



Введем еще одно часто употребляемое понятие.

Определение 2. Замкнутое двумерное топологическое многообразие M^2 называется *многообразием рода n* , если M^2 является связной суммой n торов или n проективных плоскостей. При этом сфера – многообразие нулевого рода.

Род многообразия M^2 и (обозначается $g(M^2)$) связан с характеристикой Эйлера-Пуанкаре следующими равенствами:

Для ориентируемых многообразий

$$\chi(M^2) = 2 - 2g(M^2).$$

Для неориентируемого многообразия

$$\chi(M^2) = 2 - g(M^2)$$

Имеет место следующая

Теорема 4. Связные замкнутые двумерные многообразия гомеоморфны тогда и только тогда, когда оба они ориентируемые или неориентируемые и их характеристики Эйлера – Пуанкаре равны.

В заключение пункта укажем на полный набор топологических инвариантов для компактных двумерных многообразий с краем.

Полный набор топологических инвариантов связного компактного двумерного топологического многообразия с краем составляют: число компонент края, значение характеристики Эйлера – Пуанкаре и ориентируемость или неориентируемость многообразия.