

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

А.В. Ершов

# КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ

Учебное пособие  
для студентов механико-математического факультета

Саратов  
ООО Издательский Центр “Наука”  
2012

УДК [512.581/.582+515.142](075.8)

ББК 22.144я73+22.152я73

Е 80

**Ершов А.В.**

Е 80 Категории и функторы: Учебное пособие. – Саратов: ООО Издательский центр “Наука”, 2012. – 88 с.

ISBN 978-5-9999-1223-7

Данное издание представляет собой учебное пособие по теории категорий для студентов механико-математического факультета. Оно охватывает темы: определение и примеры категорий, сумма и произведение в категории, универсальные объекты, дуальная категория, определение и примеры функторов. Каждое вводимое понятие иллюстрируется многочисленными примерами из различных областей математики. В тексте содержится большое количество задач, решение которых способствует активному усвоению материала. Среди рассматриваемых примеров существенное место отводится примерам из топологии, что позволяет рекомендовать данное пособие для использования в учебном процессе при подготовке магистров по профилю “Геометрия и топология”.

Рекомендуют к печати:

Доктор физико-математических наук, профессор **М.В. Лосик**

Кафедра геометрии Саратовского государственного университета им.

Н.Г. Чернышевского

Работа издана в авторской редакции

УДК [512.581/.582+515.142](075.8)

ББК 22.144я73+22.152я73

ISBN 978-5-9999-1223-7

© А.В. Ершов, 2012

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Начала теории категорий</b>	<b>9</b>
1.1	Определение категории . . . . .	9
1.2	Первые примеры категорий . . . . .	13
1.3	Сумма и произведение в категории . . . . .	22
1.4	Универсальные объекты . . . . .	33
1.5	Дуальная категория и произведение категорий . . . . .	54
<b>2</b>	<b>Функторы</b>	<b>57</b>
2.1	Определение и первые примеры функторов . . . . .	57
2.2	Примеры функторов из топологии . . . . .	67
2.3	Контравариантные функторы . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Добавления</b>	<b>79</b>
3.1	Добавление 1. Свойства компактно-открытой топологии .	79
3.2	Добавление 2. Фундаментальная группа . . . . .	80

*Математика – это искусство  
называть разные вещи  
одним и тем же именем.*

А. Пуанкаре

## Введение. Зачем нужна теория категорий

Теория категорий (сначала как язык функторов и естественных преобразований) возникла в середине прошлого века в работах С. Эйленберга и С. Маклейна по алгебраической топологии. Постепенно из алгебраической топологии (вместе с методами гомологической алгебры, с которой она исторически тесно связана) она стала проникать в другие области математики (в первую очередь в алгебраическую геометрию (где её потенциал особенно ярко был продемонстрирован в работах А. Гротендика), в алгебру, в функциональный анализ, а в последнее время и в Computer Science, логику и даже в физику (см. [1])).

“Пользовательская” точка зрения на теорию категорий состоит в том, что она является языком современной математики, в ряде областей оказавшимся адекватной заменой языку теории множеств. Его специфику выражает следующая фраза, взятая из Добавления “Язык категорий” к запискам лекций Ю.И. Манина [11]: “Язык категорий воплощает “социологический” подход к математическому объекту: группа или пространство рассматривается не как множество с внутренне присущей ему структурой, но как член сообщества себе подобных”.<sup>1</sup>

Язык категорий играет унифицирующую роль в современной математике, устанавливая глубокие и нетривиальные связи между различными её областями. Будучи очень удачным языком, теория категорий позволяет “экономить мышление”, поскольку уже в самой его “грамматике” заключены общематематические паттерны.<sup>2</sup> В качестве примера можно

---

<sup>1</sup>Заметим, что категорные свойства “одного и того же” объекта зависят от того, в качестве элемента какой совокупности мы его рассматриваем. Например, категорные суммы двух абелевых групп, рассматриваемых как объекты категории групп и как объекты её подкатегории, состоящей из абелевых групп, не изоморфны, см. §1.3.

<sup>2</sup>pattern (англ.) — модель, шаблон, образец.

привести тот факт, что многие важные математические конструкции являются функторами, и поэтому не нужно каждый раз отдельно запоминать те их свойства, которые выражают функториальность. Кроме того, она позволяет дать общие доказательства стандартным фактам (таким как существование и единственность универсального объекта), помогает разделять общие и специфические черты совокупностей математических объектов. Более того, зачастую теория категорий подсказывает правильную постановку задач, а также идею их решения. Проиллюстрируем это на примерах.<sup>3</sup>

**Пример 1.** В геометрии и топологии важную роль играют группы  $\mathcal{L}G$  (свободных) петель групп Ли  $G$ , состоящие из гладких отображений окружности  $S^1$  в группу Ли  $G$ . Что правильно рассматривать в качестве аналога  $\mathcal{L}G$  в случае конечной группы  $G$ ?

Категорным аналогом окружности является категория  $\Sigma(\mathbb{Z})$ , состоящая из единственного объекта  $*$  и с морфизмами  $*$   $\rightarrow$   $*$ , по одному для каждого целого числа, причём композиция морфизмов отвечает сложению целых чисел.<sup>4</sup> Аналогично, заменим группу  $G$  категорией  $\Sigma(G)$ , состоящей из одного объекта  $\star$  и с морфизмами  $\star$   $\rightarrow$   $\star$ , по одному для каждого элемента  $g \in G$ , причём композиция морфизмов отвечает умножению в группе.

Пусть  $\Lambda G := \text{Hom}(\Sigma(\mathbb{Z}), \Sigma(G))$  — категория функторов из  $\Sigma(\mathbb{Z})$  в  $\Sigma(G)$  с естественными преобразованиями в качестве морфизмов. Оказывается, что категория  $\Lambda G$  является “правильным” аналогом  $\mathcal{L}G$  для конечной группы  $G$ , о чём говорит тот факт, что для целого ряда конструкций и результатов о  $\mathcal{L}G$  можно указать соответствующие аналоги для  $\Lambda G$  [14].

Кроме того,  $\Lambda G$  является на самом деле группоидом. Так как каждый функтор из  $\Sigma(\mathbb{Z})$  в  $\Sigma(G)$  полностью определяется своим значением на морфизме  $1 \in \mathbb{Z}$ , которое может быть произвольным элементом группы  $G$ , объекты  $\Lambda G$  можно отождествить с элементами  $G$ . Точнее, пусть  $F_1, F_2 \in \text{Hom}(\Sigma(\mathbb{Z}), \Sigma(G))$  — два функтора,  $F_1(1) = g_1, F_2(1) = g_2 \in G$ .

---

<sup>3</sup>Следующие 3 примера ориентированы на достаточно искушённого читателя; студенту, который впервые знакомится с теорией категорий, мы советуем возвращаться к ним по мере чтения данного пособия.

<sup>4</sup>дело в том, что классифицирующее пространство этой категории как раз “есть” окружность.

Тогда элемент  $h \in G$  такой, что

$$\begin{array}{ccc} \star & \xrightarrow{g_1} & \star \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \star & \xrightarrow{g_2} & \star, \end{array}$$

то есть  $g_2 = hg_1h^{-1}$ , определяет естественное преобразование  $F_1 \Rightarrow F_2$ , то есть морфизм в  $\Lambda G$ . Другими словами,  $\Lambda G$  есть группоид действия, ассоциированный с присоединенным действием группы  $G$  на себе. Этот факт играет важную роль в указанной аналогии. Дальнейшие детали и ссылку на оригинальную статью, где рассмотрен этот пример см. в [14].

□

**Пример 2.** Почему фундаментальная группа топологической группы коммутативна? У этого факта есть общее и при этом совершенно прозрачное категорное доказательство. Дело в том, что функтор, сохраняющий конечные категорные произведения (включая финальный объект) сохраняет и групповые объекты. Изоморфизм  $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$  легко проверяется. Теперь требуемое вытекает из легко проверяемого (с помощью аргумента Экмана-Хилтона) факта, что групповые объекты в категории групп — абелевы группы. Так как “естественная” область определения функтора фундаментальной группы — гомотопическая категория, то указанный результат также верен для групповых объектов в ней, в частности, для пространств петель  $\Omega X$ . Так как  $\pi_2(X) \cong \pi_1(\Omega X)$ , то мы сразу получаем коммутативность гомотопических групп  $\pi_q(X)$ ,  $q \geq 2$ . □

**Пример 3.** Общий метод исследования объектов некоторой “геометрической” категории (топологических пространств и т.п.) состоит в построении функторов в подходящую “алгебраическую” категорию (групп, колец и т.п.). Примеры таких функторов — фундаментальная группа, гомологии и когомологии,  $K$ -теория и другие. Так как функтор изоморфные объекты переводит в изоморфные, то, скажем, для доказательства того, что два топологических пространства  $X$  и  $Y$  не гомеоморфны, достаточно предъявить такой функтор  $F$ , например, в категорию групп, что группы  $F(X)$  и  $F(Y)$  не изоморфны. Рассмотрим пример несколько иного сорта — категорию плетений [6]. Это — строгая тензорная категория с единичным объектом  $\emptyset$ , эндоморфизмами которого являются

изотопические классы ориентированных зацеплений. Существует систематический способ (основанный на понятии оснащённой  $R$ -матрицы) нахождения строгих тензорных функторов из категории плетений в строгую тензорную категорию, построенную из тензорной категории конечномерных векторных пространств над полем  $k$ . Каждый такой функтор  $F$  даёт изотопический инвариант ориентированных зацеплений со значениями в поле  $k$ . Действительно, всякий строгий тензорный функтор единичный объект переводит в единичный объект (в нашем случае  $\emptyset$  в поле  $k$ ), а эндоморфизмы единичного объекта (в нашем случае ориентированные зацепления) — в эндоморфизмы единичного объекта (в нашем случае  $k$ -линейные эндоморфизмы  $k$ , которые можно отождествить с элементами поля  $k$ ).  $\square$

Данная работа представляет собой первую часть пособия начального уровня по теории категорий для студентов математических специальностей. Оно преследует цель на примерах из разных областей математики научить читателя основам языка категорий и функторов (без естественных преобразований, которые будут рассмотрены во второй части). Как всякий язык, теорию категорий естественно осваивать на примерах, поэтому они составляют большую часть текста. Не обязательно разбирать их все, но некоторый минимум необходим для каждого вводимого понятия. Предполагается что читатель при знакомстве с примерами будет обращаться к специальной литературе, так как в небольшом пособии невозможно замкнуто изложить всю соответствующую математику. Также важная роль отводится решению приведённых в тексте задач.

Тематика примеров имеет некоторый уклон в топологию, при этом мы стараемся объяснять основные топологические понятия (такие как фундаментальная группа), хотя для более глубокого их понимания лучше, конечно, обратиться к специальной литературе.

Хочется предупредить, что автором ставилась цель на примерах научить читателя **языку** категорий, а не собственно **теории категорий** как разделу математики со своими собственными методами и результатами. Поэтому в данном пособии почти нет общих теоретико-категорных теорем, за которыми читателю следует обратиться, например, к книге [10]. По мнению автора, это должен быть уже следующий этап изучения

теории категорий.

В ряде книг учебного характера есть вводный материал по теории категорий, с которым полезно ознакомиться параллельно с изучением данного пособия: это § 20 в [18], §§ 13, 14 в [8] и глава 0 в книге [16]. Из книг, целиком посвященных теории категорий, можно рекомендовать [10] (написанную одним из создателей теории категорий), а также главу II из книги [3]. С тензорными категориями и их применением к построению полиномиальных инвариантов узлов (упоминавшимся в Примере 3 выше) можно познакомиться по части 3 книги [6]. Много учебников по теории категорий есть на английском языке, читатель, при желании, сможет найти их список в интернете. В интернете также имеется ряд блогов, где обсуждаются различные аспекты теории категорий. Как источник сведений по математике и теории категорий в частности очень полезна Википедия, особенно её англоязычная версия.

Автор выражает глубокую благодарность профессору М.В. Лоסיку за полезные замечания.



# Глава 1

## Начала теории категорий

### 1.1 Определение категории

**Определение 1.** Категория  $\mathcal{C}$  состоит из следующего набора данных:

- (i) класса (или множества)  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , элементы которого называются *объектами* категории  $\mathcal{C}$ ,
- (ii) набора множеств  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , по одному для каждой упорядоченной пары объектов  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , элементы которых называются *морфизмами* из  $X$  в  $Y$  и обозначаются  $f: X \rightarrow Y$  или  $X \xrightarrow{f} Y$ ,
- (iii) набора отображений

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

по одному для каждой упорядоченной тройки объектов  $X, Y, Z$ . Паре морфизмов  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow Z$  такое отображение ставит в соответствие морфизм из  $X$  в  $Z$ , обозначаемый  $g \circ f$  и называемый *композицией* морфизмов  $f$  и  $g$ .

Эти данные должны удовлетворять следующим аксиомам:

- (a) по каждому морфизму  $f$  однозначно определяются такие  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , что  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , иными словами, множества  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  не пересекаются;
- (b) для каждого объекта  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  существует *тождественный морфизм*  $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ , удовлетворяющий условию: для любых

$Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$  имеют место равенства  $\text{id}_X \circ f = f$ ,  $g \circ \text{id}_X = g$ ;

- (с) композиция морфизмов ассоциативна, т.е. для любых четырёх объектов  $W, X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и морфизмов  $f: W \rightarrow X$ ,  $g: X \rightarrow Y$ ,  $h: Y \rightarrow Z$  композиции  $(h \circ g) \circ f$  и  $h \circ (g \circ f)$  суть один и тот же морфизм из  $W$  в  $Z$ .

**Замечания.** 1) Как следует из п. (i) приведенного определения, объекты категории в общем случае не образуют множества, а только *класс* (категория, объекты которой образуют множество, называется *малой*). Во многих смыслах основным примером категории является категория *Set* “всех” множеств и “всех” отображений между ними (см. пример а) в §1.2).

Следующий парадокс теории множеств, открытый Б. Расселом, показывает, что, применяя стандартные операции теории множеств к множеству всех множеств, можно получить противоречие. А именно, определим  $U$  как множество всех таких множеств  $X$ , что  $X$  не есть элемент  $X$ . В таком случае  $U$  есть элемент  $U$  тогда и только тогда, когда  $U$  не есть элемент  $U$ .<sup>1</sup>

С открытием парадокса Рассела математикам стало ясно, что придется как-то ограничить использование тех способов рассуждений, посредством которых он был получен. Для того, чтобы избежать противоречий, было введено понятие класса, более общее, чем понятие множества. Например, все множества образуют класс, не являющийся мно-

---

<sup>1</sup>Поясним данный парадокс следующим примером. Назовём множество “аномальным”, если оно является своим элементом, и “нормальным” в противном случае. Например, рассмотрим множество всех треугольников. Само это множество треугольником не является, поэтому не является своим собственным элементом. С другой стороны, если мы возьмём дополнительное множество, содержащее всё, что не является треугольниками, то оно само не является треугольником и значит является собственным элементом. Таким образом, оно аномально.

Рассмотрим теперь множество всех нормальных множеств,  $U$ . Оказывается, определить, является ли само  $U$  нормальным или аномальным множеством невозможно: если  $U$  нормально, то оно является своим собственным элементом (поскольку  $U$  содержит *все* нормальные множества), поэтому (по определению аномальных множеств)  $U$  аномально; с другой стороны, если  $U$  аномально, то по определению аномального множества  $U$  является своим собственным элементом, а так как по определению элементами  $U$  являются в точности нормальные множества, оно тоже является нормальным. Это приводит к выводу, что  $U$  не является ни нормальным, ни аномальным; в этом и состоит парадокс Рассела.

жеством, и ряд обычных операций над множествами с ним запрещены. Поэтому такое наивное определение категории  $\mathcal{Set}$  сделало бы невозможными ряд категорных конструкций, о которых будет идти речь далее. Выход из этой ситуации — ввести “универсум”, большое множество множеств, стабильное относительно всех операций, какие могут понадобиться, после чего рассматривать лишь категории, принадлежащие этому универсуму. Впредь мы будем считать, что необходимое обоснование может быть проведено, отсылая заинтересованного читателя за подробностями к книге [2]. В оправдание нашего подхода приведем выдержку из уже цитировавшейся книжки Ю.И. Манина [11]: “... при современном состоянии оснований математики и вопроса о непротиворечивости автору вся проблема представляется несколько академической. Наша позиция близка к точке зрения физика-экспериментатора, не склонного ни фетишизировать, ни ломать свои приборы, пока они приносят результаты.”

2) Для каждого  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  тождественный морфизм  $\text{id}_X$  определен однозначно. Действительно, если  $\text{id}_X, \text{id}'_X$  — два морфизма удовлетворяющих равенствам пункта (b), то  $\text{id}_X = \text{id}_X \circ \text{id}'_X = \text{id}'_X$ .

3) Из (c) легко вытекает, что композиция произвольного конечного числа морфизмов, если она определена, не зависит от расстановки скобок.

**Задача.** Пусть у нас есть два объекта  $A, B$  и три разных морфизма  $f: A \rightarrow B, g, h: B \rightarrow A$ , которые показаны на диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & h & \\ & \curvearrowright & \\ A & \xrightarrow{f} & B \\ & \curvearrowleft & \\ & g & \end{array}$$

Кроме того, пусть имеются тождественные морфизмы  $\text{id}_A: A \rightarrow A, \text{id}_B: B \rightarrow B$  (не показанные на диаграмме). Покажите, что этот набор данных не может отвечать никакой категории с двумя объектами  $A, B$ .

**Определение 2.** а) Морфизм  $f: X \rightarrow Y$  в категории  $\mathcal{C}$  называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм  $g: Y \rightarrow X$ , что  $f \circ g = \text{id}_Y, g \circ f = \text{id}_X$ .

б) Объекты  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , между которыми существует хотя бы один изоморфизм, называются *изоморфными*.

Легко видеть, что отношение “быть изоморфным” есть отношение эквивалентности на  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ . Морфизмы  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow X$  со свойствами, указанными в п. а) определения выше, называются *взаимно обратными*. Каждый изоморфизм  $f: X \rightarrow Y$  однозначно определяет обратный к нему изоморфизм: пусть  $g, g'$  — два таких изоморфизма, тогда  $g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_X \circ g' = g'$ .

Помимо изоморфизма, выделим ещё два важных типа морфизмов.

**Определение 3.** Морфизм  $f: Y \rightarrow Z$  в категории  $\mathcal{C}$  называется *мономорфизмом*, если для любых двух морфизмов  $g_1: X \rightarrow Y, g_2: X \rightarrow Y$  в  $\mathcal{C}$  из равенства композиций  $f \circ g_1 = f \circ g_2$  всегда следует равенство  $g_1 = g_2$ . Другими словами, мономорфизмы — это такие морфизмы, на которые можно сокращать композицию слева. Соответствующая диаграмма выглядит так:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g_1} & Y \xrightarrow{f} Z \\ & \searrow g_2 & \\ & & \end{array} \quad (1.1)$$

Морфизм  $f: X \rightarrow Y$  в категории  $\mathcal{C}$  называется *эпиморфизмом*, если для любых двух морфизмов  $g_1: Y \rightarrow Z, g_2: Y \rightarrow Z$  в  $\mathcal{C}$  из равенства композиций морфизмов  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$  всегда следует равенство  $g_1 = g_2$ . Другими словами, эпиморфизмы — это такие морфизмы, на которые можно сокращать композицию справа. Соответствующая диаграмма выглядит так:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{g_1} Z \\ & & \searrow g_2 \\ & & \end{array} \quad (1.2)$$

**Определение 4.** Категория  $\mathcal{C}$  называется *подкатегорией* категории  $\mathcal{D}$ , если

- (а)  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \subset \text{Ob}(\mathcal{D})$ ;
- (б) для произвольных  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  имеет место включение множеств морфизмов  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ ;
- (в) композиция морфизмов в  $\mathcal{C}$  совпадает с их композицией как морфизмов в  $\mathcal{D}$ ; для  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  тождественный морфизм  $\text{id}_X$  в категории  $\mathcal{C}$  совпадает с тождественным морфизмом  $\text{id}_X$  в категории  $\mathcal{D}$ .

**Определение 5.** Подкатегория  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  называется *полной*, если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  имеет место не просто включение (b), но совпадение

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$$

множеств морфизмов.

## 1.2 Первые примеры категорий

В этом разделе мы познакомимся с различными примерами категорий, среди которых есть “фундаментальные” категории, изучением свойств которых занимаются большие разделы алгебры и геометрии (таковы примеры b) — i)).

**а) Категория множеств.** Важнейшим примером категории является категория “всех” (точнее, принадлежащих “универсуму”, см. Замечание 1) в предыдущем параграфе) множеств и “всех” отображений между ними, обозначаемая  $\mathcal{Set}$ . Таким образом, элементами  $\text{Ob}(\mathcal{Set})$  являются произвольные множества, а множество морфизмов  $\text{Hom}_{\mathcal{Set}}(X, Y)$  из объекта  $X$  в объект  $Y$  состоит из произвольных отображений множеств  $f: X \rightarrow Y$ . Композиция морфизмов в данном случае — это обычная композиция отображений множеств, которая, как хорошо известно, ассоциативна, т.е. выполнено условие (с) Определения 1. Морфизм  $\text{id}_X$  — это тождественное отображение  $X \rightarrow X$ , при котором каждый элемент  $x \in X$  переходит в себя.

Покажем, что *изоморфизмы в категории  $\mathcal{Set}$  — это в точности биекции множеств*. Пусть  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow X$  — такие отображения, что  $g \circ f = \text{id}_X$ ,  $f \circ g = \text{id}_Y$ . Тогда  $f$  инъективно. Действительно,  $g(f(x_1)) = x_1$ ,  $g(f(x_2)) = x_2$ , поэтому при  $x_1 \neq x_2$  имеем  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Кроме того,  $f$  сюръективно. Действительно,  $\forall y \in Y \exists x \in X$  (а именно  $x = g(y)$ ) такой что  $f(x) = y$ . Таким образом,  $f$  инъективно и сюръективно и значит является биекцией. В силу симметрии условий на  $f$  и  $g$  мы также видим, что  $g$  — тоже биекция. Обратно, если  $f: X \rightarrow Y$  — биекция, то, положив  $g = f^{-1}$ , мы получим  $g \circ f = \text{id}_X$ ,  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

Покажем, что *морфизм в  $\mathcal{Set}$  является мономорфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен*. Предположим вначале, что отображение  $f: Y \rightarrow Z$  в (1.1) инъективно. Если  $f \circ g_1 = f \circ g_2$ , то есть

$f(g_1(x)) = f(g_2(x)) \forall x \in X$ , то из нашего предположения относительно  $f$  вытекает, что  $g_1(x) = g_2(x) \forall x \in X$ , то есть  $g_1 = g_2$ , значит  $f$  — мономорфизм. Обратно, если отображение  $f: Y \rightarrow Z$  в (1.1) не инъективно, то существуют элементы  $y_1, y_2 \in Y$ ,  $y_1 \neq y_2$ , и при этом  $f(y_1) = f(y_2)$ . Возьмём в качестве  $X$  произвольное одноэлементное множество, а в качестве  $g_i: X \rightarrow Y, i = 1, 2$  — такие отображения, что  $g_i(X) = y_i, i = 1, 2$ . Тогда легко видеть, что  $f \circ g_1 = f \circ g_2$ , но  $g_1 \neq g_2$ . Значит,  $f$  — не мономорфизм.

**Задача.** Доказать, что морфизм в  $\mathcal{S}et$  является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда он сюръективен.

Следующую группу примеров (b) – h')) образуют категории, объектами которых являются множества с дополнительными структурами, а морфизмами — отображения множеств, согласованные с этими структурами. Это — так называемые конкретные категории, точное определение которых мы дадим после того, как введём понятие функтора.

**b) Категория топологических пространств.** Через  $\mathcal{T}op$  обозначим категорию, чьими объектами являются все топологические пространства, а морфизмами — *непрерывные* отображения. Изоморфизмы в категории  $\mathcal{T}op$  — гомеоморфизмы топологических пространств.

**с) Категория гладких многообразий.** Через  $\mathcal{D}iff$  обозначим категорию, чьими объектами являются гладкие многообразия, а морфизмами — *гладкие* отображения. Изоморфизмы в  $\mathcal{D}iff$  называются *диффеоморфизмами*.

**d) Категория групп.** Пусть  $\mathcal{G}r$  есть категория, чьими объектами являются все группы, а морфизмами — *гомоморфизмы групп*. Изоморфизмами в  $\mathcal{G}r$  являются изоморфизмы групп.

**е) Категория абелевых групп.** Пусть  $\mathcal{A}b$  — категория, объектами которой являются абелевы (=коммутативные) группы, а морфизмами — *гомоморфизмы групп*. Это — полная подкатегория категории  $\mathcal{G}r$ .

**f) Категория колец.** Пусть  $\mathcal{R}ing$  есть категория, чьими объектами являются все кольца (не обязательно с единицей), а в качестве морфизмов рассматриваются *гомоморфизмы колец*. Изоморфизмы в этой категории — в точности изоморфизмы колец.

**g) Категории алгебр.** В дальнейшем в примерах мы будем рассматри-

вать также различные категории алгебр. Если не оговорено противное, все рассматриваемые ниже алгебры предполагаются ассоциативными и с единицей. Например, мы будем рассматривать категорию ассоциативных алгебр с единицей над фиксированным полем  $k$ , категорию коммутативных ассоциативных алгебр с единицей над полем  $k$  (заметим, что в качестве морфизмов  $k$ -алгебр с единицей 1 рассматриваются такие гомоморфизмы  $k$ -алгебр, которые отображают 1 в 1). Чтобы не вводить сложных обозначений, все эти категории мы будем обозначать  $\mathcal{Alg}_k$ , каждый раз указывая, какая конкретно категория алгебр имеется в виду (при этом часто опуская термин “ассоциативный”). Также будет рассматриваться категория коммутативных алгебр с единицей над (коммутативным) кольцом  $R$ . В частности, категория коммутативных  $\mathbb{Z}$ -алгебр с единицей будет обозначаться просто  $\mathcal{Alg}$  (заметим, что она совпадает с категорией коммутативных колец с единицей).

**h) Категория векторных пространств над полем  $k$ .** Фиксируем произвольное поле  $k$  и через  $\mathcal{Vect}_k$  обозначим категорию, чьими объектами являются векторные пространства над  $k$ , а морфизмами — *линейные отображения*. Более общим образом, пусть  $R$  — кольцо с единицей. Тогда можно определить категорию  ${}_R\mathcal{Mod}$ , объектами которой являются унитарные левые  $R$ -модули (напомним, что  $R$ -модуль  $M$  называется *унитарным*, если  $1_R x = x \ \forall x \in M$ , здесь  $1_R$  — единица кольца  $R$ ), а морфизмами — гомоморфизмы  $R$ -модулей. (Заметим, что категория  ${}_R\mathcal{Mod}$  совпадает с категорией  $\mathcal{Ab}$ .) Аналогично определяется *категория правых  $R$ -модулей  $\mathcal{Mod}_R$* .

**h') Категория конечномерных векторных пространств над полем  $k$ .** В  $\mathcal{Vect}_k$  выделим полную подкатегорию  $\mathcal{Vect}_k^f$ , объектами которой являются *конечномерные* векторные пространства над  $k$ , (а морфизмами — *линейные отображения* как и в  $\mathcal{Vect}_k$ ).

Читатель легко продолжит указанный список категорий (например, определив категорию алгебр Ли над полем  $k$  (с морфизмами — гомоморфизмами алгебр Ли), категорию упорядоченных множеств (с монотонными отображениями в качестве морфизмов), категории метрических пространств (имеется по крайней мере 3 разумных способа задать морфизмы между метрическими пространствами: как непрерывные, или

равномерно непрерывные, или сжимающие отображения; это приводит к трём разным категориям, с метрическими пространствами в качестве объектов) и т.д.

**Задача.** Покажите, что морфизм в  $\mathcal{Vect}_k$  является мономорфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен. Аналогично, морфизм в  $\mathcal{Vect}_k$  является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда он сюръективен.<sup>2</sup>

**Задача.** В рассмотренных примерах категорий изоморфизмы являются, в частности, биективными отображениями.<sup>3</sup> Для каких из этих примеров верно обратное, то есть всякий биективный морфизм является изоморфизмом?<sup>4</sup> Укажите подкатегорию в  $\mathcal{Top}$ , для которой это тоже верно.

Приведём пример категории, морфизмы в которой не являются теоретико-множественными отображениями.

**i) Гомотопическая категория.** Очень важную роль в математике играет следующая т.н. *гомотопическая категория*  $h\mathcal{Top}$ . Перед тем как дать её определение, напомним, что два непрерывных отображения

$$f, g: X \rightarrow Y$$

из топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$  называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение

$$\Phi: X \times I \rightarrow Y$$

(здесь  $I$  — интервал  $[0, 1]$  со стандартной топологией, а на  $X \times I$  рассматривается топология произведения), такое что

$$\Phi|_{X \times \{0\}} = f, \quad \Phi|_{X \times \{1\}} = g,$$

---

<sup>2</sup>в так называемых *конкретных* категориях, объектами которых являются множества, (вообще говоря) снабжённые некоторой структурой, а морфизмы — отображения множеств, в естественном смысле согласованные с этой структурой (к которым относятся все рассмотренные выше примеры категорий), всякий инъективный (как отображение множеств) морфизм является мономорфизмом, а всякий сюръективный морфизм — эпиморфизмом. Однако обратное, вообще говоря, неверно: можно привести примеры конкретных категорий, в которых мономорфизмы не обязательно инъективны, и примеры, в которых эпиморфизмы не обязательно сюръективны (например, естественное вложение  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ , не будучи сюръективным, является эпиморфизмом в  $\mathcal{Ring}$ ).

<sup>3</sup>Забегая вперёд, заметим, что это — общий факт для *конкретных* категорий, вытекающий из того, что любой функтор изоморфизм переводит в изоморфизм.

<sup>4</sup>Если Вы уже изучали функциональный анализ, подумайте, в чём состоит категорный смысл теоремы Банаха об обратном операторе?



где через  $\Phi|_{X \times \{0\}}$  (соотв.  $\Phi|_{X \times \{1\}}$ ) обозначено ограничение  $\Phi$  на  $X \times \{0\} \subset X \times I$  (соотв. на  $X \times \{1\}$ )).

Легко проверяется, что на множестве непрерывных отображений  $X \rightarrow Y$  отношение “быть гомотопными” является отношением эквивалентности, и, таким образом, это множество разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности — *гомотопические классы отображений*. Класс отображения  $f$  будем обозначать  $[f]$ .

Объекты категории  $h\mathcal{T}op$  — это произвольные топологические пространства, т.е.  $\text{Ob}(h\mathcal{T}op) = \text{Ob}(\mathcal{T}op)$  (см. пример с)), морфизмы же определяются иначе чем в  $\text{Ob}(\mathcal{T}op)$ :

$$\text{Hom}_{h\mathcal{T}op}(X, Y) = \{\text{множество гомотопических классов непрерывных отображений из } X \text{ в } Y\}.$$

Если  $f_1, g_1: X \rightarrow Y$  гомотопны и  $f_2, g_2: Y \rightarrow Z$  гомотопны, то их композиции  $f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1: X \rightarrow Z$  также гомотопны, поэтому равенство  $[f_2] \circ [f_1] := [f_2 \circ f_1]$  корректно определяет композицию гомотопических классов.

**Задача.** *Опишите в терминах отображений и гомотопий условие на непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$ , при выполнении которого его класс  $[f]$  является изоморфизмом в  $h\mathcal{T}op$ .*

Множество морфизмов малой категории с точки зрения алгебры является множеством с частичной (то есть не всюду определённой) бинарной ассоциативной операцией. В частности, морфизмы однообъектной категории образуют моноид (то есть полугруппу с единицей; напомним, что полугруппа — множество с заданной на нём бинарной ассоциативной операцией), а при условии, что каждый морфизм имеет обратный (то есть является изоморфизмом) — группу. Обратно, произвольный моноид можно рассматривать как категорию с единственным объектом  $x$  и морфизмами  $x \rightarrow x$ , отвечающими элементам моноида, причем композиции морфизмов отвечает произведение соответствующих элементов; тогда ассоциативность операции в моноиде обеспечит выполнение условия (с) в Определении 1, а существование единицы — существование тождественного морфизма (т.е. выполнение условия (b) там же).

Категории (вообще говоря, со многими объектами), в которых всякий морфизм обратим (то есть является изоморфизмом), называются *группоидами*. Группоиды являются обобщениями групп (группа — группоид с одним элементом), а также действий групп и отношений эквивалентности, как показывает следующая пара примеров.

**ж) Группоид действия.** Пусть  $X$  — непустое множество, на котором действует группа  $G$ . Напомним (см., например, [7]), что последнее означает, что каждой паре  $(g, x) \in G \times X$  сопоставлен элемент  $gx \in X$ , причем предполагаются выполненными следующие условия:

- (1)  $(g_2 g_1)x = g_2(g_1 x) \ \forall g_1, g_2 \in G, x \in X$  и
- (2)  $ex = x \ \forall x \in X$ , где  $e$  — единичный элемент группы  $G$ .

Определим теперь категорию  $\mathcal{C}$  следующим образом:

$$\text{Ob}(\mathcal{C}) = \{x \mid x \in X\}, \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x') = \{g \in G \mid gx = x'\}.$$

Другими словами, объектами  $\mathcal{C}$  являются элементы множества  $X$ , а морфизмами — пары  $(g, x)$ ,  $g \in G, x \in X$ , причем  $(g, x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, gx)$ .<sup>5</sup> Композиция  $(g, x)$  и  $(g', x')$  определена только в том случае, когда  $gx = x'$ , причем при выполнении этого условия

$$(g', x') \circ (g, x) := (g'g, x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, g'x')$$

(посмотрите на  $x \xrightarrow{g} x' \xrightarrow{g'} x''$ ). Тождественный морфизм  $\text{id}_x$  определяется как пара  $(e, x)$ . Читатель легко проверит, что аксиомы категории вытекают из аксиом группы и условий (1), (2) в определении действия, а обратимость произвольного морфизма  $(g, x)$  — из соотношений

$$g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x, \quad g(g^{-1}(gx)) = (gg^{-1})(gx) = e(gx) = gx.$$

**к) Группоид, связанный с отношением эквивалентности.** Пусть  $X$  — некоторое множество, на котором задано отношение эквивалентности, которое мы будем обозначать “ $\sim$ ”. Рассмотрим категорию, объектами которой являются элементы множества  $X$ , и для произвольных двух

---

<sup>5</sup>если не понятно, зачем рассматривать пары  $(g, x)$ , вспомните аксиому (а) из Определения 1.

элементов  $x, y \in X$  существует единственный морфизм  $x \rightarrow y$  если и только если  $x \sim y$ .

**l) Категория отношений.** Определим категорию  $\mathcal{R}el$  следующим образом. Объекты  $\mathcal{R}el$  такие же как в  $\mathcal{S}et$  — множества (в данном “универсуме” — см. Замечание 1) на стр. 10), а морфизмы  $\text{Hom}_{\mathcal{R}el}(X, Y)$  определяются иначе: это подмножества прямого произведения  $X \times Y$ .<sup>6</sup> Композиция  $\varphi: X \rightarrow Y$  и  $\psi: Y \rightarrow Z$  определяется так:

$$\psi \circ \varphi = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ такое что } (x, y) \in \varphi, (y, z) \in \psi\}.$$

Тождественный морфизм  $\text{id}_X$  задается диагональю в прямом произведении:

$$\text{id}_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X.$$

**m) Категория подмножеств данного множества.** Фиксируем множество  $S$ . Рассмотрим категорию  $\mathcal{P}(S)$ , объектами которой являются подмножества  $S$ , а морфизмами — вложения подмножеств. Эта категория интересна тем, что в ней единственными изоморфизмами являются тождественные отображения. Заметим, что этот пример имеет очевидное обобщение: категорию, связанную с частично упорядоченным множеством.

**n) Категория накрытий.** Пусть  $E$  и  $B$  — “достаточно хорошие” линейно связные топологические пространства.<sup>7</sup> Непрерывное отображение  $p: E \rightarrow B$  называется *накрытием*, если оно сюръективно и для любой точки  $b \in B$  существует открытая окрестность  $V$  такая, что каждая компонента  $p^{-1}(V)$  открыта в  $E$  и ограничение  $p$  определяет её гомеоморфизм с  $V$ .

Непрерывное отображение  $g: E \rightarrow E'$  является морфизмом накры-

---

<sup>6</sup>Чтобы связать введенные определения с обычным понятием отношения на множестве, заметим что существует взаимно однозначное соответствие между подмножествами  $S \subset X \times X$  и отношениями  $R$  на множестве  $X$ : по подмножеству  $S \subset X \times X$  определяется отношение  $R_S$  следующим образом:  $xR_S y \Leftrightarrow (x, y) \in S$  и обратно, по отношению определяется соответствующее подмножество.

<sup>7</sup>расшифровку слов “достаточно хорошие” читатель найдёт, например, в [12]. Это, в частности, все многообразия и клеточные пространства.

тий  $p: E \rightarrow B$  и  $p': E' \rightarrow B$  пространства  $B$  если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

коммутативна.<sup>8</sup>

Накрытия пространства  $B$  относительно только что определённых морфизмов образуют категорию  $\mathcal{C}ov(B)$  накрытий  $B$ .

И в заключение приведём примеры конструирования новых категорий из заданных.

**о) Факторкатегория.** Пусть  $\mathcal{C}$  — некоторая категория. *Отношение конгруэнтности*  $R$  на  $\mathcal{C}$  — это задание для каждой пары её объектов  $X, Y$  отношения эквивалентности  $R_{X,Y}$  на множестве  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , причём эти отношения должны быть согласованы с композицией морфизмов. Последнее означает, что если морфизмы  $f_1, f_2: X \rightarrow Y$  эквивалентны в смысле отношения  $R_{X,Y}$ , а морфизмы  $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$  — в смысле отношения  $R_{Y,Z}$ , то их композиции  $g_1 \circ f_1$  и  $g_2 \circ f_2: X \rightarrow Z$  эквивалентны в смысле отношения  $R_{X,Z}$ .

Для данного отношения конгруэнтности  $R$  на  $\mathcal{C}$  можно определить так называемую *факторкатегорию*  $\mathcal{C}/R$  как категорию с теми же объектами что и  $\mathcal{C}$ , но с классами эквивалентности морфизмов из  $\mathcal{C}$  в качестве морфизмов. То есть

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/R}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/R_{X,Y}.$$

Композиция морфизмов в  $\mathcal{C}/R$  корректно определена, поскольку  $R$  — отношение конгруэнтности.

Выше мы уже видели, что моноиды и группы могут рассматриваться как категории с единственным объектом. В этом случае понятие факторкатегории совпадает с понятиями фактормоноида и факторгруппы.

---

<sup>8</sup>В указанной диаграмме из “вершины”  $E$  в “вершину”  $B$  можно попасть двигаясь либо по стрелке  $p$ , либо по композиции стрелок  $p' \circ g$ . Термин “коммутативность” и означает совпадение двух возможных путей, то есть  $p = p' \circ g$ . Вообще, в теории категорий коммутативная диаграмма — это диаграмма, составленная из объектов в качестве вершин и морфизмов в качестве стрелок, соединяющих вершины, такая что все направленные пути с одинаковыми началом и концом приводят к одинаковому результату относительно композиции. Коммутативные диаграммы играют в теории категорий примерно такую же роль, что и равенства в алгебре.

Другим примером факторкатегории является рассмотренная в примере i) гомотопическая категория  $h\mathcal{Top}$  (в качестве  $\mathcal{C}$  нужно взять категорию топологических пространств и непрерывных отображений  $\mathcal{Top}$ , а в качестве  $R_{X,Y}$  — отношение гомотопности на множестве непрерывных отображений  $X \rightarrow Y$ ).

**р) Категория запятой.**<sup>9</sup> Пусть снова  $\mathcal{C}$  — некоторая категория. Фиксируем некоторый объект  $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и построим новую категорию  $\mathcal{C}_S$  “объектов над  $S$ ” следующим образом. Объекты  $\mathcal{C}_S$  — это всевозможные пары  $(X, \varphi)$ , где  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S)$ . Морфизм из  $(X, \varphi) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_S)$  в  $(Y, \psi) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_S)$  — это морфизм  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  такой что  $\varphi = \psi \circ f$ , т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ S & & \end{array}$$

коммутативна. С этой конструкцией мы неоднократно будем встречаться в дальнейшем. Имеется также “дуальная” версия  $\mathcal{C}^S$  этой конструкции, когда вместо объектов  $(X, \varphi)$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S)$  рассматриваются объекты  $(X, \varphi)$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X)$ .

**q)** Зафиксируем множество  $S$ . Пусть  $\mathcal{C}$  — категория, объектами которой являются произвольные отображения  $f: S \rightarrow G$ , где  $G$  — некоторая группа (которая в данном случае рассматривается просто как множество). Обозначим такой объект  $(G, f)$ . Морфизм в  $\mathcal{C}$  из объекта  $(G, f)$  в объект  $(H, g)$  — гомоморфизм групп  $\varphi: G \rightarrow H$  такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & G \\ g \downarrow & \swarrow \varphi & \\ H & & \end{array}$$

коммутативна (то есть  $g$  и композиция  $\varphi \circ f$  совпадают как отображения множеств  $S \rightarrow H$ ). Построенная категория ниже будет использована для формулировки универсального свойства свободной группы, порожденной множеством  $S$ .

**r)** Зафиксируем поле  $k$  и набор векторных пространств  $U_1, \dots, U_n$  над этим полем (для простоты читатель может все пространства считать конечномерными). Рассмотрим категорию  $\mathcal{C}$ , объектами которой являются

---

<sup>9</sup>называемая по-английски “comma category”.

пары  $(V, f)$ , состоящие из векторного пространства  $V$  (над тем же полем) и полилинейного отображения  $f: U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow V$ . Морфизм из объекта  $(V, f)$  в объект  $(W, g)$  по определению — *линейное* отображение  $\varphi: V \rightarrow W$ , превращающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U_1 \times \dots \times U_n & \xrightarrow{f} & V \\ g \downarrow & \swarrow \varphi & \\ W & & \end{array}$$

в коммутативную. То есть  $g$  и  $\varphi \circ f$  совпадают как полилинейные отображения  $U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow W$ . Построенная категория ниже будет использована для формулировки универсального свойства тензорного произведения векторных пространств  $U_1, \dots, U_n$ .

Другие подобные примеры “искусственно” построенных категорий встретятся в дальнейшем, в частности, при обсуждении универсальных объектов.

## 1.3 Сумма и произведение в категориях

Приведенные выше определения и рассмотренные примеры показывают, что теорию категорий можно рассматривать как некоторый математический язык, который призван описывать не структуру объектов (как это делает язык теории множеств), а их связи (выражаемые посредством морфизмов) с другими объектами той же категории. Простейшее конкретное высказывание на этом языке состоит в том, что некоторая композиция морфизмов равна некоторой другой композиции, скажем  $g \circ f = f' \circ g'$ . Такое тождество удобно представлять как совпадение двух возможных путей из  $X$  в  $Z$  вдоль стрелок в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{f'} & Z. \end{array}$$

Про такую диаграмму говорят, что она коммутативна (мы уже пользовались этой терминологией в примерах п), р), q), r) предыдущего параграфа).

Ниже в этом параграфе мы рассматриваем определения суммы<sup>10</sup> и произведения объектов произвольной категории (на простейшем примере двух объектов). Это даст нам первые примеры категорных конструкций.

В теории множеств известна операция *несвязного объединения*  $X \amalg Y$  двух произвольных множеств  $X$  и  $Y$  (которые не предполагаются содержащимися в едином множестве). По некоторым соображениям, смысл которых будет ясен из дальнейшего, обозначим  $X \amalg Y$  через  $X + Y$  и будем называть *суммой* множеств  $X$  и  $Y$ . Для  $X + Y$  определены *канонические вложения*  $i_X: X \rightarrow X + Y$  и  $i_Y: Y \rightarrow X + Y$ . Пусть теперь  $Z$  — произвольное множество, в которое задана пара отображений  $u: X \rightarrow Z$ ,  $v: Y \rightarrow Z$ . Тогда *существует и единственно такое отображение*  $h: X + Y \rightarrow Z$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_X} & X + Y & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ & \searrow u & \downarrow h & \swarrow v & \\ & & Z & & \end{array} \quad (1.3)$$

*коммутативна* (т.е.  $h \circ i_X = u$ ,  $h \circ i_Y = v$ ). Очевидно, что такое  $h$  задается следующим образом:

$$\text{для произвольного } t \in X \amalg Y \quad h(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } t \in X; \\ v(t), & \text{если } t \in Y. \end{cases}$$

Над множествами есть также операция *прямого произведения*, сопоставляющая паре множеств  $X, Y$  множество  $X \times Y$  (состоящее из пар  $(x, y)$ ,  $x \in X, y \in Y$ ). Для прямого произведения  $X \times Y$  определены *канонические проекции*  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ ,  $(x, y) \mapsto x$ ,  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ ,  $(x, y) \mapsto y$ . Прямое произведение множеств  $X \times Y$  обладает следующим свойством: *для любого множества  $Z$  и отображений  $u: Z \rightarrow X$ ,  $v: Z \rightarrow Y$  существует и притом только одно отображение  $h: Z \rightarrow X \times Y$ , делающее диаграмму*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\pi_X} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ & \nwarrow u & \uparrow h & \nearrow v & \\ & & Z & & \end{array} \quad (1.4)$$

<sup>10</sup>другое название категорной суммы — *копроизведение*, причина такого названия станет ясна в дальнейшем при знакомстве с понятием дуальной категории.

коммутативной (т.е.  $\pi_X \circ h = u$ ,  $\pi_Y \circ h = v$ ). Очевидно, что на элементах отображение  $h$  задается следующей формулой:  $h(z) = (u(z), v(z)) \forall z \in Z$ .

Мы видим, что определения суммы и произведения множеств могут быть даны в чисто категорных терминах с помощью диаграмм (1.3) и (1.4), и поэтому определения *суммы* и *произведения* двух объектов переносятся на произвольную категорию  $\mathcal{C}$ .<sup>11</sup> Таким образом, мы приходим к следующему определению.

**Определение 6.** Суммой объектов  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  называется объект в  $\mathcal{C}$ , обозначаемый  $X + Y$ , заданный вместе с парой морфизмов  $i_X: X \rightarrow X + Y$ ,  $i_Y: Y \rightarrow X + Y$ , для которого выполнено следующее условие: для любой тройки, состоящей из объекта  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и пары морфизмов  $u: X \rightarrow Z$ ,  $v: Y \rightarrow Z$  существует и притом единственный морфизм  $h: X + Y \rightarrow Z$ , делающий диаграмму (1.3) коммутативной.

Произведение определяется аналогично с использованием диаграммы (1.4).<sup>12</sup>

Таким образом, в категории  $\mathcal{S}et$  сумма и произведение произвольных двух объектов существуют и совпадают соответственно с несвязным объединением и прямым произведением множеств.

**Примеры.** а) Покажем, что в категории  $\mathcal{T}op$  топологических пространств и непрерывных отображений (см. пример b) из §1.2) категорным произведением является обычное произведение топологических пространств. Итак, пусть  $(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  — топологические пространства с топологиями  $\mathcal{O}_X$ ,  $\mathcal{O}_Y$  соответственно. Напомним [9], что их произведение есть множество  $X \times Y$  с топологией произведения  $\mathcal{O}_{X \times Y}$  (её базу образуют все подмножества вида  $U \times V$ ,  $U \in \mathcal{O}_X$ ,  $V \in \mathcal{O}_Y$ ). Во-первых, покажем что отображения  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ ,  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$  непрерывны. Действительно, для открытого  $U \subset X$  прообраз  $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$  открыт в топологии произведения на  $X \times Y$ , аналогично для  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ . Для того, чтобы доказать, что топологическое пространство  $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$  действительно является категорным произве-

<sup>11</sup>заметим, что диаграммами (1.3) и (1.4) сумма и произведение определяются не однозначно, а только с точностью до канонического изоморфизма — см. конец этого параграфа.

<sup>12</sup>сразу отметим, что сумма и произведение в произвольной категории могут не существовать.



дением пространств  $(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ , достаточно проверить, что для произвольного топологического пространства  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  и пары *непрерывных* отображений  $u: Z \rightarrow X$ ,  $v: Z \rightarrow Y$ , отображение  $h: Z \rightarrow X \times Y$ ,  $h(z) = (u(z), v(z))$  является непрерывным (единственность  $h$  с требуемыми свойствами вытекает из того, что  $h$  — единственное отображение *множеств*  $Z \rightarrow X \times Y$  такое что  $\pi_X \circ h = u$ ,  $\pi_Y \circ h = v$ ). Легко проверить, что  $h^{-1}(U \times V) = u^{-1}(U) \cap v^{-1}(V)$ , то есть открыто в  $Z$  для открытых  $U \subset X$ ,  $V \subset Y$ . Отсюда следует, что прообраз любого открытого множества, принадлежащего базе топологии на  $X \times Y$ , открыт в  $Z$ , то есть  $h$  действительно непрерывно.

Суммой в категории  $\mathcal{T}op$  является так называемая *несвязная сумма* топологических пространств, определяемая очевидным образом.

**а')** Этот пример — небольшая модификация предыдущего. Рассмотрим следующий вариант  $\mathcal{PT}op$  категории  $\mathcal{T}op$ : объекты категории  $\mathcal{PT}op$  — это топологические пространства с отмеченной точкой, то есть пары  $(X, x_0)$ , где  $x_0 \in X$ . Морфизмы  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{PT}op}((X, x_0), (Y, y_0))$  — это такие непрерывные отображения  $f: X \rightarrow Y$ , что  $f(x_0) = y_0$  (то есть отображают отмеченную точку в отмеченную точку). Легко проверить, что в этой категории произведение объектов  $(X, x_0) \times (Y, y_0)$  — это пара  $(X \times Y, (x_0, y_0))$ , а сумма  $(X, x_0) + (Y, y_0)$  — это так называемый *букет*  $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ , то есть обычное несвязное объединение с отождествленными отмеченными точками (формально, факторпространство пространства  $X \amalg Y$  по отношению эквивалентности  $z \sim w \Leftrightarrow$  либо  $z = w$  либо  $z = x_0, w = y_0$ ). Например, букет двух окружностей — это “восьмерка”  $\infty$ .

**б)** В категории абелевых групп  $\mathcal{A}b^{13}$  (см. пример е) из §1.2) прямая сумма  $A \oplus B$  обладает и вложениями

$$A \xrightarrow{i_A} A \oplus B, a \mapsto (a, 0), B \xrightarrow{i_B} A \oplus B, b \mapsto (0, b),$$

и каноническими проекциями

$$A \oplus B \xrightarrow{\pi_A} A, (a, b) \mapsto a, A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B, (a, b) \mapsto b.$$

Покажем, что  $(A \oplus B, i_A, i_B)$  — сумма объектов  $A$  и  $B$  в категории  $\mathcal{A}b$ . Пусть  $C$  — ещё одна абелева группа, а  $u: A \rightarrow C$ ,  $v: B \rightarrow$

---

<sup>13</sup>и даже модулей над заданным кольцом

$C$  — некоторые гомоморфизмы. Попробуем определить гомоморфизм  $w: A \oplus B \rightarrow C$ , превращающий диаграмму, аналогичную (1.3), в коммутативную. Имеем:

$$w(a, b) = w((a, 0) + (0, b)) = w(a, 0) + w(0, b) =$$

$$w(i_A(a)) + w(i_B(b)) = u(a) + v(b).$$

Отсюда мы видим, что определить  $w(a, b) = u(a) + v(b)$  — единственный способ определить гомоморфизм  $w$ , превращающий диаграмму в коммутативную. С другой стороны, такое  $w$  действительно является гомоморфизмом:

$$\begin{aligned} w((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) &= w(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = u(a_1 + a_2) + v(b_1 + b_2) = \\ &= u(a_1) + u(a_2) + v(b_1) + v(b_2) = (u(a_1) + v(b_1)) + (u(a_2) + v(b_2)) = \\ &= w(a_1, b_1) + w(a_2, b_2). \end{aligned}$$

**Задача.** *Покажите, что  $(A \oplus B, \pi_A, \pi_B)$  — произведение объектов  $A$  и  $B$  в категории  $\mathcal{A}b$ . (Указание: проверить, что отображение  $w: C \rightarrow A \oplus B$ ,  $w(c) = (u(c), v(c))$  — единственный гомоморфизм, превращающий диаграмму, аналогичную (1.4), в коммутативную.)*

Мы видим, что для  $A \oplus B$  выполнены условия, описываемые как диаграммой (1.3), так и диаграммой (1.4). Таким образом, в категории  $\mathcal{A}b$  сумма и произведение объектов “совпадают”.

**б')** В случае же категории “всех” групп  $\mathcal{G}r$  (см. пример d) из §1.2) дело обстоит по-другому. Для прямого произведения  $G \times H$  определены канонические гомоморфизмы  $G \times H \rightarrow G$  и  $G \times H \rightarrow H$ , причем выполнены условия, изображенные диаграммой (1.4). Но хотя вложения  $f: G \rightarrow G \times H$  и  $g: H \rightarrow G \times H$  и определены, свойство, описываемое диаграммой (1.3), не имеет места. Чтобы показать это, достаточно взять в качестве  $K$  группу, имеющую подгруппы, изоморфные  $G$  и  $H$ , но такие, что их элементы попарно не коммутируют (можно показать, что такая группа существует при  $G \neq \{e\}$ ,  $H \neq \{e\}$  — см. ниже), а за  $u$  и  $v$  — изоморфизмы  $G$  и  $H$  с этими подгруппами.

Так как в  $G \times H$  элементы вида  $f(\alpha)$ ,  $\alpha \in G$  коммутируют с элементами вида  $g(\beta)$ ,  $\beta \in H$ , то ни при каком гомоморфизме  $h$  диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{f} & G \times H & \xleftarrow{g} & H \\ & \searrow u & \downarrow h & \swarrow v & \\ & & K & & \end{array}$$

не будет коммутативной. (Действительно, по условию существуют  $\alpha \in G$ ,  $\beta \in H$  такие что  $u(\alpha)v(\beta)u(\alpha)^{-1}v(\beta)^{-1} \neq e$ . Однако  $f(\alpha)g(\beta)f(\alpha)^{-1}g(\beta)^{-1} = e$  в  $G \times H$ , поэтому если бы существовал гомоморфизм  $h$  с требуемыми свойствами, то мы бы имели

$$e = h(e) = h(f(\alpha)g(\beta)f(\alpha)^{-1}g(\beta)^{-1}) =$$

$$h(f(\alpha))h(g(\beta))h(f(\alpha))^{-1}h(g(\beta))^{-1} = u(\alpha)v(\beta)u(\alpha)^{-1}v(\beta)^{-1} \neq e$$

— противоречие.)

Однако в категории  $\mathcal{Gr}$  сумма все же существует и ее конструкция называется *свободным произведением групп*  $G$  и  $H$  и обозначается  $G * H$ . Это группа, порожденная двумя подгруппами  $G'$  и  $H'$ , изоморфными  $G$  и  $H$ , в которой их элементы не связаны никакими соотношениями, кроме выполняющихся в  $G'$  и  $H'$  по отдельности (морфизмы  $i_G$  и  $i_H$  — изоморфные вложения  $G \rightarrow G * H$ ,  $H \rightarrow G * H$ , чьи образы суть  $G'$  и  $H'$  соответственно). В частности, свободное произведение двух свободных циклических групп  $\mathbb{Z}$  — это свободная группа  $F_2$  с двумя образующими.<sup>14</sup> Т.к. группы  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$  не изоморфны друг другу (например, последняя группа даже не является абелевой), мы видим, что произведение двух абелевых групп зависит от того, рассматриваем ли мы их как объекты категории абелевых групп  $\mathcal{Ab}$  или всех групп  $\mathcal{Gr}$ .

Для читателя, знакомого с представлением групп образующими и соотношениями, приведём в качестве ещё одного примера свободного произведения красивое описание группы  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ . Пусть  $\Gamma$  — так называемая *модулярная группа*, состоящая из дробно-линейных преобразований

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

<sup>14</sup>конструкция свободной группы будет дана в следующем параграфе.

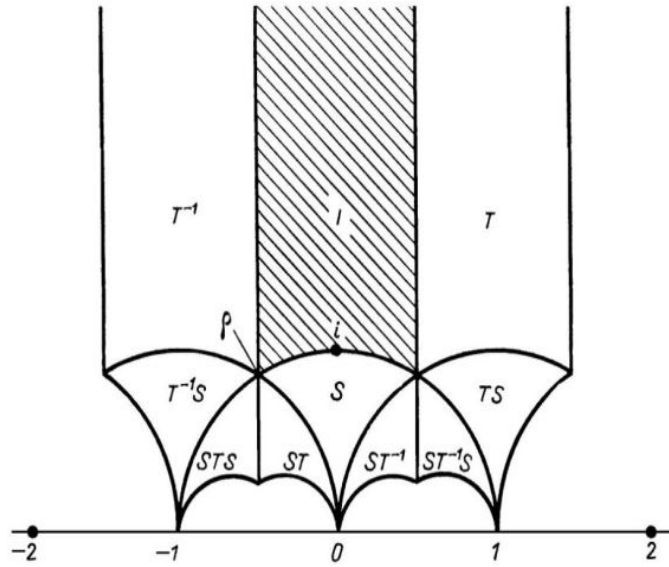
верхней комплексной полуплоскости  $H = \{z \mid \text{Im}(z) > 0\}$ . Легко видеть, что

$$\Gamma \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm E\},$$

где  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  — группа целочисленных  $2 \times 2$ -матриц с определителем 1. Группа  $\Gamma$  порождается двумя преобразованиями  $S$ ,  $S(z) = -1/z$  и  $T$ ,  $T(z) = z+1$ , то есть любой элемент  $\Gamma$  может быть представлен (неоднозначно) в виде произведения степеней  $S$  и  $T$ . Пусть  $D$  — подмножество в  $H$ , состоящее из таких точек  $z$ , что  $|z| \geq 1$  и  $|\text{Re}(z)| \leq 1/2$ . На рисунке ниже показаны преобразования области  $D$  (которая заштрихована) под действием элементов

$$\{1, T, TS, ST^{-1}S, ST^{-1}, S, ST, STS, T^{-1}S, T^{-1}\}$$

группы  $\Gamma$  ( $\rho = e^{2\pi i/3}$ ).



Образующие  $S$  и  $T$  удовлетворяют следующим соотношениям:  $S^2 = e$  и  $(ST)^3 = e$ . Можно показать, что это — полное множество соотношений; таким образом, модулярная группа имеет следующее представление образующими и соотношениями:

$$\Gamma \cong \langle S, T \mid S^2 = e, (ST)^3 = e \rangle.$$

Используя образующие  $S$  и  $ST$  вместо  $S$  и  $T$ , мы получаем, что модулярная группа изоморфна свободному произведению  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$  циклических

групп  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{Z}_3$ . В частности, мы видим, что оно имеет мало общего с  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$  — категорной суммой групп  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{Z}_3$  в категории  $\mathcal{Ab}$ .

с) Разберем еще один пример. Рассмотрим категорию коммутативных алгебр с единицей<sup>15</sup> над заданным полем  $k$ <sup>16</sup>, морфизмами в которой являются гомоморфизмы алгебр над  $k$ , переводящие единицу в единицу.<sup>17</sup> Прямая сумма  $A \oplus B$  и ее канонические проекции  $\pi_A: A \oplus B \rightarrow A$  и  $\pi_B: A \oplus B \rightarrow B$  обладают свойствами, описываемыми диаграммой (1.4). Действительно, легко видеть, что для произвольной унитарной  $k$ -алгебры  $C$  и унитарных гомоморфизмов  $u: C \rightarrow A$ ,  $v: C \rightarrow B$  отображение

$$h: C \rightarrow A \oplus B, \quad h(c) = (u(c), v(c))$$

— единственный унитарный гомоморфизм, который делает диаграмму, аналогичную (1.4), коммутативной.

Хотя имеются естественные вложения  $f: A \rightarrow A \oplus B$ ,  $f(a) = (a, 0)$  и  $g: B \rightarrow A \oplus B$ ,  $g(b) = (0, b)$ , но они не унитарны, да и вообще аналог диаграммы (1.3) места не имеет: дело в том, что для элементов  $a \in A$  и  $b \in B$  в  $A \oplus B$  всегда  $f(a)g(b) = 0$ , но может существовать унитарная алгебра  $C$ , содержащая унитарные подалгебры  $A'$  и  $B'$ , изоморфные  $A$  и  $B$ , для которых  $a'b' \neq 0$  для некоторых  $a' \in A'$ ,  $b' \in B'$ , и тогда гомоморфизма  $h: A \oplus B \rightarrow C$  с нужными свойствами нет, если в качестве  $u$  взять композицию изоморфизма  $A \rightarrow A'$  с вложением  $A' \rightarrow C$ , а в качестве  $v$  — композицию изоморфизма  $B \rightarrow B'$  с вложением  $B' \rightarrow C$ . Действительно, выберем  $a \in A$  и  $b \in B$  такие что  $u(a) = a'$ ,  $v(b) = b'$ . Тогда, если бы  $h$  с нужными свойствами существовало, то, с одной стороны,

$$h(f(a)g(b)) = h(0) = 0,$$

а с другой —

$$h(f(a)g(b)) = h(f(a))h(g(b)) = u(a)v(b) = a'b' \neq 0$$

— противоречие.

В качестве конкретного примера можно взять  $A = B = k[t]$ ,  $C = k[x, y]$  и гомоморфизмы  $u: A \rightarrow C$ ,  $v: B \rightarrow C$ , определенные условиями

<sup>15</sup>алгебра с единицей называется также *унитарной* алгеброй.

<sup>16</sup>вместо поля в данном примере можно взять произвольное коммутативное кольцо.

<sup>17</sup>такие гомоморфизмы называется также *унитарными*.

$u(t) = x$ ,  $v(t) = y$  соответственно, устанавливающие изоморфизмы  $k[t]$  с подалгебрами  $k[x] \subset k[x, y]$  и  $k[y] \subset k[x, y]$  соответственно.

Роль суммы в рассматриваемой категории играет *тензорное произведение*  $A \otimes_k B$  алгебр над  $k$  вместе с морфизмами

$$i_A: A \rightarrow A \otimes_k B, i_A(a) = a \otimes 1_B \quad \text{и} \quad i_B: B \rightarrow A \otimes_k B, i_B(b) = 1_A \otimes b,$$

где  $1_A$  и  $1_B$  — единицы соответственно в алгебрах  $A$  и  $B$ . Напомним, что как векторное пространство тензорное произведение алгебр  $A \otimes_k B$  является тензорным произведением “подстилающих” векторных пространств  $A$  и  $B$ , а умножение на нём задаётся формулой

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb', \quad (1.5)$$

где  $a, a' \in A$ ,  $b, b' \in B$ . Единицей в  $A \otimes_k B$  является  $1_A \otimes 1_B$ . Ввиду (1.5) имеем соотношение:

$$i_A(a)i_B(b) = (a \otimes 1_B)(1_A \otimes b) = a \otimes b = (1_A \otimes b)(a \otimes 1_B) = i_B(b)i_A(a). \quad (1.6)$$

**Задача.** *Покажите, что тензорное произведение алгебр многочленов от одной переменной  $k[t]$  и  $k[s]$  изоморфно алгебре многочленов от двух переменных  $k[x, y]$ .*

Покажем, что  $(A \otimes_k B, i_A, i_B)$  является категорной суммой  $A$  и  $B$ . Пусть  $f: A \rightarrow C$  и  $g: B \rightarrow C$  — унитарные гомоморфизмы в коммутативную алгебру  $C$ . Нам нужно показать, что существует единственный гомоморфизм алгебр  $h: A \otimes_k B \rightarrow C$  такой что  $h \circ i_A = f$  и  $h \circ i_B = g$ .

Сначала  $h$  мы определим как отображение линейных пространств  $A \otimes_k B \rightarrow C$ , а потом докажем, что он является гомоморфизмом алгебр. Для первой части нам понадобится *универсальное свойство тензорного произведения линейных пространств* (см. пример f) в следующем параграфе). А именно, существует универсальное билинейное отображение

$$\tau: A \times B \rightarrow A \otimes_k B, \tau(a, b) = a \otimes b,$$

то есть такое билинейное отображение, что для любого билинейного отображения  $\lambda: A \times B \rightarrow C$  в векторное пространство  $C$  (над тем же

полем) существует единственное *линейное* отображение  $h: A \otimes_k B \rightarrow C$ , делающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\tau} & A \otimes_k B \\ \lambda \downarrow & \swarrow h & \\ C & & \end{array}$$

коммутативной. В нашем примере билинейное отображение  $\lambda$  мы определим следующей формулой:  $\lambda(a, b) = f(a)g(b) \forall a \in A, b \in B$ . Из коммутативности диаграммы следует, что  $h(a \otimes b) = h(\tau(a, b)) = f(a)g(b)$ .

Согласно (1.6), гомоморфизм  $h$  с требуемыми свойствами (если он существует) должен иметь вид

$$h(a \otimes b) = h(i_A(a)i_B(b)) = h(i_A(a))h(i_B(b)) = f(a)g(b),$$

что совпадает с формулой выше. Отсюда следует утверждение о единственности. Теперь нужно проверить, что предыдущая формула для  $h$  задаёт гомоморфизм алгебр. На разложимых тензорах  $a \otimes b$  имеем:

$$h(a \otimes b)h(a' \otimes b') = f(a)g(b)f(a')g(b') =$$

$$f(a)f(a')g(b)g(b') = f(aa')g(bb') = h(aa' \otimes bb').$$

Теперь гомоморфность  $h$  вытекает из того, что любой элемент алгебры  $A \otimes B$  является конечной суммой разложимых тензоров  $a \otimes b$ . Построенное отображение  $h$  часто обозначается  $f \otimes g$ .

**d)** И, наконец, рассмотрим сумму и произведение в категории  $\mathcal{P}(S)$ , которая рассматривалась в примере m) на странице 19. Оказывается, в этой категории произведение двух объектов, т.е. подмножеств  $X, Y \subset S$ , есть пересечение  $X \cap Y$  множеств  $X$  и  $Y$  как подмножеств в  $S$ , а роль канонических проекций играют вложения

$$\pi_X: X \cap Y \rightarrow X, \quad \pi_Y: X \cap Y \rightarrow Y$$

пересечения в качестве подмножества в  $X$  и в  $Y$ . Далее, сумма  $X$  и  $Y$  — это просто объединение  $X \cup Y$  множеств  $X$  и  $Y$  как подмножеств в  $S$ , а

$$i_X: X \rightarrow X \cup Y, \quad i_Y: Y \rightarrow X \cup Y$$

— канонические вложения. Читателю предлагается проверить справедливость этих утверждений самостоятельно.<sup>18</sup>

**Задача.** Описать сумму и произведение в категории  $\mathcal{Vect}_k^f$  (подсказка: сумма и произведение в этой категории “совпадают”).

**Предложение 7.** Для любых двух объектов  $X, Y$  произвольной категории  $\mathcal{C}$  их сумма  $X + Y$ ,  $i_X, i_Y$  и произведение  $X \times Y$ ,  $\pi_X, \pi_Y$  (если, конечно, они существуют), определены однозначно с точностью до канонического изоморфизма.<sup>19</sup>

*Доказательство.* Пусть, например,  $(R, i_X, i_Y)$  и  $(S, i'_X, i'_Y)$  — суммы объектов  $X$  и  $Y$ . Тогда существуют единственные морфизмы  $h: S \rightarrow R$ ,  $k: R \rightarrow S$ , делающие коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_X} & R & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ & \searrow i'_X & \downarrow h & \uparrow k & \swarrow i'_Y \\ & & S & & \end{array}$$

Отсюда  $i_X = h \circ i'_X$ ,  $i'_X = k \circ i_X$ , т.е.  $i_X = (h \circ k) \circ i_X$ , и аналогично  $i_Y = (h \circ k) \circ i_Y$ . Мы видим, что  $h \circ k$  делает следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_X} & R & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ & \searrow i_X & \downarrow h \circ k & \swarrow i_Y & \\ & & R & & \end{array}$$

коммутативной. Эта диаграмма остается коммутативной, если в ней заменить  $h \circ k$  на  $\text{id}_R$ . Теперь по свойству единственности отображения  $h$  в диаграмме (1.3) мы получаем, что  $h \circ k = \text{id}_R$ . Аналогично доказывается, что  $k \circ h = \text{id}_S$ . Мы получили, что для двух сумм  $R, i_X, i_Y$  и  $S, i'_X, i'_Y$  объектов  $X$  и  $Y$  существуют такие единственные изоморфизмы объектов  $h: S \rightarrow R$  и  $k: R \rightarrow S$ , что  $i_X = h \circ i'_X$ ,  $i_Y = h \circ i'_Y$  и  $i'_X = k \circ i_X$ ,  $i'_Y = k \circ i_Y$ . Фраза “сумма объектов категории определена однозначно с точностью до канонического изоморфизма” как раз это и означает.  $\square$

<sup>18</sup>В упомянутом примере m) отмечалось, что эта категория — частный случай категории, связанной с частично упорядоченным множеством. Подумайте, что будет суммой и произведением в этом более общем случае.

<sup>19</sup>это утверждение будет следовать также из доказанной в следующем параграфе Теоремы 9.



## 1.4 Универсальные объекты

**Определение 8.** Объект  $X$  категории  $\mathcal{C}$  называется *начальным* (или *инициальным*), если для всякого  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  множество  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  состоит ровно из одного элемента.

Объект  $X$  категории  $\mathcal{C}$  называется *конечным* (или *финальным*), если для всякого  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  множество  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  состоит ровно из одного элемента.

Начальный или конечный объект мы будем также называть общим термином *универсальный объект*.

Неформально говоря, из начального объекта в любой объект категории исходит ровно одна стрелка (т.е. морфизм), аналогично, из любого объекта категории в конечный ведет ровно одна стрелка.

**Теорема 9.** Если в категории существует начальный (конечный) объект, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

*Доказательство.* Проведём доказательство для начальных объектов, для конечных доказательство аналогично. Пусть  $X, Y$  — два начальных объекта в категории  $\mathcal{C}$ . Тогда по определению существует единственный морфизм  $f: X \rightarrow Y$  в  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  и единственный морфизм  $g: Y \rightarrow X$  в  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ . Их композиция  $g \circ f$  должна быть единственным морфизмом в  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  и значит (по аксиоме (b) из Определения 1) совпадает с  $\text{id}_X$ , а  $f \circ g$  — единственным морфизмом в  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$ , а значит совпадает с  $\text{id}_Y$ . Это и означает единственность начального объекта с точностью до канонического изоморфизма.  $\square$

**Задача.** Пусть  $X$  — начальный объект категории  $\mathcal{C}$ , в которой существуют все суммы. Докажите, что для произвольного объекта  $Y$  из  $\mathcal{C}$  существует канонический изоморфизм  $X + Y \cong Y$ . То же с заменой суммы на произведение и начального объекта на конечный.

**Задача.** Для  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  существует канонический изоморфизм  $X + Y \cong Y + X$ . Аналогично, для  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  существует канонический изоморфизм  $(X + Y) + Z \cong X + (Y + Z)$ . То же с заменой сумм на произведения (при условии что последние существуют).

**Примеры.** а) В категории  $\mathcal{Set}$  начальный и конечный объекты существуют и являются соответственно пустым множеством  $\emptyset$  и множеством

\* (“точкой”), состоящим из одного элемента. В категории групп начальный и конечный объекты совпадают с группой, состоящей из одного элемента.<sup>20</sup> В категории  $\mathcal{P}(S)$  (см. пример m)) на стр. 19) начальным является  $\emptyset \subset S$ , а конечным — само множество  $S$ . Категория  $\mathcal{C}_S$ , рассмотренная в примере p) на стр. 21, имеет конечный объект  $(S, \text{id}_S)$ , а категория  $\mathcal{C}^S$  (определенная там же) — начальный объект  $(S, \text{id}_S)$ .

**Задача.** *Выяснить, когда у категории, связанной с частично упорядоченным множеством, существуют начальный и конечный объекты и что это за объекты.*

Понятие универсального объекта позволяет с единой точки зрения рассмотреть многие конструкции, изучаемые в математике. В качестве первого примера мы приведем определения суммы и произведения объектов произвольной категории (заодно обобщив их со случая двух объектов на случай произвольных семейств), использующие понятие универсального объекта.

**б) Сумма и произведение.** В предыдущем параграфе мы рассматривали сумму и произведение двух объектов. Однако определение суммы и произведения может быть распространено на произвольное конечное и даже бесконечное семейство объектов данной категории. Дадим соответствующие определения.

Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — семейство объектов категории  $\mathcal{C}$ . Рассмотрим новую категорию  $\mathcal{C}_A$ , определяемую следующим образом. Объектами  $\mathcal{C}_A$  являются наборы  $(Y, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$ , где  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , а  $f_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\alpha, Y) \forall \alpha \in A$ . Морфизмом в  $\mathcal{C}_A$  из объекта  $(Y, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$  в объект  $(Z, \{g_\alpha\}_{\alpha \in A})$  по определению является такой морфизм  $h: Y \rightarrow Z$  в категории  $\mathcal{C}$ , что для любого  $\alpha \in A$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X_\alpha & \\ f_\alpha \swarrow & & \searrow g_\alpha \\ Y & \xrightarrow{h} & Z. \end{array}$$

Предположим, что в категории  $\mathcal{C}_A$  существует начальный объект  $(X, \{i_\alpha\}_{\alpha \in A})$  (как уже отмечалось, все такие объекты канонически изоморфны). Тогда объект  $X$  назовем *суммой* семейства  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , а морфизм  $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$  — *каноническим вложением* слагаемого  $X_\alpha$  в сумму.

---

<sup>20</sup>объект, являющийся одновременно и начальным и конечным, называется *нулевым*.

Нетрудно видеть, что сумма пустого семейства объектов категории  $\mathcal{C}$  — начальный объект в  $\mathcal{C}$ .

Определение *произведения*  $P$  семейства  $X_\alpha$  и *канонических проекций*  $\pi_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X_\alpha)$  получается из определения суммы с помощью обращения стрелок. Нетрудно видеть, что произведение пустого семейства объектов категории  $\mathcal{C}$  — конечный объект в  $\mathcal{C}$ .

Сумма (произведение) одного объекта — сам этот объект (с точностью до канонического изоморфизма). Кроме того, так как конструкции суммы (произведения) можно итерировать, то мы получаем следующее утверждение. Категория имеет конечные суммы, если определены суммы любых двух её объектов и в ней существует начальный объект. Аналогично, категория имеет конечные произведения, если для любых двух объектов существует их произведение и в ней существует конечный объект.

Переход к случаю бесконечных семейств часто требует осторожности: сумма или произведение могут перестать существовать, или стать различными, хотя совпадали для конечных семейств (последнее происходит в категориях  $\text{Vect}_k$  и  $\mathcal{A}b$  — подумайте почему). Часто конструкция суммы и произведения для бесконечных семейств не так очевидна как для конечных — см. например определение тихоновской топологии, которая даёт конструкцию произведения произвольного семейства объектов в  $\mathcal{T}op$  (а знаменитая теорема Тихонова о компактности произведения произвольного семейства компактных топологических пространств с точки зрения теории категорий означает существование произведения произвольного семейства непустых пространств в  $\mathcal{CT}op$  — категории компактных топологических пространств и непрерывных отображений).

**с) Векторное пространство, порождённое множеством.** Зафиксируем поле скаляров  $k$  и множество  $S$ . Рассмотрим категорию  $\mathcal{C}$  (зависящую от  $k$  и  $S$ ), объектами которой являются пары  $(V, f)$ , где  $V$  — векторное пространство над  $k$ , а  $f: S \rightarrow V$  — отображение  $S$  в множество элементов векторного пространства  $V$ . Морфизм в  $\mathcal{C}$  из объекта  $(V, f)$  в объект  $(W, g)$  — это такое *линейное* отображение  $\varphi: V \rightarrow W$ ,

что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & V \\ g \downarrow & \swarrow \varphi & \\ W & & \end{array}$$

коммутативна. Начальный объект данной категории  $(V_S, i_S)$  назовём *векторным пространством, порождённым множеством  $S$* .

Покажем, что такой начальный объект существует, предъявив его явную конструкцию. Рассмотрим векторное пространство  $V'_S$ , базисом которого является множество символов  $\{e_s\}_{s \in S}$  (по одному символу  $e_s$  для каждого элемента  $s \in S$ ). То есть  $V'_S$  состоит из всех линейных комбинаций  $\sum_s \alpha_s e_s$ ,  $\alpha_s \in k$ , в которых  $\alpha_s \neq 0$  только для конечного числа  $s$ . Определим  $i'_S: S \rightarrow V'_S$  формулой  $i'_S(s) = e_s$ .

Покажем, что пара  $(V'_S, i'_S)$  является начальным объектом в категории  $\mathcal{C}$ . Для этого нужно проверить её *универсальное свойство*: для любой пары  $(W, g)$  существует и притом только одно такое линейное отображение  $\varphi: V'_S \rightarrow W$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i'_S} & V'_S \\ g \downarrow & \swarrow \varphi & \\ W & & \end{array}$$

коммутативна.

На базисных элементах  $e_s$  отображение  $\varphi$  однозначно определяется требованием коммутативности диаграммы:

$$\varphi(e_s) = \varphi(i'_S(s)) = g(s).$$

С базисных элементов на произвольные  $v \in V'_S$  отображение  $\varphi$  продолжается по условию линейности: для  $v = \sum_s \alpha_s e_s$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_s \alpha_s e_s\right) = \sum_s \alpha_s \varphi(e_s) = \sum_s \alpha_s g(s).$$

Корректность определения  $\varphi$  следует из линейной независимости базисных векторов  $e_s$ : каждый вектор  $v \in V'_S$  *однозначно* представляется в виде  $v = \sum_s \alpha_s e_s$ . Единственность  $\varphi$  следует из полноты системы базисных векторов: любой вектор  $v \in V'_S$  *представляется* в виде  $v = \sum_s \alpha_s e_s$ . Линейность так определённого отображения  $\varphi$  легко проверяется.

Таким образом, по Теореме 9 о единственности универсального объекта,  $(V'_S, i'_S) \cong (V_S, i_S)$ .

Сделаем следующее простое но важное замечание. Если бы векторы  $e_s$  выше были бы линейно зависимыми, то отображение  $\varphi$  было бы корректно определено только в том случае, если бы из всякого соотношения  $\sum_s \beta_s e_s = 0$  следовало бы соотношение  $\sum_s \beta_s g(s) = 0$  между соответствующими векторами  $g(s) \in W$  (то есть  $\varphi$  существовало бы не для всех  $g: S \rightarrow W$ ). С другой стороны, если бы система векторов  $\{e_s\}_{s \in S}$  не была бы полна (то есть не порождала бы все пространство  $V'_S$ ), то  $\varphi$  было бы определено условием коммутативности диаграммы неоднозначно.

**d) Свободная группа.** Начальный объект в категории, определённой в примере q) на стр. 21, называется *свободной группой*, (*свободно*) *порождённой* множеством  $S$ . Обозначим соответствующую универсальную пару через  $(F_S, i_S)$ . Таким образом, отображение  $i_S: S \rightarrow F_S$  обладает следующим универсальным свойством: для любого отображения  $g: S \rightarrow G$  в множество элементов группы  $G$  существует единственный гомоморфизм групп  $\varphi: F_S \rightarrow G$  такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i_S} & F_S \\ g \downarrow & \swarrow \varphi & \\ G & & \end{array} \quad (1.7)$$

коммутативна.

Можно дать следующую конструкцию группы  $F_S$ . Наряду с множеством  $S$  рассмотрим множество  $S^{-1}$ , состоящее из символов, обозначаемых  $s^{-1}$ , по одному для каждого элемента  $s \in S$ . Пусть  $T = S \cup S^{-1}$ . Назовём *словом в алфавите  $S$*  произвольную конечную последовательность элементов из  $T$ . Например, если  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  — конечное множество, то  $T = \{s_1, s_1^{-1}, \dots, s_n, s_n^{-1}\}$ , и словом в алфавите  $S$  будет произвольная конечная последовательность символов  $s_i$  и  $s_j^{-1}$ , написанная в произвольном порядке, например  $s_1 s_2 s_2 s_1^{-1} s_3$  (при  $n \geq 3$ ). Допускается и *пустое слово*  $e$ , в которое, по определению, не входит ни один из символов  $s$  или  $s^{-1}$ . Слово называется *приведённым*, если в нём нигде рядом не стоят символы  $s$  и  $s^{-1}$ . *Произведением* слов  $A$  и  $B$  называется слово, которое получается, если записать  $B$  следом за  $A$  и затем выбрасывать все стоящие рядом пары вида  $s$  и  $s^{-1}$ , пока не получится

приведённое слово (может быть, пустое). Легко видеть, что множество приведённых слов с этой операцией умножения образует группу: например, обратным к выписанному выше слову будет  $s_3^{-1}s_1s_2^{-1}s_2^{-1}s_1^{-1}$ , а роль единичного элемента играет пустое слово  $e$ . Полученную группу приведённых слов в алфавите  $S$  с операцией произведения обозначим  $F'_S$ . Есть очевидное отображение  $i'_S: S \rightarrow F'_S$ , где  $i'_S(s)$  есть “однобуквенное” слово  $s$ .

Покажем, что пара  $(F'_S, i'_S)$  обладает описанным выше универсальным свойством, выражаемым диаграммой (1.7). Нам нужно для произвольного отображения  $g: S \rightarrow G$  построить гомоморфизм групп  $\varphi: F'_S \rightarrow G$ , превращающий диаграмму (1.7) (с  $(F'_S, i'_S)$  вместо  $(F_S, i_S)$ ) в коммутативную. Требование коммутативности диаграммы однозначно определяет значения  $\varphi(s) = g(s)$  на свободных образующих  $s \in S$  (точнее, на соответствующих однобуквенных словах). Теперь  $\varphi$  на оставшиеся слова однозначно продолжается по гомоморфности. В частности, пустое слово при этом переходит в единицу в  $G$  и  $\varphi(s^{-1}) = \varphi(s)^{-1}$ . Корректность так определённого отображения следует из того, что каждый элемент  $F'_S$  однозначно представляется приведённым словом в алфавите  $S$  (по-существу, является приведённым словом).<sup>21</sup>

В силу только что доказанного универсального свойства, по Теореме 9 мы можем построенную группу  $(F'_S, i'_S)$  отождествить с  $(F_S, i_S)$ . В частности, для  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  группа  $F_S$  называется *свободной группой с  $n$  образующими* и обозначается  $F_n$  (заметим, что  $F_1 \cong \mathbb{Z}$ ). Для читателей, знакомых с понятием фундаментальной группы, отметим, что  $F_n$  может быть реализована как фундаментальная группа плоскости с  $n$  выколотыми точками.<sup>22</sup> Заметим, что  $F_{S_1 \amalg S_2} \cong F_{S_1} * F_{S_2}$  (ср. пример b') из §1.3).<sup>23</sup>

<sup>21</sup>подумайте, почему это доказательство не проходит для несвободных групп, между образующими которых есть соотношения. Для этого полезно использовать аналогию с векторным пространством, порождённым множеством, рассмотренным в предыдущем примере. Аналогом линейного базиса для группы  $F'_S$  является её порождающее множество  $S$ . Заметим, что векторное пространство всегда “свободно”, поскольку всегда обладает базисом.

<sup>22</sup>Читатель, знакомый с теоремой Зейферта-ван Кампена, может попытаться установить связь вышеизложенного с примером a') из §1.3. Мы вернемся к выяснению категорного смысла этой теоремы после того, как познакомимся с понятием функтора.

<sup>23</sup>заметим, что за этим скрывается общий факт о сопряжённых функторах: левые сопряжённые коммутируют с копределами (в то время как правые сопряжённые — с пределами).

Интуитивно, группу  $F_S$  можно рассматривать как “наибольшую” группу, порождённую множеством  $S$ . То, что она наибольшая, связано с тем, что любое отображение  $S \rightarrow G$  в произвольную группу  $G$  через неё пропускается (=факторизуется). То, что  $F_S$  порождается  $S$ , связано с единственностью такой факторизации.

Роль свободных групп связана с тем, что любая группа изоморфна факторгруппе некоторой свободной группы.

Аналогично можно рассмотреть свободную *абелеву* группу, порождённую множеством  $S$ . Это предлагается сделать читателю самостоятельно.

**е) Свободная алгебра.** Пусть  $S$  — некоторое множество. Через  $\mathcal{C}$  обозначим категорию, объектами которой являются пары  $(A, f)$ , состоящие из ассоциативной унитарной алгебры  $A \in \mathcal{Alg}_k$  и отображения  $f: S \rightarrow A$  из  $S$  в множество элементов  $A$  (алгебру и множество её элементов мы обозначаем одним и тем же символом  $A$ ). Морфизм в  $\mathcal{C}$  из  $(A, f) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  в  $(B, g) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  — гомоморфизм унитарных алгебр  $h: A \rightarrow B$  такой что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & \swarrow h & \\ B & & \end{array}$$

коммутативна (заметим, что в диаграмме  $h$  обозначает отображение “подстилающих” множеств<sup>24</sup> алгебр  $A$  и  $B$ ). Начальный объект в такой категории  $\mathcal{C}$  называется *свободной  $k$ -алгеброй, порождённой множеством  $S$* .

Конструкция свободной алгебры напоминает конструкцию свободной группы. Пусть  $k\{S\}$  — векторное пространство, базис в котором образуют все слова  $s_{i_1} \dots s_{i_p}$  в алфавите  $S$ , включая пустое слово  $\emptyset$ . Произведение слов

$$(s_{i_1} \dots s_{i_p})(s_{i_{p+1}} \dots s_{i_n}) = s_{i_1} \dots s_{i_p} s_{i_{p+1}} \dots s_{i_n}$$

по линейности продолжается до ассоциативного умножения в  $k\{S\}$ . Единицей  $k\{S\}$  является пустое слово:  $1 = \emptyset$ . Кроме того, мы имеем очевидное вложение  $i_S: S \rightarrow k\{S\}$ .

<sup>24</sup>смысл этого замечания прояснится ниже, после знакомства с забывающими функторами.

Покажем, что пара  $(k\{S\}, i_S)$  обладает требуемым универсальным свойством. Пусть дано отображение  $f: S \rightarrow A$  в  $k$ -алгебру  $A$ . Нам нужно определить гомоморфизм алгебр  $\bar{f}: k\{S\} \rightarrow A$ , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i_S} & k\{S\} \\ f \downarrow & \swarrow \bar{f} & \\ A & & \end{array}$$

коммутативной. Положим  $\bar{f}(\emptyset) = 1_A$ , где  $1_A$  — единица алгебры  $A$ , а для непустого слова  $s_{i_1} \dots s_{i_p}$  полагаем  $\bar{f}(s_{i_1} \dots s_{i_p}) = f(s_{i_1}) \dots f(s_{i_p})$ . Легко видеть, что продолжая  $\bar{f}$  с базиса по линейности на всю алгебру  $k\{S\}$ , мы получаем требуемый гомоморфизм. Единственность следует из того, что  $\bar{f}$  определено на словах в алфавите  $S$  требованием унитальности и коммутативности диаграммы однозначно.

Роль свободных алгебр связана с тем, что любая алгебра является факторалгеброй некоторой свободной алгебры.

Заметим, что  $k\{S\}$  можно также рассматривать как моноидальную алгебру свободного моноида, порождённого множеством  $S$  (читателю предлагается расшифровать это после изучения примера “групповая алгебра” ниже).

У понятия свободной алгебры есть специализация  $k[S]$  на случай коммутативных алгебр. Она получается, если в качестве категории  $\mathcal{Alg}_k$  взять категорию *коммутативных* унитарных  $k$ -алгебр.

**Задача.** Пусть  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  — конечное множество из  $n$  элементов. Тогда  $k[S] \cong k[s_1, \dots, s_n]$  — алгебра многочленов от  $n$  переменных.

**f) Тензорное произведение.** Начальный объект в категории, определённой в примере г) на стр. 21 называется *тензорным произведением векторных пространств*  $U_1, \dots, U_n$ . Развернём его определение. Пусть  $k$  — поле и  $U_1, \dots, U_n$  — фиксированный набор векторных пространств над  $k$ . Рассмотрим категорию, объектами которой являются всевозможные пары  $(V, f)$ , состоящие из векторного пространства  $V$  и полилинейного отображения  $f: U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow V$ . Морфизм из объекта  $(V, f)$  в объект  $(W, g)$  — это такое линейное отображение  $\varphi: V \rightarrow W$ , для кото-



рого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_1 \times \dots \times U_n & \xrightarrow{f} & V \\ g \downarrow & \nearrow \varphi & \\ W & & \end{array}$$

коммутативна. Начальный объект в этой категории называется *тензорным произведением* векторных пространств  $U_1, \dots, U_n$  и обозначается  $(U_1 \otimes \dots \otimes U_n, \tau)$ . Полилинейное отображение

$$\tau: U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow U_1 \otimes \dots \otimes U_n$$

называется *универсальным полилинейным отображением*. Универсальное свойство пары  $(U_1 \otimes \dots \otimes U_n, \tau)$  означает, что для произвольного  $k$ -векторного пространства  $V$  и полилинейного отображения  $f: U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow V$  существует единственное линейное отображение  $\varphi: U_1 \otimes \dots \otimes U_n \rightarrow V$  такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_1 \times \dots \times U_n & \xrightarrow{\tau} & U_1 \otimes \dots \otimes U_n \\ f \downarrow & \nearrow \varphi & \\ V & & \end{array}$$

коммутативна.

Так как конструкция тензорного произведения обычно приводится в стандартных курсах линейной алгебры (см., например, [8]), мы не будем её излагать здесь.

Определение и конструкция тензорного произведения векторных пространств непосредственно обобщается на случай модулей над коммутативным кольцом.

**g) Тензорная алгебра.** Рассмотрим в качестве еще одного примера тензорную алгебру линейного пространства. Пусть  $k$  — некоторое поле; зафиксируем векторное пространство  $V$  над  $k$ . Рассмотрим категорию  $\mathcal{C}$ , объектами которой являются пары  $(A, \varphi)$ , состоящие из ассоциативной алгебры  $A$  с единицей над полем  $k$  и *линейного* отображения  $\varphi: V \rightarrow A$ . Морфизм из объекта  $(A, \varphi)$  в объект  $(B, \psi)$  — это гомоморфизм  $k$ -алгебр с единицей  $\chi: A \rightarrow B$ , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \psi \downarrow & \nearrow \chi & \\ B & & \end{array}$$

коммутативной.

Пусть  $T(V)$  — тензорная алгебра пространства  $V$ , а  $i_V: V \rightarrow T(V)$  — каноническое линейное отображение (вложение  $V$  в качестве  $T^1(V) \subset T(V)$  в естественной градуировке тензорной алгебры). Тогда легко проверить, что пара  $(T(V), i_V)$  — начальный объект в только что определенной категории.

Вариант последнего примера: в качестве объектов категории  $\mathcal{C}$  рассматриваются линейные отображения фиксированного пространства  $V$  не в произвольные ассоциативные, а только в коммутативные ассоциативные алгебры  $A$ . Тогда в соответствующей категории начальным объектом будет  $\bar{i}_V: V \rightarrow S(V)$ , где  $S(V)$  — симметрическая алгебра линейного пространства  $V$ , а  $\bar{i}_V$  — каноническое линейное отображение. См. подробности например в [6].

**Задача.** Пусть  $I$  — множество индексов, нумерующих базис в пространстве  $V$ . Докажите что тензорная алгебра  $T(V)$  изоморфна свободной алгебре  $k\{I\}$ . То же для алгебр  $S(V)$  и  $k[I]$ .

**h) Факормножество и факторпространство.** Напомним, что факормножеством множества  $X$ , на котором задано отношение эквивалентности  $\alpha$ , называется множество  $X/\alpha$  классов эквивалентности указанного отношения. Заметим, что мы имеем также каноническую проекцию  $\pi_\alpha: X \rightarrow X/\alpha$ , сопоставляющую каждому элементу  $x \in X$  его класс эквивалентности.

Чтобы описать универсальное свойство факормножества, рассмотрим следующую категорию  $\mathcal{C}$ , построенную по множеству  $X$  и отношению  $\alpha$ . Объектом  $\mathcal{C}$  будем считать пару  $(Y, \varphi)$ , где  $Y$  — некоторое множество а  $\varphi: X \rightarrow Y$  — отображение, обладающее свойством  $x\alpha y \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$  (т.е. постоянное на классах эквивалентности отношения  $\alpha$ ). Морфизмом в категории  $\mathcal{C}$  из объекта  $(Y, \varphi)$  в объект  $(Z, \psi)$  назовем такое отображение  $\chi: Y \rightarrow Z$ , для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \psi \downarrow & \swarrow \chi & \\ Z & & \end{array} \quad (1.8)$$

коммутативна. Тогда легко проверяется, что пара  $(X/\alpha, \pi_\alpha)$  — начальный объект в категории  $\mathcal{C}$ .

Имеется также модификация последнего примера на случай, когда  $X$  — топологическое пространство. А именно, введем на  $X/\alpha$  *фактор-топологию относительно проекции*  $\pi_\alpha: X \rightarrow X/\alpha$ , т.е. сильнейшую топологию, в которой каноническая проекция  $\pi_\alpha$  непрерывна. Определим категорию  $\mathcal{C}_{top}$  следующим образом. Объектом  $\mathcal{C}_{top}$  будем считать пару  $(Y, \varphi)$ , состоящую из *топологического пространства*  $Y$  и *непрерывного отображения*  $\varphi: X \rightarrow Y$ , обладающего свойством  $x\alpha y \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$ . Морфизмом в категории  $\mathcal{C}_{top}$  из объекта  $(Y, \varphi)$  в объект  $(Z, \psi)$  назовем такое *непрерывное отображение*  $\chi: Y \rightarrow Z$ , для которого диаграмма (1.8) коммутативна. Тогда легко проверяется, что каноническая пара  $(X/\alpha, \pi_\alpha)$  — начальный объект в категории  $\mathcal{C}_{top}$ .

В следующих примерах мы, как правило, не будем явно описывать категории, в которых рассматриваемые конструкции дают универсальные объекты. Читателю предлагается сделать это самостоятельно.

**i) Факторгруппа, факторкольцо, факторалгебра.** Есть также алгебраические версии понятия факторобъекта. С нормальной подгруппой в группе и с (двусторонним в некоммутативном случае) идеалом в кольце связаны отношения эквивалентности, согласованные с операциями. Разберём это более подробно.

Пусть  $G$  — группа и  $H \subset G$  — её нормальная подгруппа; таким образом, определена факторгруппа  $G/H$ , заданная вместе с каноническим гомоморфизмом  $\pi: G \rightarrow G/H$ . Пара  $(G/H, \pi)$  обладает следующим универсальным свойством: для любого гомоморфизма групп  $\varphi: G \rightarrow K$  такого что  $H \subset \ker \varphi$  существует единственный гомоморфизм групп  $\psi: G/H \rightarrow K$  такой что  $\psi \circ \pi = \varphi$ , то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/H \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ K & & \end{array}$$

коммутативна. Данное универсальное свойство часто оказывается полезным при построении гомоморфизмов групп.

**Задача.** Доказать сформулированное универсальное свойство факторгруппы.

Пусть  $R$  — кольцо и  $I \subset R$  — его двусторонний идеал; таким образом, определено факторкольцо  $R/I$ , заданное вместе с каноническим

гомоморфизмом  $\pi: R \rightarrow R/I$ . Пара  $(R/I, \pi)$  обладает следующим универсальным свойством: для любого гомоморфизма колец  $\varphi: R \rightarrow S$  такого что  $I \subset \ker \varphi$  существует единственный гомоморфизм колец  $\psi: R/I \rightarrow S$  такой что  $\psi \circ \pi = \varphi$ , то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\pi} & R/I \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ S & & \end{array}$$

коммутативна. Данное универсальное свойство часто оказывается полезным при построении гомоморфизмов колец.

**Задача.** Доказать сформулированное универсальное свойство факторкольца.

**Задача.** Сформулировать и доказать универсальные свойства факторпространства (фактормодуля) и факторалгебры.

**ж) Алгебра Клиффорда.** Алгебры Клиффорда возникают как решение следующей задачи. Пусть  $k$  — поле и  $V$  — векторное пространство над  $k$ , снабжённое квадратичной формой  $Q$ . Пусть  $C$  — ассоциативная унитарная алгебра над  $k$  и  $j: V \rightarrow C$  — такое линейное отображение “подстилающих” векторных пространств, что  $j(v)^2 = Q(v) \cdot 1_C \forall v \in V$  ( $1_C$  — единица в алгебре  $C$ ). Другими словами, квадраты всех элементов вида  $j(v)$ ,  $v \in V$  являются “скалярами” в  $C$ , то есть кратными единичного элемента  $1_C$  (с коэффициентом  $Q(v)$ ). Мы хотим найти пару  $(C, j)$ , которая удовлетворяла бы следующему универсальному свойству. Для любой ассоциативной унитарной  $k$ -алгебры  $A$  и произвольного линейного отображения  $\varphi: V \rightarrow A$  подстилающих векторных пространств такого, что  $\varphi(v)^2 = Q(v) \cdot 1_A$  существует и единствен гомоморфизм алгебр  $\psi: C \rightarrow A$ , превращающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & C \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ A & & \end{array}$$

в коммутативную.

Алгебра  $C(V, Q)$ , являющаяся решением сформулированной задачи существует, и называется *алгеброй Клиффорда*. Идея её конструкции основана на универсальном свойстве тензорной алгебры (см. один из примеров выше). А именно, для любого линейного отображения  $\varphi: V \rightarrow A$

существует единственный гомоморфизм алгебр  $\vartheta: T(V) \rightarrow A$ , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i_V} & T(V) \\ \varphi \downarrow & \swarrow \vartheta & \\ A & & \end{array}$$

коммутативной.

В силу условия  $\varphi(v)^2 = Q(v) \cdot 1_A$  и коммутативности диаграммы, гомоморфизм  $\vartheta$  все элементы вида

$$v \otimes v - Q(v) \cdot 1_{T(V)} \in T(V), \quad v \in V$$

переводит в 0, а значит двусторонний идеал  $I(Q) \subset T(V)$ , порождённый элементами указанного вида, лежит в ядре гомоморфизма  $\vartheta$ . Значит, если мы положим  $B := T(V)/I(Q)$ , то по универсальному свойству факторалгебры гомоморфизм  $\vartheta$  пропускается (=факторизуется) через гомоморфизм  $\psi: B \rightarrow A$ . С другой стороны, если мы положим  $j := \pi \circ i_V: V \rightarrow B$ , где  $\pi: T(V) \rightarrow T(V)/I(Q)$  — каноническая проекция, то  $j(v)^2 = Q(v) \cdot 1_B$ . Отсюда легко видеть, что пара  $(B, j)$  обладает требуемым универсальным свойством, то есть  $B = C(V, Q)$ . Заметим, что единственность гомоморфизма  $\psi$  следует из единственности  $\vartheta$ .

Подробности см., например, в [5], с. 153-155 или в [13], лекция 13.

Заметим, что несмотря на кажущееся абстрактным определение, алгебры Клиффорда нашли применение не только в математике (теория групп Ли, риманова геометрия и  $K$ -теория), но и в физике, в уравнении Дирака, описывающем релятивистский электрон. Кроме того, частным случаем (при  $Q = 0$ ) алгебры Клиффорда является внешняя алгебра векторного пространства.

**Задача.** *Сформулируйте универсальное свойство внешней алгебры.*

**к) Универсальная обёртывающая алгебра.** Из произвольной ассоциативной унитарной  $k$ -алгебры  $A$  можно сконструировать алгебру Ли, если для произвольных элементов  $a, b \in A$  определить их скобку Ли  $[a, b]$  формулой  $[a, b] = ab - ba$  (здесь  $ab$  — произведение элементов в смысле ассоциативного умножения в  $A$ ). Соответствующую алгебру Ли обозначим  $A_L$ . Более того, унитарный гомоморфизм ассоциативных ал-

гебр  $\varphi: A \rightarrow B$  индуцирует гомоморфизм алгебр Ли  $\varphi^L: A_L \rightarrow B_L$ .<sup>25</sup>

Универсальной обёртывающей алгеброй алгебры Ли  $L$  над полем  $k$  называется пара  $(U(L), i_L)$ , состоящая из ассоциативной унитарной алгебры  $U(L)$  над  $k$  и гомоморфизма алгебр Ли  $i_L: L \rightarrow U(L)_L$ , обладающая следующим универсальным свойством. Для любой ассоциативной унитарной алгебры  $A$  над  $k$  и любого гомоморфизма алгебр Ли  $\varphi: L \rightarrow A_L$  существует единственный гомоморфизм унитарных ассоциативных алгебр  $\psi: U(L) \rightarrow A$  такой, что  $\psi^L \circ i = \varphi$ , то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i_L} & U(L)_L \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi^L & \\ A_L & & \end{array}$$

коммутативна.

Существование универсальной обёртывающей алгебры доказывается её прямой конструкцией. Именно, пусть  $T(L)$  — тензорная алгебра подлежащего векторного пространства алгебры Ли  $L$ . Пусть  $I(L) \subset T(L)$  — двусторонний идеал, порождённый всеми элементами вида

$$a \otimes b - b \otimes a - [a, b], \quad a, b \in L.$$

Положим  $i_L := \pi \circ i$ , где  $i: L \rightarrow T(L)$  — естественное вложение а  $\pi: T(L) \rightarrow T(L)/I(L)$  — каноническая проекция. Тогда легко видеть, что  $i_L: L \rightarrow U(L)_L$  — гомоморфизм алгебр Ли. Требуемое универсальное свойство пары  $(U(L), i_L)$  следует теперь из универсальных свойств тензорной алгебры  $T(L)$  и факторалгебры.

Подробности см., например, в [13], лекция 5.

**1) Кольцо частных.** Примеры универсальных объектов доставляют нам также *кольца частных*. Соответствующую конструкцию мы разберем в очень частном случае. А именно, пусть  $A$  — *целостное кольцо* (напомним, что целостное кольцо — это коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и без делителей нуля). Напомним также, что для целостного кольца определено *поле частных*  $\text{Quot}(A)$ , иначе называемое *полем рациональных дробей* (для  $A = \mathbb{Z}$  это — поле  $\mathbb{Q}$ , а для кольца

---

<sup>25</sup>ниже мы узнаем, что тем самым мы определили функтор из категории ассоциативных унитарных алгебр  $\text{Alg}_k$  в категорию алгебр Ли  $\text{Lie}_k$ .

многочленов  $A = k[X]$  — поле рациональных функций  $k(X)$ ). Оно состоит из классов эквивалентности выражений  $a/b$ , где  $a, b \in A$ ,  $b \neq 0$  относительно следующего отношения эквивалентности:

$$(a/b \sim a'/b') \Leftrightarrow (b'a - ba' = 0).$$

Сложение и умножение в  $\text{Quot}(A)$  определяются по обычным формулам для дробей:

$$a/b + a'/b' = (b'a + ba')/bb', \quad (a/b) \cdot (a'/b') = (aa'/bb').$$

Заметим, что поле частных  $\text{Quot}(A)$  определено вместе с *каноническим вложением*  $j_A: A \rightarrow \text{Quot}(A)$ ,  $a \mapsto a/1$ .

Рассмотрим теперь категорию, объектами которой являются пары  $(K, f)$ , где  $K$  — некоторое поле, а  $f: A \rightarrow K$  — *вложение*  $A$  в  $K$  в качестве подкольца. Морфизм из  $(K, f)$  в  $(L, g)$  — это такой гомоморфизм (т.е. вложение) полей  $\varphi: K \rightarrow L$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & K \\ g \downarrow & \swarrow \varphi & \\ L & & \end{array}$$

коммутативна. Тогда пара  $(\text{Quot}(A), j_A)$  является начальным объектом в данной категории.

**м) Абелианизация.** Пусть  $G$  — произвольная группа,  $G'$  — её коммутант. Напомним, что коммутант группы  $G$  — подгруппа, порождённая всеми коммутаторами

$$[g_1, g_2] := g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}, \quad g_1, g_2 \in G.$$

Коммутант тривиален тогда и только тогда, когда группа  $G$  абелева.

Очевидно, что если  $\varphi: G \rightarrow H$  — гомоморфизм групп, то  $\varphi(G') \subset H'$ , а если  $\varphi(G) = H$ , то  $\varphi(G') = H'$ . В частности, коммутант инвариантен относительно всех внутренних автоморфизмов группы, то есть является нормальной подгруппой. Значит, определена факторгруппа  $G/G'$ , называемая *абелианизацией* группы  $G$  и обозначаемая  $G^{ab}$ .

**Задача.** Докажите, что пара  $(G^{ab}, \alpha)$ , где  $\alpha: G \rightarrow G^{ab}$  — каноническая проекция на факторгруппу, обладает следующим универсаль-

ным свойством: для произвольного гомоморфизма  $\varphi: G \rightarrow A$  в абелеву группу  $A$  существует и притом единственный гомоморфизм  $\psi: G^{ab} \rightarrow A$  такой, что  $\psi \circ \alpha = \varphi$ , то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & G^{ab} \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ A & & \end{array}$$

коммутативна.

**п) Групповая алгебра.** Групповой алгеброй группы  $G$  над полем  $k$  называется алгебра, обозначаемая  $k[G]$ , базисные элементы (как векторного пространства над  $k$ ) которой занумерованы элементами группы  $G$ , причём произведение базисных элементов с номерами  $g_1, g_2 \in G$  есть базисный элемент с номером  $g_1g_2$ .

Обычно базисные элементы  $k[G]$  обозначаются тем же символом что и элементы группы  $G$ . При таком соглашении произвольный элемент  $k[G]$  однозначно представляется в виде

$$a = \sum_{g \in G} a_g g \quad (a_g \in k, a_g \neq 0 \text{ только для конечного числа элементов } g \in G). \quad (1.9)$$

Из ассоциативности умножения элементов в группе  $G$  вытекает ассоциативность умножения в алгебре  $k[G]$ . Можно еще более упростить обозначения, если элемент (1.9) групповой алгебры  $k[G]$  рассматривать как функцию  $a: G \rightarrow k$ ,  $a(g) := a_g$  с конечным носителем. В этих обозначениях произведение  $a * b$  двух элементов  $a, b \in k[G]$  имеет следующий вид:

$$(a * b)(g) = \sum_{h \in G} a(h)b(h^{-1}g)$$

и называется *свёрткой* функций  $a$  и  $b$  на группе  $G$ . Заметим, что “дельта-функция”  $\delta_e$  в единице  $e \in G$  (то есть  $\delta_e(e) = 1$  и  $\delta_e(g) = 0$  при  $g \neq e$ ) играет роль единицы алгебры  $k[G]$ .

Для  $A \in \text{Ob}(\mathcal{Alg}_k)$  отображение  $\varphi: G \rightarrow A$  назовём *мультипликативным*, если

$$\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Легко видеть, что это — то же, что композиция гомоморфизма групп



$G \rightarrow A^\times$ , где  $A^\times$  — мультипликативная группа алгебры  $A$ <sup>26</sup>, с каноническим вложением  $A^\times \rightarrow A$ .

Тогда пара  $(k[G], \alpha)$ , где  $\alpha: G \rightarrow k[G]$  — каноническое мультипликативное отображение, однозначно с точностью до изоморфизма (как, впрочем, любой универсальный объект) характеризуется следующим универсальным свойством: для любого мультипликативного отображения  $\varphi: G \rightarrow A$  существует единственный гомоморфизм алгебр  $\psi: k[G] \rightarrow A$  такой, что  $\psi \circ \alpha = \varphi$ , или, более наглядно, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & k[G] \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ A & & \end{array}$$

коммутативна.

Отметим, что понятие групповой алгебры допускает полезные обобщения: во-первых, группу можно заменить моноидом и тогда получается *моноидальная алгебра*<sup>27</sup>, во-вторых, вместо полей можно рассматривать кольца, и тогда мы получим понятие группового кольца.

**о) Симметризация коммутативного моноида.** Напомним, что моноидом называется полугруппа с единицей, но, в отличие от группы, в нём, вообще говоря, не для всякого элемента есть обратный. Моноиды образуют категорию, морфизмами в которой являются гомоморфизмы моноидов (заметим, что, в отличие от групп, для отображения моноидов  $f: M \rightarrow N$  из условия  $f(xy) = f(x)f(y) \ \forall x, y \in M$  не следует что  $f$  единичный элемент переводит в единичный, это условие нужно накладывать дополнительно).

По определению, симметризация коммутативного моноида  $M$  — это пара  $(S(M), \alpha_M)$  состоящая из абелевой группы  $S(M)$  и гомоморфизма подстилающих моноидов  $\alpha_M: M \rightarrow S(M)$ , такая, что выполнено следующее универсальное свойство: для произвольной абелевой группы  $A$  и произвольного гомоморфизма подстилающих моноидов  $f: M \rightarrow A$  существует и единствен гомоморфизм групп  $\tilde{f}: S(M) \rightarrow A$  такой, что

<sup>26</sup>напомним, что мультипликативной группой ассоциативной унитарной алгебры  $A$  называется группа обратимых относительно умножения элементов алгебры  $A$  с операцией умножения.

<sup>27</sup>посчитайте моноидальную алгебру для моноида натуральных чисел с 0.

диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha_M} & S(M) \\ f \downarrow & \swarrow \tilde{f} & \\ A & & \end{array}$$

коммутативна.

Читатель легко проверит, что, например, для моноида неотрицательных целых чисел по сложению симметризацией будет аддитивная группа целых чисел, а для моноида натуральных чисел (без нуля) относительно умножения — мультипликативная группа положительных рациональных чисел.

Чтобы показать, что симметризация существует, нужно дать её конструкцию, и проверить для неё выполнение универсального свойства. Простейший путь состоит в том, чтобы определить  $S(M)$  как факторгруппу свободной абелевой группы  $\mathcal{F}(M)$ , порождённой всеми символами  $[m]$ ,  $m \in M$ , по подгруппе, порождённой линейными комбинациями вида  $[m + n] - [m] - [n] \in \mathcal{F}(M)$  (где сумма  $m + n$  берётся в моноиде  $M$ ), и положить  $\alpha_M(m)$  равным классу элемента  $[m]$ . Универсальное свойство построенной пары  $(S(M), \alpha_M)$  тогда следует из универсальных свойств свободной абелевой группы и факторгруппы. Подробности см., например, в [5].

**р) Пополнение метрического пространства.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство. Его пополнением называется пара  $((\bar{X}, \bar{d}), i_X)$ , состоящая из полного метрического пространства  $(\bar{X}, \bar{d})$  и изометрии<sup>28</sup>  $i_X: (X, d) \rightarrow (\bar{X}, \bar{d})$ , обладающая следующим универсальным свойством: для любого полного метрического пространства  $(Y, \rho)$  и произвольной изометрии  $\varphi: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  существует единственная изометрия  $\psi: (\bar{X}, \bar{d}) \rightarrow (Y, \rho)$ , делающая диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & \bar{X} \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ Y & & \end{array}$$

коммутативной. Можно показать, что это определение пополнения через универсальное свойство эквивалентно “обычному” определению, так как

---

<sup>28</sup>напомним, что отображение метрических пространств  $\varphi: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  называется *изометрией*, если  $\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = d(x_1, x_2) \forall x_1, x_2 \in X$ .

условие универсальности эквивалентно тому, что  $i_X(X)$  плотно в  $\bar{X}$ .

Подробности см., например, в [16].

**q) Компактификация Стоуна-Чеха.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Пара  $(\beta X, i_X)$ , состоящая из компактного хаусдорфова пространства  $\beta X$  и непрерывного отображения  $i_X: X \rightarrow \beta X$  называется *компактификацией Стоуна-Чеха*, если она обладает следующим универсальным свойством: для любого непрерывного отображения  $f: X \rightarrow K$  в компактное хаусдорфово пространство  $K$  существует причём единственное непрерывное отображение  $\beta f: \beta X \rightarrow K$  такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & \beta X \\ f \downarrow & \swarrow \beta f & \\ K & & \end{array}$$

коммутативна.

Другими словами, компактификация Стоуна-Чеха даёт универсальное отображение из  $X$  в компактное хаусдорфово пространство  $\beta X$ . То есть  $\beta X$  — “наибольшее” компактное хаусдорфово пространство, “порождённое”  $X$  в том смысле что любые непрерывные отображения из  $X$  в компактные хаусдорфовы пространства факторизуются через  $\beta X$  (единственным образом).

Заметим, что даже для таких “простых” некомпактных пространств как дискретное пространство  $\mathbb{N}$  эта компактификация может быть очень сложной (в частности,  $\beta \mathbb{N}$  имеет мощность  $2^{\aleph}$ , где  $\aleph$  — мощность континуума).

**г) Свободная магма.** Вот еще один пример. Рассмотрим категорию  $\mathcal{M}$ , объектами которой являются т.н. “магмы”, т.е. всевозможные пары  $(Y, \cdot)$ , где  $Y$  — множество, а  $\cdot$  — бинарная операция на нем (никакими дополнительными свойствами вроде ассоциативности, коммутативности и т.п., вообще говоря, не обладающая). В качестве морфизмов  $f: (Y, \cdot) \rightarrow (Z, \circ)$  рассматриваются отображения множеств, согласованные с операциями, т.е. такие что  $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b) \forall a, b \in Y$ . Заметим, что задание бинарной операции на множестве  $Y$  эквивалентно заданию отображения  $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$ .

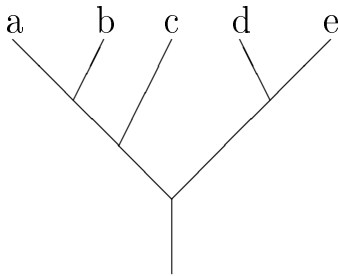
Пусть  $X$  — множество. Мы хотим построить *свободную магму над  $X$* , то есть пару  $((M(X), \star), i_X)$ , где  $(M(X), \star)$  — магма, а  $i_X: X \rightarrow M(X)$

— вложение множеств, такую что для любой магмы  $Y$  и произвольного отображения множеств  $\varphi: X \rightarrow Y$  существует единственный морфизм магм  $\psi: M(X) \rightarrow Y$  такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & M(X) \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ Y & & \end{array}$$

коммутативна.

Заметим, что т.к. операция  $\mu$  в общем случае не является ассоциативной, результат ее выполнения будет зависеть от расстановки скобок. Расставить скобки в последовательности из  $n$  элементов можно задав *планарное бинарное корневое дерево с  $n$  листьями*. Например, дереву с 5 листьями



(1.10)

соответствует следующая расстановка скобок (здесь и ниже мы опускаем точки, обозначающие операцию):  $((ab)c)(de)$ ; читатель легко выведет общее правило самостоятельно. Обозначим множество планарных бинарных корневых деревьев с  $n$  листьями через  $\mathcal{J}_n$  (мощности множеств  $\mathcal{J}_n$  образуют знаменитую последовательность Каталана). Из сказанного выше следует, что для магмы  $(Y, \cdot)$  каждое дерево  $T \in \mathcal{J}_n$  задает отображение  $\mu_T: Y^n \rightarrow Y$  (например, для дерева  $T$  на диаграмме (1.10) имеем:  $\mu_T(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = ((y_1 y_2) y_3)(y_4 y_5)$ ). Это отображение можно записать следующим образом. Пусть  $l(T)$  — число листьев корневого дерева  $T$ . Введем обозначение

$$M(Y) := \coprod_T \{T\} \times Y^{l(T)}.$$

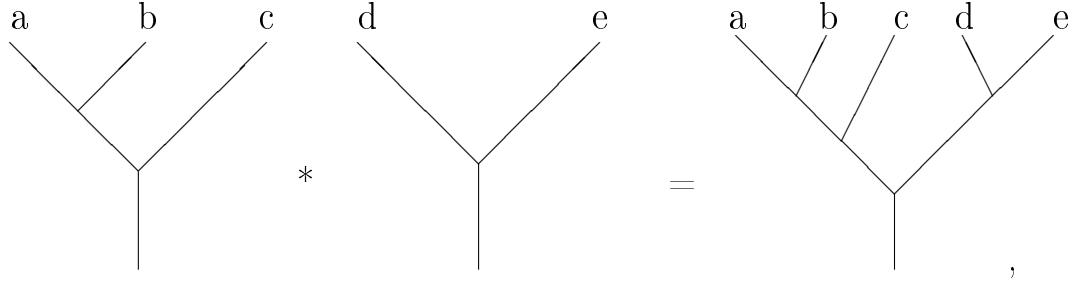
Тогда магма  $(Y, \cdot)$  индуцирует отображение  $\tilde{\mu}: M(Y) \rightarrow Y$ , переводящее

$(T; y_1, \dots, y_{l(T)})$  в  $\mu_T(y_1, \dots, y_{l(T)})$ .<sup>29</sup>

Пусть теперь  $X$  — произвольное множество (не обязательно магма). Рассмотрим

$$M(X) := \coprod_T \{T\} \times X^{l(T)}.$$

Заметим, что на множестве  $M(X)$  есть умножение  $\star$ , индуцированное произведением деревьев  $(T', T'') \mapsto T' * T''$ :



причем, очевидно,  $l(T' * T'') = l(T') + l(T'')$ . Более подробно,

$$(T'; x'_1, \dots, x'_{l(T')}) \star (T''; x''_1, \dots, x''_{l(T'')}) = (T' * T''; x_1, \dots, x_{l(T') + l(T'')}),$$

где  $x_i = x'_i$  при  $1 \leq i \leq l(T')$  и  $x_{l(T') + j} = x''_j$  при  $1 \leq j \leq l(T'')$ . Таким образом,  $(M(X), \star)$  — магма.

Вложение  $i_X: X \subset M(X)$  устроено следующим образом: множество  $\mathcal{J}_1$  состоит из одного дерева  $\tau$ ; элементу  $x \in X$  сопоставляется элемент  $(\tau, x) \in M(X)$ . Отображение  $\psi$ , задается следующей формулой:

$$\psi(T; x_1, \dots, x_{l(T)}) = \mu_T(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{l(T)})).$$

Проверить универсальное свойство построенной пары  $((M(X), \star), i_X)$  предлагается читателю самостоятельно (см. [4]).

Ниже (особенно в главе о сопряжённых функторах во второй части пособия) мы встретимся с другими примерами универсальных объектов (а на рассмотренные примеры посмотрим с новой точки зрения).

<sup>29</sup>читатель, знакомый с операдами, узнает в этом пример алгебры над операдой.

## 1.5 Дуальная категория и произведение категорий

Внимательный читатель мог обратить внимание, что ряд введённых выше понятий (мономорфизма и эпиморфизма, начального и конечного объекта, категорных суммы и произведения) встречались парами, причём можно заметить, что члены пары меняются местами при формальном изменении направления всех стрелок в диаграммах, с помощью которых они определяются. Например, при изменении направлений стрелок диаграммы из определения суммы (1.3) и произведения (1.4) меняются местами. То же можно сказать про диаграммы (1.1) и (1.2) из определений моно- и эпиморфизма. Эти наблюдения можно формализовать при помощи понятия так называемой двойственной, или дуальной категории.

**Определение 10.** Пусть  $\mathcal{C}$  — произвольная категория. Определим *дуальную* категорию  $\mathcal{C}^\circ$  следующим образом:  $\text{Ob}(\mathcal{C}^\circ) = \text{Ob}(\mathcal{C})$  (но для объекта  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  тот же самый объект в двойственной категории будем иногда обозначать через  $X^\circ$ );  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(X^\circ, Y^\circ) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  (морфизму  $\varphi: Y \rightarrow X$  в категории  $\mathcal{C}$  отвечает морфизм  $\varphi^\circ: X^\circ \rightarrow Y^\circ$  в категории  $\mathcal{C}^\circ$ ). Кроме того, предполагаются выполненными следующие условия:

- 1)  $(\varphi \circ \psi)^\circ = \psi^\circ \circ \varphi^\circ$ , т.е. коммутативному треугольнику

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \varphi \circ \psi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ X & & \end{array}$$

в категории  $\mathcal{C}$  отвечает коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} Z & \xleftarrow{\psi^\circ} & Y \\ \psi^\circ \circ \varphi^\circ = (\varphi \circ \psi)^\circ \uparrow & \nearrow \varphi^\circ & \\ X & & \end{array}$$

в категории  $\mathcal{C}^\circ$ ;

- 2)  $(\text{id}_X)^\circ = \text{id}_{X^\circ}$ .

Неформально говоря, двойственная категория  $\mathcal{C}^\circ$  получается из  $\mathcal{C}$  формальной заменой направления всех стрелок на противоположное. Очевидно,  $(\mathcal{C}^\circ)^\circ = \mathcal{C}$ .

**Пример.** Выше мы уже отмечали, что группу  $G$  можно рассматривать как категорию с одним объектом, каждый морфизм в которой обратим. Для произвольной группы  $G$  можно определить так называемую *противоположную* (“opposite” по-английски) группу  $G^\circ$ , множество элементов которой совпадает с множеством элементов группы  $G$ , а умножение определяется как  $g_1 * g_2 := g_2 \cdot g_1$ , где “ $\cdot$ ” обозначает умножение в исходной группе  $G$ . Сопоставление  $g \mapsto g^{-1}$  определяет изоморфизм группы  $G$  с противоположной  $G^\circ$ . Заметим в связи с этим, что не всякая категория изоморфна<sup>30</sup> своей дуальной.

**Задача.** Опишите категорию, дуальную категории, связанной с частично упорядоченным множеством (см. пример  $m$ ) из §1.2).

Любое общекатегорное понятие или утверждение, если его применить к категории  $\mathcal{C}$ , дает в категории  $\mathcal{C}^\circ$  “двойственное” понятие или утверждение, получающееся из исходного “обращением стрелок”. Например, легко видеть, что если  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  — начальный (конечный) объект в категории  $\mathcal{C}$ , то  $X^\circ \in \text{Ob}(\mathcal{C}^\circ)$  — конечный (соотв. начальный) объект в категории  $\mathcal{C}^\circ$ . Далее, если  $X + Y$  — сумма объектов  $X, Y$  в категории  $\mathcal{C}$ , то  $(X + Y)^\circ$  — произведение объектов  $X^\circ, Y^\circ$  в категории  $\mathcal{C}^\circ$ , и наоборот.<sup>31</sup> Последнее легко следует из того, что обращение стрелок в диаграмме для суммы (1.3) дает диаграмму для произведения (1.4), и наоборот. Аналогично, мономорфизм (соотв. эпиморфизм) в категории  $\mathcal{C}$  в дуальной категории  $\mathcal{C}^\circ$  переходит в эпиморфизм (соотв. мономорфизм).

Рассмотрим еще один простой пример конструирования новой категории из заданных — *прямое произведение категорий*, являющееся аналогом операции декартова произведения множеств. А именно, пусть  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  — две категории. Положим

$$\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') = \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}'),$$

<sup>30</sup>морфизмы между категориями называются функторами, их мы определим ниже.

<sup>31</sup>в математике название двойственного понятия часто образуется с помощью приставки “ко”. Например, гомологии — когомологии и т.п. Поэтому категорную сумму в современной литературе часто называют копроизведением.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}'}((X, X'), (Y, Y')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y'),$$

$$(\varphi, \varphi') \circ (\psi, \psi') = (\varphi \circ \psi, \varphi' \circ \psi'), \quad \mathrm{id}_{(X, X')} = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{X'}).$$

Нетрудно проверить, что  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$  является категорией. Данную конструкцию очевидным образом можно обобщить на любое конечное семейство категорий. Легко видеть, что  $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}')^\circ = \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C}'^\circ$ .



## Глава 2

# Функторы

### 2.1 Определение и первые примеры функторов

**Определение 11.** *Функтор* из категории  $\mathcal{C}$  со значениями в категории  $\mathcal{D}$  (обозначение:  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ) состоит из следующих данных:

- а) отображения  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ ,  $X \mapsto F(X)$ ;
- б) для каждой упорядоченной пары объектов  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  отображения множеств

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$

$$\{f: X \rightarrow Y\} \mapsto \{F(f): F(X) \rightarrow F(Y)\},$$

причем

- (i) функтор сохраняет тождественные морфизмы:  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ , и
- (ii) функтор сохраняет композицию морфизмов: для любых  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  имеет место равенство  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ .

Заметим, что теоретико-множественная композиция функторов  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$  есть функтор  $\mathcal{C} \xrightarrow{GF} \mathcal{E}$ . Имеется также очевидный *тождествен-*

ный функтор  $\text{id}_{\mathcal{C}}$ . Это позволяет рассматривать любое множество категорий как категорию с функторами в качестве морфизмов.<sup>1</sup>

В частном случае, когда категории  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  имеют по одному объекту, и таким образом (как мы уже знаем), по-существу, являются моноидами, функтор между ними — то же самое, что гомоморфизм моноидов. Из определения легко видеть, что функторы изоморфизмы переводят в изоморфизмы (подобно тому как гомоморфизмы моноидов обратимые элементы переводят в обратимые). В то же время функторы не обязаны сохранять другие известные нам типы морфизмов — моно- и эпиморфизмы (приведите соответствующие примеры).

**Задача.** Пусть  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  — категории, связанные с частично упорядоченными множествами (см. пример *m*) на стр. 19). Опишите функторы из  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{D}$  в терминах отображений частично упорядоченных множеств.

**Задача.** Напомним, что категория  $\mathcal{C}$  с единственным объектом, в которой всякий морфизм является обратимым, по-существу, просто группа. 1) Что такое с этой точки зрения функтор  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Vect}$ ? Функтор  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ ? 2) Попробуйте предложить определение линейного представления группоида. Действия группоида.

**Примеры. а) Функторы забывания.** Большой класс тривиальных примеров функторов получается так: нужно перестать учитывать одну или несколько структур, имеющих на объектах исходной категории. Так получаются функторы “множество элементов”:

$$\text{Top}, \text{Diff}, \text{Gr}, \text{Ab}, \text{Vect}_k, \text{Alg}_k \rightarrow \text{Set},$$

а также функторы

$$\text{Diff} \rightarrow \text{Top}, \text{PTop} \rightarrow \text{Top}, {}_R\text{Mod} \rightarrow \text{Ab}, \text{Alg}_k \rightarrow \text{Vect}_k \quad \text{и т.д.}$$

В первом из последней группы примеров мы забываем дифференцируемую структуру, т.е. рассматриваем дифференцируемое многообразие просто как топологическое пространство (заметим, что гладкое отобра-

---

<sup>1</sup>заметим, что эта категория имеет ещё дополнительную структуру — в ней определены “морфизмы между морфизмами” (называемые функторными морфизмами или естественными преобразованиями), что превращает её в т.н. 2-катеорию.

жение непрерывно!), во втором — забываем отмеченную точку, в третьем — забываем про умножение элементов модуля  $M \in \text{Ob}({}_R\mathcal{M}od)$  на элементы кольца, кроме умножения на кратные единичного элемента  $n1_R$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , что дает на множестве элементов  $M$  структуру  $\mathbb{Z}$ -модуля, т.е. абелевой группы, в четвёртом — ассоциативной алгебре с единицей над фиксированным полем  $k$  мы сопоставляем её “подстилающее” векторное пространство (то есть забываем про умножение). Читатель, наверное, сможет привести немало других аналогичных примеров забывающих функторов.

**б) Функторы свободы.** Понятие функторов свободы мы формализуем в конце этого параграфа, а пока рассмотрим конкретные их примеры. На странице 37 в примере d) мы определили понятие группы, свободно порождённой множеством  $S$ . Покажем, что сопоставление  $S \mapsto F_S$  (определённое на объектах) продолжается до функтора  $F: \mathcal{S}et \rightarrow \mathcal{G}r$  (т.е. продолжается на морфизмы).

Пусть  $\psi: S \rightarrow S'$  — некоторый морфизм в категории  $\mathcal{S}et$ ,  $i_S: S \rightarrow F_S$ ,  $i_{S'}: S' \rightarrow F_{S'}$  — соответствующие универсальные отображения. Применяя универсальное свойство свободной группы  $(F_S, i_S)$ , выраженное диаграммой (1.7), к отображению  $i'_{S'} \circ \psi: S \rightarrow F_{S'}$ , получаем что существует, и притом единственный гомоморфизм групп  $\varphi: F_S \rightarrow F_{S'}$ , превращающий диаграмму (ср. диаграмму (1.7))

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i_S} & F_S \\ i_{S'} \circ \psi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ F_{S'} & & \end{array}$$

в коммутативную. Определим функтор  $F$  на морфизме  $\psi: S \rightarrow S'$  как  $F(\psi) := \varphi: F_S \rightarrow F_{S'}$ . По определению,  $F(\psi)$  — единственный гомоморфизм групп, который делает диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\psi} & S' \\ i_S \downarrow & & \downarrow i_{S'} \\ F_S & \xrightarrow{F(\psi)} & F_{S'} \end{array} \quad (2.1)$$

коммутативной.

Проверим, что тем самым мы действительно определили некоторый функтор  $F: \mathcal{S}et \rightarrow \mathcal{G}r$ . Если  $\psi = \text{id}_S$  (в частности, тогда  $S' =$

$S, F_{S'} = F_S)$ , то  $i_{S'} \circ \psi = i_S$  и  $\varphi = \text{id}_{F_S}$  делает соответствующую диаграмму (2.1) коммутативной. В силу единственности такого  $\varphi$  имеем  $F(\text{id}_S) = \text{id}_{F_S}$ . Проверим теперь соотношение  $F(\chi \circ \psi) = F(\chi) \circ F(\psi)$  для  $\psi: S \rightarrow S', \chi: S' \rightarrow S''$ . Для этого рассмотрим следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\psi} & S' & \xrightarrow{\chi} & S'' \\ i_S \downarrow & & i'_{S'} \downarrow & & i_{S''} \downarrow \\ F_S & \xrightarrow{F(\psi)} & F_{S'} & \xrightarrow{F(\chi)} & F_{S''} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\chi \circ \psi} & S'' \\ i_S \downarrow & & i''_{S''} \downarrow \\ F_S & \xrightarrow{F(\chi \circ \psi)} & F_{S''}. \end{array}$$

Из коммутативности первой диаграммы следует, что если заменить нижнюю стрелку в правой диаграмме (т.е.  $F(\chi \circ \psi)$ ) на  $F(\chi) \circ F(\psi)$ , то правая диаграмма останется коммутативной. В силу единственности такого гомоморфизма  $F(\chi \circ \psi) = F(\chi) \circ F(\psi)$ .

Заметим, что доказательство того, что  $F$  является функтором, основано только на универсальном свойстве свободной группы. Аналогично строятся соответствующие функторы  $\mathcal{S}et \rightarrow \mathcal{A}b, \mathcal{S}et \rightarrow \mathcal{V}ect_k$  и  $\mathcal{S}et \rightarrow \mathcal{A}lg_k$ .

Другой пример функтора свободы даёт свободная магма (см. пример г) из §1.4): сопоставление  $X \mapsto (M(X), \star)$  продолжается до функтора  $F: \mathcal{S}et \rightarrow \mathcal{M}$  в категорию магм  $\mathcal{M}$ .

И, наконец, рассмотрим ещё один пример функтора свободы, на первый взгляд, непохожий на предыдущие. Определим функтор  $F: \mathcal{S}et \rightarrow \mathcal{T}op$ , который множеству  $S$  сопоставляет топологическое пространство  $F(S)$ , являющееся множеством  $S$  с дискретной топологией (все подмножества открыты).

**Задача.** Проверить, что сопоставление  $S \mapsto F(S)$  продолжается до функтора  $F: \mathcal{S}et \rightarrow \mathcal{T}op$ .

**с) Тензорные степени.** Тензорное произведение  $r$  векторных пространств над полем  $k$  (см. пример f) в §1.4) определяет функтор  $\underbrace{\mathcal{V}ect_k \times \dots \times \mathcal{V}ect_k}_{r \text{ сомножителей}} \rightarrow \mathcal{V}ect_k$ . С помощью него можно определить функтор  $T^r: \mathcal{V}ect_k \rightarrow \mathcal{V}ect_k$   $r$ -й тензорной степени, который является композицией диагонального функтора  $\mathcal{V}ect_k \rightarrow \underbrace{\mathcal{V}ect_k \times \dots \times \mathcal{V}ect_k}_{r \text{ сомножителей}}$  и функтора тензорного произведения.

Более подробно, пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $k$ . Напомним (см. пример f) в §1.4), что существует универсальное полилинейное отображение

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{r \text{ сомножителей}} \xrightarrow{\tau} \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r \text{ сомножителей}} =: T^r(V)$$

в  $T^r(V)$  —  $r$ -ю тензорную степень. Покажем, что сопоставление  $V \mapsto T^r(V)$  продолжается до функтора  $T^r: \mathcal{Vect}_k \rightarrow \mathcal{Vect}_k$ . Другими словами, нам нужно продолжить  $T^r$  на морфизмы: всем линейным отображениям  $f: V \rightarrow W$  нам нужно “функториально” сопоставить соответствующие линейные отображения  $T^r(f): T^r(V) \rightarrow T^r(W)$ . Для этого мы снова воспользуемся универсальным свойством пары  $(T^r(V), \tau)$ , применённому к полилинейному отображению  $\tau_W \circ (f \times \dots \times f): V \times \dots \times V \rightarrow T^r(W)$ :

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{\tau_V} & T^r(V) \\ f \times \dots \times f \downarrow & & \downarrow T^r(f) \\ W \times \dots \times W & \xrightarrow{\tau_W} & T^r(W), \end{array}$$

что определяет искомое отображение  $T^r(f)$ . Заметим, что из коммутативности диаграммы следует, что  $T^r(f)(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_r)$  для любого разложимого тензора  $v_1 \otimes \dots \otimes v_r$ , что полностью определяет линейное отображение  $T^r(f)$  (поскольку разложимые тензоры содержат базис). Легко проверить, что, определив указанным способом  $T^r$  на объектах и морфизмах, мы действительно получили функтор из  $\mathcal{Vect}_k$  в себя.

Можно также показать, что сопоставление  $V \mapsto T(V)$  векторному пространству его тензорной алгебры (см. пример g) в §1.4) продолжается до функтора  $\mathcal{Vect}_k \rightarrow \mathcal{Alg}_k$  в категорию ассоциативных алгебр с единицей над полем  $k$ .

**d) Фактормножество и т.п.** Рассмотрим категорию  $\mathcal{C}$ , объектами которой являются пары  $(X, \alpha)$ , состоящие из множества  $X$  и отношения эквивалентности  $\alpha$  на нём. Морфизм  $(X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta)$  — это такое отображение множеств  $f: X \rightarrow Y$ , что из  $x\alpha x'$  следует  $f(x)\beta f(x')$  для любых  $x, x' \in X$ .

**Задача.** Докажите, что сопоставление  $(X, \alpha) \mapsto X/\alpha$  паре  $(X, \alpha)$  соответствующего фактормножества  $X/\alpha$  продолжается до функтора

$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ . Аналогично случаю фактормножеств рассмотрите факторпространства и факторгруппы (см. примеры  $h$ ),  $i$ ) из §1.4).

**е) Алгебры Клиффорда.** Алгебра Клиффорда (см. пример  $j$ ) из § 1.4) функториально зависит от пары  $(V, Q)$ . Более точно, если  $f: V \rightarrow V'$  — такое линейное отображение  $k$ -векторных пространств, что  $Q'(f(v)) = Q(v)$ , где  $Q$  (соответственно  $Q'$ ) — квадратичная форма на  $V$  (соответственно на  $V'$ ), то  $f$  индуцирует гомоморфизм алгебр  $C(f): C(V, Q) \rightarrow C(V', Q')$  и имеют место тождества  $C(g \circ f) = C(g) \circ C(f)$ ,  $C(\text{id}_V) = \text{id}_{C(V)}$ .

Таким образом, алгебра Клиффорда определяет функтор из категории  $\mathcal{C}$ , объектами которой являются пары  $(V, Q)$ , а морфизмы  $(V, Q) \rightarrow (V', Q')$  — линейные отображения  $f: V \rightarrow V'$ , такие что  $Q'(f(v)) = Q(v)$ , в категорию  $\mathcal{Alg}_k$ .<sup>2</sup>

**ф) Универсальная обёртывающая алгебра.** Можно показать, что универсальная обёртывающая алгебра (см. пример  $k$ ) из §1.4) определяет функтор  $\mathcal{Lie}_k \rightarrow \mathcal{Alg}_k$  из категории алгебр Ли  $\mathcal{Lie}_k$  над  $k$  в категорию ассоциативных унитарных алгебр  $\mathcal{Alg}_k$  над тем же самым полем.

**г) Поле частных.** Пусть  $\mathcal{C}$  — категория, объектами которой являются целостные кольца, а морфизмами — *инъективные гомоморфизмы колец*.<sup>3</sup> Пусть  $\mathcal{D}$  — категория всех полей и кольцевых гомоморфизмов (напомним, что произвольный гомоморфизм полей является *вложением*). Можно показать, что сопоставление произвольному целостному кольцу  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  его поля частных  $\text{Quot}(A) \in \mathcal{D}$  (см. пример  $l$ ) из §1.4) может быть продолжено до функтора  $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Действительно, это легко вытекает из того, что для любого мономорфизма  $\varphi: A \rightarrow B$  целостных колец существует и единствен гомоморфизм полей  $Q(\varphi): \text{Quot}(A) \rightarrow \text{Quot}(B)$ , ограничение которого на подкольца  $A \subset \text{Quot}(A)$ ,  $B \subset \text{Quot}(B)$  совпадает с  $\varphi$ , что, в свою очередь, следует

<sup>2</sup>Заметим, что, более точно, алгебра Клиффорда — функтор в категорию  $\mathbb{Z}/2$ -градуированных ассоциативных унитарных  $k$ -алгебр ( $\mathbb{Z}/2$ -градуированные алгебры иначе называются *супералгебрами*). Это важно, в частности, при рассмотрении тензорных произведений: например, алгебра Клиффорда  $C(V \oplus V', Q \oplus Q')$  естественно изоморфна  $C(V, Q) \hat{\otimes} C(V', Q')$ , где  $\hat{\otimes}$  обозначает тензорное произведение в категории  $\mathbb{Z}/2$ -градуированных алгебр, см. [5].

<sup>3</sup>читателю предлагается доказать, что в данной категории инъективные гомоморфизмы совпадают с *мономорфизмами* (указание: использовать то, что  $\mathbb{Z}$  — свободный объект с одной образующей).

из универсального свойства.

**h) Абелианизация.** Сопоставление  $G \mapsto G^{ab}$  (см. пример m) из §1.4) продолжается до функтора  $F: \mathcal{G}r \rightarrow \mathcal{A}b$ . Для этого, в частности, нужно определить его на морфизмах, то есть для любого гомоморфизма групп  $\varphi: G \rightarrow H$  нужно задать соответствующий гомоморфизм абелевых групп  $F(\varphi): G^{ab} \rightarrow H^{ab}$  и проверить выполнение условий из определения функтора.

**Задача.** Используя универсальное свойство абелианизации, задайте  $F$  на морфизмах и докажите, что действительно получается функтор  $F: \mathcal{G}r \rightarrow \mathcal{A}b$ .

**i) Мультипликативная группа.** Пусть  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A}lg_k)$  — ассоциативная унитарная алгебра над полем  $k$ ,  $A^\times$  — её мультипликативная группа (то есть группа обратимых относительно умножения элементов  $A$ ). Легко видеть, что сопоставление  $A \mapsto A^\times$  продолжается до функтора  $\mathcal{A}lg_k \rightarrow \mathcal{G}r$ . Действительно, нетрудно убедиться в том, что при гомоморфизме алгебр  $A \rightarrow B$  обратимые элементы из  $A$  отображаются в обратимые элементы в  $B$ , то есть любой такой гомоморфизм индуцирует гомоморфизм мультипликативных групп  $A^\times \rightarrow B^\times$ .

**j) Групповая алгебра.** Групповая алгебра (см. пример n) из §1.4) определяет функтор  $\mathcal{G}r \rightarrow \mathcal{A}lg_k$ .

**к) Симметризация коммутативного моноида.** Симметризация коммутативного моноида (см. пример o) из §1.4) определяет функтор  $S: \mathcal{M}on \rightarrow \mathcal{A}b$ , где  $\mathcal{M}on$  — категория коммутативных моноидов. Напомним, что симметризация моноида  $M$  — это пара, состоящая из абелевой группы  $S(M)$  и гомоморфизма подстилающих моноидов  $\alpha_M: M \rightarrow S(M)$ , для которой выполнено соответствующее универсальное свойство.

Группа  $S(M)$  функториально зависит от  $M$  в следующем смысле: если  $\varphi: M \rightarrow N$  — гомоморфизм моноидов, то универсальное свойство позволяет нам определить единственный гомоморфизм групп  $S(\varphi): S(M) \rightarrow S(N)$ , который превращает диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \alpha_M \downarrow & & \downarrow \alpha_N \\ S(M) & \xrightarrow{S(\varphi)} & S(N) \end{array}$$

в коммутативную (нужно просто применить универсальное свойство к гомоморфизму  $\alpha_N \circ \varphi: M \rightarrow S(N)$ ). Кроме того,  $S(\psi \circ \varphi) = S(\psi) \circ S(\varphi)$  и  $S(\text{id}_M) = \text{id}_{S(M)}$ . Таким образом,  $S$  действительно является функтором из категории коммутативных моноидов  $\mathcal{Mon}$  в категорию абелевых групп  $\mathcal{Ab}$ .

**l) Пополнение метрического пространства.** Пополнение метрического пространства (см. пример p) из §1.4) определяет функтор  $\mathcal{Met} \rightarrow \mathcal{Commet}$  из категории метрических пространств  $\mathcal{Met}$  (с изометриями в качестве морфизмов) в категорию *полных* метрических пространств  $\mathcal{Commet}$  (с теми же морфизмами).

**m) Компактификация Стоуна-Чеха.** Компактификация Стоуна-Чеха (см. пример q) из §1.4) определяет функтор  $\beta: \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{CHaus}$  из категории топологических пространств  $\mathcal{Top}$  в категорию компактных хаусдорфовых пространств  $\mathcal{CHaus}$  (с непрерывными отображениями в качестве морфизмов).

**n) Проекция на факторкатегорию.** Напомним, что в примере o) на стр. 20 по данной категории  $\mathcal{C}$  и по отношению конгруэнтности на ней  $R$  была построена факторкатегория  $\mathcal{C}/R$ . Существует канонический функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/R$ , тождественный на объектах и сопоставляющий морфизму из  $\mathcal{C}$  его класс эквивалентности. В действительности, мы уже использовали функтор  $F: \mathcal{Top} \rightarrow h\mathcal{Top}$  такого типа в диаграмме (2.4).

**o) Функторы морфизмов.** Last but not least, рассмотрим ещё один важный класс функторов. Пусть  $\mathcal{C}$  — некоторая категория и  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  — её объект. Совершенно особую роль играют функторы  $h'_X: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ , определяемые следующим образом:

$$h'_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

$$h'_X(f)(\varphi) = f \circ \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y'), \quad \text{где } \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \quad f: Y \rightarrow Y'.$$

Иными словами, объекту  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  он сопоставляет множество  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{Set})$ , а морфизму  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y')$  — отображение множеств  $h'_X(f): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y')$ , которое ставит в соответствие морфизму  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  композицию  $f \circ \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y')$ .

Несложная проверка того, что  $h'_X$  — действительно функтор, оставляется читателю.



**Определение 12.** Функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  называется *строгим*, если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  отображение

$$F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

является вложением множеств, и *полным*, если оно является сюръективным.

Например, вложение полной подкатегории  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  является строгим и полным функтором. Обратно, можно показать, что всякий строгий и полный функтор получается таким образом. С другой стороны, забывающий функтор  $F$  из категории  $\mathcal{A}b$  в категорию  $\mathcal{S}et$  является строгим но не полным. Строгим он является потому, что два гомоморфизма групп равны, если они совпадают как отображения множеств. Неполнота функтора  $F$  вытекает из того, что не всякое отображение множеств элементов групп происходит из некоторого гомоморфизма. Например, если  $\mathbb{Z}_2$  есть группа из двух элементов, то пусть  $F(\mathbb{Z}_2) = \{0, 1\}$  — множество из двух элементов, и отображение из  $\{0, 1\}$  в себя, отображающее 0 в 1, а 1 в 0, не принадлежит образу  $F$ , поскольку любой гомоморфизм групп сохраняет единицу. То же верно и для забывающих функторов из категорий топологических пространств  $\mathcal{T}op$ , всех групп  $\mathcal{G}r$ , колец  $\mathcal{R}ing$ , в категорию  $\mathcal{S}et$ .

**Определение 13.** *Конкретной категорией* называется пара  $(\mathcal{C}, U)$ , состоящая из категории  $\mathcal{C}$  и строгого функтора  $U: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ .

Многие рассмотренные нами категории (такие как  $\mathcal{T}op$ ,  $\mathcal{D}iff$ ,  $\mathcal{G}r$ ,  $\mathcal{A}b$ ,  $\mathcal{R}ing$ ,  $\mathcal{A}lg_k$ ,  $\mathcal{V}ect_k$ ) можно рассматривать как конкретные, взяв в качестве  $U$  соответствующий забывающий функтор в  $\mathcal{S}et$ .<sup>4</sup>

**Задача.** Пусть  $(\mathcal{C}, U)$  — конкретная категория,  $\varphi$  — морфизм в  $\mathcal{C}$ . Тогда если  $U(\varphi)$  — инъективное отображение, то  $\varphi$  — мономорфизм, а если  $U(\varphi)$  — сюръективное отображение, то  $\varphi$  — эпиморфизм.

Так как функторы изоморфизмы переводят в изоморфизмы, то если  $\varphi$  — изоморфизм в конкретной категории  $(\mathcal{C}, U)$ , то  $U(\varphi)$  — биекция. Обратное верно не всегда. Конкретная категория  $(\mathcal{C}, U)$  называется *уравно-*

---

<sup>4</sup>Заметим, что не все категории являются конкретными: в частности, примером неконкретной категории является гомотопическая категория.

вешенной, если для любого её морфизма  $\varphi$  из того, что  $U(\varphi)$  — биекция, следует, что  $\varphi$  — изоморфизм.

Например, конкретная категория  $(\mathcal{T}op, U)$  не является уравновешенной, а её полная подкатегория  $(\mathcal{CH}Top, U)$  — является (по теореме П.С. Александрова). По теореме Банаха об обратном операторе уравновешенной является также категория банаховых пространств с ограниченными операторами в качестве морфизмов.

**Задача.** Является ли уравновешенной категория гладких многообразий?

Следующее определение представляет собой категорную формализацию понятия базиса. Например, в случае векторных пространств базис может быть охарактеризован следующим свойством: если  $S$  — такое подмножество векторного пространства  $V$ , что любое отображение  $S \rightarrow W$  в векторное пространство  $W$  (над тем же полем) продолжается до единственного линейного отображения  $V \rightarrow W$ , то  $S$  — базис в  $V$ .

**Определение 14.** Пусть  $(\mathcal{C}, U)$  — конкретная категория,  $X$  — объект в  $\mathcal{C}$ . Подмножество  $S \subset U(X)$  называется *базисом* объекта  $X$ , если для любых  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и отображения  $\varphi: S \rightarrow U(Y)$  существует единственный морфизм  $\psi: X \rightarrow Y$  в категории  $\mathcal{C}$  такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & U(X) \\ \varphi \downarrow & \swarrow U(\psi) & \\ U(Y), & & \end{array}$$

в которой  $i$  — естественное вложение подмножества  $S$ , коммутативна. Объект в  $\mathcal{C}$ , обладающий базисом, называется *свободным*.

**Задача.** Укажите свободные объекты (вместе с базисами) в категориях  $\mathcal{Vect}_k$ ,  $\mathcal{Gr}$ ,  $\mathcal{Ab}$ ,  $\mathcal{Alg}_k$ ,  $\mathcal{T}op$ .

**Определение 15.** Функтор  $F: \mathcal{Set} \rightarrow \mathcal{C}$ , где  $(\mathcal{C}, U)$  — конкретная категория, называется *функтором свободы*, если каждому объекту  $S \in \mathcal{Set}$  он сопоставляет свободный объект  $F(S)$  с базисом  $S$ , а каждому отображению  $\varphi: S \rightarrow T$  — единственный морфизм  $F(\varphi): F(S) \rightarrow F(T)$ ,

превращающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} UF(S) & \xrightarrow{UF(\varphi)} & UF(T) \\ i_S \uparrow & & \uparrow i_T \\ S & \xrightarrow{\varphi} & T \end{array} \quad (2.2)$$

в категории  $\mathcal{Set}$ , в которой  $i_S, i_T$  — естественные вложения, в коммутативную.

**Задача.** Докажите, что функтор свободы корректно определён, если для всякого множества  $S$  существует (хотя бы один) объект в  $\mathcal{C}$  с базисом  $S$ . Указание: покажите, что в этом случае рассмотренный в определении морфизм  $F(\varphi)$  существует и единствен.

Подобно “частично забывающим” функторам, рассмотренным в примере а) выше, существуют так называемые функторы относительной свободы, действующие в обратном направлении. Например, частично забывающему функтору  $\mathcal{Alg}_k \rightarrow \mathcal{Vect}_k$  соответствует функтор “тензорная алгебра векторного пространства”  $\mathcal{Vect}_k \rightarrow \mathcal{Alg}_k$  (см. конец примера с) выше). Оказывается, забывающие функторы и функторы свободы тесно связаны, для описания этой связи требуется понятие сопряжённой пары функторов.

## 2.2 Примеры функторов из топологии

**а) Компоненты линейной связности.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Рассмотрим на  $X$  следующее отношение  $\sim$ , полагая, что  $x \sim y$  в том и только том случае, когда существует *путь* из  $x$  в  $y$  — непрерывное отображение  $f: I \rightarrow X$  интервала  $I = [0, 1]$  в пространство  $X$  такое, что  $f(0) = x, f(1) = y$  (в этом случае говорят, что точки  $x$  и  $y$  “можно соединить путём”  $f$ ). Очевидно, что  $\sim$  является отношением эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначим через  $\pi_0(X)$ . Элементы множества  $\pi_0(X)$  называются *компонентами линейной связности* или *0-компонентами* пространства  $X$ .<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>топологическое пространство  $X$  называется *линейно связным*, если множество  $\pi_0(X)$  состоит не более чем из одного элемента.

Пусть  $\varphi: X \rightarrow Y$  — произвольное непрерывное отображение. Тогда  $\varphi$  переводит 0-компоненты пространства  $X$  в 0-компоненты пространства  $Y$  (действительно, если путь  $f$  соединяет точки  $x$  и  $y$  в  $X$ , то путь  $\varphi \circ f: I \rightarrow Y$  соединяет точки  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$  в  $Y$ ) и, следовательно, определяет отображение  $\pi_0(\varphi): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ . Немедленно проверяется, что  $\pi_0(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_0(X)}$  и что  $\pi_0(\psi \circ \varphi) = \pi_0(\psi) \circ \pi_0(\varphi)$  для непрерывного отображения  $\psi: Y \rightarrow Z$ . Таким образом,  $\pi_0$  представляет собой функтор  $\mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{S}et$ .

Можно дать несколько другое описание функтора  $\pi_0(X)$ . Обозначим через  $*$  пространство, состоящее ровно из одной точки. Мы утверждаем, что *существует естественная биекция*

$$\text{Hom}_{h\mathcal{T}op}(*, X) \leftrightarrow \pi_0(X), \quad (2.3)$$

задаваемая правилом  $[\varphi] \mapsto \{0\text{-компонента точки } \varphi(*)\}$ , где  $[\varphi] \in \text{Hom}_{h\mathcal{T}op}(*, X)$  — гомотопический класс отображения  $\varphi$ .<sup>6</sup> Для доказательства заметим, что существует взаимно однозначное соответствие между отображениями  $\varphi: * \rightarrow X$  и точками пространства  $X$ , задаваемое формулой  $\varphi \mapsto \varphi(*)$ . Отображения  $\varphi$  и  $\psi$  из  $*$  в  $X$  гомотопны тогда и только тогда, когда  $\varphi(*)$  и  $\psi(*)$  лежат в одной и той же компоненте линейной связности пространства  $X$ .

Множество  $\text{Hom}_{h\mathcal{T}op}(*, X)$  является функцией от  $X$ : непрерывное отображение  $X \rightarrow Y$  индуцирует отображение множеств  $\text{Hom}_{h\mathcal{T}op}(*, X) \rightarrow \text{Hom}_{h\mathcal{T}op}(*, Y)$ , что определяет соответствующий функтор на морфизмах.

Легко видеть, что *гомотопные отображения*  $X \rightarrow Y$  индуцируют одинаковые отображения множеств  $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ , т.е.  $\pi_0$  определяет также функтор  $\pi_0^h: h\mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{S}et$ .

Связь между функторами  $\pi_0$  и  $\pi_0^h$  можно описать следующим образом. Во-первых, определим функтор  $F: \mathcal{T}op \rightarrow h\mathcal{T}op$ , который тождествен на объектах и для произвольного непрерывного отображения  $\varphi: X \rightarrow Y$  пусть  $F(\varphi) = [\varphi]$  — гомотопический класс  $\varphi$  (см. пример п) в предыдущем параграфе). Тогда соотношение между функторами  $\pi_0$  и

---

<sup>6</sup>напомним, что морфизмы в гомотопической категории  $h\mathcal{T}op$  — гомотопические классы непрерывных отображений.

$\pi_0^h$  иллюстрируется диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}op & & \\ F \downarrow & \searrow \pi_0 & \\ h\mathcal{T}op & \xrightarrow{\pi_0^h} & \mathcal{S}et. \end{array} \quad (2.4)$$

В этом случае говорят, что функтор  $\pi_0$  пропускается (или факторизуется) через функтор  $\pi_0^h: h\mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{S}et$ , или ещё что функтор  $\pi_0$  является *гомотопически инвариантным*, или, коротко, *гомотопическим*.

**Задача.** Подумайте, каким универсальным свойством обладает отображение  $X \rightarrow \pi_0(X)$  для “достаточно хороших”<sup>7</sup> пространств.

**Задача.** Докажите, что функтор  $\pi_0$  категорное произведение переводит в категорное произведение, то есть  $\pi_0(X \times Y) \cong \pi_0(X) \times \pi_0(Y)$ . А как обстоят дела с суммой?

Напомним, что в примере а') в §1.3 мы определили модификацию  $\mathcal{PT}op$  категории  $\mathcal{T}op$  — категорию пространств с отмеченными точками. Определим соответствующую модификацию  $h\mathcal{PT}op$  гомотопической категории  $h\mathcal{T}op$ , рассматриваемые гомотопии в которой обязаны сохранять отмеченные точки. Другими словами, два морфизма  $\varphi, \psi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  в  $\mathcal{PT}op$ <sup>8</sup> определяют один и тот же морфизм в  $h\mathcal{PT}op$ , если существует такое непрерывное отображение  $\Phi: X \times I \rightarrow Y$ , что

$$\Phi|_{X \times \{0\}} = \varphi, \quad \Phi|_{X \times \{1\}} = \psi \quad \text{и} \quad \Phi|_{\{x_0\} \times I} = \omega_0,$$

где  $\omega_0$  — постоянный путь  $\omega_0: I \rightarrow Y$ ,  $\omega_0(t) = y_0 \forall t \in I$ .

Теперь мы хотим определить соответствующую модификацию функтора  $\pi_0$  на категорию  $\mathcal{PT}op$ , который обозначим тем же символом  $\pi_0$  (так как всегда из контекста ясно, какая версия (с отмеченными точками или без них) функтора  $\pi_0$  рассматривается). Наш новый функтор будет принимать значения не в “обычной” категории множеств  $\mathcal{S}et$ , а в категории “пунктированных” множеств  $\mathcal{PSet}$  — множеств с отмеченным элементом (и с отображениями, сохраняющими отмеченный элемент, в качестве морфизмов). В качестве отмеченного элемента множества  $\pi_0(X, x_0)$  берётся, естественно, компонента связности отмеченной

<sup>7</sup> локально линейно связных.

<sup>8</sup> напомним, что это — такие непрерывные отображения  $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$  что  $\varphi(x_0) = y_0 = \psi(x_0)$ .

точки  $x_0$ . Легко видеть, что тем самым мы действительно получаем гомотопически инвариантный функтор  $\pi_0: \mathcal{PTop} \rightarrow \mathcal{PSet}$ .

Чтобы получить аналог биекции (2.3) вместо одноточечного пространства  $*$  возьмём 0-мерную сферу  $S^0$ , которая состоит из двух точек<sup>9</sup>, одну из которых (скажем, 1) мы возьмём в качестве отмеченной и обозначим через  $s_0$ . Тогда имеем естественную биекцию

$$\text{Hom}_{h\mathcal{PTop}}((S^0, s_0), (X, x_0)) \leftrightarrow \pi_0(X, x_0) \quad (2.5)$$

(ср. (2.3)).

**б) Пространства путей и петель.** Пусть  $X$  и  $Y$  — топологические пространства, а  $X^Y$  обозначает пространство всех непрерывных отображений  $f: Y \rightarrow X$ , наделяемое *компактно-открытой* топологией. Компактно-открытая топология на  $X^Y$  определяется следующим образом: ее предбаза открытых множеств образована множествами  $M(K, U) := \{f \in X^Y \mid f(K) \subset U\}$ , где  $K$  пробегает компактные подмножества в  $Y$ , а  $U$  — открытые подмножества в  $X$ . Таким образом, база топологии для  $X^Y$  состоит из множеств отображений, переводящих конечное число компактных подмножеств  $K_i \subset Y$  в соответствующие открытые подмножества  $U_i \subset X$ . Некоторые важные свойства компактно-открытой топологии сформулированы в Добавлении 1.

Пусть теперь  $X$  — пространство с отмеченной точкой  $x_0$ . Определим *пространство путей*  $PX$  пространства  $X$  с отмеченной точкой  $x_0 \in X$  как *подпространство* в  $X^I$ , состоящее из всех непрерывных отображений  $f: I \rightarrow X$  интервала  $I = [0, 1]$  в  $X$  таких, что  $f(0) = x_0$  (т.е. путь — это морфизм  $(I, 0) \rightarrow (X, x_0)$  в категории  $\mathcal{PTop}$ , где  $0 \in I$  рассматривается в качестве отмеченной точки). Таким образом,  $PX$  также наделяется компактно-открытой топологией. В качестве отмеченной точки в  $PX$  рассмотрим постоянный путь  $\omega_0: I \rightarrow X$ , отображающий весь отрезок  $I$  в отмеченную точку  $x_0$ . Так как любое отображение  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{PTop}}((X, x_0), (Y, y_0))$  вместе с любым путем  $f: (I, 0) \rightarrow (X, x_0)$  определяют путь  $\varphi \circ f: (I, 0) \rightarrow (Y, y_0)$ , то  $\varphi$  опре-

---

<sup>9</sup> $n$ -мерная сфера единичного радиуса с центром в начале координат в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  задаётся уравнением  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ , поэтому 0-мерная сфера  $S^0$  — множество решений уравнения  $x^2 = 1$ , то есть две точки  $x = \pm 1$ .

деляет некоторое отображение

$$P\varphi: (PX, \omega_0) \rightarrow (PY, \omega'_0), \quad P\varphi(f) = \varphi \circ f$$

(где  $\omega'_0$  — постоянный путь в  $y_0$ ), которое, легко проверить, непрерывно. Отсюда легко вывести, что  $P: (X, x_0) \mapsto (PX, \omega_0)$  — функтор из категории  $\mathcal{PTor}$  в себя.

Определим также подпространство  $\Omega X$  в  $PX$ , состоящее из таких отображений  $f: I \rightarrow X$ , что  $f(0) = f(1) = x_0$  (или, эквивалентно, пространство отображений  $f: (S^1, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  в категории  $\mathcal{PTor}$ , где  $(S^1, s_0)$  — окружность с отмеченной точкой), наделенное компактно-открытой топологией. Это пространство называется *пространством петель* и тоже определяет функтор  $\Omega: (X, x_0) \mapsto (\Omega X, \omega_0)$  из категории  $\mathcal{PTor}$  в себя.

Функторы  $P$  и  $\Omega$  естественно переносятся в гомотопическую категорию  $h\mathcal{PTor}$ .

Пространства петель  $\Omega X$  обладают рядом специальных свойств, в частности, они снабжены некоторым замечательным непрерывным отображением  $\mu: \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$ , определяемым следующим образом:  $\mu(g, f) = g \cdot f$ , где  $\cdot$  — определённая в Добавлении 2 композиция путей. Напомним, что  $g \cdot f$  — петля, определяемая правилом

$$(g \cdot f)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{если } 0 \leq s \leq 1/2; \\ g(2s - 1), & \text{если } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

**Лемма 16.** Отображение  $\mu$  непрерывно.

*Доказательство.* Рассмотрим отображение  $m: \Omega X \times \Omega X \times I \rightarrow X$ , заданное формулой  $m(g, f, s) = (g \cdot f)(s)$ . Пусть  $m_1$  — ограничение  $m$  на  $\Omega X \times \Omega X \times [0, 1/2]$ , а  $m_2$  — на  $\Omega X \times \Omega X \times [1/2, 1]$ . Непрерывность отображений  $m_1(g, f, s) = f(2s)$  и  $m_2(g, f, s) = g(2s - 1)$  легко вывести из п. а) Теоремы 18 в Добавлении 1, а так как они согласованы на пересечении  $\Omega X \times \Omega X \times \{1/2\}$ , то это даёт непрерывность  $m$ . Теперь применение пункта б) Теоремы 18 влечёт непрерывность  $\hat{m}: \Omega X \times \Omega X \rightarrow X^I$ ,  $\hat{m}(g, f)(s) = m(g, f, s) = (g \cdot f)(s)$ . Легко видеть, что образ  $\hat{m}$  попадает в подпространство  $\Omega X \subset X^I$ , соответствующее отображение в  $\Omega X$  и есть  $\mu$ , которое, таким образом, непрерывно.  $\square$

с) **Фундаментальная группа и гомотопические группы.** Мы уже отмечали, что композиция функторов является функтором. Рассмотрим композицию  $\pi_0 \circ \Omega$ , которая является гомотопически инвариантным функтором  $\mathcal{PTor} \rightarrow \mathcal{PSet}$ . Замечательным фактом является то, что её можно рассматривать не только как функтор в категорию пунктированных множеств  $\mathcal{PSet}$ , но и в категорию групп  $\mathcal{Gr}$ , то есть пунктированные множества  $\pi_0(\Omega X, \omega_0)$  имеют естественную групповую структуру. У этого факта есть красивое категорное доказательство, а мы лишь заметим, что групповая операция на компонентах линейной связности пространства петель  $\Omega X$  будет происходить из построенного выше “умножения”  $\mu$ . Функтор  $\pi_0 \circ \Omega: \mathcal{PTor} \rightarrow \mathcal{Gr}$  называется *фундаментальной группой* и обозначается  $\pi_1$ .

Читатель, возможно, знаком совсем с другим определением фундаментальной группы пространства  $X$  с отмеченной точкой  $x_0$ , которое мы привели в Добавлении 2, а именно как группы  $\text{Hom}_{h\mathcal{PTor}}((S^1, s_0), (X, x_0))$  гомотопических классов отображений окружности с отмеченной точкой (или как группы классов эквивалентности петель, что то же самое). Докажем эквивалентность этих двух определений.

Ввиду (2.5) нужно доказать существование естественной по  $X$  биекции<sup>10</sup>

$$\text{Hom}_{h\mathcal{PTor}}((S^0, s_0), (\Omega X, \omega_0)) \leftrightarrow \text{Hom}_{h\mathcal{PTor}}((S^1, s_0), (X, x_0)). \quad (2.6)$$

Во-первых, заметим, что есть взаимно-однозначное соответствие между непрерывными отображениями  $(S^0, s_0) \rightarrow (\Omega X, \omega_0)$  и непрерывными отображениями  $(S^1, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  (действительно, отображение  $(S^0, s_0) \rightarrow (\Omega X, \omega_0)$  полностью определяется точкой в  $\Omega X$ , то есть петлёй в  $X$ , в которую переходит точка  $-1 \in S^0$ , так как отмеченная точка  $1 \in S^0$  по определению морфизмов в  $\mathcal{PTor}$  обязана перейти в  $\omega_0$ ). Поэтому достаточно доказать, что отношение гомотопности на этих двух множествах отображений совпадает. Для двух петель  $f, g: S^1 \rightarrow X$ ,  $f(s_0) = g(s_0) = x_0$  гомотопия — это отображение

---

<sup>10</sup>фактически, на категорном языке, мы хотим доказать изоморфизм указанных функторов.



$H: S^1 \times I \rightarrow X$  такое что

$$H|_{S^1 \times \{0\}} = f, \quad H|_{S^1 \times \{1\}} = g \quad \text{и} \quad H(\{s_0\} \times I) = x_0. \quad (2.7)$$

Напомним, что согласно п. б) Теоремы 18 из Добавления 1, отображение  $H: S^1 \times I \rightarrow X$  непрерывно тогда и только тогда когда отображение  $\hat{H}: I \rightarrow X^{S^1}$ ,  $\hat{H}(t)(s) = H(s, t)$  непрерывно. Заметим, что в силу последнего условия в (2.7)  $\hat{H}(t)(s_0) = x_0 \quad \forall t \in I$ , поэтому образ отображения  $\hat{H}$  является путём в подпространстве  $\Omega X \subset X^{S^1}$ . Отображение  $\hat{H}$  как раз задаёт путь между точками в  $\Omega X$ , соответствующими петлям  $f$  и  $g$ , то есть соответствующую гомотопию отображений  $S^0 \rightarrow \Omega X$ , это завершает доказательство биекции (2.6).

Функтор петель  $\Omega$  действует из категории  $\mathcal{PTor}$  в себя, поэтому его можно итерировать. В общем случае обозначим композицию  $\Omega \circ \dots \circ \Omega$  ( $n$  раз) через  $\Omega^n$  и определим функтор  $\pi_n(X, x_0) := \pi_0(\Omega^n X, \tilde{\omega}_0)$  (где  $\tilde{\omega}_0$  — отмеченная точка в  $\Omega^n X$ ), который назовём  $n$ -й *гомотопической группой*. Это определяет семейство гомотопически инвариантных функторов для всех  $n \in \mathbb{N}$ , причём  $\pi_0$  является функтором  $\mathcal{PTor} \rightarrow \mathcal{PSet}$ ,  $\pi_1$  — функтором  $\mathcal{PTor} \rightarrow \mathcal{Gr}$ , а при  $n \geq 2$   $\pi_n$  являются функторами  $\mathcal{PTor} \rightarrow \mathcal{Ab}$  со значениями в категории абелевых групп. Этот факт имеет непосредственный категорный смысл. Так как группа — это множество с дополнительной структурой, то это делает данные функторы существенно более информативными. С ними можно глубже познакомиться по книгам [12], [17] или [15].

Кстати, из совпадения  $\Omega^n X = \Omega(\Omega^{n-1} X)$  следуют равенства

$$\pi_0(\Omega^n X, \tilde{\omega}_0) = \pi_1(\Omega^{n-1} X, \tilde{\omega}_0) = \dots = \pi_n(X, x_0). \quad (2.8)$$

Кроме того, биекция (2.6) может быть обобщена на случай гомотопических групп  $\pi_n$  для всех  $n \geq 0$  следующим образом:

$$\text{Hom}_{h\mathcal{PTor}}((S^n, s_0), (X, x_0)) \leftrightarrow \pi_n(X, x_0), \quad (2.9)$$

(здесь  $S^n$  —  $n$ -мерная сфера с базисной точкой  $s_0$ ). Этот общий результат также может быть получен из п. б) Теоремы 18 (с использованием еще одного топологического функтора — надстройки), см. [17].

**д) Фундаментальный группоид.** Фундаментальный группоид  $\Pi(X)$  топологического пространства  $X$  — категория, объектами которой являются точки пространства  $X$ , а морфизмами  $x \rightarrow y$  — классы эквивалентности путей из  $x$  в  $y$  (см. Добавление 2). Таким образом, множество эндоморфизмов<sup>11</sup> объекта  $x$  есть в точности фундаментальная группа  $\pi_1(X, x)$ . Легко проверить, что  $\Pi$  является функтором из категории топологических пространств  $\mathcal{Top}$  в категорию группоидов  $\mathcal{GP}$ .

**е) Гомологии.** Другим важным примером функтора из  $\mathcal{Top}$  (причём гомотопически-инвариантного) является функтор сингулярных гомологий, см., например [17], [12].

## 2.3 Контравариантные функторы

Функторы  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , которые мы рассматривали до сих пор, называются *ковариантными функторами*. Существуют (и играют важную роль!) также *контравариантные функторы*, “обращающие стрелки”.

**Определение 17.** *Контравариантный функтор* из категории  $\mathcal{C}$  со значениями в категории  $\mathcal{D}$  (обозначение:  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ) состоит из следующих данных:

- а) отображения  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ ,  $X \mapsto F(X)$ ;
- б) для каждой упорядоченной пары объектов  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  отображения

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X)), \\ \{f: X \rightarrow Y\} &\mapsto \{F(f): F(Y) \rightarrow F(X)\}, \end{aligned}$$

причем  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$  и для любых  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Z)$  имеет место равенство  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ .

Т.е. морфизму  $f: X \rightarrow Y$  в категории  $\mathcal{C}$  контравариантный функтор  $F$  сопоставляет морфизм  $F(f): F(Y) \rightarrow F(X)$  в категории  $\mathcal{D}$  и

---

<sup>11</sup>напомним, что эндоморфизм объекта — его морфизм на себя.

соответственно композиции  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  в  $\mathcal{C}$  — композицию  $F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y) \xleftarrow{F(g)} F(Z)$  в  $\mathcal{D}$ .

С помощью понятия двойственной категории определение контравариантного функтора можно свести к определению обычного (ковариантного). Более точно, рассмотрим “обращающий” контравариантный функтор  $Rev: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{C}$  (где  $\mathcal{C}^\circ$  — дуальная категория), который тождествен на объектах и обращает направление морфизмов, т.е.  $Rev(f^\circ) = f$ . Тогда контравариантный функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  определяет ковариантный функтор  $G = F \circ Rev: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}$  (здесь  $F \circ Rev$  — композиция функторов).

**Задача.** Построить контравариантный функтор из категории подмножеств данного множества  $\mathcal{P}(S)$  (см. пример *m*) на стр. 19) в себя.

**Примеры. а)** Пусть  $k$  — поле,  $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  — произвольное множество,  $F(S)$  — (пока) множество всех функций на  $S$  со значениями в  $k$ , или, что то же самое, отображений из  $S$  в  $k$ . Как обычно, если  $f: S \rightarrow k$  — такая функция, через  $f(s)$  обозначается значение  $f$  на элементе  $s \in S$ . Сложение и умножение функций на скаляр определяются поточечно:

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s) \quad \text{для всех } s \in S,$$

$$(af)(s) = a(f(s)) \quad \text{для всех } a \in k, s \in S.$$

Легко проверить, что  $F(S)$  с введенными операциями сложения и умножения на скаляр есть векторное пространство над  $k$ . Если  $S = \{1, \dots, n\}$ , то  $F(S)$  можно отождествить с  $k^{n12}$ : функции  $f$  ставится в соответствие вектор всех ее значений  $\{f(1), \dots, f(n)\}$ . Оказывается, что сопоставление  $S \mapsto F(S)$  может быть продолжено до функтора  $F: \mathcal{Set} \rightarrow \mathcal{Vect}_k$  (т.е. существует функтор, совпадающий с  $S \mapsto F(S)$  на объектах; на морфизмах он определяется в следующем предложении). Этот функтор является контравариантным: морфизму  $\varphi: S \rightarrow T$  в  $\mathcal{Set}$  он ставит в соответствие линейное отображение  $F(\varphi): F(T) \rightarrow F(S)$ , чаще обозначаемое  $\varphi^*$ , и называемое *обратным образом* на функциях:

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad \text{где } \varphi: S \rightarrow T, f: T \rightarrow k.$$

---

<sup>12</sup>Заметим, что и в общем случае  $F(X) \cong \prod_{x \in X} k$ .

**Задача.** Проверить, что мы действительно построили функтор.

**Задача.** а) Покажите, что  $F(X \amalg Y) \cong F(X) \oplus F(Y)$ . (Указание:  $X \amalg Y$  — категорная сумма в  $\mathcal{Set}$ , поэтому функция  $X \amalg Y \rightarrow k$  — то же, что пара функций  $f: X \rightarrow k$ ,  $g: Y \rightarrow k$ ).

б) Как можно описать функции на  $X \times Y$  через функции на  $X$  и на  $Y$  (например, если  $X$  и  $Y$  — конечные множества)?

Далее, можно заметить, что функции со значением в поле можно не только поточечно складывать, но и перемножать:  $(fg)(s) = f(s)g(s)$ . При этом  $F(S)$  становится коммутативной ассоциативной  $k$ -алгеброй с единицей (роль которой играет постоянная функция, в каждой точке принимающая значение, равное  $1 \in k$ ) и  $S \mapsto F(S)$  продолжается до контравариантного функтора  $\mathcal{Set} \rightarrow \mathcal{Alg}_k$ .

б) Некоторый вариант последнего примера получится, если  $S = T$  есть топологическое пространство, а  $k$  — топологическое поле (т.е. поле, на множестве элементов которого задана топология, относительно которой операции сложения и умножения непрерывны, например  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ), и в качестве  $F(T)$  рассматривается пространство *непрерывных* функций  $f: T \rightarrow k$ . Действие функтора  $F$  на морфизм  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(T', T)$  определяется по той же формуле, как и в случае множеств:

$$F(\varphi)(f) = \varphi^*(f) = f \circ \varphi \quad \forall f \in F(T)$$

(так как  $\varphi: T' \rightarrow T$  — непрерывное отображение, то обратный образ на функциях  $\varphi^*$  переводит непрерывные функции на  $T$  в непрерывные функции на  $T'$ ).

с) Функтор двойственности:  $\mathcal{Vect}_k \rightarrow \mathcal{Vect}_k$ , на объектах задаваемый формулой  $V \mapsto V^* := \mathcal{L}(V, k)$ , где  $\mathcal{L}(V, k)$  — *двойственное* пространство, состоящее из линейных функционалов (=линейных форм) на  $V$  (называемое также *сопряженным* с  $V$  пространством), а на морфизмах  $\varphi: V \rightarrow W$  — формулой  $\varphi \mapsto \varphi^*$ , где  $\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$  — двойственное к  $\varphi$  отображение (напомним, двойственное к  $\varphi$  отображение произвольному  $f \in W^*$  сопоставляет функционал  $\varphi^*(f) \in V^*$ , однозначно определяемый формулой  $\varphi^*(f)(v) = f(\varphi(v)) \forall v \in V$ ).

**Задача.** Проверить, что это действительно определяет функтор  $\mathcal{Vect}_k \rightarrow \mathcal{Vect}_k$ .

d) Пусть  $\mathcal{LCAb}$  — категория, объектами которой являются локально-компактные (топологические) абелевы группы, а морфизмами — непрерывные гомоморфизмы таких групп. Характером группы  $G \in \text{Ob}(\mathcal{LCAb})$  называют её морфизм (=непрерывный гомоморфизм) в группу  $U(1)$ .<sup>13</sup> Множество всех характеров группы  $G$  традиционно обозначается  $\widehat{G}$  и само является абелевой группой относительно поточечного умножения. Наделим  $\widehat{G}$  уже рассмотренной ранее компактно-открытой топологией, которая в данном случае имеет следующее простое описание. Её предбазу образуют множества вида

$$M(K; t, \varepsilon) := \{\chi \in \widehat{G} \mid |\chi(g) - t| < \varepsilon\}$$

для всевозможных наборов, состоящих из компактного подмножества  $K \subset G$ , точки  $t \in U(1)$  и числа  $\varepsilon > 0$ . Тогда можно показать, что группа  $\widehat{G}$  также локально компактна, и сопоставление  $G \mapsto \widehat{G}$  продолжается до контравариантного функтора из категории  $\mathcal{LCAb}$  в себя. На морфизмах он определён очевидным образом: непрерывному гомоморфизму  $f: G \rightarrow H$  он ставит в соответствие непрерывный гомоморфизм групп характеров  $\widehat{f}: \widehat{H} \rightarrow \widehat{G}$ , где  $\widehat{f}(\chi)(g) = \chi(f(g))$  для произвольных  $\chi \in \widehat{H}$  и  $g \in G$ .

e) Определим некоторый аналог  $\mathcal{Top}(T)$  категории  $\mathcal{P}(S)$ , рассматриваемой в примере m) на стр. 19 в случае, когда  $S = T$  — топологическое пространство. А именно, объекты  $\mathcal{Top}(T)$  — произвольные *открытые* подмножества  $U \subset T$ , а морфизмы — *вложения* открытых подмножеств  $V \subset U$ . Тогда контравариантный функтор  $F: \mathcal{Top}(T) \rightarrow \mathcal{Ab}$  (или  $\mathcal{Ring}$  или  $\mathcal{Gr}, \dots$ ) называется *предпучком абелевых групп* на  $T$  (или колец, или групп,  $\dots$ ). Из определения функтора следует, что данному вложению  $V \subset U$  (т.е. морфизму в  $\mathcal{Top}(T)$ ) предпучок  $F$  сопоставляет гомоморфизм  $F(V \subset U): F(U) \rightarrow F(V)$ , который называется *гомоморфизмом ограничения*. Он часто обозначается  $\rho_{U,V}^F$ . Заметим, что из определения функтора следует, что тождественному морфизму  $U \subset U$  в категории  $\mathcal{Top}(T)$  отвечает тождественный морфизм  $\rho_{U,U}^F = \text{id}_{F(U)}$  в категории  $\mathcal{Ab}$ , а для открытых множеств  $W \subset V \subset U$  имеем:  $\rho_{U,W}^F = \rho_{V,W}^F \circ \rho_{U,V}^F$ .

---

<sup>13</sup>напомним, что через  $U(1)$  обозначается мультипликативная группа комплексных чисел по модулю равных единице.

Рассмотрим следующий пример предпучка колец. Фиксируем топологическое поле  $k$  (например,  $k = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ) и определим предпучок  $F$  следующим образом:  $F(U)$  есть кольцо непрерывных функций  $f: U \rightarrow k$ , где гомоморфизмы ограничения  $\rho_{U,V}^F$  — настоящие ограничения функций с  $U$  на  $V$ .

Заметим, что этот пример предпучка обладает рядом дополнительных хороших свойств, которым удовлетворяют т.н. пучки.

**f)** Одним из важнейших гомотопически-инвариантных контравариантных функторов, изучаемых в алгебраической топологии, является функтор сингулярных когомологий, о котором можно прочесть в рекомендуемых книгах по топологии.

**g)** Напомним, что выше в примере о) на стр. 64 мы определили функтор  $h'_X: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$  как “функцию”  $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  от второго аргумента. Аналогично,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  как функция от первого аргумента есть контравариантный функтор  $h_X: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ , который объекту  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ставит в соответствие множество  $h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ , и морфизму  $f: Y' \rightarrow Y$  в  $\mathcal{C}$  — морфизм

$$h_X(f): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X)$$

в категории  $\mathcal{S}et$ , отображающий произвольный морфизм  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  в композицию  $h_X(f)(\varphi) = \varphi \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X)$ .

**h)** Функтор  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$  естественно рассматривать как зависящий одновременно от двух аргументов (такие функторы называются *бифункторами*). Его также можно рассматривать как обычный функтор на произведении категорий (см. §1.5):  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ .

# Глава 3

## Добавления

### 3.1 Добавление 1. Свойства компактно-открытой топологии

**Теорема 18.** *Если пространство  $Y$  локально компактно, то*

- a) отображение вычисления<sup>1</sup>  $e: X^Y \times Y \rightarrow X$ , задаваемое формулой  $e(f, y) = f(y)$ , непрерывно;*
- b) непрерывность отображения  $f: Y \times Z \rightarrow X$  равносильна непрерывности отображения  $\hat{f}: Z \rightarrow X^Y$ , заданного формулой  $\hat{f}(z)(y) = f(y, z)$ .*

*Доказательство.* а) Для произвольной точки  $(f, y) \in X^Y \times Y$  пусть  $U \subset X$  — произвольная открытая окрестность точки  $f(y)$ . Так как  $f: Y \rightarrow X$  непрерывно, а  $Y$  — локально компактно, то у точки  $y \in Y$  найдется такая компактная окрестность  $K \subset Y$ , что  $f(K) \subset U$ . Напомним, что через  $M(K, U) := \{g \in X^Y \mid g(K) \subset U\}$  мы обозначаем множества, образующие предбазу компактно-открытой топологии в  $X^Y$ . Тогда  $M(K, U) \times K$  — окрестность точки  $(f, y)$ , образ которой относительно отображения  $e$  содержится в  $U$ , откуда следует непрерывность  $e$  в  $(f, y)$ . В силу произвольности  $(f, y)$  отображение  $e$  непрерывно.

б) Во-первых, пусть  $f$  непрерывно. Для доказательства непрерывности  $\hat{f}$  достаточно убедиться в том, что множество  $\hat{f}^{-1}(M(K, U)) =$

---

<sup>1</sup>называемое по-английски “evaluation map”.

$\{z \in Z \mid f(K \times \{z\}) \subset U\}$  открыто в  $Z$ . Для этого для произвольной точки  $z \in \widehat{f}^{-1}(M(K, U))$  нужно найти открытую окрестность, содержащуюся в  $\widehat{f}^{-1}(M(K, U))$ . Из включения  $K \times \{z\} \subset f^{-1}(U)$ , определения топологии произведения и компактности  $K \times \{z\}$  легко следует существование открытых множеств  $V \subset Y$ ,  $W \subset Z$  таких что  $K \times \{z\} \subset V \times W \subset f^{-1}(U)$ . Тогда  $W$  — искомая окрестность точки  $z$  в  $\widehat{f}^{-1}(M(K, U))$ .

Обратно, предположим что непрерывно  $\widehat{f}$ . Легко проверить, что композиция

$$Y \times Z \xrightarrow{\text{id}_Y \times \widehat{f}} Y \times X^Y \xrightarrow{e} X$$

совпадает с  $f$ . Тогда  $\widehat{f}$  непрерывно как композиция непрерывных отображений (первое из которых непрерывно по предположению, а второе — по доказанному в пункте а).  $\square$

**Теорема 19.** (“Экспоненциальный закон”) *Если пространство  $Y$  локально компактно и хаусдорфово, а  $Z$  — хаусдорфово, то отображение  $X^{Y \times Z} \rightarrow (X^Y)^Z$ ,  $f \mapsto \widehat{f}$ , является гомеоморфизмом.*

Идея доказательства последней теоремы заключается в том, чтобы доказать, что множества вида  $M(A \times B, U)$ , где  $A$  и  $B$  пробегают компактные подмножества в  $Y$  и  $Z$  соответственно, а  $U$  — открытые в  $X$ , образуют предбазу компактно-открытой топологии в  $X^{Y \times Z}$ , а множества вида  $M(B, M(A, U))$  — в  $(X^Y)^Z$ . Так как при биекции  $X^{Y \times Z} \rightarrow (X^Y)^Z$  множества  $M(A \times B, U)$  переходят в  $M(B, M(A, U))$ , то отсюда будет вытекать требуемое. Подробности см., например, в [17].

## 3.2 Добавление 2. Фундаментальная группа

Следуя [12], построим еще один гомотопически-инвариантный функтор  $\pi_1: \mathcal{PTop} \rightarrow \mathcal{Gr}$ , называемый *фундаментальной группой*.

Пусть  $X$  — топологическое пространство. Два пути  $f, g: I \rightarrow X$  из  $x$  в  $y$  ( $x, y \in X$ ) назовём *эквивалентными* (обозначение:  $f \simeq g$ ), если они гомотопны как пути из  $x$  в  $y$ . Это означает, что существует гомотопия  $h: I \times I \rightarrow X$  такая, что

$$h(s, 0) = f(s), \quad h(s, 1) = g(s), \quad h(0, t) = x \quad \text{и} \quad h(1, t) = y$$



для всех  $s, t \in I$ .<sup>2</sup> Класс эквивалентности пути  $f$  обозначим через  $[f]$ . Путь  $f$  называется *петлёй*, если  $f(0) = f(1)$  (то есть  $x = y$ ). Пусть  $\pi_1(X, x)$  — множество классов эквивалентности петель с началом и концом в  $x \in X$ .

Композиция  $g \cdot f$  путей  $f: x \rightarrow y$  и  $g: y \rightarrow z$  — путь, полученный прохождением сначала  $f$ , а затем  $g$  с удвоенной скоростью:

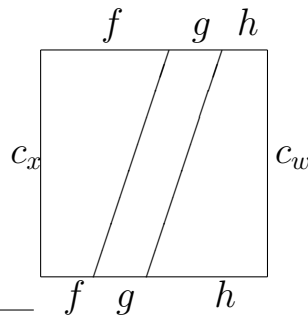
$$(g \cdot f)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{если } 0 \leq s \leq 1/2; \\ g(2s - 1), & \text{если } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Определим путь  $f^{-1}$ , обратный к  $f$ , как  $f^{-1}(s) = f(1 - s)$ . Пусть  $c_x$  обозначает постоянную петлю в  $x$ :  $c_x(s) = x \forall s \in I$ . Нетрудно проверить, что отношение эквивалентности на путях согласовано с их композицией, что позволяет определить операцию на классах: произведение  $[g][f]$  классов  $[g]$  и  $[f]$  по определению есть класс  $[g \cdot f]$ . Более того, операция произведения на классах оказывается ассоциативной и унитарной (последнее означает, что у неё есть единичный элемент).

Более подробно, пусть нам даны пути

$$f: x \rightarrow y, \quad g: y \rightarrow z \quad \text{и} \quad h: z \rightarrow w.$$

Легко видеть, что ассоциативность  $[h]([g][f]) = ([h][g])[f]$  означает, что  $h \cdot (g \cdot f) \simeq (h \cdot g) \cdot f$ . Эти две петли совпадают как подмножества точек в  $X$ , но отличаются параметризациями: в случае  $h \cdot (g \cdot f)$  петля  $f$  пробегается за  $1/4$ , затем  $g$  за  $1/4$  и наконец  $h$  за  $1/2$  оставшегося “времени”, в то время как для  $(h \cdot g) \cdot f$  петля  $f$  пробегается за  $1/2$ , затем  $g$  за  $1/4$  и наконец  $h$  за  $1/4$  “времени”. Гомотопию  $H: I \times I \rightarrow X$  между указанными путями можно выписать явно, пользуясь следующей картинкой:



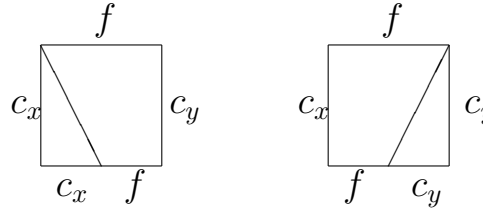
(3.1)

<sup>2</sup>Проверьте, что это действительно определяет отношение эквивалентности на путях из  $x$  в  $y$ .

На ней нижняя сторона квадрата отвечает пути  $h \cdot (g \cdot f)$ , а верхняя —  $(h \cdot g) \cdot f$  и, таким образом, гомотопия происходит снизу вверх. Наклонные отрезки отвечают постоянным путям  $c_y$  и  $c_z$ . Теперь ясно как выписать гомотопию:

$$H(s, t) = \begin{cases} f(\frac{4s}{t+1}), & \text{если } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4}; \\ g(4s - t - 1), & \text{если } \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4}; \\ h(\frac{4s-t-2}{2-t}), & \text{если } \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

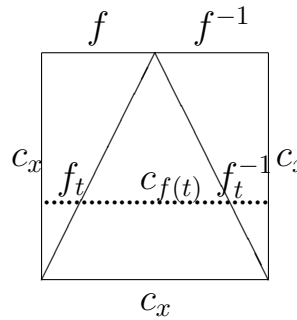
Условия правой и левой единицы  $[f][c_x] = [f]$ ,  $[c_y][f] = [f]$  следуют из гомотопий  $f \cdot c_x \simeq f$ ,  $c_y \cdot f \simeq f$ . Указанные гомотопии легко выписать по следующим картинкам:


(3.2)

Вторая гомотопия например выглядит следующим образом:

$$H(s, t) = \begin{cases} f(\frac{2s}{t+1}), & \text{если } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2}; \\ y, & \text{если } \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Более того,  $[f^{-1} \cdot f] = [c_x]$  и  $[f \cdot f^{-1}] = [c_y]$ . Для первой мы имеем следующую картинку:


(3.3)

На ней  $f_t = f|_{[0,t]}$  и  $f_t^{-1} = f^{-1}|_{[1-t,1]}$ . Соответствующая явная формула такая:

$$H(s, t) = \begin{cases} f(2s), & \text{если } 0 \leq s \leq t/2; \\ f(t), & \text{если } t/2 \leq s \leq 1 - t/2; \\ f(2 - 2s), & \text{если } 1 - t/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом, мы показали, что  $\pi_1(X, x)$  — группа с единичным элементом  $e = [c_x]$  и обратным  $[f]^{-1} = [f^{-1}]$ . Она и называется фундаментальной группой пространства  $X$ .

Легко проверить, что морфизм  $\varphi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  в категории  $\mathcal{PTor}$  индуцирует гомоморфизм групп  $\pi_1(\varphi): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ , откуда нетрудно вывести, что  $\pi_1$  действительно является функтором  $\mathcal{PTor} \rightarrow \mathcal{Gr}$ .

Заметим, что отображение  $f: I \rightarrow X$ ,  $f(0) = x_0 = f(1)$  — по существу, то же самое что и отображение  $\tilde{f}: (S^1, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ , поэтому эквивалентным образом фундаментальную группу можно было бы определить с помощью отображений окружности с отмеченной точкой.

**Задача.** Докажите, что  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ , то есть, другими словами, функтор  $\pi_1$  переводит произведение в категории  $\mathcal{PTor}$  в произведение в категории  $\mathcal{Gr}$ .

**Задача.** Докажите, что для многообразий  $X$  и  $Y$  имеет место изоморфизм

$$\pi_1((X, x_0) \vee (Y, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0),$$

то есть, другими словами, функтор  $\pi_1$  переводит сумму в категории пунктированных многообразий в сумму в категории  $\mathcal{Gr}$ .<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Заметим, что утверждение этой задачи — частный случай теоремы Зейферта-ван Кампена (для того, чтобы сформулировать последнюю в категориных терминах, нужно обобщение понятия категорной суммы — понятие *копредела*). Для общих пространств из  $\mathcal{PTor}$  оно неверно — нужно условие локальной стягиваемости.

# Литература

- [1] JOHN C. BAEZ, MIKE STAY Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone.  
<http://math.ucr.edu/home/baez/rosetta.pdf>
- [2] И. БУКУР, А. ДЕЛЯНУ Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.
- [3] С.И. ГЕЛЬФАНД, Ю.И. МАНИН Методы гомологической алгебры. Введение в теорию кохомологий и производные категории. — М.: Наука, 1988.
- [4] П. КАРТЬЕ Комбинаторика деревьев. Что такое операда? (Лекции на студенческих чтениях в НМУ).  
<http://www.mccme.ru/iium/stcht.html>
- [5] М. КАРУБИ  $K$ -теория. Введение. — М.: Мир, 1981.
- [6] К. КАССЕЛЬ Квантовые группы. — М.: Фазис, 1999.
- [7] А.И. КОСТРИКИН Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры. — М.: Физико-математическая литература, 2000.
- [8] А.И. КОСТРИКИН, Ю.И. МАНИН Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986.
- [9] М.В. ЛОСИК Топология. — Изд-во Саратовского университета, 1986.
- [10] С. МАКЛЕЙН Категории для работающего математика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

- [11] Ю.И. МАНИН Лекции по алгебраической геометрии. Часть 1. Аффинные схемы. — Изд-во Московского университета, 1970.
- [12] J.P. MAY A Concise Course in Algebraic Topology.  
[www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf](http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf)
- [13] М.М. ПОСТНИКОВ Лекции по геометрии. Семестр 5. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982.
- [14] URS SCHREIBER The Baby Version of Freed-Hopkins-Teleman.  
[http://golem.ph.utexas.edu/category/2006/11/the\\_baby\\_version\\_of\\_freedhopki.html](http://golem.ph.utexas.edu/category/2006/11/the_baby_version_of_freedhopki.html)
- [15] Р.М. СВИТЦЕР Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985.
- [16] А.Я. ХЕЛЕМСКИЙ Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦНМО, 2004.
- [17] А. ХАТЧЕР Алгебраическая топология. — М.: МЦНМО, 2011  
 (в интернете книга на английском языке доступна по адресу:  
<http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html>)
- [18] И.Р. ШАФАРЕВИЧ Основные понятия алгебры. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999 (Первое издание: “Основные понятия алгебры”, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.11. (Итоги науки и техники, ВИНТИ), 1986).

*Учебное издание*

Ершов Андрей Владимирович

## КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ

*Учебное пособие*

*для студентов механико-математического факультета*

---

Подписано в печать 30.03.2012. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Гарнитура Times New Roman. Печать RISO. Объем 5,5 печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ №135.

---

ООО Издательский Центр “Наука”  
410600, г. Саратов, ул. Пугачёвская, 117, оф. 50

Отпечатано с готового оригинал-макета  
Центр полиграфических и копировальных услуг  
Предприниматель Серман Ю.Б. Свидетельство №3117  
410600, Саратов, ул. Московская, д. 152, офис 19, тел. 26-18-19, 51-16-28