Современные
ЛЕКЦИОННЫЕ КУРСЫ

А. Я. ХЕЛЕМСКИЙ

Лекции по функциональному анализу

Облики Спектральной Теоремы.

Аналитический:

$$T = \int t \, dP(t)$$

Геометрический:

$$T \sim T_f \quad ; \quad f \in L_\infty(X, \mu).$$

УДК 517.98
ББК 22.16
Х36

Хелемский А. Я.
Лекции по функциональному анализу
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
560 с.
ISBN 978-5-4439-2043-6

Книга представляет собой университетский учебник по функциональному анализу. Она рассчитана на студентов 3–5 курсов, аспирантов и преподавателей математических факультетов, а также специализирующихся в области математики и теоретической физики научных работников. В ее основу положены лекции, многократно читавшиеся автором на механико-математическом факультете МГУ, и семинарские занятия, которые регулярно проводились им в академических группах этого факультета.

Вводимые понятия и доказываемые утверждения общего характера иллюстрируются большим числом примеров и упражнений (задач).

От читателя требуется подготовка в объеме двух первых курсов математических факультетов российских университетов.

Подготовлено на основе книги: *А. Я. Хелемский*. Лекции по функциональному анализу. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2014.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2043-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 0

ФУНДАМЕНТ: КАТЕГОРИИ И ИЖЕ С НИМИ

На мехмате МГУ лекции по функциональному анализу обычно читают на третьем курсе. Долгие годы, вместе с теорией меры и интеграла, они составляли курс, который назывался «Анализ III». Первый такой курс был прочитан в конце 40-х годов, и лектором был (сам!) Андрей Николаевич Колмогоров. От него пошел обычай начинать лекции по «Анализу III» с изложения азов теории множеств. К тому времени уже мало кто оспаривал исключительную роль теории множеств как базовой науки не только для высших разделов анализа, но и для практически всей современной, по тем понятиям, математики. И все же включение теории множеств в студенческую программу было тогда поистине революционным делом. Не случайно, что о ней начинали рассказывать только на третьем курсе. В середине обучения студенты уже считаются достаточно взрослыми, и их преподаватели тешат себя надеждой, что они обладают определенным математическим багажом и культурой. Перефразируя известное выражение Гильберта, перед ними уже можно открыть врата «рая, созданного для нас Кантором».

С той поры, конечно, многое изменилось. Теория множеств давно стала привычным делом и психологически воспринимается немногим сложнее, скажем, аналитической геометрии; теперь ее учат на младших курсах. Но для роли идейного и языкового фундамента современной математики ее уже не хватает. Сейчас эта роль перешла к другой, более молодой дисциплине, находящейся на следующем этаже абстракции. Речь идет о теории категорий, которая в упомянутые выше 40-е годы как раз родилась. (Некоторые любители этой науки предпочитают ее другое, шуточное название «абстрактная чепуха» — воистину унижение паче гордости...) Именно теория категорий играет в наши дни для очень большой и все расширяющейся области математики ту унифицирующую роль, которую раньше играла теория множеств. В частности, эта «абстрактная чепуха» дает универсальный, краткий и весьма удобный язык для выражения огромного числа математических понятий и фактов. На обширном пространстве алгебры, геометрии и анализа, включая и современный функциональный анализ, попытка обойтись без этого языка была бы столь же нелепа, как и попытка обойтись без буквенных обозначений Виета.

Вот и мы, отдавая дань доброй традиции, открываем изложение анализа для старших курсов с основ «общематематической базовой науки» — но только теперь, в соответствии с требованиями времени, в роли таковой выступит теория категорий.

Но прежде чем приступить к категориям, мы проверим наш багаж по теории множеств, линейных и метрических пространств, добавив к этому самые начальные сведения из топологии. (Последнее — из перестраховочных соображений, о которых говорилось в предисловии.)

§1. О множествах, а также линейных и метрических пространствах

Начальные понятия, факты и обозначения теории множеств читателю уже известны. В частности, будем пользоваться «замороженными» обозначениями $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{C}$ для множеств целых, рациональных, действительных, неотрицательных действительных и комплексных чисел соответственно. Уточним, что натуральными числами мы называем элементы множества $1, 2, \ldots$ и именно это множество обозначаем $\mathbb{N}$, а множество неотрицательных целых чисел, т. е. $\mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначаем через $\mathbb{Z}_+$. Единичная окружность в $\mathbb{C}$ («одномерный тор») обозначается через $\mathbb{T}$, замкнутый единичный круг (= диск) — через $\mathbb{D}$, а открытый единичный круг — через $\mathbb{D}^0$. Множество матриц размера $n \times n$ с комплексными коэффициентами обозначается через $\mathbb{M}_n$.

Пусть X_ν, $\nu \in \Lambda$, — произвольное семейство множеств[1]. Рассмотрим для каждого $\nu \in \Lambda$ множество X'_ν, состоящее из пар (x, ν), $x \in X_\nu$. Множество $\bigcup \{X'_\nu : \nu \in \Lambda\}$ мы называем *дизъюнктным объединением* семейства X_ν, $\nu \in \Lambda$ (смысл его — в том, что оно позволяет говорить об «объединении непересекающихся копий» множеств любого заданного семейства).

Предупреждение. Термины *инъективный*, *сюръективный* и *биективный* мы употребляем только для отображений множеств, и они имеют обычный смысл, т. е. означают соответственно «отображение, не склеивающее точки», «отображение на», «взаимно однозначное соответствие». В отличие от этого термины «мономорфизм», «эпиморфизм» и «изоморфизм» появятся позже и будут иметь другой, теорети-

[1] Употребляя для индексов невыразительное обозначение ν, а не, скажем, n, мы желаем подчеркнуть, что речь идет о семействе произвольной мощности, не обязательно счетном.

ко-категорный смысл, который тогда и будет разъяснен. *Образ* отображения φ также понимается исключительно в теоретико-множественном смысле и обозначается $\operatorname{Im}(\varphi)$.

Введем (напомним?) несколько терминов и обозначений, связанных с заданным отображением множеств $\varphi\colon X \to Y$. Если M — подмножество в X, а $\varphi_0\colon M \to Y$ — такое отображение, что $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in M$, то говорят, что φ_0 — это *ограничение отображения* φ *на* M, а φ — это *продолжение отображения* φ_0 *на* X. Если же N — подмножество в Y, содержащее $\operatorname{Im}(\varphi)$, а $\varphi^0\colon X \to N$ — такое отображение, что $\varphi^0(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in X$, то говорят, что φ^0 — это *коограничение отображения* φ *на* N, а φ — это *копродолжение отображения* φ^0 *на* Y.

Наконец, если для тех же M и N отображение $\varphi_0^0\colon M \to N$ таково, что $\varphi_0^0(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in M$ (*коограничение ограничения* или, эквивалентно, *ограничение коограничения*), то говорят, что φ_0^0 — это *биограничение отображения* φ *на пару* (M, N), а φ — это *бипродолжение отображения* φ_0^0 *на пару* (X, Y). В указанной ситуации ограничение, коограничение и биограничение часто обозначаются символами $\varphi|_M$, $\varphi|^N$ и $\varphi|_M^N$ соответственно.

Множество всех отображений из множества X во множество Y мы будем часто обозначать Y^X (говоря неформально, X в таком обозначении играет роль «показателя декартовой степени»).

Как обычно, подмножество множества X называется *собственным*, если оно не совпадает с X.

* * *

Под *линейным пространством* мы обычно подразумеваем (ведь мы уже взрослые) пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Впрочем, иногда нам придется рассматривать также линейные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ (преобладающие на младших курсах), но эти случаи будут оговорены особо.

Если M и N — подмножества в линейном пространстве E, то их *алгебраической суммой* (или просто *суммой*) называется множество $M + N := \{y + z\colon y \in M, z \in N\}$.

Если N состоит из одного вектора x, то мы пишем $M + x$ вместо $M + \{x\}$ и называем такое множество *сдвигом множества* M *на* x. Для $M \subseteq E$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ множество $\lambda M := \{\lambda y\colon y \in M\}$ называется *растяжением множества* M *в* λ *раз*.

Мы говорим, что *линейное пространство* E *разлагается в прямую сумму своих подпространств* F *и* G, и пишем $E = F \oplus G$, если любой элемент $x \in E$ представим, и притом однозначно, в виде $y + z$, где $y \in F$ и $z \in G$. Геометрически это означает, что $F + G = E$ и одновременно

$F \cap G = \{0\}$. В указанной ситуации G называется *линейным дополнением к F в E*.

Пусть X — подмножество в линейном пространстве E. Его *линейной оболочкой* называется подпространство $\mathrm{span}(X)$ в E, состоящее из линейных комбинаций векторов из X. Далее, множество X называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими точками x, y оно содержит и весь отрезок $\{tx + (1-t)y : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Наконец, множество X называется *уравновешенным*, если с каждой своей точкой x оно содержит и весь замкнутый круг $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{D}\}$.

Термин *оператор* всюду значит линейный оператор; *ядро* оператора T также понимается исключительно в смысле линейной алгебры и обозначается $\mathrm{Ker}(T)$. Если E и F — линейные пространства, то линейное пространство, образованное всеми операторами из E в F, обозначается $\mathscr{L}(E, F)$. Вместо $\mathscr{L}(E, E)$ пишут $\mathscr{L}(E)$. Если $T \in \mathscr{L}(E)$, то подпространство F в E называется *инвариантным подпространством оператора T* (или *инвариантным относительно T*), если из того, что $x \in F$, следует, что $T(x) \in F$. В подобной ситуации биограничение оператора T на пару (F, F) будем называть *сужением оператора T на F*.

Функционал — это всегда оператор со значениями в поле скаляров. Пространство $\mathscr{L}(E, \mathbb{C})$, т. е. линейное пространство всех функционалов на E, называется *линейно-сопряженным пространством к E* и обозначается $E^\sharp$. Для $x \in E$ и $f \in E^\sharp$ число $f(x)$ мы будем иногда, когда это удобнее, обозначать также (f, x).

В каждом линейном пространстве E можно ввести новое умножение на скаляры, положив λx (для $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in E$) равным «прежнему» значению $\bar{\lambda} x$. Очевидно, что подлежащее множество пространства E, наделенное этим новым умножением на скаляры и тем же сложением, что и было, тоже является линейным пространством. Оно называется *комплексно-сопряженным к исходному пространству E* и обозначается E^i (пишут также $\overline{E}$, но мы опасаемся путаницы с будущим обозначением пополнения). Далее, отображение $T : E \to F$ между двумя линейными пространствами, которое является линейным оператором, будучи рассмотрено как отображение из E^i в F (или, эквивалентно, из E в F^i), называется *сопряженно-линейным оператором*. В терминах исходных линейных пространств это, конечно, означает, что оператор T аддитивен и удовлетворяет тождеству $T(\lambda x) = \bar{\lambda} x$. Сопряженно-линейный оператор из E в F, являющийся линейным изоморфизмом между E^i и F, называется *сопряженно-линейным изоморфизмом*.

Многие важные для функционального анализа линейные пространства состоят из последовательностей комплексных чисел. Для этих последовательностей мы примем обозначения ξ, η и т. п., а для их членов — ξ_n и т. п., часто используя запись типа $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Последовательность, в которой на n-м месте стоит 1, а на остальных местах — нули, мы будем называть *n-м ортом* и обозначать $\boldsymbol{p}^n$. (Подобное же выражение — k-й орт и обозначение $\boldsymbol{p}^k$ мы будем употреблять и для вектора $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ с единицей на k-м месте в арифметическом n-мерном пространстве $\mathbb{C}^n$.) Пространство всех последовательностей, т. е. в теоретико-множественных обозначениях $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, мы будем также обозначать через c_∞, а его подпространство, состоящее из финитных последовательностей (иными словами, линейную оболочку ортов) — через c_{00}. Иногда мы заранее не знаем, является ли заданный или возникший в ходе рассуждения упорядоченный набор чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots$ конечным или бесконечным, т. е. идет ли речь об элементе пространства $\mathbb{C}^n$ для натурального n или же об элементе пространства $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. В подобном случае мы будем употреблять для нашего набора выражение «конечная или бесконечная последовательность».

Линейные операторы, образ которых является одномерным (соответственно конечномерным, n-мерным) линейным пространством, мы будем называть *одномерными* (соответственно *конечномерными*, *n-мерными*).

* * *

Вернемся к множествам. То, что сейчас нам придется обсудить, относится к так называемой строгой, или аксиоматической теории множеств, о которой вряд ли шла речь на младших курсах. В целом эта дисциплина выходит за рамки нашего курса лекций, но несколько понятий и фактов нам необходимы: ими явно или неявно пользуется бóльшая часть современной математики.

Прежде всего, к ним относится знаменитая

Аксиома выбора (аксиома Цермело). *Пусть Λ — произвольное множество, X_ν, $\nu \in \Lambda$, — (индексированное этим множеством Λ) произвольное семейство попарно непересекающихся непустых множеств. Тогда существует множество, содержащее ровно по одной точке в каждом из множеств этого семейства.*

Эта аксиома в случае бесконечного (даже счетного) заданного семейства не может быть выведена из других (впрочем, нам неведомых) аксиом строгой теории множеств.

Возможно, вам, читатель, наша «взращенная на конечных множествах» интуиция подскажет, что иного и быть не может — как же иначе? Но поверим классикам науки — зарубежному и отечественному (цит. по [33, с. 3]).

«Когда в первый раз встречаются с аксиомой Цермело, то она кажется бесспорной и очевидной, но по мере того, как начинают размышлять о ней, она представляется все более и более загадочной, а ее следствия — изумительными; кончают тем, что теряют ее смысл и тогда начинают спрашивать, что же, собственно, она значит[1]?» (Б. Рассел).

«Я дни и ночи думаю над аксиомой Цермело. Если бы только кто-нибудь знал, что это за вещь!» (Н. Н. Лузин).

В свое время аксиома выбора, столь непохожая на другие аксиомы теории множеств — подобно пятому постулату среди аксиом евклидовой геометрии — вызывала жаркие споры. От нее пытались освободиться, но постепенно выяснилось, что на эту аксиому явно или неявно опирается большое число важнейших математических фактов[2]. Например, логический анализ показывает, что даже стандартное доказательство такого классического факта анализа, как эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне, неявно использует эту аксиому; см., например, [1, с. 95].

А посему огромному большинству работающих математиков ничего не остается, как принять эту аксиому, вернее, уверовать в нее. Ибо если мы с вами, читатель, не уверуем, то от основных теорем, доказанных в этой книге, останутся рожки да ножки.

Аксиома выбора допускает много эквивалентных формулировок, некоторые из которых с виду совсем на нее не похожи. Для наших целей наиболее полезна так называемая лемма Цорна. Она выглядит не столь наглядно и требует некоторой подготовки. Нам понадобится понятие порядка на множествах, весьма важное и само по себе.

Определение 1. Говорят, что на множестве X задан *порядок*, если выделено некоторое семейство упорядоченных пар элементов этого множества и, в записи $x \prec y$ вместо «пара (x, y) принадлежит этому семейству», выполнены следующие свойства:

(i) если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$;

(ii) всегда $x \prec x$;

(iii) если одновременно $x \prec y$ и $y \prec x$, то $x = y$.

Множество с заданным на нем порядком называется *упорядоченным множеством*. (Отношение $x \prec y$ обычно выражают словами «*x предшествует y*».)

Порядок называется *линейным*, если для любых $x, y \in X$ выполнено по крайней мере одно из двух условий: $x \prec y$ либо $y \prec x$.

---

[1] Не правда ли, эти слова Рассела странным образом напоминают бессмертное гоголевское описание Манилова?

[2] Я хорошо помню, как много лет назад один наш весьма известный математик пришел на свою лекцию в дурном настроении и почему-то стал его вымещать на аксиоме выбора, обдав ее сарказмом. А через минуту он как ни в чем не бывало начал пользоваться утверждением о том, что каждый идеал кольца содержится в максимальном идеале, по-видимому, забыв о том, что это утверждение доказывается только с использованием аксиомы выбора (а на самом деле ей эквивалентно). Так что не надо быть иванами, не помнящими родства!

Множество с линейным порядком называется *линейно упорядоченным*.

Заданный порядок на множестве порождает очевидным образом порядок на любом его подмножестве; при этом, очевидно, любое подмножество линейно упорядоченного множества само линейно упорядочено. Любое множество можно, не мудрствуя лукаво, сделать упорядоченным, объявив, что любой его элемент предшествует самому себе, и только. Такой порядок называется *дискретным*; конечно, он не линеен.

Замечание. Этот пример кажется глупым, но это «глупость» Иванушки-дурачка из русских сказок. На самом деле он несет важную смысловую нагрузку и, в частности, избавляет от ненужных иллюзий. Читатель еще много раз получит подтверждение той истины, что практически всякое содержательное математическое определение допускает подобные «глупые», а в действительности весьма полезные примеры.

Разумеется, числовые множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ обладают естественным порядком: $x \prec y$ есть $x \leqslant y$. Множество всех слов русского языка обладает так называемым лексикографическим порядком, принятым в словарях. В каждый момент времени множество всех здравствующих членов английской королевской семьи упорядочено по очередности права на престол (в частности, 1 февраля 2000 г. всем предшествовала ее величество Елизавета II, а всем остальным — его высочество Чарльз, принц Уэльский). Все эти порядки, конечно, линейны. А вот, скажем, множество $\mathbb{C}$ обладает порядком, который не линеен: $a + bi \prec c + di$, если $a \leqslant c$ и $b \leqslant d$.

Более важный пример множества с не линейным (или, как еще говорят, частичным) порядком — это множество всех подмножеств заданного множества X, обозначаемое через 2^X. Здесь полагают $Y \prec Z$, если $Y \subseteq Z$ (либо, что также бывает полезно, если $Z \subseteq Y$).

Пусть X — упорядоченное множество, Y — его подмножество. Элемент $x \in X$ называется *границей для* Y, если $y \prec x$ для всех $y \in Y$. Подмножество, обладающее границей, называется *ограниченным* (в X). Наконец, элемент $x \in X$ называется *максимальным*, если он не предшествует никакому другому элементу в X.

Очевидно, во множестве с дискретным порядком всякий элемент максимален, в множестве 2^X есть ровно один максимальный элемент — само X либо, смотря по смыслу, пустое множество, а в большинстве из остальных указанных примеров максимальных элементов нет.

Лемма (Цорна). (БД) *Пусть X — упорядоченное множество со следующим свойством: любое его подмножество, являющееся линейно упо-*

рядоченным (*в смысле порядка, порожденного исходным порядком в* X), *ограничено. Тогда в* X *есть* (*хотя бы один*) *максимальный элемент.*

Тот факт, что лемма Цорна и аксиома выбора эквивалентны, т. е. каждая может быть выведена из другой, мы в этом курсе принимаем без доказательства. Соответствующее строгое рассуждение см., например, в [27, гл. VII].

* * *

Дадим типовой пример применения леммы Цорна, обосновав с ее помощью нужное нам утверждение из линейной алгебры. Пусть E — линейное пространство. Напомним, что система элементов в E называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима в том смысле, как учат на первом курсе. Далее, *линейным базисом* (или, как еще говорят, базисом Гамеля) в E называется семейство элементов (= векторов) e_ν, $\nu \in \Lambda$, обладающее следующим свойством: каждый элемент $x \in E, x \neq 0$, представим, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов e_ν (т. е. в виде $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{\nu_k} e_{\nu_k}$, $\lambda_{\nu_k} \in \mathbb{C}$) с отличными от нуля коэффициентами. (Подчеркнем, что речь идет, разумеется, о конечных линейных комбинациях — других в линейной алгебре нет.) Нетрудно видеть (проверьте!), что любые два линейных базиса в линейном пространстве имеют одинаковую мощность.

Упражнение 1. Любое (вообще говоря, бесконечномерное) линейное пространство обладает линейным базисом.

Указание 1. Сделайте множество всех линейно независимых систем в заданном пространстве упорядоченным по включению и рассмотрите его максимальный элемент, доставляемый леммой Цорна.

Линейной размерностью (обозначение $\dim E$) линейного пространства называется мощность любого его линейного базиса; как уже упоминалось, от конкретного выбора базиса эта мощность не зависит. Например, как нетрудно усмотреть, линейная размерность пространства финитных последовательностей и пространства многочленов с комплексными коэффициентами от нескольких переменных — это счетная мощность, а линейная размерность пространства всех последовательностей — это континуум.

Если F — подпространство в E, то *коразмерностью подпространства* F *в* E (обозначение $\operatorname{codim}_E F$) называется размерность факторпространства E/F. В частности, равенство $\operatorname{codim}_E F = n$, где $n \in \mathbb{N}$, означает, разумеется, то, что существует n, и притом не меньше чем n, таких векторов $x_1, \ldots, x_n \in E$, что $E = \operatorname{span}\{F, x_1, \ldots, x_n\}$.

Небольшим усложнением упражнения 1 служит

Упражнение 2. Любая линейно независимая система в линейном пространстве E может быть дополнена до линейного базиса в E. Далее (как следствие), для любого собственного подпространства F в E существуют:

(i) отличный от нуля линейный функционал на E, равный нулю на F;

(ii) линейное дополнение к F в E.

Наконец (уже как следствие только что сказанного), любой функционал на F может быть продолжен до функционала на всем пространстве E. В частности, если $E \neq 0$, то на E существуют отличные от нуля функционалы.

* * *

Заслуживает внимания еще одна эквивалентная формулировка аксиомы выбора, которую мы снова примем на веру.

Элемент упорядоченного множества M называется *наименьшим*, если он предшествует всем элементам этого множества. (По очевидной аналогии определяется и наибольший элемент; обратите внимание на то, что наибольший элемент всегда максимален, но обратное, вообще говоря, неверно.)

Теорема Цермело. (БД) *Во всяком множестве можно ввести такой порядок, что любое его непустое подмножество будет обладать наименьшим* (*в этом множестве*) *элементом.*

Доказательство эквивалентности аксиомы выбора, леммы Цорна и теоремы Цермело см., например, в [27].

Замечание. В теореме Цермело речь идет о некоем гипотетическом порядке, явная конструкция которого не указана (на самом деле она даже и не может быть указана) и который вовсе не обязан совпадать с естественным порядком в некоторых стандартных примерах множеств. Например, естественный порядок в $\mathbb{R}$, хотя и линеен, не имеет ничего общего с тем, о котором говорится в обсуждаемой теореме.

* * *

Теперь уточним используемые нами термины и обозначения из действительного анализа[1].

Измеримое пространство (говорят также: пространство с мерой) — это тройка $(X, \mathscr{M}, \mu)$, состоящая из множества X, σ-кольца его подмножеств $\mathscr{M}$ и заданной на $\mathscr{M}$ счетно-аддитивной меры μ.

---

[1] Эту науку вы уже проходили, вероятнее всего, по книгам [26, 18] и/или [52].

Множества из $\mathscr{M}$ называются *измеримыми*. Если существует такое счетное семейство $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$, что для любого множества $Y \in \mathscr{M}$ и $\varepsilon > 0$ найдется множество $Z \in \mathscr{N}$, для которого $\mu(Y \triangle Z) < \varepsilon$, мы будем говорить, что наше измеримое пространство *имеет счетный базис*. Для измеримых пространств мы будем, как правило, применять обозначения типа (X, μ), имея в виду, что задание меры уже подразумевает задание σ-кольца $\mathscr{M}$.

Отображение между измеримыми пространствами называется *измеримым*, если прообраз каждого измеримого множества измерим. Измеримое отображение называется *собственным*, если прообраз каждого множества меры нуль также имеет меру нуль. Как обычно, два отображения между измеримыми пространствами называются *эквивалентными*, если они совпадают почти всюду.

Наиболее важным для нас окажется тот специальный случай, когда X представляет собой действительную прямую $\mathbb{R}$ или ее отрезок $[a, b]$. В этом случае в качестве $\mathscr{M}$ будет всегда, если явно не оговорено обратное, рассмотрено σ-кольцо борелевых подмножеств, обозначаемое через BOR или BOR_b^a, если речь идет об $\mathbb{R}$ или, соответственно, $[a, b]$.

* * *

Что такое метрическое пространство и как определяются в нем открытые и замкнутые множества, наш читатель также знает не понаслышке. Мы лишь добавим к этому (впрочем, тоже, скорее, напомним) следующее. Наличие метрики (= расстояния), которую мы будем, как правило, обозначать $d(\cdot, \cdot)$, приводит к выделению нескольких классов отображений соответствующих множеств, тем или иным способом реагирующих на метрику.

Определение 2. Пусть $\varphi : M_1 \to M_2$ — отображение между метрическими пространствами. Это отображение называется

изометрическим, если для всех $x, y \in M_1$ выполнено равенство $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$;

изометрией, если оно является изометрическим и биективным;

сжимающим[1], если для всех $x, y \in M_1$ выполнено неравенство $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant d(x, y)$;

равномерно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x, y \in M_1$, $d(x, y) < \delta$, выполнено неравенство $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \varepsilon$;

---

[1] Предупреждаем читателя, что часто под сжимающим отображениям понимают то, для которого $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \theta d(x, y)$, где $\theta < 1$. Сейчас, однако, более употребительна та терминология, которая принята здесь.

непрерывным в точке $x_0 \in M_1$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in M_1$, $d(x, x_0) < \delta$, выполнено неравенство $d(\varphi(x), \varphi(x_0)) \leqslant \varepsilon$;

наконец, (просто) *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке пространства M_1.

(Немедленно приведите пример непрерывного, но не равномерно непрерывного отображения!)

Если M — метрическое пространство, а N — его подмножество, то метрику в N, являющуюся ограничением заданной метрики в M, мы будем называть *унаследованной из* M. Подмножество в M с унаследованной метрикой называется *метрическим подпространством* метрического пространства M. Если $x \in M$ и $r > 0$, то открытый шар с центром в x радиуса r, т. е. множество тех точек $y \in M$, для которых $d(x, y) < r$, мы обозначаем через $U(x, r)$. Расстояние от точки $x \in M$ до подмножества $N \subset M$ — это величина $d(x, N) := \inf\{d(x, y) \colon y \in N\}$.

§ 2. Топологические пространства

Читатель, конечно, помнит, что такое сходящаяся последовательность в метрическом пространстве. Понятие метрического пространства было введено около ста лет назад как структура, позволяющая с удобством говорить о сходящихся последовательностях. Постепенно выяснилось, что далеко не всякая естественная сходимость, используемая в анализе, может быть задана с помощью некоторой метрики.

Упражнение 1*. Поточечная (= простая) сходимость в $C[0, 1]$ не может быть задана метрикой. (Последнее означает, что в $C[0, 1]$ не существует такого расстояния d, что последовательность x_n сходится к x в метрическом пространстве $(C[0, 1], d) \Longleftrightarrow$ эта последовательность функций сходится к x поточечно.)

Указание. Если поточечная сходимость влечет сходимость по метрике, то можно показать, что для любой точки $t \in [0, 1]$ и любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $d(y, 0) < \varepsilon$, как только функция $y \in C[0, 1]$ равна нулю вне достаточно малого отрезка $[t, t + h]$. Но тогда найдется последовательность (например, среди функций с трапециевидными графиками), сходящаяся к нулю по метрике, но не поточечно.

Гораздо больше возможностей у другой структуры — так называемой топологии.

Определение 1. Пусть τ — семейство подмножеств некоторого множества Ω. Это семейство называется *топологией* (на Ω), если оно обладает следующими свойствами:

(i) $\varnothing$ (= пустое множество) и само Ω принадлежат τ,

(ii) объединение *произвольного* (т. е. любой мощности) семейства множеств из τ принадлежит τ,

(iii) пересечение любого *конечного* семейства множеств из τ принадлежит τ.

Множество с заданной на нем топологией (строго говоря, пара, состоящая из множества и заданной на нем топологии) называется *топологическим пространством*.

Наука, изучающая топологические пространства (а еще больше — непрерывные отображения этих пространств, о которых пойдет речь впереди), называется топологией. Таким образом, топология (как еще, скажем, алгебра, гомология) — это одно из слов, которым обозначают как конкретное математическое понятие, так и целую дисциплину.

Если семейство τ является топологией, то множества, принадлежащие ему, называются *открытыми*, а их дополнения в Ω — *замкнутыми*. Любое открытое множество, содержащее заданную точку, называется *окрестностью* этой точки. Точка (произвольного) множества $\Delta \subseteq \subseteq \Omega$ называется *внутренней точкой* этого множества, если некоторая ее окрестность содержится в Δ.

Пусть Δ — подмножество топологического пространства Ω. Точка $x \in \Omega$ называется *точкой прикосновения* этого множества, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из Δ. Далее, точка $x \in \Omega$ называется *предельной точкой* множества Δ, если ее любая окрестность содержит хотя бы одну точку из Δ, отличную от x, и *строгой предельной точкой* этого множества Δ, если любая ее окрестность содержит бесконечное число точек из Δ. (Вскоре мы увидим, что это разные вещи.)

Очевидно, *подмножество в Ω замкнуто $\Leftrightarrow$ оно содержит все свои точки прикосновения $\Leftrightarrow$ оно содержит все свои предельные точки*.

Чтобы задать топологию, не обязательно указывать все открытые множества. Пусть (Ω,τ) — топологическое пространство. Совокупность $\tau_0 \subseteq \tau$ называется его *базой*, если каждое множество из τ есть объединение некоторого (вообще говоря, произвольной мощности) семейства множеств из τ_0. Совокупность τ_{00} называется *предбазой* этого пространства, если всевозможные конечные пересечения множеств из τ_{00} образуют его базу.

Предложение 1. *Пусть Ω — множество, а τ_{00} — любая совокупность его подмножеств, содержащая $\varnothing$ и Ω. Тогда существует единственная топология на Ω, предбазой которой служит τ_{00}.*

$\triangleleft$ Обозначим через τ_0 совокупность всевозможных конечных пересечений множеств из τ_{00}, а через τ — совокупность всевозможных объединений множеств из τ_0. Очевидно, τ — топология с предбазой τ_{00}.

Пусть, далее, τ' — некоторая топология с предбазой τ_{00}. Тогда из определения предбазы очевидным образом следует, что $\tau' \subseteq \tau$. В то же время из включения $\tau_{00} \subseteq \tau'$ и определения топологии следует, что $\tau \subseteq \tau'$. ▹

Следующее почти очевидное предложение доставляет альтернативный подход к определению топологического пространства, при котором за основу берутся его замкнутые, а не открытые подмножества.

Предложение 2. *Пусть Ω — топологическое пространство, σ — его совокупность замкнутых подмножеств. Тогда*

(i$'$) *$\varnothing$, $\Omega \in \sigma$,*

(ii$'$) *пересечение произвольного семейства множеств из σ принадлежит σ,*

(iii$'$) *объединение любого конечного семейства множеств из σ принадлежит σ.*

Далее, если Ω — произвольное множество, а σ — некоторая совокупность его подмножеств, обладающая вышеприведенными свойствами, то совокупность, состоящая из дополнений к множествам из σ в Ω, является топологией в Ω. ◃ ▹

Отсюда, в частности, следует, что для любого подмножества S в Ω пересечение всех замкнутых множеств, содержащих S, само замкнуто, а потому является наименьшим из всех содержащих S замкнутых множеств. Это множество, обозначаемое нами S^-, называется *замыканием* множества S.

Как легко видеть, *замыкание множества — это в точности множество его точек прикосновения*.

Пусть Ω — топологическое пространство, а S — его произвольное подмножество. Тогда, взяв пересечения подмножества S со всевозможными открытыми множествами в Ω, мы, очевидно, получим топологию в S. Про такую топологию мы будем говорить, что она *унаследована из* Ω. Само подмножество S, рассмотренное с этой топологией, называется *топологическим подпространством в* Ω.

Далее, если π — сюръективное отображение топологического пространства Ω на некоторое множество Δ, то, взяв в Δ те подмножества, прообразы которых открыты в Ω, мы снова получим топологию. Множество Δ, рассмотренное с построенной подобным способом топологией, называется *топологическим факторпространством пространства Ω, порожденным отображением π*.

* * *

От общих конструкций мы переходим к примерам. Вот вам дают произвольное множество Ω и требуют немедленно снабдить его какойлибо топологией. Тогда вы наверняка предложите одну из двух возможностей (а уж какую — зависит от вашего темперамента; наверное, холерики предложат первый пример, а меланхолики — второй).

Пример 1. Открытыми множествами объявлены все без исключения подмножества в Ω. Такая топология называется *дискретной*, а пространство Ω с этой топологией — *дискретным топологическим пространством*.

Пример 2. Открытыми множествами объявлены только два обязательных: $\varnothing$ и само Ω. Такая топология называется *антидискретной*, а пространство Ω с этой топологией — *антидискретным топологическим пространством*, или, как еще образно говорят, пространством слипшихся точек.

* * *

Пусть S и T — подмножества топологического пространства Ω. Говорят, что подмножество S *плотно* (или *всюду плотно*) в T, если каждая окрестность точки из T содержит точку из S. (Проверьте, что это эквивалентно тому, что T лежит в замыкании множества S.) Топологическое пространство называется *сепарабельным* (чрезвычайно важное понятие!), если оно содержит плотное в нем подмножество, которое не более чем счетно.

Например, дискретное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда оно само не более чем счетно. Антидискретное пространство всегда сепарабельно.

При доказательстве сепарабельности ряда пространств и в других вопросах удобно следующее очевидное

Предложение 3. *Пусть E, F, G — подмножества в топологическом пространстве Ω, причем E плотно в F, а F — в G. Тогда подмножество E плотно в G.* ◃▹

Следующий факт, напротив, позволяет распознавать заведомо не сепарабельные пространства.

Предложение 4. *Пусть Δ — подмножество в сепарабельном топологическом пространстве Ω, у точек которого существуют попарно непересекающиеся окрестности. Тогда подмножество Δ не более чем счетно.*

◃ Если U_x, $x \in \Delta$, — упомянутые окрестности, а Ω_0 — плотное не более чем счетное подмножество в Ω, то, произвольным образом сопоставив каждому элементу $x \in \Delta$ точку из Ω_0, лежащую в U_x, мы получим инъективное отображение из Δ в Ω_0. Дальнейшее очевидно. ▹

Следствие 1. *Пусть N — такое подмножество в сепарабельном метрическом пространстве M, что для некоторого $\theta > 0$ для всех $x, y \in N$,*

$x \neq y$, выполнено неравенство $d(x, y) \geqslant \theta$. Тогда подмножество N не более чем счетно.

Упражнение 2. В несепарабельном метрическом пространстве найдется такое несчетное подмножество N, что для некоторого $\theta > 0$ для всех $x, y \in N$, $x \neq y$, выполнено неравенство $d(x, y) \geqslant \theta$.

Пусть τ_1 и τ_2 — две топологии на одном и том же множестве Ω. Говорят, что τ_1 *не сильнее* (или *не тоньше*), чем τ_2, если каждое множество, открытое в смысле первой топологии, открыто и в смысле второй, т. е. попросту $\tau_1 \subseteq \tau_2$. В этой же ситуации говорят, что τ_2 *не слабее* (или *не грубее*), чем τ_1. *Сильнее* (= *тоньше*) — это значит «не слабее и не совпадает», а *слабее* (= *грубее*) — это значит «не сильнее и не совпадает». Обсуждая те же топологии, выделим очевидное

Предложение 5. *Первая топология не сильнее второй тогда и только тогда, когда для любого подмножества в Ω каждая его точка, являющаяся внутренней относительно первой топологии, является внутренней и относительно второй.*

Две топологии совпадают тогда и только тогда, когда каждое подмножество в Ω имеет относительно этих топологий один и тот же запас внутренних точек. ◃▹

Теперь ответим на вопрос, возникший у читателя: по какому праву мы употребляем термины «открытое» и «замкнутое» множество? Ведь они уже встречались в контексте метрических пространств и там, казалось бы, имеют совсем другой смысл. Путаницы, однако, не возникает.

Предложение 6. *Пусть (M, d) — метрическое пространство. Тогда совокупность его открытых (в смысле заданной метрики) подмножеств является топологией.*

◃ Элементарная проверка показывает, что выполнены свойства, фигурирующие в определении 1. ▹

Таким образом, любое метрическое пространство автоматически является топологическим, и при этом оба смысла термина «открытое множество» согласованы. Соответствующую топологию метрического пространства мы будем называть *топологией, порожденной* (или *индуцированной*) *заданной метрикой*. Разумеется, оба смысла таких понятий, как «замкнутое множество», «внутренняя точка», «замыкание», «плотное подмножество» и «сепарабельное пространство» также согласованы (объясните, почему).

Топология, для которой существует порождающая ее метрика, называется *метризуемой*, а соответствующее топологическое пространство — *метризуемым*. Как простейший пример, всякое дискретное топологическое пространство Ω метризуемо: его топология порождена так называемой *дискретной метрикой* по правилу $d(x,y)=1$ при $x\neq y$ и (будем последовательны!) $d(x,y)=0$ при $x=y$.

Кстати, уже этот пример показывает, что разные метрики могут порождать одну и ту же топологию: нетрудно показать, что топология, порождаемая метрикой d, дискретна тогда и только тогда, когда для любой точки $x\in\Omega$ выполнено неравенство $\inf\{d(x,y)\colon y\in \in\Omega\setminus\{x\}\}>0$.

Другой, классический для анализа, пример метризуемого топологического пространства — это расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ (= сфера Римана; см., например, [47]).

Вопрос о том, какие топологии метризуемы, а какие нет — это одна из важнейших общих проблем топологии (см., например, [23]). В нашем курсе мы лишь укажем весьма «грубое» необходимое условие метризуемости, имеющее и большую самостоятельную важность.

Определение 2. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*[1)] (или *отделимым*), если любые две его различные точки обладают непересекающимися окрестностями.

Отметим то полезное свойство указанных пространств, что *каждое одноточечное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто* (ибо все точки его дополнения — внутренние).

Впрочем, этим свойством могут обладать и другие пространства; ср. далее пример 4.

Предложение 7. *Любое метризуемое топологическое пространство хаусдорфово.*

◁ Если x и y — различные точки топологического пространства, топология которого порождена метрикой d, то в качестве искомых окрестностей достаточно взять открытые шары $U(x,r)$ и $U(y,r)$, где $r=\frac{1}{2}d(x,y)$. ▷

Отсюда немедленно следует, что любое антидискретное пространство, состоящее более чем из одной точки, не метризуемо.

Замечание. В метрических пространствах, как вы хорошо знаете, всякая предельная точка автоматически удовлетворяет и определению строго предельной точки. Как легко видеть, то же верно и для любых хаусдорфовых пространств. Однако для общих топологических пространств это уже не так. Простейший контрпример дает антидискретное пространство из двух точек.

Разумеется, любое топологическое подпространство хаусдорфова пространства само хаусдорфово.

[1)] В честь одного из основателей топологии Феликса Хаусдорфа.

ГЛАВА 6

ГИЛЬБЕРТОВЫ СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

§1. Гильбертова сопряженность: первые сведения

Не секрет, что более 90% работ по теории операторов посвящены операторам, действующим в гильбертовым пространствах. Почему это так? А потому что в алгебре $\mathscr{B}(H)$, где H — гильбертово пространство, определена еще одна важная алгебраическая операция, которой нет в $\mathscr{B}(E)$ для общих банаховых пространств E. Это переход к гильбертову сопряженному оператору.

Вы уже знаете, что такое банахов сопряженный оператор и где он действует: между пространствами, сопряженными к исходным банаховым пространствам, «меняя направление стрелки». Это, конечно, относится и к операторам между двумя гильбертовыми пространствами. Но в этой ситуации, используя «гильбертову» специфику, мы сможем сопоставить исходному оператору оператор, связывающий *те же самые* пространства (а не их сопряженные).

Теперь от слов к делу. Везде в данном параграфе, если не оговорено что-нибудь другое, H и K — произвольные гильбертовы пространства, а $T: H \to K$ — произвольный ограниченный оператор. Банахов сопряженный оператор к T мы будем отныне, опасаясь недоразумений, всегда обозначать T^{b*}. Напомним о канонических биекциях $I: H \to H^*$ и $J: K \to K^*$, доставляемых теоремой Рисса.

Предложение 1. *Существует единственный ограниченный оператор $T^{h*}: K \to H$, делающий коммутативной диаграмму*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, "I"'] & K \arrow[l, "T^{h*}"'] \arrow[d, "J"] \\ H^* & K^* \arrow[l, "T^{b*}"'] \end{tikzcd}$$

◁ Ясно, что есть только одно отображение, делающее диаграмму коммутативной, и это $I^{-1}T^{b*}J$. Будучи композицией линейного (он в середине) и двух сопряженно-линейных операторов, это, как легко проверить, «настоящий» линейный оператор. То, что он ограничен, очевидным образом следует из ограниченности оператора T^{b*} и сохранения норм отображениями J и I^{-1}. ▹

Следующее определение — одно из важнейших во всей этой книге.

Определение 1. Построенный оператор T^{h*} (т. е. $I^{-1}T^{b*}J$) называется *гильбертовым сопряженным* к оператору T.

Предупреждение. С этого момента на протяжении всей книги мы будем все чаще говорить просто «сопряженный» вместо «гильбертов сопряженный» и все чаще употреблять обозначение T^* вместо T^{h*}.

Введенные операторы можно охарактеризовать с помощью двух эквивалентных фундаментальных тождеств, каждое из которых часто приводится в учебниках как исходное определение гильбертова сопряженного оператора.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) T^* — *такой единственный оператор из K в H, что для всех $x \in H$ и $y \in K$ выполнено равенство $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$,*

(ii) *то же верно, с заменой указанного равенства на соотношение $\langle y, Tx\rangle = \langle T^*y, x\rangle$.*

◃ (i) С учетом коммутативности приведенной выше диаграммы

$$\langle Tx, y\rangle = [Jy](Tx) = [T^{b*}Jy](x) = [IT^*y](x) = \langle x, T^*y\rangle.$$

Теперь об упомянутой единственности. Если для линейного оператора $S\colon K \to H$ и всех $x \in H, y \in K$ выполнено равенство $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$, то для тех же x, y выполнено условие $x \perp (T^* - S)y$, откуда $S = T^*$.

(ii) Это утверждение следует из (i) и сопряженной симметричности скалярного произведения. ▹

Указанные тождества мы будем называть *соотношениями сопряженности*.

Вот еще один подход к обсуждаемому понятию. Пусть $\mathscr{R}\colon H \times K \to \mathbb{C}$ — ограниченный сопряженно-билинейный функционал. Обозначим через $\mathscr{R}^*\colon K \times H \to \mathbb{C}$ отображение $(y, x) \mapsto \overline{\mathscr{R}(x, y)}$; очевидно, это также ограниченный сопряженно-билинейный функционал. Из соотношений сопряженности очевидным образом следует

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{S}_T$ — сопряженно-билинейный функционал, ассоциированный с T* (см. § 2.3). *Тогда T^* — это тот* (*единственный*) *оператор, с которым ассоциирован $(\mathscr{S}_T)^*$.* ◃▹

Наиболее интересен случай, когда H и K суть одно и то же пространство. Тогда, разумеется, и T^* действует в том же пространстве H (не в пример T^{b*}!). В алгебре $\mathscr{B}(H)$ возникает выдающаяся по важности дополнительная структура — операция $T \mapsto T^*$ («гильбертова звездочка»), о которой еще многое нам предстоит узнать.

Определяя гильбертовы сопряженные операторы, мы, как обычно, говорили о комплексных гильбертовых пространствах. Разумеется, определение 1 может быть дословно повторено и для действительных гильбертовых пространств. Однако в этом контексте гильбертова сопряженность практически не является чем-то новым по сравнению с банаховой. Дело в том, что в «действительном случае» канонические биекции являются настоящими (линейными) изометрическими изоморфизмами. Поэтому диаграмма из определения 1 показывает, что операторы T^{h*} и T^{b*} слабо унитарно эквивалентны, а в случае $H = K$ — даже унитарно эквивалентны.

Однако для комплексных гильбертовых пространств гильбертова и банахова сопряженность — это далеко не одно и то же. В этом вас должно убедить уже следующее простое наблюдение.

Упражнение 1. Пусть $T := i\mathbf{1}\colon l_2 \to l_2$. Тогда T^{b*} совпадает, с точностью до унитарной эквивалентности, с тем же оператором $i\mathbf{1}$, в то время как $T^* = -i\mathbf{1}$. Как следствие, оператор T^* (не только не унитарно, но даже) *не топологически эквивалентен* T.

Указание. Заметим, что оператор, осуществляющий унитарную эквивалентность, действует по правилу $\eta \mapsto f_\eta$ (упражнение 1.6.3), а каноническая биекция — по правилу $\eta \mapsto f_{\overline{\eta}}$.

(Впрочем, для того чтобы придать точный смысл заявлению о том, что гильбертова и банахова сопряженность — это «одно и то же» в действительном и «не одно и то же» в комплексном случае, нужен язык функторов; см. далее предназначенное для отличников упражнение 2.)

Замечание. В то же время в обеих конструкциях есть много общего. Например, банахов сопряженный некоторого оператора является топологически инъективным, топологически сюръективным, изометрическим или коизометрическим тогда и только тогда, когда таков же и гильбертов сопряженный. Это очевидным образом следует из того, что отображения I и J суть изометрии метрических пространств.

* * *

Операция «гильбертова звездочка» обладает следующими свойствами.

Предложение 3. *Пусть* $T\colon H_1 \to K_1$ *и* $S\colon H_2 \to K_2$ — *ограниченные операторы между гильбертовыми пространствами. Тогда*

(i) *если* $H_1 = H_2$ *и* $K_1 = K_2$, *то* $(S + T)^* = S^* + T^*$ (аддитивность);

(ii) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ (сопряженная однородность; сравните это с «простой» однородностью в упражнении 2.5.2 (ii));

(iii) *если* $H_1 = K_2$, *то* $(TS)^* = S^*T^*$ (антигомоморфность);
(iv) $T^{**} = T$ (период 2);
(v) $\|T^*\| = \|T\|$ (изометричность).

Кроме того, $\mathbf{1}_H^* = \mathbf{1}_H$ *для любого гильбертова пространства* H.

◁ Все эти свойства легко следуют из соотношений сопряженности. Мы ограничимся проверкой свойства (iv). Из теоремы 1 применительно к T^* в качестве исходного оператора следует, что для любых $x \in H_1$ и $y \in K_1$ выполнено равенство $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, T^{**}x\rangle$, и в то же время

$$\langle T^*y, x\rangle = \overline{\langle x, T^*y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle.$$

Отсюда в силу упомянутой в теореме 1 единственности $T^{**} = T$. ▷

Заметим, что равенство $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$, помимо того, что оно легко проверяется непосредственно, следует также из (iii) и (iv). Сделайте это в качестве легкой разминки.

Следствие 1. *Отображение* $T \mapsto T^*$ *из* $\mathscr{B}(H,K)$ *в* $\mathscr{B}(K,H)$ *непрерывно по операторной норме; в частности, из условия* $T_n \to T$ *при* $n \to \infty$ *следует, что* $T_n^* \to T^*$ *при* $n \to \infty$.

Следующий факт имеет настолько важные применения, что заслуживает звания теоремы.

Теорема 2. *Для любого* $T \in \mathscr{B}(H,K)$ *выполнено равенство*

$$\|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Неравенство $\leqslant$ следует из сохранения нормы операцией «гильбертова звездочка» и мультипликативного неравенства. Неравенство $\geqslant$ следует из того, что для любого $x \in Ш_H$ выполнено неравенство

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \|T^*T\|\|x\|^2 \leqslant \|T^*T\|. \ ▷$$

Установленное равенство называется C^*-*тождеством*. Не очень ласкающее слух, но — что делать — повсеместно и давно установившееся название. (Откуда оно взялось, мы упомянем в § 3.)

Кое-что добавим для отличника. Как и подобает уважающей себя конструкции, за переходом $T \mapsto T^{h*}$ скрывается функтор. Это контравариантный *функтор гильбертовой сопряженности* $({}^{h*})\colon \mathrm{HIL} \to \mathrm{HIL}$, оставляющий объекты на месте и переводящий каждый морфизм (= ограниченный оператор) T в T^{h*}. Аксиомы контравариантного функтора сразу следуют из предложения 3 (iii). Наряду с этим функтором, рассмотрим функтор $({}^{b*})\colon \mathrm{HIL} \to \mathrm{HIL}$, определяемый как очевидное «биограничение» функтора банаховой сопряженности из § 2.5. Аналогично определяемая пара функторов действует и в HIL_1.

Упражнение 2. Будучи рассмотрены в любой из категорий HIL или HIL_1, функторы $({}^{h*})$ и $({}^{b*})$ не являются естественно эквивалентными, однако оказываются естественно эквивалентными при замене комплексных гильбертовых пространств на действительные.

А теперь достанем из нашего мешка операторов те особи, которые действуют в гильбертовых пространствах. Каковы их (гильбертовы) сопряженные? Элементарная проверка соотношений сопряженности позволяет легко сделать следующие несколько упражнений.

Упражнение 3. (i) Сопряженным к диагональному оператору

$$T_\lambda : l_2 \to l_2$$

является $T_{\overline{\lambda}}$, где $\overline{\lambda}$ — комплексно-сопряженная к λ последовательность.

(ii) Сопряженным к оператору левого сдвига $T_l : l_2 \to l_2$ является оператор правого сдвига T_r, и наоборот.

(iii) Сопряженным к оператору умножения на функцию

$$T_f : L_2(X, \mu) \to L_2(X, \mu)$$

является $T_{\overline{f}}$, где $\overline{f}$ — комплексно-сопряженная к f функция.

(iv) Оператор, сопряженный к оператору неопределенного интегрирования в $L_2[0,1]$, действует по правилу $x \mapsto y$, где $y(t) := \int\limits_t^1 x(s)\,ds$.

Следующее утверждение, обобщающее последний пример, заслуживает особого внимания.

Предложение 4. *Пусть $T_K : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ — интегральный оператор с производящей функцией $K(s,t)$. Тогда его сопряженный — это интегральный оператор T_{K^*} с производящей функцией $K^*(s,t) := \overline{K(t,s)}$.*

◁ Для любых $x, z \in L_2[a,b]$ выполнено равенство

$$\langle T_K x, z\rangle = \int\limits_a^b [T_K x](s)\overline{z(s)}\,ds = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(s,t)x(t)\,dt\right)\overline{z(s)}\,ds.$$

Поскольку $K(s,t)$ и $x(t)\overline{z(s)}$ лежат в $L_2(\square)$, произведение этих функций интегрируемо на квадрате $\square$. Поэтому в силу теоремы Фубини указанный двойной интеграл равен

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(s,t)x(t)\overline{z(s)}\,ds\right)dt = \int\limits_a^b x(t)\overline{\left(\int\limits_a^b \overline{K(s,t)}z(s)\,ds\right)}\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b x(t)\overline{\left(\int\limits_a^b K^*(t,s)z(s)\,ds\right)}\,dt = \langle x, T_{K^*}z\rangle. \quad ▷$$

Теперь расскажем, как взаимодействуют основные геометрические образы, связанные с заданным оператором и его сопряженным.

Следующая теорема — это дальнейшее обобщение наблюдений, сделанных еще Фредгольмом в контексте интегральных уравнений, а затем переосмысленных Гильбертом.

Теорема 3. *Пусть $T : H \to K$ — оператор между гильбертовыми пространствами. Тогда*

$$(\mathrm{Im}(T))^{\perp} = \mathrm{Ker}(T^*) \quad и \quad (\mathrm{Ker}(T))^{\perp} = (\mathrm{Im}(T^*))^{-}$$

(*черточка наверху, как обычно, означает замыкание*); *иными словами,*

$$K = (\mathrm{Im}(T))^{-} \dot{\oplus} \mathrm{Ker}(T^*) \quad и \quad H = \mathrm{Ker}(T) \dot{\oplus} \mathrm{Im}(T^*)^{-}.$$

◃ Первое равенство следует из эквивалентностей

$$x \in (\mathrm{Im}(T))^{\perp} \Leftrightarrow \langle x, Ty\rangle = 0 \text{ для всех } y \in H \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle T^*x, y\rangle = 0 \text{ для тех же } y \Leftrightarrow T^*x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(T^*).$$

Отсюда с учетом предложений 2.3.4 и 3 (iv) мы получаем

$$(\mathrm{Im}(T^*))^{-} = (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp\perp} = (\mathrm{Ker}(T^{**}))^{\perp} = (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}.$$

Дальнейшее очевидно. ▹

Предложение 5. *Если оператор T действует в H и H_0 — его инвариантное подпространство, то $H_0^{\perp}$ — инвариантное подпространство для T^*.*

◃ Поскольку условие $y \in H_0$ влечет $Ty \in H_0$, из равенства $\langle x, y\rangle = 0$ для всех $y \in H_0$ следует, что $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0$ для тех же y. Дальнейшее очевидно. ▹

Покажем, что целый ряд возможных свойств заданного оператора сохраняется при переходе к его сопряженному.

Предложение 6. *Если T — одномерный оператор вида $x \bigcirc y$* (ср. начало § 3.4)*, то оператор T^* также одномерен и $T^* = y \bigcirc x$.*

◃ Следует из элементарной проверки соотношений сопряженности. ▹

Предложение 7. *Если оператор T конечномерен, то и T^* конечномерен, причем* $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathrm{Im}(T^*)$.

◃ Поскольку образ $\mathrm{Im}(T)$ замкнут, из теоремы 3 следует, что

$$\mathrm{Im}(T^*) = T^*(\mathrm{Ker}(T^*) \oplus \mathrm{Im}(T)) = \mathrm{Im}(T^*|_{\mathrm{Im}(T)}).$$

Поскольку $\mathrm{Ker}(T^*) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$, оператор $T^*|_{\mathrm{Im}(T)}$ инъективен. Дальнейшее очевидно. ▹

Упражнение 4. Выведите тот же факт из предложения 6.

Указание. Возьмите представление $T = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \bigcirc y_k$ с линейно независимыми системами $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_n\}$.

Предложение 8. *Если оператор T компактен, то и T^* компактен. При этом если $T = \sum_n s_n e'_n \bigcirc e''_n$ — разложение оператора в сумму, фигурирующую в теореме Шмидта, то $T^* = \sum_n s_n e''_n \bigcirc e'_n$.*

◁ Сам факт компактности оператора T^* не требует такого сильного средства, как теорема Шмидта. А именно, в силу предложения 3.3.7 оператор T аппроксимируется по операторной норме конечномерными операторами. На основании следствия 1 отсюда следует, что оператор T^* аппроксимируется операторами, сопряженными к конечномерным, которые, ввиду предыдущего предложения, сами конечномерны.

Теперь вспомним о теореме Шмидта и рассмотрим указанное там разложение для T. Тогда из предложения 6 с учетом алгебраических и топологических свойств «гильбертовой звездочки» немедленно следует требуемое разложение для оператора T^*. Из последнего также, конечно, видно, что оператор T^* аппроксимируется конечномерными операторами. ▷

Предложение 9. *Если оператор S фредгольмов, то и оператор S^* фредгольмов.*

◁ Согласно части ⇒ теоремы Никольского существуют операторы R, T_1, T_2 с указанными там свойствами. Но тогда в силу предложений 3 и 8 условиям той же теоремы, в ее части ⇐, удовлетворяют операторы R^*, T_2^*, T_1^*. Дальнейшее очевидно. ▷

Вооружившись полученными знаниями, мы вернемся в седую классику, к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода (см. § 3.5). Теперь, наряду с исходным уравнением

$$x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt = y(s), \tag{1}$$

мы рассмотрим и его так называемое *сопряженное уравнение*

$$x(s) - \int_a^b K^*(s,t)x(t)\,dt = y(s). \tag{1*}$$

Ранее уже отмечалось, что уравнение (1) — это то же самое, что операторное уравнение $Sx = y$ в пространстве $L_2[a,b]$, где $S = \mathbf{1} - T$, а T — интегральный оператор с производящей функцией $K(s,t)$. Столь же очевидно, с учетом предложения 4, что уравнение (1^*) — это то же самое, что операторное уравнение $S^*x = y$ в том же пространстве.

Пусть, далее,

$$x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt = 0, \tag{2}$$

$$x(s) - \int_a^b K^*(s,t)x(t)\,dt = 0 \tag{2*}$$

— соответствующие однородные уравнения. Сохраняя стиль теоремы 3.5.5, сформулируем ее обещанное добавление.

Предложение 10 (Фредгольм). *Пусть $x_1, \ldots, x_m$ и $z_1, \ldots, z_n$ — наборы линейно независимых функций, фигурирующие в теореме 3.5.5*[1]*. Тогда*

(i) *функции $z_1, \ldots, z_n$ — такие решения однородного уравнения (2^*), что всякое решение этого однородного уравнения есть линейная комбинация указанных решений;*

(ii) *правые части $y(s)$, при которых уравнение (1^*) имеет хотя бы одно решение, — это в точности те функции, для которых*

$$\int_a^b y(t)\overline{x_k(t)}\,dt = 0$$

при $k = 1, \ldots, m$.

◁ В силу теоремы 3.5.5 (ii) справедливо равенство $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{span}\{z_1, \ldots, z_n\}^\perp$. Взяв ортогональные дополнения и используя теорему 3, мы получаем, что $\mathrm{Ker}(S^*) = \mathrm{span}\{z_1, \ldots, z_n\}$, а это равносильно утверждению (i).

Далее, из теоремы 3.5.5 (i) следует равенство $\mathrm{Ker}(S) = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_m\}$, а предложение 9 обеспечивает замкнутость образа $\mathrm{Im}(S^*)$. Поэтому на основании теоремы 3 мы получаем $\mathrm{Im}(S^*) = (\mathrm{Ker}(S))^\perp = \{x_1, \ldots, x_m\}^\perp$, а это равносильно утверждению (ii). ▷

Вот еще одно применение теоремы 3.

Упражнение 5. (Ср. упражнения 2.5.6 и 2.5.7.) (i) Оператор между гильбертовыми пространствами, сопряженный к изометрическому, является коизометрическим, и наоборот.

(ii) Оператор между гильбертовыми пространствами, сопряженный к топологически инъективному, является топологически сюръективным, и наоборот.

Указание. Если оператор $V: H_1 \to H_2$ коизометричен, то проверка соотношений сопряженности показывает, что V^* переводит y в тот единственный вектор $x \perp \mathrm{Ker}(V)$, для которого $Vx = y$.

---

[1] Мы знаем, что $m = n$, но сейчас это роли не играет.

А сейчас мы покажем, как некоторые классы операторов, определявшиеся в терминах «гильбертовой геометрии», могут быть охарактеризованы чисто алгебраически, с участием операции «гильбертова звездочка». То, что мы сделаем, в сжатой форме будет выглядеть как следующий алгебро-геометрический словарик:

$U^* = U^{-1}$ — унитарный оператор;

$P^* = P = P^2$ — ортопроектор;

$J^* = J = J^{-1}$ — ортогональное отражение;

$V^*V = \mathbf{1}$ — изометрический оператор;

$VV^* = \mathbf{1}$ — коизометрический оператор;

$WW^*W = W$ — частично изометрический оператор.

Объясним, что все это значит.

Предложение 11. *Оператор $U\colon H_1 \to H_2$ является унитарным тогда и только тогда, когда он обратим, и его обратный совпадает с его сопряженным.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$ Поскольку оператор U обратим и сохраняет скалярные произведения, для любых $x \in H_1, y \in H_2$ выполнено равенство

$$\langle x, U^{-1}y\rangle = \langle Ux, UU^{-1}y\rangle = \langle Ux, y\rangle = \langle x, U^*y\rangle.$$

$\Leftarrow$ Для тех же x, y справедливо равенство

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, U^{-1}Uy\rangle = \langle x, y\rangle. \ \triangleright$$

Предложение 12. *Оператор $P\colon H \to H$ является ортопроектором тогда и только тогда, когда он идемпотентен и совпадает со своим сопряженным.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$ Раз P — проектор, то $P^2 = P$, и по условию $\mathrm{Ker}(P) \perp \mathrm{Im}(P)$. Поэтому для любых $x, y \in H$ с учетом условия $Py - y \in \mathrm{Ker}(P)$ выполнено равенство $\langle Px, y\rangle = \langle Px, y + (Py - y)\rangle = \langle Px, Py\rangle$, и точно так же $\langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle$. Отсюда, разумеется, $P^* = P$.

$\Leftarrow$ Раз $P^2 = P$, то P — проектор. Теорема 3 с учетом $P^* = P$ гарантирует условие $\mathrm{Ker}(P) \perp \mathrm{Im}(P)$. $\triangleright$

Предупреждение. Начиная с этого момента, везде в главе, говоря «проектор», мы подразумеваем ортогональный проектор: другие проекторы нам не понадобятся.

В следующих упражнениях мы, напротив, предлагаем вам описать геометрическое действие оператора, исходя из его алгебраических свойств.

Упражнение 6. Как действует оператор $J\colon H \to H$, совпадающий и со своим обратным, и со своим сопряженным? (Ответ: существует