М. И. Шабунин
Е. С. Половинкин
М. И. Карлов

Сборник задач по теории функций комплексного переменного

МАТЕМАТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

М. И. Шабунин, Е. С. Половинкин, М. И. Карлов

Сборник задач по теории функций комплексного переменного

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных
математики и физики
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений
по направлению «Прикладные математика и физика»

4-е издание (электронное)

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 517
ББК 22.161.5
Ш12

Шабунин М. И.

Ш12 Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Электронный ресурс] / М. И. Шабунин, Е. С. Половинкин, М. И. Карлов. — 4-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 365 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2658-7

Исчерпывающий задачник по теории функций комплексного переменного, который авторы написали, основываясь на многолетнем опыте преподавания этого предмета в Московском физико-техническом институте. Каждый раздел предваряется справочным материалом. Приводятся решения задач и ответы.

Для студентов и преподавателей математических факультетов вузов.

УДК 517
ББК 22.161.5

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Сборник задач по теории функций комплексного переменного / М. И. Шабунин, Е. С. Половинкин, М. И. Карлов. — 2-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 362 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-0431-8.

ISBN 978-5-9963-2658-7

Предисловие

Предлагаемый читателю «Сборник задач по теории функций комплексного переменного» предназначен для студентов инженерно-физических и физико-технических специальностей вузов, а также студентов университетов. При создании сборника авторы опирались на опыт преподавания ТФКП в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

Сборник состоит из шести глав. В первой главе рассматриваются комплексные числа, последовательности и ряды комплексных чисел, комплекснозначные функции действительного и комплексного переменного, предел, непрерывность и интегрируемость функций комплексного переменного.

Во второй главе изучаются регулярные функции и их свойства, последовательности и ряды регулярных функций.

Третья глава посвящена изучению рядов Лорана, изолированных особых точек однозначного характера, вычислению интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов.

В четвертой главе речь идет о многозначных аналитических функциях. Большое внимание уделяется выделению регулярных ветвей многозначных функций, вычислению значений регулярных ветвей и их разложению в ряды Тейлора и Лорана. Исследуются аналитические продолжения и полные аналитические функции, а также их особые точки.

В пятой главе теория вычетов применяется для вычисления несобственных интегралов, а также для разложения мероморфных функций в ряды простейших дробей и в бесконечные произведения.

В шестой главе рассматриваются конформные отображения, их применение для решения краевых задач, а также элементы операционного исчисления.

«Сборник» составлен с таким расчетом, чтобы им можно было пользоваться при любом построении лекционного курса. С этой целью параграфы сделаны более или менее независимыми друг от друга. Все необходимые ссылки на задачи других разделов приводятся с указаниями.

Каждый параграф начинается с изложения необходимых теоретических сведений по тематике параграфа. Далее проведен разбор решений типичных задач. После этого помещены задачи. Все указания к решениям даны в основном тексте, а ответы приведены в конце каждого параграфа.

Значительная часть задач составлена авторами специально для «Сборника». Авторы также частично использовали материалы «Сборника задач по теории аналитических функций» под редакцией М. А. Евграфова, а также задачи, предлагавшиеся студентам МФТИ в контрольных работах по ТФКП.

Авторы выражают глубокую благодарность коллективу кафедры высшей математики МФТИ, многолетняя плодотворная работа которого в значительной степени способствовала появлению этого сборника.

Глава 1
Введение

§ 1. Комплексные числа

Справочные сведения

1. Определение комплексного числа. *Комплексные числа* — выражения вида $a+bi$ (a, b — действительные числа, i — некоторый символ). Равенство $z = a + bi$ означает, что комплексное число $a + bi$ обозначено буквой z, а запись комплексного числа z в виде $a + bi$ называют *алгебраической формой комплексного числа.*

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называют *равными* и пишут $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Сложение и *умножение* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ производится согласно формулам

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i, \tag{1}$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \tag{2}$$

Комплексное число вида $a + 0 \cdot i$ отождествляют с действительным числом a ($a + 0 \cdot i = a$), число вида $0 + bi$ ($b \neq 0$) называют *чисто мнимым* и обозначают bi; i называют *мнимой единицей.* Действительное число a называют *действительной частью* комплексного числа $z = a + bi$ и пишут $\operatorname{Re} z = a$, число b называют *мнимой частью* z и пишут $\operatorname{Im} z = b$.

Из формулы (2) следует, что

$$i^2 = -1, \tag{3}$$

а формулы (1) и (2) получаются по правилам сложения и умножения двучленов $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ с учетом равенства (3).

Операции вычитания и деления определяются как обратные для сложения и умножения, а для разности $z_1 - z_2$ и частного $\dfrac{z_1}{z_2}$ (при $z_2 \neq 0$) комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ имеют место формулы

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Сложение и умножение комплексных чисел обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$
$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Множество комплексных чисел, в котором операции сложения и умножения определяются формулами (1) и (2), обозначается символом $\mathbb{C}$.

2. Модуль комплексного числа. Комплексно сопряженные числа. *Модулем комплексного числа* $z = a + bi$ (обозначается $|z|$) называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$, т. е.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливы равенства

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$
$$\text{если} \quad z_2 \neq 0, \quad \text{то} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + bi$ и обозначается $\overline{z}$, т. е.

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Справедливы равенства

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Для любых комплексных чисел z_1, z_2 верны равенства:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2;$$
$$\text{если} \quad z_2 \neq 0, \quad \text{то} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}.$$

Частное от деления комплексных чисел можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0. \tag{4}$$

3. Геометрическое изображение комплексных чисел. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой плоскости с координатами (a, b), и эта точка обозначается той же буквой z (рис. 1.1). Действительные числа изображаются точками оси абсцисс (ее называют *действительной*

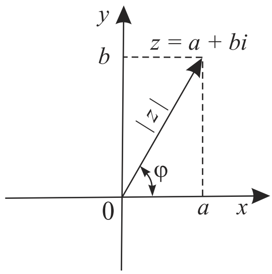

Рис. 1.1

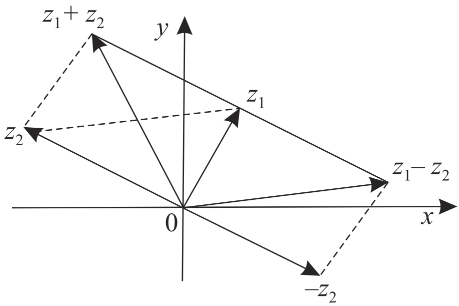

Рис. 1.2

осью), а чисто мнимые числа — точками оси ординат (ее называют *мнимой осью*). Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью.*

Комплексному числу $z = a + bi$ можно сопоставить вектор с началом в точке O и концом в точке z (см. рис. 1.1). Этот вектор будем обозначать той же буквой z, его длина равна $|z|$.

Числу $z_1 + z_2$ соответствует вектор, построенный по правилу сложения векторов z_1 и z_2 (рис. 1.2), а вектор $z_1 - z_2$ можно построить как сумму векторов z_1 и $-z_2$.

Расстояние между точками z_1 и z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т. е.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

где $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Условию $|z - z_0| = R$, где z_0 — заданное комплексное число, $R > 0$, удовлетворяют точки, лежащие на окружности радиуса R с центром в точке z_0.

Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливы неравенства

$$|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 \pm z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||.$$

4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. *Аргументом комплексного числа* $z \neq 0$ называется угол φ между положительным направлением действительной оси и вектором z (рис. 1.1). Этот угол считается положительным, если отсчет угла ведется против часовой стрелки, и отрицательным — при отсчете по часовой стрелке.

Связь между действительной и мнимой частями комплексного числа $z = a + bi$ и его модулем $r = |z|$ и аргументом φ выражается следующими формулами:

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \tag{6}$$

Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ $(z \neq 0)$ можно найти, решив систему (6). Эта система имеет бесконечно много решений вида $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, φ_0 — одно из решений системы (6), т. е. аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Чтобы подчеркнуть зависимость угла φ_0 от точки z, будем использовать обозначение $\varphi_0 = \arg z$. Множество всех значений аргумента числа z будем обозначать $\operatorname{Arg} z$, т. е. $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

Для нахождения аргумента комплексного числа $z = a + bi$ $(a \neq 0)$ можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \tag{7}$$

При нахождении аргумента комплексного числа z с помощью формулы (7) нужно обратить внимание на то, в какой четверти находится точка $z = a + bi$.

Из равенств (5) следует, что любое комплексное число $z = a + bi$, где $z \neq 0$, представляется в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{8}$$

где $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, φ — аргумент числа z. Запись комплексного числа z в виде (8), где $r > 0$, называют *тригонометрической формой комплексного числа.*

Комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. для любого φ функция $e^{i\varphi}$ определяется *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{9}$$

Из равенства (9) следует, что $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\pi i/2} = i$, $e^{-\pi i/2} = -i$ и $|e^{i\varphi}| = 1$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$.

Справедливы равенства

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{10}$$

$$e^{in\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}; \tag{11}$$

формулу (11) называют *формулой Муавра.*

Из формул (8) и (9) следует, что любое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в *показательной форме*

$$z = re^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad r = |z|, \quad \varphi \text{ — аргумент числа } z, \tag{12}$$

а из равенств (10) вытекает, что если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, где $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \tag{13}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{14}$$

Из формул (13) и (14) следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются; модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

Если комплексные числа z_1 и z_2 записать в показательной форме, т. е. представить их в виде $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5. Извлечение корня. Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \tag{15}$$

где $a \neq 0$ — комплексное число, $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $a = \rho e^{i\theta}$, тогда

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta},$$

откуда

$$r^n = \rho, \quad n\varphi = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{1}{n}\,(\theta + 2k\pi). \tag{16}$$

Таким образом, уравнение (15) имеет n различных корней

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\varphi_k}, \tag{17}$$

где φ_k определяется формулой (16), $k = 0, 1, \ldots, n-1$, θ — аргумент числа a.

На комплексной плоскости точки z_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|a|}$ с центром в точке O.

Примеры с решениями

Пример 1. Выполнить действия:

$$1)\quad (2-i)^3;\quad 2)\ \frac{(1+i)(1-2i)}{3+i}.$$

△ 1) Используя формулу куба разности и равенства $i^2=-1$, $i^3=-i$, получаем: $(2-i)^3 = 8-3\cdot 4i+3\cdot 2(-1)+i = 2-11i$.

2) Пусть $z_1=(1+i)(1-2i)$, $z_2=3+i$. Тогда по формуле (2) находим $z_1=3-i$, а по формуле (4) получаем:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-i}{3+i}=\frac{(3-i)^2}{10}=\frac{8-6i}{10}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\,i. \qquad ▲$$

Пример 2. Доказать, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

△ Используя свойства комплексно сопряженных чисел, получаем:

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2}) =\\ &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) =\\ &= 2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2}=2(|z_1|^2+|z_2|^2).\end{aligned} \qquad ▲$$

Это равенство выражает тот факт, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Пример 3. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$$1)\quad |z+1|=|z-i|;\quad 2)\ 2<|z+2i|<3.$$

△ 1) Уравнению $|z+1|=|z-i|$ удовлетворяют все точки, равноудаленные от точек $z_1=-1$ и $z_2=i$. Это прямая $y=-x$ (биссектриса второго и четвертого координатных углов).

2) Условию $|z+2i|<3$ удовлетворяют все точки, лежащие внутри круга радиуса 3 с центром в точке $z_0=-2i$, а условию $|z+2i|>2$ — все точки, лежащие вне круга радиуса 2 с центром в точке z_0. Искомое множество точек — кольцо между окружностями радиусов 2 и 3 с общим центром в точке $z_0=-2i$. ▲

Пример 4. Записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число:

$$1)\ z_1=-1-i;\quad 2)\ z_2=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}.$$

△ 1) Применяя формулу (7), получаем $\operatorname{tg}\varphi = 1$, откуда $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$, так как точка $-1-i$ лежит в третьей четверти. Так как $|z_1| = \sqrt{2}$, то $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$.

2) Так как точка z_2 лежит во второй четверти, то, используя формулы приведения, получаем

$$-\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5}, \quad \sin\frac{\pi}{5} = \sin\frac{4\pi}{5},$$

и поэтому

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = e^{i4\pi/5}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 5. Вычислить $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4}$.

△ Так как $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, то, применяя формулы (13) и (14), получаем:

$$\frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4} = \frac{2^6 e^{-2\pi i}}{(\sqrt{2})^4 e^{i\pi}} = -16. \qquad \blacktriangle$$

Пример 6. Найти все корни уравнения $z^6 = -8$.

△ Используя формулы (16) и (17), где $\theta = \pi$, $|a| = \rho = 8$, получаем:

$$z_k = \sqrt{2}e^{i(\pi+2k\pi)/6}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

где

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/2} = \sqrt{2}i,$$

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad z_3 = -z_0 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$z_4 = -z_1 = -\sqrt{2}i, \qquad z_5 = -z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i. \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Вычислить:

1) $(1+2i)(2-i) + (1-2i)(2+i)$; 2) $\dfrac{5}{1+2i} + \dfrac{5}{2-i}$;

3) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$; 4) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

2. Записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число z:

1) $z = 1 + i^{121}$; 2) $z = (-3+4i)^3$;

3) $z = 1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$; 4) $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

3. Найти все корни уравнения:

1) $\overline{z} = z^3$; 2) $|z| - z = 1 + 2i$;

3) $z + |z+1| + i = 0$; 4) $|z|^2 - 2iz + 2i = 0$.

4. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} |z-2i| = z, \\ |z-i| = |z-1|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |z^2-2i| = 4, \\ |z+1+i| = |z-1-i|. \end{cases}$

5. Решить уравнение:

1) $z^2 = -i$; 2) $z^6 = 64$;

3) $z^7 = -1$; 4) $z^8 = 1 + i$.

6. Пусть $z = z_0$ — корень многочлена $P(z)$ с действительными коэффициентами. Доказать, что $P(\overline{z}_0) = 0$, т. е. $\overline{z}_0$ — корень многочлена $P(z)$.

7. Пусть z_1 и z_2 — фиксированные точки комплексной плоскости. Дать геометрическое описание множества всех точек z, удовлетворяющих уравнению:

1) $|z - z_1| = |z - z_2|$;

2) $|z - 1| = |\operatorname{Re} z|$;

3) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, где $a > \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$;

4) $\big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = 2a$, где $a < \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$.

8. Пусть Δ_1 — треугольник с вершинами z_1, z_2, z_3, а Δ_2 — треугольник с вершинами w_1, w_2, w_3. Доказать, что треугольник Δ_1 подобен треугольнику Δ_2, если

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1}.$$

9. Выяснить, какая линия на плоскости задается уравнением:

1) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ $(a > 0)$; 2) $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$;

3) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$; 4) $\operatorname{Re}\dfrac{z-a}{z+a} = 0$ $(a > 0)$.

10. Выяснить, какое множество точек z комплексной плоскости удовлетворяет неравенству:

1) $|z - i| + |z + i| < 4$; 2) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} < \frac{1}{2}$;

3) $|z - 2| - |z + 2| < 2$; 4) $|1 + z| < |1 - z|$;

5) $0 < \arg\dfrac{i - z}{z + i} < \dfrac{\pi}{2}$; 6) $\operatorname{Re}(z(1 - i)) < \sqrt{2}$;

7) $\frac{\pi}{4} < \arg(z + i) < \frac{\pi}{2}$; 8) $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$; 9) $\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4$.

11. Пусть A и C действительные, а B — комплексная постоянные и пусть $AC < |B|^2$. Доказать, что уравнение
$$A|z|^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0 \quad (A > 0),$$
является уравнением окружности, а также найти центр этой окружности и ее радиус.

12. Доказать, что уравнение окружности, проходящей через три данные точки z_1, z_2, z_3, не лежащие на одной прямой, можно записать в виде
$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \overline{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \overline{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \overline{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Доказать, что при любом положительном значении K, отличном от 1, уравнение $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = K$ является уравнением окружности, а также найти центр этой окружности и ее радиус.

14. Доказать, что четыре попарно различные точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности (или на одной прямой) в том и только в том случае, когда величина $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} : \dfrac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}$ действительна.

15. Пусть a — произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $\operatorname{Im} a > 0$. Доказать, что величина $\left|\dfrac{z - a}{z - \overline{a}}\right|$ в нижней полуплоскости больше единицы, в верхней полуплоскости меньше единицы, а на действительной оси — равна единице.

16. Пусть a — произвольное действительное число. Доказать, что если многочлен $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет n действительных корней, то и многочлен $Q(z) = P(z + ia) + P(z - ia)$ имеет n действительных корней.

17. Найти на отрезке, соединяющем точки z_1 и z_2, точку, которая делит этот отрезок в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — положительные числа.

18. Доказать, что три попарно различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой в том и только в том случае, когда величина $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ действительна.

19. Доказать, что точка ζ лежит на отрезке, соединяющем точки z_1 и z_2, в том и только в том случае, когда существует такое число α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, что $\zeta = \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2$.

20. Пусть в точках $z_1, \ldots, z_n$ комплексной плоскости помещены материальные точки с массами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, соответственно. Доказать, что центр тяжести такой системы материальных точек находится в точке $\zeta = \dfrac{\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$.

21. Пусть точки z_1, z_2, z_3 лежат на окружности с центром в точке $z = 0$. Доказать, что треугольник с вершинами в точках z_1, z_2, z_3 является равносторонним в том и только в том случае, когда $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

22. Доказать, что точки z_1, z_2, z_3, z_4, лежащие на одной окружности, являются вершинами прямоугольника в том и только в том случае, когда $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ (точки занумерованы в порядке следования при обходе окружности).

23. Даны три вершины z_1, z_2, z_3 параллелограмма, занумерованные в порядке следования по его границе. Найти четвертую вершину z_4 параллелограмма.

24. Доказать, что при любых $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\left|\sqrt{z^2-1}+z\right| + \left|\sqrt{z^2-1}-z\right| = |z-1| + |z+1|.$$

25. Доказать, что для любых $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ справедливы равенства:

1) $|z_1\overline{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \big(|z_1|^2+1\big)\big(|z_2|^2+1\big)$;

2) $|z_1\overline{z}_2 - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = \big(|z_1|^2-1\big)\big(|z_2|^2-1\big)$.

26. Доказать, что величина

$$A|\lambda|^2 + B\lambda\overline{\mu} + \overline{B}\,\overline{\lambda}\mu + C|\mu|^2$$

неотрицательна при любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}$ в том и только в том случае, когда выполнены условия

$$A \geqslant 0, \quad C \geqslant 0, \quad |B|^2 \leqslant AC.$$

27. Доказать, что при любых $z_k \in \mathbb{C}$, $\zeta_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\zeta_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2$$

(*неравенство Коши—Буняковского—Шварца*).

28. Доказать, что при любых $z_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sqrt{n\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}.$$

29. Пусть $0 < s' < s$. Доказать, что для любых $z_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо неравенство

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |z_k|^s\right\}^{1/s} \geqslant \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{s'}\right\}^{1/s'}.$$

30. Пусть $s > 0$. Доказать, что для любых отличных от нуля $z_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{|z_1||z_2|\cdots|z_n|} \leqslant \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |z_k|^s\right\}^{1/s}.$$

31. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — произвольные комплексные числа. Доказать, что:

1) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|\right)^p \leqslant n^{p-1} \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|^p, \quad p \geqslant 1;$

2) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|\right)^p \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|^p, \quad 0 < p \leqslant 1.$

32. Пусть $p > 1$, $q > 1$, а $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Доказать, что для любых $z_k \in \mathbb{C}$, $\zeta_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k \zeta_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^q\right)^{1/q}$$

(*неравенство Гёльдера*).

Ответы

1. 1) 8. 2) $3 - i$. 3) i. 4) $\dfrac{22}{159} - \dfrac{5}{318}\, i$.

2. 1) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

2) $125(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 125e^{i3\varphi}$; $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$;

3) $2\cos\dfrac{\pi}{14}\left(\cos\dfrac{\pi}{14} + i\sin\dfrac{\pi}{14}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{14}\, e^{i\pi/14}$;

4) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\, e^{i\pi/4}$.

3. 1) $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$;
2) $z = \dfrac{3}{2} - 2i$; 3) $z = -1 - i$; 4) $z = 1 - i$.

4. 1) $z = 1 + i$; 2) $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -1 + i$.

5. 1) $z_1 = e^{-i\pi/4}$; $z_2 = e^{i3\pi/4}$;
2) $z_k = 2e^{i\pi k/6}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$;
3) $z_k = e^{i(2k+1)\pi/7}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$;
4) $z_k = \sqrt[16]{2}e^{i(8k+1)\pi/32}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

7. 1) Прямая, проходящая через середину отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2, перпендикулярная к этому отрезку.

2) Парабола, директрисой которой является мнимая ось, а фокусом — точка $z = 1$.

3) Эллипс с фокусами в точках z_1 и z_2 и с большой полуосью, равной a.

4) Гипербола с фокусами в точках z_1 и z_2 и с действительной полуосью, равной a.

9. 1) Окружность, построенная на отрезке $[0, a]$ как на диаметре.
2) Окружность радиуса 1 с центром в точке $z = 0$.
3) Действительная ось.
4) Окружность радиуса a с центром в точке $z = 0$.

10. 1) Внутренность эллипса $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

2) Внешность круга $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$.

3) Часть плоскости, лежащая справа от левой ветви гиперболы

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

4) Полуплоскость, лежащая слева от мнимой оси.

5) Правая половина круга радиуса 1 с центром в точке $z = 0$.

6) Полуплоскость, содержащая точку $z = 0$ и ограниченная касательной к окружности радиуса 1 и центром в нуле, проведенной в точке $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

7) Угол раствора $\dfrac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z = -i$, стороны которого проходят через точки $z = 1,\ \ z = 0$.

8) Часть плоскости, лежащая с той же стороны параболы $y^2 = 1 - 2x$, что и точка $z = 1$ (и ограниченная этой параболой).

9) Четыре угла раствора $\dfrac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z = 0$, биссектрисами которых являются лучи $\arg z = -\dfrac{\pi}{16} + \pi k,\ \ k = 0, 1, 2, 3$.

Во всех случаях точки граничных линий не включаются.

11. Центр окружности в точке $-\dfrac{B}{A}$, а радиус равен $\sqrt{\dfrac{|B|^2 - AC}{A^2}}$.

13. Центр окружности в точке $\dfrac{z_1 - K^2 z_2}{1 - K^2}$, а радиус равен $\dfrac{K|z_1 - z_2|}{1 - K^2}$.

§ 2. Последовательности и ряды комплексных чисел. Комплекснозначные функции действительного переменного. Кривые и области на комплексной плоскости

Справочные сведения

1. Предел последовательности комплексных чисел

1.1. Комплексное число z_0 называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - z_0| < \varepsilon. \qquad (1)$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Другими словами, число z_0 называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0. \tag{2}$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся.*

Геометрический смысл неравенства (1) заключается в том, что точка z_n лежит в круге радиуса ε с центром в точке z_0. Этот круг, т. е. множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z_n - z_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, называется *ε-окрестностью точки* z_0. Следовательно, точка z_0 является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки z_0 содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа.

1.2. *Существование предела* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, где $z_n = x_n + y_n$, *равносильно существованию двух пределов:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0,$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$.

1.3. Свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел: если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} (z_n \pm \zeta_n) = z_0 \pm \zeta_0, \quad \lim_{n\to\infty} (z_n \cdot \zeta_n) = z_0 \cdot \zeta_0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{z_0}{\zeta_0}$$

при условии, что $\zeta_n \neq 0$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

1.4. **Критерий Коши.** *Последовательность* $\{z_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* N, *что для всех* $n > N$ *и* $m > N$ *выполняется неравенство*

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

1.5. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число R, что $|z_n| < R$ для всех номеров n.

Всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

1.6. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$.

1.7. Пусть

$$z_n = r_n e^{i\varphi},$$

где $r_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Если

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r_0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = r_0 e^{i\varphi_0}$.

2. Сходимость ряда, составленного из комплексных чисел

2.1. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k, \tag{3}$$

составленный из комплексных чисел, называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$. При этом предел S последовательности $\{S_n\}$ называют *суммой* ряда (3) и пишут

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Пусть $z_k = x_k + iy_k$. Тогда для сходимости ряда (3) необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$. Если $S = A + iB$ — сумма ряда (3), то

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = A, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k = B.$$

2.2. Ряд (3) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$. Для абсолютной сходимости ряда (3) необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходились оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, где $z_k = x_k + iy_k$.

2.3. **Критерий Коши.** *Ряд (3) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N_\varepsilon$ такой, что для любого $N \geqslant N_\varepsilon$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon.$$

3. Бесконечный предел последовательности. Расширенная комплексная плоскость. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называют *сходящейся к бесконечности* и пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \tag{4}$$

если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty. \tag{5}$$

Это определение формально совпадает с соответствующим определением для действительных чисел, так как соотношение (5) означает,

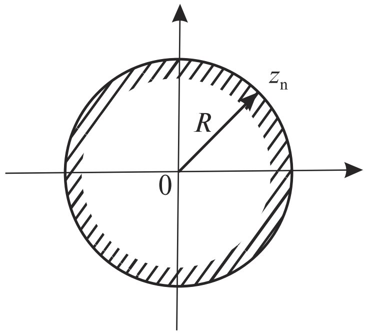

Рис. 2.1

что для любого $R > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n| > R. \tag{6}$$

Геометрически неравенство (6) означает, что точка z_n лежит вне круга радиуса R с центром в точке O (рис. 2.1). Это множество называется *окрестностью бесконечности*. Следовательно, точка $z = \infty$ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки $z = \infty$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа.

Таким образом, «числу» $z = \infty$ ставится в соответствие символическая бесконечно удаленная точка. Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется расширенной комплексной плоскостью и обозначается символом $\overline{\mathbb{C}}$. Приведем геометрическую интерпретацию расширенной комплексной плоскости.

Рассмотрим сферу S, касающуюся комплексной плоскости в точке O (рис. 2.2). Обозначим через P точку сферы S, диаметрально противоположную точке O. Каждой точке z комплексной плоскости $\mathbb{C}$ поставим в соответствие точку M, которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и P (рис. 2.2).

При этом последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к бесконечности, соответствует последовательность точек сферы S, сходящаяся к точке P. Поэтому точке $z = \infty$ поставим в соответствие точку P.

Такое соответствие между точками расширенной комплексной плоскости и точками сферы S является взаимно однозначным. Оно называется *стереографической проекцией*, а сфера S называется *сферой Римана.*

Комплексные числа (включая $z = \infty$) можно изображать точками сферы Римана. При этом сходящиеся последовательности комплексных

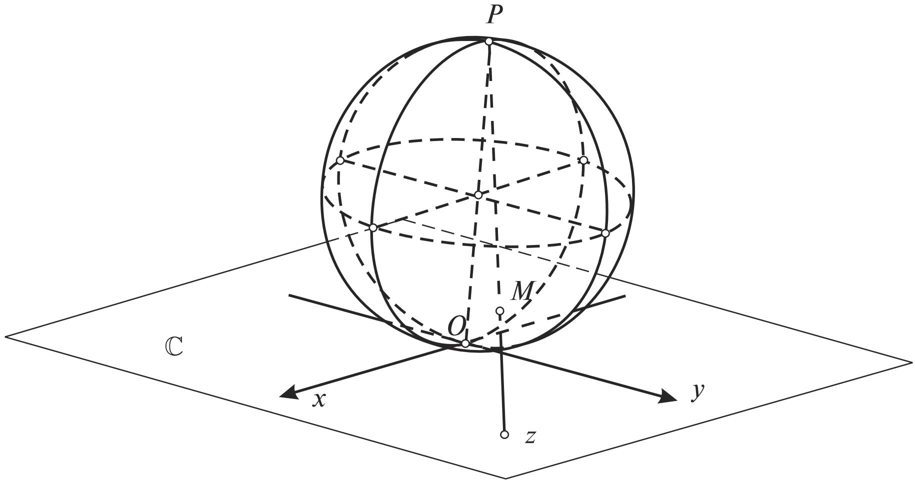

Рис. 2.2

чисел изображаются на сфере Римана сходящимися последовательностями точек.

При стереографической проекции прямые и окружности переходят в окружности, угол между пересекающимися кривыми на плоскости равен углу между образами этих кривых на сфере Римана.

Расширенная комплексная плоскость компактна, т. е. из любой последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся (может быть, к бесконечности) подпоследовательность.

4. Комплекснозначные функции действительного переменного. Если каждому значению t из интервала $(a; b)$ поставлено в соответствие комплексное число

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

где $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$, а $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$, то мы будем говорить, что на интервале $(a,\, b)$ задана *комплекснозначная функция* $z(t)$ действительного переменного t.

Для комплекснозначных функций действительного переменного естественным образом определяются понятия предела, непрерывности, производной, интеграла и т. д. Именно, полагаем

$$\lim_{t\to t_0} z(t) = \lim_{t\to t_0} x(t) + i \lim_{t\to t_0} y(t); \quad z'(t) = x'(t) + iy'(t);$$

$$\int\limits_a^b z(t)\,dt = \int\limits_a^b x(t)\,dt + i \int\limits_a^b y(t)\,dt.$$

5. Кривые на комплексной плоскости

5.1. Пусть на конечном отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ заданы две непрерывные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Тогда на этом отрезке задана *непрерывная комплекснозначная функция действительного переменного*:

$$z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

В этом случае говорят, что задана непрерывная кривая

$$z = \sigma(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{7}$$

а уравнение (7) называется *параметрическим уравнением* этой *кривой.* При этом, если $z_1 = \sigma(t_1)$ и $z_2 = \sigma(t_2)$, где $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$, то говорят, что точка z_2 кривой (7) следует за точкой z_1 (или: точка z_1 предшествует точке z_2).

Таким образом, *кривая (7) является упорядоченным множеством точек комплексной плоскости.* Другими словами, кривая (7) всегда считается ориентированной в направлении возрастания параметра t. *Направление* движения точки z вдоль кривой (7), соответствующее возрастанию параметра t, называется *положительным.* Точка $a = \sigma(\alpha)$ называется *началом* (или начальной точкой) *кривой* (7), а точка $b = \sigma(\beta)$ — ее *концом* (или конечной точкой).

5.2. Пусть кривая γ задана уравнением (7). Тогда на комплексной плоскости точки $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ образуют некоторое множество $M(\gamma)$. Это множество отличается от самой кривой, во-первых, тем, что кривая является упорядоченным множеством точек.

Второе отличие кривой γ от множества $M(\gamma)$ состоит в том, что различным точкам кривой может отвечать одна и та же точка плоскости: если $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, то точки $z_1 = \sigma(t_1)$ и $z_2 = \sigma(t_2)$ являются различными на кривой γ, но как точки плоскости они совпадают. Такие точки называются *точками самопересечения кривой* (7). Исключением является совпадение начала и конца кривой: если $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$, то эта точка не считается самопересечением кривой (7).

Кривая, не имеющая точек самопересечения, называется *простой кривой.* Кривая, у которой начало и конец совпадают, называется *замкнутой кривой.*

Замечание. Две кривые $z = \sigma_1(t)$, $\alpha_1 \leqslant t \leqslant \beta_1$, и $z = \sigma_2(\tau)$, $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$, считаются совпадающими, если существует действительная функция $t = s(\tau)$, непрерывная и возрастающая на отрезке $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$, такая, что $s(\alpha_2) = \alpha_1$, $s(\beta_2) = \beta_1$ и $\sigma_1(s(\tau)) \equiv \sigma_2(\tau)$ при $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$.

Совпадающим кривым отвечает одно и то же множество точек плоскости.

Уравнение любой кривой $z = \sigma_1(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, можно записать в виде $z = \sigma_2(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, например, с помощью замены

$$t = \alpha + (\beta - \alpha)\tau; \quad \sigma_1(t) = \sigma_1(\alpha + (\beta - \alpha)\tau) = \sigma_2(\tau).$$

Таким образом, не теряя общности, уравнение кривой можно записывать с помощью комплекснозначной функции, определенной на отрезке [0, 1].

Рассмотрим кривую γ, заданную уравнением $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. Обозначим через γ^{-1} кривую, полученную из кривой γ изменением ориентации на противоположную. Тогда уравнение кривой γ^{-1} можно записать в виде $z = \sigma(-t)$, $-\beta \leqslant t \leqslant -\alpha$.

5.3. Часть кривой γ, проходимая от точки $z_1 = \sigma(t_1)$ до точки $z_2 = \sigma(t_2)$, где t_1 и t_2 принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, называется *дугой кривой* γ.

Пусть $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$ и γ_k — дуга кривой γ, проходимая от точки $z_{k-1} = \sigma(t_{k-1})$ до точки $z_k = \sigma(t_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда будем говорить, что *кривая* γ *разбита на дуги* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ или *кривая* γ *состоит из дуг* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Этот факт будем обозначать так: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_n$. Ломаная с последовательными вершинами в точках $z_k = \sigma(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, называется *ломаной, вписанной в кривую* γ (рис. 2.3).

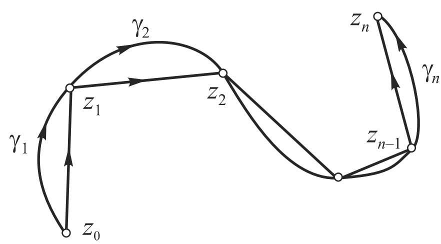

Рис. 2.3

Рассмотрим совокупность всех ломаных, вписанных в кривую γ. Если множество длин этих ломаных ограничено, то *кривая* γ называется *спрямляемой*, а точная верхняя грань этого множества называется *длиной кривой* γ.

5.4. Кривая называется *гладкой*, если ее уравнение можно записать в виде $z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$, т. е. на этом отрезке функция $\sigma(t)$ имеет непрерывную производную $\sigma'(t) = \xi'(t) + i\eta'(t)$ и $\sigma'(t) \neq 0$, причем если кривая замкнута, то должно выполняться равенство $\sigma'(\alpha) = \sigma'(\beta)$.

Кривая называется *кусочно-гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых. Простейшим примером кусочно-гладкой кривой является ломаная.

Уравнение кусочно-гладкой кривой можно записать в виде $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где функция $\sigma(t)$ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\, \beta]$ и на этом отрезке $\sigma'(t) \neq 0$.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только гладкие или кусочно-гладкие кривые.

Геометрический смысл производной комплекснозначной функции состоит в следующем: если кривая γ задана уравнением $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, и в некоторой точке $t_0 \in [\alpha,\, \beta]$ существует $\sigma'(t_0) \neq 0$, то кривая γ в точке $z_0 = \sigma(t_0)$ имеет касательный вектор $\sigma'(t_0)$. Следовательно, кусочно-гладкая кривая во всех точках имеет касательную, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых существует предельное положение касательной слева и справа. Эти исключительные точки называются *угловыми точками кривой.*

5.5. Из курса математического анализа известно, что кусочно-гладкая кривая γ: $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, спрямляема и ее длина $l(\gamma)$ выражается формулой

$$l(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\sigma'(t)|\, dt,$$

так как $|\sigma'(t)|\, dt = dl$ — элемент длины кривой γ.

5.6. Введем понятие неограниченной кривой. Пусть на луче $t \geqslant \alpha$ задана непрерывная комплекснозначная функция $z = \sigma(t)$ и $\sigma(+\infty) = \infty$, т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty} \sigma(t) = \infty$. Тогда говорят, что задана *неограниченная кривая*

$$z = \sigma(t), \quad \alpha \leqslant t < \infty, \tag{8}$$

а уравнение (8) называется *параметрическим уравнением* этой кривой. Неограниченная кривая (8) называется *кусочно-гладкой*, если для каждого конечного $\beta > \alpha$ кривая $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, является кусочно-гладкой.

Аналогично определяются неограниченные кривые в случае, когда параметр t пробегает полуось $-\infty < t \leqslant \alpha$ или всю числовую ось.

Уравнение неограниченной кривой (8) можно записать в виде

$$z = \sigma_1(\tau), \quad \alpha_1 \leqslant \tau < \beta_1,$$

где $\sigma_1(\tau) \to \infty$ при $\tau \to \beta_1$, β_1 — конечное число. Для определенности уравнение такой кривой будем записывать только в виде (8).

6. Область

6.1. Множество D точек расширенной комплексной плоскости называется *областью*, если это множество:

— *открытое*, т. е. для каждой точки из множества D существует окрестность этой точки, принадлежащая D;

— *связное*, т. е. любые две точки из множества D можно соединить кривой, все точки которой принадлежат D.

6.2. *Граничной точкой области* D называется точка, в любой окрестности которой есть точки, принадлежащие D, и точки, не принадлежащие D. Множество граничных точек называется *границей этой области.* Область D, дополненная всеми своими граничными точками, называется *замыканием области* D и обозначается через $\overline{D}$.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только такие области, границы которых состоят из конечного числа кусочно-гладких кривых и изолированных точек.

Кроме того, будем считать, что все граничные кривые области D ориентированы так, что *при движении точки вдоль граничной кривой в направлении этой ориентации область D остается слева.*

6.3. Область D на комплексной плоскости называется *односвязной*, если любую замкнутую кривую, лежащую в D, можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области D.

Замечание. В односвязной области любые две кривые с общим началом и общим концом можно непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области.

Область D на комплексной плоскости является односвязной только тогда, когда внутренность любой простой замкнутой кривой, лежащей в D, целиком принадлежит области D. Образно односвязную область можно представить как лист бумаги произвольной формы, может быть, с разрезами по краям, но без «дырок» внутри.

Ограниченная область является односвязной, если ее граница состоит только из одной замкнутой кривой.

Пусть кривые $\gamma_0\colon z = \sigma_0(t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1$, и $\gamma_1\colon z = \sigma_1(t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1$, лежат в области D и имеют общее начало в точке $a = \sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ и общий конец в точке $b = \sigma_0(1) = \sigma_1(1)$.

Будем говорить, что кривую γ_0 можно *непрерывно деформировать* в кривую γ_1, оставаясь в области D, если существует функция $\sigma(t, s)$, непрерывная в квадрате $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) при каждом фиксированном $s \in [0, 1]$ кривая $\gamma_s \colon z = \sigma(t, s)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежит в области D;
2) $\sigma(t, 0) \equiv \sigma_0(t)$, $\sigma(t, 1) \equiv \sigma_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
3) $\sigma(0, s) \equiv a$, $\sigma(1, s) \equiv b$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

В частности, если кривая γ_0 замкнутая, т. е. $a = b$, а кривая γ_1 — это только одна точка $a = b = z_0 \in D$, т. е. $\sigma_1(t) \equiv z_0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то будем говорить, что кривую γ_0 можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области D. При этом можно отказаться от условия 3.

Примеры с решениями

Пример 1. Пусть $|a| < 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} na^n = 0$.

△ Можем считать, что $a \neq 0$. Положим $q = \dfrac{1}{|a|}$, тогда $q > 1$ и можно записать, что $q = 1 + \delta$, где $\delta > 0$. Отсюда, используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$q^n = (1+\delta)^n > \frac{n(n-1)}{2}\,\delta^2 > \frac{n^2\delta^2}{4} \quad \text{при } n > 2,$$

откуда $n|a|^n = \dfrac{n}{q^n} < \dfrac{4}{n\delta^2} < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\dfrac{4}{\varepsilon\delta^2}\right] + 1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} n|a|^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} na^n = 0$. ▲

Пример 2. Пусть $|a| < 1$. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^n$ и найти его сумму S.

△ Если $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} ka^k$, то используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$S_n - S_n a = a + a^2 + \ldots + a^n - na^{n+1} = \frac{a - a^{n+1}}{1-a} - na^{n+1},$$

откуда

$$S_n = \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{a^{n+1}}{(1-a)^2} - \frac{na^{n+1}}{1-a}\,.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} na^{n+1} = 0$ (пример 1), то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{(1-a)^2}$.

Итак, если $|a| < 1$, то данный ряд сходится и его сумма $S = \dfrac{a}{(1-a)^2}$. ▲

Пример 3.

$\triangle$ 1) Кривая $z = \cos t$, $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ является отрезком $[-1, 1]$, ориентированным в направлении от точки $z = -1$ к точке $z = 1$ (рис. 2.4).

Уравнение этой кривой можно записать в виде $z = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, или в виде $z = 2t - 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2) Кривая $z = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, является полуокружностью $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, ориентированной против часовой стрелки (рис. 2.5). ▲

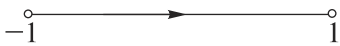

Рис. 2.4

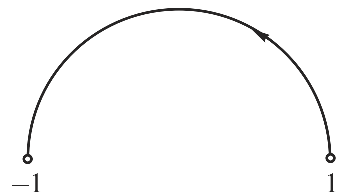

Рис. 2.5

Пример 4. $\triangle$ Кривая $z = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ является окружностью $|z| = 1$, ориентированной против часовой стрелки, с началом и концом в точке $z = 1$. Это пример простой замкнутой кривой (рис. 2.6). ▲

Пример 5. $\triangle$ Кривая $z = \sigma(t)$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2\pi$, где

$$\sigma(t) = \begin{cases} e^{it}, & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi, \\ \dfrac{3t}{\pi} - 4, & \pi \leqslant t \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

является незамкнутой с самопересечением в точке $z = 1$ (рис. 2.7). При этом точки $z_1 = \sigma(0)$ и $z_2 = \sigma\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ являются различными на данной кривой, хотя как точки плоскости они совпадают: $z_1 = z_2 = 1$. ▲

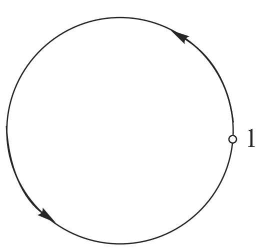

Рис. 2.6

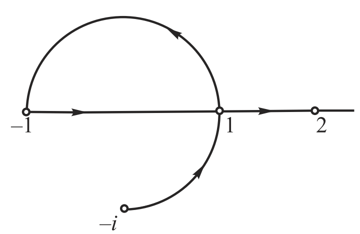

Рис. 2.7

Рис. 2.8

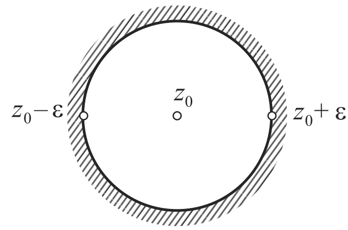

Рис. 2.9

Пример 6. △ Кривая $z = \cos t$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, является отрезком $[-1, 1]$, проходимым дважды: сначала от точки $z = -1$ к точке $z = 1$ и затем от точки $z = 1$ к точке $z = -1$ (рис. 2.8). Это пример замкнутой кривой, у которой каждая точка интервала $(-1, 1)$ является точкой самопересечения. ▲

Пример 7. △ Границей области $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ является точка $z = z_0$ и окружность $|z - z_0| = \varepsilon$, ориентированная против часовой стрелки и проходимая один раз (рис. 2.9). Эту область будем называть так: «*круг* $|z - z_0| < \varepsilon$ *с выколотой точкой* z_0» или «*проколотая окрестность точки* z_0». Эта область является неодносвязной. ▲

Пример 8. △ Область $|z| < 1$, $0 < \arg z < 2\pi$ будем изображать, как указано на рис. 2.10, и называть так: «*круг* $|z| < 1$ *с разрезом по отрезку* $[0; 1]$». Граничная кривая Γ этой области состоит из следующих частей: отрезок $[0, 1]$, проходимый от точки $z = 1$ до точки $z = 0$ — нижний берег разреза; отрезок $[0, 1]$, проходимый от точки $z = 0$ до точки $z = 1$ — верхний берег разреза; окружность $|z| = 1$, проходимая против часовой стрелки один раз. Отметим, что каждой точке полуинтервала $(0, 1]$ соответствуют две различные точки кривой Γ. ▲

Пример 9. △ Граница Γ области $1 < |z| < 2$ (рис. 2.11) состоит из кривых Γ_1 и Γ_2, где Γ_1 — окружность $|z| = 2$, ориентированная против

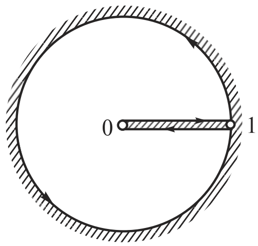

Рис. 2.10

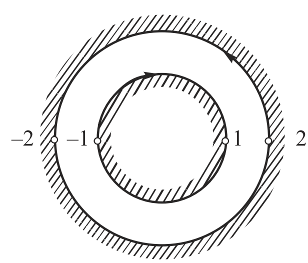

Рис. 2.11

часовой стрелки, Γ_2 — окружность $|z| = 1$, ориентированная по часовой стрелке. ▲

Задачи

1. Доказать сходимость последовательности и найти ее предел:

1) $\left\{\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}\right\}$, $|a| < 1$; 2) $\left\{\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}\right\}$, $|a| > 1$;

3) $\left\{\dfrac{1}{n}\left(1 + e^{i\varphi} + \ldots + e^{in\varphi}\right)\right\}$, $0 < \varphi < 2\pi$;

4) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} - \ldots + (-1)^n e^{in\varphi}\right)\right\}$, $-\pi < \varphi < \pi$.

2. Доказать, что если $|z_n| \leqslant M < \infty$ при $n > n_0$, то из последовательности $\{z_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} = A.$$

4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = B \neq \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1\zeta_n + z_2\zeta_{n-1} + \ldots + z_n\zeta_1}{n} = AB.$$

5. Пусть числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ положительны и пусть

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) = +\infty.$$

Доказать, что из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$ следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots \lambda_n z_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} = A.$$

6. Доказать, что для сходимости последовательности $\{z_n\}$ к бесконечности необходимо и достаточно, чтобы сходилась к $+\infty$ последовательность действительных чисел $\{|z_n|\}$.

7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ в том и только в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$.

8. Выберем в пространстве систему координат ξ, η, ζ таким образом, чтобы оси $O\xi$ и $O\eta$ совпадали с осями Ox и Oy комплексной плоскости, а ось $O\zeta$ была направлена по диаметру сферы Римана (рис. 2.2). Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, а точка $M(z)$ имеет пространственные координаты (ξ, η, ζ). Доказать формулы:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2};$$

$$x = \frac{\xi\zeta}{\xi^2+\eta^2}, \quad y = \frac{\eta\zeta}{\xi^2+\eta^2}.$$

9. Пусть точка $M(z)$ имеет пространственные координаты $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$. Найти пространственные координаты точки M:

1) $M(-z)$; 2) $M(\overline{z})$; 3) $M\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

10. Дать геометрическое описание множеств сферы Римана, отвечающих следующим множествам комплексной плоскости:

1) $\operatorname{Re} z > 0$; 2) $\operatorname{Im} z < 0$;
3) $|z| > 1$; 4) $|z| < 1$.

11. Доказать, что отличные от точек O и N точки $M(z_1)$ и $M(z_2)$ сферы Римана диаметрально противоположны в том и только в том случае, когда точки z_1 и z_2 связаны условием $z_1\overline{z}_2 = -1$.

12. Доказать, что окружности на сфере Римана отвечает на комплексной плоскости или окружность, или прямая, причем прямая получается в том и только в том случае, когда окружность на сфере Римана проходит через ее верхний полюс N.

13. Найти значения параметра a, при которых окружности комплексной плоскости отвечают большим кругам на сфере Римана:

1) $|z-a| = a \quad (a>0)$;
2) $\left|z+\dfrac{a}{2}\right| = a \quad (a>0)$;
3) $|z-i| = a \quad (a>0)$;
4) $|z-2ai| = a \quad (a>0)$.

14. Расстояние в пространстве между точками $M(z_1)$ и $M(z_2)$ называется *хордальным расстоянием* между точками z_1 и z_2 расширенной комплексной плоскости и обозначается символом $k(z_1,\ z_2)$. Доказать формулы:

1) $k(z_1,\ z_2) = \dfrac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}} \quad (z_1 \neq \infty,\ \ z_2 \neq \infty)$;
2) $k(z_1,\ \infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$.

15. Дать геометрическое описание множества точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

1) $k(z,\ 0) < R,\ \ 0<R<1$;
2) $k(z,\ \infty) < R,\ \ 0<R<1$;
3) $k(z,\ i) > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{1}{2} < k(z,\ 1) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

16. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ абсолютно сходится, если выполнено одно из условий:

1) $|z_n| < M\rho^n \quad (n>n_0,\ \ M>0,\ \ 0<\rho<1)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \rho < 1$;
3) $|z_n| < Mn^{-\alpha} \quad (n>n_0,\ \ M>0,\ \ \alpha>1)$;
4) $|z_n| < \dfrac{M}{n(\ln n)^{\alpha}} \quad (n>n_0,\ \ M>0,\ \ \alpha>1)$.

17. Доказать абсолютную сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n$, $|z| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n$, $|z| < e$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{(n!)^2} \dfrac{z^n}{1+z^n}$, $|z| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

18. Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел таких, что $\lambda_{k+1} \leqslant \lambda_k$ $(k \in \mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, а $\{z_n\}$ — такая последовательность комплексных чисел, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant M$, $M > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n z_n$ сходится.

19. Найти все значения $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых сходится ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{in}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{i\pi/n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^2+1)^{-\alpha} \left(e^{i\pi/n} - 1\right)$.

20. Убедиться в дифференцируемости следующих функций и найти их производные:

1) $(1+it)^2$, $t \in \mathbb{R}$; 2) $\dfrac{1}{t+i}$, $t \in \mathbb{R}$;

3) $(1+i\sqrt{t})^3$, $t > 0$; 4) e^{it}, $t \in \mathbb{R}$.

21. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^1 (1+it)^2\,dt$; 2) $\int\limits_0^1 (a+(b-a)t)^n dt$, $n = 0, 1, \ldots$;

3) $\int\limits_0^1 \dfrac{dt}{1+it}$; 4) $\int\limits_0^1 \dfrac{1+it}{1-it}\,dt$; 5) $\int\limits_0^{\pi} e^{-it} dt$;

6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

22. Пусть функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ дифференцируемы. Доказать формулы:

1) $\dfrac{d}{dt}\,[z_1(t) + z_2(t)] = z_1'(t) + z_2'(t)$;

2) $\dfrac{d}{dt}\,[z_1(t) z_2(t)] = z_1(t) z_2'(t) + z_1'(t) z_2(t)$;

3) $\dfrac{d}{dt}\,[z_1(t)]^n = n[z_1(t)]^{n-1} z_1'(t)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

4) $\dfrac{d}{dt}\,\dfrac{z_1(t)}{z_2(t)} = \dfrac{z_2(t) z_1'(t) - z_2'(t) z_1(t)}{[z_2(t)]^2}$, $z_2(t) \neq 0$.

23. Пусть $\varphi(t)$ — действительная функция, дифференцируемая в точке t_0, а $z(t)$ — комплекснозначная функция, дифференцируемая в точке $\varphi(t_0)$. Доказать, что функция $z_1(t) = z(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0 и что $z_1'(t_0) = z'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)$.

24. Пусть функция $z(t)$ дифференцируема и отлична от нуля. Доказать формулы:

1) $\dfrac{d}{dt}\,|z(t)| = |z(t)|\operatorname{Re}\dfrac{z'(t)}{z(t)}$;

2) $\dfrac{d}{dt}\arg z(t) = \operatorname{Im}\dfrac{z'(t)}{z(t)}$;

3) $\dfrac{d}{dt}\,\dfrac{z(t)}{|z(t)|} = i\,\dfrac{z(t)}{|z(t)|}\operatorname{Im}\dfrac{z'(t)}{z(t)}$.

25. Пусть действительная функция $\varphi(t)$ монотонна и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,\, b]$, а комплекснозначная функция $z(t)$ непрерывна на отрезке $[\varphi(a),\ \varphi(b)]$. Доказать, что

$$\int\limits_a^b z(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} z(t)\,dt.$$

26. Пусть комплекснозначная функция $z(t)$ непрерывна на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$. Доказать неравенства:

1) $\left|\int\limits_a^b z(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |z(t)|\,dt$; 2) $\left|\int\limits_a^b z(t)\,dt\right| \leqslant (b-a)\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)|$;

3) $\left|\int\limits_a^b z(t)\,dt\right| \geqslant \left|\int\limits_a^b \operatorname{Re} z(t)\,dt\right|$; 4) $\left|\int\limits_a^b z(t)\,dt\right| \geqslant \left|\int\limits_a^b \operatorname{Im} z(t)\,dt\right|$.

27. Пусть $z(t)$ и $\zeta(t)$ — комплекснозначные функции, непрерывные на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$. Доказать, что:

1) справедливо неравенство Коши—Буняковского—Шварца:

$$\left|\int\limits_a^b z(t)\zeta(t)\,dt\right|^2 \leqslant \int\limits_a^b |z(t)|^2 dt \cdot \int\limits_a^b |\zeta(t)|^2 dt;$$

2) при $p > 1$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ выполняется неравенство Гёльдера:

$$\left|\int\limits_a^b z(t)\zeta(t)\,dt\right| \leqslant \left\{\int\limits_a^b |z(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \cdot \left\{\int\limits_a^b |\zeta(t)|^q dt\right\}^{1/q};$$

3) при $p > 1$ справедливо неравенство Минковского:

$$\left\{\int\limits_a^b |z(t)+\zeta(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int\limits_a^b |z(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} + \left\{\int\limits_a^b |\zeta(t)|^p\,dt\right\}^{1/p};$$

4) при $0 < p < 1$ выполняется другое неравенство Минковского:

$$\int\limits_a^b |z(t)+\zeta(t)|^p\,dt \leqslant \int\limits_a^b |z(t)|^p\,dt + \int\limits_a^b |\zeta(t)|^p\,dt.$$

28. Пусть комплекснозначная функция $z(t)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и пусть $z(0) \neq 0$. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^1 z(t)t^{-\alpha}dt$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

29. Пусть комплекснозначная функция $z(t)$ непрерывна при $t \geqslant 1$ и пусть существует отличный от нуля предел этой функции при $t \to +\infty$. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty z(t)t^{-\alpha}dt$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

30. Пусть комплекснозначная функция $z(t)$ непрерывна при $t \geqslant 1$ и пусть функции $\operatorname{Re} z(t)$ и $\operatorname{Im} z(t)$ неотрицательны и монотонны при $t \geqslant 1$. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty z(t)\,dt$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty z(n)$ сходятся или расходятся одновременно.

31. Пусть $\varphi(t)$ — действительная функция, непрерывно дифференцируемая при $t \geqslant 1$ и монотонно стремящаяся к нулю при $t \to +\infty$, а $z(t)$ — комплекснозначная функция, непрерывная при $t \geqslant 1$ и обладающая тем свойством, что

$$\left|\int\limits_1^t z(u)du\right| \leqslant M < \infty, \quad t \geqslant 1.$$

Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty z(t)\varphi(t)\,dt$ сходится.

32. Выяснить, при каких действительных значениях параметра α сходится несобственный интеграл:

1) $\int\limits_0^1 e^{it^2}t^{-\alpha}dt$; 2) $\int\limits_1^\infty \dfrac{1-it^2}{1+it^2}\,t^{-\alpha}dt$;

3) $\int\limits_0^1 \left(\dfrac{1+it}{1-it}\right)^2 t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}dt$; 4) $\int\limits_0^\infty \left(\dfrac{1+it^2}{1+it}\right)^4 e^{-\alpha t}dt$;

5) $\int\limits_0^1 e^{it}t^{-\alpha}(\ln t)^2dt$; 6) $\int\limits_2^\infty \dfrac{1+it}{1-it}\cdot t^{-\alpha}\,\dfrac{dt}{\ln^2 t}$.

33. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty e^{it^\beta}t^{-\alpha}dt$ при действительных значениях постоянных α и β сходится в том и только в том случае, когда эти постоянные связаны соотношением $\alpha > \min(1, 1-\beta)$.

Рассмотрев функцию $z(t) = e^{it}$ на отрезке $[0,\, 2\pi]$, легко убедиться, что для комплекснозначных функций теорема Ролля неверна. В задачах 34–37 предлагается доказать теоремы, заменяющие до некоторой степени теоремы Ролля и Лагранжа. В связи с этим определим некоторые понятия.

Плоское множество E называется *выпуклым*, если вместе с каждыми двумя точками, принадлежащими этому множеству, ему принадлежит и весь прямолинейный отрезок, соединяющий эти две точки.

Легко видеть, что пересечение любого набора выпуклых множеств также является выпуклым множеством.

Выпуклой оболочкой $h(E)$ произвольного плоского множества E называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество E.

34. Пусть $f(t)$ — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a,\, b]$ и дифференцируемая в каждой внутренней точке этого отрезка. Доказать, что число $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ принадлежит выпуклой оболочке множества значений, принимаемых функцией $f'(t)$ на интервале $(a,\, b)$.

Указание. Применить теорему Лагранжа о конечном приращении к функции $F(t) = \operatorname{Re}\{e^{-i\theta} f(t)\},\ \ 0 \leqslant \theta < 2\pi$.

35. Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в задаче 34, а $g(t)$ — действительная функция, непрерывная на отрезке $[a,\, b]$ и имеющая отличную от нуля производную в каждой внутренней точке этого отрезка. Доказать, что число $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ принадлежит выпуклой оболочке множества значений, принимаемых функцией $\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ на интервале $(a,\, b)$.

36. Рассмотрев функции

$$f(t) = t, \quad g(t) = e^{it}$$

на отрезке $[0,\, \pi]$, убедиться, что условие действительности функции $g(t)$ в задаче 35 существенно.

37. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — комплекснозначные функции, непрерывные на отрезке $[a,\, b]$ и дифференцируемые в каждой внутренней точке этого отрезка. Доказать, что можно подобрать три точки τ_1, τ_2, τ_3 интервала $(a,\, b)$ и три неотрицательных числа λ_1, λ_2, λ_3, для которых $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \sum_{k=1}^{3} \lambda_k g'(\tau_k) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k f'(\tau_k).$$

Указание. Применить результат задачи 34 к функции

$$F(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \bigl(g(t) - g(a)\bigr).$$

Ввиду отсутствия теорем Ролля и Лагранжа обобщение правила Лопиталя раскрытия неопределенностей на комплекснозначные функции не очевидно. С помощью приведенных выше замен теоремы Лагранжа такое обобщение возможно.

38. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — непрерывные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

1) $g(t) \neq 0$ при $a \leqslant t < b$; 2) $\lim\limits_{t \to b-0} f(t) = \lim\limits_{t \to b-0} g(t) = 0$;

3) функции $f(t)$ и $g(t)$ дифференцируемы при $a \leqslant t < b$;

4) $\lim\limits_{t \to b-0} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = A \neq \infty$; 5) $|\arg g'(t)| \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $a \leqslant t < b$.

Доказать, что $\lim\limits_{t \to b-0} \dfrac{f(t)}{g(t)} = A$.

39. Выяснить, какая кривая определяется параметрическим уравнением (указать множество точек плоскости и порядок их прохождения):

1) $z = a + (b - a)t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
2) $z = Re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $R > 0$;
3) $z = t + it^2$, $t \geqslant 0$;
4) $z = t + \dfrac{i}{t}$, $t \geqslant 1$;
5) $z = 1 + e^{-it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;
6) $z = t \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

40. Пусть кривая γ задана параметрическим уравнением $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ и пусть функция $z(t)$ имеет в точке t_0 отличную от нуля производную $z'(t_0)$. Доказать, что кривая γ имеет в точке $z(t_0)$ касательную и что комплексное число $z'(t_0)$ изображает на комплексной плоскости вектор, направленный по этой касательной.

41. Пусть кривая γ задана параметрическим уравнением $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, где $z(t)$ — функция, имеющая две непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Обозначим через $\tau(t)$ комплексное число, изображающее единичный вектор касательной к кривой γ в точке $z(t)$ (направленный в ту же сторону, что и сама кривая в этой точке); через $\nu(t)$ обозначим комплексное число, изображающее единичный вектор нормали к кривой γ в точке $z(t)$ (направленный вправо от кривой); через $\rho(t)$ обозначим кривизну кривой γ в точке $z(t)$. Доказать формулы:

1) $\tau(t) = \dfrac{z'(t)}{|z'(t)|}$; 2) $\nu(t) = -i\,\dfrac{z'(t)}{|z'(t)|}$;

3) $\rho(t) = \dfrac{1}{|z'(t)|} \left| \operatorname{Im} \dfrac{z''(t)}{z'(t)} \right|$.

42. Пусть кривая γ задана параметрическим уравнением $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, где $z(t)$ — функция, непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$. Доказать, что кривая γ спрямляема и что для ее длины $\lambda(\gamma)$ справедлива формула

$$\lambda(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|\,dt.$$

43. Доказать, что любая кусочно-гладкая кривая спрямляема.

Натуральным уравнением спрямляемой кривой называется такое ее параметрическое уравнение, в котором за параметр t принята длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки (обычно от начала кривой).

44. Пусть $z = \varkappa(t)$, $0 \leqslant t \leqslant l$, — натуральное уравнение кривой γ и пусть функция $\varkappa(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, l]$,

а величины $\tau(t)$, $\nu(t)$, $\rho(t)$ имеют тот же смысл, что и в задаче 41. Доказать формулы:

1) $\tau(t) = \varkappa'(t)$; 2) $\nu(t) = -i\varkappa'(t)$; 3) $\rho(t) = |\varkappa''(t)|$.

45. Описать с помощью неравенств область D, если ее граница ∂D состоит из одной замкнутой кривой, определяемой параметрическим уравнением:

1) $z = a + \rho e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;
2) $z = a + \rho e^{-it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;
3) $z = -it$, $-\infty < t < \infty$;
4) $z = t + it^2$, $-\infty < t < \infty$;
5) $z = t^2$, $-\infty < t < \infty$.

46. Пусть D — конечная область, а ее граница ∂D состоит из одной замкнутой кривой, заданной параметрическим уравнением $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, где функция $z(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Доказать, что для площади $\sigma(D)$ области D справедлива формула

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b |z(t)|^2 \operatorname{Im} \frac{z'(t)}{z(t)}\, dt.$$

Указание. Воспользоваться тем, что $\operatorname{Im} \dfrac{z'(t)}{z(t)} = \dfrac{d}{dt} \arg z(t)$ (см. задачу 24.2).

47. Пусть D — конечная область, а ее граница ∂D состоит из m замкнутых кривых, заданных параметрическими уравнениями

$$z = z_k(t), \quad a_k \leqslant t \leqslant b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где $z_k(t)$ — функции, непрерывно дифференцируемые на отрезках $[a_k, b_k]$ соответственно. Доказать, что для площади $\sigma(D)$ области D справедлива формула

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{a_k}^{b_k} |z_k(t)|^2 \operatorname{Im} \frac{z_k'(t)}{z_k(t)}\, dt.$$

Область D комплексной плоскости называется *звездообразной относительно точки* $z_0 \in D$, если вместе с каждой точкой $z_1 \in D$ она содержит и прямолинейный отрезок, соединяющий эту точку с точкой z_0.

48. Доказать, что для выпуклости области D необходимо и достаточно, чтобы она была звездообразна относительно каждой своей точки.

49. Пусть граница ∂D области D состоит из одной гладкой замкнутой кривой с параметрическим уравнением $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, где функция $z(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную и отличную от нуля производную.

Доказать, что:

1) область D выпукла в том и только в том случае, когда

$$\operatorname{Im} \frac{z''(t)}{z'(t)} \geqslant 0, \quad a \leqslant t \leqslant b;$$

2) область D звездообразна относительно точки $z_0 \in D$ в том и только в том случае, когда

$$\operatorname{Im} \frac{z'(t)}{z(t) - z_0} \geqslant 0, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

50. Доказать, что область D, звездообразная относительно одной из своих точек (в частности, выпуклая область), односвязна.

Ответы

1. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0.

9. 1) $(-\xi, -\eta, \zeta)$; 2) $(\xi, -\eta, \zeta)$; 3) $(\xi, -\eta, 1 - \zeta)$.

10. 1) Полусфера, лежащая в полупространстве $\xi > 0$.
2) Полусфера, лежащая в полупространстве $\eta < 0$.
3) Верхняя полусфера. 4) Нижняя полусфера.

13. 1) $a = \infty$; 2) $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; 3) $a = \sqrt{2}$; 4) ни при каких.

15. 1) Круг с центром в точке $z = 0$ и радиусом $\dfrac{R}{\sqrt{1 - R^2}}$.

2) Внешность круга с центром в точке $z = 0$ и радиусом $\dfrac{\sqrt{1 - R^2}}{R}$.

3) Полуплоскость, расположенная выше действительной оси.

4) Полуплоскость, расположенная справа от мнимой оси с выброшенным из нее кругом в центре в точке $z = 2$ и радиусом $\sqrt{5}$.

20. 1) $2(i - t)$; 2) $-\dfrac{1}{(t + i)^2}$; 3) $\dfrac{3i}{2\sqrt{t}}(1 + i\sqrt{t})^2$; 4) ie^{it}.

21. 1) $\dfrac{2}{3} + i$; 2) $\dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}$ $(a \neq b)$; 3) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{i \ln 2}{2}$;

4) $\dfrac{\pi}{2} - 1 + i \ln 2$; 5) $-2i$; 6) 0.

32. 1) $\alpha < 1$; 2) $\alpha > 1$; 3) $-1 < \alpha < 2$;
4) $\alpha > 0$; 5) $\alpha < 1$; 6) $\alpha \geqslant 1$.

39. 1) Прямолинейный отрезок, идущий из точки $z = a$ в точку $z = b$.

2) Верхняя половина окружности $|z| = R$; направление обхода от точки $z = R$ к точке $z = -R$.

3) Правая половина параболы $y = x^2$; направление обхода от точки $z = 0$ к бесконечности.

4) Часть гиперболы $xy = 1$, лежащая в угле $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$; направление обхода от точки $z = 1 + i$ к бесконечности.

5) Окружность $|z - 1| = 1$, обходимая один раз по часовой стрелке.

6) Окружность $|z+1| = 1$, обходимая два раза против часовой стрелки.

45. 1) $|z - a| < \rho$; 2) $|z - a| > \rho$; 3) $\operatorname{Re} z > 0$;
4) $y > x^2$; 5) $0 < \arg z < 2\pi$.

§ 3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Интегрирование функции комплексного переменного

Справочные сведения

1. Понятие функции комплексного переменного. Говорят, что на множестве $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ определена функция f, если указан закон, по которому каждому числу $z \in G$ ставится в соответствие определенное комплексное число $w \in G_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$. Функцию обозначают

$$f\colon G \to G_1 \quad \text{или} \quad w = f(z).$$

Когда задана функция $w = f(z)$, говорят, что задано отображение множества G во множество G_1. Множество всех значений $f(z)$ при $z \in G$ обозначают $f(G)$.

Задание функции f равносильно заданию двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, так как

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

2. Предел функции комплексного переменного. Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки z_0, т. е. в кольце $K = \{z\colon 0 < |z - z_0| < R\}$.

2.1. Сформулируем два эквивалентных определения предела функции: по Коши и по Гейне.

Определение предела по Коши. Комплексное число $\mathcal{A}$ называется пределом по Коши функции $f(z)$ при z, стремящемся к z_0 (в точке z_0), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех z, удовлетворяющих условию

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(z) - \mathcal{A}| < \varepsilon.$$

При этом пишут $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \mathcal{A}$ или $f(z) \to \mathcal{A}$ при $z \to z_0$.

Определение предела по Гейне. Комплексное число $\mathcal{A}$ называется пределом по Гейне функции $f(z)$ в точке z_0, если для любой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, сходящейся к z_0, последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к $\mathcal{A}$, т. е. из условия $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ следует, что

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = \mathcal{A}.$$

Существование предела функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильно существованию двух пределов

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = B_1,$$

причем

$$\lim_{z \to z_0} f(x) = A_1 + iB_1.$$

2.2. *Свойства пределов функций.* Если существуют пределы

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \mathcal{A} \quad \text{и} \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = \mathcal{B},$$

то существуют пределы

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \mathcal{A} \pm \mathcal{B}, \quad \lim_{z \to z_0} [f(z)g(z)] = \mathcal{A}\mathcal{B},$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}, \quad \text{где} \quad \mathcal{B} \neq 0.$$

2.3. *Предел функции в точке по множеству.* Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *предельной точкой* множества $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, если для любого $\delta > 0$ в проколотой окрестности

$$\dot{K}_\delta(z_0) = \{z \colon 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

имеется по крайней мере одна точка из множества G.

Пусть задана функция $f(z)$ на множестве $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точка z_0, предельная для множества G. Тогда число $\mathcal{A}$ называется *пределом функции f в точке z_0 по множеству* G, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $z \in \dot{K}_\delta(z_0) \cap G$ выполняется неравенство

$$|f(z) - \mathcal{A}| < \varepsilon.$$

3. Непрерывность функции комплексного переменного

3.1. *Непрерывность функции в точке и в области.* Функция $f(z)$, определенная в окрестности точки z_0, называется *непрерывной в точке* z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Это определение эквивалентно следующему: функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

называется *непрерывной в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Из свойств пределов функции вытекают следующие свойства непрерывных функций. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны (в точке или в области). Тогда (в этой точке или области) непрерывны функции $f(z) \pm g(z)$ и $f(z)g(z)$, а функция $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ непрерывна в тех точках, в которых $g(z) \neq 0$.

Суперпозиция непрерывных функций также является непрерывной функцией: если функция $\xi = f(z)$ непрерывна в точке z_0, а функция $F(\xi)$ непрерывна в точке $\xi_0 = f(z_0)$, то функция $F(f(z))$ непрерывна в точке z_0.

3.2. *Непрерывность функции на кривой.* Пусть кривая γ задана уравнением

$$z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{1}$$

и пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$ заданы две действительные функции $u(t)$ и $v(t)$. Тогда будем говорить, что на кривой γ задана функция $w = f(\sigma(t)) = f_1(t)$, т. е.

$$w = f_1(t) = u_1(t) + iv_1(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{2}$$

Функция (2) называется *непрерывной на кривой* (1), если на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывны функции $u_1(t)$ и $v_1(t)$.

Обозначим через $M(\gamma)$ множество точек z комплексной плоскости, таких, что $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Если кривая γ простая, то соотношение (2) определяет на $M(\gamma)$ однозначную функцию

$$w = f(z) = f(\sigma(t)) = f_1(t).$$

В общем случае, когда кривая γ имеет точки самопересечения, функция (2), как функция от z, может оказаться неоднозначной на $M(\gamma)$. Однако и в этом случае вместо записи (2) для краткости будем писать $w = f(z) = f(\sigma(t))$.

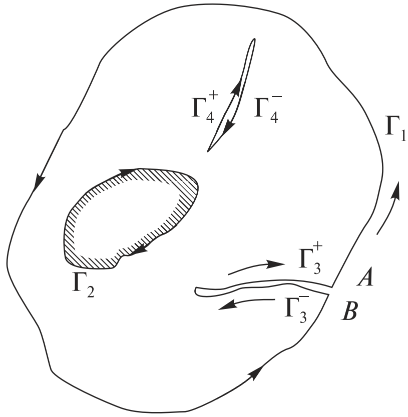

Рис. 3.1

Справедливы следующие утверждения:

1) если функция $f(z)$ непрерывна в области D, то она непрерывна на каждой кривой, лежащей в области D;
2) если функция $f(z)$ определена в области D и непрерывна на каждой кривой, лежащей в области D, то функция $f(z)$ непрерывна в области D.

3.3. *Непрерывность функции в области вплоть до ее границы.* Пусть граница γ области G (рис. 3.1) состоит из ограниченных кусочно-гладких кривых Γ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), которые называют компонентами границы. Кривые Γ_1 (A — ее начало, B — конец) и Γ_2 обладают тем свойством, что произвольная окрестность любой точки этих кривых (кроме, быть может, их концевых точек) содержит как точки области G, так и точки множества $\mathbb{C}\backslash(G \cup \Gamma_i)$, $i = 1, 2$. Эти кривые назовем *гладкими компонентами* границы γ.

Кривая Γ_i ($i = 3, 4$) такова, что для любой точки $z_0 \in \Gamma_i$ (кроме концевых точек) найдется окрестность $B_{\varepsilon_0}(z_0)$, такая, что

$$B_{\varepsilon_0}(z_0)\backslash\Gamma_i \subset G.$$

Эти компоненты границы назовем *разрезами.* Границу γ области G назовем положительно ориентированной, если ориентация γ выбрана так, что при движении (обходе) каждой компоненты границы γ область G остается слева. При этом каждый разрез Γ_i обходится дважды и представляется в виде двух берегов (Γ_i^+ и Γ_i^-), при движении по каждому из них область G остается слева.

Пусть $z_0 \in \Gamma_i$ ($i = 1, 2$). Тогда функцию $f(z)$ назовем непрерывной в точке z_0, если эта функция непрерывна в точке z_0 по множеству $\overline{G}$.

Пусть $z_0 \in \Gamma_3^+$, т. е. принадлежит одному из берегов разреза Γ_3 (аналогично рассматриваются случаи $z_0 \in \Gamma_3^-$, $z_0 \in \Gamma_4^+$, $z_0 \in \Gamma_4^-$). Тогда найдется (считаем, что z_0 не является концевой точкой разреза Γ_3) окрестность $B_{\varepsilon_0}(z_0)$, такая, что множество $B_{\varepsilon_0}(z_0)\backslash\Gamma_3 \subset G$ делится разрезом Γ_3 на две подобласти B^+ и B^-, одна из которых граничит с Γ_3^+, а другая — с Γ_3^- (считаем, что $z_0^+ \in \Gamma_3^+$, $z_0^- \in \Gamma_3^-$). Если предел функции $f(z)$ по множеству $B^+(B^-)$ равен $f(z_0^+)(f(z_0^-))$, то говорят, что функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0^+(z_0^-)$ разреза Γ_3.

Если функция $f(z)$ непрерывна во всех внутренних точках области G и во всех точках ее границы γ, то говорят, что функция $f(z)$ непрерывна в области G вплоть до ее границы.

В том случае, когда область G можно разбить на конечное число областей G_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, таких, что функция $f(z)$ непрерывна на $\overline{G_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то функция $f(z)$ непрерывна в области G вплоть до ее границы γ.

3.4. *Равномерная непрерывность.* Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z_1 \in E$, $z_2 \in E$, удовлетворяющих условию $|z_1 - z_2| < \delta$, справедливо неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Функция $f(z)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве E, равномерно непрерывна на этом множестве (теорема Кантора).

4. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции

4.1. *Показательная функция.* Функция e^z для комплексных $z = x + iy$ определяется формулой

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y);$$
$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y.$$

Функция e^z непрерывна во всей комплексной плоскости.

Свойства функции e^z:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad e^{z+2\pi i} = e^z,$$
$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y.$$

Функция e^z принимает все комплексные значения, кроме нуля, т. е. уравнение $e^z = A$ имеет корни для любого $A \neq 0$. Эти корни находятся по формуле

$$z = \ln|A| + i(\alpha + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\alpha = \arg A$ — одно из значений аргумента числа A.

Например, корнями уравнения $e^z = 1$ являются числа $z = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$; корнями уравнения $e^z = -1$ являются числа $z = \pi(1 + 2k)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Совокупность всех решений уравнения $e^z = A$ называется *логарифмом* комплексного числа $A \neq 0$ и обозначается $\operatorname{Ln} A$;

$$\operatorname{Ln} A = \ln|A| + i \operatorname{Arg} A,$$
$$\operatorname{Arg} A = \{\arg A + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.2. *Тригонометрические функции.* Функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ для комплексных значений z определяются формулами

$$\sin z = \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz}),$$
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Все формулы элементарной тригонометрии, справедливые при всех действительных значениях x, остаются справедливыми и при всех комплексных значениях z. Например,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2\sin z\cos z,$$
$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z,$$
$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ принимают все комплексные значения, а функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ принимают все комплексные значения, кроме $\pm i$.

Для любого $z = x + iy$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{2}\,|e^y - e^{-y}| \leqslant |\sin z| \leqslant \frac{1}{2}\,(e^y + e^{-y}),$$
$$\frac{1}{2}\,|e^y - e^{-y}| \leqslant |\cos z| \leqslant \frac{1}{2}\,(e^y + e^{-y}),$$

откуда следует, в частности, что уравнения $\sin z = 0$ и $\cos z = 0$ имеют корни только при $y = 0$, т. е. на действительной оси.

Все корни уравнения $\sin z = 0$ находятся по формуле

$$z = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

а все корни уравнения $\cos z = 0$ — по формуле

$$z = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Функция $\operatorname{tg} z$ определена при $z \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, а функция $\operatorname{ctg} z$ — при $z \neq \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

4.3. *Гиперболические функции.* Функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ для комплексных значений z определяются формулами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\,(e^z - e^{-z}), \qquad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\,(e^z + e^{-z}),$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Из этих формул следует, что

$$\operatorname{sh} z = -i\sin(iz), \quad \operatorname{ch} z = i\cos(iz),$$
$$\operatorname{th} z = -i\operatorname{tg}(iz), \quad \operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg}(iz).$$

Поэтому функция $\operatorname{th} z$ определена при $z \neq \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right) i$, а функция $\operatorname{cth} z$ — при $z \neq \pi k i$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что формулы для гиперболических функций, справедливые при действительных x, остаются верными и для комплексных z.

5. Интегрирование функций комплексного переменного.

5.1. *Определение интеграла.* Пусть кусочно-гладкая кривая γ задана уравнением

$$z = \sigma(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $z_0 = z(\alpha)$ — начало, а $z(\beta)$ — конец кривой γ. Рассмотрим разбиение T отрезка $[\alpha, \beta]$ точками t_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, где

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = \beta.$$

Пусть $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $l(T) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta t_k$ — мелкость разбиения T; γ_k — дуга кривой γ, соответствующая изменению параметра t на отрезке Δ_k, $\zeta_k = \sigma(\tau_k)$ — произвольная точка дуги γ_k $(\tau_k \in \Delta_k)$, $z_k = \sigma(t_k)$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ (рис. 3.2).

Если на кривой γ определена комплекснозначная функция $f(z)$, то выражение

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{3}$$

называется *интегральной суммой*, соответствующей разбиению T.

Если существует конечный предел интегральных сумм (3) при $l(T) \to 0$, не зависящий от выбора разбиения T (точек t_k) и выбора точек ζ_k, то этот предел называется интегралом от функции f

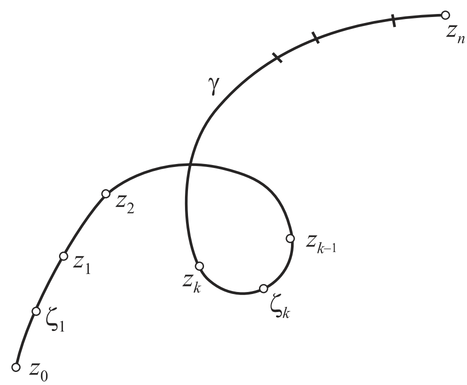

Рис. 3.2

по кривой γ и обозначается

$$\int_\gamma f(z)\,dz. \tag{4}$$

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — функция, непрерывная на кривой γ. Тогда интеграл (4) существует и выражается формулой

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy. \tag{5}$$

Существование интеграла $\int_\gamma f(z)\,dz$ равносильно существованию двух криволинейных интегралов второго рода от действительных функций:

$$\int_\gamma u\,dx - v\,dy \quad \text{и} \quad \int_\gamma v\,dx + u\,dy.$$

Непрерывная на кривой функция $f(z)$ интегрируема на этой кривой.

Если кривая γ задана уравнением

$$z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

то в формуле (5) $dx = \xi'(t)\,dt$, $dy = \eta'(t)\,dt$ и

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta (u\xi' - v\eta')\,dt + i\int_\alpha^\beta (v\xi' + u\eta')\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta (u+iv)(\xi' + i\eta')\,dt = \int_\alpha^\beta f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt. \tag{6}$$

5.2. *Свойства интегралов.*

1) $\int\limits_{\gamma} [af(z) + bg(z)]\,dz = a\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + b\int\limits_{\gamma} g(z)\,dz$, где a и b — любые комплексные числа (линейность интеграла);

2) $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma^{-1}} f(z)\,dz$, т. е. при изменении ориентации кривой интеграл меняет знак;

3) $\int\limits_{\gamma_1 \bigcup \gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz$;

4) если ряд $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из непрерывных на кривой γ функций $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходится равномерно на γ, то его можно почленно интегрировать, т. е.

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)\,dz.$$

5.3. *Оценки интегралов*

1. Пусть функция $f(z)$ непрерывна на кривой γ. Тогда

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f(z)||dz|,$$

где $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$ — элемент длины кривой γ.

2. Выполнено неравенство:

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant Ml(\gamma),$$

где $M = \max\limits_{z\in\gamma} |f(z)|$, $l(\gamma)$ — длина кривой γ.

3. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D и кривая γ лежит в D. Интеграл от $f(z)$ по γ можно с любой точностью приблизить интегралом от $f(z)$ по ломаной, лежащей в области D, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует ломаная C (близкая к кривой γ), лежащая в области D, такая, что

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz - \int\limits_{C} f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

4. Пусть D — ограниченная односвязная область, γ — граница области D. Если функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до границы, то интеграл от $f(z)$ по γ можно с любой точностью приблизить интегралом от $f(z)$ по замкнутой ломаной, лежащей в области D.

Примеры с решениями

Пример 1

△ 1) Функции z, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$, $|z|$ непрерывны во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

2) Многочлен $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ с комплексными коэффициентами является непрерывной функцией во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

3) Рациональная функция $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$, $Q(z)$ — многочлены, непрерывна во всех точках комплексной плоскости, в которых $Q(z) \neq 0$. ▲

Пример 2

△ Пусть D — полукруг $|z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 3.3). Рассмотрим в этой области функцию $f(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$, где $z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$. Эту функцию можно записать в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где

$$u(x, y) = \sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{x^2 + y^2}\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$

$$v(x, y) = \sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{x^2 + y^2}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

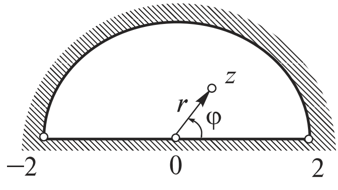

Рис. 3.3

Так как функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в области D, то функция $f(z)$ также непрерывна в этой области. По условленной договоренности считаем, что эта функция доопределена на граничной кривой своими предельными значениями изнутри области по формулам:

$$f(2e^{i\varphi}) = \sqrt{2}e^{i\varphi/2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi;$$
$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2;$$
$$f(x) = i\sqrt{|x|} \quad \text{при} \quad -2 \leqslant x \leqslant 0.$$

Поэтому функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{D}$. ▲

Пример 3

△ Пусть D — круг $|z| < 2$ с разрезом по отрезку $[0,2]$ (рис. 3.4). Рассмотрим в этой области функцию

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2},$$

где

$$z = re^{i\varphi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Так же, как и в примере 2, можно доказать, что функция $f(z)$ непрерывна в области D. Впрочем, и геометрически видно, что $r = |z|$ и полярный угол φ (рис. 3.4) являются непрерывными функциями от (x,y). Доопределим функцию $f(z)$ на граничной кривой области D формулами:

$$f(2e^{i\varphi}) = \sqrt{2}e^{i\varphi/2} \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

на верхнем берегу разреза

$$f(x+i0) = \lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z>0}} f(z) = \sqrt{x} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$$

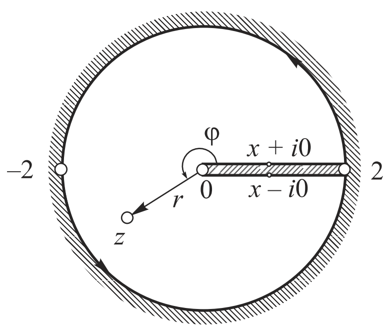

Рис. 3.4

на нижнем берегу разреза

$$f(x - i0) = \lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z < 0}} f(z) = -\sqrt{x} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Получилась функция, которая не является непрерывной в $\overline{D}$, так как на разных берегах разреза она принимает разные значения: ее нельзя «склеить» вдоль разреза так, чтобы она оставалась непрерывной. В этом случае функцию $f(z)$ будем называть непрерывной в области D вплоть до ее границы. ▲

«Разрежем» (разобьем) область D примера 3 отрезком $[-2, 0]$ на две области: D_1 — верхний полукруг $|z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 3.3) и D_2 — нижний полукруг $|z| < 2$, $\operatorname{Im} z < 0$. Тогда функция $f(z)$ примера 3 непрерывна в $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$.

Пример 4. Доказать, что функция $f(z) = z^2$ равномерно непрерывна на множестве $D = \{z\colon |z| \leqslant R\}$, но не является равномерно непрерывной на $\mathbb{C}$.

△ 1) Так как D — замкнутое ограниченное множество, а функция z^2 непрерывна в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ и, в частности, на множестве D, то она равномерно непрерывна на этом множестве (теорема Кантора).

2) Нужно доказать, что существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $z_i = z_i(\delta) \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$$|z_1 - z_2| < \delta, \quad |f(z_1) - f(z_2)| \geqslant \varepsilon_0.$$

По заданному $\delta > 0$ выберем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \delta$, и в качестве искомых точек возьмем

$$z_1 = \sqrt{n+1}, \quad z_2 = \sqrt{n}.$$

Тогда

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta,$$

$$|f(z_1) - f(z_2)| = 1 = \varepsilon_0.$$ ▲

Пример 5. Найти все решения уравнения $e^z = -2$.

△ Все решения этого уравнения даются формулой

$$z_k = \ln|-2| + i(\arg(-2) + 2k\pi),$$

где $\ln|-2| = \ln 2$, $\arg(-2) = \pi$, т. е. $z_k = \ln 2 + i(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ▲

Пример 6. Доказать, что если $z = x + iy$, то имеют место асимптотические формулы
$$|\sin z| \sim \frac{e^{|y|}}{2}, \quad |\cos z| \sim \frac{e^{|y|}}{2}$$
при $y \to \infty$.

△ Так как $\sin z = \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{iz})$, то, используя свойства модуля (неравенства треугольника), получаем
$$\frac{1}{2}\left||e^{iz}| - |e^{-iz}|\right| \leqslant |\sin z| \leqslant \frac{1}{2}\left(|e^{iz}| + |e^{-iz}|\right),$$
где
$$|e^{iz}| = |e^{-y}e^{ix}| = e^{-y}, \quad |e^{-iz}| = e^{y}.$$
Отсюда следует, что
$$\frac{1}{2}|e^{y} - e^{-y}| \leqslant |\sin z| \leqslant \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}),$$
$$|\sin z| \sim \frac{e^{y}}{2} \quad \text{при} \quad y \to +\infty$$
$$\text{и} \quad |\sin z| \sim \frac{e^{-y}}{2} \quad \text{при} \quad y \to -\infty.$$
Следовательно,
$$|\sin z| \sim \frac{e^{|y|}}{2} \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$
Аналогично доказывается, что
$$|\cos z| \sim \frac{e^{|y|}}{2} \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$
▲

Пример 7

△ Пусть $f(z) \equiv 1$, a и b — соответственно начало и конец кривой γ. Тогда интегральная сумма (3) равна
$$\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} =$$
$$= z_n - z_0 = b - a,$$
откуда $\int\limits_{\gamma} dz = b - a$. Таким образом, интеграл $\int\limits_{\gamma} dz$ зависит только от начальной и конечной точек кривой γ и *не зависит от пути интегрирования.* В этом случае вместо $\int\limits_{\gamma} dz$ можно писать $\int\limits_{a}^{b} dz$. В частности,

если $a = b$, то $\int\limits_{\gamma} dz = 0$, т. е. интеграл $\int\limits_{\gamma} dz$ по любой замкнутой кривой равен нулю. ▲

Пример 8. Вычислим интеграл $I_n = \int\limits_{C_\rho} (z - z_0)^n dz$, где n — целое число, C_ρ — окружность $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$, ориентированная против часовой стрелки.

△ Уравнение окружности C_ρ запишем в виде $z = z_0 + \rho e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда $dz = i\rho e^{it} dt$ и по формуле (6) находим:

$$I_n = i\rho^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\, dt,$$

откуда при $n = -1$ получаем $I_{-1} = 2\pi i$, а при $n \neq -1$ по формуле Ньютона—Лейбница получаем:

$$I_n = \frac{\rho^{n+1}}{n+1} e^{it(n+1)} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n = 0,\ 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots\ , \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$ ▲

Задачи

1. Доказать, что сумма и произведение функций, непрерывных на множестве E, также являются функциями, непрерывными на этом множестве. Частное двух функций, непрерывных на множестве E, также является непрерывной на этом множестве функцией, если знаменатель не обращается в нуль ни в одной точке множества E.

2. Выяснить, будут ли следующие функции равномерно непрерывны в области $0 < |z| < 1$:

1) $f = e^{-1/|z|}$; 2) $f = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$;

3) $f = \dfrac{(\operatorname{Re} z^2)^2}{z^2}$; 4) $f = e^{-1/z^2}$.

3. Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве E. Доказать, что:

1) функция $|f(z)|$ ограничена на множестве E и достигает наибольшего и наименьшего значения;

2) функция $f(z)$ равномерно непрерывна на множестве E.

4. Функции $f(z)$ и $g(z)$ равномерно непрерывны на множестве E. Можно ли утверждать, что функция $f(z)g(z)$ равномерно непрерывна на множестве E?

5. Пусть функция $f(z)$ определена и равномерно непрерывна в ограниченной области D. Доказать, что в каждой точке границы области D функция $f(z)$ имеет предел и что функция $f(z)$, доопределенная на границе области D этими предельными значениями, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$.

6. Пусть область D ограничена простой кусочно-гладкой кривой. Доказать, что функция, непрерывная в области D вплоть до ее границы, равномерно непрерывна в этой области.

7. Пусть область D можно разбить на конечное число областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, каждая из которых ограничена простой кусочно-гладкой кривой. Доказать, что для непрерывности функции $f(z)$ вплоть до границы области D необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была равномерно непрерывна в каждой из областей $D_1, \ldots, D_n$.

8. Вычислить значения функции e^z в точках:

1) $z = 2\pi i$; 2) $z = \pi i$;
3) $z = \pi i/2$; 4) $z = -\pi i/2$;
5) $z = \pi i/4$.

9. Доказать формулы:

1) $\cos(-z) = \cos z$; 2) $\sin(-z) = -\sin z$;
3) $\sin\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos z$; 4) $\sin(\pi + z) = -\sin z$;
5) $\sin(z + 2\pi) = \sin z$; 6) $\cos\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin z$;
7) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
8) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

10. Доказать формулы:

1) $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z$; 2) $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z$; 3) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;
4) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$;
5) $\operatorname{sh}\left(z + \dfrac{\pi i}{2}\right) = i \operatorname{ch} z$; 6) $\operatorname{ch}\left(z + \dfrac{\pi i}{2}\right) = i \operatorname{sh} z$;
7) $\operatorname{sh}(z + \pi i) = -\operatorname{sh} z$; 8) $\operatorname{ch}(z + \pi i) = -\operatorname{ch} z$;
9) $\operatorname{th}(z + \pi i) = \operatorname{th} z$; 10) $\operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z$.

11. Доказать формулы:

1) $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$; 2) $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z$;
3) $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$; 4) $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$;
5) $\operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z$; 6) $\operatorname{th}(iz) = i \operatorname{tg} z$;
7) $\operatorname{ctg}(iz) = -i \operatorname{cth} z$; 8) $\operatorname{cth}(iz) = -i \operatorname{ctg} z$.

12. Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать, что:

1) $\operatorname{Re} \sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} \sin z = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$;
2) $\operatorname{Re} \cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} \cos z = -\sin x \cdot \operatorname{sh} y$;

3) $\operatorname{Re}\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cdot \cos y$, $\quad \operatorname{Im}\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \cdot \sin y$;
4) $\operatorname{Re}\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cdot \cos y$, $\quad \operatorname{Im}\operatorname{ch} z = \operatorname{sh} x \cdot \sin y$;
5) $\operatorname{Re}\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$, $\quad \operatorname{Im}\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$;
6) $\operatorname{Re}\operatorname{ctg} z = \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}$, $\quad \operatorname{Im}\operatorname{ctg} z = \dfrac{-\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}$.

13. Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать, что:
1) $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$; 2) $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$;
3) $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$; 4) $|\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}$;
5) $|\operatorname{tg} z| = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}}$; 6) $|\operatorname{cth} z| = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}}$.

14. Описать точки z, в которых следующие функции принимают действительные значения:
1) $\cos z$; 2) $\operatorname{ch} z$; 3) $\sin z$; 4) $\operatorname{tg} z$; 5) $\operatorname{cth} z$.

15. Описать точки z, в которых следующие функции принимают чисто мнимые значения:
1) $\sin z$; 2) $\operatorname{sh} z$; 3) $\cos z$; 4) $\operatorname{ctg} z$; 5) $\operatorname{th} z$.

16. Найти все точки, в которых обращаются в нуль следующие функции:
1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{sh} z$; 4) $\operatorname{ch} z$.

17. Найти все решения следующих уравнений:
1) $\sin z = \dfrac{4i}{3}$; 2) $\sin z = \dfrac{5}{3}$; 3) $\cos z = \dfrac{3i}{4}$; 4) $\cos z = \dfrac{3+i}{4}$;
5) $\operatorname{tg} z = \dfrac{5i}{3}$; 6) $\operatorname{ctg} z = -\dfrac{3i}{5}$; 7) $\operatorname{sh} z = \dfrac{i}{2}$; 8) $\operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}$.

18. Доказать, что при $|z| \leqslant R$ имеют место неравенства:
1) $|\operatorname{ch} z| \leqslant \operatorname{ch} R$; 2) $|\operatorname{sh} z| \leqslant \operatorname{sh} R$;
3) $|\cos z| \leqslant \operatorname{ch} R$; 4) $|\sin z| \leqslant \operatorname{sh} R$.

19. Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать, что:

1) Функция e^z стремится к бесконечности при x, стремящемся к $+\infty$, и это стремление равномерно по y.

2) Функция e^z стремится к нулю при $x \to -\infty$ и это стремление равномерно по y.

3) Функции $\sin z$ и $\cos z$ стремятся к бесконечности при $y \to \pm\infty$ и это стремление равномерно по x.

20. Доказать, что:

1) Функция e^{z^2} стремится к бесконечности при $z \to \infty$ в любом угле вида
$$|\arg z - \pi| \leqslant \alpha$$
и в любом угле вида $|\arg z| \leqslant \alpha$, если только $\alpha < \dfrac{\pi}{4}$.

2) Функция e^{z^2} стремится к нулю при $z \to \infty$ в любом угле вида
$$\left|\arg z \pm \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{4}\,.$$

21. Пусть $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Доказать, что функция $e^{P(z)}$ стремится к бесконечности при $z \to \infty$ в углах

$$\left|\arg z - \frac{2k\pi}{n}\right| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2n} \quad (k = 0,\, 1,\, \ldots\, ,\, n-1),$$

и стремится к нулю при $z \to \infty$ в углах

$$\left|\arg z - \frac{(2k+1)\pi}{n}\right| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2n} \quad (k = 0,\, 1,\, \ldots\, ,\, n-1).$$

22. Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать неравенства:

1) $\dfrac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}} \leqslant |\operatorname{tg} z - i| \leqslant \dfrac{2e^{-2y}}{1-e^{-2y}} \quad (y > 0);$

2) $\dfrac{2e^{2y}}{1+e^{2y}} \leqslant |\operatorname{tg} z + i| \leqslant \dfrac{2e^{2y}}{1-e^{-2y}} \quad (y < 0);$

3) $\dfrac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}} \leqslant |\operatorname{ctg} z + i| \leqslant \dfrac{2e^{-2y}}{1-e^{-2y}} \quad (y > 0);$

4) $\dfrac{2e^{2y}}{1+e^{2y}} \leqslant |\operatorname{ctg} z - i| \leqslant \dfrac{2e^{2y}}{1-e^{2y}} \quad (y < 0).$

23. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_C |z|dz$ в случаях, когда кривая C является:

1) прямолинейным отрезком, идущим из точки $z = -i$ в точку $z = i$;

2) полуокружностью

$$|z| = 1, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

идущей из точки $z = -i$ в точку $z = i$.

24. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_C z \sin z\, dz$, где C — прямолинейный отрезок, идущий из точки $z = 0$ в точку $z = i$.

25. Пусть функция $f(z)$ непрерывна во всей расширенной плоскости. Обозначим через C_a прямолинейный отрезок, идущий из точки a в точку $a+1$. Доказать, что

$$\lim_{a\to\infty} \int_{C_a} f(z)\, dz = f(\infty).$$

26. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leqslant M|z|^m.$$

Обозначим через C_R полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, идущую из точки $z = R$ в точку $z = -R$. Доказать неравенство

$$\left|\int_{C_R} f(z) e^{iz} dz\right| \leqslant \pi M R^m.$$

Указание. Воспользоваться неравенством $\sin\varphi > \dfrac{2}{\pi}\varphi \quad \left(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

27. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в угле

$$-\alpha \leqslant \arg z \leqslant \alpha \quad (0 < \alpha < \pi),$$

и пусть $zf(z) \to A$ при $z \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \alpha$. Обозначим через C_R дугу окружности $|z| = R$, $|\arg z| \leqslant \alpha$, идущую из точки $z = Re^{-i\alpha}$ в точку $z = Re^{i\alpha}$. Доказать, что

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 2i\alpha A.$$

Ответы

2. 1) да; 2) нет.

3. 1) да; 2) нет.

4. Нет.

8. 1) 1; 2) -1; 3) i; 4) $-i$; 5) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

14. 1) $\operatorname{Im} z = 0$; $\operatorname{Re} z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
2) $\operatorname{Re} z = 0$; $\operatorname{Im} z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
3) $\operatorname{Im} z = 0$; $\operatorname{Re} z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
4) $\operatorname{Im} z = 0$; 5) $\operatorname{Im} z = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

15. 1) $\operatorname{Re} z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
2) $\operatorname{Re} z = 0$; $\operatorname{Im} z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
3) $\operatorname{Re} z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
4) $\operatorname{Re} z = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
5) $\operatorname{Im} z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

16. 1) $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
3) $z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

17. 1) $z = i(-1)^k \ln 3 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
2) $z = \pm i \ln 3 + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
3) $z = \pm\left(-i \ln 2 + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
4) $z = \pm\left(-\dfrac{i}{2} \ln 2 + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
5) $z = i \ln 2 + \pi\left(k + \dfrac{1}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

6) $z = i\ln 2 + \pi\left(k + \dfrac{1}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

7) $z = (-1)^k \dfrac{\pi i}{6} + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$;

8) $z = \pm\dfrac{\pi i}{3} + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

23. 1) i; 2) $2i$.

24. $-ie^{-1}$.

§ 4. Равномерная сходимость. Степенные ряды

Справочные сведения

1. Равномерная сходимость

1.1. Последовательность функций $\{f_n(z)\}$, определенных на множестве $E \subset \mathbb{C}$, называется *равномерно сходящейся на множестве* E к функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ и всех $z \in E$ справедливо неравенство $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$f_n(z) \rightrightarrows f(z), \quad z \in E.$$

1.2. *Критерий Коши равномерной сходимости последовательности.* Для того чтобы последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходилась на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что для всех $n > N$, всех $p \in \mathbb{N}$ и всех $z \in E$ выполнялось неравенство

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

1.3. Пусть функции $f_n(z)$ определены на множестве E и в каждой точке $z \in E$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{1}$$

сходится. Тогда ряд (1) называется *равномерно сходящимся на множестве* E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N$ и для всех $z \in E$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Если $S(z)$ — сумма ряда (1), т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S(z), \quad S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z), \quad r_n(z) = S(z) - S_n(z),$$

то условие (2) примет вид

$$|r_n(z)| < \varepsilon$$

при всех $n \geqslant N_\varepsilon$ и всех $z \in E$. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in E} |r_n(z)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

1.4. *Критерий Коши равномерной сходимости ряда.* Ряд (1) сходится равномерно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N$, для всех $p \in \mathbb{N}$ и для всех $z \in E$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(z)\right| < \varepsilon.$$

1.5. *Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.* Если для всех $n \in \mathbb{N}$ и для всех $z \in E$ справедливы неравенства $|f_n(z)| \leqslant a_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональный ряд (1) сходится равномерно и абсолютно на множестве E.

1.6. Если функции $f_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, непрерывны на множестве E и ряд (1) сходится равномерно на множестве E, то сумма $S(z)$ этого ряда непрерывна на E.

1.7. Если функции $f_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, непрерывны в области G, γ — кусочно-гладкая кривая, $\gamma \subset G$, а ряд (1) сходится к своей сумме $S(z)$ равномерно на кривой γ, то этот ряд можно почленно интегрировать по кривой γ, т. е. справедливо равенство

$$\int_\gamma S(z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz.$$

2. Степенные ряды

2.1. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3}$$

где a, c_n — заданные комплексные числа, z — комплексная переменная.

2.2. **Теорема Абеля.** *Если степенной ряд (3) сходится в точке $z_1 \neq a$, то он абсолютно сходится в круге $K_0 = \{z\colon |z-a| < |z_1 - a|\}$, а в любом замкнутом круге $K_1 = \{z\colon |z-a| \leqslant \rho\}$, где $\rho < |z_1 - a|$, этот ряд сходится равномерно.*

2.3. Для всякого степенного ряда (3) существует R ($R \geqslant 0$ — число или $R = +\infty$) такое, что:

а) если $R \neq 0$ и $R \neq +\infty$, то ряд (3) абсолютно сходится в круге $B_R(a) = \{z\colon |z-a| < R\}$ и расходится вне круга $B_R(a)$; этот круг называется *кругом сходимости* ряда (3), а R — *радиусом сходимости* ряда;

б) если $R = 0$, то ряд (3) сходится только в точке a;

в) если $R = +\infty$, то этот ряд сходится во всей комплексной плоскости.

2.4. Радиус R сходимости степенного ряда (3) может быть вычислен по формуле Коши—Адамара

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{4}$$

Если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{5}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-nz}$ сходится равномерно на множестве $E = \{z\colon \operatorname{Re} z \geqslant \delta > 0\}$.

△ Так как $|e^{-nz}| = e^{-nx}$, где $x = \operatorname{Re} z$, то на множестве E справедливо неравенство $|\sqrt{n} e^{-nz}| \leqslant \sqrt{n} e^{-n\delta}$, а из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-n\delta}$, где $\delta > 0$, следует равномерная сходимость на множестве E данного функционального ряда. ▲

Пример 2. Найти радиус R сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{n3^n} z^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n z^{3n}$.

△ 1) Так как $|1+i| = \sqrt{2}$ и существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\sqrt{2})^n}{n3^n}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

то по формуле (4) получаем $R = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

2) В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4,$$

и по формуле (5) находим $R = 4$.

3) Пусть $4z^3 = t$, тогда $4^n z^{3n} = t^n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^n$ сходится, если $|t| < 1$ и расходится при $|t| > 1$, то данный ряд сходится, если $4|z|^3 < 1$, т. е. при $|z| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, и расходится при $|z| > \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Следовательно $R = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Заметим, что R можно найти и по формуле (4). ▲

Задачи

1. Пусть на множестве E определены функции $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, и $f(z)$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $z \in E$ справедливо неравенство $|f_n(z) - f(z)| \leqslant a_n$, где $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $z \in E$.

2. Доказать, что на каждом замкнутом множестве E, лежащем в круге $|z| < 1$, последовательность $\left\{\dfrac{1}{1+z^n}\right\}$ равномерно сходится к функции $f(z) = 1$, а на каждом замкнутом множестве E, лежащем в области $|z| > 1$, эта последовательность равномерно сходится к функции $f(z) = 0$.

3. Доказать, что последовательность $\{nze^{-n^2z^2}\}$ равномерно сходится в угле $|\arg z| \leqslant \alpha$ при любом α, где $0 \leqslant \alpha < \pi/4$, к функции $f(z) = 0$.

4. Пусть последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится на множестве E к функции $f(z)$, и пусть функции $f_n(z)$ непрерывны на множестве E. Доказать, что функция $f(z)$ также непрерывна на этом множестве.

5. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ равномерно сходится на множестве E, а функции $v_n(z)$ определены на множестве E и удовлетворяют неравенствам $|v_n(z)| \leqslant |u_n(z)|$ $(z \in E)$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(z)$ равномерно сходится на множестве E.

6. Доказать равномерную сходимость ряда на множестве E:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, z^{-2n}$, $E = \{z\colon |z| \geqslant 1\}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nz}$, $E = \{z\colon \operatorname{Re} z \geqslant \delta > 0\}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n + z^{-n}}$, $E = \{z\colon |z| \leqslant \rho < \frac{1}{2}\}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos nz$, $E = \{z\colon |\operatorname{Im} z| \leqslant \delta < \ln 2\}$.

7. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Доказать равномерную сходимость ряда на множестве E:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $E = \{z\colon |z| \leqslant \rho < 1\}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nz}$, $E = \{z\colon \operatorname{Re} z \geqslant \delta > 0\}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 z}$, $E = \{z\colon \operatorname{Re} z \geqslant \delta > 0\}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \cos nz$, $E = \{z\colon |\operatorname{Im} z| \leqslant \delta < \ln 2\}$.

8. Найти радиус сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+6}\right)^{n^2} \cdot z^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, z^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 6^n z^{5n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^\alpha} z^n$, $\alpha > 1$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{2n^3} \cdot z^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i\sqrt{5})^n}{(3-i\sqrt{7})^{2n}}\, z^{3n}$.

9. Пусть R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Найти радиус сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^m z^n$, $m \in \mathbb{N}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^m z^{mn}$, $m \in \mathbb{N}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{1+|c_n|}\, z^n$.

10. Доказать, что степенные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\, z^{n+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ имеют один и тот же радиус сходимости.

11. Обозначим радиусы сходимости степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

через R_1, R_2, R_3, R_4 соответственно. Доказать, что

$$R_3 \geqslant \min(R_1, R_2), \quad R_4 \geqslant R_1 \cdot R_2.$$

12. Доказать, что если имеет место неравенство

$$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \geqslant R\left(1+\frac{\alpha}{n}\right), \quad n > n_0,$$

где $\alpha > 0$, то степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится во всех точках окружности своего круга сходимости.

13. Пусть все числа c_n положительны, $c_{k-1} > c_k$ ($k \in \mathbb{N}$) и $c_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится во всех точках окружности $|z| = 1$, за исключением, быть может, точки $z = 1$.

14. Выяснить, в каких точках окружности круга сходимости сходятся следующие ряды:

1) $z + \dfrac{2}{1\cdot 3}\, z^2 + \dfrac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}\, z^3 + \ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n\sqrt{n}}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{n\ln^2 n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n)!}{(2n)!n!}\,(-1)^n z^{2n}$; 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}\, z^{3n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\pi i n^2/2}}{n}\, z^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\pi i n^2/2}}{\sqrt{n}}\, z^n$.

15. Доказать *вторую теорему Абеля*: если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в точке z_0, то он равномерно сходится на всем прямолинейном отрезке, соединяющем точку $z = 0$ с точкой z_0.

Ответы

8. 1) e^3; 2) e; 3) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}$; 4) $+\infty$; 5) e; 6) $\sqrt[3]{\dfrac{16}{3}}$.

9. 1) R^m; 2) $\sqrt[m]{R}$; 3) $\max(R, 1)$.

14. 1) При $z \neq 1$; 2) во всех; 3) во всех; 4) при $z \neq \dfrac{1}{4}$;

5) при $z \neq \pm\dfrac{4i}{27}$; 6) при $z \neq -1$, $z \neq \dfrac{1}{2} \pm i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

7) при $z \neq 1$, $z \neq \pm i$; 8) при $z \neq 1$, $z \neq \pm i$.

Глава 2
Регулярные функции

§ 5. Дифференцируемость функций. Гармонические функции

Справочные сведения

1. Дифференцируемость. Условия Коши—Римана

1.1. *Дифференцируемость.* Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, т. е. на множестве

$$B_r(z_0) = \{z\colon |z - z_0| < r\},$$

где $r > 0$. Если существует конечный предел отношения $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ при $z \to z_0$, тот этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$, т. е.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1}$$

или

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z},$$

где

$$\Delta z = z - z_0, \quad \Delta f = f(z) - f(z_0).$$

Если функция $f(z)$ имеет в точке z_0 производную, то говорят, что функция $f(z)$ *дифференцируема* в точке z_0.

1.2. *Условия дифференцируемости.* Для того чтобы функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ дифференцируемы в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;
2) в точке (x_0, y_0) справедливы равенства (*условия Коши—Римана*):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

1.3. *Условия Коши—Римана в произвольном ортонормированном базисе.* Если в $\mathbb{R}^2$ заданы два взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{n}$ и $\vec{l}$ с той же взаимной ориентацией, что и базисные векторы

$$\vec{e}_1 = (1, 0) \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 = (0, 1),$$

то условия Коши—Римана (2) эквивалентны равенствам производных по направлениям

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial l}; \quad \frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\partial v}{\partial n}. \tag{3}$$

В частности, в полярных координатах условия Коши—Римана в точке $z_0 \neq 0$ эквивалентны равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

1.4. *Свойства производной.* Если две функции f и g дифференцируемы в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, то в этой точке

а) функция $f + g$ дифференцируема и справедливо равенство $(f+g)' = f' + g'$;

б) функция $f \cdot g$ дифференцируема и справедливо равенство $(fg)' = fg' + f'g$;

в) если $g(z_0) \neq 0$, то функция $\dfrac{f}{g}$ дифференцируема и справедливо равенство
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, а функция $g(w)$ дифференцируема в точке $w_0 = f(z_0)$, то сложная функция $\varphi(z) = g\left(f(z)\right)$ дифференцируема в точке z_0, и справедливо равенство

$$\varphi'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0).$$

2. Понятие регулярной функции. Функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ называется *регулярной* (или *голоморфной*) функцией в области $G \subset \mathbb{C}$, если она определена и дифференцируема в каждой точке области G.

Говорят, что функция f *регулярна в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если она регулярна в некоторой окрестности этой точки.

Говорят, что функция f *регулярна на множестве* D, если существует область $G \supset D$, в которой функция f определена и регулярна.

3. Понятие гармонической функции

3.1. *Определение гармонической функции.* Действительная функция $u(x, y)$, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая в области $G \subset \mathbb{R}^2$, называется *гармонической* в области G, если в любой точке $(x, y) \in G$ справедливо равенство

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(символом Δ обозначен дифференциальный оператор $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, носящий название *оператора Лапласа*).

3.2. *Связь регулярных и гармонических функций.* Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ регулярна в области G, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими функциями в области G.

Если в *односвязной области* $G \subset \mathbb{R}^2$ задана гармоническая функция $u(x, y)$, то существует регулярная в области G функция $f(z)$, для которой $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$.

Пара функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, гармонических в области G и удовлетворяющих условиям Коши—Римана в этой области, называется парой *сопряженных гармонических функций* (порядок функций в паре является существенным).

Примеры с решениями

Пример 1. Найти все точки, в которых дифференцируема функция $f(z) = z^2$.

$\triangle$ Так как

$$\Delta f = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = 2z_0 \cdot \Delta z + (\Delta z)^2,$$

то $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = 2z_0 + \Delta z$, откуда следует, что существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) = 2z_0.$$

Итак, $f(z) = z^2$ дифференцируема в любой точке из $\mathbb{C}$.

Дифференцируемость можно проверять, используя условия Коши—Римана (2).

Так как

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

то

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Функции u и v дифференцируемы на $\mathbb{R}^2$ и выполнены условия Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Следовательно, $f(z) = z^2$ — функция, дифференцируемая во всей плоскости $\mathbb{C}$, и

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. Найти все точки, в которых дифференцируема функция $f(z) = \overline{z}$.

$\triangle$ В этом случае

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y,$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1,$$

т. е. условия Коши—Римана (2) не выполнены и поэтому функция $f(z) = \overline{z}$ нигде не дифференцируема. $\blacktriangle$

Пример 3. Дана гармоническая функция $u = xy$. Найти регулярную функцию $f(z)$ такую, что $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$.

$\triangle$ Для искомой функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ нужно найти $v(x, y)$. В силу дифференцируемости $f(z)$ должны выполняться условия Коши—Римана, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \text{откуда} \quad v(x, y) = \frac{y^2}{2} + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция. Из второго уравнения в условиях Коши—Римана (2) получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x,$$

откуда $\varphi'(x) = -x$, т. е. $\varphi(x) = -\dfrac{x^2}{2} + C$.

Итак,

$$v = \frac{y^2 - x^2}{2} + C,$$

$$f(z) = xy + i\left(\frac{y^2 - x^2}{2} + C\right) = -\frac{iz^2}{2} + iC, \qquad \blacktriangle$$

где C — произвольное действительное число.

Задачи

1. Найти все точки $z = x + iy$, в которых дифференцируемы функции:
1) $\operatorname{Im} z$; 2) $|\overline{z}|^2$; 3) $x^2 - iy^2$; 4) $x^2 - y^2 - 2ixy$;
5) $x - y + i(x + y)$; 6) $z \operatorname{Re} z$.

2. Доказать, что при любом натуральном значении n функция z^n дифференцируема во всей комплексной плоскости и что $(z^n)' = nz^{n-1}$.

3. Доказать, что всякий многочлен от z является дифференцируемой функцией во всей комплексной плоскости, а всякая рациональная функция дифференцируема в любой точке, где знаменатель не обращается в нуль.

4. Определим функцию e^z при любом комплексном значении $z = x+iy$ равенством $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Доказать, что функция e^z дифференцируема при любом z и справедливо равенство $(e^z)' = e^z$.

5. Определим функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$, равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\,(e^z - e^{-z}), \qquad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\,(e^z + e^{-z}),$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz}), \qquad \cos z = \frac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz}).$$

Доказать, что
1) $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$; 2) $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$;
3) $(\sin z)' = \cos z$; 4) $(\cos z)' = -\sin z$.

6. Выяснить, в каких точках $z \in \mathbb{C}$ дифференцируемы функции, и найти их производные:
1) $e^{\operatorname{sh} z}$; 2) $\cos(2e^z)$; 3) $\sin z \operatorname{sh} z + i \cos z \operatorname{ch} z$;
4) $\dfrac{e^z}{z}$; 5) $\dfrac{z}{e^z}$; 6) $\dfrac{\sin z}{1 + z^2}$.

7. Выяснить, где дифференцируемы функции, и найти их производные:
1) $\operatorname{tg} z$; 2) $\operatorname{ctg} z$; 3) $\dfrac{e^z + 2}{e^z - 2}$; 4) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}$;
5) $(e^z + e^{-z})^{-3}$; 6) $\dfrac{\sin z}{\sin z - \cos z}$.

8. Пусть функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

дифференцируема в точке $z_0 = x_0+iy_0$. Доказать справедливость формул:
1) $f'(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,(x_0, y_0) - i\,\dfrac{\partial u}{\partial y}\,(x_0, y_0)$;
2) $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,(x_0, y_0) - i\,\dfrac{\partial u}{\partial y}\,(x_0, y_0)$;
3) $f'(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial x}\,(x_0, y_0) + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x}\,(x_0, y_0)$.

9. Пусть функция $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ дифференцируема в области $G \subset \mathbb{C}$ и пусть одна из функций
1) $u(x, y)$; 2) $v(x, y)$; 3) $r(x, y) = |f(z)|$; 4) $\varphi(x, y) = \arg f(z)$
сохраняет в области G постоянное значение. Доказать, что $f(z) \equiv \text{const}$.

10. Пусть u, v — пара сопряженных гармонических функций в области G, а ξ, η — пара сопряженных гармонических функций в области D. Пусть для любого $z = x + iy \in G$ значение $u(x,y) + iv(x,y)$ принадлежит области D. Доказать, что пара функций U, V вида

$$U(x,y) = \xi\left(u(x,y), v(x,y)\right),$$
$$V(x,y) = \eta\left(u(x,y), v(x,y)\right)$$

образует пару сопряженных гармонических функций в области G.

11. Пусть u, v — пара сопряженных гармонических функций в области G и пусть ни в одной точке области G функции u и v не обращаются в нуль одновременно. Доказать, что функция

$$U(x,y) = \ln\left[u^2(x,y) + v^2(x,y)\right]$$

является гармонической в области G.

12. Пусть u, v_1 и u, v_2 — две пары сопряженных гармонических функций в области G с одной и той же первой функцией u. Доказать, что $v_1(x,y) - v_2(x,y) \equiv \text{const}$.

13. В следующих задачах дается одна из пары сопряженных гармонических функций u или v. Найти вторую функцию пары.

1) $u = xy$; 2) $u = x^2 - y^2 + 2xy$;
3) $v = y \sin x \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y \cos x$;
4) $u = r\varphi \cos\varphi + r \ln r \sin\varphi$ $(z = x + iy = re^{i\varphi})$.

14. Найти все гармонические функции вида

1) $u = \varphi(x^2 + y^2)$; 2) $u = \varphi(x^2 - y^2)$;
3) $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$; 4) $u = \varphi\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)$.

15. Пусть $P(x,y)$ — многочлен от x и y с комплексными коэффициентами. Обозначим

$$P^*(z, \overline{z}) = P\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right).$$

Доказать, что

1) функции $u(x,y) = \operatorname{Re} P(x,y)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} P(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши—Римана в том и только в том случае, когда многочлен $P^*(z, \overline{z})$ не зависит от $\overline{z}$;

2) многочлен $P(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta P = 0$ в том и только том случае, когда многочлен $P^*(z, \overline{z})$ можно представить в виде $Q_1(z) + Q_2(\overline{z})$, где Q_1 и Q_2 — многочлены.

16. Пусть $P(z)$ — многочлен. Положим

$$u(x,y) = \operatorname{Re} P(x + iy);$$
$$v(x,y) = \operatorname{Im} P(x + iy).$$

Доказать, что справедливы формулы

1) $P(z) = 2u\left(\dfrac{z}{2}, \dfrac{z}{2i}\right) - \overline{P(0)}$; 2) $P(z) = 2iv\left(\dfrac{z}{2}, \dfrac{z}{2i}\right) + \overline{P(0)}$.

17. Восстановить регулярную функцию $f(z)$ по условию

1) $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$, $f(0) = i$;
2) $\operatorname{Re} f(z) = x\sin x \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} y \cos x$, $f(0) = 0$;
3) $\operatorname{Im} f(z) = y \operatorname{ch} x \cos y + x \sin y \operatorname{sh} x$, $f(0) = 1$;
4) $\operatorname{Im} f(z) = y\cos x \operatorname{ch} y - x \sin x \operatorname{sh} y$, $f(0) = 2$;
5) $\operatorname{Im} f(z) = x\sin y \operatorname{ch} x + y \operatorname{sh} x \cos y$, $f(0) = 0$;
6) $\operatorname{Re} f(z) = xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y$, $f(0) = i$;
7) $|f(z)| = (x^2+y^2)e^x$;
8) $\arg f(z) = 2xy$;
9) $|f(z)| = re^{r^2\cos 2\varphi}$ $(z = re^{i\varphi})$;
10) $\arg f(z) = \varphi + r\sin\varphi$ $(z = re^{i\varphi})$.

18. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в некоторой области G. Доказать, что сумма $f(z) + \overline{g(z)}$ действительна во всей области G тогда и только тогда, когда $f(z) = g(z) + C$, где C — действительная постоянная.

19. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в некоторой области G и $g(z) \not\equiv 0$. Доказать, что произведение $f(z)\overline{g(z)}$ действительно (неотрицательно) во всей области G тогда и только тогда, когда $f(z) = Cg(z)$, где C — действительная (неотрицательная) постоянная.

Ответы

1. 1) Нигде; 2) в точке $z = 0$; 3) на прямой $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$;
4) нигде; 5) всюду; 6) в точке $z = 0$.

6. 1) $\operatorname{ch} z e^{\operatorname{sh} z}$; 2) $-2e^z \sin(2e^z)$;
3) $(1+i)\cos z \operatorname{sh} z + (1-i)\sin z \operatorname{ch} z$;
4) $\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2}\right)e^z$, $z \neq 0$; 5) $(1-z)e^{-z}$;
6) $\dfrac{(1+z^2)\cos z - 2z\sin z}{(1+z^2)^2}$, $z \neq \pm i$.

7. 1) $\dfrac{1}{\cos^2 z}$; 2) $-\dfrac{1}{\sin^2 z}$; 3) $\dfrac{-4e^z}{(e^z-2)^2}$; 4) $\cos 2z$;
5) $\dfrac{3(e^{-z}-e^z)}{(e^z+e^{-z})^4}$; 6) $\dfrac{-1}{(\sin z - \cos z)^2}$.

13. 1) $-\dfrac{x^2-y^2}{2} + C$; 2) $2xy - x^2 + y^2 + C$;
3) $x\sin x \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} y \cos x$; 4) $r\varphi \sin\varphi - r\ln r\cos\varphi + C$.

14. 1) $C_1 \ln(x^2+y^2) + C_2$; 2) $C_1(x^2-y^2) + C_2$;
3) $C_1 \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + C_2$; 4) $C_1 \dfrac{x}{x^2+y^2} + C_2$.

17. 1) $(1+2i)z^3 + i$; 2) $z\sin z$; 3) $z \operatorname{ch} z + 1$;
4) $z\cos z + 2$; 5) $z \operatorname{sh} z$; 6) $(z+i)e^z$;
7) $z^2 e^{z+i\alpha}$, $\operatorname{Im}\alpha = 0$, $\alpha = \mathrm{const}$; 8) Ae^{z^2}, $A > 0$ – const;
9) $ze^{z^2+i\alpha}$, $\operatorname{Im}\alpha = 0$, $\alpha = \mathrm{const}$; 10) Aze^z, $A > 0$ – const.

§ 6. Теорема Коши. Интеграл типа Коши.

Справочные сведения

1. Теорема Коши. Для всякой функции f, регулярной в односвязной области G, справедливо равенство

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0,$$

где интеграл берется по любой замкнутой спрямляемой кривой γ, лежащей в области G. В более общем виде теорема Коши имеет следующую формулировку.

Теорема. *Пусть дана ограниченная конечносвязная область G с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f регулярна в области G и непрерывна вплоть до границы Γ области G. Тогда*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

2. Интегральная формула Коши. Пусть G — ограниченная конечносвязная область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f регулярна в области G и непрерывна вплоть до ее границы Γ. Тогда для любой точки $z \in G$ справедлива *интегральная формула Коши* вида:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{1}$$

3. Интеграл типа Коши. Пусть γ — кусочно-гладкая ориентированная кривая в $\mathbb{C}$, и пусть $w = q(z)$ — непрерывная на γ функция. Тогда интеграл вида

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad z \notin \gamma, \tag{2}$$

называется *интегралом типа Коши* по кривой γ от функции q.

При сформулированных выше условиях функция $I(z)$ определена и дифференцируема на $\mathbb{C}\backslash\gamma$ бесконечное число раз, причем для ее производных справедлива формула

$$I^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Из интегральной формулы Коши (1) и свойств интеграла типа Коши (2) получаем следствие: всякая регулярная в области функция является бесконечно дифференцируемой функцией в этой области.

4. Первообразная. По теореме Коши интеграл от функции $f(z)$, регулярной в односвязной области G, не зависит от пути интегрирования, поэтому имеет смысл обозначение

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta, \quad z_1 \in G, \quad z_2 \in G,$$

для интеграла по любой кусочно-гладкой кривой, лежащей в области G, с началом в точке z_1 и концом в точке z_2.

Функция $\Phi(z)$, определенная и дифференцируемая в области G, называется *первообразной функции* $f(z)$, определенной в области G, если

$$\Phi'(z) = f(z) \quad (z \in G).$$

Известно, что *если первообразная существует, то она единственна с точностью до постоянного слагаемого.*

Теорема Морера. *Если функция $f(z)$ непрерывна в области G и для каждой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset G$ справедливо равенство*

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0,$$

то функция $f(z)$ регулярна в области G.

Следствие. *При выполнении условий теоремы Морера у функции $f(z)$ существует в области G первообразная вида*

$$\Phi(z) = \int\limits_{a}^{z} f(\xi)\,d\xi, \quad z \in G,$$

где a — произвольная точка из области G.

Примеры с решениями

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{\gamma} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$ по полуокружности

$$\gamma = \left\{ z\colon \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2},\ \operatorname{Im} z \geqslant 0 \right\}$$

с началом в точке 0 и концом в точке 1.

△ Отмечая, что подынтегральная функция $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ регулярна в круге
$$\left\{z\colon \left|z-\frac{1}{2}\right| < \left|\frac{1}{2}+i\right|\right\},$$
то по теореме Коши интеграл от этой функции внутри этого круга не зависит от пути интегрирования, т. е. можно интегрировать, например, по отрезку $[0,1]$. Тогда получаем
$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}\,. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. С помощью интегральной формулы Коши вычислить значение интеграла
$$I = \oint\limits_{|\zeta|=2} \frac{e^{\zeta}}{\zeta+1}\,d\zeta,$$
где окружность $|\zeta| = 2$ обходится против часовой стрелки.

△ Сравнивая данный интеграл I с правой частью формулы (1), видим, что если в формуле (1) выбрать функцию $f(z) = 2\pi i e^z$, то получим, что $I = f(-1)$, т. е. $I = 2\pi i e^{-1}$. ▲

Пример 3. Вычислить интегралы Френеля
$$I_1 = \int_0^\infty \cos x^2\,dx, \quad I_2 = \int_0^\infty \sin x^2\,dx.$$

△ Пусть $R > 0$. Рассмотрим контур Γ_R, указанный на рис. 6.1, $\Gamma_R = [0,R] \cup C_R \cup l$. Так как функция e^{iz^2} регулярна внутри Γ_R, то
$$\int_{\Gamma_R} e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_l e^{iz^2} dz = 0. \tag{4}$$

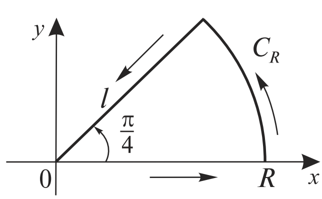

Рис. 6.1

Оценим интеграл $\int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz$. При $z \in C_R$ имеем $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, так что

$$\left|e^{iz^2}\right| = e^{-R^2 \sin 2\varphi} \leqslant e^{-(4R^2/\pi)\varphi}$$

в силу неравенства $\sin 2\varphi \geqslant 4\varphi/\pi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4)$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz\right| \leqslant R \int\limits_0^{\pi/4} e^{-(4R^2/\pi)\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}) \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Далее, если $z \in l$, то $z = re^{i\pi/4}$, так что $e^{iz^2} = e^{-r^2}$. Поэтому

$$\int\limits_l e^{iz^2} dz = -e^{i\pi/4} \int\limits_0^R e^{-r^2} dr. \tag{5}$$

Из курса математического анализа известно, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Переходя в равенстве (4) к пределу при $R \to \infty$, получаем

$$\int\limits_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{6}$$

Отделяя в равенстве (6) действительные и мнимые части, находим искомые интегралы:

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2 dx = \int\limits_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Доказать, что если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z - a| < R$ и удовлетворяет условию $|f(z)| \leqslant M \quad (|z - a| < R)$, то для любых двух точек z_1 и z_2 из этого круга имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta\right| \leqslant M|z_2 - z_1|.$$

2. Доказать, что утверждение задачи 1 остается в силе, если областью регулярности функции $f(z)$ является не обязательно круг, а произвольная выпуклая область в $\mathbb{C}$.

Замечание. Область называется *выпуклой*, если вместе с каждой парой принадлежащих этой области точек ей принадлежит и прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки.

3. Пусть функция $f(z)$ регулярна в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ и удовлетворяет условию $\operatorname{Re} f(z) \geqslant M > 0 \quad (z \in D)$. Доказать, что для любых двух точек z_1 и z_2 из этой области

$$\left|\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta\right| \geqslant M|z_2 - z_1|.$$

4. Доказать, что утверждение задачи 3 остается в силе, если условие

$$\operatorname{Re} f(z) \geqslant M > 0 \quad (z \in D)$$

заменить условием $\operatorname{Re}\left\{e^{i\varphi} f(z)\right\} \geqslant M$ (действительное число φ не зависит от точки z).

5. Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Доказать, что функция

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta + \mathrm{const} \quad (z_0 \in D,\ z \in D)$$

является первообразной функции $f(z)$.

6. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, а $F(z)$ и $G(z)$ соответственно первообразные этих функций. Доказать формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b F(z)g(z)\, dz = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int\limits_a^b f(z)G(z)\, dz.$$

7. Найти первообразные функций:
1) e^{az}; 2) $\operatorname{ch} az$; 3) $\operatorname{sh} az$;
4) $\cos az$; 5) $\sin az$; 6) $e^{az}\cos bz$;
7) ze^{az}; 8) $z^2 \operatorname{ch} az$; 9) $z\cos az$.

8. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $r < |z - a| < R$. Доказать, что интеграл

$$\oint\limits_{|z-a|=\rho} f(z)\, dz, \quad r < \rho < R,$$

не зависит от числа ρ (окружность обходится против часовой стрелки).

9. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $r < |z| < R$, а простая кусочно-гладкая кривая γ ограничивает область, содержащую круг $|z| \leqslant r$ и лежащую в круге $|z| < R$, причем при движении по кривой γ область остается слева. Доказать, что интеграл $\int\limits_\gamma f(z)\, dz$ не зависит от выбора кривой γ (удовлетворяющей поставленным выше условиям).

10. Пусть функция $f(z)$ регулярна в произвольной области D комплексной плоскости. Доказать, что необходимым и достаточным условием существования первообразной у функции $f(z)$ в области D является равенство нулю интеграла от функции $f(z)$ по любой простой замкнутой ломаной, лежащей в области D.

11. Доказать, что следующие функции не имеют первообразных в областях, указанных в скобках:

1) $\dfrac{1}{z}$ $(0 < |z| < \infty)$; 2) $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z-1}$ $(0 < |z| < 1)$;

3) $\dfrac{z}{1+z^2}$ $(0 < |z| < \infty)$; 4) $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$ $(0 < |z| < 1)$.

12. Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной двусвязной области D, заключенной между двумя замкнутыми кусочно-гладкими кривыми γ_1 и γ_2, и непрерывна вплоть до ее границы. Доказать, что функция $f(z)$ имеет в области D первообразную в том и только в том случае, когда

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0.$$

13. Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной в $\overline{\mathbb{C}}$ области, содержащей точку $z = \infty$. Доказать, что функция $f(z)$ имеет в этой области первообразную в том и только в том случае, когда $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$.

14. Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащей точку $z = \infty$. Обозначим через D' область D с выколотой точкой $z = \infty$. Доказать, что функция $f(z)$ имеет первообразную в области D' в том и только в том случае, когда

$$\lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)) = 0.$$

15. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащей точку $z = \infty$, и имеют первообразные в области D' (область D с выколотой точкой $z = \infty$). Доказать, что функции $f(z)+g(z)$, $f(z)g(z)$, $P(f(z))$, $e^{f(z)}$ ($P(w)$ — произвольный многочлен) также регулярны в области D и имеют первообразную в области D'.

16. Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной m-связной области D, граница которой состоит из замкнутых кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$. Доказать, что для существования у функции $f(z)$ первообразной в области D необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

17. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полосе $-a < \operatorname{Im} z < a$ и удовлетворяет условию

$$f(z) \to 0 \quad (z \to \infty,\ -a < \operatorname{Im} z < a).$$

Доказать, что если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то при любом α из интервала $(-a, a)$ интеграл $\int\limits_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(z)\,dz$ также сходится и не зависит от α.

Указание. Применить теорему Коши к одному из прямоугольников

$$-R_1 < \operatorname{Re} z < R_2, \quad 0 < |\operatorname{Im} z| < |\alpha|,$$

а затем перейти к пределу при $R_1 \to +\infty$, $R_2 \to +\infty$.

18. Пусть функция $f(z)$ регулярна в угле $-a < \arg z < a$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} zf(z) &\to 0 \quad (z \to 0,\ |\arg z| < a), \\ zf(z) &\to 0 \quad (z \to \infty,\ |\arg z| < a). \end{aligned}$$

Доказать, что если интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то при любом α из интервала $(-a, a)$ интеграл $\int\limits_{\arg z=\alpha} f(z)\,dz$ также сходится и не зависит от α.

19. Из анализа известно, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx, \quad -\infty < \alpha < \infty.$$

20. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ix^2}dx$.

21. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

1) $\oint\limits_{|z+i|=3} \sin z\,\dfrac{dz}{z+i}$; 2) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{z^2+1}$; 3) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{e^z}{z^2-1}\,dz$;

4) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$; 5) $\oint\limits_{|z+1|=1} \dfrac{dz}{(1+z)(z-1)^3}$; 6) $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz$;

7) $\oint\limits_{\partial D} \dfrac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ $\quad (D:$ а) $|z| < 1/2$; б) $|z| < 3/2$; в) $|z-1| < 1/2)$;

8) $\oint\limits_{|z|=r} \dfrac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$ $\quad (|a| < r < |b|,\ n = 1, 2, \ldots)$.

22. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в круге $|z| < 1$ и непрерывны в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=1} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{zg(\zeta)}{z\zeta - 1}\right] d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{при} \quad |z| < 1, \\ g\left(\dfrac{1}{z}\right) & \text{при} \quad |z| > 1. \end{cases}$$

23. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащей точку $z = \infty$, и непрерывна вплоть до ее границы. Доказать, что в этом случае интегральная формула Коши принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = \begin{cases} f(z) - f(\infty) & \text{при} \quad z \in D, \\ -f(\infty) & \text{при} \quad z \notin \overline{D}, \end{cases}$$

а формула для производных $f(z)$ сохраняет прежний вид.

Указание. Применить формулу Коши к функции $f(z)$ в области D_R, получающейся удалением из области D области $|z| \geqslant R$, а затем положить $R \to \infty$.

24. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z-a| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z - a| \leqslant R$. Доказать формулу

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(a + Re^{i\varphi})\, d\varphi = f(a),$$

носящую название *теоремы о среднем.*

25. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant R$. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{r<|z|<R} f(z)\, dx\, dy.$$

26. Доказать, что функция, регулярная в некоторой области и отличная от тождественной постоянной, не может принимать во внутренней точке этой области наибольшего по модулю значения. (*Принцип максимума модуля.*)

Указание. См. задачу 24.

27. Пусть функция $u(x, y)$ гармонична в круге $|z - a| \leqslant R$. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\alpha + R\cos\varphi,\ \beta + R\sin\varphi)\, d\varphi = u(\alpha, \beta) \quad (a = \alpha + i\beta).$$

Указание. См. задачу 24.

28. Доказать, что функция, гармоническая в некоторой области и отличная от тождественной постоянной, не может принимать во внутренней точке этой области ни наибольшего, ни наименьшего значения. (*Принцип максимума для гармонических функций.*)

29. Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ и непрерывна вплоть до ее границы ∂D, состоящей из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых. Доказать неравенство

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leqslant \frac{M \cdot L}{2\pi\rho^{n+1}} \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots),$$

где $M = \max\limits_{z\in\partial D} |f(z)|$, ρ — расстояние от точки z до границы области D, а L — полная длина границы области D.

30. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant R$. Доказать неравенство

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leqslant \frac{MR}{(R-|z|)^{n+1}} \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots), \quad (|z| < R),$$

где $M = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$.

31. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant R$. Доказать неравенство

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leqslant \frac{MR}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(R^2 + |z|^2 - 2R|z|\cos\varphi\right)^{-(n+1)/2} d\varphi \quad (|z| < R),$$

где $M = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$, и показать, что при $n = 1$ это неравенство можно записать в виде

$$|f'(z)| \leqslant \frac{MR}{R^2 - |z|^2} \quad (|z| < R).$$

32. Пусть функция $f(z)$ регулярна во всей плоскости и удовлетворяет условию $|f(z)| \leqslant M$ при всех z. Доказать, что $f(z)$ тождественно постоянна. (*Теорема Лиувилля.*)

Указание. Воспользоваться неравенством для $|f'(z)|$, скажем, из задачи 31 при фиксированном z и $R \to \infty$.

33. Пусть функция $f(z)$ регулярна во всей плоскости и удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leqslant M(1 + |z|)^p, \quad p > 0.$$

Доказать, что $f(z)$ — многочлен степени не выше p.

34. Во всех точках, не принадлежащих кривой интегрирования, вычислить значения следующих интегралов типа Коши:

1) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-2)(\zeta-z)}$;

2) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$;

3) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{d\zeta}{\zeta(2\zeta^2+5\zeta+2)(\zeta-z)}$, $D = \left\{z\colon |z| < 1,\ \left|z + \dfrac{2}{3}\right| > \dfrac{1}{3}\right\}$.

35. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $r < |z-a| < R$. Доказать, что интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad r < \rho < R.$$

при $|z| < r$ (или при $|z| > R$) не зависит от числа ρ.

Указание. См. задачу 8.

36. Пусть функция $f(\zeta)$ регулярна в кольце $r < |\zeta| < R$ и непрерывна в замкнутом кольце $r \leqslant |\zeta| \leqslant R$. Обозначим

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=R} f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad (|z| < R),$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=r} f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad (|z| > r)$$

(окружности обходятся против часовой стрелки). Доказать, что при $r < |z| < R$ имеет место равенство $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

37. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $r < |z-a| < R$. Доказать, что ее можно представить в виде $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, где функция $f_1(z)$ регулярна в круге $|z-a| < R$, а функция $f_2(z)$ регулярна при $|z-a| > r$ и $f_2(\infty) = 0$.

38. Доказать, что представление функции $f(z)$ из предыдущей задачи единственно.

Указание. Воспользоваться теоремой Лиувилля (см. задачу 32).

39. Пусть простая замкнутая кривая γ_1 ограничивает область $D_1 \subset \mathbb{C}$, а простая замкнутая кривая γ_2, лежащая в области D_1, ограничивает область $D_2 \subset D_1$. Доказать, что любую функцию $f(z)$, регулярную в кольцеобразной области $D = D_1 \backslash \overline{D}_2$, можно представить в виде $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, где функция $f_1(z)$ регулярна в области D_1, а функция $f_2(z)$ регулярна вне области D_2. Доказать также, что такое представление единственно, если наложить условие $f_2(\infty) = 0$.

40. Пусть γ — простая замкнутая кривая, ограничивающая область $D \subset \mathbb{C}$, а функция $\varphi(z)$ регулярна в некоторой области, содержащей кривую γ. Доказать, что для существования функции $f(z)$, регулярной в замыкании области D и совпадающей с функцией $\varphi(z)$ на кривой γ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \equiv 0 \quad (z \notin \overline{D}).$$

41. Пусть γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, ограничивающая конечную область D, а функция $\varphi(t)$ непрерывна на кривой γ. Доказать, что для равенства

$$\oint_\gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \equiv 0 \quad (z \notin \overline{D})$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\oint_\gamma t^n \varphi(t)\,dt = 0 \quad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots),$$

а для равенства

$$\oint_\gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \equiv 0 \quad (z \in D)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\oint_\gamma t^n \varphi(t)\,dt = 0 \quad (n = -1,\, -2,\, \ldots).$$

42. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полосе $-a < \operatorname{Im} z < a$ и удовлетворяет условиям

$$\frac{f(z)}{z} \to 0 \quad (z \to \infty,\ |\operatorname{Im} z| < a),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1+|x|}\,dx < \infty.$$

Доказать, что функцию $f(z)$ можно представить в виде $f_1(z) + f_2(z)$, где функция $f_1(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -a$ и удовлетворяет условию

$$\frac{f_1(z)}{z} \to 0 \quad (z \to \infty,\ \operatorname{Im} z \geqslant -a+\varepsilon)$$

($\varepsilon > 0$ произвольно), а функция $f_2(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} z < a$ и удовлетворяет условию

$$\frac{f_2(z)}{z} \to 0 \quad (z \to \infty,\ \operatorname{Im} z \leqslant a-\varepsilon)$$

($\varepsilon > 0$ произвольно). Доказать также, что такое представление единственно.

Указание. Взять

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-ia'-\infty}^{-ia'+\infty} f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad \operatorname{Im} z > -a' > -a,$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ia'-\infty}^{ia'+\infty} f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad \operatorname{Im} z > a' < a.$$

43. Пусть функция $f(\zeta)$ регулярна в угле

$$-a < \arg\zeta < a, \quad 0 < a < \pi,$$

непрерывна вплоть до его границы и удовлетворяет условиям

$$f(z) \to 0 \quad (z \to \infty, \ |\arg z| \leqslant a), \qquad \int\limits_0^\infty |f(x)|\,\frac{dx}{1+x} < \infty.$$

Обозначим

$$f_1(z) = \int\limits_{\arg\zeta=-a} f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad f_2(z) = \int\limits_{\arg\zeta=a} f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Доказать, что:

1) функция $f_1(z)$ регулярна во всей плоскости z с разрезом по лучу $\arg z = -a$, а функция $f_2(z)$ — во всей плоскости z с разрезом по лучу $\arg z = a$;

2) вне угла $|\arg z| \leqslant a$ имеет место равенство $f_1 = f_2$;

3) внутри угла $|\arg z| < a$ имеет место равенство $f_1 - f_2 = 2\pi i$.

Ответы

7. 1) $\dfrac{1}{a}\,e^{az} + C$; 2) $\dfrac{1}{a}\operatorname{sh} az + C$; 3) $\dfrac{1}{a}\operatorname{ch} az + C$;
4) $\dfrac{1}{a}\sin az + C$; 5) $-\dfrac{1}{a}\cos az + C$;
6) $e^{az}\,\dfrac{a\cos bz + b\sin bz}{a^2+b^2} + C$; 7) $\dfrac{1}{a}\left(z - \dfrac{1}{a}\right)e^{az} + C$;
8) $\dfrac{z^2}{a}\operatorname{sh} az - \dfrac{2z}{a^2}\operatorname{ch} az + \dfrac{2}{a^3}\operatorname{sh} az + C$;
9) $\dfrac{z}{a}\sin az + \dfrac{1}{a^2}\cos az + C$.

19. $\sqrt{\pi}e^{-\alpha^2/4}$.

20. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-i\pi/4}$.

21. 1) $2\pi\operatorname{sh}1$; 2) 0; 3) $2\pi i\operatorname{sh}1$; 4) 0; 5) $-\pi/4$; 6) $-\pi i\operatorname{ch}1$;
7) а) $2\pi i$; б) $\pi i(2-e)$; в) $-\pi i e$; 8) $-2\pi i(b-a)^{-n}$.

25. $\pi(R^2 - r^2)f(0)$.

34. 1) $D_1 = \{z\colon |z| < 1\}$, $f_1(z) = \dfrac{1}{2(z-2)}$;
$D_2 = \{z\colon |z| > 1\}$, $f_2(z) = \dfrac{1}{2z}$;
2) $D_1 = \left\{z\colon \left|\arg\dfrac{z-1}{z}\right| < \pi\right\}$, $f_1(z) = \dfrac{1}{2\pi}\arg\dfrac{z-1}{z} - \dfrac{i}{2\pi}\ln\left|\dfrac{1-z}{z}\right|$;

3) $D_1 = \left\{z\colon \left|z + \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{1}{3}\right\}, \ f_1(z) = -\dfrac{1}{2z};$

$D_2 = \{z\colon |z| > 1\}, \ f_2(z) = -\dfrac{1}{2z};$

$D_3 = \left\{z\colon |z| < 1\}, \ \left|z + \dfrac{2}{3}\right| > \dfrac{1}{3}\right\}, \ f_3(z) = \dfrac{2z+5}{2(2z^2+5z+2)}.$

§ 7. Ряд Тейлора

Справочные сведения

1. Если функция $f(z)$ регулярна в круге

$$B_R(a) = \{z\colon |z-a| < R\},$$

то она представима в этом круге в виде суммы сходящегося к $f(z)$ ряда Тейлора, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{1}$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{2}$$

2. Вычислив производные в точке $z = 0$ функций e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\dfrac{1}{1-z}$, можно получить их разложения в ряд Тейлора:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < +\infty; \tag{3}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |z| < +\infty; \tag{4}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < +\infty; \tag{5}$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |z| < +\infty; \tag{6}$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < +\infty; \tag{7}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1. \tag{8}$$

Ряды (3)–(7) сходятся во всей комплексной плоскости, а ряд (8) — в круге $B_1(0)$.

3. Арифметические операции над степенными рядами (рядами Тейлора). Если функции $f(z)$ и $g(z)$, регулярные в круге $B_R(a) = \{z\colon |z-a| < R\}$, представляются рядами

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n,$$

сходящимися в круге $B_R(a) = \{z\colon |z-a| < R\}$, то

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \pm d_n)(z-a)^n, \tag{9}$$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} \right) (z-a)^n. \tag{10}$$

Ряды (9) и (10) сходятся в круге $B_R(a)$.

4. Метод неопределенных коэффициентов. Пусть $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z)$ и $h(z)$ — функции, регулярные в окрестности точки a, причем $h(a) \neq 0$. Тогда функция $f(z)$ регулярна в окрестности точки a. Если известно, что

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{и} \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n,$$

то для нахождения коэффициентов c_n разложения $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ нужно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях разности $z-a$ в равенстве $f(z)h(z) = g(z)$ и получить уравнения вида

$$c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \ldots + c_n b_0 = a_n,$$

из которых можно последовательно найти числа c_0, c_1, c_2 и т. д.

5. Нули регулярной функции. Точка $z = a$ называется *нулем* функции $f(z)$, регулярной в точке a, если $f(a) = 0$.

Пусть $z = a$ $(a \neq \infty)$ — нуль функции $f(z)$ и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{11}$$

Если в формуле (11) c_m — первый отличный от нуля коэффициент ($c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$), т. е. разложение функции $f(z)$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = a$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_m \neq 0,$$

то число m называется *порядком* (или *кратностью*) нуля $z = a$ функции $f(z)$.

Так как $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, то порядок нуля $z = a$ функции $f(z)$ равен наименьшему порядку производной этой функции, отличной от нуля в точке a.

Точка $z = a$ $(a \neq \infty)$ является нулем порядка m функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(z) = (z-a)^m h(z),$$

где $h(z)$ — регулярная в точке a функция, такая, что $h(a) \neq 0$.

Примеры с решениями

Пример 1. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{и} \quad f(z) = \frac{z+11}{z^2+z-2}\,.$$

$\triangle$ 1) Так как $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \left(\dfrac{1}{1-z}\right)'$, то используя разложение (8), получаем

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Этот ряд, как и ряд (8), сходится в круге $B_1(0) = \{z\colon |z| < 1\}$.

2) Так как

$$z^2 + z - 2 = (z-1)(z+2),$$

то функцию $f(z)$ можно представить в виде суммы простых дробей, т. е.

$$f(z) = \frac{z+11}{z^2+z-2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2}\,, \quad \text{где} \quad A = 4, \quad B = -3.$$

Чтобы воспользоваться формулой (8), преобразуем $f(z)$. Получим

$$f(z) = -\frac{4}{1-z} - \frac{3}{2\left(1+\dfrac{z}{2}\right)}\,,$$

откуда находим

$$f(z) = -4\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 4\right) z^n.$$

Этот ряд сходится в круге $B_1(0) = \{z\colon |z| < 1\}$. $\blacktriangle$

Пример 2. Разложить функцию

$$f(z) = \left(5 - 3z + \frac{z^2}{2}\right) e^{6z - z^2 - 8}$$

в окрестности точки $z = 3$ в ряд Тейлора.

△ Пусть $z - 3 = t$, тогда, воспользовавшись формулой (3), получим:

$$f(z) = \frac{t^2 + 1}{2}\, e^{1 - t^2} = \frac{e}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2(n+1)}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{2n}\right) =$$

$$= \frac{e}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{(n-1)}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right) t^{2n} =$$

$$= \frac{e}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}\,(z-3)^{2n}.$$

Ряд сходится во всей комплексной плоскости. ▲

Пример 3. Разложить функцию $e^z \cos z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$.

△ Для нахождения искомого разложения можно перемножить ряды (3) и (5). Однако для эффективного вычисления коэффициентов разложения удобнее использовать тождество

$$e^z \cos z = e^z \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{z(1+i)} + e^{z(1-i)}\right).$$

Так как $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, то, применяя формулу (3), получаем разложение

$$e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} e^{i\pi n/4} + 2^{n/2} e^{-i\pi n/4}}{2n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos\frac{\pi n}{4}\, z^n.$$

Радиус сходимости этого ряда $R = +\infty$. ▲

Пример 4. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ и $g(z) = z \operatorname{ctg} z$.

△ Применив метод неопределенных коэффициентов, получим

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n, \tag{12}$$

где B_n — числа Бернулли, определяемые из равенств

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2},$$

$$C_{n+1}^0 B_0 + C_{n+1}^1 B_1 + \ldots + C_{n+1}^n B_n = 0,$$

C_{n+1}^k — биномиальные коэффициенты ($k = 0, 1, \ldots, n$). Ряд (12) сходится в круге $B_{2\pi}(0) = \{z\colon |z| < 2\pi\}$.

2) Используя равенство

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i + \frac{2i}{e^{2iz}-1}$$

и формулу (12), получаем:

$$\begin{aligned} z\operatorname{ctg} z &= iz + \frac{2iz}{e^{2iz}-1} = \\ &= iz + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)2iz + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\,z^{2n} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}\,z^{2n}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ряд (13) содержит только члены с z^{2k}, так как $z\operatorname{ctg} z$ — четная функция, этот ряд сходится в круге радиуса π. ▲

Пример 5. Найти порядок нуля $z = \pi$ функции

$$f(z) = (z^2 - \pi^2)^2 \sin^4 z.$$

△ Так как

$$\begin{aligned} z^2 - \pi^2 &= (z-\pi)h_1(z), \quad h_1(\pi) \neq 0, \\ \sin z &= (z-\pi)h_2(z), \quad h_2(\pi) \neq 0, \end{aligned}$$

то $f(z) = (z-\pi)^6 h(z)$, где $h(z)$ — регулярная в точке π функция, такая, что $h(\pi) \neq 0$. Следовательно, точка $z = \pi$ — нуль функции $f(z)$ кратности 6. ▲

Задачи

1. Используя формулы (3) и (5), доказать, что:

1) $\dfrac{1}{4}\,(e^z + e^{-z} + 2\cos z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{4n}}{(4n)!}$;

2) $\dfrac{1}{3}\left(e^z + 2e^{-z/2}\cos\dfrac{z\sqrt{3}}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{3n}}{(3n)!}$.

2. Используя формулу (8), доказать, что:

1) $\dfrac{2}{(1+z)^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) z^n$, $|z| < 1$;

2) $\dfrac{z(z+a)}{(a-z)^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 z^n}{a^{n+1}}$, $|z| < |a|$, $a \neq 0$;

3) $\dfrac{1}{z^2+a^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{-2(n+1)} z^{2n}, \ \ |z| < |a|, \ \ a \neq 0;$

4) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n z^{2n}, \ \ |z| < 1|;$

5) $\dfrac{z^2+4z^4+z^6}{(1-z^2)^4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 z^{2n}, \ \ |z| < 1|;$

6) $(1-z)^{-m-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{m!} z^n, \ \ |z| < 1, \ \ m \in \mathbb{N}.$

3. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функцию:

1) $\dfrac{1}{(1+z)^2}$; 2) $\dfrac{1}{(1-z^2)^2}$; 3) $\dfrac{1}{(1+z^3)^2}$; 4) $\dfrac{1}{(1-z^6)^3}$;

5) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$; 6) $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$; 7) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$;

8) $\dfrac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$; 9) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$; 10) $\dfrac{1}{1+z+z^2}$;

11) $\dfrac{2z-1}{4z^2-2z+1}$; 12) $\dfrac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$;

13) $\dfrac{1}{(1-z^4)(1+z+z^2+z^3)}$.

4. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{2z^2+2z-7}{z^2+z-2}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = -1$.

5. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{z^2+2z}{(z+1)^3}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$.

6. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции:

1) $\sin^2 z$; 2) $\cos^3 z$; 3) $\sin^4 z + \cos^4 z$;

4) $\cos^2 z + \operatorname{ch}^2 z$; 5) $e^2 \sin z$; 6) $\operatorname{ch} z \cdot \cos z$.

7. Разложить функцию

$$f(z) = (z^2-4z+5)e^{4z-z^2}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 2$.

8. Разложить функцию

$$f(z) = \left(\frac{z^2}{3} + 2z - 1\right)\cos(2z+6)$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = -3$.

9. Найти первые три отличные от нуля члена разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции:

1) $\operatorname{tg} z$; 2) $\dfrac{z}{(1-z^2)\sin z}$; 3) $e^{z+\cos z}$.

10. Используя метод неопределенных коэффициентов, показать, что коэффициенты A_n степенного ряда

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

определяются условиями $A_0 = 1$, $A_1 = 1$, $A_{n+1} = A_n + A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Числа A_n называются числами Фибоначчи. Доказать, что

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

11. Определить порядок m нуля $z = a$ функции $f(z)$, если:
1) $f(z) = (\cos 3z - \cos 5z)^2 (1 - \cos 2z)^3$, $a = 0$;
2) $f(z) = (z^2 - \pi^2)^3 \sin^3 z$, $a = \pi$;
3) $f(z) = (z^2 + \pi^2)^2 (e^{2z} - 1)^4$, $a = \pi i$;
4) $f(z) = (z^4 + 2z^3 - 2z - 1)^2 (e^{i\pi z} + 1)^3$, $a = -1$.

12. Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции, удовлетворяющей указанным ниже условиям:
1) $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$;
2) $(1 + z^2) f'(z) = 1$, $f(0) = 0$;
3) $f''(z) + \lambda^2 f(z) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \lambda$;
4) $(1 - z^2) f''(z) - z f'(z) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$;
5) $z f''(z) + f'(z) + z f(z) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$;
6) $(1 - z^2) f''(z) - 5z f'(z) - 4f(z) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

13. Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяет условиям

$$f(0) = 0, \quad f(z) = z + f(z^2).$$

Доказать, что $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

14. Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяет условиям

$$f(0) = 1, \quad f'(z) = (1 + qz) f(q^2 z),$$

где q — заданное действительное число, такое, что $|q| \leqslant 1$. Доказать, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

15. Используя формулу (12) (пример 4), доказать, что:

1) $\operatorname{tg} z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^{2n}(1 - 2^{2n})}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}$, $|z| < \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\dfrac{z}{\sin z} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2 - 2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$, $|z| < \pi$.

16. Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, содержащей точку z_0. Доказать, что для любой точки $z \in D$ справедлива формула

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z-z_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{z_0}^{z} (z-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

17. Доказать, что

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!}\,z^{2n}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}\,,$$

где коэффициенты E_{2n} (числа Эйлера) определяются условиями

$$E_0 = 1, \quad E_{2k-1} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$
$$E_0 + C_{2n}^2 E_2 + C_{2n}^4 E_4 + \ldots + C_{2n}^{2n} E_{2n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ответы

3. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) z^{2n}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{3n}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,z^{6n}$;

5) $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} - 2^{-n-1}\right) z^n$; 6) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} + 3^{-n-1}) z^n$;

7) $\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} - 4^{-n-1}\right) z^{2n+1}$; 8) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z^{4n} + z^{4n-1})$;

9) $\frac{1}{25}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(5n + 6 + (-1)^n 4^{-n-1}\right) z^{2n}$;

10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z^{3n} - z^{3n+1})$; 11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2^{3n+2} z^{3n+2} - 2^{3n} z^{3n})$;

12) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z^{8n} - z^{8n+1})$; 13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(z^{8n} - z^{8n+1})$.

4. $f(z) = \frac{7}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{-(n+1)} + (-1)^n\right)(z+1)^n$.

5. $f(z) = \frac{3}{8} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{(n+1)(n+2)}{8}\right)(z-1)^n$.

6. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\,z^{2n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n}+3}{4}\,\frac{z^{2n}}{(2n)!}$;

3) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n-2}}{(2n)!}\,z^{2n}$; 4) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}}{(4n)!}\,z^{4n}$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \sin\frac{\pi n}{4} \cdot \frac{z^n}{n!}$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$.

7. $f(z) = e^4 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^4 (-1)^{n-1}(n-1)}{n!}\,(z-2)^n$.

8. $f(z) = -4 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n} \dfrac{2n^2 - n + 24}{6 \cdot (2n)!} (z+3)^{2n}$.

9. 1) $z + \dfrac{1}{3} z^3 + \dfrac{2}{15} z^5 + \ldots$; 2) $1 + 2z + \dfrac{19}{6} z^2 + \ldots$; 3) $1 + z + \dfrac{z^2}{2} + \ldots$.

11. 1) $m = 10$; 2) $m = 6$; 3) $m = 6$; 4) $m = 7$.

12. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\lambda^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$.

§ 8. Последовательности и ряды регулярных функций. Интегралы, зависящие от параметра.

Справочные сведения

1. Последовательности и ряды. Равномерная сходимость строго внутри области. Рассмотрим функциональную последовательность $\{S_n(z)\}$, а также функциональный ряд

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z), \tag{1}$$

членами которых являются функции, регулярные в некоторой области G. Говорят, что последовательность $\{S_n(z)\}$ (ряд (1)) *равномерно сходится строго внутри области* G, если она (он) сходится равномерно в каждом замкнутом круге

$$\overline{B_r(z_0)} = \{z\colon |z - z_0| \leqslant r\},$$

содержащемся в области G, т.е. для любого $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется номер

$$N = N(\overline{B_r(z_0)}, \varepsilon)$$

такой, что для всех $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$\sup\{|S_n(z) - S(z)|\colon z \in \overline{B_r(z_0)}\} \leqslant \varepsilon$$

(для ряда (1), полагая $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$, получаем аналогичное утверждение).

2. Теорема Вейерштрасса. *Пусть ряд (1), составленный из регулярных в области G функций $f_n(z)$, сходится равномерно строго внутри области G. Тогда его сумма $S(z)$ является регулярной функцией в области G, и ряд (1) можно почленно дифференцировать в G любое число раз, т. е. для любого числа $k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in G, \tag{2}$$

причем каждый ряд (2) сходится равномерно строго внутри области G.

3. Бесконечные произведения. Рассмотрим сходящиеся бесконечные произведения регулярных в области G функций $1 + f_k(z)$:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k(z)), \tag{3}$$

ни один из сомножителей которого в области G в нуль не обращается.

Бесконечное произведение (3) называется *равномерно сходящимся строго внутри области* G, если строго внутри этой области равномерно сходится последовательность функций

$$p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} [1 + f_k(z)].$$

Из теоремы Вейерштрасса следует, что в случае равномерной сходимости бесконечного произведения (3) строго внутри области G функция $p(z) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(z)$ является регулярной в области G.

Для сходимости произведения (3) необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 + f_k(z)), \tag{4}$$

где под $\ln(1 + f_k(z))$ понимается некоторая регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(1 + f_k(z))$ в области G (см. далее § 17, 18).

4. Интегралы, зависящие от параметра. Пусть даны спрямляемая кривая $\gamma \subset \mathbb{C}$ и область $G \subset \mathbb{C}$. Пусть дана функция $f(\zeta, z)$, $f\colon \gamma \times G \to \mathbb{C}$, непрерывная по совокупности аргументов на $\gamma \times G$, а кроме того при любом $\zeta \in \gamma$ функция $f(\zeta, \cdot)$ регулярна в области G. Тогда функция

$$g(z) = \int_{\gamma} f(\zeta, z)\, d\zeta$$

регулярна в области G.

5. Принцип компактности семейства регулярных функций. Если семейство функций $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, регулярных в области G, локально равномерно ограничено (т. е. для любого замкнутого подмножества B, содержащегося в G, существует число $M = M(B)$ такое, что

$$|f_n(z)| \leqslant M, \quad z \in B, \quad n \in \mathbb{N}),$$

то из последовательности $\{f_n(z)\}$ можно выделить некоторую подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся на каждом замкнутом подмножестве области G.

Задачи

1. Доказать, что суммы следующих рядов регулярны в областях, указываемых в скобках:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nz}{n!}$ $(|z| < \infty)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} \sin nz$ $(|\operatorname{Im} z| < 1)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{z(z+n)}{n}\right]^n$ $(|z| < 1)$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(z-n)}$ $(z \neq 1, 2, \ldots)$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{z+n}$ $(z \neq -1, -2, \ldots)$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z}$ $(\operatorname{Re} z > 0)$;

7) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2 z} n^n$ $(\operatorname{Re} z > 0)$; 8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-z^2\sqrt{n}}$ $(|\arg z| < \pi/4)$.

2. Пусть $\{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел и пусть

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \alpha > 0, \quad \text{а} \quad \varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \rho > 0.$$

Доказать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha \ln \rho$.

3. Доказать, что следующие бесконечные произведения представляют функции, регулярные в областях, указываемых в скобках:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)$ $(|z| < 1)$; 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2n} n^z)$ $(|z| < 1)$;

3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{n}\right) e^{z/n}$ $(|z| < \infty)$; 4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + (-1)^n \cdot \dfrac{z}{n}\right)$ $(|z| < \infty)$;

5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \dfrac{z}{n}$ $(|z| < \infty)$; 6) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{th} \dfrac{n^2}{z^2}$ $\left(|\arg z| < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$ сходится, а функция $u(z)$ регулярна в области D. Доказать, что бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k u(z))$$

представляет функцию, регулярную в области D.

5. Пусть сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k, \ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \ \ldots, \ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^m, \ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{m+1}.$$

Доказать, что бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n n^{-z})$$

представляет функцию, регулярную в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

6. Доказать регулярность функций, представленных следующими интегралами в областях, указанных в скобках:

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-iz}}{1+t^2}\, dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$; 2) $\int\limits_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad (|z| < \infty)$;

3) $\int\limits_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$; 4) $\int\limits_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{t^2+1}\, dt \quad (\operatorname{Re} z < 2)$;

5) $\int\limits_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{t^2+1}\, dt \quad (0 < \operatorname{Re} z < 2)$; 6) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(1+e^{tz})} \quad (\operatorname{Re} z > 0)$;

7) $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{e^{2\pi i t z}+1} \quad (\operatorname{Im} z > 0)$; 8) $\int\limits_0^{1} t^z (1-t)^{1-z} dt \quad (-1 < \operatorname{Re} z < 2)$;

9) $\int\limits_0^{1} \frac{\cos tz}{z+t}\, dt \quad (z \notin [-1, 0],\ z \neq \infty)$; 10) $\int\limits_0^{\infty} \frac{t \sin t}{t^2+z^2} \quad (\operatorname{Re} z > 0)$.

7. Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$ и удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln |\varphi(t)|}{t} = \sigma.$$

Доказать, что интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \varphi(t) e^{-tz} dt$$

представляет функцию, регулярную в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \sigma$.

8. Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна при $-\infty < t < \infty$ и удовлетворяет условиям

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln|\varphi(t)|}{t} = \sigma_1, \quad \varlimsup_{t\to-\infty} \frac{\ln|\varphi(t)|}{t} = \sigma_2, \quad \sigma_2 > \sigma_1.$$

Доказать, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{itz}\,dt$$

представляет функцию, регулярную в полосе $\sigma_1 < \operatorname{Im} z < \sigma_2$.

9. Найти области регулярности функций, представленных следующими интегралами:

1) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t+z}\,dt$, $|\varphi(t)| \leqslant M(1+t)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$;

2) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2-z^2}\,dt$, $|\varphi(t)| \leqslant M$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(t)}{e^t+z}\,dt$, $|\varphi(t)| \leqslant M(1+t)^m$, $m < \infty$;

4) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(t)}{e^t+z}\,dt$, $|\varphi(t)| \leqslant \dfrac{M}{1+t^2}$;

5) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\varphi(t)}{(t^3-z^3)^2}\,dt$, $|\varphi(t)| \leqslant Mt^\alpha$, $\alpha < 5$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-z^3}\,dt$, $|\varphi(t)| \leqslant Mt^\alpha$, $\alpha > -1$;

7) $\displaystyle\int\limits_\gamma \frac{e^{-t}}{t+z}\,dt$ $(\gamma = \{t\colon \arg t = \alpha\})$, $-\pi < \alpha < \pi$;

8) $\displaystyle\int\limits_\gamma \frac{t^2dt}{e^t+z}$ $(\gamma = \{t\colon \arg t = \alpha\})$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

9) $\displaystyle\int\limits_\gamma \frac{\cos t}{e^t-z}$ $\left(\gamma = \left\{t\colon \arg t = \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant |t| \leqslant \pi\right\}\right)$.

10. Пусть функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, регулярны в круге $|z| < 1$ и удовлетворяют условиям

$$|f_n(z)| \leqslant M(1-|z|)^{-m} \quad (|z| < 1,\ n = 1, 2, \ldots),$$

где числа M и m не зависят от n. Доказать, что из последовательности $\{f_n(z)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся строго внутри круга $|z| < 1$.

11. Пусть граница ∂D ограниченной области D состоит из конечного числа простых кусочно-гладких кривых и пусть на ∂D определены и непрерывны функции $\varphi_n(\zeta)$. Доказать, что если последовательность $\{\varphi_n(\zeta)\}$ равномерно ограничена на ∂D, то из последовательности функций $\{f_n(z)\}$,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{\varphi_n(\zeta)}{(\zeta - z)^m}\, d\zeta$$

(m — фиксированное целое число) можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся строго внутри области D.

12. Пусть функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, регулярны в области D и удовлетворяют условиям $\operatorname{Re} f_n(z) \geqslant 0$ $(z \in D,\ n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что из последовательности $\{f_n(z)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся строго внутри области D (возможно, к бесконечности).

13. Пусть функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, регулярны и равномерно ограничены в области D. Доказать, что если последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится на множестве E, имеющем хотя бы одну предельную точку в области D, то она равномерно сходится строго внутри области D. (*Теорема Витали.*)

14. Пусть функции $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots$, гармоничны в области D и пусть последовательность $\{u_n(x, y)\}$ равномерно сходится в области D к функции $u(x, y)$. Доказать, что функция $u(x, y)$ гармонична в области D.

Указание. Рассмотреть последовательность $\{u_n(x, y)\}$ в каждой односвязной части области D. Там можно построить регулярные функции $f_n(z)$, для которых $\operatorname{Re} f_n(x + iy) = u_n(x, y)$.

15. Пусть функции $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots$, гармоничны в области D и удовлетворяют условиям

$$|u_n(x, y)| \leqslant M \quad ((x, y) \in D,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что из последовательности $\{u_n(x, y)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}(x, y)\}$, равномерно сходящуюся строго внутри области D.

16. Пусть функции $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots$, гармоничны в области D и удовлетворяют условиям

$$u_{n+1}(x, y) \geqslant u_n(x, y) \quad ((x, y) \in D,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что последовательность $\{u_n(x, y)\}$ равномерно сходится строго внутри области D (возможно, к $+\infty$).

17. Пусть функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, регулярны в области D, не обращаются в этой области в нуль и удовлетворяют неравенствам

$$|f_n(z)| \leqslant M^n \quad (z \in D,\ n = 1, 2, \ldots)$$

(постоянная M не зависит от n). Доказать, что из последовательности $\{\sqrt[n]{|f_n(z)|}\}$можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся строго внутри области D к функции $|g(z)|$, где $g(z)$ — регулярная в области D функция.

18. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ имеет радиус сходимости R, $0 < R < \infty$. Доказать, что для каждой точки

$$z_0 = Re^{i\varphi}$$

существуют такие последовательности $\{n_k\}$ и $\{z_k\}$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z_0; \quad \sum_{n=0}^{n_k} c_n z_k^n = 0.$$

Указание. См. задачи 17 и 13.

Ответы

9. 1) Вся плоскость z с разрезом по отрицательной части действительной оси.

2) Вся плоскость z с разрезом по лучам $[-\infty, -1]$ и $[1, +\infty]$.

3) Вся плоскость z с разрезом по лучу $[-\infty, -1]$.

4) Вся плоскость z с разрезом по отрицательной части действительной оси.

5) Вся плоскость z с разрезами по лучам

$$[1, +\infty], \quad \left[\arg z = \frac{2\pi}{3},\ |z| > 1\right], \quad \left[\arg z = -\frac{2\pi}{3},\ |z| > 1\right].$$

6) Вся плоскость z (включая точку $z = \infty$) с разрезами по прямолинейным отрезкам, соединяющим точку $z = 0$ с точками

$$z = 1, \quad z = e^{2\pi i/3}, \quad z = e^{-2\pi i/3}.$$

7) Вся плоскость z с разрезом по лучу $\arg z = \alpha + \pi$.

8) Вся плоскость z с разрезом по спирали, уравнение которой

$$z = -se^{i\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\ln s}, \quad 1 \leqslant s < \infty.$$

9) Вся плоскость z (включая точку $z = \infty$) с разрезом по верхней половине окружности $|z| = 1$.

§ 9. Теорема единственности. Регулярное продолжение.

Справочные сведения

1. Теорема единственности. *Если функции f_1 и f_2 регулярны в области G, совпадают в ней на бесконечном множестве точек E, имеющем предельную точку в G, то эти функции тождественно равны друг другу в области G.*

2. Регулярное продолжение. Пусть функция $f(z)$ определена на некотором множестве E, а функция $g(z)$ определена и регулярна в некоторой области G, содержащей множество E. Если на множестве E имеет место равенство $f(z) = g(z)$, то функция $g(z)$ называется регулярным продолжением функции f с множества E на область G.

Вопрос о существовании у данной функции, определенной на том или ином множестве, регулярного продолжения в более широкую область довольно сложен и методы его решения чрезвычайно разнообразны.

Многие способы регулярного продолжения связаны с теоремой Коши о независимости интеграла от пути интегрирования. Эти способы применяются главным образом к функциям, представляемым теми или иными интегралами.

Примеры с решениями

Пример 1. Существуют ли функции f, регулярные в точке $z_0 = 0$, удовлетворяющие при всех $n \in \mathbb{N}$ условиям

$$\text{а) } f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}?$$

$\triangle$ а) Функция $f(z) = z^2$ удовлетворяет условиям.

б) Допустим, что функция с указанными свойствами существует. Рассмотрим функцию f_1 вида $f_1(z) = \dfrac{z}{z+1}$. Она удовлетворяет условию $f_1\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. совпадает с f на бесконечной последовательности точек $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ и $\dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. По теореме единственности $f(z) \equiv f_1(z)$ в окрестности точки $z_0 = 0$. Однако $f_1\left(-\dfrac{1}{n}\right) \neq \dfrac{1}{n+1}$. Получили противоречие, которое возникло в силу предположения, что регулярная функция f с указанным свойством существует. $\blacktriangle$

Задачи

1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в замыкании $\overline{G}$ области G и $f(z) \not\equiv \text{const}$. Доказать, что в области G лежит лишь конечное число решений уравнения $f(z) = a$ (при произвольном фиксированном значении a).

2. Существует ли функция $f(z)$, регулярная в некоторой окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющая одному из следующих условий (для всех $n = 1, 2, \ldots$):

1) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{\pi n}{2}$;

2) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cos\pi n$;

3) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$;

4) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2\pi n}{2n+1}$;

5) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+\cos\pi n}$;

6) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$;

7) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$;

8) $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$;

9) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$;

10) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n^3}$;

11) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2(\pi n)}{n^2}$;

12) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin^2\frac{\pi n}{2}}{n^2}$;

13) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < e^{-n}$;

14) $2^{-n} < \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < 2^{1-n}$;

15) $n^{-5/2} < \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < 2n^{-5/2}$;

16) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\cos\pi n}{2n+1}\right| < \frac{1}{n^2}$.

3. Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ регулярны в области D и удовлетворяют в этой области дифференциальному уравнению $f'(z) = P(z, f(z))$, где $P(z, w)$ — многочлен от своих переменных. Доказать, что если в некоторой точке $z_0 \in D$ имеет место равенство $f_1(z_0) = f_2(z_0)$, то $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

4. Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ регулярны в области D и удовлетворяют в этой области дифференциальному уравнению

$$f^{(m)}(z) = P(z,\, f,\, f',\, \ldots,\, f^{(m-1)}),$$

где P — многочлен от своих переменных. Доказать, что если в некоторой точке $z_0 \in D$ имеют место равенства

$$f_1(z_0) = f_2(z_0),\ \ldots,\ f_1^{(m-1)}(z_0) = f_2^{(m-1)}(z_0),$$

то $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

5. Доказать, что функциональное уравнение $f(z) = f(2z)$ не имеет решений, регулярных в точке $z = 0$ и отличных от тождественной постоянной.

6. Пусть $q = e^{2\pi i\alpha}$, где α — иррациональное число. Доказать, что функциональное уравнение $f(z) = f(qz)$ не имеет решений $f(z)$, регулярных при $1/2 < |z| < 2$ и отличных от тождественной постоянной.

7. Пусть $f(z)$ — периодическая функция, регулярная в некоторой области, содержащей точку $z = \infty$. Доказать, что $f(z) = \mathrm{const}$ во всей области регулярности.

8. Доказать, что функции e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, определяемые первоначально лишь для действительных значений переменного, можно регулярно продолжить на всю комплексную плоскость, разложив эти функции в ряд Тейлора.

9. Найти возможно более широкую область, в которую можно регулярно продолжить с действительной оси функции:
1) $\operatorname{tg} z$; 2) $\operatorname{ctg} z$; 3) $\operatorname{th} z$; 4) $e^{1/\cos z}$; 5) $e^{-\operatorname{tg} z}$;
6) $\sin(\operatorname{th} z)$; 7) $\cos(e^{z^2})$; 8) $\operatorname{th}(e^z)$; 9) $\operatorname{ctg}(\operatorname{ch} z)$.

10. Доказать, что функцию $\ln z$, определенную для действительных положительных значений z, можно регулярно продолжить на всю комплексную плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси и, обозначив это регулярное продолжение символом $h(z)$, получить для него формулу

$$h(z) = \ln|z| + i\arg z \quad (|\arg z| < \pi).$$

Указание. Воспользоваться формулой $\ln z = \int\limits_1^z \frac{dt}{t}$, справедливой для всех действительных положительных z.

11. Пусть α — произвольное действительное число. Доказать, что функцию z^α, определенную для действительных положительных z, можно регулярно продолжить на всю комплексную плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси и, обозначив это регулярное продолжение символом (z^α), получить для него формулу

$$(z^\alpha) = |z|^\alpha e^{i\alpha\arg z} \quad (|\arg z| < \pi).$$

Указание. Воспользоваться формулой $z^\alpha = e^{\alpha\ln z}$, справедливой для всех действительных положительных z.

12. Пусть функция $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ определена, когда

$$z_k \in D_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и регулярна по каждой переменной z_k в области D_k при произвольных фиксированных значениях остальных переменных. Доказать, что если каждая область D_k содержит непустой интервал (a_k, b_k) действительной оси и если

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = 0 \quad (z_1 \in (a_1, b_1), \ldots, z_n \in (a_n, b_n)),$$

то $\Phi(z_1, \ldots, z_n) \equiv 0$.

13. Опираясь на справедливость приводимых ниже формул для действительных значений переменных, доказать их справедливость и для произвольных комплексных значений этих переменных:
1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$; 2) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;
3) $\sin 2z = 2\sin z\cos z$; 4) $\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z$;
5) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2$;
6) $\operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1\operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1\operatorname{sh} z_2$;
7) $\cos z_1 + \cos z_2 = 2\cos\frac{z_1+z_2}{2}\cos\frac{z_1-z_2}{2}$;
8) $\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2\operatorname{sh}\frac{z_1+z_2}{2}\operatorname{ch}\frac{z_1-z_2}{2}$.

14. Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой области, содержащей отрезок $[0,1]$, и удовлетворяет условию $f(z+1) = f(z)$. Доказать, что функцию $f(z)$ можно регулярно продолжить в некоторую полосу $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta$, $\delta > 0$.

15. Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой области, содержащей отрезок $[0,1]$, и удовлетворяет условию

$$f(z+1) = zf(z) + p(z),$$

где $p(z)$ — многочлен. Доказать, что функцию $f(z)$ можно регулярно продолжить в некоторую полосу $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta$, $\delta > 0$.

16. Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой области, содержащей отрезок $[1,2]$, и удовлетворяет условию

$$f(2z) = f(z) + p(z),$$

где $p(z)$ — многочлен. Доказать, что функцию $f(z)$ можно регулярно продолжить в некоторый угол $-\delta < \arg z < \delta$, $\delta > 0$.

17. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $\rho < |z| < 1$, $\rho > 0$, и удовлетворяет в нем функциональному уравнению

$$f(z) = f(z^2) + g(z),$$

где $g(z)$ — некоторая данная функция, регулярная в круге $|z| < 1$. Доказать, что функцию $f(z)$ можно регулярно продолжить в кольцо $0 < |z| < 1$.

18. Гамма-функция Эйлера $\Gamma(z)$ определена при действительных $z > 0$ равенством

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Доказать, что функцию $\Gamma(z)$ можно регулярно продолжить на всю комплексную плоскость, за исключением точек $z = 0, -1, -2, \ldots$.

Указание. Доказать, что функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

19. Бета-функция Эйлера $\mathrm{B}(z,\zeta)$ определяется при действительных $z > 0$ и $\zeta > 0$ равенством

$$\mathrm{B}(z,\zeta) = \int\limits_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1} dt.$$

Доказать, что функцию $\mathrm{B}(z,\zeta)$ можно регулярно продолжить по каждой из переменных на всю комплексную плоскость, за исключением точек $z = 0, -1, -2, \ldots$ (соответственно $\zeta = 0, -1, -2, \ldots$).

Указание. Доказать, что функция $\mathrm{B}(z,\zeta)$ удовлетворяет функциональным уравнениям

$$\mathrm{B}(z,\zeta) = \mathrm{B}(\zeta, z), \quad \mathrm{B}(z+1,\zeta) = \frac{z}{z+\zeta}\,\mathrm{B}(z,\zeta).$$

20. Пусть функция $\varphi(\zeta)$ регулярна в кольце $r \leqslant |\zeta| \leqslant R$. Доказать, что функцию $f(z)$, заданную в круге $|z| < r$ с помощью формулы

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=r} (\zeta - z)^m \varphi(\zeta) d\zeta \quad (|z| < r)$$

(m — целое число) можно регулярно продолжить в круг $|z| < R$ и что это регулярное продолжение $g(z)$ задается формулой

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=R} (\zeta - z)^m \varphi(\zeta) d\zeta \quad (|z| < R).$$

21. Доказать, что следующие функции могут быть регулярно продолжены на области G, указанные в скобках:

1) $f(z) = \oint\limits_{|\zeta|=1} e^{\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \dfrac{d\zeta}{\zeta - z}, \ |z| < 1 \ \ (G = \{z\colon |z| < \infty\});$

2) $f(z) = \oint\limits_{|\zeta|=1} e^{\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \dfrac{d\zeta}{\zeta - z}, \ |z| > 1 \ \ (G = \{z\colon |z| > 0\});$

3) $f(z) = \oint\limits_{|\zeta|=2} \dfrac{\cos\left(\zeta + \dfrac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2 + 1} \dfrac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \ |z| < 2 \ \ (G = \{z\colon |z| < \infty\});$

4) $f(z) = \oint\limits_{|\zeta|=2} \dfrac{\cos\left(\zeta + \dfrac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2 + 1} \dfrac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \ |z| > 2 \ \ (G = \{z\colon z \neq 0,\ i,\ -i\});$

5) $f(z) = \oint\limits_{|\zeta|=1} \operatorname{sh}\left(\zeta + \dfrac{1}{\zeta}\right) \dfrac{d\zeta}{\zeta^2 + z^2}, \ |z| < 1 \ \ (G = \{z\colon |z| < \infty\});$

6) $f(z) = \oint\limits_{|\zeta|=1} \dfrac{e^{-1/\zeta}}{\operatorname{ch}\zeta} \dfrac{d\zeta}{\zeta^2 + z^2}, \ |z| < 1 \ \ (G = \{z\colon z \neq \pm\pi i/2,\ \pm 3\pi i/2,\ \ldots\}).$

22. Пусть функция $\varphi(\zeta)$ регулярна в полосе $-a \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$ и удовлетворяет условию

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant M(1 + |\zeta|)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (-a \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0).$$

Доказать, что функция

$$f(z) = \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

допускает регулярное продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} z > -a$ и что это продолжение $g(z)$ дается формулой

$$g(z) = \int\limits_{-a-i\infty}^{-a+i\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (\operatorname{Re} z > -a).$$

23. Доказать, что для регулярного продолжения $g(z)$, построенного в задаче 22, справедлива также формула

$$g(z) = \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i \varphi(z) \quad (-a \leqslant \operatorname{Re} z < 0).$$

Указание. Воспользоваться интегральной формулой Коши.

Ответы

2. 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) да.
5) нет; 6) да; 7) нет; 8) нет.
9) нет; 10) нет; 11) да; 12) нет.
13) да; 14) нет; 15) нет; 16) нет.

9. 1) Вся плоскость, кроме точек

$$z = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

2) вся плоскость, кроме точек

$$z = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

3) вся плоскость, кроме точек

$$z = \frac{\pi i}{2}(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

4) вся плоскость, кроме точек

$$z = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

5) вся плоскость, кроме точек

$$z = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

6) вся плоскость, кроме точек

$$z = \frac{\pi i}{2}(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

7) вся плоскость;

8) вся плоскость, кроме точек

$$z = \ln\left|\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right| + 2\pi i m + \frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn}\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

$$n = 0,\, 1,\, 2\,\ldots, \quad m = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots;$$

9) вся плоскость, кроме точек

$$z = \frac{\pi i}{2}(2n+1), \quad n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots,$$

$$z = \pm\ln(\pi n + \sqrt{\pi^2 n^2 - 1}) + 2\pi i m,$$

$$n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots, \quad m = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots.$$

§ 10. Принцип максимума

Справочные сведения

1. Принцип максимума для регулярных функций. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, и пусть

$$M = \sup\{|f(z)|\colon z \in G\} < +\infty.$$

Тогда в каждой точке области G имеет место неравенство $|f(z)| < M$.

2. Субгармонические функции. Действительная функция $u(z)$, где $z = x+iy$, определенная в области $G \subset \mathbb{R}^2$, называется субгармонической в этой области, если она удовлетворяет условиям:

а) функция $e^{u(z)}$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^2$;

б) если точка $z_0 \in G$, а число $\rho > 0$ таково, что замкнутый круг

$$\overline{B_\rho(z_0)} = \{z\colon |z - z_0| \leqslant \rho\}$$

содержится в области G, то имеет место неравенство

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

3. Принцип максимума для субгармонических функций. Пусть функция $u(z)$ субгармонична в области G, $u(z) \not\equiv \mathrm{const}$, и пусть

$$M = \sup\{u(z)\colon z \in G\} < +\infty.$$

Тогда в каждой точке z области G имеет место неравенство $u(z) < M$.

Задачи

1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G. Доказать, что если для любой последовательности точек $z_n \in G$, сходящейся к какой-либо точке границы области G, имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f(z_n)| \leqslant M,$$

то или в каждой внутренней точке области G имеет место неравенство $|f(z)| < M$, или $f(z) \equiv Me^{i\varphi}$.

2. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет в этом круге неравенству $|f(z)| < M$. Доказать, что если $f(0) = 0$, то функция $f(z)$ удовлетворяет в круге $|z| < 1$ и более сильному неравенству

$$|f(z)| \leqslant M|z|,$$

причем если хотя бы в одной точке z_0, $0 < |z_0| < 1$, имеет место равенство $|f(z_0)| = M|z_0|$, то

$$f(z) = Mze^{i\varphi},$$

где φ — действительная постоянная. (*Лемма Шварца.*)

Указание. Рассмотреть функцию $f(z)/z$ и доказать, что ее можно регулярно продолжить в точку $z = 0$.

3. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$ и удовлетворяет там неравенству $|f(z)| < M$, а $f(0) = 0$. Доказать, что

$$|f'(0)| \leqslant \frac{M}{R},$$

причем знак равенства возможен только для функции $f(z) = Me^{i\varphi} \cdot \dfrac{z}{R}$.

4. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$, удовлетворяет там неравенству $|f(z)| < M$ и обращается в нуль в некоторой точке z_0 этого круга. Доказать неравенства

$$|f(z)| \leqslant M\,\frac{R|z - z_0|}{|R^2 - z\overline{z}_0|} \quad (|z| < R);\ \ |f'(z_0)| \leqslant \frac{MR}{R^2 - |z_0|^2}.$$

5. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re} z| < \pi/4$, удовлетворяет там неравенству $|f(z)| < 1$ и обращается в нуль в точке $z = 0$. Доказать, что $|f(z)| \leqslant |\operatorname{tg} z|$ в этой полосе.

6. Пусть функция $f(z)$ регулярна при $\operatorname{Re} z > 0$, удовлетворяет там неравенству $|f(z)| < 1$ и обращается в нуль в точках $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Доказать, что

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z - z_1||z - z_2|\ldots|z - z_m|}{|z + \overline{z}_1||z + \overline{z}_2|\ldots|z + \overline{z}_m|} \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

7. Пусть функция $f(z)$ регулярна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, а в последовательности точек $\{z_n\}$, $z_n \to \infty$, этой полуплоскости обращается в нуль. Доказать, что или $f(z) \equiv 0$, или ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \dfrac{1}{z_n}$ сходится.

8. Пусть функция $f(z)$ регулярна и ограничена в круге $|z| < R$, а в последовательности $\{z_n\}$ точек этого круга обращается в нуль. Доказать, что или $f(z) \equiv 0$, или ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (R - |z_n|)$ сходится.

Указание. См. задачу 4.

9. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$, удовлетворяет там неравенству $|f(z)| < M$, а $f(0) = w_0$. Доказать неравенство

$$\frac{|f(z) - w_0|}{|M^2 - f(z)\overline{w}_0|} \leqslant \frac{|z|}{M} \qquad (|z| < 1).$$

10. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$ и удовлетворяет неравенствам $|f(z)| < M$, $|f(0)| \leqslant m < M$. Доказать неравенство

$$|f(z)| \leqslant M \, \frac{M|z| + mR}{MR + m|z|} \qquad (|z| < R).$$

11. Пусть $P(z)$ — многочлен степени n, а $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |P(z)|$. Доказать, что при $0 < r_1 < r_2$ имеет место неравенство

$$\frac{M(r_1)}{r_1^n} \geqslant \frac{M(r_2)}{r_2^n}\,,$$

причем знак равенства хотя бы при одной паре значений r_1 и r_2 возможен только для многочлена вида $P(z) = az^n$.

12. Пусть $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Доказать, что хотя бы в одной точке окружности $|z| = 1$ имеет место неравенство $|P(z)| > 1$, или $P(z) \equiv z^n$.

13. Пусть $P(z)$ — многочлен степени n, удовлетворяющий на интервале $(-1, 1)$ неравенству $|P(z)| \leqslant M$. Доказать, что в каждой точке z_0, лежащей вне этого интервала, имеет место неравенство $|P(z_0)| \leqslant M(a+b)^n$, где a и b — полуоси эллипса с фокусами -1 и 1, проходящего через точку z_0.

Указание. Рассмотреть функцию $Q(\zeta) = \zeta^{-n} P\left(\dfrac{\zeta + 1/\zeta}{2}\right)$ в области $|\zeta| > 1$.

14. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G и пусть $\inf\limits_{z \in G} |f(z)| = \mu > 0$. Доказать, что или $f(z) \equiv \mu e^{i\varphi}$, или $|f(z)| > \mu$ для каждой внутренней точки области G.

15. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G и непрерывна в ее замыкании $\overline{G}$, а на границе области G ее модуль сохраняет постоянное значение. Доказать, что если функция $f(z)$ отлична от тождественной постоянной, то она обращается в нуль хотя бы в одной точке области G.

16. Пусть функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ регулярны в области G и пусть $M = \overline{\lim\limits_{z \to \partial G}} \{|f_1(z)| + \ldots + |f_m(z)|\}$. Доказать, что если хотя бы одна из $f_k(z)$ отлична от тождественной постоянной, то в каждой точке из G имеет место неравенство $|f_1(z)| + \ldots + |f_m(z)| < M$.

17. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$, а m — целое положительное число. Доказать, что если функция $f(z)$ отлична от тождественной постоянной, то функция

$$I_m(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^m d\varphi$$

монотонно возрастает при $0 \leqslant r < R$.

Указание. Представить интеграл как предел интегральной суммы.

18. Доказать, что функция $u(z)$, гармоническая в области G, субгармонична в этой области.

Указание. См. задачу 6.27.

19. Пусть функция $u(z)$ гармонична в области G. Обозначим $M = \sup\{u(z)\colon z \in G\}$, $m = \inf\{u(z)\colon z \in G\}$. Доказать, что если $m < M$, то в каждой точке области G справедливы неравенства $m < u(z) < M$. (*Принцип максимума и минимума для гармонических функций.*)

20. Доказать, что функция $u(z) = |f(z)|$ субгармонична в области G, если функция $f(z)$ регулярна в области G.

Указание. См. задачу 6.24.

21. Пусть функция $u(z)$ имеет в области $G \subset \mathbb{C}$ непрерывные частные производные второго порядка (по $x = \operatorname{Re} z$ и по $y = \operatorname{Im} z$) и пусть $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geqslant 0$ в области G. Доказать, что функция $u(z)$ субгармонична в области G.

Указание. Написать в неравенстве определения субгармоничности для функции $u(z_0 + \rho e^{i\varphi})$ формулу Тейлора с остаточным членом (перейдя к переменным $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$).

22. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G. Доказать, что функции $u(z) = \ln|f(z)|$ и $u(z) = |f(z)|^\alpha$, $\alpha > 0$, субгармоничны в области G.

Указание. В точках, где $f(z) = 0$, требуемое в определении субгармоничности неравенство очевидно. В остальных точках субгармоничность легко проверяется, скажем, с помощью результата задачи 21.

23. Пусть функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$ субгармоничны в области G. Доказать, что:

1) если числа a и b положительны, то функция $au_1(z) + bu_2(z)$ субгармонична в области G;

2) функция $u(z) = \max\{u_1(z), u_2(z)\}$ субгармонична в области G;

3) функция $u(z) = |u_1(z)|^\alpha$ при $\alpha > 1$ субгармонична в области G;

4) при $\alpha > 0$ функция $u(z) = e^{\alpha u_1(z)}$ субгармонична в области G.

24. Пусть функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ регулярны в области G. Доказать, что при $\alpha > 0$ функция $u(z) = |f_1(z)|^\alpha + \ldots + |f_m(z)|^\alpha$ субгармонична в области G.

25. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$. Доказать, что функция

$$I_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi$$

при любом $\alpha > 0$ является монотонно возрастающей функцией r в интервале $0 \leqslant r < R$ (если $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$).

Указание. Показать, что функцию $I_\alpha(r)$ можно рассматривать как субгармоническую функцию переменной $z = re^{i\varphi}$.

26. Доказать, что функция

$$u(z) = \varphi(\operatorname{Re} z)$$

субгармонична в полосе $a < \operatorname{Re} z < b$ в том и только в том случае, когда функция $\varphi(x)$ выпукла книзу на интервале $a < x < b$.

27. Доказать, что функция $u(re^{i\theta}) = \varphi(r)$ субгармонична в кольце $\rho < |z| < R$ в том и только в том случае, если функция $\varphi(r)$ логарифмически выпукла на интервале $(\rho,\, R)$, т. е. если для любых трех значений $\rho < r_1 < r_2 < r_3 < R$ имеет место неравенство

$$\varphi(r_2) \leqslant \varphi(r_1)\,\frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} + \varphi(r_3)\,\frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1}\,.$$

28. Доказать, что функция $u(re^{i\theta}) = r^\rho\varphi(\theta)$ субгармонична в угле $\alpha < \theta < \beta$ в том и только в том случае, когда функция $\varphi(\theta)$ тригонометрически ρ-выпукла на интервале $(\alpha,\, \beta)$, т. е. если для любой тройки значений $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, удовлетворяющих условиям $\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \beta$ и $\theta_3 - \theta_1 < \pi/\rho$, имеет место неравенство

$$\varphi(\theta_2) \leqslant \varphi(\theta_1)\,\frac{\sin\rho(\theta_3 - \theta_2)}{\sin\rho(\theta_3 - \theta_1)} + \varphi(\theta_3)\,\frac{\sin\rho(\theta_2 - \theta_1)}{\sin\rho(\theta_3 - \theta_1)}\,.$$

29. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $\rho < |z| < R$. Обозначим

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Доказать, что при $\rho < r_1 < r_2 < r_3 < R$ имеет место неравенство

$$\ln M(r_2) \leqslant \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1}\ln M(r_1) + \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1}\ln M(r_3).$$

(*Теорема Адамара о трех кругах.*)

30. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $\rho < |z| < R$. Обозначим

$$I_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi \quad (\alpha > 0).$$

Доказать, что при $\rho < r_1 < r_2 < r_3 < R$ имеет место неравенство

$$I_\alpha(r_1)\ln\frac{r_3}{r_2} + I_\alpha(r_2)\ln\frac{r_1}{r_3} + I_\alpha(r_3)\ln\frac{r_2}{r_1} \geqslant 0.$$

31. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leqslant \frac{M|z|}{(1+|z|)^\alpha}, \quad \alpha > 1 \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Доказать, что функция

$$I(\varphi) = \int\limits_0^\infty \left|f(re^{i\varphi})\right| \frac{dr}{r}$$

является выпуклой вниз функцией φ на интервале $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

Глава 3

Ряд Лорана. Особые точки. Вычеты

§ 11. Ряд Лорана

Справочные сведения

1. Область сходимости ряда Лорана. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

где a — фиксированная точка комплексной плоскости, c_n — заданные комплексные числа, называется *рядом Лорана.* Ряд (1) называется *сходящимся в точке* z, если в этой точке сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{2}$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \tag{3}$$

а сумма ряда (1) по определению равна сумме рядов (2) и (3). Область сходимости ряда (2) — круг

$$|z-a| < R$$

(при $R = 0$ ряд (2) сходится только при $z = a$, а при $R = \infty$ — во всей комплексной плоскости). Ряд (3) сходится в области

$$|z-a| > \rho.$$

Если $\rho < R$, то ряд (1) сходится в области

$$D = \{z\colon \rho < |z-a| < R\}, \tag{4}$$

т. е. в круговом кольце с центром в точке a (эту область называют *кольцом сходимости ряда* Лорана (1)).

Сумма ряда Лорана в области (4) является регулярной функцией, а во всяком замкнутом кольце

$$D_1 = \{z\colon \rho < \rho_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_1 < R\},$$

где $D_1 \subset D$, ряд (1) сходится равномерно.

2. Разложение регулярной функции в ряд Лорана. Функция $f(z)$, регулярная в кольце D, представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана (1), т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{5}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=R_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \rho < R_0 < R, \tag{6}$$

окружность в формуле (6) ориентирована положительно (обход совершается против часовой стрелки).

Разложение (5) функции $f(z)$, регулярной в кольце D, единственно.

3. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Если функция $f(z)$ регулярна в кольце

$$D = \{z\colon \rho < |z-a| < R\},$$

и при этом

$$M = \max_{z \in \gamma_r} |f(z)|,$$

где

$$\gamma_r = \{z\colon |z-a| = r,\ \rho < r < R\},$$

то для коэффициентов c_n ряда Лорана (5) справедливы неравенства

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{r^n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Для нахождения коэффициентов c_n ряда Лорана (5) функции $f(z)$, регулярной в кольце $D = \{z\colon \rho < |z-a| < R\}$, формулы (6) обычно не используют, а представляют функцию $f(z)$ в виде суммы $f_1(z) + f_2(z)$, где функция $f_1(z)$ регулярна в области $|z-a| < R$, а функция $f_2(z)$ регулярна в области $|z-a| > \rho$. Разложив функцию $f_1(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a, а функцию $f_2(z)$ — по отрицательным степеням $z-a$ с помощью приемов, указанных в § 7, можно найти разложение (5). Если $f(z)$ — рациональная функция, то ее представляют в виде суммы простых дробей.

Примеры с решениями

Пример 1. Функцию $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(z+3)}$, регулярную в областях $D_1 = \{z\colon |z| < 1\}$, $D_2 = \{z\colon 1 < |z| < 3\}$, $D_3 = \{z\colon |z| > 3\}$, разложить в этих областях в ряд Лорана.

△ Представим $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$f(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+3}\right). \tag{7}$$

Если $|z| < 1$, то

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{8}$$

а если $|z| > 1$, то

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}. \tag{9}$$

Аналогично, если $|z| < 3$, то

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3\left(1+\dfrac{z}{3}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}, \tag{10}$$

а если $|z| > 3$, то

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z\left(1+\dfrac{3}{z}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1}}{z^n}. \tag{11}$$

а) В области D_1, где $|z| < 1$, используя формулы (7), (8), (10), получаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\left[1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right] z^n.$$

Этот ряд есть ряд Тейлора для функции $f(z)$.

б) В области D_2, где $1 < |z| < 3$, используя формулы (7), (9), (10), имеем

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{4 \cdot 3^{n+1}}.$$

Этот ряд содержит как положительные, так и отрицательные степени z.

в) В области D_3, где $|z| > 3$, используя разложения (7), (9), (11), находим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^{n-1} - 1}{4z^n}.$$

Этот ряд содержит только отрицательные степени z. ▲

Пример 2. Рациональная функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n(n+1)}{z^{2n}} - \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}} \right).$$

Разложить ее в ряд Лорана по степеням z в кольце, содержащем точку $z = \dfrac{3}{2}$. Указать границы кольца сходимости.

△ Ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{z^{2n}}$$

сходится в области $|z| > 1$, а ряд

$$f_2(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}} = -\frac{4}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{z^2}\right)^n$$

сходится, если $\left|\dfrac{4}{z^2}\right| < 1$, т. е. $|z| > 2$. Так как точка $z = \dfrac{3}{2}$ содержится в кольце $1 < |z| < 2$, то функцию $f_2(z)$ нужно представить рядом по степеням z, сходящимся в области $|z| < 2$. Используя разложение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \dfrac{1}{1-t}$, запишем $f_2(z)$ в виде

$$f_2(z) = -\frac{4}{z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{4}{z^2}} = -\frac{4z}{z^2 - 4} = \frac{z}{1 - \dfrac{z^2}{4}},$$

откуда

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}, \quad |z| < 2,$$

а искомое разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{z^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}, \quad 1 < |z| < 2.$$ ▲

Пример 3. Разложить в ряд Лорана в кольце с центром в точке $z = 0$, которому принадлежит точка $z = 3$, функцию

$$f(z) = \frac{3z^3 + 6z^2 - 8}{z^2 - 3z - 4}.$$

Указать границы кольца сходимости.

△ Разделив многочлен $3z^3 + 6z^2 - 8$ на многочлен $z^2 - 3z - 4$, запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = 3z + 15 + \frac{57z + 52}{(z-4)(z+1)},$$

а затем представим полученную правильную дробь в виде суммы простых дробей:

$$\frac{57z + 52}{(z-4)(z+1)} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z+1},$$

где

$$A = \left.\frac{57z+52}{z+1}\right|_{z=4} = 56, \quad B = \left.\frac{57z+52}{z-4}\right|_{z=-1} = 1.$$

Следовательно,

$$f(z) = 3z + 15 + \frac{56}{z-4} + \frac{1}{z+1}.$$

Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z_1 = -1$, $z_2 = 4$ и ее можно разложить в ряд по степеням z в областях $|z| < 1$, $1 < |z| < 4$ и $|z| > 4$. Точка $z = 3$ принадлежит кольцу $1 < |z| < 4$. Поэтому функцию $\dfrac{56}{z-4}$ нужно разложить в ряд по положительным степеням z, а функцию $\dfrac{1}{z+1}$ — в ряд по отрицательным степеням z. Преобразуем исходную функцию:

$$f(z) = 3z + 15 - \frac{14}{1 - \dfrac{z}{4}} + \frac{1}{z\left(1 + \dfrac{1}{z}\right)},$$

откуда

$$f(z) = 3z + 15 - 14\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{z^{n+1}} =$$

$$= 1 - \frac{z}{2} - 14\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}.$$

Полученный ряд сходится в кольце $1 < |z| < 4$. ▲

Пример 4. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{z^2+2}{z(z+2i)}$ в ряд Лорана по степеням $z-2i$ в кольце D, которому принадлежит точка $z=1$. Указать границы кольца сходимости.

$\triangle$ Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{z^2+2iz-2iz+2}{z(z+2i)} = 1 - i\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+2i}\right).$$

Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z=0$ и $z=-2i$. Поэтому ее можно разложить в ряд Лорана по степеням $z-2i$ в областях

$$|z-2i| < 2, \quad 2 < |z-2i| < 4, \quad |z-2i| > 4.$$

Полагая $z-2i=t$, получим $f(z)=\varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = 1 - \frac{i}{t+2i} - \frac{i}{t+4i}.$$

Так как точка $z=1$ принадлежит кольцу

$$2 < |z-2i| < 4,$$

то функцию $\varphi(t)$ нужно разложить по степеням t в области $2<|t|<4$. Преобразуем функцию $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = 1 - \frac{i}{t\left(1+\dfrac{2i}{t}\right)} - \frac{1}{4\left(1+\dfrac{t}{4i}\right)}.$$

Тогда

$$\varphi(t) = 1 - i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2i)^n}{t^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{i^n 4^{n+1}},$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{2(z-2i)^n} + \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4i)^n}(z-2i)^n, \quad 2<|z-2i|<4. \quad \blacktriangle$$

$\blacktriangle$

Пример 5. Разложить функцию

$$f(z) = \left(\frac{z^2}{2} - 2z + \frac{5}{2}\right)\cos\frac{1}{z-2}$$

в ряд Лорана по степеням $z-2$ в кольце

$$D = \{z\colon 0 < |z-2| < \infty\}.$$

△ Пусть $z-2=t$, тогда

$$f(z)=\frac{1}{2}(t^2+1)\cos\frac{1}{t}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{t^{2(n-1)}(2n)!}+\frac{(-1)^n}{t^{2n}(2n)!}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)\frac{1}{t^{2n}}=$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n^2+6n+1)}{2(2n+2)!t^{2n}}=$$

$$=\frac{1}{2}(z-2)^2+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n^2+6n+1)}{2(2n+2)!(z-2)^{2n}}.$$ ▲

Задачи

1. Найти множество точек z, в которых сходится ряд Лорана:

1) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}2^{-|n|}z^n$; 2) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{\operatorname{ch}\alpha n}$, $\alpha>0$; 4) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}2^{-n^2}(z+1)^n$;

5) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(2^{-n^3}+1)^{-1}(z-a)^{2n}$; 6) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{n^2+1}$;

7) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}2^{-n^2}z^{n^3}$; 8) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}2^nz^n$.

2. Опираясь на формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а также используя дифференцирование и интегрирование, доказать:

1) $\frac{1}{z-b}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}b^{-n-1}z^n$, $|z|>|b|$;

2) $\frac{1}{z^2-b^2}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}b^{-2(n+1)}z^{2n}$, $|z|>|b|$;

3) $\frac{z^2}{z^2+b^2}=\sum\limits_{n=-\infty}^{0}(-1)^nb^{-2n}z^{2n}$, $|z|>|b|$;

4) $\frac{1}{(z-b)^2}=-\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}(n+1)b^{-n-2}z^n$, $|z|>|b|$;

5) $\frac{1}{z-b}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(b-a)^{-n-1}(z-a)^n$, $a\neq b$, $|z-a|>|b-a|$;

6) $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2=\sum\limits_{n=-\infty}^{0}(1-n)(b-a)^{-n}(z-a)^n$, $a\neq b$, $|z-a|>|b-a|$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце $1 < |z| < 2$ функцию:

1) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$; 2) $\dfrac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$;

3) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$; 4) $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$;

5) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$; 6) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$.

4. Разложить в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце D (точка a и кольцо D указаны в скобках) функцию:

1) $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$ $(a=1,\ \ D=\{z\colon 1<|z-1|<2\})$;

2) $\dfrac{1}{(z^2-9)z^2}$ $(a=1,\ \ D=\{z\colon 1<|z-1|<2\})$;

3) $\dfrac{z+i}{z^2}$ $(a=i,\ \ -i\in D)$;

4) $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ $(a=1,\ \ 2i\in D)$;

5) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ $\left(a=0,\ \ -\dfrac{3}{2}\in D\right)$;

6) $\dfrac{2z}{z^2-2i}$ $(a=1,\ \ -1\in D)$;

7) $\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ $(a=-1,\ \ D=\{z\colon 0<|z+1|<3\})$;

8) $\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$ $(a=0,\ \ D=\{z\colon |z|>2\})$.

5. Разложить данную функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в кольце, которому принадлежит точка z_0. Указать границы кольца сходимости.

1) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2+\dfrac{3}{2}z-1}$, $z_0=1$;

2) $f(z)=\dfrac{2z^2-5}{z^2-z-2}$, $z_0=\dfrac{3}{2}$;

3) $f(z)=\dfrac{3z^2+1}{3z^2-2z-1}$, $z_0=\dfrac{1}{2}$;

4) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+6}+\dfrac{z-1}{2z^2-3z}$, $z_0=2$;

5) $f(z)=\dfrac{3z+1}{2z^2+z}-\dfrac{z}{z^2+5}$, $z_0=1$;

6) $f(z)=\dfrac{3z^3+6z^2-5}{z^2+2z-3}$, $z_0=2$;

7) $f(z)=\dfrac{8z^3+6z^2-3}{4z^2+3z-1}$, $z_0=\dfrac{1}{2}$.

6. Рациональная функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана по степеням z. Разложить ее в ряд Лорана по степеням z, в кольце, содержащем точку z_0, и указать границы кольца сходимости, если:

1) $f(z) = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty}(n+1)3^n z^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n^2}{4^n} + \dfrac{(-1)^n}{2^n}\right) z^n, \ \ z_0 = -3;$

2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(3^n z^{3n} + \dfrac{n^2}{2^n}\, z^{3n-1}), \ \ z_0 = -1;$

3) $f(z) = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty}(n5^n + (-1)^n 2^n)\, z^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}\, z^n, \ \ z_0 = \dfrac{1}{3}.$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце D, которому принадлежит точка z_0. Указать границы кольца D.

1) $f(z) = \dfrac{6z - z^2}{z^2 + 3z - 18}, \ \ a = -1, \ \ z_0 = 3.5;$

2) $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)(z+1)^2}, \ \ a = -2, \ \ z_0 = -\dfrac{3}{2};$

3) $f(z) = \dfrac{5 - 4z}{(z+1)(z^2-1)^2}, \ \ a = 1, \ \ z_0 = 0;$

4) $f(z) = \dfrac{4z}{(z-1)(z^2-1)}, \ \ a = -1, \ \ z_0 = -2;$

5) $f(z) = \dfrac{9 - z^2}{z(z+9)}, \ \ a = -4, \ \ z_0 = \dfrac{1}{2};$

6) $f(z) = \dfrac{2z - 1}{z^2 - z + i + 1}, \ \ a = 3, \ \ z_0 = \dfrac{1}{6};$

7) $f(z) = \dfrac{3z - i}{z^2 - (i+1)z - i - 2}, \ \ a = 1, \ \ z_0 = \dfrac{5}{2}.$

8. Разложить функцию $f(z)$ в ряд по степеням z в кольце, которому принадлежит точка z_0. Указать границы кольца сходимости.

1) $f(z) = \dfrac{z^2 + 6iz + 3}{z^2 + 2iz + 3}, \ \ z_0 = ie;$

2) $f(z) = \dfrac{3iz^2}{z^2 - 5iz - 4}, \ \ z_0 = 3i;$

3) $f(z) = \dfrac{7 - 3z}{3z^2 - 4z + 1} + \dfrac{9z^2 + 24}{(3z-1)(z-2)^2}, \ \ z_0 = i + 1;$

4) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 6z + 8} - \dfrac{2z^2 - 14}{(z-4)(z-1)^2}, \ \ z_0 = i - 1;$

5) $f(z) = \dfrac{(1-i)z - 5}{iz^2 + (3-2i)z - 6}, \ \ z_0 = 1 + 3i;$

6) $f(z) = \dfrac{(1-i)z - 5}{iz^2 + (2-3i)z - 6}, \ \ z_0 = 1 + 2i;$

7) $f(z) = \dfrac{3z - 4}{(z+3)(z-2i)} + \dfrac{z + 4}{z^2 - (1+2i)z + 2i}, \ \ z_0 = 1 + i;$

8) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 + (i-2)z - 2i} + \dfrac{iz-4}{z^2+z-6}$, $z_0 = 1+i$.

9. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце, которому принадлежит точка z_0. Указать границы кольца сходимости.

1) $f(z) = \dfrac{-4+2i}{(z-1-2i)(z-5)}$, $a=1$, $z_0 = 1+6i$;

2) $f(z) = \dfrac{-4-2i}{(z+1+2i)(z-3)}$, $a=-1$, $z_0 = -1-5i$;

3) $f(z) = \dfrac{2z-3+2i}{z^2-(1+2i)z+2i}$, $a=2$, $z_0 = 4i$;

4) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+(i-4)z+4-2i} + \dfrac{2iz}{z^2-4}$, $a=1$, $z_0 = 2i$;

5) $f(z) = \dfrac{5-2i-z}{z^2+z(5+i)+5i}$, $a=1$, $z_0 = 3$;

6) $f(z) = \dfrac{z+2i}{iz^2-4z+5i}$, $a=1$, $z_0 = 3$;

7) $f(z) = \dfrac{2+15i-z}{z^2+z(1-5i)-5i}$, $a=-3$, $z_0 = 1+i$;

8) $f(z) = \dfrac{(1+i)z+6}{iz^2+(5+i)z+5}$, $a=-3$, $z_0 = 1+i$.

10. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце, которому принадлежит точка z_0. Указать границы кольца сходимости.

1) $f(z) = \dfrac{z(1-i)}{z^2-2(1+i)z+4i}$, $a=2-3i$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z(i-1)+i}{2z^2-(2-i)z-i}$, $a=2+3i$, $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{(i-3)z+4i}{3iz^2+(1+9i)z+3}$, $a=-2+i$, $z_0 = i$;

4) $f(z) = \dfrac{(i-2)z-2}{2iz^2-(6+i)z+3}$, $a=-i$, $z_0 = i-1$;

5) $f(z) = \dfrac{i}{z^2+(6-i)z+9-3i} + \dfrac{2z}{z^2-9}$, $a=1+i$, $z_0 = -2$;

6) $f(z) = \dfrac{z-1-5i}{z^2-2z+2} + \dfrac{3z-1-3i}{z^2-z(1+2i)-1+i}$, $a=2i$, $z_0 = 0$;

7) $f(z) = \dfrac{16-z^2}{z(z+4i)^2}$, $a=-3-5i$, $z_0 = -1-i$;

8) $f(z) = \dfrac{2z^2+iz+5}{z^2(z-5i)}$, $a=-2-2i$, $z_0 = 1+i$;

9) $f(z) = \dfrac{z+5i}{z^2+1} + \dfrac{6z+8i}{z^2+3iz-2}$, $a=1+i$, $z_0 = 0$;

10) $f(z) = \dfrac{6z+8+8i}{z^2+2z(2+i)+8i} - \dfrac{3z-2i}{z^2+4}$, $a=1+i$, $z_0 = -1$.

11. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце D:

1) $f(z) = z^3 e^{1/z}$, $a=0$, $D=\{z\colon 0<|z|<\infty\}$;

2) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{\pi(z+1)}{z}$, $a=0$, $D=\{z\colon 0<|z|<\infty\}$;

3) $f(z) = z^3 \cos\dfrac{1}{z-2}$, $a=0$, $D=\{z\colon 0<|z-2|<\infty\}$.

12. Используя разложение функции $z\operatorname{ctg} z$ в ряд Тейлора (§ 7, пример 4 (2)), разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце $\pi<|z|<2\pi$ функцию $\operatorname{ctg} z$.

13. Используя разложение функции $\dfrac{z}{e^z-1}$ в ряд Тейлора (§ 7, пример 4 (1)), разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце $2\pi<|z|<4\pi$ функцию $\dfrac{1}{e^z-1}$.

14. Пусть ряды Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$ сходятся в кольце $D=\{z\colon r<|z-a|<R\}$, а их суммы соответственно равны $f(z)$ и $g(z)$. Доказать, что ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_n=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$, также сходится в кольце D, а его сумма равна произведению $f(z)g(z)$.

15. Пусть ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ сходится в замкнутом кольце

$$\overline{D}=\{z\colon r\leqslant|z-a|\leqslant R\}.$$

Доказать, что

$$|c_n|\leqslant M(r^{-n}+R^{-n}),\quad n\in\mathbb{Z},$$

где M — постоянная, не зависящая от n.

Ответы

1. 1) $1/2<|z|<2$; 2) $1<|z|<3$; 3) $e^{-\alpha}<|z-1|<e^{\alpha}$; 4) $0<|z+1|<\infty$; 5) $0<|z-a|<1$; 6) $|z|=1$; 7) $|z|=1$; 8) пустое множество.

3. 1) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3}z^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{-1}{3\cdot 2^{n+1}}z^n$;

2) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}\dfrac{2}{3}z^n+\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{12}z++\dfrac{7}{24}z^2+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{17\cdot(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n+1}}z^n$;

3) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{5}z^{2n}+\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}\dfrac{2\cdot(-1)^{n-1}}{5}z^{2n+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n 5}z^n$;

4) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}\dfrac{-3n-4}{9}z^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{9\cdot 2^{n+1}}z^n$;

5) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{5} z^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5 \cdot 4^{n+1}} z^{2n}$;

6) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \frac{-5n-6}{25} z^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{100 \cdot 4^n} z^{2n}$.

4. 1) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{9} (z-1)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3n+5}{9 \cdot 2^{n+2}} (z-1)^n$;

2) $\sum\limits_{n=-2}^{-\infty} \frac{(n+1)\cdot(-1)^n}{9} (z-1)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 2^{n+1}}{27 \cdot 2^{2n+3}} (z-1)^n$;

3) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} (n+2) i^{n+1} (z-i)^n$;

4) $1 + \sum\limits_{n=0}^{-\infty} (-1)^{n+1} 2^{-\frac{n}{2}+1} \sin \frac{\pi n}{4} (z-1)^{n-1}$;

5) $-\sum\limits_{n=-2}^{-\infty} z^n - \frac{1}{2} z^{-1} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n-2} \cdot z^n$;

6) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} i^{-n-1} (z-1)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}} (z-1)^n$.

5. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{2^n}$, $\frac{1}{2} < |z| < 2$;

2) $\frac{3}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$, $1 < |z| < 2$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n z^n} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$, $\frac{1}{3} < |z| < 1$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}} z^{2n+1} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{9} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{z^n}$, $\frac{3}{2} < |z| < \sqrt{6}$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{5^{n+1}} + \frac{3}{2z} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n z^n}$, $\frac{1}{2} < |z| < \sqrt{5}$;

6) $\frac{8}{3} + \frac{19}{9} z + 8 \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$, $1 < |z| < 3$;

7) $1 + z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n z^n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1} z^n}$, $\frac{1}{4} < |z| < 1$.

6. 1) $f(z) = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \left((n+1) 3^n + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right) + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} z^n$, $2 < |z| < 4$;

2) $f(z) = -\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} 3^n z^{3n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^{3n-1}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} < |z| < \sqrt[3]{2}$;

3) $f(z) = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} n 5^n z^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2}{3^n} + (-1)^{n+1} 2^n \right) z^n$, $\frac{1}{5} < |z| < \frac{1}{2}$.

7. 1) $f(z) = \frac{3}{5} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{(z+1)^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8}{5^{n+1}} (z+1)^n$, $4 < |z+1| < 5$;

2) $f(z) = \frac{2}{z+2} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+3)(z+2)^n$, $0 < |z+2| < 1$;

3) $f(z) = -\dfrac{1}{4(z-1)} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{9n+10}{2^{n+3}} (z-1)^n, \ \ 0 < |z-1| < 2;$

4) $f(z) = -\dfrac{1}{z+1} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n-1}{2^{n+1}} (z+1)^n, \ \ 0 < |z+1| < 2;$

5) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{n-1}}{(z+4)^n} + \dfrac{3}{5} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8(-1)^n}{5^{n+1}} (z+4)^n, \ \ 4 < |z+4| < 5;$

6) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (z-3)^n}{(3-i)^{n+1}} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2+i)^n}{(z-3)^{n+1}}, \ \ \sqrt{5} < |z-3| < \sqrt{10};$

7) $f(z) = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (z-1)^n}{2^{n+1}}, \ \ \sqrt{2} < |z-1| < 2;$

8. 1) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{i}{z}\right)^{n+1} + 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{z}{3i}\right)^n, \ \ 1 < |z| < 3;$

2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{i^n}{z^{n+1}} - i - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{(4i)^{n-1}}, \ \ 1 < |z| < 4;$

3) $f(z) = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^{n+1}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 3n \left(\dfrac{z}{2}\right)^{n-1}, \ \ 1 < |z| < 2;$

4) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^{n+1}} - 4\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{z^{n+2}}, \ \ 1 < |z| < 2;$

5) $f(z) = -\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \left(\dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{3^{n+1} i^n}\right) z^n, \ \ |z| > 3;$

6) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^{n+1}} + \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \left(-\dfrac{1}{2^{n+1} i^n}\right) z^n, \ \ 2 < |z| < 3;$

7) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3-2i)(-1)^n}{3^{n+1}} z^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2i}{z^n}, \ \ 1 < |z| < 3;$

8) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-4+2i)(-i)^n}{5z^{n+1}} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(4+3i)(-1)^n}{5 \cdot 3^{n+1}} z^n, \ \ 1 < |z| < 3.$

9. 1) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2i)^{n-1}}{(z-1)^n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n}{(z-1)^{n+1}}, \ \ |z-1| > 4;$

2) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2i)^{n-1}}{(z+1)^n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n}{(z+1)^{n+1}}, \ \ |z+1| > 4;$

3) $f(z) = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} (-1)^n (z-2)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3(-1)^n}{(2-2i)^{n+1}} (z-2)^n,$

$1 < |z-2| < \sqrt{8};$

4) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{i(-1)^n}{3^{n+1}} (z-1)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{i(1-i)^n}{(z-1)^{n+1}}, \ \ \sqrt{2} < |z-1| < 3;$

5) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 6^n} (z-1)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (1+i)^n}{(z-1)^{n+1}}, \ \ \sqrt{2} < |z-1| < 6;$

6) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{i(-1)^{n+1}}{2(1+5i)^{n+1}} (z-1)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-i)(i-1)^n}{2(z-1)^{n+1}},$

$\sqrt{2} < |z-1| < \sqrt{26};$

7) $f(z) = -2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+3)^n}{(3+5i)^{n+1}} - 3\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{(z+3)^{n+1}}$, $2 < |z+3| < \sqrt{34}$;

8) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{i}{(3+5i)^{n+1}}\,(z+3)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{(z+3)^{n+1}}$, $2 < |z+3| < \sqrt{34}$.

10. 1) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-i)(-1)^n(z-2+3i)^n}{(2-5i)^{n+1}} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3i)^n}{(z-2+3i)^{n+1}}$,
$3 < |z-2+3i| < \sqrt{29}$;

2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1-i)(-1)^n(z-2-3i)^n}{2\left(2+\dfrac{7i}{2}\right)^{n+1}} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{i(-1)^n(1+3i)^n}{(z-2-3i)^{n+1}}$,

$\sqrt{10} < |z-2-3i| < \dfrac{\sqrt{65}}{2}$;

3) $f(z) = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} i(-1-i)^{-n-1}(z+2-i)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(2-\dfrac{2i}{3}\right)^{-n-1}(z+2-i)^n$,

$\sqrt{2} < |z+2-i| < \dfrac{2}{3}\sqrt{10}$;

4) $f(z) = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+i\right)^{-n-1} + i(-2i)^{-n-1}\right](z+i)^n$,
$2 < |z+i| < +\infty$;

5) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}\,(z-1-i)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2-i)^n}{(z-1-i)^{n+1}}$,
$\sqrt{5} < |z-1-i| < 4$;

6) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-3)(z-2i)^n}{(1-3i)^{n+1}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-i)^{n-1}}{(z-2i)^n}$,
$z \neq 1+i \quad 1 < |z-2i| < \sqrt{10}$;

7) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+3+5i)^n}{(3+5i)^{n+1}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8in(3+i)^{n-1}}{(z+3+5i)^{n+1}}$,
$\sqrt{10} < |z+3+5i| < \sqrt{34}$;

8) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{in(2+2i)^{n-1}}{(z+2+2i)^{n+1}} - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+2+2i)^n}{(2+7i)^{n+1}}$,
$2\sqrt{2} < |z+2+2i| < \sqrt{53}$;

9) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3(-1)^{n-1}}{(z-1-i)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4(-1)^n(z-1-i)^n}{(1+3i)^{n+1}}$,
$z \neq -i, \quad 1 < |z-1-i| < \sqrt{10}$;

10) $f(z) = 4\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(z-1-i)^n}{(5+i)^{n+1}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)(i-1)^{n-1}}{(z-1-i)^n}$,
$z \neq -2i, \quad \sqrt{2} < |z-1-i| < \sqrt{26}$.

11. 1) $f(z) = z^3 + z^2 + \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{6} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{-n}}{(n+3)!}$;

2) $f(z) = -\pi z + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\,z^{-2n+1}$;

3) $f(z) = (z-2)^3 + 6(z-2)^2 + \dfrac{23}{2}(z-2) +$

$$+ 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n(16n^2+24n+5)}{(2n+2)!}(z-2)^{-2n} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(48n^2+72n+23)}{(2n+2)!}(z-2)^{-2n+1}.$$

12. $\operatorname{ctg} z = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} 2\pi^{-2n} z^{2n-1} + 3z^{-1} +$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} + 2\pi^{-2n} \right) z^{2n-1}.$$

13. $\dfrac{1}{e^z - 1} = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} (-1)^n 2^{-2n+1} \pi^{-2n} z^{2n-1} + 3z^{-1} - \dfrac{1}{2} +$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_{2n}}{(2n)!} + \frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \right) z^{2n-1}.$$

§ 12. Изолированные особые точки однозначного характера

Справочные сведения

1. Классификация изолированных особых точек. Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки $a \neq \infty$, т. е. в кольце

$$0 < |z - a| < \rho,$$

но не регулярна в точке a. Тогда точка a называется *изолированной особой точкой однозначного характера функции* $f(z)$.

Аналогично, бесконечно удаленная точка называется изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, если эта функция регулярна в некоторой области

$$\rho < |z| < \infty.$$

В зависимости от поведения функции $f(z)$ вблизи особой точки a различают три типа особых точек. Изолированная конечная или бесконечно удаленная особая точка a однозначного характера функции $f(z)$ называется

1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z)$;
2) *полюсом*, если существует бесконечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$;
3) *существенно особой точкой*, если не существует (ни конечного, ни бесконечного) предела функции $f(z)$ в точке a.

2. Ряд Лорана в окрестности особой точки. Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z-a| < \rho$, то ее можно представить в виде сходящегося в этом кольце ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{1}$$

который называют *рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a*, а ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \tag{2}$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{3}$$

называют соответственно *главной частью* и *правильной частью* ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a.

Аналогично, если функция регулярна в области $R < |z| < \infty$, то она представляется сходящимся в этой области рядом

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \tag{4}$$

который называют *рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки*, а ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{5}$$

$$f_2(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} \tag{6}$$

называют соответственно главной и правильной частью ряда (4).

Главные части (2) и (5) рядов Лорана (1) и (4) состоят из всех тех и только тех членов этих рядов, которые стремятся к бесконечности при $z \to a$ $(z \to \infty)$. Функцию $f(z)$ называют регулярной в точке $z = \infty$, если эта функция регулярна в кольце $R < |z| < \infty$ и существует конечный $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

3. Устранимая особая точка. Для того чтобы конечная или бесконечно удаленная изолированная особая точка a была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты главной части ряда Лорана в окрестности точки a были равны нулю, т. е. $f_1(z) \equiv 0$. Если точка $z = a$, где $a \neq \infty$, является устранимой особой точкой функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R,$$

то, полагая

$$f(a) = \lim_{z \to a} f(z) = c_0,$$

получаем функцию, регулярную в точке a. Поэтому нередко устранимую особую точку рассматривают как точку регулярности.

4. Полюс

4.1. Для того чтобы изолированная особая точка a (конечная и бесконечно удаленная) была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a содержала конечное число ненулевых слагаемых.

4.2. *Полюс в конечной точке*

а) Точка $z = a$, где $a \neq \infty$, является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(z) = (z-a)^{-m} h(z), \quad h(a) \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке a. Число m называется *порядком полюса.*

Если точка $a \neq \infty$ — полюс функции $f(z)$, то его порядок — такое число $m \in \mathbb{N}$, что

$$\lim_{z \to a} f(z)(z-a)^m = \alpha,$$

где $\alpha \neq 0$, или

$$f(z) \sim \frac{\alpha}{(z-a)^m}, \quad \alpha \neq 0 \quad (z \to a). \tag{8}$$

б) Пусть $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z)$ и $h(z)$ — функции, регулярные в точке $a \neq \infty$. Тогда если $g(a) \neq 0$, а точка a — нуль кратности m функции $h(z)$, то $z = a$ — полюс m-го порядка функции $f(z)$; если точка a является нулем функций $g(z)$ и $h(z)$ кратности k и m соответственно, то при $m > k$ точка $z = a$ — полюс функции $f(z)$ кратности $m - k$, а при $m \leqslant k$ — устранимая особая точка.

4.3. *Полюс в бесконечно удаленной точке*

а) Точка $z = \infty$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(z) = z^m g(z), \quad g(\infty) \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Число m в формуле (9) называется *порядком полюса* $z = \infty$.

Если $z = \infty$ — полюс функции $f(z)$, то его порядок m — такое число, что $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z^m} = \alpha$, где $\alpha \neq 0$, или

$$f(z) \sim \alpha z^m, \quad \alpha \neq 0 \quad (z \to \infty). \tag{10}$$

б) Порядок m полюса $z = \infty$ функции $f(z)$ равен кратности нуля функции $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ в точке $z = 0$.

5. Существенно особая точка

5.1. Для того чтобы изолированная особая точка a была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a содержала бесконечное число ненулевых слагаемых.

5.2. **Теорема Сохоцкого.** *Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к точке a и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

5.3. **Теорема Пикара.** *Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, одного, уравнение $f(z) = A$ имеет в любой окрестности точки a бесконечное множество решений (корней).*

6. Целые и мероморфные функции

6.1. Если функция $f(z)$ регулярна в каждой точке $z \in \mathbb{C}$, то такая функция называется *целой*. Функция $f(z)$ называется *мероморфной*, если на каждом ограниченном множестве $G \in \mathbb{C}$ эта функция регулярна, за исключением, быть может, конечного числа полюсов.

6.2. Если $z = \infty$ — полюс порядка n целой функции $f(z)$, то $f(z)$ — многочлен степени n, а если целая функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, то $f(z) = \mathrm{const}$. Целую функцию, для которой $z = \infty$ — существенно особая точка, называют *целой трансцедентной*. Такими являются функции

$$e^z, \quad \sin z, \quad \cos z, \quad \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch} z.$$

6.3. **Теорема Лиувилля для целой функции.** *Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет в области $R < |z| < \infty$ неравенству*

$$|f(z)| \leqslant M|z|^m,$$

где $M > 0$, m — целое, $m \geqslant 0$, то $f(z)$ — многочлен степени не выше m.

Примеры с решениями

Пример 1. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид (тип), если:

1) $f(z) = e^{1/z^2}$; 2) $f(z) = \dfrac{z^6}{(z+1)^2(z^2+4)}$;

3) $f(z) = \dfrac{1}{\cos 1/z}$; 4) $f(z) = \dfrac{z-\pi}{\sin 2z - 2\sin z}$;

5) $f(z) = e^{1/\sin z}$; 6) $f(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{e^z - 1}$.

△ 1) Функция e^{1/z^2} регулярна во всех точках $z \in \mathbb{C}$, кроме точки $z = 0$. Пусть $z = x + iy$, тогда если $z = x$, то $e^{1/x^2} \to \infty$ при $x \to 0$, а если $z = iy$, то $e^{-1/y^2} \to 0$ при $y \to 0$. Таким образом, функция e^{1/z^2} не имеет предела в точке $z = 0$ и поэтому $z = 0$ — существенно особая точка этой функции. Это можно установить, представив функцию e^{1/z^2} рядом Лорана в окрестности точки $z = 0$, т. е. рядом

$$e^{1/z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}}\,.$$

Главная часть этого ряда $f_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n! z^{2n}}$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых.

Точка $z = \infty$ есть точка регулярности функции e^{1/z^2}, так как

$$\lim_{z\to\infty} e^{1/z^2} = 0.$$

Это утверждение равносильно тому, что функция e^{ζ^2} регулярна в точке $\zeta = 0$.

2) Нули функций $(z+1)^2$ и z^2+4, т. е. точки $z_1 = -1,\ z_2 = 2i,\ z_3 = -2i$ являются полюсами функции $f(z)$, причем z_1 — полюс второго порядка, а z_2 и z_3 — полюса первого порядка, так как эти точки не являются нулями функции z^6, z_1 — нуль кратности 2 функции $(z+1)^2$, а z_2 и z_3 — нули кратности 1 функции $z^2 + 4$.

Точка $z = \infty$ — полюс второго порядка функции $f(z)$, так как $f(z)$ регулярна в области $|z| > 2$ и $f(z) \sim z^2$ при $z \to \infty$. Других особых точек в $\overline{\mathbb{C}}$ у функции $f(z)$ нет.

3) Нули функции $\cos \dfrac{1}{z}$, т. е. точки

$$z_k = \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + \pi k}\,, \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются полюсами первого порядка. Действительно, если $\varphi(z) = \cos\dfrac{1}{z}$, то

$$\varphi'(z_k) = -\frac{1}{z_k^2}\sin\frac{1}{z_k} = \frac{(-1)^{n+1}}{z_k^2} \neq 0.$$

Точка $z = 0$ не является изолированной особой точкой. Она является предельной точкой (точкой накопления) полюсов z_k.

Точка $z = \infty$ — точка регулярности функции $f(z)$, так как функция $\dfrac{1}{\cos\zeta}$ регулярна в точке $\zeta = 0$. Других особых точек в $\overline{\mathbb{C}}$ у функции $f(z)$ нет.

4) Пусть $g(z) = \sin 2z - 2\sin z$, тогда

$$g(z) = 2\sin z(\cos z - 1).$$

Так как $z_k = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$ — нули кратности 1 функции $\sin z$, а $\widetilde{z}_m = 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ — нули кратности 1 функции $\cos z - 1$, то $z'_n = 2n\pi \ \ (n \in \mathbb{Z})$ — нули кратности 2 функции $g(z)$, а

$$z''_n = (2n+1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

— нули кратности 1 этой функции. Поэтому точки z'_n — полюсы второго порядка функции $f(z)$, а точки z''_n (кроме точки $z = \pi$) — полюсы первого порядка функции $f(z)$, так как $z = \pi$ — нуль функции $z - \pi$.

Точка $z = \infty$ является предельной точкой полюсов функции $f(z)$, а других особых точек (кроме перечисленных) у функции $f(z)$ в $\overline{\mathbb{C}}$ нет.

5) Покажем, что точки $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (нули функции $\sin z$) являются существенно особыми точками функции $f(z)$. Пусть $g(z) = \sin z$, тогда

$$g(z_k) = 0, \quad g'(z_k) = \cos k\pi = (-1)^k$$

и поэтому

$$\sin z = (-1)^k(z - k\pi)h(z), \quad \text{где} \quad h(k\pi) = 1.$$

Пусть $k = 2n$, тогда

$$\sin z = (z - 2\pi n)h(z).$$

Если $z = x$ и $x \to 2\pi n + 0$, то $\sin x \to +0$ и $f(x) \to +\infty$, а если $z = x$ и $x \to 2\pi - 0$, то $\sin x \to -0$ и $f(x) \to 0$. Таким образом, функция $f(z)$ не имеет предела при $z \to 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и точки $2\pi n$ — существенно особые.

Аналогично установим, что точки $(2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, также являются существенно особыми. Итак, точки $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, — существенно особые точки функции $f(z)$, а точка $z = \infty$ — их предельная точка.

6) Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z(e^z - 1)}.$$

Нули функции $e^z - 1$, т. е. точки $z_k = 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$) — полюсы первого порядка функции $f(z)$ (они не являются нулями функции $e^z - 1 - z$). Точка $z = 0$ — устранимая особая точка, так как она является нулем второго порядка функций $e^z - 1 - z$ и $z(e^z - 1)$. Точка $z = \infty$ — предельная точка полюсов функции $f(z)$. ▲

Пример 2. Найти главную часть $f_1(z)$ ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a и определить вид особой точки a, если:

1) $f(z) = z^3 e^{1/z}$, $a = 0$; 2) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $a = i$;

3) $f(z) = z \cos \dfrac{1}{z-1}$, $a = 1$; 4) $f(z) = \dfrac{z^5 + z^2}{z^2 + 4}$, $a = \infty$.

△ 1) Так как $e^{1/z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^n n!}$, то

$$f(z) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-3}},$$

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)! z^n}.$$

Главная часть $f_1(z)$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых и поэтому $z = 0$ — существенно особая точка функции $f(z)$.

2) $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-i)^2}$,

$$h(z) = \frac{1}{(z+i)^2} = h(i) + h'(i)(z-i) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{(k)}(i)}{k!}(z-i)^k,$$

где $h(i) = -\dfrac{1}{4}$, $h'(i) = -\dfrac{2}{(2i)^3} = -\dfrac{i}{4}$, откуда

$$f_1(z) = \frac{h(i)}{(z-i)^2} + \frac{h'(i)}{z-i} = -\frac{1}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z-i)},$$

а $z = i$ — полюс второго порядка функции $f(z)$.

3) Пусть $z - 1 = t$, тогда $f(z) = \varphi(t) = (t+1)\cos\dfrac{1}{t}$. Представим функцию $\varphi(t)$ в окрестности точки $t = 0$ ее рядом Лорана

$$\varphi(t) = (t+1)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!t^{2n}}\right).$$

Отсюда следует, что главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 1$ — ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}},$$

а $z = 1$ — существенно особая точка функции $f(z)$.

4) Разделив многочлен $z^5 + z^2$ на многочлен $z^2 + 4$, представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = z^3 - 4z + \frac{z^2 + 16z}{z^2 + 4}.$$

Функция $g(z) = \dfrac{z^2 + 16z}{z^2 + 4}$ регулярна в точке $z = \infty$, так как она регулярна в области $|z| > 2$ и существует $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 1$.

Поэтому главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки есть сумма $z^3 - 4z$, а $z = \infty$ — полюс третьего порядка функции $f(z)$. ▲

Пример 3. Пусть $a \neq \infty$ — существенно особая точка функции $f(z)$ и полюс функции $g(z)$. Докажем, что $z = a$ — существенно особая точка функции $\varphi(z) = f(z)g(z)$.

△ Предположим противное. Тогда $z = a$ — либо устранимая особая точка, либо полюс функции $\varphi(z)$. Если $z = a$ — устранимая особая точка функции $\varphi(z)$, то существует конечный $\lim\limits_{z\to a} \varphi(z) = A$. По условию, $z = a$ — полюс функции $g(z)$ и поэтому $g(z) = \dfrac{h(z)}{(z-a)^m}$, $h(a) \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$. Но тогда функция

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)} = \frac{\varphi(z)}{h(z)}(z-a)^m$$

имеет в точке a предел, равный нулю, что противоречит условию (функция $f(z)$ не имеет предела в точке a, так как для нее точка a является существенно особой). Если $z=a$ — полюс функции $\varphi(z)$, то

$$\varphi(z)=\frac{h_1(z)}{(z-a)^k},\quad h_1(a)\neq 0,\quad k\in\mathbb{N},$$

и тогда

$$f(z)=\frac{h_1(z)}{h(z)}\,(z-a)^{m-k},$$

откуда следует, что при $m\geqslant k$ точка $z=a$ является устранимой, а при $m<k$ — полюсом функции $f(z)$, что противоречит условию.

Итак, $z=a$ — существенно особая точка функции $\varphi(z)$. ▲

Пример 4. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид:

1) $f(z)=\dfrac{e^{1/(i-z)}}{1+\sin\dfrac{\pi i z}{2}}$; 2) $f(z)=\dfrac{e^{\operatorname{ctg}\pi z}}{(z^2-1)^2(\operatorname{ch}z+1)}$;

3) $f(z)=\dfrac{e^{1/z^3}\cos\dfrac{1}{z+1}}{\sin^3 z(z^4+1)^2}$; 4) $f(z)=\dfrac{(z^2+\pi^2)\operatorname{tg}z}{\operatorname{sh}z}\big(e^{\pi/(2z)}-e\big)$.

△ 1) Особыми точками функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$ могут быть только точка $z=i$ и корни уравнения $\sin\dfrac{\pi i z}{2}=-1$ — точки z_k такие, что

$$\frac{\pi i z_k}{2}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

откуда $z_k=i(1-4k)$, $k\in\mathbb{Z}$. Точка i является существенно особой точкой функции $e^{1/(i-z)}$ и полюсом функции $\dfrac{1}{1+\sin(\pi i z/2)}$.

Откуда следует (пример 3), что $z=i$ — существенно особая точка функции $f(z)$. Точки z_k $(k\neq 0)$ — полюсы первого порядка функции $f(z)$, так как в силу условия $\cos\dfrac{\pi i z_k}{2}\neq 0$ они являются нулями кратности 1 функции $1+\sin\dfrac{\pi i z}{2}$, а $z=\infty$ — предельная точка полюсов.

2) Особыми точками функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$ могут быть только точки 1 и -1, а также корни z_k уравнения $\sin\pi z=0$ (числа $z_k=k$, $k\in\mathbb{Z}$) и корни $\widetilde{z}_k$ уравнения $\operatorname{ch}z=-1$, равносильного уравнению $e^z=-1$, откуда $\widetilde{z}_k=i\pi+2k\pi i$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Точки $z_k=k$ $(k\in\mathbb{Z},\ k\neq\pm1)$ — существенно особые точки функции $f(z)$, точки $z=\pm1$ также являются (пример 3) существенно особыми — это полюсы функции $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(\operatorname{ch}z+1)}$.

Точки $\widetilde{z}_k$ — полюсы первого порядка ($\operatorname{sh}z_k\neq 0$) функции $f(z)$. Точка $z=\infty$ — предельная точка для точек z_k и $\widetilde{z}_k$.

3) Точка $z = 0$ — нуль функции $\sin z = 0$ (полюс функции $f(z)e^{-1/z^3}$) и существенно особая точка функции e^{-1/z^3} является существенно особой точкой функции $f(z)$ (пример 3). Точка $z = -1$ также является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Корни уравнения
$$z^4 = -1,$$
т. е. точки $z_k = e^{i\pi(2k+1)/4}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ — полюсы второго порядка, а точки $\widetilde{z}_k = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$ — полюсы третьего порядка функции $f(z)$. Точка $z = \infty$ — предельная точка полюсов $\widetilde{z}_k$.

4) Особыми точками в $\mathbb{C}$ могут быть только нули функций $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и точка $z = 0$. Точка $z = 0$ — существенно особая точка функций $e^{\pi/(2z)}$ и $f(z)$, точки $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ — нули кратности 1 функции $\cos z$ — являются полюсами первого порядка функции $f(z)$. Нули функции $\operatorname{sh} z$ — точки $\widetilde{z}_k = k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq \pm 1)$ — являются полюсами первого порядка функции $f(z)$, а $i\pi$ и $-i\pi$ — устранимые особые точки, $z = \infty$ — предельная точка полюсов $\widetilde{z}_k$. ▲

Задачи

1. Доказать, что точка $z = a$ является устранимой особой точкой для следующих функций:

1) $\dfrac{z^2-1}{z-1}$ $(a = 1)$; 2) $\dfrac{\sin z}{z}$ $(a = 0)$;

3) $\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$ $(a = 0)$; 4) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ $(a = 0)$;

5) $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$ $(a = 0)$; 6) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{\sin z}$ $(a = 0)$;

7) $\dfrac{1}{\cos^2 z} - \dfrac{1}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}$ $\left(a = \dfrac{\pi}{2}\right)$; 8) $\dfrac{z^2-1}{z^3+1}$ $(a = \infty)$.

2. Доказать, что точка $z = a$ является полюсом следующих функций:

1) $\dfrac{1}{z}$ $(a = 0)$; 2) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ $(a = i)$;

3) $\dfrac{z^2+1}{z+1}$ $(a = \infty)$; 4) $\dfrac{z}{1-\cos z}$ $(a = 0)$;

5) $\dfrac{z}{(e^z-1)^2}$ $(a = 0)$; 6) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{z}$ $(a = \infty)$;

7) $\dfrac{z}{(e^z+1)^2}$ $(a = \pi i)$; 8) $\operatorname{tg}\pi z$ $\left(a = \pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{3}{2},\ \ldots\right)$.

3. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в точке $z = a$ и $f(a) = g(a) = 0$.

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$; 2) $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to a}\left\{\dfrac{g'(z)f^2(z)}{f'(z)g^2(z)}\right\}$.

4. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в точке $z=a$ и $f(a)=g(a)=0$. Доказать, что точка $z=a$ является изолированной особой точкой однозначного характера для функции $F(z)=f(z)/g(z)$ и что она не может быть существенно особой точкой.

5. Пусть $z=a$ — изолированная особая точка однозначного характера для функции $f(z)$. Доказать, что точка $z=a$ является существенно особой точкой функции $f(z)$ в том и только в том случае, если существуют такие две последовательности $z_1', z_2', \ldots$ и $z_1'', z_2'', \ldots$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n'=\lim\limits_{n\to\infty} z_n''=a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n')=A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n'')=B$, $A\neq B$.

6. Доказать, что точка $z=\infty$ является существенно особой точкой для функции $\sin z$.

7. Доказать, что точка $z=a$ является существенно особой точкой функций:

1) e^z $(a=\infty)$; 2) e^{-z^2} $(a=\infty)$; 3) $\sin\dfrac{\pi}{z^2}$ $(a=0)$;

4) $z^2\cos\dfrac{\pi}{z}$ $(a=0)$; 5) $e^{\operatorname{tg} z}$ $\left(a=\dfrac{\pi}{2}\right)$; 6) $\sin(e^z)$ $(a=\infty)$;

7) $\cos\dfrac{z}{z+1}$ $(a=-1)$; 8) $\sin\dfrac{\pi}{z^2+1}$ $(a=-i)$.

8. Найти все изолированные особые точки однозначного характера для следующих функций и определить их вид:

1) $\dfrac{z}{\sin z}$; 2) $\dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$; 3) $z^2\sin\dfrac{z}{z+1}$; 4) $\dfrac{1}{z^2-1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$;

5) $\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}$; 6) $z\left(e^{1/z}-1\right)$; 7) $e^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}}$; 8) $\sin\left(e^{1/z}\right)$.

9. Доказать, что изолированная особая точка однозначного характера $z=a$ является для функции $f(z)$ устранимой особой точкой, если выполняется одно из следующих условий (расположенных в порядке ослабления ограничений):

1) функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки $z=a$;

2) $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=0$;

3) $\lim\limits_{\rho\to 0}\displaystyle\int\limits_{|z-a|=\rho}|f(z)||d(z)|=0$.

10. Пусть $z=a$ — изолированная особая точка однозначного характера для функции $f(z)$, удовлетворяющей в некоторой окрестности этой точки неравенству $|f(z)|<M|z-a|^{-m}$, где M и m — некоторые положительные постоянные. Доказать, что точка $z=a$ не может быть существенно особой точкой функции $f(z)$.

11. Пусть функция $f(z)$ имеет в конечной точке $z=a$ полюс порядка m. Определить порядок полюса в точке $z=a$ функции $f^{(n)}(z)$.

12. Пусть $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ — многочлены степеней m и n соответственно. Найти порядок полюса в бесконечности для следующих функций:

1) $P_m(z) + Q_n(z),\ m \neq n$; 2) $P_m(z) \cdot Q_n(z)$;

3) $\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)},\ m > n$.

13. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют в точке $z = \infty$ полюсы порядков m и n соответственно. Доказать, что функция $F(z) = f(g(z))$ имеет в точке $z = \infty$ полюс порядка mn.

14. Пусть функция $g(z)$ регулярна в точке $z = a$ и $g(a) = b$, а функция $f(\zeta)$ имеет в точке $\zeta = b$ полюс порядка m. Доказать, что функция $F(z) = f(g(z))$ имеет в точке $z = a$ полюс порядка mn, где n — кратность нуля функции $g(z) - b$ в точке $z = a$.

15. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид, если:

1) $f(z) = \dfrac{1 - \operatorname{ch}\dfrac{z}{2}}{e^z - e^{3z}}$; 2) $f(z) = \dfrac{z^2 - 4z - 5}{(z+3)(1 + \cos\pi z)}$;

3) $f(z) = \dfrac{e^{2z} - e^z}{(z^2 - 1)\sin\pi z}$; 4) $f(z) = \dfrac{1}{4\operatorname{sh}(z-1)} + \dfrac{1}{z^2 - 6z + 5}$;

5) $f(z) = \dfrac{6\operatorname{sh} z - z(6 + z^2)}{(e^z - 1)^5}$; 6) $f(z) = \dfrac{e^{3z} - \cos^2 z}{z^2} - 3\operatorname{cth} z$;

7) $f(z) = \dfrac{e^{\operatorname{tg}\pi z}\sin\dfrac{2\pi z}{3}}{(2z+1)(e^z+1)}$; 8) $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z e^{\operatorname{tg} z}}{\operatorname{tg} 4z}$;

9) $f(z) = \dfrac{z^3 - \operatorname{sh}^3 z}{(e^z - 1)^5}$; 10) $f(z) = \dfrac{e^{\operatorname{ctg}\pi z}\cos\dfrac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(\operatorname{ch} z + 1)}$;

11) $f(z) = \dfrac{4z^2 + 4\pi z - 8\pi^2}{(e^{2iz} - 1)^2} - \dfrac{3\pi}{z + 2\pi}$;

12) $f(z) = \dfrac{z^3 + 2\pi z^2 + \pi^2 z}{\sin^3 z} - \dfrac{\pi}{z + \pi}$.

16. Пусть последовательность функций $\{f_n(z)\}$, регулярных в кольце $0 < |z - a| < r$, равномерно сходится в каждой замкнутой части этого кольца. Доказать, что если каждая функция $f_n(z)$ имеет в точке $z = a$ полюс порядка m, то предельная функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z - a| < r$ и имеет в точке $z = a$ полюс порядка не выше m, или устранимую особую точку.

17. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид, если:

1) $f(z) = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{z}}{z^2 + z - 2}$; 2) $f(z) = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{z}}{\sin z + 1}$;

3) $f(z) = \dfrac{1 - \sin\dfrac{i\pi}{z}}{e^{\pi z} - 1}$; 4) $f(z) = \dfrac{z^2 + 4z - 12}{1 + \sin\dfrac{3\pi}{z}}$;

5) $f(z)=\dfrac{8z^2-6z+1}{1-\cos\dfrac{\pi}{z}}$; 6) $f(z)=\dfrac{\cos\dfrac{\pi z}{z+1}}{1+\cos\pi z}$;

7) $f(z)=\dfrac{(z-2)(3z^2-4z-4)}{1-\sin\dfrac{\pi}{z}}$; 8) $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{e^{\pi/(z+i)}-i}$;

9) $f(z)=\dfrac{e^{1/(z-2i)}}{1-\cos i\pi z}$; 10) $f(z)=\dfrac{e^{\cos(\pi i/2z)}-1}{i+\operatorname{sh}\dfrac{3\pi z}{2}}$.

18. Пусть $z=a$ — полюс функции $f(z)$. Доказать, что для функции $e^{f(z)}$ точка $z=a$ является существенно особой.

19. Пусть $f(z)$ — функция, регулярная на множестве $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением единственного полюса $z=a$ первого порядка. Доказать, что если $a=\infty$, то $f(z)$ — линейная функция, т. е. $f(z)=Az+B$, где $A\neq 0$, а если $a\neq\infty$, то $f(z)$ — дробно-линейная функция, т. е. $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, где $ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$.

20. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид, если:

1) $f(z)=\dfrac{z^2+\ln^2 2}{\sin z-\dfrac{5}{4}}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$; 2) $f(z)=\dfrac{4z^2+\pi^2}{1+e^{2z}}\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{z}-1\right)$;

3) $f(z)=\dfrac{z^2+\ln^2 2}{\cos z+\dfrac{3i}{4}}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$; 4) $f(z)=\dfrac{4z^2-12iz-5}{\operatorname{sh}\pi z-i}\,e^{1/(\operatorname{sh}\pi/z)}$;

5) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}\pi z-\cos\dfrac{i\pi}{z}}{\left(i-e^{\pi/z}\right)^2}$; 6) $f(z)=\dfrac{(2z-\pi)e^{1/\cos z}}{z\cos 2z\cos z}$;

7) $f(z)=\dfrac{\cos\dfrac{\pi i}{2(z-1)}}{e^{\pi z}+e^{\pi}}$; 8) $f(z)=\dfrac{4z^2-12z+5}{\sin\pi z-1}\,e^{1/(\sin\pi/z)}$;

9) $f(z)=\dfrac{e^{1/\sin z}(z^2+4\pi^2)}{z^2\operatorname{sh} z}$; 10) $f(z)=\dfrac{z^3\operatorname{sh}\dfrac{1}{4z}}{e^{1/z}-e^{2/z}}$.

21. Пусть $f(z)$ — целая функция, принимающая каждое конечное значение только один раз. Доказать, что $f(z)$ — линейная функция, т. е. $f(z)=az+b$, $a\neq 0$.

22. Пусть $z=a$ — существенно особая точка функции $f(z)$. Можно ли утверждать, что и для функции $\dfrac{1}{f(z)}$ точка $z=a$ является существенно особой?

23. Пусть точка $z=a$ является существенно особой точкой функции $f(z)$. Обозначим $M(\rho)=\max\limits_{|z-a|=\rho}|f(z)|$. Доказать, что при любом $k>0$

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^k M(\rho)=+\infty.$$

24. Пусть функция $g(z)$ регулярна в точке $z = a$ и $g(a) = b$, а $\zeta = b$ — существенно особая точка функции $f(\zeta)$. Доказать, что $z = a$ — существенно особая точка функции $F(z) = f(g(z))$.

25. Пусть функции $a_1(z), \ldots, a_n(z)$ регулярны в точке a или имеют там полюс, $z = a$ — существенно особая точка функции $f(z)$. Доказать, что $z = a$ — существенно особая точка функции

$$F(z) = f^n(z) + a_1(z)f^{n-1}(z) + \ldots + a_n(z).$$

26. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид, если:

1) $f(z) = \operatorname{ctg} \dfrac{e^z - 1}{e^z + 1}$;

2) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}\left(\pi i \dfrac{1 + e^z}{1 - e^z}\right)}$;

3) $f(z) = \dfrac{z^2 \sin^2 z \sin(z - (\pi/2))^{-1}}{(\cos z - 1)^2}\, e^{\sin z / z}$;

4) $f(z) = \dfrac{e^{1/\operatorname{ch} 2z}(\pi z + \pi + 1)}{1 + \cos \dfrac{1}{1 + z}}$;

5) $f(z) = \dfrac{e^{\cos z/2/(1+\cos z)}}{(z + \pi)^3(1 + \cos^2 z)}$;

6) $f(z) = \dfrac{z^2 + \pi^2}{\operatorname{sh} 2z} \left(e^{\pi/z} - e^2\right) \operatorname{tg}^2 z$;

7) $f(z) = \dfrac{e^{\sin z/(1-\cos z)}}{(2\pi - z)^2(1 + \sin^2 z)}$;

8) $f(z) = \dfrac{4z^2 + \pi^2}{\operatorname{ch} 3z} \left(e^{z/(z-2)} - 1\right) \operatorname{ctg}^2 z$;

9) $f(z) = \dfrac{z \sin^3 z \cos \dfrac{1}{1 - z}}{(\cos z - 1)^2}\, e^{\sin^2 z / z^2}$;

10) $f(z) = \dfrac{\left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)^3 \cos z \cos \dfrac{1}{z - \pi}}{(\sin z - 1)^2}\, e^{\cos z/(z - (\pi/2))}$.

27. Пусть $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ — многочлены степени m и n соответственно, не имеющие общих нулей. Доказать, что нули многочлена $Q_n(z)$ и только эти точки являются полюсами функции $f(z) = \dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$, а других особых точек в конечной плоскости у функции $f(z)$ нет. Показать, что точка $z = \infty$ является полюсом порядка $m - n$ функции $f(z)$, если $m > n$ и точкой регулярности, если $m \leqslant n$.

28. Пусть мероморфная функция $f(z)$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ лишь конечное число полюсов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (точка $z = \infty$ также может быть полюсом). Доказать, что $f(z)$ — рациональная функция (отношение двух многочленов) и представляется в виде

$$f(z) = A + f_0(z) + \sum_{k=1}^{m} f_k(z),$$

где $f_k(z)$ и $f_0(z)$ — соответственно главные части ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестностях точек a_k и $z=\infty$, $A = \lim\limits_{z\to\infty}(f(z) - f_0(z))$.

29. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $D = \{z\colon 0 < |z| < \rho\}$ и $f(z) \not\equiv 0$. Каким условиям должна удовлетворять функция $f(z)$ в точке $z = 0$, чтобы можно было указать регулярную в круге $B_\rho(0) = \{z\colon |z| < \rho\}$ функцию $g(z)$, где $g(z) \not\equiv 0$, такую, что $\lim\limits_{z\to 0}[f(z)g(z)] = 0$.

30. Пусть функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки $z=0$, т. е. в области $D = \{z\colon 0 < |z| < \rho\}$ и для всех $z \in D$ справедливо неравенство

$$|f(z)| \leqslant \frac{A}{\sqrt{|z|}}, \quad \text{где} \quad A > 0.$$

Доказать, что $z = 0$ — устранимая особая точка функции $f(z)$.

31. Пусть целая функция $f(z)$ в некоторой области $|z| > R$ удовлетворяет условию $|f(z)| \geqslant A|z|^m$, где $A > 0$, $m \geqslant 0$ — целое число. Доказать, что $f(z)$ — многочлен.

Ответы

8. 1) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$) — полюсы первого порядка;

2) $z = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) — устранимые особые точки, $z = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) — полюсы второго порядка;

3) $z = \infty$ — полюс второго порядка; $z = -1$ — существенно особая точка;

4) $z = 1$ и $z = \infty$ — устранимые особые точки, $z = -1$ — существенно особая точка;

5) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$) — полюсы первого порядка;

6) $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — устранимая особая точка;

7) $z = \dfrac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$) и $z = \infty$ — существенно особые точки;

8) $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — устранимая особая точка.

11. $m + n$.

12. 1) $\max(m, n)$; 2) $m + n$; 3) $m - n$.

15. 1) $z = 4\pi n i$ ($n \in \mathbb{Z}$) — устранимые особые точки, $z = \pi k i$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 4n$) — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

2) $z = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -1$, $k \neq \pm 2$) — полюсы второго порядка, $z = -1$ и $z = 5$ — полюсы первого порядка, $z = -3$ — полюс третьего порядка; $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

3) $z = \pm 1$ — полюсы второго порядка, $z = k$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,\ k \neq \pm 1)$ — полюсы первого порядка, $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

4) $z = 5$ — полюс первого порядка, $z = 1$ — устранимая особая точка, $z = 1 + \pi k i$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

5) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$ — полюсы пятого порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

6) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = \pi k i$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

7) $z = k + \dfrac{1}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ — существенно особые точки, $z = i\pi(1 + 2k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов и существенно особых точек;

8) $z = \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — устранимые особые точки, $z = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — существенно особые точки, $z = \infty$ — предельная точка полюсов и существенно особых точек;

9) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = 2\pi k i$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

10) $z = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — существенно особые точки, $z = i(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка существенно особых точек и полюсов;

11) $z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq -2,\ k \neq 1)$ — полюсы второго порядка, $z = \pi$ — полюс первого порядка, $z = -2\pi$ — устранимая особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

12) $z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,\ k \neq -1)$ — полюсы третьего порядка, $z = 0$ — полюс второго порядка, $z = -\pi$ — устранимая особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов.

17. 1) $z = 1$ и $z = 2$ — устранимые особые точки, $z = -2$ — полюс первого порядка, $z = 0$ — существенно особая точка;

2) $z = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы второго порядка, $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

3) $z = 0$ — существенно особая точка, $z = 2i$ — устранимая особая точка, $z = 2ik$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 1)$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

4) $z = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq -1,\ k \neq \pm 2,\ k \neq -3)$ — полюсы второго порядка, $z = -3$ — полюс третьего порядка, $z = -1$ и $z = 5$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

5) $z = \dfrac{1}{2k}$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 1,\ k \neq 2)$ — полюсы второго порядка, $z = \dfrac{1}{2}$ и $z = \dfrac{1}{4}$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — полюс четвертого порядка, $z = 0$ — предельная точка полюсов;

6) $z = 1 + 2k$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0,\ \ k \neq -1,\ \ k \neq -2)$ — полюсы второго порядка, $z = 1$ и $z = -3$ — полюсы первого порядка, $z = -1$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

7) $z = \dfrac{2}{4k+1}$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0,\ \ k \neq -1)$ — полюсы второго порядка, $z = -\dfrac{2}{3}$ — полюс первого порядка, $z = \infty$ — полюс третьего порядка, $z = 2$ — устранимая особая точка, $z = 0$ — предельная точка полюсов;

8) $z = -\dfrac{2i}{1+4k} - i$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$ — полюсы первого порядка, $z = -3i$ — устранимая особая точка, $z = \infty$ — существенно особая точка, $z = -i$ — предельная точка полюсов;

9) $z = 2ki$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq i)$ — полюсы второго порядка, $z = 2i$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

10) $z = -\dfrac{(1+4k)i}{3}$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,\ k \neq -1)$ — полюсы второго порядка, $z = -\dfrac{i}{3}$ и $z = i$ — полюсы первого порядка, $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов.

20. 1) $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i\ln 2$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

2) $z = i\pi\,\dfrac{2k+1}{2}$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0,\ \ k \neq -1)$ — полюсы первого порядка, $z = -\dfrac{i\pi}{2}$ и $z = \dfrac{i\pi}{2}$ — устранимые особые точки, $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

3) $z = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln 2$ и $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln 2$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

4) $z = \dfrac{i(1-4k)}{2}$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0,\ \ k \neq -1)$ — полюсы второго порядка, $z = \dfrac{5i}{2}$ — полюс первого порядка, $z = \dfrac{i}{л}$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0)$ — существенно особые точки, $z = 0$ — предельная точка существенно особых точек, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

5) $z = -\dfrac{2i}{1+4k}$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0)$ — полюсы второго порядка, $z = -2i$ — полюс первого порядка, $z = \infty$ — существенно особая точка, $z = 0$ — предельная точка полюсов;

6) $z = 0$ и $z = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — существенно особые точки, $z = \infty$ — предельная точка полюсов и существенно особых точек,

7) $z = 1 + (1+2k)i,\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,\ k \neq -1$ — полюсы первого порядка, $z = 1 + i$ и $z = 1 - i$ — устранимые особые точки, $z = 1$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

8) $z = \dfrac{4k+1}{2}$, $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0,\ \ k \neq 1)$ — полюсы второго порядка, $z = \dfrac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$ — существенно особые точки, $z = \dfrac{5}{2}$ — полюс первого порядка, $z = 0$ — предельная точка существенно особых точек, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

9) $z = \pi k$, $(k \in \mathbb{Z})$ — существенно особые точки, $z = i\pi k$, $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,$ $k = -2,\ k \neq 2)$ — полюсы первого порядка, $z = 2\pi i$ и $z = -2\pi i$ — устранимые особые точки, $z = \infty$ — предельная точка полюсов и существенно особых точек;

10) $z = \dfrac{1}{2\pi i(1+2k)}$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = \dfrac{1}{4\pi ki}$ $(k \in \mathbb{Z},$ $k \neq 0)$ — устранимые особые точки, $z = \infty$ — полюс третьего порядка, $z = 0$ — предельная точка полюсов.

22. Нет. Пример: $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$. Точка $z = 0$ — предельная точка полюсов для $f(z)$ (не является изолированной).

26. 1) $z = \ln\dfrac{k\pi+1}{k\pi-1} + i\pi(n+1),\ \ k \in \mathbb{Z},\ \ n \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0$ — полюсы первого порядка, $z = i\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = i\pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$ и $z = 0$ — неизолированные особые точки;

2) $z = \ln\dfrac{k-1}{k+1} + i2\pi n$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0,\ \ k \neq 1,\ \ k \neq -1,\ \ n \in \mathbb{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = i\pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z},$ — полюсы первого порядка, $z = i2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ и $z = \infty$ — неизолированные особые точки;

3) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы второго порядка, $z = \dfrac{\pi}{2}$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

4) $z = i\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$ — существенно особые точки;
$z = \dfrac{1}{\pi(2k+1)} - 1,\ \ k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0$ — полюсы второго порядка,
$z = \dfrac{1}{\pi} - 1$ — полюс первого порядка, $z = -1$ — предельная точка полюсов;
$z = \infty$ — предельная точка существенно особых точек;

5) $z = \pi(1+2k),\ \ k \in \mathbb{Z}$ — существенно особые точки;
$z = \dfrac{\pi}{2}(1+2k) - \dfrac{i}{2}\ln(3 \pm \sqrt{8})$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов и существенно особых точек;

6) $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \dfrac{\pi}{2}$ и $z = \dfrac{\pi ki}{2}$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 2)$, $k \neq -2$ — полюсы первого порядка, $z = \pi i$ и $z = -\pi i$ — устранимые особые точки, $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0)$ — полюсы второго порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

7) $z = 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — существенно особые точки, $z = \pi k - \dfrac{1}{2}\ln(3 \pm \sqrt{8})$, $k \in \mathbb{Z}$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов и существенно особых точек;

8) $z = 2$ — существенно особая точка, $z = 0$ и $z = \dfrac{\pi}{6}i + \dfrac{\pi k i}{3}$ $(k \in \mathbb{Z},$ $k \neq 1,\ k \neq -2)$ — полюсы первого порядка, $z = \pm\dfrac{\pi i}{2}$ — устранимые особые точки, $z = \pi k$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0)$ — полюсы второго порядка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

9) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = 1$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов;

10) $z = \dfrac{\pi}{2}$ — устранимая особая точка, $z = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы третьего порядка, $z = \pi$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — предельная точка полюсов.

29. Если $z = 0$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то $g(z) = z$.
Если $z = 0$ — полюс порядка m функции $f(z)$, то $g(z) = z^{m+1}$.
Если $z = 0$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то указанный в задаче предел не существует для любой регулярной в круге $B_\rho(0)$ функции $g(z)$, если $g(z) \not\equiv 0$.

§ 13. Вычисление вычетов

Справочные сведения

1. Определение вычета

1.1. *Вычет в конечной точке.* Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка однозначного характера функции $f(z)$. Тогда функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z - a| < \rho$.

Если
$$\gamma_R = \{z\colon |z - a| = R\},$$
где $0 < R < \rho$ — положительно ориентированная окружность, то *вычетом функции $f(z)$ в точке a* называется число
$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz,$$
которое обозначается $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z)$. Итак,
$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-a|=R} f(z)\,dz. \tag{1}$$

Символ $\oint$ указывает на то, что обход контура совершается в положительном направлении (против часовой стрелки).

1.2. *Вычет в бесконечно удаленной точке.* Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $|z| > \rho$ (точка $z = \infty$ является либо изолированной особой точкой однозначного характера, либо точкой регулярности функции $f(z)$). Тогда *вычетом функции $f(z)$ в бесконечности* называется число, определяемое формулой

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} f(z)\,dz, \quad 0 < \rho < R, \tag{2}$$

где $\gamma_R = \{z\colon |z| = R\}$ — окружность радиуса R, ориентированная по часовой стрелке (при обходе γ_R область $|z| > R$ остается слева).

Заметим, что если функция $f(z)$ регулярна в точке $a \neq \infty$, то $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = 0$, а если функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, то отсюда не следует, что ее вычет в бесконечности равен нулю $\left(\operatorname*{res}_{z=\infty} 1/z = -1\right)$.

2. Теорема о вычетах. Если функция $f(z)$ регулярна в $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая и вычет в точке $z = \infty$, равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

откуда

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{3}$$

3. Вычеты и ряд Лорана

3.1. Если функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки a, т. е. в кольце $0 < |z-a| < \rho$, то она представляется в этом кольце рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{4}$$

где $f_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ — главная часть ряда Лорана.

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}, \tag{5}$$

т. е. вычет функции $f(z)$ в точке a равен коэффициенту ряда Лорана (4) при $\dfrac{1}{z-a}$.

3.2. Если $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ — ряд Лорана функции $f(z)$, регулярной в окрестности точки $z = \infty$ (в области $|z| > \rho$), то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_1, \tag{6}$$

т. е. вычет в точке $z = \infty$ равен коэффициенту этого ряда при $\dfrac{1}{z}$, взятому со знаком минус.

4. Формулы для вычета в конечной точке.

4.1. *Полюс первого порядка.* Если $z = a$ $(a \neq \infty)$ — полюс первого порядка (простой полюс) функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \left[(z-a)f(z)\right]. \tag{7}$$

Пусть $f(z) = \dfrac{h(z)}{\varphi(z)}$, где $h(z)$ и $\varphi(z)$ — функции, регулярные в точке a, причем

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi'(a) \neq 0.$$

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{\varphi'(a)}. \tag{8}$$

В частности, если $\varphi(z) = z - a$, т. е.

$$f(z) = \frac{h(z)}{z-a},$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = h(a). \tag{9}$$

4.2. *Полюс порядка* $m > 1$. Если $z = a$ $(a \neq \infty)$ — полюс порядка $m > 1$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}. \tag{10}$$

В частности, если

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}, \tag{11}$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке, и $h(a) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\, h^{(m-1)}(a), \tag{12}$$

т. е. вычет функции $f(z)$ в точке a равен коэффициенту при $(z-a)^{m-1}$ ряда Тейлора $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

5. Формулы для вычета в бесконечно удаленной точке.

5.1. Если функция $f(z)$ регулярна в точке $z=\infty$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \left[z\left(f(\infty) - f(z)\right)\right]. \tag{13}$$

5.2. Пусть $z=\infty$ — нуль порядка k функции $f(z)$, тогда

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k} \quad \text{при} \quad z\to\infty, \quad A\neq 0. \tag{14}$$

Если в асимптотической формуле (14) $k=1$, то

$$f(z) \sim \frac{A}{z} \quad \text{и тогда} \quad \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -A, \tag{14}$$

а если $k \geqslant 2$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

5.3. Если функция $f(z)$ представлена в виде $f(z) = \varphi\left(\dfrac{1}{z}\right)$, где функция $\varphi(\zeta)$ регулярна в точке $\zeta = 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0). \tag{15}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Найти $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)$, если:

1) $f(z) = \dfrac{z^2+7z}{z^2-z-2}$, $a=-1$; 2) $f(z) = ze^{1/z^2}$, $a=\infty$;

3) $f(z) = \dfrac{2\cos z - \cos^3 z}{\sin z}$, $a=\pi$; 4) $f(z) = \dfrac{z^3+2z^2+3z}{(z-1)^3}$, $a=1$;

5) $f(z) = \dfrac{1}{z(e^{2z}-1)}$, $a=0$; 6) $f(z) = e^{z/(1-z)}$, $a=1$ и $a=\infty$;

7) $f(z) = z\sin\dfrac{z+1}{z-1}$, $a=1$; 8) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, $a=\infty$.

△ 1) Так как

$$z^2 - z - 2 = (z+1)(z-2),$$

то $f(z) = \dfrac{g(z)}{z+1}$, где $g(z) = \dfrac{z^2+7z}{z-2}$. По формуле (9), где $g(-1) = 2$, находим

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = g(-1) = 2.$$

2) Функция $f(z)$ представляется в области $D = \{z\colon 0<|z|<\infty\}$ рядом Лорана

$$f(z) = z + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!z^{2n-1}},$$

в котором коэффициент при $\dfrac{1}{z}$ равен 1. По формуле (6) находим $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -1$.

3) Точка $z = \pi$ — полюс первого порядка функции $f(z)$, так как $z = \pi$ — нуль кратности 1 функции $\sin z$. Пусть

$$h(z) = 2\cos z - \cos^3 z, \quad \varphi(z) = \sin z.$$

Тогда по формуле (8), где $h(\pi) = -1$, $\varphi'(\pi) = -1$, находим $\operatorname*{res}\limits_{z=\pi} f(z) = 1$.

4) Точка $z = 1$ — полюс третьего порядка функции $f(z)$. Пусть

$$h(z) = z^3 + 2z^2 + 3z,$$

тогда по формуле (12), где $h''(z) = 6z + 4$, $h''(1) = 10$, находим

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{h''(1)}{2} = 5.$$

5) Точка $z = 0$ — полюс второго порядка функции $f(z)$. Воспользуемся формулой (10). Найдем

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{e^{2z}-1}\right)' = \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z} - 1 - 2ze^{2z}}{(e^{2z}-1)^2}\,.$$

Применяя формулу Тейлора для функции e^{2z}, получаем

$$e^{2z} - 1 - 2ze^{2z} = -2z^2 + \ldots\,, \quad (e^{2z}-1)^2 = 4z^2 + \ldots\,,$$

поэтому искомый предел равен $-\dfrac{1}{2}$ и $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = -\dfrac{1}{2}$.

6) Так как $\dfrac{z}{1-z} = -1 - \dfrac{1}{z-1}$, то

$$f(z) = e^{-1} \cdot e^{-1/(z-1)} = e^{-1}\left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} + \ldots\right),$$

откуда следует, что

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -e^{-1}.$$

Функция $f(z)$ имеет в $\mathbb{C}$ единственную изолированную особую точку $z = 1$ и регулярна в области $1 < |z| < \infty$. По теореме о вычетах (формула (3))

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = e^{-1}.$$

7) Положим $t = z - 1$, тогда

$$f(z) = (t+1)\sin\left(1 + \frac{2}{t}\right) = \varphi(t)$$

и

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \operatorname*{res}_{t=0} \varphi(z).$$

Найдем коэффициент c_{-1} при $\dfrac{1}{t}$ ряда Лорана

$$\varphi(t) = (t+1)\left(\sin 1 \cdot \cos\frac{2}{t} + \cos 1 \cdot \sin\frac{2}{t}\right) =$$
$$= (t+1)\left[\sin 1\left(1 - \frac{2}{t^2} + \ldots\right) + \cos 1\left(\frac{2}{t} - \frac{4}{3t^3} + \ldots\right)\right].$$

Отсюда следует, что $c_{-1} = 2\cos 1 - 2\sin 1$ и $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 2(\cos 1 - \sin 1)$.

8) Функция $f(z)$ регулярна в области $2 < |z| < \infty$, а точка $z = \infty$ является для этой функции нулем кратности 1, причем $f(z) \sim \dfrac{1}{z}$ при $z \to \infty$. Это означает, что коэффициент ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ равен 1 и поэтому $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$. ▲

Пример 2. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех ее конечных особых точках и в бесконечности, если:

1) $f(z) = \dfrac{z^4}{1+z^4}$; 2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3(z-\pi)}$;

3) $f(z) = \dfrac{z^3}{z+1}\, e^{1/z}$; 4) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4}\cos\dfrac{z-1}{z+1}$.

△ 1) Нулями функции $z^4 + 1$, т. е. корнями уравнения $z^4 = -1$, являются числа $z_k = e^{i\pi + 2k\pi/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$, и точки z_k — полюсы первого порядка функции $f(z)$. По формуле (8) находим

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{z_k^4}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4},$$

где

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = \frac{i-1}{\sqrt{2}},$$
$$z_2 = -z_0 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = -z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

По теореме о вычетах

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{k=0}^{3} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Этот результат также следует из того, что ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечности содержит только члены вида $c_{2k}z^{2k}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2) Точка $z = 0$ — полюс второго порядка функции $f(z)$, а точка $z = \pi$ — устранимая особая точка этой функции (точка регулярности). Других особых точек в конечной плоскости у функции $f(z)$ нет. Найдем коэффициент c_{-1} ряда Лорана при $\dfrac{1}{z}$ функции $f(z)$. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots\right)\left(-\frac{1}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)^{-1} =$$
$$= -\frac{1}{\pi z^2}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{z}{\pi} + \frac{z^2}{\pi^2} + \ldots\right),$$

откуда $c_{-1} = -\dfrac{1}{\pi^2}$ и $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\dfrac{1}{\pi^2}$.

Далее, $\operatorname*{res}_{z=\pi} f(z) = 0$, а $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{\pi^2}$.

3) В конечной плоскости функция $f(z)$ имеет две изолированные особые точки: $z = -1$ (полюс первого порядка) и существенно особую точку $z = 0$.

По формуле (8) находим $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -e^{-1}$. Для нахождения вычета в бесконечности воспользуемся разложением функции $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = z^2\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-1} e^{1/z} =$$
$$= z^2\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \ldots\right),$$

откуда находим, что коэффициент c_{-1} при $\dfrac{1}{z}$ равен $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2} + 1 - 1$, т. е. $c_{-1} = -\dfrac{1}{3}$. Поэтому $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \dfrac{1}{3}$. По теореме о вычетах

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) - \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = e^{-1} - \frac{1}{3}.$$

4) В конечной плоскости функция $f(z)$ имеет три особые точки: $z_1 = 2$ и $z_2 = -2$ — полюсы первого порядка, $z = -1$ — существенно особая точка.

По формуле (9) находим

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = g(2),$$

где

$$g(z) = \frac{1}{z+2} \cos \frac{z-1}{z+1}\,.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{4} \cos \frac{1}{3}\,.$$

Аналогично находим

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = -\,\frac{1}{4} \cos 3.$$

Функция $f(z)$ регулярна в бесконечности и имеет там нуль второго порядка ($f(z) \sim \cos 1/z^2$ при $z \to \infty$). Поэтому $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. По теореме о вычетах

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=2} f(z) - \operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = \frac{1}{4}\left(\cos 3 - \cos \frac{1}{3}\right). \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Пусть

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$
$$Q_n(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0,$$

где $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, т. е. $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ — многочлены степени n.

Найдем $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$, где $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$.

$\triangle$ Функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$. Для нахождения искомого вычета воспользуемся формулой (13), где $f(\infty) = \dfrac{a_n}{b_n}$. Тогда

$$z(f(\infty) - f(z)) = z\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0}\right) = \varphi(z)$$

или

$$\varphi(z) = z\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \dfrac{a_0}{z^n}}{b_n + \dfrac{b_{n-1}}{z} + \ldots + \dfrac{b_0}{z^n}}\right) = \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{b_n^2} + h(z),$$

где $h(z) \to 0$ при $z \to \infty$, откуда

$$\lim_{z \to \infty} \varphi(z) = \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{b_n^2} = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z). \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Вычислить:

1) $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} \dfrac{\sin z}{z^2}$; 2) $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} e^{1/z}$; 3) $\operatorname*{res}\limits_{z=1} \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$;

4) $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} z^2 \sin\dfrac{\pi}{z}$; 5) $\operatorname*{res}\limits_{z=\pi/4} \dfrac{\cos z}{z-\dfrac{\pi}{4}}$; 6) $\operatorname*{res}\limits_{z=1} ze^{1/(z-1)}$.

2. Найти вычеты следующих функций во всех их конечных особых точках:

1) $\dfrac{1}{z+z^3}$; 2) $\dfrac{z^2}{1+z^4}$; 3) $\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$; 4) $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$;

5) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$; 6) $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

7) $\dfrac{1}{\sin \pi z}$; 8) $\operatorname{ctg} \pi z$; 9) $\operatorname{th} z$; 10) $\operatorname{cth}^2 \pi z$;

11) $\dfrac{\cos z}{(z-1)^2}$; 12) $\dfrac{1}{e^z+1}$; 13) $\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$; 14) $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

3. Найти $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z)$, если:

1) $f(z) = \dfrac{e^{z+1}}{(z+1)^2}$, $a=\infty$; 2) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2 z^3}$, $a=0$;

3) $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}\right)$, $a=0$; 4) $f(z) = z^2\cos\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}\right)$, $a=0$;

5) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{z}{z-1}$, $a=1$; 6) $f(z) = \dfrac{3z^2+4z+5}{2z^2-3z+4}$, $a=\infty$.

4. Найти вычеты следующих функций в бесконечности:

1) $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$; 2) $\cos\pi\dfrac{z+2}{2z}$; 3) $\dfrac{\sin\dfrac{1}{z}}{z-1}$;

4) $\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi}{z}}{z+1}$; 5) $\dfrac{(z^{10}+1)\cos\dfrac{1}{z}}{(z^5+2)(z^6-1)}$; 6) $z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

5. Найти вычеты следующих функций во всех их особых точках и в бесконечности:

1) $\dfrac{1}{z^6(z-2)}$; 2) $\dfrac{1+z^8}{z^6(z+2)}$; 3) $\dfrac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$;

4) $\dfrac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$;

5) $\sin z \sin\dfrac{1}{z}$; 6) $\dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$;

7) $\dfrac{1+z^8}{z^4(z^4+1)}\cos z \operatorname{ch} z$; 8) $\dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

6. Вычислить:

1) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$, $n \in \mathbb{N}$; 2) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$;

3) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2}$; 4) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$;

5) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} z^{n-3}\operatorname{ctg}^n z,\ \ n\in\mathbb{N},\ \ n\neq 1;$ 6) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{z}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}.$

7. Пусть функция $g(z)$ регулярна в точке $z=\infty$, а функция $h(z)$ имеет в точке $z=\infty$ нуль кратности 1. Доказать, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}\,[g(z)h(z)] = -g(\infty)\lim_{z\to\infty}(zh(z)).$$

8. Доказать, что для каждой четной функции $f(z)$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

(в предположении, что написанные вычеты имеют смысл).

9. Доказать, что для четной функции $f(z)$ имеет место равенство

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=-z_0} f(z),$$

а для нечетной функции $f(z)$ — равенство

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-z_0} f(z),$$

(в предположении, что написанные вычеты имеют смысл).

10. Пусть $f(z)=g(az)$, где $a\neq 0$. Доказать, что

$$\operatorname*{res}_{z=z_0 a} f(z) = \frac{1}{a}\operatorname*{res}_{z=z_0} g(z).$$

11. Пусть $f(z)=z^m g(z^n)$, где m и n — целые числа, удовлетворяющие условиям $m\geqslant 0,\ \ m<n$. Доказать, что

$$\operatorname*{res}_{z=z_0 e^{2k\pi i/n}} f(z) = e^{2k\pi i(m+1)/n}\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

12. Пусть функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в конечной точке z_0 и имеют в ней нуль порядка m. Доказать формулы:

1) $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0}\left\{\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}\cdot\dfrac{1}{z-z_0}\right\} = \dfrac{\varphi^{(m)}(z_0)}{\psi^{(m)}(z_0)};$

2) $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0}\left\{\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}\cdot\dfrac{1}{(z-z_0)^2}\right\} = \dfrac{1}{m+1}\,\dfrac{\varphi^{(m)}(z_0)}{\psi^{(m)}(z_0)}\left[\dfrac{\varphi^{(m+1)}(z_0)}{\varphi^{(m)}(z_0)} - \dfrac{\psi^{(m+1)}(z_0)}{\psi^{(m)}(z_0)}\right].$

13. Найти $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0}\{f(z)\varphi(z)\}$, если функция $\varphi(z)$ регулярна в точке z_0, а функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс первого порядка с вычетом A.

14. Найти $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0}\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, если функция $f(z)$:

1) регулярна в точке z_0 и имеет там нуль кратности m;
2) имеет в точке z_0 полюс порядка m.

15. Найти $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0}\left\{\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right\}$, если функция $\varphi(z)$ регулярна в точке $z=z_0$, а функция $f(z)$:

1) регулярна в точке z_0 и имеет там нуль кратности m;
2) имеет в точке z_0 полюс порядка m.

16. Найти $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(\varphi(z))$, если функция $\varphi(z)$ регулярна в точке z_0 и $\varphi'(z_0) \neq 0$, а функция $f(z)$ имеет в точке $\varphi(z_0)$ полюс первого порядка с вычетом A.

17. Пусть функция $f(z)$ регулярна при $R < |z| < \infty$, а $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Доказать, что функция $f(z)$ имеет первообразную, регулярную при $R < |z| < \infty$.

18. Выяснить, при каких значениях параметров a, b следующие функции однозначны во всей комплексной плоскости:

$$1)\ \int_1^z \frac{a + e^{1/\zeta}}{\zeta}\, d\zeta; \quad 2)\ \int_1^z \frac{a\sin\zeta + b\zeta\cos\zeta}{\zeta^2}\, d\zeta; \quad 3)\ \int_1^z \frac{\sin(\zeta + a\zeta^3)}{\zeta^4}\, d\zeta.$$

Ответы

1. 1) 1; 2) -1; 3) e; 4) $\dfrac{\pi^3}{6}$; 5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\dfrac{3}{2}$.

2. 1) 1 при $z = 0$, $-\dfrac{1}{2}$ при $z = i$, $-\dfrac{1}{2}$ при $z = -i$;

2) $\dfrac{1-i}{4\sqrt{2}}$ при $z = e^{\pi i/4}$, $\dfrac{1+i}{4\sqrt{2}}$ при $z = e^{-\pi i/4}$,
$-\dfrac{1+i}{4\sqrt{2}}$ при $z = e^{3\pi i/4}$, $-\dfrac{1-i}{4\sqrt{2}}$ при $z = e^{-3\pi i/4}$.

3) 1 при $z = -1$; 4) $-\dfrac{3i}{16}$ при $z = i$, $\dfrac{3i}{16}$ при $z = -i$;

5) $-\dfrac{1}{2}$ при $z = 1$, $\dfrac{1}{4}$ при $z = i$, $\dfrac{1}{4}$ при $z = -i$;

6) C_{2n}^{n-1} при $z = 1$;

7) $\dfrac{(-1)^n}{\pi}$ при $z = n$, где $n \in \mathbb{Z}$;

8) $\dfrac{1}{\pi}$ при $z = n$, где $n \in \mathbb{Z}$;

9) 1 при $z = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi i$, где $n \in \mathbb{Z}$;

10) 0 при $z = \pi i n$, где $n \in \mathbb{Z}$;

11) $-\sin 1$ при $z = 1$;

12) -1 при $z = (2n+1)\pi i$, где $n \in \mathbb{Z}$; 13) 0 при $z = 1$;

14) 0 при $z = 0$, $\dfrac{i^{2n-k}}{2\sqrt{\pi n}}$ при $z = i^k\sqrt{\pi n}$, где $k = 0, 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{N}$.

3. 1) -1; 2) $-\dfrac{1}{32}$; 3) 1; 4) 1; 5) $\dfrac{5}{6}\cos 1 - \sin 1$; 6) $-\dfrac{17}{4}$.

4. 1) 0; 2) π; 3) 0; 4) -1; 5) -1; 6) π^2.

5. 1) $\dfrac{1}{64}$ при $z = 2$; $-\dfrac{1}{64}$ при $z = 0$; 0 при $z = \infty$;

2) $\dfrac{257}{64}$ при $z = -2$; $-\dfrac{1}{64}$ при $z = 0$; -4 при $z = \infty$;

3) 0 при $z = 0$ и $z = \infty$; $-\dfrac{1023}{256}i$ при $z = 2i$; $\dfrac{1023}{256}i$ при $z = -2i$;

4) $a^n + a^{-n}$ при $z = 0$; $-a^{-n}$ при $z = a$; $-a^n$ при $z = \infty$;

5) 0 при $z = 0$ и $z = \infty$;

6) $-\dfrac{i}{4e}$ при $z = i$; $\dfrac{i}{4e}$ при $z = -i$; 0 при $z = \infty$;

7) 0 при $z = 0$ и $z = \infty$;

$-\dfrac{1}{4}\, e^{\pi i(2k+1)/4}(\cos\sqrt{2} + \operatorname{ch}\sqrt{2})$ при $z = e^{\pi i(2k+1)/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$;

8) $-\dfrac{1}{4e}$ при $z = i$; $-\dfrac{1}{4e}$ при $z = -i$; $\dfrac{1}{2e}$ при $z = \infty$;

6. 1) 1; 2) 24; 3) $\dfrac{4}{3}$; 4) 0; 5) $-\dfrac{n}{3}$; 6) $-\dfrac{4}{5}$.

§ 14. Вычисление интегралов по замкнутому контуру

Справочные сведения

При вычислении интегралов по замкнутым контурам применяется следующая теорема.

Теорема Коши о вычетах. *Пусть D — область в $\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой границей Γ, а функция $f(z)$ регулярна в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in D$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (к их числу относится и точка $z = \infty$, если $\infty \in D$), кроме того, функция $f(z)$ непрерывна вплоть до границы Γ области D. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z),$$

где Γ^+ — положительно ориентированная относительно области D кривая Γ.

Следствие (*теорема о полной сумме вычетов*). *Пусть функция $f(z)$ регулярна во всей плоскости $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, \ldots, a_n$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Примеры с решениями

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z + 1}\,dz.$$

△ Найдем все конечные особые точки подынтегральной функции $f(z)$. Это корни уравнения $e^z + 1 = 0$, т. е. точки $z_k = \pi i + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Из них внутри круга $\{z\colon |z| < 4\}$ лежат только точки $z_0 = \pi i$ и $z_{-1} = -\pi i$. Следовательно, по теореме о вычетах

$$I = 2\pi i\Big(\operatorname*{res}_{z=\pi i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-\pi i} f(z)\Big).$$

Так как точки $\pm\pi i$ — полюсы первого порядка для функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\pm\pi i} f(z) = \frac{z^4}{(e^z+1)'}\bigg|_{z=\pm\pi i} = \frac{z^4}{e^z}\bigg|_{z=\pm\pi i} = -\pi^4,$$

откуда находим $I = 2\pi i(-\pi^4 - \pi^4) = -4\pi^5 i$. ▲

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2\cdot(1-\cos z)}\,.$$

△ Найдем все особые точки подынтегральной функции $f(z)$. Это корни уравнения $\cos z = 1$, т. е. точки $z_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а также точка $\widetilde{z} = 1$.

Из них внутри круга $\{z\colon |z| < 3\}$ лежат только точки $\widetilde{z} = 1$ и $z_0 = 0$. Следовательно, по теореме о вычетах

$$I = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=0} f(z)\right).$$

Так как $\widetilde{z} = 1$ — полюс второго порядка для функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\big(f(z)(z-1)^2\big)' = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{1-\cos z}\right)' =$$

$$= -\frac{\sin z}{(1-\cos z)^2}\bigg|_{z=1} = -\frac{\sin 1}{(1-\cos 1)^2}\,.$$

Хотя точка $z_0 = 0$ также является полюсом второго порядка для $f(z)$, но вычет в ней удобнее находить, вычислив коэффициент c_{-1} ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки 0. Так как

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots\,;$$

$$\frac{1}{1-\cos z} = \frac{1}{1-\left(1-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\ldots\right)} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{z^2}{2}\left(1-\dfrac{z^2}{12}+\ldots\right)} = \frac{2}{z^2}\left(1+\frac{z^2}{12}-\ldots\right),$$

то при перемножении этих рядов получим:

$$(1+2z+3z^2+\ldots)\cdot\left(\frac{2}{z^2}+\frac{1}{6}+\ldots\right) = \frac{2}{z^2}+\frac{4}{z}+6+\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k,$$

откуда $c_{-1} = 4$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 4, \quad I = 2\pi i \left(4 - \frac{\sin 1}{(1-\cos 1)^2}\right). \qquad \blacktriangle$$

Замечание. В примерах 1, 2 нельзя использовать при вычислении интегралов вычет в бесконечности (см. способ 2 примера 3), так как в этих примерах точка ∞ является неизолированной особой точкой для подынтегральных функций.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z+i|=2} \frac{z^2}{z^2-9} \sin\frac{1}{z}\, dz.$$

$\triangle$ У подынтегральной функции $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2-9}\sin\dfrac{1}{z}$ всего четыре особые точки: $z_0 = 0$, $z_1 = 3$, $z_2 = -3$, $z_3 = \infty$. В соответствии с этим интеграл I можно вычислить двумя способами.

1 способ.

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z).$$

Точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой для $f(z)$. Чтобы найти вычет в точке z_0, вычислим коэффициент c_{-1} ряда Лорана в окрестности $z_0 = 0$. Так как

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\cdot z^3} + \frac{1}{5!\cdot z^5} - \frac{1}{7!\cdot z^7} + \ldots;$$

$$\frac{z^2}{z^2-9} = -\frac{z^2}{9}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z^2}{9}} = -\frac{z^2}{9}\left(1 + \frac{z^2}{9} + \frac{z^4}{9^2} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{z^2}{9} - \frac{z^4}{9^2} - \frac{z^6}{9^3} - \ldots,$$

то, перемножив полученные ряды, находим

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\cdot z^3} + \frac{1}{5!\cdot z^5} - \frac{1}{7!\cdot z^7} + \ldots\right)\cdot\left(-\frac{z^2}{9} - \frac{z^4}{9^2} - \frac{z^6}{9^3} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{3!\cdot 9} - \frac{1}{5!\cdot 9^2} + \frac{1}{7!\cdot 9^3} - \ldots\right) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq -1}}^{+\infty} c_k z^k,$$

откуда

$$c_{-1} = \frac{1}{3!\cdot 9} - \frac{1}{5!\cdot 9^2} + \frac{1}{7!\cdot 9^3} - \ldots = \frac{1}{3!\cdot 3^2} - \frac{1}{5!\cdot 3^4} + \frac{1}{7!\cdot 3^6} - \ldots.$$

Так как
$$\sin\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 3^3} + \frac{1}{5!\cdot 3^5} - \dots ,$$
то
$$c_{-1} = -\left(\sin\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\cdot 3 = 1 - 3\sin\frac{1}{3}\,.$$

Следовательно, $I = 2\pi i\cdot c_{-1} = 2\pi i(1 - 3\sin\frac{1}{3})$.

2 способ. По теореме о вычетах для области $D = \{z\colon |z+i| > 2\}$ имеем:
$$I = -2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=3} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-3} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right).$$

Точки ± 3 являются полюсами первого порядка для функции $f(z)$ в области D, найдем вычеты функции в этих точках:
$$\operatorname*{res}_{z=\pm 3} f(z) = \left.\frac{z^2\sin\frac{1}{z}}{(z^2-9)'}\right|_{z=\pm 3} = \left.\frac{z^2\sin\frac{1}{z}}{2z}\right|_{z=\pm 3} = \pm\frac{3}{2}\sin\left(\pm\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\sin\frac{1}{3}\,.$$

Точка ∞ является устранимым нулем первого порядка функции $f(z)$, причем $f(z) \sim \dfrac{1}{z}$ при $z \to \infty$, откуда $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

Следовательно,
$$I = -2\pi i\left(\frac{3}{2}\sin\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\sin\frac{1}{3} - 1\right) = 2\pi i\left(1 - 3\sin\frac{1}{3}\right). \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Вычислить интеграл
$$I = \oint\limits_{|z|=7} \frac{1-\operatorname{ch} z}{z^3 + 4\pi^2 z}\, dz.$$

$\triangle$ Найдем все особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение
$$z(z^2 + 4\pi^2) = 0,$$
откуда $z_0 = 0$, $z_1 = 2\pi i$, $z_2 = -2\pi i$.

Точки $\pm 2\pi i$ являются нулями числителя первого порядка ($1 - \operatorname{ch}(\pm 2\pi i) = 0$, $-\operatorname{sh}(\pm 2\pi i) \neq 0$), а также нулями знаменателя первого порядка. Поэтому эти точки являются устранимыми для $f(z)$. Значит, $\operatorname*{res}_{z=\pm 2\pi i} f(z) = 0$.

Точка $z_0 = 0$ является нулем числителя второго порядка ($1-\operatorname{ch} 0 = 0$, $-\operatorname{sh} 0 = 0$, $\ -\operatorname{ch} 0 \neq 0$) и нулем знаменателя первого порядка. Поэтому эта точка также является устранимой и $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$. В итоге по теореме о вычетах для круга $\{z\colon |z| < 7\}$ получаем:

$$I = 2\pi i\Big(\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=2\pi i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-2\pi i} f(z)\Big) = 0. \qquad \blacktriangle$$

Замечание. Вычисление интеграла в примере 4 вторым способом по теореме о вычетах для внешности круга было возможно, но более сложно, чем вычисление первым способом.

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z|=4} \frac{z^4}{1 - z^8}\, dz.$$

$\triangle$ Найдем все конечные особые точки подынтегральной функции $f(z)$. Это корни уравнения $z^8 = 1$ (восемь полюсов первого порядка на окружности $\{z\colon |z| = 1\}$).

Поскольку вне круга $\{z\colon |z| < 4\}$ находится только одна особая точка $z_0 = \infty$, то в данном примере удобнее вычислить интеграл с помощью вычета функции $f(z)$ в точке $z = \infty$.

Заметим, что $f(z)$ — четная функция и ее ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ содержит только четные степени z. Поэтому коэффициент этого ряда при $\dfrac{1}{z}$ равен нулю и $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Следовательно, $I = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. $\blacktriangle$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z} - e^{1/z}}\,.$$

$\triangle$ Найдем все конечные особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение $e^{2/z} = e^{1/z}$ или $e^{1/z} = 1$, откуда $\dfrac{1}{z} = 2\pi i k$, $\ k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, т. е.

$$z_k = \frac{1}{2\pi i k}\,, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0.$$

Кроме того, особой является точка $z_0 = 0$ — предельная точка полюсов z_k.

Следовательно, теорему о вычетах можно использовать только для области $D = \{z\colon |z| > 1\}$, в которой лежит лишь одна особая точка $\widetilde{z} = \infty$. Учитывая, что

$$I = -\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz,$$

получаем $I = -2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$.

Для данной функции $f(z)$ точка $z = \infty$ — полюс первого порядка и поэтому ее ряд Лорана в окрестности ∞ имеет вид

$$f(z) = Az + B + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots .$$

Пусть $\varphi(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, тогда

$$\varphi(z) = \frac{A}{z} + B + c_{-1}z + \ldots .$$

Для нахождения c_{-1} нужно найти коэффициент при z ряда Лорана функции $\varphi(z)$ в окрестности точки $z = 0$. В данном примере

$$\varphi(z) = \frac{e^{-z}}{e^z - 1} = \frac{1}{z}\left(1 - z + \frac{z^2}{2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{z}\left(1 - z + \frac{z^2}{2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + \ldots\right).$$

Нужно найти коэффициент при z^2 в произведении выражений в скобках. Он равен $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{12}$.

Итак, $c_{-1} = \dfrac{13}{12}$ и $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -\dfrac{13}{12}$.

Тогда

$$I = -2\pi i\left(-\frac{13}{12}\right) = \frac{13\pi i}{6}\,. \qquad \blacktriangle$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin\varphi}\,, \quad a > 1.$$

$\triangle$ Пусть $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0;\ 2\pi]$, тогда

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$$dz = ie^{i\varphi}d\varphi = iz\,d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}\,.$$

Интеграл I сводится к интегралу по замкнутому контуру $\{z\colon |z|=1\}$:

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 2iaz - 1}\,.$$

Найдем все особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение

$$z^2 + 2iaz - 1 = 0.$$

Так как $D = -4a^2 + 4 = 4(1 - a^2)$, то

$$z_{1,2} = \frac{-2ia \pm 2i\sqrt{a^2-1}}{2} = -i(a \mp \sqrt{a^2-1}).$$

Внутри круга $\{z\colon |z| < 1\}$ лежит только одна особая точка

$$z_1 = i(\sqrt{a^2-1} - a).$$

Точка z_1 — полюс первого порядка для $f(z)$. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left.\frac{2}{(z^2+2iaz-1)'}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{2}{2z+2ai}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}\,,$$

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,. \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Вычислить интегралы от рациональных функций:

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z}$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^2}$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$; 4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+z+1}$;

5) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^4}{z^2+z-2}\,dz$; 6) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{dz}{z^2(z^2-7z+12)}$.

2. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z\cos\frac{\pi}{z}}{z+2i}\,dz$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\,dz$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{z^3e^{1/z}}{1-z^2}\,dz$; 4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} z^2\sin\frac{1}{1-z}\,dz$;

5) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{4i+3z}\cos\frac{5i}{6z+3i}\,dz$; 6) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{3+iz}\,e^{4i/(z-i)}\,dz$;

7) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3/2} \frac{z\operatorname{tg} z}{(z^2-1)^2}\,dz$; 8) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5/2} \frac{z^2}{z-3}\sin\frac{z}{z-2}\,dz$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z}{z^2+9}\operatorname{ch}\frac{z}{z-2}\,dz$; 10) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=6} \frac{z^2}{e^{iz}+i}\,dz$;

11) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(1-e^{2z})}$; 12) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1}\,e^{1/(z-1)}\,dz$;

13) $\displaystyle\oint\limits_{\left|z+\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{6}} \frac{3z+1}{1-\sin\dfrac{\pi}{2z}}\,dz$; 14) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{z\,dz}{e^{1/z}+e^{1/2z}}$;

15) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{z^5}}{z(1+z^5)}\,dz$; 16) $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}(1-i)\right|=\pi} \frac{z\,dz}{\cos z-\operatorname{ch} z}$;

17) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z-i)\sin\dfrac{1}{iz}}{(z-3i)^2}\,dz$; 18) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z+1)\cos\dfrac{i}{z}}{(2i-z)^2}\,dz$;

19) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z+\dfrac{2}{\pi}}{\left(2\sin\dfrac{1}{3z}-1\right)}\,dz$; 20) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=3/2} \frac{2(z+3i)\operatorname{ch}\dfrac{1}{2z}}{z^4+10z^2+9}\,dz$;

21) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z-\dfrac{1}{\ln 2}}{e^{1/z}-2}\,dz$; 22) $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=3} \frac{2z-i\ln 2}{\operatorname{tg} z-\dfrac{i}{3}}\,dz$;

23) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1-i|=2} \frac{z+i}{(z-i)\operatorname{sh}\dfrac{1}{2z}}\,dz$; 24) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z\,dz}{(\pi-3z)(1+\cos 3z)}$.

3. Сделав соответствующую замену переменной, свести данный интеграл к интегралу по замкнутому контуру в $\mathbb{C}$ и вычислить его:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ $(a>1)$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$ $(a>b>0)$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}$; 4) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi$, $n\in\mathbb{Z}$.

В задачах 4–6 предполагается, что при движении по границе Γ области D в направлении интегрирования сама область D остается слева.

4. Доказать, что интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\,dz,$$

взятый по границе Γ полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z>0\}$, равен сумме вычетов подынтегральной функции в этой полуплоскости, и найти его значение.

Указание. Применить теорему о вычетах к интегралу, взятому по границе полукруга $\{z\colon\ \mathrm{Im}\, z > 0,\ |z| < R\}$, а затем перейти к пределу при $R \to \infty$.

5. Убедиться в применимости теоремы о вычетах к следующим интегралам, взятым по границам Γ бесконечных областей D, и вычислить эти интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{ze^{-z}}{z^2 - 1}\, dz \quad (D = \{z\colon\ \mathrm{Re}\, z > 0\})$;

2) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{z}}{\mathrm{sh}\, 2z}\, dz \quad \left(D = \left\{z\colon\ -\frac{\pi}{4} < \mathrm{Im}\, z < \frac{\pi}{4}\right\}\right)$;

3) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{z^3}{(z-1)^2}\, e^{-z^3}\, dz \quad \left(D = \left\{z\colon\ -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6}\right\}\right)$.

6. Убедиться, что к интегралам, взятым по границам Γ указанных областей D теорема о вычетах неприменима:

1) $\displaystyle I = \int\limits_{\Gamma} e^{-z^2}\, dz \quad (D = \{z\colon\ \mathrm{Im}\, z > 0\})$;

2) $\displaystyle I = \int\limits_{\Gamma} \frac{\sin z}{1 + z^2}\, dz \quad (D = \{z\colon\ \mathrm{Im}\, z > 0\})$.

7. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в замыкании $\overline{D}$ конечной области D, причем функция $f(z)$ имеет в области D нули $a_1, \ldots, a_n$ (каждый нуль пишется столько раз, каков его порядок) и не имеет других нулей ни в области D, ни на ее границе Γ. Доказать, что

$$\oint\limits_{\Gamma} g(z)\, \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} g(a_k).$$

8. Пусть функция $f(z)$ задачи 7 имеет в области D еще и полюсы $b_1, \ldots, b_m$ (каждый полюс также пишется столько раз, каков его порядок). Доказать, что

$$\oint\limits_{\Gamma} g(z)\, \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} g(a_k) - 2\pi i \sum_{k=1}^{m} g(b_k).$$

9. Пусть функция $f(z)$ регулярна в замыкании $\overline{D}$ конечной области D с границей Γ, а точки $a_1, \ldots, a_n$ лежат в области D и попарно различны. Обозначим

$$P(z) = (z - a_1) \ldots (z - a_n)$$

и

$$\Phi(z) = -\frac{P(z)}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{P(\xi)}\, \frac{d\xi}{\xi - z} \qquad (z \notin \overline{D}).$$

Доказать, что функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость и представляет собой многочлен степени $n - 1$, удовлетворяющий условиям

$$\Phi(a_k) = f(a_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

(Многочлен $\Phi(z)$ называется интерполяционным многочленом Лагранжа.)

10. Доказать формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} e^{\frac{x}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

Ответы

1. 1) $2\pi i$; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) $-10\pi i$; 6) $\frac{7\pi i}{72}$.

2. 1) 4π; 2) $2i$; 3) $\pi i(e^{-1} - 3)$; 4) $-\frac{5}{3}\pi i$; 5) $\frac{2\pi}{3}(1 - \cos 1)$;
6) $2\pi(1 - e^2)$; 7) 0; 8) $2\pi i(10\cos 1 + 7\sin 1 - 9\sin 3)$;
9) $\pi i\left(2\operatorname{ch} 1 - \operatorname{ch}\frac{9+6i}{13}\right)$; 10) $5\pi^3 i$; 11) $\pi i\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 1} - 1\right)$;
12) $7\pi i$; 13) $\frac{16}{27}\frac{i}{\pi}$; 14) $\frac{i\pi}{4}$; 15) $2\pi i(1 - e^{-1})$; 16) $2\pi i(1 - e^{-1})$;
17) $2\pi i\left(\sin\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\cos\frac{1}{3}\right)$; 18) $2\pi i\left(1 - \cos\frac{1}{2} - \frac{2-i}{4}\sin\frac{1}{2}\right)$;
19) $2\pi i\left(\frac{8\sqrt{3}}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3}\right)$; 20) $\pi i\left(\frac{1}{2}\cos\frac{1}{6} - \cos\frac{1}{2}\right)$;
21) $2\pi i\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}\right)$; 22) $\frac{9}{2}\pi^2 i$; 23) $-\frac{49\pi i}{6}$; 24) $-\frac{\pi^2 i}{27}$.

3. 1) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; 2) $\frac{\pi(2a+b)}{a^{3/2}(a+b^{3/2})}$;
3) $\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$; 4) $I = 0$ при $n < 0$; $I = \frac{2\pi}{n!}$ при $n \geqslant 0$.

4. $-\frac{2\pi}{e}$. **5.** 1) $\frac{\pi i}{e}$; 2) π; 3) 0.

§ 15. Принцип аргумента. Теорема Руше

Справочные сведения

1. Принцип аргумента

Теорема. *Пусть D — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ, и пусть функция $f(z)$ регулярна в $\overline{D} = D \cup \Gamma$, за исключением конечного числа полюсов, принадлежащих области D, кроме того $f(z) \neq 0$ для любого*

$z \in \Gamma$. Тогда приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль кривой Γ удовлетворяет равенству

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = 2\pi(N - P),$$

где N и P соответственно число нулей и число полюсов функции $f(z)$ в области D с учетом их порядков.

Замечание 1. Определение понятия «приращение аргумента функции вдоль кривой» и его свойства см. в § 16.

Замечание 2. Регулярность в замыкании $\overline{D}$ области D предполагает, что функция $f(z)$ регулярна в некоторой области G, такой, что $\overline{D} \subset G$.

2. Из принципа аргумента следует

Теорема Руше. *Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ, а функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в $\overline{D}$, причем*

$$|f(z)| > |g(z)|$$

для всех $z \in \Gamma$. Тогда функция $f(z)$ и функция $h(z) = f(z) + g(z)$ имеют в D одинаковое число нулей с учетом их порядков.

3. Основная теорема алгебры. *Алгебраический многочлен*

$$P_n(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

степени $n \in \mathbb{N}$ с комплексными коэффициентами ($a_n \neq 0$) имеет в $\mathbb{C}$ ровно n нулей с учетом их порядков.

Примеры с решениями

Пример 1. Для многочлена $P_5(z) = z^5 + 5z + 1$ определить число нулей с учетом их порядков в следующих областях:

а) $D_1 = \{z\colon |z| < 1\}$;

б) $D_2 = \{z\colon 1 < |z| < 2\}$;

в) $D_3 = \{z\colon |z| > 2\}$.

$\triangle$ а) Положим

$$f_1(z) = 5z + 1, \quad g_1(z) = z^5.$$

Тогда, если $|z| = 1$, то

$$|g_1(z)| = 1, \quad |f_1(z)| = |5z + 1| > |5z| - 1 = 4,$$

$$\text{т. е.} \quad |f_1(z)| > |g_1(z)| \quad \text{при} \quad |z| = 1. \tag{1}$$

Тогда по теореме Руше, примененной к области D_1 и функциям f_1 и g_1, получаем, что $P_5(z) = f_1(z) + g_1(z)$ имеет в D_1 столько же нулей, сколько $f_1(z) = 5z + 1$, т. е. один.

б) Выберем $f_2(z) = z^5$, $g_2(z) = 5z + 1$. Тогда, если $|z| = 2$, то

$$|f_2(z)| = 32, \quad |g_2(z)| = |5z+1| \leqslant |5z| + 1 = 6,$$
$$\text{т. е.} \quad |f_2(z)| > |g_2(z)|.$$

Тогда по теореме Руше, примененной к области $\widetilde{D}_2 = \{z\colon |z| < 2\}$ и функциям f_2 и g_2, получаем, что $P_5(z) = f_2(z) + g_2(z)$ имеет в $\widetilde{D}_2$ столько же нулей, сколько $f_2(z) = z^5$, т. е. пять.

Но

$$\widetilde{D}_2 = D_2 \cup \Gamma \cup D_1, \quad \text{где} \quad \Gamma = \{z\colon |z| = 1\}.$$

В области D_1 (см. п. а)) функция $P_5(z)$ имеет один нуль. Если $|z| = 1$, то

$$|P_5(z)| = |f_1(z) + g_1(z)| > |f_1(z)| - |g_1(z)| > 0,$$

согласно (1), т. е. на окружности Γ у $P_5(z)$ нулей нет. Следовательно, в D_2 многочлен $P_5(z)$ имеет 4 нуля.

в) Согласно основной теореме алгебры $P_5(z)$ имеет в $\mathbb{C}$ пять нулей. Выше (п. б)) было показано, что все они лежат в $\widetilde{D}_2$. Следовательно, в области D_3 нулей нет. ▲

Пример 2. Определить число корней уравнения

$$z + \lambda - e^z = 0$$

в полуплоскости $D = \{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$, если $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$.

△ Для каждого $R > 0$ рассмотрим полукруг

$$D(R) = \{z\colon \operatorname{Re} z < 0, \ |z| < R\}.$$

Его граница $\Gamma(R)$ состоит из отрезка $I(R) = [-iR, iR]$ и полуокружности

$$C(R) = \left\{z\colon z = Re^{i\varphi}, \ \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Пусть $f(z) = z + \lambda$, $g(z) = -e^z$. Если $z \in I(R)$, то $z = iy$, где $-R \leqslant y \leqslant R$, следовательно

$$|f(iy)| = |\lambda + iy| = \sqrt{\lambda^2 + y^2} \geqslant \lambda > 1,$$
$$|g(iy)| = |e^{iy}| = 1,$$

откуда $|f(z)| > |g(z)|$ для $z \in I(R)$.

Если $z \in C(R)$, то $|z| = R$, поэтому

$$|f(z)| = |z + \lambda| \geqslant |z| - \lambda = R - \lambda.$$

Выберем $R > \lambda + 1$, тогда

$$|f(z)| > 1,$$
$$|g(z)| = |e^{x+iy}| = |e^x| < 1,$$

так как $x < 0$ для $z \in C(R)$. Таким образом,

$$|f(z)| > |g(z)|$$

для $z \in C(R)$ при $R > \lambda + 1$.

По теореме Руше для каждого $R > \lambda + 1$ в области $D(R)$ функция $h(z) = z + \lambda - e^z$ имеет столько же нулей, сколько функция $f(z) = z + \lambda$, т. е. ровно один нуль. Так как $D = \bigcup\limits_{R>0} D(R)$, то в области D функция $h(z)$ также имеет ровно один нуль.

Замечание. Единственный нуль z_0 функции $h(z)$ в D лежит на оси $\mathbb{R}$. Действительно, для $x \in \mathbb{R}$ функция $h(x) = x + \lambda - e^x$ непрерывна, причем

$$h(0) = \lambda - 1 > 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty.$$

Поэтому по теореме о промежуточном значении непрерывная функция $h(x)$ имеет хотя бы один нуль z_0 на интервале $(-\infty; 0)$, т. е. $z_0 \in (-\infty; 0)$. ▲

Задачи

1. Найти число корней уравнений в областях, указанных в скобках:

1) $z^4 - 3z + 1 = 0$ $(\{z\colon |z| < 1\})$;
2) $2z^4 - 5z + 2 = 0$ $(\{z\colon |z| < 1\})$;
3) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ $(\{z\colon |z| < 1\})$;
4) $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ $(\{z\colon |z| < 1\})$;
5) $z^3 - 12z + 2 = 0$ $(\{z\colon |z| < 2\})$;
6) $z^4 - 9z + 1 = 0$ $(\{z\colon |z| < 2\})$;
7) $z^6 - 6z + 10 = 0$ $(\{z\colon |z| > 1\})$;
8) $z^4 + z^3 - 4z + 1 = 0$ $(\{z\colon 1 < |z| < 2\})$;
9) $z^5 + z^2 + 3z + 1 = 0$ $(\{z\colon |z| < 1\})$;
10) $z^6 + 3z^4 + 2z^3 + 1 = 0$ $(\{z\colon |z| < 2\})$.

2. Доказать, что при любом комплексном значении a и при целом $n \geqslant 2$ уравнение $1 + z + az^n = 0$ имеет хотя бы один корень в круге $\{z\colon |z| \leqslant 2\}$.

Указание. Помимо теоремы Руше воспользоваться формулами Виета (при достаточно больших значениях $|a|$).

3. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение
$$ze^{\lambda - z} = 1$$
имеет в круге $\{z\colon |z| \leqslant 1\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

4. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение
$$z = \lambda - e^{-z}$$
имеет в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

5. Доказать, что уравнение
$$az^3 - z + b = e^{-z}(z+2)$$
при $a > 0$, $b > 0$ не имеет корней в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$.

6. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{z\colon |z| < 1\}$. Доказать, что существует такое число $\rho > 0$, что для всех w из круга $\{w\colon |w| < \rho\}$ уравнение $z = wf(z)$ имеет в круге $\{z\colon |z| < 1\}$ ровно один корень.

7. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{z\colon |z| < 1\}$ и $f(0) \neq 0$. Доказать, что существует такое число $\rho > 0$, что для всех w из кольца $\{w\colon 0 < |w| < \rho\}$ уравнение $z^m = wf(z)$ имеет в круге $\{z\colon |z| < 1\}$ ровно m различных корней.

8. Доказать, что уравнение $z \sin z = 1$ имеет только действительные корни.

Указание. Найти число действительных корней этого уравнения на отрезке
$$\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$$
и сравнить его с числом всех корней этого уравнения в круге $\left\{z\colon |z| < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}$.

9. Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} z = z$ имеет только действительные корни.

10. Определить число корней многочлена
$$P_5(z) = z^5 - 12z^2 + 14$$
в правой полуплоскости $D = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$.

11. В каких четвертях находятся корни уравнения $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$?

12. Доказать, что если функция $f(z)$ регулярна в области D и для каждой точки z из D найдется такое n, что $f^{(n)}(z) = 0$, то $f(z)$ — многочлен.

13. Пусть функции $f(z)$ и $F(z)$ регулярны в ограниченной области D и непрерывны вплоть до ее границы Γ, на которой функция $\operatorname{Im} \dfrac{f(z)}{F(z)}$ не обращается в нуль. Доказать, что число нулей в области D у функций $F(z)$ и $F(z) + f(z)$ одинаково.

14. Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области D, за исключением конечного числа полюсов, и непрерывна вплоть до ее границы Γ (за исключением тех же полюсов). Обозначим

$$M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

Доказать, что для каждого комплексного значения a, удовлетворяющего условию $|a| > M$, число нулей функции $f(z) - a$ в области D равно числу ее полюсов в этой области.

15. Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области D, за исключением конечного числа полюсов, и непрерывна вплоть до ее границы (за исключением тех же полюсов). Доказать, что если функция $\operatorname{Im} f(z)$ не обращается в нуль на границе области D, то число нулей функции $f(z)$ в области D равно числу ее полюсов в этой области.

Ответы

1. 1) 1 корень; 2) 2 корня; 3) 4 корня; 4) 5 корней; 5) 1 корень; 6) 1 корень; 7) 6 корней; 8) 3 корня; 9) 1 корень; 10) 6 корней.

10. 2 корня.

11. В первой и четвертой четверти корней нет, во второй и третьей четверти два корня.

Глава 4
Многозначные аналитические функции

§ 16. Приращение аргумента функции вдоль кривой

Справочные сведения

1. Выделение непрерывно дифференцируемой ветви аргумента функции действительного переменного. Пусть на отрезке $[0,1]$ задана комплекснозначная функция $z(t)$, $t \in [0,1]$, такая, что $z(t) \neq 0$ при всех $t \in [0,1]$ и $z(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1]$; это обозначается так:

$$z(\cdot) \in C^1[0,1].$$

Пусть $\varphi_0 \in \operatorname{Arg} z(0)$. Тогда существует непрерывно дифференцируемая действительная функция $\varphi(t)$ на $[0,1]$, такая, что

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi(t) \in \operatorname{Arg} z(t) \quad \text{при всех} \quad t \in [0,1].$$

Эта функция единственна и вычисляется по формуле

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \operatorname{Im} \int\limits_0^t \frac{z'(\tau)}{z(\tau)}\, d\tau.$$

2. Приращение аргумента функции действительного переменного. *Приращением аргумента непрерывно дифференцируемой функции* $z(t)$ на отрезке $[0,1]$ (при условии $z(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$) называется число

$$\Delta_{[0,1]} \arg z(t) = \operatorname{Im} \int\limits_0^1 \frac{z'(\tau)}{z(\tau)}\, d\tau.$$

Приращением аргумента непрерывной функции $z(t)$ на отрезке $[0,1]$ (при условии $z(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$) называется число

$$\Delta_{[0,1]} \arg z(t) = \Delta_{[0,1]} \arg z_\varepsilon(t),$$

где $z_\varepsilon(\cdot)$ — любая гладкая ε-аппроксимация функции $z(\cdot)$ при достаточно малом значении $\varepsilon > 0$, причем такая, что

$$z(0) = z_\varepsilon(0), \quad z(1) = z_\varepsilon(1).$$

3. Приращение аргумента z вдоль кривой, не проходящей через точку $z = 0$. *Приращение аргумента z вдоль ориентированной непрерывной кривой* γ, заданной параметрически с помощью непрерывной функции $z(t)$, $t \in [0,1]$, такой, что $0 \notin \gamma$, называется число

$$\Delta_\gamma \arg z = \Delta_{[0,1]} \arg z(t),$$

4. Приращение аргумента функции вдоль кривой. Пусть в области $G \subset \mathbb{C}$ заданы регулярная функция $f(z)$ и ориентированная кусочно-гладкая кривая $\gamma \subset G$ такие, что $f(z) \neq 0$ при всех $z \in \gamma$. Пусть $\Gamma = f(\gamma)$ — образ кривой γ при отображении f. Тогда *приращением аргумента функции f вдоль кривой* γ называется число

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\Gamma \arg w = \Delta_{[0,1]} \arg w(t),$$

где $w(t) = f(z(t))$ при $t \in [0,1]$, а $z(t)$ есть некоторая кусочно-гладкая параметризация кривой γ. Определенное выше понятие не зависит от выбора параметризации кривой γ.

5. Логарифмическое свойство приращения аргумента функции вдоль кривой. Если функции f_1, f_2 и кривая γ удовлетворяют условиям приведенного выше определения, то справедливо равенство (называемое *логарифмическим свойством*)

$$\Delta_\gamma \arg\left(f_1(z) \cdot f_2(z)\right) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z). \tag{1}$$

Замечание. Геометрический смысл приведенных понятий достаточно очевиден. Так, например, геометрический смысл приращения аргумента функции $z\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ на отрезке $[0,1]$ означает угол поворота вектора z на плоскости $\mathbb{C}$ от начального состояния $z(0)$ в конечное состояние $z(1)$ при движении по кривой $z(t)$ (см. рис. 16.1).

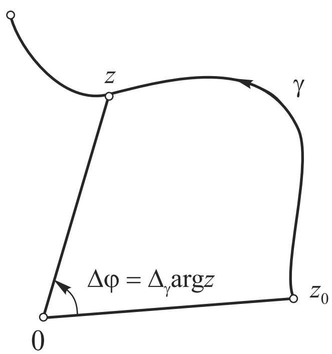

Рис. 16.1

6. Свойство устойчивости при непрерывной деформации. Пусть в области $G \subset \mathbb{C}$ даны две ориентированные кривые γ_a и γ_b. Пусть эти кривые можно дополнить до некоторого семейства ориентированных кривых $\{\gamma_\alpha\} \subset G$, $\alpha \in [a, b]$, которое допускает параметрическое задание одной функцией $z(t, \alpha)$, $t \in [0, 1]$, $\alpha \in [a, b]$, дифференцируемой по t и такой, что функции

$$z\colon [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C} \quad \text{и}$$
$$z'_t\colon [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}$$

непрерывны. Пусть $z(t, \alpha) \neq 0$ при любых $t \in [0, 1]$, $\alpha \in [a, b]$ и существует число $A \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$, такое, что справедливо равенство

$$z(1, \alpha) = A \cdot z(0, \alpha)$$

при всех $\alpha \in [a, b]$. Тогда функция $I(\alpha) = \Delta_{\gamma_\alpha} \arg z$ является постоянной, в частности справедливо равенство

$$\Delta_{\gamma_a} \arg z = \Delta_{\gamma_b} \arg z.$$

Примеры с решениями

Пример. Найти приращение аргумента функции $f(z) = z^3(z+1)$ вдоль кривой γ, заданной параметрически:

$$z = z(t) = \cos t + i \sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$\triangle$ По логарифмическому свойству (1) получаем, что

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = 3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(z+1).$$

Из геометрических соображений приращение $\Delta_\gamma \arg z$ равняется углу поворота вектора z, когда вектор z пробегает по кривой γ от начальной точки $z(0) = 1$ до конечной точки $z\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = i$, т. е. $\Delta_\gamma \arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

В свою очередь $\Delta_\gamma \arg(z+1)$ равняется углу поворота вектора $(z+1)$ при пробегании вектором z кривой γ, что очевидно совпадает с углом поворота вектора ζ (начало которого есть точка -1, а конец принадлежит кривой γ), который пробегает по кривой γ от начальной ее точки до конечной. Очевидно, что в нашем случае $\Delta_\gamma \arg(z+1) = \dfrac{\pi}{4}$ (см. рис. 16.2). В итоге получаем, что

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi. \qquad \blacktriangle$$

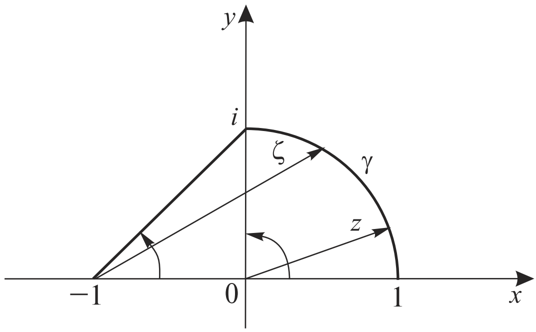

Рис. 16.2

Задачи

1. Найти приращение аргумента функции $z(\cdot) \in C^1[0,1]$ на отрезке $[0,1]$, заданной в виде $z(t) = x(t) + iy(t)$, где

$$x(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t\right) - 3, \quad y(t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\,t\right).$$

2. Найти приращение аргумента функции $z(\cdot) \in C^1[0,1]$ на отрезке $[0,1]$, заданной в виде $z(t) = x(t) + iy(t)$, где

$$x(t) = (2+t)\sin 4\pi t, \quad y(t) = (1+t)\cos 4\pi t + \frac{3}{2}\,.$$

3. Вычислить приращение аргумента функции z^2+1 вдоль ориентированной кривой γ, заданной в виде $z(t) = x(t) + iy(t)$, где

$$x(t) = 5\cos t, \quad y(t) = 2\sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

4. Вычислить приращение аргумента функции $\dfrac{1}{z^2+2z}$ вдоль ориентированной кривой γ, заданной в виде $z(t) = x(t) + iy(t)$, где

$$x(t) = 3\sin t, \quad y(t) = 2\cos t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

5. Вычислить приращение аргумента функции $\dfrac{z^2+1}{z^2-4}$ вдоль ориентированной кривой γ, заданной в виде $z(t) = x(t) + iy(t)$, где

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = 2\sin t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}\,, \frac{3}{2}\,\pi\right].$$

6. Вычислить приращение аргумента функции $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}$ вдоль ориентированной замкнутой кривой, задаваемой уравнением

$$|x|^{1/2} + |y|^{1/2} = 2^{1/2},$$

при однократном ее обходе против часовой стрелки.

7. Вычислить приращение аргумента функции $\dfrac{\operatorname{ch}^2 z}{z}$ вдоль ориентированной замкнутой кривой, задаваемой уравнением $|x| + |y| = 3$, при однократном ее обходе по часовой стрелке.

8. Доказать равенство
$$\Delta_\gamma \arg z = \Delta_\gamma \arg(z-1)$$
для любой простой кусочно-гладкой замкнутой кривой γ, содержащей в области, ограниченной кривой γ, отрезок $[0,1]$.

Ответы

1. $\frac{3}{4}\pi$; **2.** 2π; **3.** π; **4.** $-\frac{3}{4}\pi$; **5.** 2π; **6.** -4π; **7.** 6π.

§ 17. Выделение регулярных ветвей

Справочные сведения

1. Понятие ветви. Пусть каждой точке z области G расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ поставлено в соответствие множество $F(z)$ из $\mathbb{C}$. Данное соответствие $F\colon G \to 2^{\mathbb{C}}$ называется *многозначной функцией.* Если существует непрерывная (или регулярная) функция $f\colon G \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию $f(z) \in F(z)\ \ \forall z \in G$, то говорят, что многозначная функция F допускает *выделение непрерывной* (*регулярной*) *ветви* в области G, а функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ называется *непрерывной* (*регулярной*) *ветвью* многозначной функции $F\colon G \to 2^{\mathbb{C}}$.

2. Примеры многозначных функций, определенных на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

1) $\operatorname{Arg} z = \{\varphi_0 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где $z = x + iy$ и φ_0 — любое решение системы
$$\cos\varphi_0 = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{y}{|z|};$$

2) $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$;

3) $\{\sqrt[n]{z}\} = \sqrt[n]{z}e^{(i/n)\operatorname{Arg} z}$;

4) $\{z^a\} = e^{a\operatorname{Ln} z}$, где $a \in \mathbb{C}$.

Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G и $f(z) \neq 0\ \ \forall z \in G$. Тогда получаем многозначные функции на G:

5) $\operatorname{Ln} f(z) = \ln|f(z)| + i\operatorname{Arg} f(z)$;

6) $\{\sqrt[n]{f(z)}\} = \sqrt[n]{|f(z)|}e^{i/n\operatorname{Arg} f(z)}$;

7) $\{(f(z))^a\} = e^{a\operatorname{Ln} f(z)}$, где $a \in \mathbb{C}$.

3. Необходимые и достаточные условия существования ветвей. Если функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна и $f(z) \neq 0$, $\forall z \in G$, то для существования в области G

1) регулярных ветвей многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы для любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\mathring{\gamma} \subset G$ выполнялось условие $\Delta_{\mathring{\gamma}} \arg f(z) = 0$;
2) регулярных ветвей многозначной функции $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\mathring{\gamma} \subset G$ существовало целое число $k(\mathring{\gamma})$ такое, что $\Delta_{\mathring{\gamma}} \arg f(z) = 2\pi n \cdot k(\mathring{\gamma})$.

Задачи

1. Доказать, что существует единственная функция $h(z)$, непрерывная на всей комплексной плоскости с разрезом по положительной части действительной оси и удовлетворяющая условиям:

$$h(z) \in \operatorname{Ln} z, \quad h(-1) = \pi i.$$

Доказать, что эта функция регулярна в области ее определения.

2. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G и $f(z) \neq 0$ $\forall z \in G$. Пусть функция $h\colon G \to \mathbb{C}$ есть непрерывная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$. Доказать, что h является регулярной функцией.

3. Существуют ли регулярные ветви в области $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ у многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2 + z)$?

4. Существуют ли регулярные ветви в области $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ у многозначной функции $\{\sqrt{z^2 - z}\}$?

5. Существуют ли регулярные ветви в области $G = \{z\colon |z| > 2\}$ у многозначной функции $\{\sqrt{z-1}\}$?

6. Существуют ли регулярные ветви в области $G = \{z\colon |z| > 2\}$ у многозначной функции $\operatorname{Ln} \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$?

7. Существуют ли регулярные ветви в области $G = \mathbb{C}\backslash[-i,i]$ у многозначной функции $\{\sqrt[3]{1+z^2}\}$?

8. Существуют ли регулярные ветви в области $G = \mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$ у многозначной функции $\{z^z\}$?

9. Доказать, что следующие многозначные функции допускают выделение регулярных ветвей в областях G, указанных в скобках:

1) $\bigl\{\sqrt{1-z^2}\operatorname{Ln} z\bigr\}$, $G = \mathbb{C}\backslash\bigl([-\infty,-1] \cup [0,+\infty)\bigr)$;
2) $\bigl\{(z^2+1)^z\bigr\}$, $G = \mathbb{C}\backslash\bigl((-i\infty,-i) \cup [i,+i\infty)\bigr)$;
3) $\operatorname{Ln}(z^2-1)\operatorname{Ln} z$, $G = \mathbb{C}\backslash[-1,+\infty)$;
4) $\bigl\{(z^2-1)^{\sqrt{z}}\bigr\}$, $G = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$.

10. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G и удовлетворяет там условию $\operatorname{Re} f(z) > 0$. Доказать, что следующие многозначные функции допускают выделение регулярных ветвей в области G:

1) $\{\sqrt[3]{f(z)+i}\}$; 2) $\operatorname{Ln}\dfrac{1+if(z)}{1-if(z)}$.

11. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G и не принимает там значений, лежащих на луче $[a,+\infty]$, где $a \in \mathbb{R}$. Доказать, что многозначная функция $\{\sqrt{a-f(z)}\}$ допускает выделение регулярных ветвей в области G, причем существует единственная ветвь $\varphi(z)$, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re}\varphi(z) > 0$ $(z \in G)$.

12. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G и не принимает значений, лежащих на кривой γ, идущей из точки $z=0$ в точку $z=\infty$, оставаясь в левой полуплоскости. Доказать, что многозначная функция $\operatorname{Ln} f(z)$ допускает выделение регулярных ветвей в области G, и существует такая ветвь $\varphi(z)$, для которой справедливо неравенство

$$|\operatorname{Im}\varphi(z)| < \frac{3\pi}{2} \quad (z \in G).$$

13. Доказать, что следующие многозначные функции допускают выделение регулярных ветвей в областях G, указываемых в скобках:

1) $\{\operatorname{Ln}(z+\sqrt{1+z^2}\,)\}$ $\big(G=\{z\colon \operatorname{Re} z>0\}\big)$;

2) $\{\sqrt{z+\sqrt{z}}\,\}$ $\big(G=\{z\colon \operatorname{Im} z>0\}\big)$;

3) $\{\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2}\,)\}$ $\big(G=\mathbb{C}\backslash\big((-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\big)\big)$;

4) $\{\operatorname{Ln}(\sqrt{z}+\sqrt{z-1}\,)\}$ $\big(G=\mathbb{C}\backslash\big((-\infty,0]\cup[1,+\infty)\big)\big)$;

5) $\{\sqrt{\operatorname{Ln} z}\}$ $(G=\{z\colon \operatorname{Im} z>0\})$.

14. Доказать, что многозначная функция

$$\{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)\cdots(z-a_n)(z-b_n)}\,\}$$

допускает выделение регулярных ветвей во всей комплексной плоскости с разрезами по непересекающимся прямолинейным отрезкам $[a_k,b_k]$, $k=1,2,\ldots,n$.

15. Доказать, что следующие многозначные функции допускают выделение регулярных ветвей в указываемых областях:

1) $\operatorname{Ln}\dfrac{z^2+2z+2}{z^2-2z+2}$ (плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по отрезкам, изображенным на рис. 17.1);

2) $\{\sqrt[4]{1-z^4}\,\}$ (плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по отрезкам, изображенным на рис. 17.2);

3) $\{\sqrt[3]{4z+z^5}\,\}$ (плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по отрезкам, изображенным на рис. 17.3);

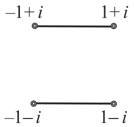

Рис. 17.1

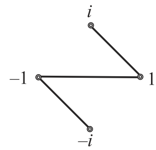

Рис. 17.2

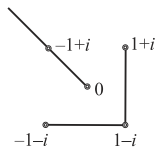

Рис. 17.3

4) $\left\{\sqrt{\sin z}\right\}$ $\bigl(G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \notin [2\pi k; \pi(2k+1)],\ \forall k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}\bigr)$;

5) $\{\operatorname{Ln}\operatorname{tg} z\}$ $\left(G = \left\{z \in \mathbb{C}\colon z \notin \left[\pi k; \pi k + \frac{\pi}{2}\right],\ \forall k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}\right)$;

6) $\left\{\sqrt{z(1-z)}\operatorname{Ln}\frac{z}{1-z}\right\}$ $\bigl(G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \notin [0,1]\}\bigr)$.

§ 18. Вычисление значений регулярных ветвей многозначных функций. Ряды Лорана для регулярных ветвей.

Справочные сведения

Если многозначная функция допускает выделение регулярной ветви в области G, то таких ветвей, как правило, больше одной. Для выделения из всего множества регулярных ветвей одной определенной ветви нужно еще какое-либо дополнительное условие. Обычно таким условием является задание значения ветви в некоторой точке области G.

1. Значения на одной регулярной ветви. Допустим, что в области G задана регулярная функция $f(z)$, такая, что $f(z) \neq 0$ при любом $z \in G$. Пусть существуют в области G регулярные ветви $h(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$ и $g(z) \in \left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$ (условия существования таких ветвей содержатся в справочных сведениях предыдущего параграфа). Тогда для любых точек a, $b \in G$ справедливы выражения

$$h(b) = h(a) + \ln\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right| + i\Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z), \tag{1}$$

$$g(b) = g(a) \cdot \sqrt[n]{\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|}\, e^{(i/n)\Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z)}, \tag{2}$$

где γ_{ab} — произвольная, лежащая в области G кусочно-гладкая ориентированная кривая с началом в точке a и концом в точке b.

2. Производная регулярной ветви. Производные регулярных ветвей $h(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$ и $g(z) \in \left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$ в области G вычисляются по формулам

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad g'(z) = \frac{f'(z)}{n(g(z))^{n-1}}. \tag{3}$$

3. Ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей. В соответствии с общими свойствами регулярных функций регулярные ветви многозначных функций могут быть представлены в виде рядов Тейлора и Лорана.

Примеры с решениями

Пример 1. Пусть $h_k(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(1+z)$ в области $G = \{z\colon |z| < 1\}$, такая, что $h_k(0) = 2\pi ik$. Разложить функцию $h_k(z)$ в ряд Тейлора по степеням z в области G.

△ По формуле (3) получаем, что $h_k'(z) = \dfrac{1}{1+z}$. Отсюда легко вычислить и остальные производные:

$$h_k''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}, \quad \ldots, \quad h_k^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}.$$

Вычисляя коэффициенты c_n ряда Тейлора по формуле $c_n = \dfrac{h_k^{(n)}(0)}{n!}$, получаем искомый ряд

$$h_k(z) = h_k(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}, \quad |z| < 1. \tag{4}$$

▲

Пример 2. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, и $\varphi_k(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{(1+z)^a\}$ в области $G = \{z\colon |z| < 1\}$, такая, что

$$\varphi_k(0) = e^{2\pi aik}.$$

Разложить каждую функцию $\varphi_k(z)$ в ряд Тейлора по степеням z в области G.

△ По определению многозначной функции

$$\{(1+z)^a\} = e^{a\operatorname{Ln}(1+z)}$$

существует регулярная ветвь $h_k(z) \in \operatorname{Ln}(1+z)$ в области G, такая, что

$$\varphi_k(z) = e^{ah_k(z)}, \quad h_k(0) = 2\pi ik.$$

Дифференцируя сложную функцию, получаем

$$\varphi_k'(z) = \varphi_k(z)\,\frac{a}{1+z}\,, \quad \ldots, \quad \varphi_k^{(n)}(z) = \varphi_k(z)\,\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{(1+z)^n}\,.$$

Вычисляя коэффициенты c_n ряда Тейлора, получаем

$$\varphi_k(z) = \varphi_k(0)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} C_a^n z^n, \quad |z|<1, \tag{5}$$

где $C_a^n = \dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}$. ▲

Пример 3. Разложить в ряд Тейлора по степеням z регулярную ветвь $g(z)$ многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{1-z^2}\right\}$ в области $G = \{z\colon |z|<1\}$ с начальным значением $g(0) = e^{2\pi i/3}$.

△ По формуле (5) при $a = \dfrac{1}{3}$ и делая замену $\zeta = -z^2$, сразу получаем ответ:

$$g(z) = e^{2\pi i/3}\sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/3}^n(-1)^n z^{2n}, \quad |z|<1. \qquad ▲$$

Пример 4. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1-z}{1+z}$ в области $G = \mathbb{C}\backslash[-1,1]$, такая, что предельное значение

$$h(0+i0) = \lim_{\substack{y\to0\\ y>0}} h(iy) = 0.$$

Найти значения $h(0-i0)$, $h(i)$, $h(\infty)$. Разложить функцию $h(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности бесконечности и указать кольцо сходимости этого ряда.

△ Прежде всего отметим, что такая регулярная ветвь $h(z)$ существует и единственна в данной области G, так как выполнены все условия существования ветвей (см. справочные сведения из §§ 16 и 17). В том числе для любой замкнутой ориентированной простой кусочно-гладкой кривой $\gamma\subset G$ справедливо равенство

$$\Delta_\gamma \arg\frac{1-z}{1+z} = \Delta_\gamma \arg(z-1) - \Delta_\gamma \arg(z+1) = 0.$$

По формуле (1) вычислим значения $h(0-i0)$, $h(i)$, $h(\infty)$. Выберем кривую $\gamma_1 = \{z\colon |z+1| = 1\}$ с началом в точке $0+i0$ (на верхнем краю границы $[-1,1]$) и концом в точке $0-i0$ (на нижнем краю границы $[-1,1]$). Тогда

$$h(0-i0) = h(0+i0) + \ln\left|\frac{1}{1}\right| + i\big(\Delta_{\gamma_1}\arg(z-1) - \Delta_{\gamma_1}\arg(z+1)\big) =$$
$$= i(0-2\pi) = -2\pi i.$$

Выбирая отрезок мнимой оси $\gamma_2 = [0,i]$ с началом в точке $0+i0$ и концом в точке i, получаем

$$h(i) = h(0+i0) + \ln\left|\frac{1-i}{1+i}\right| + i\big(\Delta_{\gamma_2}\arg(z-1) - \Delta_{\gamma_2}\arg(z+1)\big) =$$
$$= i\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -i\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Для вычисления $h(\infty)$ выберем произвольное действительное число $x>1$ и вычислим вначале значение $h(x)$. Для этого возьмем соответствующую кривую γ_3 с началом в точке $0+i0$ и концом в точке x. По формуле (1) получаем

$$h(x) = h(0+i0) + \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + i\big(\Delta_{\gamma_3}\arg(z-1) - \Delta_{\gamma_3}\arg(z+1)\big) =$$
$$= \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + i(-\pi+0),$$

откуда $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = h(+\infty) = -i\pi$. Так как ∞ является изолированной особой точкой регулярной функции $h(z)$, то из равенства заключаем, что ∞ есть устранимая особая точка и $h(\infty) = -i\pi$.

Для разложения функции $h(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности представим в G многозначную функцию в виде

$$\operatorname{Ln}\frac{1-z}{1+z} = \operatorname{Ln}(-1) + \operatorname{Ln}\left(1-\frac{1}{z}\right) - \operatorname{Ln}\left(1+\frac{1}{z}\right) =$$
$$= \operatorname{Ln}(-1) + h_1(z) - h_2(z). \tag{6}$$

В последнем выражении многозначность содержится в первом слагаемом, а функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$ однозначны, причем $h_1(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$ в данной области G и такая, что $h_1(\infty)=0$, а $h_2(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$ в области G, такая, что $h_2(\infty)=0$. Делая замену $\zeta = \dfrac{1}{z}$, легко убедиться, что такие регулярные ветви в области G существуют, а в силу примера 1 получаем выражения для их рядов Лорана (см. (4)):

$$h_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{z}\right)^n, \quad |z| > 1;$$

$$h_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{z}\right)^n, \quad |z| > 1.$$

Из определения функции $h(z)$ как ветви многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{1-z}{1+z}$ и из выражения (6) получаем

$$h(z) - h_1(z) + h_2(z) \in \operatorname{Ln}(-1),$$

$$\text{т. е.}\quad h(z) - h_1(z) + h_2(z) = i(\pi + 2\pi k(z)),$$

где $k(z)$ принимает целочисленные значения. Так как в равенстве слева стоят непрерывные функции, то $k(z) = k_0 = \mathrm{const}$. Переходя к пределу при $z \to \infty$, получаем $h(\infty) = i(\pi + 2\pi k_0)$, т. е. $h(z) = h_1(z) - h_2(z) + h(\infty)$ при $|z| > 1$. Отсюда получаем ряд Лорана (в силу его единственности) функции h вида

$$h(z) = -i\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[(-1)^n - 1]}{n} \cdot \frac{1}{z^n} = -i\pi - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{2k+1}\, z^{-2k-1}$$

в кольце сходимости $|z| > 1$. ▲

Задачи

1. Пусть G — односвязная область, не содержащая точек $z = 0$ и $z = \infty$, но содержащая точку $z = 1$. Выяснить, сколько различных регулярных ветвей $\varphi(z)$ в области G, удовлетворяющих указываемому условию, допускают следующие многозначные функции:

1) $(z-1)\operatorname{Ln} z,\ \varphi(1) = 0$; 2) $\{z^z\},\ \varphi(1) = 1$;

3) $\{z^{iz}\},\ \varphi(1) = 1$; 4) $\{z^{1/2z}\},\ \varphi(1) = 1$;

5) $\{z^{1/4z}\},\ \varphi(1) = 1$; 6) $\{z^z\},\ \varphi'(1) = 1$.

2. Пусть $\varphi(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z+i)$ в области G, удовлетворяющая условию $\varphi(1-i) = 0$. Найти значение $\varphi(-1-i)$ в случаях, когда область G:

1) вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $[-i\infty,\ -i]$;

2) вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $[-i,\ +i\infty]$.

3. Пусть G — вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[-\infty,\ -1]$ и $[1,\ +\infty]$, а $\varphi(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(1-z^2)$ в области G, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 0$. Найти:

1) $\varphi(i)$; 2) $\varphi(-i)$; 3) $\varphi\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $\varphi\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$.

4. Пусть G — вся расширенная комплексная плоскость с разрезом по отрезку $[-1,\ 1]$. Через $\varphi_1(z)$ обозначим регулярную ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{\dfrac{1+z}{1-z}}\right\}$ в области G, удовлетворяющую условию $\varphi_1(+i0)=1$, а через $\varphi_2(z)$ — регулярную ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$ в области G, удовлетворяющую условию $\varphi_2(-i0)=0$. Найти величины:

1) $\varphi_1(-i0)$; 2) $\varphi_1(-i)$; 3) $\varphi_2(+i0)$; 4) $\varphi_2(i)$.

5. Пусть G — вся расширенная комплексная плоскость с разрезом по прямолинейному отрезку $[-i,\ i]$, а $\varphi(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$ в области G, удовлетворяющая условию $\varphi(1)=\pi i/2$. Найти значения:

1) $\varphi(-0)$; 2) $\varphi(-1)$; 3) $\varphi(-\sqrt{3})$; 4) $\varphi(\infty)$.

6. Пусть G — вся комплексная плоскость с разрезами по отрезкам $[-2,\ -1]$ и $[1,\ 2]$, а $\varphi(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}\right\}$ в области G, положительная на интервале $(-1,\ 1)$. Найти значения:

1) $\varphi(3)$; 2) $\varphi(-3)$; 3) $\varphi(i)$; 4) $\varphi(-i)$.

7. Пусть G — вся комплексная плоскость с разрезами по отрезкам $[-1, i]$ и $[-i, 1]$, а $\varphi(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{1-z^4}\right\}$, положительная на интервале $(-1,\ 1)$. Найти значения:

1) $\varphi\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$; 2) $\varphi\left(-\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$; 3) $\varphi\left(i\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$; 4) $\varphi\left(-i\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$.

8. Пусть a и b — две различные конечные точки комплексной плоскости, а γ — некоторая простая непрерывная кривая, идущая из точки a в точку b. Через G обозначим всю комплексную плоскость с разрезом по кривой γ, а через $\varphi(z)$ — произвольную регулярную ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{z-a}{b-z}$ в области G. Доказать, что для каждой точки z_0 кривой γ, отличной от точек a и b, имеет место равенство $\varphi\left(z_0^+\right)-\varphi\left(z_0^-\right)=2\pi i$, где символ $\varphi\left(z_0^\pm\right)$ означает предел функции $\varphi(z)$ при стремлении точки z к точке z_0 справа (слева для знака «$-$») от кривой γ.

9. Пусть $\varphi(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{1-z^2}\right\}$ в области G, удовлетворяющая условию $\varphi(0)=1$. Найти значение $\varphi(-3)$ в случаях, когда область G:

1) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[1,\ +\infty]$ и $[-1,\ -1+i\infty]$;

2) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[1,\ 1-i\infty]$ и $[-1,\ -1+i\infty]$;

3) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[1,\ 1-i\infty]$ и $[-1,\ -1-i\infty]$.

10. Пусть $P(z)$ — многочлен. Доказать, что любая функция $f(z)$, регулярная во всей комплексной плоскости с разрезом по положительной части действительной оси, непрерывная вплоть до границы этой области и при всех действительных $x > 0$ удовлетворяющая условию

$$f(x+i0) - f(x-i0) = P(x),$$

имеет вид

$$f(z) = -\frac{P(z)}{2\pi i}\,h(z) + g(z),$$

где $g(z)$ — функция, регулярная во всей комплексной плоскости, а $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ в плоскости с разрезом по положительной части действительной оси.

Указание. Для доказательства регулярности функции $g(z)$ во всей комплексной плоскости воспользоваться теоремой Морера.

11. Найти общий вид функции $f(z)$, регулярной во всей комплексной плоскости с разрезом по положительной части действительной оси, непрерывной вплоть до границы этой области, за исключением точки $z = 0$, и удовлетворяющей одному из условий ($x > 0$):
1) $f(x+i0) - f(x-i0) = (1+x)^2 \ln x$;
2) $f(x+i0) - f(x-i0) = \ln^2 x$;
3) $f(x+i0) - f(x-i0) = \sin\sqrt{x}$;
4) $f(x+i0) - f(x-i0) = \dfrac{\sin(\alpha \ln x)}{x-1}$;
5) $f(x+i0) - f(x-i0) = \dfrac{x+1}{\ln^2 x + \pi^2}$;
6) $f(x+i0) - f(x-i0) = \sqrt{x}\ln x$;
7) $f(x+i0) - f(x-i0) = \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;
8) $f(x+i0) - f(x-i0) = \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{\ln^2 x + \pi^2}\,(x+1)$.

12. Пусть G — вся комплексная плоскость с разрезом по положительной части действительной оси, а $\varphi(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(1+\sqrt{z})$, удовлетворяющая условию $\varphi(-1) = \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi i}{4}$. Найти значение $\varphi(4 - i0)$.

13. Пусть G — вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[-i\infty, -i]$ и $[i, +i\infty]$, а регулярная функция $\varphi(z)$ определена условиями

$$\varphi(z) \in \operatorname{Ln}(z + \sqrt{1+z^2}), \quad \varphi(0) = 0 \quad (z \in G).$$

Найти значения:
1) $\varphi\left(\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\varphi\left(-\dfrac{i}{2}\right)$; 3) $\varphi\left(\dfrac{5i}{3} + 0\right)$.

14. Пусть $\varphi(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(\sqrt{z} + 2\sqrt{1-z})$, удовлетворяющая условию

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{2}\,.$$

Найти значение $\varphi(4)$ в случаях, когда область G:

1) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[-\infty, 0]$ и $[1, 1+i\infty]$;

2) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[-i\infty, 0]$ и $[1, 1-i\infty]$.

15. Пусть G — вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[-i\infty, 0]$ и $[1, 1+i\infty]$, а регулярная функция $\varphi(z)$ определена условиями

$$\varphi(z) \in \operatorname{Ln}\operatorname{Ln} z, \quad \varphi(e^2) = \ln 2 \quad (z \in G).$$

Найти значение $\varphi(-e^{\pi})$.

16. Пусть G — вся комплексная плоскость с разрезом, изображенным на рис. 18.1, а регулярная функция $\varphi(z)$ определена условиями

$$\varphi(z) \in \left\{\sqrt{\pi^2 + \operatorname{Ln}^2 z}\right\}, \quad \varphi(1) = \pi \quad (z \in G).$$

Найти значения:

1) $\varphi(i)$; 2) $\varphi(-i)$.

17. Пусть G — вся комплексная плоскость с разрезом, изображенным на рис. 18.2, а регулярная функция $\varphi(z)$ определена условиями

$$\varphi(z) \in \left\{\sqrt{1 + \sqrt{z+1}}\right\}, \quad \varphi(8) = 2 \quad (z \in G).$$

Найти значения:

1) $\varphi(-3/4)$; 2) $\varphi(-2)$.

18. Пусть G — вся комплексная плоскость с разрезом, изображенным на рис. 18.3, а регулярная функция $\varphi(z)$ определена условиями

$$\varphi(z) \in \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}), \quad \varphi(0) = \pi i \quad (z \in G).$$

Найти значения:

1) $\varphi(1/2)$; 2) $\varphi(-1/2)$; 3) $\varphi(4i/3)$.

19. Доказать, что многозначная функция $\left\{\sqrt[3]{1-z^2}\right\}$ не допускает выделения регулярной ветви в области $G = \{z\colon 1 < |z| < \infty\}$.

20. Выяснить, допускают ли приводимые ниже многозначные функции выделение регулярных ветвей в областях G, указываемых в скобках:

1) $\left\{\sqrt[3]{\dfrac{z+1}{z+i}}\right\}$ $(G = \{z\colon 1 < |z| < \infty\})$;

2) $\{2\operatorname{Ln}(z+1) - \operatorname{Ln}(z-i)\}$ $(G = \{z\colon 1 < |z| < \infty\})$;

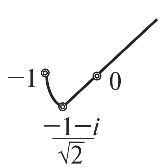

Рис. 18.1

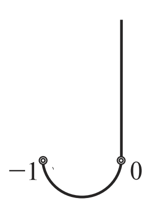

Рис. 18.2

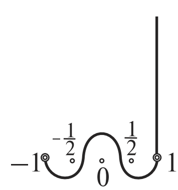

Рис. 18.3

3) $\left\{\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}\right\}$ $(G = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0,\ |z-3| > 2{,}5\})$;

4) $\left\{\sqrt[3]{1-z^5}\right\}$ $(G = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0,\ z \notin [1,\, e^{2\pi i/5}],\ z \notin [1,\, e^{-2\pi i/5}]\})$.

21. Выяснить, при каком соотношении между числами α_1 и α_2 многозначная функция

$$\alpha_1 \operatorname{Ln}(z-1) + \alpha_2 \operatorname{Ln} z$$

допускает выделение регулярной ветви в области $1 < |z| < \infty$.

22. Выяснить, при каком соотношении между числами α_1, α_2 и α_3 многозначная функция

$$\{(z-1)^{\alpha_1}(z+1)^{\alpha_2} z^{\alpha_3}\}$$

допускает выделение регулярной ветви в области $1 < |z| < \infty$.

23. Доказать, что в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси существует регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(1-\sqrt{z})$, удовлетворяющая условию $\varphi(2i) = -\pi i/2$.

24. Пусть $\varphi(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ в области, изображенной на рис. 18.4, удовлетворяющая условию $\varphi(1) = 0$. Найти $\varphi'(2)$. Разложить функцию $\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = -3$ по степеням $z+3$.

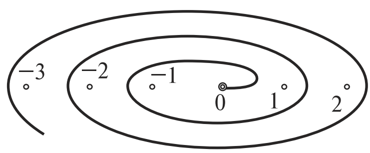

Рис. 18.4

25. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z}\right\}$ в области, изображенной на рис. 18.4, такая, что $g(-1) = -1$. Найти $g(-2)$, $g'(-3)$. Разложить $g(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 2$ по степеням $z-2$.

26. Пусть $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ — функции из задачи 4. Найти $\varphi_1'(-2)$, $\varphi_2'(2)$. Разложить функцию $\varphi_2(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 4$ по степеням $(z-4)$. Разложить $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ в ряды Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

27. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{z}\right\}$ в плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ такая, что $g(1+i0) = 1$. Найти $g(1-i0)$, $g(16-i0)$, $g(-16)$, $g'(-16)$, $g''(-16)$.

28. Опираясь на разложение регулярных ветвей многозначной функции $\{(1+z)^a\}$ в ряд Тейлора (см. пример 2 в справочных сведениях), доказать формулы для всех получаемых регулярных ветвей $g(z)$, $w(z)$, $h(z)$ в круге $|z| < 1$:

1) $\dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{g(0)} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}$, где $g(z) \in \left\{\sqrt{1-z^2}\right\}$;

2) $g(z) = g(0) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}\,z^{2n}$, где $g(z) \in \left\{\sqrt{1+z^2}\right\}$;

3) $w(z) = w(0) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\,z^{2n+1}$, где $w(z) \in \operatorname{Arcsin} z$;

4) $h(z) = h(0) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\dfrac{(2n)!z^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$, где $h(z) \in \operatorname{Ln}(z + g(z))$, $g(z) \in \left\{\sqrt{1+z^2}\right\}$, $g(0) = 1$.

29. Для всех регулярных ветвей $h(z)$, $w(z)$ многозначных функций в круге $|z| < 1$ доказать формулы:

1) $h(z) = h(0) + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, где $h(z) \in \operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$;

2) $w(z) = w(0) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, где $w(z) \in \operatorname{Arctg} z$;

3) $\dfrac{1-z}{z}\,h(z) = -1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n(n+1)}$, где $h(z) \in \operatorname{Ln}(1-z)$, $h(0) = 0$.

30. Найти разложение в ряд Тейлора по степеням z в окрестности точки $z = 0$ следующих функций, содержащих регулярные ветви $g(z)$, $h(z)$ многозначных функций:

1) $\operatorname{sh} g(z) \cdot \sin g(z)$, где $g(z) \in \left\{\sqrt{z}\right\}$, $g(0) = 0$;

2) $\dfrac{1}{2g(z)}\,h\left(\dfrac{1+g(z)}{1-g(z)}\right)$, где $g(z) \in \left\{\sqrt{z}\right\}$, $g(0) = 0$, $h(z) \in \operatorname{Ln} z$, $h(1) = 0$;

3) $\dfrac{1}{g(z)}$, где $g(z) \in \left\{\sqrt{1-z^3}\right\}$, $g(0) = 1$;

4) $h(z)$, где $h(z) \in \operatorname{Ln}(1 + z + z^2)$, $h(0) = 0$.

31. Используя тот факт, что регулярная функция $f(z) \in \left\{\dfrac{\operatorname{Arcsin} z}{\sqrt{1-z^2}}\right\}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-z^2)f'(z) - zf(z) = 1, \quad f(0) = 0,$$

доказать формулу

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,z^{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

32. Для регулярной ветви

$$f(z) \in \left\{\left(\frac{\operatorname{Arctg} z}{z}\right)^2\right\}, \quad f(0) = 1,$$

доказать формулу

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right)\frac{z^{2n}}{n+1}, \quad |z| < 1.$$

Указание. Подобрать для функции $f(z)$ подходящее дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет.

33. Используя биномиальный ряд, доказать справедливость формул разложения в ряд Лорана регулярных ветвей $f(z)$ многозначных функций:

1) $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \dfrac{a(a+1)\ldots(a-n-1)}{(-n)!}\, z^n$, где
$$f(z) \in \left\{ \left(\frac{z}{z-1} \right)^a \right\}, \quad f(\infty) = 1, \quad |z| > 1;$$

2) $f(z) = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\ldots\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{(-n)!}\, z^{2n-1}$, где
$$f(z) \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \right\}, \quad f(2) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |z| > 1;$$

3) $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha-n-1)}{(-n)!}\,(b-a)^{-n}\cdot(z-a)^n$, где
$$a \neq b, \quad f(z) \in \left\{ \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^\alpha \right\}, \quad f(\infty) = 1, \quad |z-a| > |b-a|;$$

4) $f(z) = \ln 2 + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n} \cdot \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\ldots\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{(-n)!}\, z^{2n}$, где
$$f(z) \in \operatorname{Ln}\frac{z+\sqrt{z^2+1}}{z}, \quad f(2) = \ln\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \quad |z| > 1.$$

34. Убедиться, что следующие многозначные функции допускают выделение регулярных ветвей в кольце G, и разложить все регулярные ветви в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце G (точка a и кольцо G указаны в скобках):

1) $\operatorname{Ln}\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z+1)(z+2)}$ $(a = 0,\ G = \{z\colon 1 < |z| < 2\})$;

2) $\operatorname{Ln}\dfrac{(z+1)^2}{z^2+4}$ $(a = 0,\ G = \{z\colon |z| > 2\})$;

3) $\operatorname{Ln}\dfrac{z(z+3)}{(z+2)(z-1)}$ $(a = -1,\ G = \{z\colon 1 < |z+1| < 2\})$;

4) $\operatorname{Ln}\dfrac{(z-1)^2}{(z+2)(z+3)}$ $(a = -1,\ G = \{z\colon |z+1| > 2\})$.

35. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z+9}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой $z = 9e^{it}$, $-\pi \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ и лучу $z = 9i + ti$, $t \geqslant 0$, такая, что $\arg g(10) = \dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить $g(-8)$, $g(-1)$, $g(-9+8i)$, $g'(0)$. Разложить $g(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 3$ по степеням $z-3$ и нарисовать наибольшую область, в которой этот ряд сходится к функции $g(z)$.

36. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(2-z)$ в плоскости с разрезом по кривой $z = 2e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{3}{2}\pi$, и лучу $z = -2i + t$, $t \geqslant 0$, такая, что $\operatorname{Im} h(-3) = 0$. Вычислить $h(-2-0)$, $h(-2+0)$, $h(2+i)$, $h'(0)$. Разложить функцию $h(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z=-1$. Найти радиус сходимости этого ряда. Нарисовать наибольшую область, в которой ряд сходится к функции $h(z)$.

37. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[3]{z(2-z)^2}\}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[0, 2]$, такая, что $g(1+i0) = 1$. Найти $g(1-i0)$, $g(-3)$, $g'(3)$. Разложить $g(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z=\infty$.

38. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{z+1}{3-z}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-1, 3]$, такая, что $h(1+i0) = 0$. Найти $h(1-i0)$, $g(-2)$, $g'(-3)$ Разложить $h(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z=5$ и в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z=\infty$. Найти области сходимости этих рядов.

39. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{z+i}{z+1}$ в плоскости с разрезом по линии

$$\left\{z\colon |z| = 1,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \pi\right\}$$

такая, что $h(0) = i\,\dfrac{\pi}{2}$. Разложить $h(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z=\infty$.

40. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции

$$\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i} - \frac{1}{z-2}$$

в плоскости с выколотой точкой $z=2$ и разрезом по полуокружности $\{z\colon |z| = 1,\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$, такая, что $h(0) = -i\pi + \dfrac{1}{2}$. Разложить $h(z)$ в ряд Лорана по степеням z в кольце $1 < |z| < 2$.

41. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции

$$\{\sqrt[3]{z^2(1-z)}\} + \frac{1}{z-3i}$$

в плоскости с выколотой точкой $z=3i$ и разрезом по отрезку $[0, 1]$, такая, что $g(-1) = \sqrt[3]{2} - \dfrac{1}{1+3i}$. Разложить $g(z)$ в ряд Лорана по степеням z в кольце $1 < |z| < 3$.

42. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2-z-6)$ в плоскости с разрезом по линиям $\{\operatorname{Re} z = -2,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$ и $\{\operatorname{Re} z = 3,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$, такая, что $h(4) = \ln 6$. Разложить $h(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z=1$ и найти радиус сходимости этого ряда.

43. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2-2z)$ в плоскости с разрезами по положительной части мнимой оси и по отрезку $[0, 2]$

действительной оси, выделяемая условием

$$\operatorname{Im} f(-1+\sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Вычислить $f(1+2i)$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 1+2i$. Найти радиус сходимости. Вычислить сумму ряда при $z=-1+\sqrt{3}i$.

44. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[3]{z^4+64}\}$ в плоскости с разрезами по лучам

$$\{z\colon z=2-2it;\ t \geqslant -1\}$$
$$\text{и}\quad \{z\colon z=-2-2it;\ t\geqslant -1\},$$

выделяемая условием $f(2\sqrt{2}) = 4\sqrt[3]{2}$. Вычислить $f(0)$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$. Найти радиус сходимости. Вычислить отношение суммы ряда к $f(z)$ при $z=-\dfrac{5}{2}$.

45. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z+iz^2)$ в плоскости с разрезами по положительной части действительной оси и по отрезку $[0,\, i]$ мнимой оси, выделяемая условием

$$\operatorname{Im} f(e^{-i\pi/6}) = 0.$$

Вычислить $f\left(1+\dfrac{i}{2}\right)$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 1+\dfrac{i}{2}$. Найти радиус сходимости. Вычислить сумму ряда при $z=e^{-i\pi/6}$.

46. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[6]{z^4+4}\}$ в плоскости с разрезами по лучам $\{z\colon z=i+t;\ t\geqslant -1\}$ и $\{z\colon z=-i+t;\ t\leqslant 1\}$, выделяемая условием $f(\sqrt{2}i) = -\sqrt{2}$. Вычислить $f(0)$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$. Найти радиус сходимости. Вычислить отношение суммы ряда к $f(z)$ при $z=-\dfrac{6}{5}\,i$.

47. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(1+z^2)$ в плоскости с разрезом по лучу мнимой оси $[-i,\, +i\infty)$, причем $\operatorname{Im} f\left(-\dfrac{1}{5}\right) = 0$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z=1$ и найти радиус сходимости. Вычислить сумму ряда при $z=-\dfrac{1}{5}$.

48. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt{9-z^2}\}$ в плоскости с разрезом по дуге окружности $\{z\colon |z-4i|=5,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$, причем $f(4i) = 5$. Разложить $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности $z=\infty$ и найти область сходимости. Вычислить сумму ряда при $z=4i$.

49. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(1-z^2)$ в плоскости с разрезом по лучу действительной оси $(-\infty,\, 1]$, причем $\operatorname{Im} f\left(\dfrac{i}{5}\right) = 0$.

Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = -i$. Найти радиус сходимости. Вычислить сумму ряда при $z = \dfrac{i}{5}$.

50. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{z^2+16}\,\right\}$ в плоскости с разрезом по дуге окружности $\{z\colon |z+3| = 5,\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$, причем главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ равна z. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$, найти радиус сходимости. Вычислить сумму ряда при $z = 3$.

Ответы

1. 1) Бесконечное множество; 2) бесконечное множество;
3) одну; 4) бесконечное множество;
5) бесконечное множество; 6) одну.

2. 1) πi; 2) $-\pi i$.

3. 1) $\ln 2$; 2) $\ln 2$; 3) $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi i}{4}$; 4) $\dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi i}{4}$.

4. 1) -1; 2) $\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$; 3) $-2\pi i$; 4) $-\dfrac{3}{2}\pi i$.

5. 1) $2\pi i$; 2) $\dfrac{3}{2}\pi i$; 3) $\dfrac{4}{3}\pi i$; 4) πi.

6. 1) $-\sqrt{40}$; 2) $-\sqrt{40}$; 3) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{10}$.

7. 1) $-\dfrac{4i}{3}$; 2) $-\dfrac{4i}{3}$; 3) $\dfrac{4i}{3}$; 4) $\dfrac{4i}{3}$.

9. 1) $1 - i\sqrt{3}$; 2) $1 - i\sqrt{3}$; 3) $1 + i\sqrt{3}$.

11. Пусть $h(z) \in \operatorname{Ln} z$, $\varphi(z) \in \left\{\sqrt{z}\right\}$, $w(z) \in \left\{\sqrt[3]{z}\right\}$ — регулярные ветви в $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$ такие, что $h(-1) = \pi i$, $\varphi(-1) = i$, $w(-1) = e^{\pi i/3}$. Пусть $g(z)$ — целая функция. Тогда

1) $-\dfrac{(1+z)^2(h(z)-\pi i)^2}{4\pi i} + g(z)$;

2) $-\dfrac{1}{6\pi i}\,h(z)(h(z)-\pi i)(h(z)-2\pi i) + g(z)$;

3) $\dfrac{1}{2}\sin\varphi(z) + g(z)$;

4) $\dfrac{1}{2i(z-1)}\left(\dfrac{e^{i\alpha h(z)}}{1-e^{-2\pi\alpha}} - \dfrac{e^{-i\alpha h(z)}}{1-e^{2\pi\alpha}}\right) + g(z)$;

5) $\dfrac{1}{2\pi i}\,\dfrac{z+1}{h(z)-\pi i} + g(z)$;

6) $\dfrac{1}{2}\,\varphi(z)(h(z)-\pi i) + g(z)$;

7) $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{6}\,\dfrac{h(z)}{w(z)} - \dfrac{2}{3}\pi i\,\dfrac{1}{w(z)} + g(z)$;

8) $\dfrac{(z+1)\varphi(z)}{2(h(z)-\pi i)} + g(z)$.

12. πi.

13. 1) $\dfrac{\pi i}{4}$; 2) $-\dfrac{\pi i}{6}$; 3) $\ln 3 + \dfrac{\pi i}{2}$.

14. 1) $2\ln 2 + \dfrac{\pi i}{3}$; 2) $2\ln 2 - \dfrac{\pi i}{3}$.

15. $\ln \pi + \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{7}{4}\pi i$.

16. 1) $-\dfrac{1}{2}\pi i\sqrt{5}$; 2) $\dfrac{1}{2}\pi\sqrt{3}$.

17. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[4]{2}e^{-\pi i/8}$.

18. 1) $\dfrac{13}{6}\pi$; 2) $\dfrac{11}{6}\pi i$; 3) $-\ln 3 + 2\pi i$.

20. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) да.

21. $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$.

22. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ равно целому числу.

24. $\varphi'(2) = \dfrac{1}{2}$; $\varphi(z) = \ln 3 + 5\pi i - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(z+3)^n}{n \cdot 3^n}$.

25. $g(-2) = -\sqrt[3]{2}e^{2\pi i/3}$; $g'(-3) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{9}}\, e^{-2\pi i/3}$;

$g(z) = -\sqrt[3]{2}e^{\pi i/3} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_{1/3}^{n} \dfrac{(z-2)^n}{2^n}$.

26. $\varphi_1'(-2) = -\dfrac{1}{3}$; $\varphi_2'(2) = -\dfrac{2}{3}$;

$\varphi_2(z) = \ln\dfrac{5}{3} - \pi i + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\left[\dfrac{1}{5^n} - \dfrac{1}{3^n}\right](z-4)^n$;

$\varphi_2(z) = -\pi i + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2}{2n+1}\,\dfrac{1}{z^{2n+1}}$; $\varphi_1(z) = i\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_{1/2}^{n} \dfrac{2^n}{(z-1)^n}$.

27. $g(1-i0) = i$; $g(16-i0) = 2i$; $g(-16) = 2e^{i\pi/4}$;

$g'(-16) = \dfrac{1}{32}\, e^{-3\pi i/4}$; $g''(-16) = \dfrac{3}{2^{11}}\, e^{-3\pi i/4}$.

30. 1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{2^{2n+1}}{(4n+2)!}\, z^{2n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{2n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\, z^{3n}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1}\,(z^{n+1} - z^{3n+3})$.

34. 1) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \dfrac{2}{2n+1}\, z^{2n+1} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^{-2n}}{2n+1}\, z^{2n+1} + (2k+1)\pi i$;

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

2) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \dfrac{1-(-1)^n 4^{-n}}{n}\, z^{2n} - \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \dfrac{2}{2n+1}\, z^{2n+1} + 2k\pi i$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

3) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \frac{2}{2n+1}(z+1)^{2n+1} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}(z+1)^{2n+1} + (2k+1)\pi i;$
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$
4) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \frac{2^{-n+1} - (-1)^n(1+2^{-n})}{n}(z+1)^n + 2k\pi i;$
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$

35. $g(-8) = 1;\ \ g(-1) = 2;\ g(-9+8i) = 2e^{i\pi/6};$
$g'(0) = \frac{1}{9\sqrt[3]{3}};\ \ g(z) = \sqrt[3]{12}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_{1/3}^n \frac{(z-3)^n}{12^n}.$

36. $h(-2-0) = \ln 4;\ \ h(-2+0) = \ln 4 - 2\pi i;\ h(2+i) = -\frac{\pi}{2}i;\ \ h'(0) = -\frac{1}{2};$
$h(z) = \ln 3 - 2\pi i - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{n \cdot 3^n};\ \ R = 3.$

37. $g(1-i0) = e^{2\pi i/3};\ \ g(-3) = \sqrt[3]{75}\,e^{\pi i/3};$
$g'(3) = \frac{7\sqrt[3]{3}}{9}e^{4\pi i/3};\ \ g(z) = e^{-2\pi i/3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_{2/3}^n \frac{(-2)^n}{z^{n-1}}.$

38. $h(1-i0) = 2\pi i;\ \ h(-2) = -\ln 5 + i\pi;\ h'(-3) = -\frac{2}{3};$
$h(z) = \ln 3 + i\pi + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left[\frac{1}{6^n} - \frac{1}{2^n}\right](z-5)^n,\ \ |z-5| < 2;$
$h(z) = i\pi + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 3^n}{n} \cdot \frac{1}{z^n},\ \ |z| > 3.$

39. $h(z) = 2\pi i + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(i^n - 1)\frac{1}{z^n},\ \ |z| > 1.$

40. $h(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} - 2\pi i - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2i^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}},\ \ 1 < |z| < 2.$

41. $g(z) = -\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{(3i)^{n+1}} + \frac{i+1}{3} - \frac{8}{9}z + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} C_{1/3}^n \frac{(-1)^{n+1}}{z^{n-1}}.$

42. $h(z) = \ln 6 + \pi i + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right](z-1)^n,\ \ R = 2.$

43. $f(1+2i) = \ln 5 + 3\pi i$. Ряд Тейлора

$$S(z) = \ln 5 + 3\pi i + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left[\frac{1}{(1+2i)^n} + \frac{(-1)^n}{(1-2i)^n}\right](z-1-2i)^n,$$

$|z-1-2i| < \sqrt{5};\quad S(-1+\sqrt{3}i) = f(-1+\sqrt{3}i) + 4\pi i = \ln 4\sqrt{3} + \frac{7}{2}\pi i.$

44. $f(0) = 4e^{2\pi i/3}$. Ряд Тейлора

$$S(z) = 4e^{2\pi i/3}\sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/3}^n \frac{z^{4n}}{(64)^n},\quad |z| < 2\sqrt{2};\quad \left.\frac{S(z)}{f(z)}\right|_{z=-\frac{5}{2}} = e^{-2\pi i/3}.$$

45. $f\left(1+\dfrac{i}{2}\right)=\ln\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{2}\,\pi i$. Ряд Тейлора

$$S(z)=\ln\frac{5}{4}-\frac{7}{2}\,\pi i+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left[\frac{1}{(1+(i/2))^n}+\frac{1}{(1-(i/2))^n}\right]\left(z-1-\frac{i}{2}\right)^n,$$

$$\left|z-1-\frac{i}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2},\quad S\left(e^{-i\pi/6}\right)=f\left(e^{-i\pi/6}\right)-4\pi i=\ln\sqrt{3}-4\pi i.$$

46. $f(0)=\sqrt[6]{4}\,e^{-2\pi i/3}$. Ряд Тейлора

$$S(z)=\sqrt[6]{4}\,e^{-2\pi i/3}+\sum_{n=0}^{+\infty}C_{1/6}^n\,\frac{z^{4n}}{4^n},\quad |z|<\sqrt{2},\quad \left.\frac{S(z)}{f(z)}\right|_{z=-(6/5)i}=e^{i\pi/3}.$$

47. $f(z)=2\pi i+\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\dfrac{1}{(1+i)^n}+\dfrac{1}{(1-i)^n}\right](z-1)^n,\ \ |z-1|<\sqrt{2},$
$S\left(-\dfrac{1}{5}\right)=2\pi i+\ln\dfrac{26}{25}.$

48. $f(z)=i\sum\limits_{n=0}^{+\infty}C_{1/2}^n(-1)^n\,\dfrac{9^n}{z^{2n-1}},\ \ |z-1|>3,\ \ S(4i)=-5.$

49. $f(z)=\ln 2-2\pi i+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\dfrac{(-1)^n}{(1+i)^n}+\dfrac{1}{(1-i)^n}\right](z+i)^n,\ \ |z+i|<\sqrt{2},$
$S\left(\dfrac{i}{5}\right)=-2\pi i+\ln\dfrac{26}{25}.$

50. $f(z)=-4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}C_{1/2}^n\,\dfrac{z^{2n}}{16^n},\ \ |z|<4,\ \ S(3)=-5.$

§ 19. Интегралы от регулярных ветвей

Справочные сведения

Интегралы от регулярных ветвей многозначных функций находятся с помощью вычисления значений регулярных ветвей многозначных функций, разложений этих ветвей в ряды Лорана и с использованием теории вычетов.

Примеры с решениями

Пример 1. Пусть регулярная ветвь $g(z)$ многозначной функции $\left\{\sqrt{z^2-4}\right\}$ определена в области G, представляющей собой комплексную плоскость с разрезом по полуокружности $\{z\colon |z|=2,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$

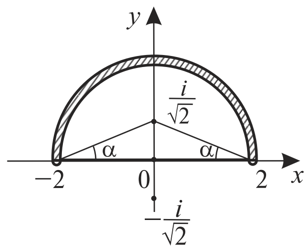

Рис. 19.1

(рис. 19.1), причем главная часть ряда Лорана функции $g(z)$ в окрестности $z = \infty$ равна z. Вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{g(z) - 3z}.$$

△ Прежде всего следует проверить, что в заданной области G действительно существуют регулярные ветви функции $\left\{\sqrt{z^2 - 4}\right\}$. (Сделайте это самостоятельно.)

Для вычисления интеграла J по теории вычетов надо найти особые точки подынтегральной функции, т. е. точки, в которых справедливо равенство $g(z) = 3z$. Чтобы их найти, замечаем, что из последнего равенства следует $g^2(z) = (3z)^2$. Так как по определению корня $g^2(z) = z^2 - 4$, то получаем равенство $z^2 - 4 = 9z^2$, т. е. $z_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ — точки, в которых возможно равенство $g(z) = 3z$.

Уточним значения $g\left(\pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$. Для этого удобно вначале вычислить значение функции g в конечной точке, например в точке $z = 0$. Допустим, что мы знаем значение $g(0)$. Тогда для любого действительного числа $x > 2$ вычислим значение $g(x)$ по формуле (2) из § 18:

$$g(x) = g(0)\sqrt{\left|\frac{x^2 - 4}{4}\right|}\, e^{i/2\left(\Delta_\gamma \arg(z-2) + \Delta_\gamma \arg(z+2)\right)} =$$

$$= g(0)\,\frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\, e^{i/2(\pi+0)} = \frac{i}{2}\, g(0) \cdot x\left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Последнее равенство записано с помощью формулы Тейлора для функции действительного переменного. По теореме о единственности регулярной функции отсюда следует, что

$$g(z) = \frac{i}{2}\, g(0)\left(z - \frac{2}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad z \in G.$$

Так как по условию задачи главная часть ряда Лорана функции $g(z)$ в ∞ равна z, отсюда получаем, что $g(0) = -2i$. Теперь легко вычислить значения $g\left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ и $g\left(-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ по той же формуле (2) из § 18:

$$g\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -2i\sqrt{\left|\frac{-(1/2)-4}{4}\right|}e^{(i/2)(-\operatorname{arcctg}2\sqrt{2}+\operatorname{arcctg}2\sqrt{2})} = -\frac{3i}{\sqrt{2}}\,.$$

Аналогично получаем, что

$$g\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3i}{\sqrt{2}}\,,$$

т. е. равенство $g(z) = 3z$ справедливо в точке $z = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}$. Так как $g'(z) = \dfrac{z}{g(z)}$, то $g'\left(-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{3} \neq 3$. Таким образом, точка $z = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ есть полюс первого порядка подынтегральной функции $f(z) = \dfrac{1}{g(z)-3z}$. В итоге вычисляем интеграл по теореме о вычетах

$$J = 2\pi i \operatorname*{res}_{-i/\sqrt{2}} f = 2\pi i\,\frac{1}{g'\left(-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)-3} = -\frac{3\pi i}{4}\,. \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Для всех регулярных в области G ветвей $h_k(z)$ или $g_k(z)$ указанных многозначных функций вычислить интегралы по положительно ориентированной границе ∂G области G:

1) $\displaystyle\oint\limits_{\partial G}\frac{\cos z}{\pi i + h_k(z)}\,dz$, где $h_k(z) \in \operatorname{Ln} z$, $G = \left\{z\colon |z+1| < \dfrac{1}{2}\right\}$;

2) $\displaystyle\oint\limits_{\partial G}\frac{h_k(z)}{\sin\pi z}\,dz$, где $h_k(z) \in \operatorname{Ln} z$, $G = \left\{z\colon |z-1| < \dfrac{1}{2}\right\}$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{\partial G}h_k(z)\,dz$, где $h_k(z) \in \operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{z+1}$, $G = \{z\colon |z| > 2\}$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{\partial G}\frac{dz}{g_k(z)}$, где $g_k(z) \in \left\{\sqrt{4z^2+4z+3}\right\}$, $G = \{z\colon |z| > 1\}$;

5) $\displaystyle\oint\limits_{\partial G}\frac{dz}{5-z+4g_k(z)}$, где $g_k(z) \in \left\{\sqrt{1-z}\right\}$, $G = \{z\colon |z+3| < 1\}$.

2. Проверить, что многозначные функции допускают выделение в области G регулярной ветви, удовлетворяющей заданным условиям, и вычислить интеграл от этой ветви по положительно ориентированной границе ∂G области G:

1) $\oint\limits_{\partial G} \frac{dz}{(2+g(z))\sin z}$, где $G = \left\{z\colon |z| < \frac{1}{2}\right\}$, $g(z) \in \{\sqrt{z-1}\}$, $g(0) = i$.

2) $\oint\limits_{\partial G} \frac{dz}{1+h(z)}$, где $G = \{z\colon |z-3| < 0,99\}$, $h(z) \in \mathrm{Ln}(z-2)$, $h(3) = 0$.

3) $\oint\limits_{\partial G} \frac{dz}{h(z)-3\pi i}$, где $G = \left\{z\colon |z+2| < \frac{3}{2}\right\}$, $h(z) \in \mathrm{Ln}\, z$, $h(-e) = 1-\pi i$.

4) $\oint\limits_{\partial G} \frac{z+2}{z+h(z)}\, dz$, где $G = \left\{z\colon |z+2| < \frac{5}{2}\right\}$, $h(z) \in \mathrm{Ln}(1-z)$, $h(1-e) = 1$.

5) $\oint\limits_{\partial G} g(z)\, dz$, где $G = \{z\colon |z| > 1,1\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right\}$, $g\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

6) $\oint\limits_{\partial G} \frac{dz}{1+2\sin g(z)}$, где $G = \{z\colon |z-10| < 9,99\}$, $g(z) \in \{\sqrt{z}\}$, $g(4) = -2$.

7) $\oint\limits_{\partial G} g(z)\, dz$, где $G = \{z\colon |z| > |a|+|b|\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt{(z-a)(z-b)}\right\}$, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{g(z)}{z} = 1$.

8) $\oint\limits_{\partial G} \frac{dz}{g(z)}$, где $G = \{z\colon |z| > |a|+|b|\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt{(z-a)(z-b)}\right\}$, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{g(z)}{z} = -1$.

9) $\oint\limits_{\partial G} \frac{z\,dz}{g(z)}$, где $G = \{z\colon |z| > |a|+|b|\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt[3]{(z-a)^2(z-b)}\right\}$, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{g(z)}{z} = e^{-2\pi i/3}$.

10) $\oint\limits_{\partial G} \frac{z\,dz}{g(z)}$, где $G = \{z\colon |z| > |a|+|b|\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt[4]{(z-a)^3(z-b)}\right\}$, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{g(z)}{z} = 1$.

11) $\oint\limits_{\partial G} g(z)\, dz$, где $G = \{z\colon |z| > |a|+|b|\}$, $g(z) \in \{(z-a)^{\alpha}(z-b)^{1-\alpha}\}$, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{g(z)}{z} = 1$.

12) $\oint\limits_{\partial G} zg(z)h(z)\, dz$, где $G = \{z\colon |z| > |a|+|b|\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}\right\}$, $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 1$, $h(z) \in \mathrm{Ln}\,\frac{z-a}{z-b}$, $\lim\limits_{z\to\infty} h(z) = 0$.

13) $\oint\limits_{\partial G} g(z)h(z)\, dz$, где $G = \{z\colon |z| > |a|+|b|\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}}\right\}$, $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 1$, $h(z) \in \mathrm{Ln}\,\frac{z-a}{z-b}$, $\lim\limits_{z\to\infty} h(z) = 2\pi i$.

14) $\oint\limits_{\partial G} z^n h(z)\,dz$, где $G = \{z\colon |z| > |a| + |b|\}$, $h(z) \in \operatorname{Ln}\dfrac{z-a}{z-b}$, $\lim\limits_{z\to\infty} h(z) = 2\pi i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

15) $\oint\limits_{\partial G} f(z)\,dz$, где $G = \{z\colon -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $f(z) \in \left\{\dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right\}$.

16) $\oint\limits_{\partial G} \dfrac{dz}{(z^4+1)\cdot g(z)}$, где $G = \{z = x+iy\colon x > y^2\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt{1+z^2}\right\}$, $g(0) = 1$.

3. Вычислить интеграл от регулярных в области G ветвей многозначных функций по границе ∂G области G:

$$\int\limits_{\partial G} \frac{g(z)h(z)}{1+z^2}\,dz,$$

где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \notin (-\infty, 0]\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt{z}\right\}$, $g(1) = 1$, $h(z) \in \operatorname{Ln} z$, $h(1) = 0$.

Указание. Сначала рассмотреть интеграл по границе области $G_{\rho,R} = \{z\colon \rho < |z| < R,\ -\pi < \arg z < \pi\}$ (кольцо с разрезом), а затем перейти к пределам при $\rho \to 0$, $R \to +\infty$.

4. Вычислить интегралы от регулярных в области G ветвей многозначных функций по границе ∂G области G:

1) $\int\limits_{\partial G} \dfrac{g(z)h^2(z)}{(z-i)^2}\,dz$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon -\pi < \arg z < \pi\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt{z}\right\}$, $g(1) = 1$, $h(z) \in \operatorname{Ln} z$, $h(1) = 0$;

2) $\int\limits_{\partial G} g(z)\,dz$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \notin [-1, 1]\}$, $g(z) \in \left\{\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}\right\}$, $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 1$;

3) $\int\limits_{\partial G} \dfrac{g(z)\,dz}{z^2-1}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \notin [-i, i]\}$, $g(z) \in \{\sqrt{1+z^2}\}$, $g(0+0) = 1$.

5. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z+9}\right\}$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\{z\colon z = 9e^{it},\ -\pi \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\}$, и лучу $\{z\colon z = 9i + ti,\ t \geqslant 0\}$, такая, что $\arg f(10) = \dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{2-f(z)}{(z+1)^2}\,dz.$$

6. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z+3)$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\{z\colon z = 3e^{it},\ -\pi \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\}$

и лучу $\{z\colon z = 3i - t,\ t \geqslant 0\}$ такая, что $\operatorname{Im} f(4) = 2\pi$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2,5} \frac{f(z)}{z(z+2)^2}\, dz.$$

7. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[4]{z+16}\}$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\{z\colon z = 16e^{it},\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi\}$, и лучу $\{z\colon z = -16i - ti,\ t \geqslant 0\}$, такая, что $\arg f(20) = -\frac{\pi}{2}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=13} \frac{2 - f(z)}{z(z+12)}\, dz.$$

8. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z+5)$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\{z\colon z = 5e^{it},\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi\}$ и лучу $\{z\colon z = -5i - t,\ t \geqslant 0\}$, такая, что $\operatorname{Im} f(6) = -2\pi$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=4,5} \frac{f(z)}{z^2(z+4)}\, dz.$$

9. Пусть $f(z)$, $f(0) = \ln 2 + i\pi$, — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z-2)$ в плоскости с разрезом по отрезку $[1,2]$ и лучу $\{z\colon z = 1 + iy,\ -\infty < y \leqslant 0\}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-4|=1,5} \frac{zf(z)}{(z-3)^3}\, dz.$$

10. Пусть $f(z)$, $f(1-i) = i$, — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[3]{z-1}\}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[1,2]$ и лучу $\{z\colon z = 2 - iy,\ 0 \leqslant y < +\infty\}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-8|=2} \frac{z(f(z)-2)}{(z-9)^2}\, dz.$$

11. Пусть $f(z)$, $f(0) = \ln 4 - i\pi$, — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z-4)$ в плоскости с разрезом по отрезку $[3,4]$ и лучу $\{z\colon z = 3 + iy,\ 0 \leqslant y < +\infty\}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-7|=2,5} \frac{zf(z)}{(z-6)(z-5)^2}\, dz.$$

12. Пусть $f(z)$, $f(-2) = 1 - i$, — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[4]{z-2}\}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[1,2]$, и лучу

$\{z\colon z = 1 + iy,\ 0 \leqslant y < +\infty\}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-15|=4} \frac{(z+2)(f(z)-2)}{(z-18)^2}\,dz.$$

13. Пусть $f(z)$, $f(2) = 0$, — регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}(z-1)$ в плоскости с разрезом по отрезкам $[0,1]$, $[0,i]$, и лучу $\{z\colon \mathrm{Im}\,z = 1,\ \mathrm{Re}\,z \geqslant 0\}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-1-4i|=2} \frac{f(z)\,dz}{(z-1-4i)(z-1-3i)^2}\,.$$

14. Пусть $f(z)$, $f(9) = 2$, — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z-1}\right\}$ в плоскости с разрезом по отрезкам $[0,1]$, $[0,-i]$, и лучу $\{z\colon \mathrm{Im}\,z = -1,\ \mathrm{Re}\,z \geqslant 0\}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-1+3i|=1} \frac{(z-1)^3 f(z)}{(z-1+3i)^3}\,dz.$$

15. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{2z-8}\right\}$ в комплексной плоскости с разрезом по лучу $\{z\colon z = 4 - it,\ t \in [0,+\infty)\}$, причем $f(8) = -1 - i\sqrt{3}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{dz}{f(z)-z+2}\,dz,$$

где ∂D — граница круга $D = \left\{z\colon |z-2| < \dfrac{3}{2}\right\}$.

16. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z^2+2z}{4}$ в плоскости с разрезом по лучу $[-2,+\infty)$ действительной оси, причем $\mathrm{Im}\,f(-4) = 0$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{dz}{f(z)-\pi i}\,,$$

где область D состоит из точек круга $|z+2| < 4$, расстояние от которых до разреза больше 1.

17. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{z^2-4}\right\}$ в плоскости с разрезом по полуокружности $\{z\colon |z| = 2,\ \mathrm{Re}\,z \geqslant 0\}$, причем главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ равна z. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{f(z)+3z}\,.$$

18. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}(z^2-z)$ в плоскости с разрезом по положительной действительной полуоси, причем

$\operatorname{Im} f(-2) = 0$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{dz}{f(z) - \pi i},$$

где D — область, состоящая из точек круга $|z| < 2$, расстояние от которых до разреза больше $1/2$.

19. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} \dfrac{z+1}{3-z}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-1, 3]$ такая, что $f(1 + 0i) = 0$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=7} \frac{z^3 f(z)}{z-2}\, dz.$$

20. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{z^3(6-z)}\right\}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[0, 6]$ такая, что $f(3 + 0i) = 3$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=7} \frac{z f(z)}{z-3}\, dz.$$

21. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} \dfrac{5-z}{3+z}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-3, 5]$ такая, что $f(1 + 0i) = 0$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=7} \frac{(z + z^2) f(z)}{z-3}\, dz.$$

22. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z^2(4-z)}\right\}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[0, 4]$ такая, что $f(2 + 0i) = 2$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=7} \frac{z f(z)}{z-2}\, dz.$$

23. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} \dfrac{1-z}{1+z}$ в плоскости с разрезом по дуге: $\{z\colon |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$ такая, что $f\left(\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{\pi i}{3}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(3f(z) - 2\pi i)(z-3)}.$$

24. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{2z^2+1}\right\}$ в плоскости с разрезом по дуге: $\left\{z\colon |z| = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\right\}$ такая, что $f(0) = 1$.

Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z+2)(f(z)+3)}\,.$$

25. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}\,\dfrac{2i-z}{2i+z}$ в плоскости с разрезом по дуге: $\{z\colon |z| = 2,\ \mathrm{Re}\,z \leqslant 0\}$, такая, что $f(2) = \dfrac{\pi}{2}\,i$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z+4i)(3f(z)+2\pi i)}\,.$$

26. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{z^2+3}\right\}$ в плоскости с разрезом по дуге: $\{z\colon |z| = \sqrt{3},\ \mathrm{Re}\,z \leqslant 0\}$ такая, что $f(1) = 2$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\,dz}{(z-3)(f(z)+2\sqrt{3})}\,.$$

27. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{z^2-1}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma = \{z\colon z = e^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant \pi;\ z = t,\ -\infty < t \leqslant -1\}$$

такая, что $f(0) = e^{\pi i/4}$. Пусть $S(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k(z-2i)^k$ — регулярная в круге сходимости функция, совпадающая с $f(z)$ в окрестности точки $z = 2i$. Найти радиус сходимости ряда $S(z)$ и вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{S(z)}{\left(z-\dfrac{3}{4}\,i\right)^2}\,dz.$$

28. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z(z-1)}\right\}$ в плоскости с разрезами по кривым γ_1 и γ_2, где

$$\gamma_1 = \{z\colon z = it,\ t \geqslant 0\},$$
$$\gamma_2 = \{z\colon z = 1-it,\ 0 \leqslant t \leqslant 2;\ z = t-2i,\ -\infty < t \leqslant 1\},$$

такая, что $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$. Пусть $S(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k(z+3i)^k$ — регулярная в круге сходимости функция, совпадающая с $f(z)$ в окрестности точки

$z = -3i$. Найти радиус сходимости ряда $S(z)$ и вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z+3i|=\frac{5}{2}} \frac{S(z)}{(z+i)^2}\,dz.$$

29. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{1-z^2}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma = \{z\colon z = e^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant \pi;\ z = 1+it,\ 0 \leqslant t < \infty\}$$

такая, что $f(0) = 1$. Пусть $S(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k(z-3i)^k$ — регулярная в круге сходимости функция, совпадающая с $f(z)$ в окрестности точки $z = 3i$. Найти радиус сходимости ряда $S(z)$ и вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-3i|=\frac{5}{2}} \frac{S(z)}{\left(z-\dfrac{3}{4}\,i\right)^2}\,dz.$$

30. В комплексной плоскости с разрезами по кривым γ_1 и γ_2, где

$$\gamma_1 = \{z\colon z = t,\ t \leqslant -2\},$$
$$\gamma_2 = \{z\colon z = t,\ -1 \leqslant t \leqslant 0;\ z = it-1,\ 0 \leqslant t < \infty\},$$

рассматривается регулярная ветвь $f(z)$ многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z(z+2)}\right\}$, такая, что

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

Пусть $S(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k(z-3i)^k$ — регулярная в круге сходимости функция, совпадающая с $f(z)$ в окрестности точки $z = 3i$. Найти радиус сходимости ряда $S(z)$ и вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-3i|=\frac{5}{2}} \frac{S(z)}{(z+2-2i)^2}\,dz.$$

31. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{3+iz}{z-1}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[1, 3i]$ такая, что $f(0) = \ln 3 - \pi i$. Вычислить $f(\infty)$ и интеграл

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2 f(z)}{z+3}\,dz.$$

32. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{z^3(2i-z)}\right\}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[0, 2i]$ такая, что

$$f(2) = 2\sqrt[8]{2}e^{3\pi i/16}.$$

Вычислить $f(i+0)$ и интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{zf(z)}{z+i}\,dz.$$

33. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{z+i}{2-z}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-i,2]$ такая, что $f(0)=\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\pi i$. Вычислить $f(\infty)$ и интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 f(z)}{z+2}\,dz.$$

34. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z^2(i-z)}\right\}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[0,i]$ такая, что $f(1)=\sqrt[6]{2}e^{i\pi/4}$. Вычислить $f\left(\dfrac{i}{2}+0\right)$ и интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{zf(z)}{3z+i}\,dz.$$

35. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{2i-z}{z+1}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, где

$$\gamma_1=\{z\colon |z|=2,\ -\pi\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}\},$$

$$\gamma_2=\{z\colon z=x,\ -2\leqslant x\leqslant -1\}$$

такая, что $g(0)=\ln 2-\dfrac{3\pi i}{2}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{z=4} \frac{zg(z)}{1+\operatorname{tg}\dfrac{1}{z}}\,dz.$$

36. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z^2(i-z)}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, где

$$\gamma_1=\left\{z\colon \left|z+\frac{i}{2}\right|=\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}z\geqslant 0\right\},$$

$$\gamma_2=\{z\colon |z+i|=1,\ \operatorname{Re}z\leqslant 0\}$$

такая, что $f(-i)=\sqrt[3]{2}e^{i7\pi/6}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{f(z)}{1+e^{2/z}}\,dz.$$

37. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{1-z}{iz+1}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma=\left\{z\colon |z|=1,\ \frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant 2\pi\right\}$$

такая, что $g(0) = -4\pi i$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{zg(z)}{\sin\frac{1}{z} + \cos\frac{1}{z}}\, dz.$$

38. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{z^2(2i+z)^2}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \{z\colon |z+2i| = 2,\ \operatorname{Re} z \leqslant 0\},$$
$$\gamma_2 = \{z\colon |z+3i| = 1,\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\},$$

такая, что $f(-3i) = \sqrt{3}e^{\pi i}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{f(z)}{1 + 2\sin\frac{1}{z}}\, dz.$$

39. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{2+iz}{2+z}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma = \left\{z\colon |z| = 2,\ -\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

такая, что $h(\infty) = \dfrac{1}{2}\pi i$. Вычислить и интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z h(z)}{\sin^3 z}\, dz.$$

40. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{2z^2+1}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \left\{z\colon |z| = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\right\}$, где $g(0) = 1$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(g(z)+3)}\, .$$

41. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{(z-2)^2(2i-z)}\right\}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[2i, 2]$ такая, что главная часть ее ряда Лорана в ∞ равна $e^{-i\pi/3}z$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{\operatorname{sh}^3 z}\, dz.$$

42. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{3+z}{iz-3}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma = \left\{z\colon |z| = 3,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \pi\right\}$$

такая, что $h(\infty) = -\dfrac{5}{2}\pi i$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(h^2(z)+\pi^2)^2}\,.$$

43. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{2+z}{iz-1}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma = \left\{z\colon |z| = 1,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \pi\right\} \cup [-2,\, -1]$$

такая, что $\operatorname{Im} h(\infty) = \dfrac{3\pi}{2}$. Найти $h(0)$ и вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}\, dz.$$

44. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{1+2z^2}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma = \left\{z\colon |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \pi\right\}$$

такая, что $g(0) = 1$. Пусть $f(z) = \dfrac{z}{(g(z)+3)^2}$. Найти $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f$ и вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\, dz.$$

45. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z^2+1}\right\}$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \left\{z\colon |z| = 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\},$$
$$\gamma_2 = \{z\colon \operatorname{Im} z = -1,\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\}\,,$$

причем $g(0) = e^{-2\pi i/3}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z+3|=1} \left(\frac{g(z)}{g(z)-2}\right)^2 dz.$$

46. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2-1)$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \{z\colon |z| = 1,\ -\pi \leqslant \arg z \leqslant 0\}\,,$$
$$\gamma_2 = \{z\colon \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \geqslant 1\}\,,$$

причем $\operatorname{Im} h(-2i) = 3\pi$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-3i|=22/7} z\left(\frac{h(z)}{h(z)-\pi i}\right)^2 dz.$$

47. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{z^2-1}\right\}$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \{z\colon |z| = 1,\ \pi \leqslant \arg z \leqslant 2\pi\},$$
$$\gamma_2 = \{z\colon \operatorname{Im} z \leqslant -1,\ \operatorname{Re} z = 0\},$$

причем $g(2) = \sqrt[4]{3}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-i|=\frac{5}{4}} z\left(\frac{g(z)}{g(z)-e^{\pi i/4}}\right)^2 dz.$$

48. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2+1)$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \left\{z\colon |z| = 1,\ \frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\},$$
$$\gamma_2 = \{z\colon \operatorname{Im} z = 1,\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\},$$

причем $\operatorname{Im} h(0) = 0$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z+3i|=\frac{7}{4}} \left(\frac{h(z)}{h(z)+\pi i}\right)^2 dz.$$

49. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$ в области $G = \{z\colon |z| > 1\}$ такая, что $f(\infty) = 0$. Доказать, что многозначная функция $\left\{\sqrt{f(z)+4i}\right\}$ распадается в G на регулярные ветви.

Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\left\{\sqrt{f(z)+4i}\right\}$ в G такая, что $g(\infty) = -\sqrt{2}(i+1)$. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{g(z)}$.

50. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{\dfrac{3-z}{3+z}}\right\}$ в области $G = \{z\colon |z| > 3\}$ такая, что $f(\infty) = -i$. Доказать, что многозначная функция $\operatorname{Ln}(f(z)-i)$ распадается в G на регулярные ветви.

Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}(f(z)-i)$ в G такая, что $g(\infty) = \ln 2 - i\,\dfrac{\pi}{2}$. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{g(z)}$.

Ответы

1. 1) $-2\pi i\cos 1$, если $h_0(-1) = -\pi i$; и 0 для остальных ветвей;
2) $4\pi k$, если $h_k(1) = 2\pi k i$; 3) $4\pi i$ для всех ветвей;
4) πi, если $g_0(x) > 0$ при $x > 1$; $-\pi i$, если $g_1(x) < 0$ при $x > 1$;
5) 0, если $g_0(-3) = 2$; $-4\pi i$, если $g_1(-3) = -2$.

2. 1) $\dfrac{2}{5}\pi(1+2i)$; 2) $\dfrac{2\pi i}{e}$; 3) 0; 4) $-\dfrac{4}{3}\pi i$;

5) $-2\pi i$; 6) $-\dfrac{2\pi^2 i}{3\sqrt{3}}$; 7) $\dfrac{\pi i}{4}(b-a)^2$; 8) $2\pi i$;

9) $\dfrac{\pi}{3}(2a+b)(-\sqrt{3}+i)$; 10) $-\dfrac{\pi i}{2}(3a+b)$;

11) $\pi i\alpha(1-\alpha)(a-b)^2$; 12) $2\pi i(a-b)b$;

13) $\dfrac{4}{3}\pi^2(b-a)\left(1-\dfrac{3i}{2\pi}\right)$; 14) $\dfrac{2\pi i}{n+1}(a^{n+1}-b^{n+1})$;

15) $2\pi i$; 16) $-\dfrac{\pi i}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

3. $\dfrac{\pi^2}{\sqrt{2}}i$. **4.** 1) $-\pi^2\left[1+\dfrac{\pi}{8}-i\left(1-\dfrac{\pi}{8}\right)\right]\sqrt{2}$; 2) $2\pi i$; 3) $2\pi i(\sqrt{2}-1)$.

5. $-\dfrac{i\pi}{6}$. **6.** $\pi i\left(\dfrac{1}{2}\ln 3-1\right)$. **7.** $\dfrac{\pi i(\sqrt{2}-2)}{6}$. **8.** $\dfrac{\pi i}{40}(4-5\ln 5)$.

9. $-i\pi$. **10.** $\dfrac{3}{2}\pi i$. **11.** $2\pi(6\ln 2-5)i$. **12.** $\dfrac{5}{4}\pi i$.

13. $2\pi i\left(\dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{3}{4}\right)$. **14.** $\dfrac{70}{3}\sqrt[3]{3}\pi i$. **15.** $\dfrac{3}{5}\pi(1-3i)$. **16.** $\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

17. $\dfrac{3}{4}\pi i$. **18.** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **19.** $16\pi^2+\dfrac{250}{3}\pi i$. **20.** $\dfrac{9\pi(1+i)}{4\sqrt{2}}$.

21. $8\pi(3\pi-10i)$. **22.** $-\dfrac{4\pi(\sqrt{3}+i)}{9}$. **23.** $-\dfrac{2}{5}+\dfrac{2\pi i}{3\ln 2+5\pi i}$.

24. $\pi i\left(\dfrac{17}{12}-\sqrt{2}\right)$. **25.** $\dfrac{6\ln 3}{5(3\ln 3+5\pi i)}$. **26.** $2\pi i\left(1-\dfrac{7\sqrt{3}}{12}\right)$.

27. $R=\sqrt{5}$, $J=\dfrac{6\pi\sqrt{5}}{25}e^{3\pi i/4}$. **28.** $R=3$, $J=-2\pi\dfrac{1+2i}{3\sqrt[3]{4}}$.

29. $R=\sqrt{10}$, $J=-\dfrac{6\pi\sqrt{5}}{25}i$. **30.** $R=3$, $J=-\dfrac{\pi(2i-1)}{3\sqrt{2}}\sqrt[3]{4\sqrt{2}}$.

31. $f(\infty)=-\dfrac{3\pi i}{2}$, $J=9\pi(3\pi-2)+4\pi i$.

32. $f(i+0)=i$, $J=-\dfrac{9}{4}\pi e^{3\pi i/4}$. **33.** $f(\infty)=3\pi i$, $J=4\pi(1-6\pi)-3\pi i$.

34. $f\left(\dfrac{i}{2}+0\right)=\dfrac{i}{2}$, $J=-\dfrac{2\pi}{27}e^{5\pi i/6}$. **35.** $2\pi\left(3\pi-2+\dfrac{7i}{2}\right)$. **36.** $\dfrac{\pi(3-i)}{9}$.

37. $2\pi\left(1+\dfrac{33\pi}{4}\right)$. **38.** $\pi(4i-9)$. **39.** $-\left(\pi+4\pi^2+\dfrac{\pi i}{2}\right)$.

40. $-\dfrac{\pi i}{24}$. **41.** $2\pi i\left(1+\dfrac{i}{9}\right)e^{-\pi i/6}$. **42.** $\dfrac{3(1+\pi)(i-1)}{4\pi^2}$.

43. $h(0)=\ln 2+3\pi i$, $J=3\pi^2-\pi i\left(\dfrac{5}{4}+\ln 2\right)$. **44.** $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-\dfrac{1}{2}$, $J=\dfrac{\pi i}{4}$.

45. $J=-\dfrac{384\pi i}{7\sqrt{7}}$, $g(-\sqrt{7}+w)=2-\dfrac{\sqrt{7}}{6}w-\dfrac{w^2}{72}+O\big(w^3\big)$.

46. $J = 2\pi^3\left(\dfrac{2}{\pi} + i\right)$, $h(z) = \pi i - z^2 - \dfrac{z^4}{2} + O\big(z^6\big)$.

47. $J = -40\pi i$, $g(z) = \left(1 - \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{3z^4}{32} + O\big(z^6\big)\right)e^{\pi i/4}$.

48. $J = -\dfrac{\pi^3}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{8i}{\pi} + 3\right)$, $h(-i\sqrt{2} + w) = -\pi i + 2i\sqrt{2}w + 3w^2 + O(w^3)$.

49. $\dfrac{\pi(i-1)}{4\sqrt{2}}$. **50.** $\dfrac{3\pi i}{\left(\ln 2 - \dfrac{i\pi}{2}\right)^2}$.

§ 20. Аналитическое продолжение. Полные аналитические функции.

Справочные сведения

1. Аналитическое продолжение. В силу теоремы единственности для задания регулярной функции достаточно знать значения этой функции в сколь угодно малой области или на сколь угодно малой дуге некоторой кривой. Поэтому возникает вопрос: как, имея регулярную в некоторой области G функцию f, расширить область определения этой функции, т. е. построить новую область, содержащую область G, и определить в ней такую регулярную функцию, сужение которой на область G совпало бы с функцией f.

Такое расширение области определения регулярной функции называется *процессом ее аналитического продолжения*, а полученная при этом функция на новой области — ее *аналитическим продолжением.*

Частным случаем аналитического продолжения является регулярное продолжение, описанное в § 9.

Расширим понятие аналитического продолжения.

1.1. Пусть выбраны точка $a \in \mathbb{C}$ и круг

$$B_r(a) = \{z\colon |z - a| < r\}, \quad r > 0,$$

на котором задана регулярная функция f. Тогда упорядоченная пара $(B_r(a), f)$ называется *аналитическим элементом*, а точка a — *центром* этого элемента.

Элемент $(B_r(a), f)$ называется *каноническим элементом*, если круг $B_r(a)$ выбран максимальным для функции f, т. е. если функцию f разложить в сходящийся степенной ряд по степеням $(z - a)$, то $B_r(a)$ есть круг сходимости этого ряда.

1.2. Говорят, что (аналитический) элемент $(B_\rho(b), g)$ является *непосредственным аналитическим продолжением (аналитического) элемента* $(B_r(a), f)$, если

$$B_r(a) \cap B_\rho(b) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad f(z) = g(z),\ \forall z \in B_r(a) \cap B_\rho(b).$$

При этом по заданному элементу $(B_r(a), f)$ и кругу $B_\rho(b)$ функция g на $B_\rho(b)$ определяется однозначно в силу теоремы единственности.

Говорят, что два элемента $(B_r(a), f)$ и $(B_\rho(b), g)$ *эквивалентны*, если они имеют общий центр $a = b$ и один из этих элементов является непосредственным аналитическим продолжением другого, т. е., если $r < \rho$, то $f(z) = g(z)$ при всех $z \in B_r(a)$.

1.3. Говорят, что элемент $(B_\rho(b), g)$ является *аналитическим продолжением элемента* $(B_r(a), f)$ *через конечную цепочку кругов* (также говорят: через конечную цепочку элементов), если существует конечный набор элементов $(B_{r_1}(a_1), f_1)$, $(B_{r_2}(a_2), f_2)$, $\ldots$, $(B_{r_n}(a_n), f_n)$ таких, что для каждого номера $k \in \overline{2, n}$ пара элементов $(B_{r_{k-1}}(a_{k-1}), f_{k-1})$ и $(B_{r_k}(a_k), f_k)$ является непосредственным аналитическим продолжением друг друга, причем справедливы равенства

$$(B_{r_1}(a_1), f_1) = (B_r(a), f)$$
$$\text{и} \quad (B_{r_n}(a_n), f_n) = (B_\rho(b), g).$$

1.4. Пусть кусочно-гладкая ориентированная кривая γ_{ab} с началом в точке a и концом в точке b задана через параметр ее длины s, т. е.

$$z = z(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l, \quad z(0) = a, \quad z(l) = b.$$

Говорят, что *элемент* $(B_{r_0}(a), f_0)$ *продолжаем вдоль кривой* γ_{ab}, если существует число $r \in (0, r_0]$, непрерывная функция $\varphi\colon [0, l] \to \mathbb{C}$ и семейство элементов $(B_r(z(s)), f_s)$, $\forall s \in [0, l]$, удовлетворяющих условию: для всякого $s_0 \in [0, l]$ справедливо равенство

$$f_{s_0}(z(s)) = \varphi(s) \quad \text{при всех} \quad s \in [0, l] \cap (s_0 - r, s_0 + r).$$

При этом говорят, что элемент $(B_r(b), f_l)$ является *аналитическим продолжением элемента* $(B_{r_0}(a), f_0)$ *вдоль кривой* γ_{ab}.

Если элемент $(B_{r_0}(a), f_0)$ можно аналитически продолжить вдоль кривой γ_{ab} (или через конечную цепочку кругов), то это продолжение единственно, т. е. в результате его аналитического продолжения вдоль этой кривой получается единственный с точностью до эквивалентности элемент с центром в точке b, независимо от выбора радиуса $r > 0$ кругов и семейства элементов, осуществляющих указанное продолжение.

Понятия аналитического продолжения вдоль конечной цепочки кругов и аналитического продолжения вдоль кривой эквивалентны.

2. Аналитическая функция

2.1. *Полной аналитической функцией*, порожденной начальным элементом $(B_r(a), f_0)$, называется совокупность $\mathcal{F}$ всех канонических элементов, получающихся аналитическим продолжением элемента $(B_r(a), f_0)$ вдоль всех таких кривых, начинающихся в точке a, вдоль которых аналитическое продолжение возможно.

Аналитической функцией (без слова: полная) называется любое связное подмножество элементов из совокупности $\mathcal{F}$, т. е. такое подмножество, любые два элемента которого являются аналитическими продолжениями друг друга через некоторую конечную цепочку элементов из выбранного подмножества.

Объединение $G = \cup_\alpha B_{r_\alpha}(z_\alpha)$ кругов всех элементов, принадлежащих аналитической функции, представляет собой область. Поэтому говорят, что *аналитическая функция задана (определена) на области* G.

В частности, всякая функция, регулярная в некоторой области, очевидно является однозначной аналитической функцией в этой области, а регулярное продолжение (см. § 9) является частным случаем аналитического продолжения.

2.2. В общем случае аналитическая функция не является однозначной функцией точек на плоскости (см. примеры 1, 2).

В случае, когда область определения аналитической функции односвязна, имеет место следующее утверждение.

Теорема (*о монодромии*). *Если элемент $(B_r(a), f_0)$ аналитически продолжаем по любой кривой γ_{ab}, лежащей в односвязной области G, то результат его продолжения в произвольную точку $b \in G$ не зависит от кривой γ_{ab}, а однозначно определяется ее концом b.*

Часто это формулируют и так: аналитическая функция, определенная на односвязной области G, является однозначной регулярной функцией, определенной на G.

Например, совокупность элементов вида $(B_{|a|}(a), h_a(z))$, где $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $h_a(z)$ — любая регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ в круге $B_{|a|}(a)$, образуют полную аналитическую функцию $\operatorname{Ln} z$, определенную в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Для любых точек $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ любой элемент $(B_{|a|}(a), h_a)$ может быть продолжен вдоль любой ориентированной кусочно-гладкой кривой $\gamma_{ab} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ с началом в точке a и концом в точке b, причем для полученного в конце элемента $(B_{|b|}(b), h_b)$

справедливы формулы:

$$h_b(b) = h_a(a) + \int\limits_{\gamma_{ab}} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad h_b(z) = h_b(b) + \int\limits_b^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in B_{|b|}(b). \qquad (1)$$

Примеры с решениями

Пример 1. $\triangle$ Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ сходится в круге $B_1(0)$ и расходится при $|z| \geqslant 1$. При этом по теореме Вейерштрасса сумма f_1 данного ряда является регулярной в круге $B_1(0)$ функцией, и она совпадает в этом круге $B_1(0)$ с функцией $f_2(z) = \dfrac{1}{1-z}$, которая определена и регулярна в $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Таким образом, при любом $a \in \mathbb{C}\backslash[1, +\infty)$ элемент $(B_{|a-1|}(a), f_2)$ является непосредственным аналитическим продолжением элемента $(B_1(0), f_1)$ (так как не пусто множество $B_1(0) \cap B_{|a-1|}(a)$, в котором эти функции совпадают). При любом действительном $a > 1$ множество $B_1(0) \cap B_{|a-1|}(a)$ пусто, но элемент $(B_{|a-1|}(a), f_2)$ является аналитическим продолжением элемента $(B_1(0), f_1)$, так как введя, например, еще один элемент $(B_{|i-1|}(i), f_2)$, мы убеждаемся, что последний элемент является непосредственным аналитическим продолжением как элемента $(B_1(0), f_1)$, так и элемента $(B_{|a-1|}(a), f_2)$. $\blacktriangle$

Пример 2. $\triangle$ Рассмотрим пять элементов, составленных из регулярных ветвей многозначной функции $\{\sqrt{z}\}$, вида $(B_1(1), f_0)$, $(B_1(i), f_{\pi/2})$, $(B_1(-i), f_{-\pi/2})$, $(B_1(-1), f_\pi)$, $(B_1(-1), f_{-\pi})$, где

$$f_s(z) = \sqrt{|z|}e^{i/2 \arg_s z},$$

причем

$$\arg_s z \in \left(s - \frac{\pi}{2}, \quad s + \frac{\pi}{2}\right), \quad s = 0, \pm\pi/2, \pm\pi.$$

Легко убедиться, что каждая функция f_s на соответствующем ей круге является регулярной ветвью многозначной функции $\{\sqrt{z}\}$, причем $f_\pi(z) = -f_{-\pi}(z)$ при всех $z \in B_1(-1)$. В силу определения элемент $(B_1(i), f_{\pi/2})$ (так же, как и элемент $(B_1(-i), f_{-\pi/2})$) является непосредственным аналитическим продолжением элемента $(B_1(1), f_0)$, так как на множестве $B_1(1) \cap B_1(i)$ функции f_0 и $f_{\pi/2}$ равны (см. рис. 20.1).

Аналогично элемент $(B_1(-1), f_\pi)$ есть непосредственное аналитическое продолжение элемента $(B_1(i), f_{\pi/2})$, а элемент $(B_1(-1), f_{-\pi})$ есть непосредственное аналитическое продолжение элемента $(B_1(-i), f_{-\pi/2})$. В итоге получили, что два разных элемента $(B_1(-1), f_\pi)$ и $(B_1(-1), f_{-\pi})$

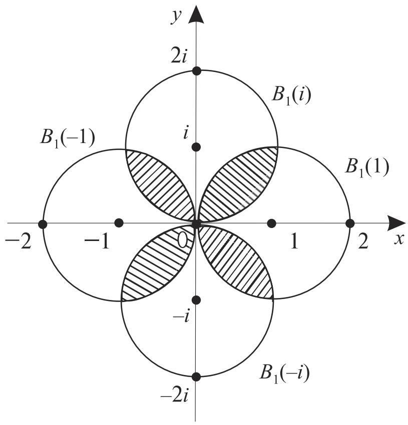

Рис. 20.1

являются аналитическим продолжением одного и того же элемента $(B_1(1), f_0)$. ▲

Задачи

1. Доказать, что функция, регулярная в области G, является функцией, аналитической в области G.

2. Доказать, что если функция, аналитическая в области G, не зависит от формы кусочно-гладкой ориентированной кривой, вдоль которой ведется аналитическое продолжение, а зависит только от ее конца, то эта функция регулярна в области G.

3. Пусть F_1 и F_2 — две аналитические функции в области G. Доказать, что функции $F_1 + F_2$ и $F_1 \cdot F_2$, определяемые элементами вида $(B_r(a), f_1 + f_2)$, $(B_r(a), f_1 \cdot f_2)$, где $(B_r(a), f_1)$ и $(B_r(a), f_2)$ — любые элементы F_1 и F_2, также являются аналитическими функциями в G.

4. Пусть F_1 и F_2 — две аналитические функции в области G, определяемые элементами вида $(B_r(a), f_1)$ и $(B_r(a), f_2)$, причем для любого элемента $(B_r(a), f_2)$ функции F_2 регулярная функция $f_2(z) \neq 0, \quad z \in B_r(a)$. Доказать, что функция $\dfrac{F_1}{F_2}$, определяемая элементами вида $\left(B_r(a), \dfrac{f_1}{f_2}\right)$, аналитична в области G.

5. Пусть F — аналитическая функция в области G, определяемая элементами вида $(B_r(a), f)$. Пусть $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — регулярная функция на плоскости $\mathbb{C}$. Доказать, что функция, определяемая элементами вида $(B_r(a), g(f))$, является аналитической в области G.

6. Определим для всякой точки $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и для всякой кусочно-гладкой ориентированной кривой γ_a с началом в точке 1 и концом в точке a, причем такой, что $0 \notin \gamma_a$, величину

$$h_{\gamma a}(a) = \int\limits_{\gamma a} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

и функцию $h_{\gamma a} : B_{|a|}(a) \to \mathbb{C}$ вида

$$h_{\gamma a}(z) = h_{\gamma a}(a) + \int\limits_a^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in B_{|a|}(a).$$

Доказать, что семейство элементов

$$(B_{|a|}(a), h_{\gamma a}), \quad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

образует функцию (обозначаемую $\operatorname{Ln} z$), аналитическую во всей комплексной плоскости с выколотой точкой $z = 0$.

7. Пусть α — произвольное комплексное число. Доказать, что семейство элементов

$$(B_{|a|}(a), e^{\alpha h_{\gamma a}(z)}), \quad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

где функция $h_{\gamma a}$ определена в задаче 6, образует функцию z^α, аналитическую в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

8. Определим для всякой точки $a \in \mathbb{C}$, $a \neq i$, $a \neq -i$, и для всякой кусочно-гладкой ориентированной кривой γ_a с началом в точке 0 и концом в точке a, причем такой, что $i \notin \gamma_a$, $-i \notin \gamma_a$, величину

$$g_{\gamma_a}(a) = \int\limits_{\gamma_a} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$$

и функцию $g_{\gamma_a} : B_{r_a}(a) \to \mathbb{C}$ вида

$$g_{\gamma_a}(z) = g_{\gamma_a}(a) + \int\limits_a^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}, \quad z \in B_{r_a}(a), \quad r_a = \min\{|a-i|, |a+i|\}.$$

Доказать, что семейство элементов

$$(B_{r_a}(a), g_{\gamma_a}), \quad a \neq \pm i,$$

образует функцию (обозначаемую $\operatorname{Arctg} z$), аналитическую в $\overline{\mathbb{C}}\backslash(\{i\}\cup\{-i\})$.

9. Пусть функция $\varphi(z)$ регулярна в области G и z_0 — некоторая точка этой области. Для всякой точки $a \in G$ и всякой кусочно-гладкой кривой $\gamma_a \subset G$ с началом в точке z_0 и концом в точке a, определим величину

$$f_{\gamma_a}(a) = \int\limits_{\gamma_a} \varphi(\zeta)d\zeta$$

и функцию $f_{\gamma_a} : B_r(a) \to \mathbb{C}$ вида

$$f_{\gamma_a}(z) = f_{\gamma_a}(a) + \int\limits_a^z \varphi(\zeta)d\zeta, \quad z \in B_{r_a}(a),$$

где $r_a > 0$, такое, что $B_{r_a}(a) \subset G$. Доказать, что семейство элементов

$$(B_{r_a}(a), f_{\gamma_a}), \quad a \in G,$$

образует функцию, аналитическую в области G.

10. Доказать, что множество значений, принимаемых элементами аналитической функции $\operatorname{Ln} z$ (см. задачу 6) в произвольной точке $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, совпадает с множеством значений выражения

$$\operatorname{Ln} a = \ln|a| + i \operatorname{Arg} a.$$

11. Доказать, что множество значений, принимаемых элементами аналитической функции z^α (см. задачу 7) в произвольной точке $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, совпадает с множеством значений выражения

$$\{a^\alpha\} = e^{\alpha \operatorname{Ln} a}.$$

12. Доказать, что множество значений, принимаемых элементами аналитической функции $\operatorname{Arctg} z$ (см. пример 8) в произвольной точке a из области $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq \pm i\}$ совпадает с множеством значений выражения

$$\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+ia}{1-ia}\,.$$

13. Для следующих многозначных выражений и областей G найти аналитические в области G функции, которые изображаются этими выражениями:

1) $\{z^z\}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq 0\}$;
2) $\{z^2 \operatorname{Ln}^2 z\}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq 0\}$;
3) $\operatorname{Ln}(1-z^2)$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq 1,\ z \neq -1\}$;
4) $\{\sqrt[3]{1+z^2}\}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq i,\ z \neq -i\}$;
5) $\{\sqrt{1-z^4}\}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq \pm i,\ z \neq \pm 1\}$;
6) $\operatorname{Ln} \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, где $G = \{z \in \overline{\mathbb{C}}\colon z \neq \pm i,\ z \neq \pm 1\}$.
7) $\{\sqrt{z^2-1}\}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq \pm 1\}$;
8) $\operatorname{Ln} \dfrac{z-1}{z+1}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq \pm 1\}$.

14. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна и отлична от нуля в области G.

1) Обязано ли выражение $\{\sqrt{f(z)}\}$ изображать функцию, аналитическую в области G?

2) Может ли выражение $\{\sqrt{f(z)}\}$ изображать функцию, аналитическую в области G?

15. Доказать, что если начальные элементы двух аналитических в области G функций эквивалентны, то эти функции тождественно равны.

16. Доказать, что если какой-либо элемент аналитической в области G функции эквивалентен нулю, то эта функция тождественно равна нулю.

17. Пусть начальный элемент $(B_r(a), f_0)$ порождает в области $G \subset \mathbb{C}$ аналитическую функцию. Доказать, что в области G существует аналитическая функция с начальным элементом

$$\left(B_r(a), \int\limits_a^z f_0(\zeta)\, d\zeta\right).$$

18. Доказать, что существует функция, аналитическая во всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z = 0$ и $z = 1$, которая изображается формулой $\mathrm{Ln}\mathrm{Ln} z$.

Указание. Применить результат задачи 17 к элементу $(B_1(2), f_0)$, где $f_0(z) = \dfrac{1}{zh(z)}$, $h(z) = \displaystyle\int\limits_2^z \frac{d\zeta}{\zeta}$.

19. Доказать существование функций, изображаемых следующими многозначными формулами и аналитических в данных областях G:

1) $\{(z+1)^\alpha (\mathrm{Ln}\, z)^\beta\}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq 0,\ z \neq \pm 1\}$;
2) $\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq \pm i\}$;
3) $\mathrm{Ln}(1 - \sqrt[4]{z})$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq 0,\ z \neq 1\}$;
4) $\{\sqrt{z + \sqrt{z}}\}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq 0,\ z \neq 1\}$;
5) $\{\sqrt[3]{\pi i + \mathrm{Ln}\, z}\}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq 0,\ z \neq -1\}$;
6) $\{\sqrt{1 + \sqrt{\mathrm{Ln}\, z}}\}$, где $G = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq 0,\ z \neq e\}$.

20. Доказать, что сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ является полной аналитической функцией в круге сходимости $B_1(0) = \{z\colon |z| < 1\}$.

21. Доказать, что в случае, когда радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ равен единице и все $a_n \geqslant 0$, то такой ряд не может быть продолжен в точку $z = 1$ (теорема Прингсхейма).

22. Доказать, что функция f, определенная рядом

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{az^n}{(a-z)^{n+1}}, \quad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

в круге его сходимости является непосредственным аналитическим продолжением функции g, определяемой рядом $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{2z}{a}\right)^n$ в круге его сходимости.

23. Пусть функция f регулярна в окрестности точки $z = 0$, а последовательность $\{f^{(n)}(z)\}$ сходится там равномерно и

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = 1.$$

Доказать, что предельная функция этой последовательности аналитически продолжается в $\mathbb{C}$.

Ответы

14. 1) Нет, пример: $f(z) = z^2$. 2) Может, пример: $f(z) = z$.

§ 21. Особые точки полных аналитических функций

Справочные сведения

1. Точки границы области определения полной аналитической функции называются ее *особыми точками.*

2. Расшифруем данное определение. Пусть аналитическая функция $\mathcal{F}$ содержит элемент $(B_r(a), f_a)$ с центром в точке $a \in \mathbb{C}$, и пусть существует кусочно-гладкая ориентированная кривая γ_{ab} с началом в точке a и концом в точке $b \in \mathbb{C}$, такая, что элемент $(B_r(a), f_a)$ продолжаем вдоль любой части γ_{az} кривой γ_{ab} при $z \in \gamma_{ab}\backslash\{b\}$, но не продолжаем вдоль всей кривой γ_{ab} (т. е. не существует элемента $(B_r(b), f_b)$ с центром в точке b, являющегося продолжением элемента $(B_r(a), f_a)$ вдоль кривой γ_{ab}). Тогда точка b называется *особой точкой аналитической функции* $\mathcal{F}$ (см. рис. 21.1).

Пусть точка $b = \infty$ такова, что при замене переменного $z = \dfrac{1}{\zeta}$ в элементах данной аналитической функции $\mathcal{F}(z)$ получаем аналитическую

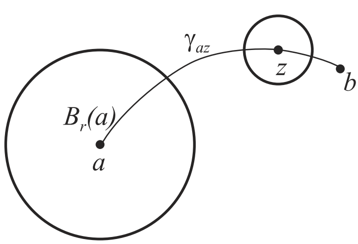

Рис. 21.1

функцию $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$, у которой точка $\zeta = 0$ является особой точкой. Тогда точка $b = \infty$ называется особой точкой аналитической функции $\mathcal{F}(z)$.

3. Наибольший интерес представляют собой *изолированные особые точки.*

Пусть $z = a$ — изолированная особая точка полной аналитической функции $\mathcal{F}$, $\overset{\circ}{B}_r(a)$ — ее проколотая окрестность, принадлежащая области определения $\mathcal{F}$. Пусть $\gamma \subset \overset{\circ}{B}_r(a)$ — замкнутая ориентированная жорданова кривая, охватывающая точку $z = a$. Тогда:

1) если обход по кривой γ приводит к исходному элементу, то точка $z = a$ называется *особой точкой однозначного характера*;
2) если обход γ приводит к элементу, отличному от исходного, то $z = a$ называется *особой точкой многозначного характера* или *точкой ветвления.*

В первом случае аналитическое продолжение исходного элемента в $\overset{\circ}{B}_r(a)$ определяет однозначную регулярную в $\overset{\circ}{B}_r(a)$ функцию, являющуюся регулярной ветвью полной аналитической функции $\mathcal{F}$. Для этой ветви точка $z = a$ будет согласно классификации § 12 либо полюсом, либо существенно особой точкой. Так как устранимая особая точка не является граничной точкой полной аналитической функции (после доопределения по непрерывности в точке a получаем элемент), то она не является особой точкой полной аналитической функции.

Пусть a — точка ветвления полной аналитической функции $\mathcal{F}$, а $(B_r(a_1), f_0)$ — произвольный элемент с центром в точке $a_1 \in \overset{\circ}{B}_R(a)$ функции $\mathcal{F}$. Если существует наименьшее число $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, такое, что в результате аналитического продолжения элемента $(B_r(a_1), f_0)$ по окружности, лежащей в $\overset{\circ}{B}_R(a)$, с центром в точке a (или в точке 0, если $a = \infty$), причем с m-кратным ее обходом в одном и том же направлении, получаем конечный элемент $(B_r(a_1), f_1)$, эквивалентный элементу $(B_r(a_1), f_0)$, то говорят, что точка a есть *точка ветвления порядка* m. В противном случае, если нет такого конечного m, то говорят, что точка a есть *логарифмическая точка ветвления* или *точка ветвления бесконечного порядка.*

4. Пусть точка $z = a$ является точкой ветвления конечного порядка для полной аналитической функции $\mathcal{F}(z)$. Если существует предел $\lim\limits_{z \to a} \mathcal{F}(z)$ (конечный или бесконечный) по любым элементам $(B_{|a-b|}(b), f_b)$ функции $\mathcal{F}(z)$, то точка $z = a$ называется *алгебраической точкой ветвления* функции $\mathcal{F}(z)$.

5. Теорема Коши—Адамара. *Пусть степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{1}$$

имеет ненулевой конечный радиус сходимости R. Тогда на границе круга сходимости $B_R(a)$ лежит хотя бы одна особая точка его суммы.

Примеры с решениями

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ сходится в круге $B_1(0)$ к функции $\dfrac{1}{1-z}$ и расходится в каждой точке окружности $|z|=1$, а особой точкой суммы ряда является лишь одна точка $z=1$ — полюс первого порядка.

Пример 2. Ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\, z^{n+1} \tag{2}$$

сходится в круге $B_1(0)$ к функции

$$S(z) = -z + (1+z)h_0(1+z),$$

где

$$h_0(z) = \ln|z| + i\arg_{\text{гл}} z, \quad \text{и} \quad \arg_{\text{гл}} z \in (\pi, \pi),$$

при этом очевидно, что ряд (2) абсолютно сходится в любой точке окружности $|z| = 1$. Особой точкой суммы ряда (2) является точка $z = -1$, это логарифмическая точка ветвления полной аналитической функции, получаемой из элемента $(B_1(0), S(z))$.

Пример 3. Точки $0, \infty$ являются точками ветвления полных аналитических функций $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt[n]{z}$. В самом деле, по формулам (1) из § 20 при $\widetilde{\gamma} = \{z\colon |z| = r\}$ с началом в точке a, $|a| = r$, после одного обхода окружности против часовой стрелки получаем другие значения элементов

$$\widetilde{h}_a(a) = h_a(a) + 2\pi i, \quad \widetilde{g}_a(a) = g(a)\cdot e^{2\pi i/n}. \tag{3}$$

После нескольких обходов окружности из формул (3) получаем, что у функции $\sqrt[n]{z}$ точки 0 и ∞ суть точки ветвления n-го порядка, а у функции $\operatorname{Ln} z$ точки 0 и ∞ суть логарифмические точки ветвления.

Пример 4. Рассмотрим аналитическую в $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ функцию $\dfrac{1}{\sqrt[8]{z-1}}$, которая имеет элемент $(B_1(2), f_0)$, где регулярная функция f_0 определена по формуле

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt[8]{|z-1|}}\, e^{-(i/8)(\Delta_{\gamma_{2z}} \arg(z-1))}.$$

Продолжая элемент $(B_1(2), f_0)$ по окружности $|z-1| = 1$, получаем, что точки $z = 1$, ∞ — точки ветвления 8-го порядка.

Пример 5. Рассмотрим аналитическую в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ функцию $\cos\sqrt{z}$. Для этого возьмем элемент $(B_1(1), g_0)$ аналитической функции $\sqrt{z}$ такой, что $g_0(1) = 1$.

При однократном обходе точки 0 по замкнутой кривой значение функции $g_0(z)$ меняется на значение $-g_0(z)$, а функция $\cos g_0(z)$ в силу четности $\cos z$ не меняется, т. е. аналитическая функция однозначна в $\mathbb{C}$, причем точка $z = \infty$ — существенно особая точка, а точка $z = 0$ — правильная точка (т. е. точка, где функция регулярна). Это же видно из разложения функции $\cos\sqrt{z}$ в степенной ряд

$$\cos\sqrt{z} = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \ldots, \quad |z| < \infty.$$

Пример 6. Рассмотрим аналитическую в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ функцию $\sin\sqrt{z}$. Любой ее элемент можно представить в круге $B_{|a|}(a)$, $a \neq 0$, в виде регулярной функции

$$\sin\sqrt{z} = g_0(z)\left(1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \ldots\right) = g_0(z)\cdot f(z),$$

где $(B_{|a|}(a), g_0)$ — элемент аналитической функции $\sqrt{z}$, а f — регулярная в $\mathbb{C}$ функция. Таким образом, аналитическая функция $\sin\sqrt{z}$ имеет, как и функция $\sqrt{z}$, точки ветвления второго порядка в точках 0 и ∞.

Задачи

1. Найти и исследовать особые точки полных аналитических функций:

1) $\sqrt{z^2-1}$; 2) $\sqrt[3]{1-z^2}$; 3) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$; 4) $\operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{z+1}$;

5) $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{z}}$; 6) $\operatorname{Ln}\sin z$; 7) $\sqrt[3]{e^z-1}$; 8) $\dfrac{1}{2+\operatorname{Ln} z}$.

2. Приведенные ниже функции аналитичны в кольце $G = \{z\colon 0 < |z| < 1\}$. Определить характер точки ветвления $z = 0$.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{z}}$; 2) $\sqrt{h(z)}$, где $h(z) \in \operatorname{Ln}(1+z)$, $h(0) = 0$;

3) $\operatorname{Ln}\dfrac{z+1}{z}$; 4) $\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}$; 5) $\operatorname{Ln}(\sqrt{z}+z)$; 6) $\dfrac{1}{\operatorname{Ln} z}$; 7) $z^{\sqrt{2}}$;

8) $\sqrt[n]{\operatorname{Ln} z}$; 9) $\sqrt[3]{\sin\pi z}$; 10) $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} z$; 11) $\operatorname{Ln}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi z}{2}$; 12) $e^{-\sqrt{\operatorname{Ln} z}}$.

3. Найти и исследовать особые точки полных аналитических функций:

1) $e^{1/(\sqrt{z}-1)}$; 2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{\operatorname{Ln} z}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{z}+1}$;

4) $\operatorname{Ln}\dfrac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$; 5) $\sqrt{\sqrt[3]{z}-1}$; 6) $\dfrac{1}{z}\operatorname{Ln}\dfrac{1}{1-z}$.

4. Указанные ниже функции аналитичны в плоскости с разрезом по отрезку $[-1,1]$. Определить характер особой точки $z=\infty$.

1) $\sqrt{z(z^2-1)}$; 2) $\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$;

3) $\sqrt[3]{h(z)}$, где $h(z)\in\operatorname{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}$; $h(x)>0$ при $x>1$; 4) $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} z$;

5) $\sqrt{\operatorname{Ln}\dfrac{z+g(z)}{2z}}$, где $g(z)\in\{\sqrt{z^2-1}\}$; $g(x)>0$ при $x>1$;

6) $\sqrt[3]{\operatorname{Ln}\dfrac{z+g(z)}{2z}}$, где $g(z)\in\{\sqrt{z^2-1}\}$; $g(x)<0$ при $x>1$;

5. Пусть $z=a$ — точка ветвления конечного порядка для функций $\mathcal{F}(z)$ и $\mathcal{G}(z)$. Доказать, что для функций $\mathcal{F}(z)+\mathcal{G}(z)$ и $\mathcal{F}(z)\mathcal{G}(z)$ она также является точкой ветвления конечного порядка, или изолированной особой точкой однозначного характера.

6. Пусть $z=a$ — точка ветвления порядка m для функции $\mathcal{F}(z)$ и точка ветвления порядка n для функции $\mathcal{G}(z)$. Определить порядок точки ветвления $z=a$ для функций $\mathcal{F}(z)+\mathcal{G}(z)$ и $\mathcal{F}(z)\cdot\mathcal{G}(z)$ в предположении, что m и n взаимно просты.

7. Решить предыдущую задачу, предположив, что m и n различны, но не обязательно взаимно просты.

8. Найти и исследовать особые точки полных аналитических функций:

1) $\sqrt[3]{z(1-z)^2}$; 2) $\operatorname{Arctg} z$; 3) $\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$; 4) $(\operatorname{Arcsin} z)^2$;

5) $\sqrt[3]{\operatorname{Arcsin} z}$; 6) $e^{\operatorname{Arctg} z}$; 7) $\sqrt{z\operatorname{Arctg} z}$; 8) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z(1-z)}}$.

9. Пусть функция $\mathcal{F}(z)$ аналитична в кольце $G=\{z\colon r<|z|<R\}$, а $(B_r(a),f_a)$ — какой-либо элемент функции $\mathcal{F}(z)$ с центром в точке $a\in G$. Символом $(B_r(a),\{f_a\}_m)$ обозначим элемент, получаемый из элемента $(B_r(a),f_a)$ продолжением по окружности $\gamma=\{z\colon |z|=|a|\}$, проходимой m раз против часовой стрелки. Доказать, что для n-значности функции $\mathcal{F}(z)$ в кольце G необходимо и достаточно, чтобы $\{f_a(z)\}_m\ne f_a(z)$, $z\in B_r(a)$, при $m=1, 2, \ldots, n-1$, а $\{f_a(z)\}_n=f_a(z)$, $z\in B_r(a)$.

10. Пусть $z=a$ — точка ветвления порядка n для функции $\mathcal{F}(z)$. Доказать, что выражение $\mathcal{F}(a+\zeta^n)$ представляет собой n функций, имеющих точку $\zeta=0$ изолированной особой точкой однозначного характера.

11. Доказать, что если функция $\mathcal{F}(z)$ имеет точку $z=a$ точкой ветвления порядка n, то ее можно представить в виде

$$\mathcal{F}(z)=f(\sqrt[n]{z-a}),$$

где функция $f(w)$ имеет точку $w=0$ изолированной особой точкой однозначного характера.

12. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z-a|<r$, имеет в точке $z=a$ нуль порядка m и не имеет других нулей. Доказать, что выражение $\sqrt[n]{f(z)}$ представляет собой:

а) если числа m и n взаимно просты, то функцию, аналитическую в кольце $0<|z-a|<r$ и имеющую в точке $z=a$ алгебраическую точку ветвления порядка n;

б) если m делится на n, то n различных функций, регулярных в круге $|z-a|<r$;

в) если числа m и n имеют общий наибольший делитель p, $1<p<n$, то p различных функций, аналитических в кольце $0<|z-a|<r$ и имеющих в точке $z=a$ алгебраическую точку ветвления порядка n/p.

13. Доказать, что утверждения а) и в) задачи 12 сохраняют силу и в случае, когда функция $f(z)$ имеет в точке $z=a$ полюс порядка m и не имеет в остальных точках круга $|z-a|<r$ ни нулей, ни полюсов.

14. Доказать, что функцию $\mathcal{F}(z)$, имеющую в точке $z=a$ алгебраическую точку ветвления порядка n, можно представить в виде $\mathcal{F}(z)=f(\sqrt[n]{z-a})$, где функция $f(w)$ регулярна в точке $w=0$ или имеет в ней полюс.

15. Доказать, что функцию $\mathcal{F}(z)$, имеющую в точке $z=a$ алгебраическую точку ветвления порядка n, можно представить в виде

$$\mathcal{F}(z)=g_0(z)+(z-a)^{1/n}g_1(z)+(z-a)^{2/n}g_2(z)+\ldots+\\+(z-a)^{(n-1)/n}g_{n-1}(z),$$

где функции $g_k(z)$ регулярны в точке $z=a$ или имеют в ней полюсы.

16. Пусть $z=a$ — алгебраическая точка ветвления функции $\mathcal{F}(z)$. Доказать, что существует кольцо $0<|z-a|<\delta$, в котором все элементы функции $\mathcal{F}(z)$ не обращаются в нуль.

17. Пусть $z=a$ — алгебраическая точка ветвления функций $\mathcal{F}(z)$ и $\mathcal{G}(z)$. Доказать, что для функций

$$\mathcal{F}(z)+\mathcal{G}(z),\quad \mathcal{F}(z)\mathcal{G}(z),\quad \frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{G}(z)}$$

точка $z=a$ может быть только или алгебраической точкой ветвления, или полюсом, или устранимой особой точкой.

18. Пусть $z=a$ — алгебраическая точка ветвления функции $\mathcal{F}(z)$ и $\lim\limits_{z\to a}\mathcal{F}(z)=b$, а $w=b$ — алгебраическая точка ветвления функции $\mathcal{G}(w)$. Доказать, что $z=a$ — алгебраическая точка ветвления функции $\mathcal{G}[\mathcal{F}(z)]$.

19. Пусть $z=a$ — алгебраическая точка ветвления функции $\mathcal{F}(z)$ и $\lim\limits_{z\to a}\mathcal{F}(z)=b$, а $b\neq\infty$, а функция $f(w)$ регулярна в точке $w=b$ и $f'(b)\neq 0$. Доказать, что точка $z=a$ является алгебраической точкой ветвления одного и того же порядка для функций $f[\mathcal{F}(z)]$ и $\mathcal{F}(z)$ (если $f'(b)=0$, то порядок точки ветвления для функции $f[\mathcal{F}(z)]$ может быть меньше, чем для функции $\mathcal{F}(z)$; см. задачу 12).

20. Пусть $z = a$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка для функции $\mathcal{F}(z)$ и $\lim\limits_{z\to a}\mathcal{F}(z) = b$, а $w = b$ — алгебраическая точка ветвления третьего порядка для функции $\mathcal{G}(w)$. Каким может оказаться порядок точки ветвления $z = a$ для функции $\mathcal{G}[\mathcal{F}(z)]$ (указать все возможности)?

21. Решить предыдущую задачу для произвольных порядков ветвления m и n (для функций $\mathcal{F}(z)$ и $\mathcal{G}(w)$ соответственно).

22. Доказать, что если точка $z = a$ является логарифмической точкой ветвления для функции $\mathcal{F}(z)$ и алгебраической точкой ветвления для функции $\mathcal{G}(z) = e^{\mathcal{F}(z)}$, то предел $\mathcal{G}(z)$ при $z \to a$ может быть равен только или нулю, или бесконечности.

23. Пусть функция $\mathcal{F}(z)$ аналитична в кольце $r < |z-a| < R$. Доказать, что выражение $\mathcal{F}(a+e^{\zeta})$ представляет собой совокупность конечного или бесконечного числа функций, регулярных в полосе $\ln r < \operatorname{Re}\zeta < \ln R$.

24. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G, ограниченной простой кусочно-гладкой кривой, а кривая γ лежит в области G, за исключением ее конца ζ, расположенного на границе этой области. Доказать, что если при некотором k

$$f^{(k)}(z) \to \infty \quad (z \to \zeta,\ z \in \gamma),$$

то точка ζ — особая точка функции $f(z)$.

25. Используя результат задачи 24, доказать, что все регулярные ветви приводимых ниже функций в области G имеют точку ζ своей особой точкой (точка ζ и область G указаны в скобках после формулы для функции).

1) $\operatorname{Arctg} z \ \ (\zeta = i,\ \zeta = -i;\ G = \{z\colon |z| < 1\})$;
2) $\operatorname{Ln}(z + \sqrt{1+z^2}) \ \ (\zeta = i;\ \zeta = -i,\ \zeta = \infty;\ G = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\})$;
3) $\operatorname{Arcsin} z \ \ (\zeta = 1,\ \zeta = -1;\ \zeta = \infty;\ G = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\})$;
4) $z^3 \operatorname{Ln} z \ \ (\zeta = 0;\ G = \{z\colon |z-1| < 1\})$.

26. Доказать, что все регулярные в области G ветви приводимых ниже функций имеют особую точку в бесконечности (область G указана в скобках):

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{z}} \ \ (G = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\})$.
2) $\dfrac{1}{\operatorname{Ln} z} \ \ (G = \{z\colon \operatorname{Re} z > 1\})$.
3) $\dfrac{1}{z^3 \operatorname{Ln} z} \ \ (G = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\})$.

Указание. Исследовать точку $\zeta = 0$ для функции $f(1/\zeta)$.

27. Доказать, что функция $e^{-(\operatorname{Ln} z)^2}$ допускает выделение регулярных ветвей в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и что каждая из ветвей имеет особые точки $z = 0$ и $z = \infty$.

28. Функция $(1 + i\sqrt{z})^{-2}$ имеет две ветви, регулярные в верхней полуплоскости. Доказать, что точка $z = \infty$ является особой точкой для обеих ветвей, а точка $z = -1$ — только для одной из них.

29. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\left(1 + i\sqrt{z}\right)^{-2}$, определяемая условием $\sqrt{z} > 0$ при $z > 0$. Доказать, что если функцию $f(z)$ рассматривать только как функцию в верхней полуплоскости, то точка $z = -1$ является для нее особой точкой, а если как функцию только в нижней полуплоскости, то не является особой.

30. Доказать, что функция $f(z) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и что точка $z = 0$ является для нее особой точкой.

31. Пусть функция $\varphi(t)$, непрерывная и положительная при $t \geqslant 0$, удовлетворяет условию

$$-M \ln t \leqslant \ln \varphi(t) \leqslant M \ln t \quad (t \geqslant 1).$$

Доказать, что функция $f(z) = \int\limits_0^\infty \varphi(t) e^{-tz} dt$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, и что точка $z = 0$ является для нее особой точкой.

32. Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$ и удовлетворяет условию

$$|\varphi(t) - e^{i\alpha t}| \leqslant M e^{-\delta t}, \quad t \geqslant 0 \quad (\delta > 0,\ -\infty < \alpha < \infty).$$

Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_0^\infty \varphi(t) e^{-tz} dt$ можно аналитически продолжить на полуплоскость $\operatorname{Re} z > -\delta$ с выколотой точкой $z = i\alpha$, в которой эта функция имеет простой полюс с главной частью $\dfrac{1}{z - i\alpha}$.

33. Доказать, что аналитическое продолжение каждой из следующих функций не имеет во всей плоскости никаких особых точек, кроме полюсов. Найти все полюсы этих функций и главные части в этих полюсах.

1) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1 + e^{-\alpha t}}\,dt,\ \ \alpha > 0;$ 2) $\int\limits_0^\infty \frac{te^{-tz}}{(1 + e^{-\alpha t})^2}\,dt,\ \ \alpha > 0;$

3) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1 + te^{-t}}\,dt;$ 4) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1 + \alpha e^{-t} + \beta e^{-t^2}}\,dt,\ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0.$

34. Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна и положительна на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что функция $f(z) = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)}{t - z}\,dt$, регулярная при $\operatorname{Im} z > 0$ (и даже во всей плоскости с разрезом по отрезку $[0, 1]$), имеет особые точки $z = 0$ и $z = 1$.

35. Пусть функция $\varphi(t)$ регулярная в некоторой области, содержащей отрезок $[0, 1]$. Доказать, что функция $f(z) = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)}{t - z}\,dt$, регулярная при $\operatorname{Im} z > 0$, имеет особые точки $z = 0$ и $z = 1$.

36. Пусть радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ равен единице и все коэффициенты a_n действительны. Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Доказать, что если $S_n \to +\infty$ или $S_n \to -\infty$, то точка $z = 1$ — особая.

Указание. Использовать тождество $f(z) = (1 - z) \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n z^n$.

37. Доказать, что если на окружности круга сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеется хотя бы один полюс $f(z)$, то ряд расходится во всех точках этой окружности.

38. Пусть последовательность $\{c_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяет условию

$$|c_n + Ae^{-i(n+1)\alpha}| < \frac{M}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (R > 1, \ -\infty < \alpha < \infty).$$

Доказать, что функцию $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ можно аналитически продолжить в круг $|z| < R$ с выколотой точкой $z = e^{i\alpha}$, причем в точке $z = e^{i\alpha}$ функция $f(z)$ имеет простой полюс с главной частью $A(z - e^{i\alpha})^{-1}$.

39. Доказать, что если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant R$, за исключением простого полюса в точке $Re^{i\alpha}$, с главной частью $\dfrac{A}{z - Re^{i\alpha}}$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где

$$|c_n + AR^{-n-1} e^{-i(n+1)\alpha}| < \frac{M}{(R+\varepsilon)^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (\varepsilon > 0).$$

40. Пусть ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет на границе круга сходимости лишь одну особую точку, а именно полюс $z = z_0$ порядка m. Доказать, что $a_n = \dfrac{An^{m-1}}{z_0^n}[1 + \varepsilon(n)]$, где $\varepsilon(n) \to 0$, при $n \to \infty$, A — постоянная, $A \neq 0$.

41. Доказать, что если на границе круга сходимости степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ лежит лишь одна особая точка $z = z_0$, являющаяся полюсом для $f(z)$, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

42. Пусть радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равен R, $0 < R < \infty$. Введем обозначение:

$$\nu(r, \varphi) = \varlimsup_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n)}(re^{i\varphi})}{n!} \right|^{1/n}, \quad 0 < r < R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Доказать, что:

а) функция $\nu(r,\varphi)$ является непрерывнеой функцией r и φ и удовлетворяет неравенству $\nu(r,\varphi) \leqslant (R-r)^{-1}$;

б) $\max\limits_{0\leqslant\varphi<2\pi} \nu(r,\varphi) = \dfrac{1}{R-r}$;

в) если $\nu(r,\varphi) = \dfrac{1}{R-r}$, то точка $z = Re^{i\varphi}$ является особой точкой функции $f(z)$;

г) если $\nu(r,\varphi) < \dfrac{1}{R-r}$, то точка $z = Re^{i\varphi}$ не является особой точкой функции $f(z)$.

43. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} = 1$, и все коэффициенты c_n неотрицательны. Доказать, что точка $z = 1$ — особая точка функции $f(z)$.

44. Доказать, что утверждение задачи 43 остается в силе и при более слабых предположениях:

$$\operatorname{Re} c_n \geqslant 0 \quad (n > n_0), \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} (\operatorname{Re} c_n)^{1/n} = 1.$$

45. Пусть p и q — некоторые целые положительные числа, а радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{np+q}$ равен единице. Доказать, что:

а) функция $f(z)$ имеет не менее p особых точек на окружности $|z| = 1$;

б) если $z_0 = e^{i\alpha}$ — особая точка функции $f(z)$, то точки

$$z_k = e^{i(\alpha+(2\pi k/p))}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, p-1,$$

также являются ее особыми точками.

46. Пусть радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равен единице и пусть $c_n = 0$, когда n делится на p (здесь p — целое положительное число). Доказать, что:

а) функция $f(z)$ имеет на окружности $|z| = 1$ не менее двух особых точек;

б) если $z_0 = e^{i\alpha}$ — особая точка функции $f(z)$, то среди точек

$$z_k = e^{i(\alpha+(2\pi k/p))}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, p-1,$$

есть еще хотя бы одна ее особая точка.

Указание. Воспользоваться легко проверяемым тождеством

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(ze^{2\pi ki/p}\right) \equiv 0.$$

47. Доказать, что каждая точка окружности $|z| = 1$ является особой точкой для функций

1) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. 2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

Ответы

1. 1) 1, -1 — точки ветвления второго порядка; ∞ — полюс первого порядка.

2) $1, -1, \infty$ — точки ветвления третьего порядка.

3) ∞ — существенно особая точка.

4) $1, -1$ — логарифмические точки ветвления.

5) $0, \infty$ — точки ветвления третьего порядка, -2^3 — полюс первого порядка.

6) πk, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — логарифмические точки ветвления, ∞ — предельная точка точек ветвления.

7) $2\pi k i$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — точки ветвления третьего порядка, ∞ — предельная точка точек ветвления.

8) $0, \infty$ — логарифмические точки ветвления, e^{-2} — полюс первого порядка.

2. 1) Точка ветвления второго порядка.

2) Точка ветвления второго порядка.

3) Логарифмическая точка ветвления.

4) Точка ветвления шестого порядка.

5) Логарифмическая точка ветвления.

6) Логарифмическая точка ветвления.

7) Логарифмическая точка ветвления.

8) Логарифмическая точка ветвления.

9) Точка ветвления третьего порядка.

10) Логарифмическая точка ветвления.

11) Логарифмическая точка ветвления.

12) Логарифмическая точка ветвления.

3. 1) $0, \infty$ — точки ветвления второго порядка, 1 — существенно особая точка.

2) $0, \infty$ — логарифмические точки ветвления, e — полюс первого порядка.

3) $0, \infty$ — точки ветвления четвертого порядка, 1 — полюс первого порядка.

4) $0, \infty$ — точки ветвления второго порядка, 1 — логарифмическая точка ветвления.

5) 0 — точка ветвления третьего порядка, 1 — точка ветвления второго порядка, ∞ — точка ветвления шестого порядка.

6) $1, \infty$ — логарифмические точки ветвления, 0 — полюс первого порядка.

4. 1) Точка ветвления второго порядка.

2) Логарифмическая точка ветвления.

3) Точка ветвления третьего порядка.

4) Логарифмическая точка ветвления.

5) Устранимая особая точка.

6) Точка ветвления третьего порядка.

6. mn.

7. Общее наименьшее кратное чисел m и n.

8. 1) 0, 1 — точки ветвления третьего порядка, ∞ — полюс первого порядка.

2) i, $-i$ — логарифмические точки ветвления.

3) ∞ — логарифмическая точка ветвления; i, $-i$ — точки ветвления второго порядка.

4) ∞ — логарифмическая точка ветвления; 1, -1 — точки ветвления второго порядка.

5) ∞ — логарифмическая точка ветвления; 1, -1 — точки ветвления второго порядка, 0 — точка ветвления третьего порядка.

6) i, $-i$ — логарифмические точки ветвления.

7) i, $-i$ — логарифмические точки ветвления; 0 — точка ветвления второго порядка.

8) 1 — точка ветвления второго порядка.

20. Особой точкой однозначного характера, точкой ветвления второго, третьего или шестого порядка.

21. Функция $\mathcal{G}(\mathcal{F}(z))$ может быть однозначна или иметь точку ветвления, порядок которой равен одному из делителей числа mn.

33. 1) Полюсы $z = -\alpha n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, с главными частями $\dfrac{(-1)^n}{z + \alpha n}$.

2) Полюсы $z = -\alpha n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, с главными частями $\dfrac{(-1)^n (n+1)}{(z + \alpha n)^2}$.

3) Полюсы $z = -n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, с главными частями $\dfrac{(-1)^n n!}{(z + n)^{n+1}}$.

4) Полюсы $z = -n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, с главными частями $\dfrac{(-1)^n}{z + n}\, \alpha^n$.

Глава 5

Приложения теории вычетов

§ 22. Разложение мероморфных функций в ряды простейших дробей и в бесконечные произведения

Справочные сведения

1. Разложение в ряд простейших (элементарных) дробей

1.1. *Правильная система контуров.* Пусть $\Gamma_n (n \in \mathbb{N})$ — замкнутый кусочно-гладкий положительно ориентированный контур; G_n — область, ограниченная кривой Γ_n $(\partial G_n = \Gamma_n)$. Тогда систему контуров $\{\Gamma_n\}$ называют *правильной*, если выполняются условия:

а) $G_n \subset G_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; $0 \in G_1$;

б) если $d_n = \min\limits_{z \in \Gamma_n} |z|$, то $d_n \to \infty$ при $n \to \infty$;

в) если l_n — длина контура Γ_n, то существует число $A > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$l_n \leqslant A d_n.$$

1.2. **Теорема Коши.** *Пусть для мероморфной функции $f(z)$ существует правильная система контуров $\{\Gamma_n\}$ такая, что выполняются условия:*

а) $\varepsilon_n = \max\limits_{z \in \Gamma_n} |f(z)| \to 0$ при $n \to \infty$; (1)

б) полюсы функции $f(z)$ пронумерованы так, что для любого $n \in \mathbb{N}$ область G_n содержит ровно n первых по порядку полюсов функции $f(z)$, а на контурах Γ_n полюсов нет.

Тогда функция $f(z)$ представима в виде ряда простейших (элементарных) дробей, т. е.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), \tag{2}$$

где $f_k(z) = \sum\limits_{p=1}^{m_k} \dfrac{c_{-p}^{(k)}}{(z - z_k)^p}$ — главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее полюса z_k кратности m_k.

Ряд (2) в любом круге $B_R(0) = \{z\colon |z| < R\}$ с выброшенными из него полюсами функции $f(z)$ сходится равномерно.

Замечание. Пусть в теореме Коши выполнены все условия, кроме условия (1), вместо которого выполняется условие

$$\varepsilon_n = \max_{z\in\Gamma_n} |f(z)| \leqslant C d_n^m, \quad c > 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Тогда, добавляя при необходимости еще один контур $\widetilde{\Gamma} = \{z\colon |z| < \rho\}$, $\widetilde{\Gamma}$ — внутри Γ_1, получаем, что для функции $\dfrac{f(z)}{z^{m+1}}$ выполнены все условия теоремы Коши и поэтому справедливо равенство (2).

2. Разложение в бесконечное произведение. Рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k(z)), \tag{4}$$

где $f_k(z)$ — функции, регулярные в области G (см. § 8), предполагая, что ни один из множителей в (4) не обращается в нуль в области G.

Теорема. *Пусть целая функция $f(z)$ такова, что мероморфная функция $F(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ удовлетворяет условиям теоремы Коши и при этом все полюсы z_k функции $f(z)$ являются простыми. Тогда*

$$f(z) = f(0) e^{Bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}, \quad B = \frac{f'(0)}{f(0)}. \tag{5}$$

Бесконечное произведение (5) равномерно сходится в каждой ограниченной части плоскости.

Примеры с решениями

Пример 1. Разложить мероморфную функцию $w = \operatorname{ctg} z$ в ряд, состоящий из элементарных дробей.

△ Особые точки функции $\operatorname{ctg} z$ — полюсы первого порядка $z_k = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. В качестве правильной системы контуров Γ_n выберем систему квадратов (рис. 22.1), где

$$l_n = 4\pi n, \quad d_n \geqslant \frac{\pi}{2}(n-1), \quad \frac{l_n}{d_n} \leqslant 16, \quad n \in \mathbb{N}.$$

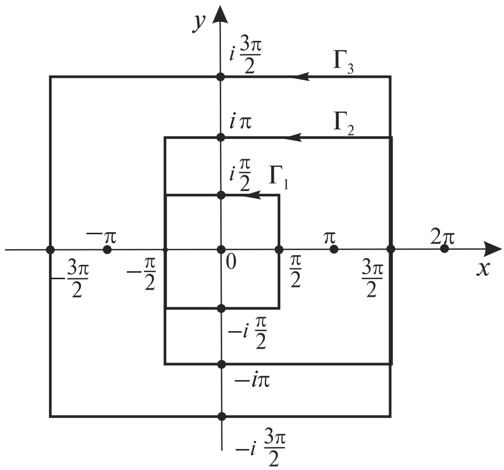

Рис. 22.1

Пусть точка z лежит на одной из вертикальных сторон квадрата Γ_n, тогда

$$z = \frac{\pi}{2} + \pi m + iy, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m \geqslant 0,$$

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + iy + \pi m\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + iy + \pi m\right)} \right| = \frac{|\sin iy|}{|\cos iy|} = \frac{|e^{-y} - e^{-y}|}{e^{-y} + e^{y}} \leqslant 1.$$

Аналогично, если точка z лежит на одной из горизонтальных сторон квадрата Γ_n, то

$$z = x + iy_n, \quad \text{где} \quad |y_n| = \frac{\pi}{2}m \quad (m \in \mathbb{Z},\ m \geqslant 0),$$

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|e^{iz} + e^{-iz}|}{|e^{iz} - e^{-iz}|} = \frac{|e^{ix-y_n} + e^{-ix+y_n}|}{|e^{ix-y_n} - e^{-ix+y_n}|} \leqslant \frac{e^{-y_n} + e^{y_n}}{|e^{-y_n} - e^{y_n}|} = \frac{1 + e^{-2|y_n|}}{1 - e^{-2|y_n|}} < 2.$$

Итак, функция $\operatorname{ctg} z$ ограничена на квадратах Γ_n, причем каждый квадрат Γ_n содержит ровно n полюсов функции $\operatorname{ctg} z$ и на кривых Γ_n нет полюсов этой функции. Функция $\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z}$ удовлетворяет условию (1) теоремы Коши.

Найдем главные части $f_k(z)$ рядов Лорана функции $f(z) = \dfrac{\operatorname{ctg} z}{z}$ в ее полюсах $z_k = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

В полюсе $z_0 = 0$ имеем

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{\cos z}{z \sin z} = \frac{1 - \dfrac{z^2}{2} + \ldots}{z^2\left(1 - \dfrac{z^2}{3!} + \ldots\right)} = \frac{1}{z^2} + h(z),$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке $z = 0$. Следовательно, $f_0(z) = \dfrac{1}{z^2}$. Точка $z_k = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$) — полюс первого порядка функции $f(z)$, а

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \left(\frac{\cos z}{z}\right)\Big|_{z=z_k} \frac{1}{(\sin z)'|_{z=z_k}} = \frac{1}{\pi k}\,.$$

Следовательно, $f_k(z) = \dfrac{1}{\pi k(z - z_k)}$. По теореме Коши (формула (2))

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{\pi k(z - \pi k)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{z}\left(\frac{1}{\pi k} + \frac{1}{z - \pi k}\right),$$

откуда

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{z}{\pi k(z - \pi k)} = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi k} + \frac{1}{z - \pi k}\right). \tag{6}$$

Пусть G_n — область, ограниченная контуром Γ_n, тогда $z = 0 \in \Gamma_1$, $z = \pi \in \Gamma_2$, $z = -\pi \in \Gamma_3$ и т. д. Объединяя в сумме (6) слагаемые, соответствующие полюсам $k\pi$ и $-k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$), получаем

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}\,. \tag{7}$$

▲

Пример 2. Разложить на элементарные дроби функции:

1) $\operatorname{tg} z$; 2) $\dfrac{1}{\sin^2 z}$; 3) $\dfrac{1}{e^z - 1}$.

△ 1) Так как $\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg}\left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)$, то используя формулу (7), получаем

$$\operatorname{tg} z = -\frac{1}{z - \dfrac{\pi}{2}} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - \dfrac{\pi}{2} - k\pi} + \frac{1}{z - \dfrac{\pi}{2} + k\pi}\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - \dfrac{2k-1}{2}\pi} + \frac{1}{z + \dfrac{2k-1}{2}\pi}\right), \text{ откуда}$$

$$\operatorname{tg} z = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - \left(\dfrac{2k-1}{2}\pi\right)^2}.$$

2) Используя равенство

$$\frac{1}{\sin^2 z} = -(\operatorname{ctg} z)'$$

и дифференцируя равномерно сходящийся ряд (6), получаем

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{(z-k\pi)^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-k\pi)^2}.$$

3) Используя равенства

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-z/2} - e^{z/2} + e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = -\frac{1}{2} + \operatorname{cth}\frac{z}{2},$$

$$\operatorname{cth}\zeta = i\operatorname{ctg}(i\zeta)$$

и формулу (7), получаем

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 + 4k^2\pi^2}.$$ ▲

Пример 3. Разложить функцию $\sin z$ в бесконечное произведение.

△ Рассмотрим целую функцию $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. Она имеет нули кратности 1 в точках $z_k = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$, а функция

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$$

удовлетворяет условиям теоремы о разложении в бесконечное произведение. Так как $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, то по формуле (5) находим

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{z/(k\pi)} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-z/(k\pi)},$$

откуда

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{8}$$

▲

Пример 4. Разложить в бесконечное произведение целую функцию $e^z - 1$.

△ Используя равенства

$$e^z - 1 = 2e^{z/2} \left(\frac{e^{z/2} - e^{-z/2}}{2}\right) = 2e^{z/2} \operatorname{sh} \frac{z}{2},$$

$$\operatorname{sh} \zeta = -i \sin i\zeta$$

и формулу (8), получаем

$$e^z - 1 = z e^{z/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4k^2\pi^2}\right).$$ ▲

Задачи

1. Доказать формулы:

1) $\dfrac{1}{e^z - e^a} = e^{-a} \left[-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{z-a} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(z-a)}{(z-a)^2 + 4n^2\pi^2}\right];$

2) $\dfrac{\pi}{\sin \pi z} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{z-n};$

3) $\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z} = \dfrac{1}{4z^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(-1)^n}{\operatorname{sh} \pi n} \dfrac{2\pi z^2}{4z^4 + n^4\pi^4}.$

2. Доказать формулы:

1) $\dfrac{\pi^2}{\cos^2 \pi z} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\left(z + \dfrac{1}{2} - n\right)^2};$

2) $\dfrac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{z^2 + \left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2 \pi^2};$

3) $\dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2z}{z^2 + \left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2 \pi^2};$

4) $\dfrac{e^{az}}{e^z-1}=\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2z\cdot\cos 2\pi na-4\pi n\sin 2\pi na}{z^2+4n^2\pi^2},\ \ 0<a<1.$

3. Пусть $F(z)$ — целая функция, удовлетворяющая неравенству
$$|F(z+iy)|\leqslant Me^{a|y|},\quad -\pi<a<\pi,$$
при всех действительных x и y. Доказать, что
$$\frac{\pi F(z)}{\sin\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,\frac{F(n)}{z-n}$$
$$\text{и}\quad \frac{\pi F(z)}{\cos\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{F\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}{z-n-\dfrac{1}{2}}\,.$$

4. Доказать, что

1) $\dfrac{\sin az}{\sin\pi z}=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n\sin na}{z^2-n^2},\ \ -\pi<a<\pi;$

2) $\dfrac{\operatorname{ch} az}{\operatorname{sh}\pi z}=\dfrac{1}{\pi z}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\dfrac{2z\cos na}{z^2+n^2},\ \ -\pi<a<\pi;$

3) $\dfrac{\pi}{\sin\pi z}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{i(\pi n+\alpha n-\alpha z)}}{z-n},\ \ -\pi<\alpha<\pi;$

4) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,\dfrac{\sin\alpha(z-n)}{z-n}=0,\ \ -\pi<\alpha<\pi;$

5) $\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\pi\alpha+\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos\alpha(z-n)}{(z-n)^2},\ \ 0\leqslant\alpha<\pi.$

5. Доказать формулы:

1) $\dfrac{e^{(\alpha+\beta)z}-1}{(e^{\alpha z}-1)(e^{\beta z}-1)}=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{2\alpha z}{\alpha^2z^2+4k^2\pi^2}+\dfrac{2\beta z}{\beta^2z^2+4k^2\pi^2}\right),$
$\alpha\beta\neq 0,\ \ \alpha\neq\beta;$

2) $\operatorname{ctg}(z-a)+\operatorname{ctg} a=z\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(a-\pi n)(z-a+\pi n)},\ \ \sin a\neq 0;$

3) $\dfrac{\sin a}{\cos z-\cos a}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{2a}{a^2-(z+2\pi n)^2},\ \ \sin a\neq 0;$

4) $\dfrac{\cos a}{\sin a-\sin z}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{\pi-2a}{(z-a+2\pi n)(z+a+(2n-1)\pi)},\ \ \cos a\neq 0.$

6. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция с полюсами $a_1, a_2, \ldots$ и нулями $b_1, b_2, \ldots$ (каждый нуль пишем столько раз, какова его кратность, а каждый полюс столько раз, каков его порядок), причем точка $z=0$ не является ни нулем, и полюсом функции $f(z)$. Предположим, что
$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-b_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-a_n}\,,$$

причем оба ряда равномерно сходятся в каждой ограниченной части плоскости. Доказать, что

$$f(z) = \frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z}{b_n}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z}{a_n}\right)} f(0),$$

причем оба произведения также равномерно сходятся в каждой ограниченной части плоскости.

7. Доказать формулы:

1) $\operatorname{sh} z = z \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$;

2) $\cos z = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{(n-(1/2))^2\pi^2}\right)$;

3) $\operatorname{th} z = z \prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{[1 + (z/\pi n)^2]}{\left[1 + \left(\dfrac{z}{\pi(n-(1/2))}\right)^2\right]}$;

4) $e^{az} - e^{bz} = (a-b)ze^{(1/2)(a+b)z} \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1 + \dfrac{(a-b)^2z^2}{4n^2\pi^2}\right]$;

5) $e^z - e^a = (z-a)e^{(z+a)/2} \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1 + \left(\dfrac{z-a}{2\pi n}\right)^2\right]$;

6) $\operatorname{ch} z - \cos z = z^2 \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{z^4}{4n^4\pi^4}\right)$;

7) $\cos\pi z - \cos\pi a = -\dfrac{\pi^2}{2}(z^2 - a^2) \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1 - \left(\dfrac{z+a}{2n}\right)^2\right] \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1 - \left(\dfrac{z-a}{2n}\right)^2\right]$;

8) $\cos\pi z = \pi(2z+1) \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z(z+1)}{n^2 - (1/4)}\right)$;

9) $\dfrac{\cos z - \cos a}{1 - \cos a} \prod\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{(2\pi n + a)^2}\right)$;

10) $\sin(z-a) + \sin a = \dfrac{z(\pi + 2a - z)}{\pi + 2a} \prod\limits_{n\neq 0}\left\{1 + \dfrac{z(\pi + 2a - z)}{2\pi n(\pi(2n-1) - 2a)}\right\}$;

11) $\dfrac{\sin(z-a)}{\sin a - \sin z} = -\prod\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1 - \dfrac{z(z-2a)}{\pi^2(2n+1)^2 - a^2}}{1 - \dfrac{z(z+2a)}{\pi^2(2n+1)^2 - a^2}}$;

12) $e^{z^2} + e^{2z-1} = 2e^{(1/2)(z^2+2z-1)} \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{(z-1)^4}{\pi^2(2n-1)^2}\right)$;

13) $e^{2\operatorname{ch} z} - e^{2\operatorname{sh} z} = 2e^{e^z - z} \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{e^{-2z}}{\pi^2 n^2}\right)$.

8. Доказать равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2} = \frac{1}{4a^4}\left(\frac{\pi^2 a^2}{\operatorname{sh}^2 a\pi} + a\pi \operatorname{cth} a\pi - 2\right),$$

предполагая, что ни один из знаменателей в этих равенствах не обращается в нуль.

§ 23. Вычисление несобственных интегралов

Справочные сведения

1. Метод вычисления несобственных интегралов с помощью теоремы Коши о вычетах (см. § 14) состоит в следующем. Пусть требуется вычислить интеграл от действительной функции $f(x)$ по какому-либо (конечному или бесконечному) интервалу (a, b) оси $\mathbb{R}$. Тогда (a, b) дополняется какой-нибудь кривой Γ, которая вместе с интервалом (a, b) ограничивает некоторую область D в $\mathbb{C}$. Если функция $f(x)$ регулярно продолжается в D (и непрерывно в $\overline{D}$), за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то по теореме Коши о вычетах получаем

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z)\right).$$

Тогда исходный интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ удается вычислить, если удается вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz$ или выразить его через I.

2. Заметим, что в теореме Коши ∂D (граница области D) должна иметь конечную длину. Если $(a, b) = \mathbb{R}$, то часто удобно выбирать отрезок $[-R, R]$ действительной оси, а в качестве дополняющей кривой Γ — полуокружность $\Gamma = \Gamma_R$ радиуса $R > 0$, расположенную в верхней полуплоскости (рис. 23.1), т. е.

$$\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}.$$

При этом может быть использована следующая теорема.

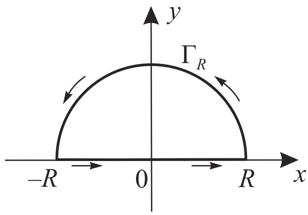

Рис. 23.1

Теорема 1. *Пусть функция f регулярна в верхней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, \ldots, a_n$ и непрерывна вплоть до действительной оси. Тогда, если*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0, \tag{1}$$

где $\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, то

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z)\right). \tag{2}$$

Замечание 1. Существование несобственного интеграла (2) здесь можно гарантировать лишь в смысле главного значения по Коши.

3. Укажем случаи, в которых выполнено условие (1) теоремы 1.

Случай 1.

Лемма 1. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0 > 0\}$ и пусть*

$$\lim_{R\to+\infty} RM(R) = 0, \quad \text{где} \quad M(R) = \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)|.$$

Тогда $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$, *где* $\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

Замечание 2. Лемма 1 применима, например, в случае, когда $f(z)$ — рациональная функция, т. е. $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — многочлены степеней n и m соответственно. Если $m \geqslant n+2$, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится как несобственный и знак $v.p.$ в формуле (2) можно опустить. При этом предполагается, что $Q_m(z) \neq 0$ на действительной оси. Для указанного случая формула (2) примет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{3}$$

В формуле (3) содержатся вычеты по всем полюсам функции $R(z)$, расположенным в верхней полуплоскости.

Случай 2.

Лемма 2 (*Жордана*). *Пусть функция $g(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0 > 0\}$ и пусть $\lim\limits_{R\to+\infty} M(R) = 0$, где*

$$M(R) = \max_{z\in\Gamma_R} |g(z)|,\ \Gamma_R = \{z\colon |z| = R, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}.$$

Тогда, если $\alpha > 0$, то

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} g(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0.$$

С помощью леммы Жордана можно вычислять интегралы вида

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x \cdot g(x)\,dx \quad \text{и } I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x \cdot g(x)\,dx,$$

где $g(x)$ — рациональная функция, т. е. $g(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно, причем $m \geqslant n+1$. В этом случае интегралы сходятся как несобственные, а формулу (2) можно записать в виде

$$I_1 + iI_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(g(z)e^{i\alpha z}\right). \tag{4}$$

В равенстве (4) содержатся вычеты по всем полюсам функции $g(z)e^{i\alpha z}$, расположенным в верхней полуплоскости.

Примеры с решениями

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx.$$

△ Функция $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ удовлетворяет условиям леммы 1 и имеет в области D (рис. 23.1), ограниченной кривой Γ_R $(R > 1)$ и отрезком

$[-R,\, R]$, только две особые точки

$$z_1 = e^{i\pi/4} \quad \text{и} \quad z_2 = e^{i3\pi/4},$$

которые являются полюсами первого порядка.

Так как $\operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z) = \left.\dfrac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_k} = \dfrac{1}{4z_k}$, $k = 1, 2$, то по формуле (3) находим

$$I = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) \right) = \frac{2\pi i}{4} \left(e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4} \right) =$$
$$= \frac{\pi e^{i\pi/2}}{2} \left(e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4} \right) = \pi\, \frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{2} = \pi \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}\,.$$

$\triangle$ Как и в примере 1, в области D, ограниченной полуокружностью Γ_R и отрезком $[-R, R]$, применима лемма 1 (замечание 2) к функции $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^3}$, имеющей в верхней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ единственную особую точку $z_1 = 2i$ — полюс третьего порядка. По формуле (3) находим $I = 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=2i} f(z)$.

Так как $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-2i)^3}$, где $h(z) = (z+2i)^{-3}$, то

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = \frac{1}{2}\, h''(2i) = \frac{(-3)(-4)}{2} \left.(z+2i)^{-5}\right|_{z=2i} = \frac{3}{2\cdot 4^4 i}\,,$$
$$I = 2\pi i\, \frac{3}{2\cdot 4^4 i} = \frac{3\pi}{256}\,. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Вычислить интеграл Лапласа

$$I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$\triangle$ Если $\alpha = 0$, то $I(0) = \pi$. Кроме того, $I(\alpha)$ — четная функция. Поэтому достаточно вычислить $I(\alpha)$ при $\alpha > 0$. Пусть

$$J(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2}\, dx, \quad \text{где} \quad \alpha > 0.$$

Тогда $I(\alpha) = \operatorname{Re} J(\alpha)$. К функции

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}, \quad \text{где} \quad \alpha > 0,$$

применима лемма Жордана и поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty,$$

где $\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z_0 = i$ — полюс первого порядка, вычет в которой равен

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \left.\frac{e^{i\alpha z}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-\alpha}}{2i},$$

и поэтому по формуле (4) находим

$$J(\alpha) = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \pi e^{-\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha > 0,$$
$$I(\alpha) = \operatorname{Re} J(\alpha) = \pi e^{-\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha > 0,$$
$$I(\alpha) = \pi e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

▲

Пример 4. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin(8x-7)}{x^2-2x+5}\,dx.$$

△ Вычислим интеграл

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{i(8x-7)}}{x^2-2x+5}\,dx$$

и воспользуемся тем, что $I = \operatorname{Im} J$. К функции

$$f(z) = g(z)e^{i8z}, \quad \text{где} \quad g(z) = \frac{(z-1)e^{-7i}}{z^2-2z+5},$$

применима лемма Жордана и поэтому $\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz \to 0$ при $R \to +\infty$, где $\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z_0 = 1+2i$ — полюс первого порядка, а

$$\operatorname*{res}_{z=1+2i} f(z) = \left.\frac{(z-1)e^{i(8z-7)}}{(z^2-2z+5)'}\right|_{z=1+2i} = \frac{1}{2}\,e^{i(1+16i)} = \frac{e^{-16}}{2}\,(\cos 1 + i\sin 1).$$

По формуле (4) находим

$$J = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=1+2i} f(z) = \pi e^{-16} i(\cos 1 + i\sin 1),$$

откуда

$$I = \operatorname{Im} J = \pi e^{-16} \cos 1. \qquad \blacktriangle$$

Пример 5. Вычислить интеграл Дирихле

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

$\triangle$ Пусть $\Gamma_{\rho,R}$ — контур, изображенный на рис. 23.2. Рассмотрим интеграл $I_{\rho,R} = \int\limits_{\Gamma_{\rho,R}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$.

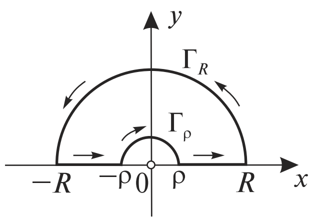

Рис. 23.2

Этот интеграл равен нулю, так как функция e^{iz}/z регулярна внутри контура $\Gamma_{\rho,R}$. С другой стороны, он равен сумме интегралов, взятых по полуокружностям Γ_ρ, Γ_R и отрезкам $[-R, -\rho]$, $[\rho, R]$. Имеем

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z),$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке $z = 0$. Если $z \in \Gamma_\rho$, то

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad dz = i\rho e^{i\varphi}\, d\varphi$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{1}{z}\, dz = i \int_\pi^0 d\varphi = -i\pi.$$

Функция $h(z)$ ограничена в окрестности точки $z = 0$ и, следовательно, $\varepsilon_1(\rho) = \int\limits_{\Gamma_\rho} h(z)\, dz \to 0$, при $\rho \to +0$. Отсюда получаем

$$\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = -i\pi + \varepsilon_1(\rho).$$

По лемме Жордана $\varepsilon_2(R) = \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$ стремится к нулю при $R \to +\infty$. Далее, сумма интегралов по отрезкам $[-R, -\rho]$, $[\rho, R]$ равна

$$\int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx = 2i \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Следовательно,

$$0 = I_{\rho,R} = 2i \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx - i\pi + \varepsilon_1(\rho) + \varepsilon_2(R), \tag{5}$$

где $\varepsilon_1(\rho) \to 0$ $(\rho \to +0)$, $\varepsilon_2(R) \to 0$ $(R \to +\infty)$. Так как интеграл I сходится, то существует

$$\lim_{\substack{\rho\to+0\\ R\to+\infty}} \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = I.$$

Переходя в соотношении (5) к пределу при $\rho \to +0$, $R \to +\infty$, получаем $2iI - i\pi = 0$, откуда $I = \pi/2$. ▲

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\,dx. \tag{6}$$

△ В комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ функция $f(z) = \sqrt[3]{|z|}e^{i\varphi/3}$, $0 < \varphi < 2\pi$, является регулярной ветвью многозначной функции $\{\sqrt[3]{z}\}$ (§ 18–19).

Рассмотрим область D — круг $\{z\colon |z| < R\}$, $R > 8$, с разрезом по радиусу $[0, R]$. Граница этой области $\Gamma = \gamma_+ \cup C_R \cup \gamma_-$, где γ_+ — верхний берег разреза, C_R — окружность $\{z\colon |z| = R\}$, γ_- — нижний берег разреза, ориентация кривой Γ показана на рис. 23.3.

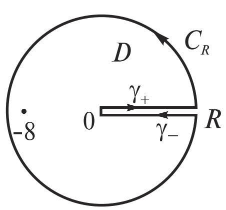

Рис. 23.3

Функция $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z+8)^2}$ регулярна в области D, за исключением точки $z = -8$ — полюса второго порядка, и непрерывна около Γ вплоть до Γ. По теореме о вычетах получаем

$$\int\limits_{\Gamma} g(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-8} g(z), \quad \text{т. е.}$$

$$\int\limits_{C_R} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz + \int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz + \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-8} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,. \qquad (7)$$

Покажем, как с помощью этого равенства можно вычислить интеграл (6). Рассмотрим поочередно члены равенства (7).

1. Оценим интеграл

$$I_R = \int\limits_{C_R} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz.$$

При $|z| = R$ получаем

$$|f(z)| = \sqrt[3]{R}, \quad |z+8| \geqslant ||z| - 8| = R - 8 > 0,$$

откуда $\dfrac{1}{|z+8|} \leqslant \dfrac{1}{R-8}$. Поэтому

$$|I_R| \leqslant \frac{\sqrt[3]{R}}{(R-8)^2} \cdot 2\pi R \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

2. Если $z \in \gamma_+$, то

$$f(z) = f(x + i0) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geqslant 0.$$

Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz = \int\limits_0^R \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\,dx.$$

Отметим, что при $R \to +\infty$ этот интеграл стремится к искомому интегралу (6).

3. Если $z \in \gamma_-$, то

$$f(z) = f(x - i0) = \sqrt[3]{x} e^{2\pi i/3}, \quad x \geqslant 0.$$

Поэтому интеграл

$$I_2 = \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz = -e^{2\pi i/3} \int\limits_0^R \frac{\sqrt[3]{x}}{(z+8)^2}\,dx = -e^{2\pi i/3} \cdot I_1.$$

4. Правая часть равенства (7) не зависит от R при $R > 8$ и равна

$$2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=-8} \frac{f(z)}{(z+8)^2} = 2\pi i f'(z)\Big|_{z=-8} = 2\pi i \left.\frac{f(z)}{3z}\right|_{z=-8} =$$
$$= 2\pi i \cdot \frac{2}{3(-8)}\, e^{\pi i/3} = -\frac{\pi i}{6}\, e^{\pi i/3}.$$

В результате из равенства (7) при $R \to +\infty$ получаем

$$\left(1 - e^{2\pi i/3}\right) I = -\frac{\pi i}{6}\, e^{\pi i/3},$$

откуда

$$I = -\frac{\pi i e^{\pi i/3}}{6\left(1 - e^{2\pi i/3}\right)} = \frac{\pi}{12} \frac{1}{\dfrac{e^{\pi i/3} - e^{-\pi i/3}}{2i}} = \frac{\pi}{12 \sin \dfrac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\,. \qquad \blacktriangle$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I = \int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}}\, dx.$$

$\triangle$ Для вычисления этого интеграла с помощью вычетов регулярно продолжим подынтегральную функцию с интервала $(1,2]$ в некоторую область в $\overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит отрезок $[1,2]$. Так как подынтегральная функция при продолжении в $\overline{\mathbb{C}}$ становится многозначной функцией $\left\{\sqrt[5]{\dfrac{(2-z)^3}{(z-1)^3}}\right\}$, то необходимо позаботиться о возможности выделения регулярных ветвей этой функции в полученной области. Следуя результатам § 18–19, получаем, что в области $\overline{\mathbb{C}} \backslash [1,2]$ у функции $\left\{\sqrt[5]{\dfrac{(2-z)^3}{(z-1)^3}}\right\}$ существуют регулярные ветви. Выберем такую ее регулярную ветвь $f(z)$, у которой $f(x + i0) > 0$ при $x \in (1,2)$. Если для разреза $[1,2]$ ввести, как и в предыдущей задаче, два берега: верхний γ^+

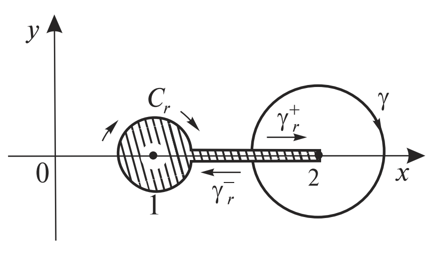

Рис. 23.4

и нижний γ^-, то эта ветвь $f(z)$ непрерывно продолжима на границу $\gamma^+ \cup \gamma^-$ всюду, кроме точки 1. Чтобы выполнялись условия теоремы Коши о вычетах, нужно исключить точку 1 из границы и рассмотреть область

$$D(r) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \left([1,2] \cup \{z\colon |z-1| \leqslant r\}\right), \quad \text{где} \quad r \in (0,1).$$

В этой области функция $f(z)$ всюду регулярна (кроме ∞) и непрерывно продолжима вплоть до ее границы $\Gamma_r = C_r \cup \gamma_r^+ \cup \gamma_r^-$, где окружность $C_r = \{z\colon |z-1| = r\}$ ориентирована по ходу часовой стрелки, γ_r^+ — верхний берег разреза отрезка $[1+r, 2]$ с ориентацией от точки $1+r$ до точки 2, γ_r^- — нижний берег разреза отрезка $[1+r, 2]$ с ориентацией от точки 2 до точки $1+r$. Таким образом выбранная ориентация границы Γ_r является положительной для области $D(r)$.

Так как в области $D(r)$ функция $f(z)$ имеет единственную особую точку $z = \infty$, то по теореме Коши о вычетах получаем

$$\int\limits_{\gamma_r^+} f(z)\,dz + \int\limits_{C_r} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_r^-} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z). \tag{8}$$

Покажем, что второе слагаемое левой части (8) стремится к нулю при $r \to +0$. Имеем

$$\left|\int\limits_{C_r} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{C_r} |f(z)||dz| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{C_r} \left(\frac{1+r}{r}\right)^{3/5} |dz| = \left(\frac{1+r}{r}\right)^{3/5} 2\pi r \to 0 \quad \text{при} \quad r \to +0.$$

Если $x \in \gamma_r^+$, то $f(x) = \sqrt[5]{\left(\dfrac{2-x}{x-1}\right)^3}$,

$$\int\limits_{\gamma_r^+} f(z)\,dz = \int\limits_{1+r}^{2} f(x)\,dx \to I \quad \text{при} \quad r \to +0. \tag{9}$$

Если $x \in \gamma_r^-$, то

$$f(x) = \sqrt[5]{\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^3}\, e^{-i\frac{6\pi}{5}},$$

так как

$$\Delta\gamma \arg \left(\frac{2-z}{z-1}\right)^3 = -6\pi,$$

где $\gamma = \{z\colon |z-2| = \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1\}$ — окружность, ориентированная по ходу часовой стрелки. Поэтому

$$\int\limits_{\gamma_r^-} f(z)\,dz \to -e^{-6\pi i/5} I \quad \text{при} \quad r \to +0. \tag{10}$$

Найдем $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$, где c_{-1} — коэффициент при $\dfrac{1}{z}$ ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$. Если $x \in \mathbb{R}$ и $x > 2$, то

$$f(x) = \sqrt[5]{\left|\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}\right|} e^{-i3\pi/5} = e^{-3\pi i/5}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3/5}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-3/5} =$$
$$= e^{-\frac{3\pi i}{5}}\left(1-\frac{6}{5x}+\ldots\right)\left(1+\frac{3}{5x}+\ldots\right) =$$
$$= e^{-3\pi i/5}\left(1+\left(\frac{3}{5}-\frac{6}{5}\right)\frac{1}{x}+\ldots\right) = S(x).$$

Так как сумма аналитического продолжения полученного ряда $S(z)$ и функция $f(z)$ регулярны в кольце $\{z\colon |z| > 2\}$, причем $f(x) = S(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $x > 2$, то по теореме единственности для регулярных функций

$$f(z) = S(z) = e^{-3\pi i/5} - \frac{e^{-3\pi i/5}}{z}\cdot\frac{3}{5} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 2$.

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{3}{5}\, e^{-3\pi i/5}. \tag{11}$$

Переходя к пределу в равенстве (8) с учетом соотношений (9)–(11), получаем

$$I\left(1-e^{-6\pi i/5}\right) = \frac{6}{5}\,\pi i e^{-3\pi i/5}$$

или

$$I\left(\frac{e^{3\pi i/5}-e^{-3\pi i/5}}{2i}\right) = \frac{3\pi}{5},$$

откуда находим

$$I = \frac{3\pi}{5\sin\dfrac{3\pi}{5}}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 8. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)(x+2)^2}\, dx. \qquad (12)$$

$\triangle$ В комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ функция $h(z) = \ln|z| + i\varphi,\ \ 0 < \varphi < 2\pi$ является регулярной ветвью многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ (§ 17).

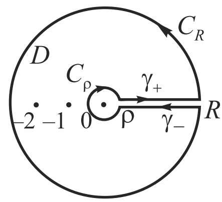

Рис. 23.5

Обозначим

$$R(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)^2}\,, \quad f(z) = R(z)h^2(z)$$

и рассмотрим область D, граница Γ которой показана на рис. 23.5, где $0 < \rho < 1,\ \ R > 2$. В этой области функция $f(z)$ регулярна, за исключением точек $z = -1,\ z = -2$, и непрерывна около Γ вплоть до Γ. По основной теореме о вычетах получаем

$$\int\limits_{C_\rho} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz + \\ + \int\limits_{\gamma_-} f(z)\,dz = 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-2} f(z)\right]. \qquad (13)$$

Рассмотрим поочередно члены этого равенства. Так как $|h(z)| \leqslant |\ln|z|| + 2\pi$, то

$$\left|\int\limits_{C_\rho} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{C_\rho} \frac{h^2(z)\,dz}{(z+1)(z+2)^2}\right| \leqslant \frac{(|\ln\rho| + 2\pi)^2 2\pi\rho}{(1-\rho)(2-\rho)^2} \to 0 \quad \text{при } \rho \to +0,$$

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{C_R} \frac{h^2(z)\,dz}{(z+1)(z+2)^2}\right| \leqslant \frac{(\ln R + 2\pi)^2 2\pi R}{(R-1)(R-2)^2} \to 0 \quad \text{при } R \to +\infty.$$

Если $z \in \gamma_+$, то $h(z) = \ln x$, а если $z \in \gamma_-$, то $h(z) = \ln x + 2\pi i$. Так как сумма интегралов по γ_+ и γ_- в левой части (13) равна

$$\int\limits_\rho^R \ln^2 x \cdot R(x)\,dx - \int\limits_\rho^R (\ln x + 2\pi i)^2 R(x)\,dx =$$

$$= -4\pi i \int\limits_\rho^R \ln x \cdot R(x)\,dx + 4\pi^2 \int\limits_\rho^R R(x)\,dx,$$

то переходя в левой части равенства (13) к пределу при $\rho \to +0$, $R \to +\infty$, получаем $-4\pi i I + 4\pi^2 I_1$, где

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}\,.$$

Найдем значение правой части (13), которая не зависит от ρ и R. Так как $z = -1$ — полюс первого порядка, а $z = -2$ — полюс второго порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \left.\frac{h^2(z)}{(z+2)^2}\right|_{z=-1} = (i\pi)^2 = -\pi^2,$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = \left.\left(\frac{h^2(z)}{z+1}\right)'\right|_{z=-2} = \left.\left[\frac{2h(z)}{z(z+1)} - \frac{h^2(z)}{(z+1)^2}\right]\right|_{z=-2} =$$

$$= \ln 2 + i\pi - (\ln 2 + i\pi)^2 = \pi^2 + \ln 2 - \ln^2 2 + i\pi(1 - 2\ln 2).$$

Из равенства (13) следует, что

$$-4\pi i I + 4\pi^2 I_1 = 2\pi i \left(\ln 2 - \ln^2 2 + i\pi(1 - 2\ln 2)\right),$$

откуда находим, приравняв действительные и мнимые части и учитывая, что $I_1 \in \mathbb{R}$,

$$I = \frac{1}{2}\,(\ln^2 2 - \ln 2). \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$; 2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 10x^2 - 9}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}$; 4) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$;

5) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$; 6) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+6x^2+25}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+16)}$; 8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

2. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+x^3}{1+x^4}\sin 3x\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{1+x^6}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2-4x+8}\,dx$; 4) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-2)\cos x}{x^2-6x+10}\,dx$;

5) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3)\sin\frac{x}{2}}{x^2+4x+20}\,dx$; 6) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-4)\cos\frac{2}{3}x}{x^2-6x+90}\,dx$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2-x)\cos(3x-2)}{x^2-2x+2}\,dx$; 8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5}\,dx$;

9) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x+3)\sin(x+5)}{x^2+4x+8}\,dx$; 10) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+7)\cos(x+2)}{x^2+2x+5}\,dx$;

11) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+7x)\sin 2x}{x^4+5x^2+4}\,dx$; 12) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^2\cos x}{x^4+8x^2+16}\,dx$;

13) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}\,dx$; 14) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(3-6x)}{3x^2-4x+3}\,dx$;

15) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(2-x)}{x^2+2}\,dx$; 16) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(1-2x)}{x^2+4}\,dx$;

17) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(1-2x)}{x-4+\frac{5}{x}}\,dx$; 18) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(1-3x)}{x-2+\frac{5}{x}}\,dx$;

19) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\cos(1-2x)}{(2x^2+1)(x^2+4)}\,dx$; 20) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin(2-x)}{(x^2+2)^2}\,dx$.

3. Пусть $R(z)$ — рациональная функция, имеющая полюсы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в верхней полуплоскости и полюсы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ на действительной оси (и не имеющая других полюсов при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$). Доказать, что если функция $R(z)$ удовлетворяет условию $R(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ при $z \to \infty$, то справедлива формула

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_k} R(z)e^{iz} + \pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=b_k} R(z)e^{iz}$$

(при условии, что интеграл в левой части существует).

Указание. Применить теорему о вычетах к интегралу от функции $R(z)e^{iz}$ по границе области

$$\{z\colon \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < R,\ |z-b_1| > \rho_1, \ldots, |z-b_m| > \rho_m\},$$

а затем перейти к пределу при $R \to +\infty$, $\rho_k \to +0$. Пределы интегралов по малым окружностям будут, вообще говоря, отличны от нуля.

4. Вычислить интегралы:

1) $\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1-e^{i\alpha x}}{x^2}\, dx$, а) $\alpha > 0$; б) $\alpha < 0$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos\alpha x}{x^2}\, dx$, $\alpha > 0$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^n dx$, $n = 2, 3, 4$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\, dx$, $a > 0$, $b > 0$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\, dx$, $a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\, \dfrac{\sin ax}{x}\, dx$, $a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2(x^2+b^2)}\, dx$, $a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x - \sin x}{x^3(x^2+a^2)}\, dx$, $\operatorname{Re} a > 0$.

5. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^2(4-x^2)}}$;

2) $\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}$;

3) $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{(x-3)^2\sqrt{x-x^2}}$;

4) $\int\limits_0^{6} \dfrac{1}{x+2}\sqrt{\dfrac{x}{6-x}}\, dx$;

5) $\int\limits_0^{5} \dfrac{\sqrt[4]{x(5-x)^7}}{x^2-5x-6}\, dx$;

6) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{x^2-3x+2}\, dx$;

7) $\int\limits_0^{3} \dfrac{dx}{(x+2)^2\sqrt[4]{x^3(3-x)}}$;

8) $\int\limits_0^{2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}{(x+2)^2}\, dx$;

9) $\int\limits_0^{3} \sqrt[3]{(3-x)x^2}\, dx$;

10) $\int\limits_0^{1} \sqrt{x-x^2}\, \dfrac{20x+39}{x+2}\, dx$;

11) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}}\, \dfrac{3x^2+13x+20}{(x+2)^2}\, dx$;

12) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{-1-\dfrac{1}{x}}\, \dfrac{3x+1}{3x+4}\, dx$.

6. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}\ln(x-1)}{x^2+3x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln(x-2)}{(x^2-1)\sqrt{x-2}}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x\,dx}{x^2+1}$; 4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)\sqrt[4]{x^3}}\,dx$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x+1)(2x+1)\sqrt{x}}$; 6) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x-1}}$;

7) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}(x+1)^2}$; 8) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{(x+1)(x+2)}\,dx$.

7. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2+2x+2}$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)^2}$; 4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x+1)(x^2+1)}$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$;

7) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$; 8) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2 dx$;

9) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{(x^2+1)^2}\,dx$; 10) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^3 dx$;

11) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,dx$; 12) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}$;

13) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\operatorname{sh} x}\right)^2 dx$; 14) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\operatorname{sh} x}\right)^3 2dx$;

15) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}\,dx$; 16) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \ln\frac{1-x}{x}\,\frac{dx}{1+x^2}$;

17) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \left(\ln\frac{x}{1-x}\right)^2 \frac{dx}{x+1}$; 18) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{dx}{x^2}$;

19) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\pi^2)\operatorname{ch} x}$; 20) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x\,dx}{(x^2+\pi^2)\operatorname{ch} x}$;

21) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9\pi^2)\operatorname{ch} x}$; 22) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(\ln^2 x+\pi^2)}$;

23) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+9\pi^2}$; 24) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x\,dx}{\left(\ln\frac{x}{1-x}\right)^2+\pi^2}$;

25) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2+2ax\cos\lambda+a^2}$, $a>0$, $a<\lambda<\pi$.

8. Пусть $R(z)$ — рациональная функция, непрерывная и действительная при действительных значениях z, а $a_1, \ldots, a_n$ — ее полюсы, лежащие в верхней полуплоскости. В предположении сходимости интегралов доказать формулы:

1) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\ln|x-a|dx = -2\pi \operatorname{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_s} R(z)g(z)$$

(здесь a — действительное число, а $g(z)$ — произвольная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z-a)$, регулярная в верхней полуплоскости);

2) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)|x-a|^{\alpha-1}dx = -\frac{2\pi}{\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}}\operatorname{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_s} R(z)g(z)$$

(здесь a — действительное число, $\alpha > 0$, а $g(z)$ — ветвь многозначной функции $\left(\dfrac{z-a}{i}\right)^{\alpha-1}$, регулярная в верхней полуплоскости и положительная при положительных значениях $\dfrac{z-a}{i}$);

3) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\ln|x^2-a^2|dx = -2\pi \operatorname{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_s} R(z)g(z)$$

(здесь $a > 0$, а $g(z)$ — произвольная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2-a^2)$, регулярная в верхней полуплоскости);

4) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\ln(x^2+a^2)\,dx = -4\pi \operatorname{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_s} R(z)g(z)$$

(здесь $a > 0$, а $g(z)$ — произвольная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z+ai)$, регулярная в верхней полуплоскости).

9. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{|x-1|}}{x^2+1}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|x^2-1|}{x^2+1}\,dx$; 3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln(x^4+2x^2+2)}{x^2+4}\,dx$;

4) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}\,\frac{dx}{x^2+1}$; 5) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{|x-1|}}$;

6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^2}\,dx$; 7) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\frac{dx}{1+x^2}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\frac{dx}{1+x^2}$; 9) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}(\operatorname{arctg} x)^2\,\frac{dx}{x^2}$;

10) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2-4x+5}\ln(x^2+1)\,dx$;

11) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x}-\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}}{x(x^2+1)}\,dx$;

12) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}+\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}-2\right)\frac{dx}{x^2};$

13) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}-\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx;$

14) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}+x^2-ab}\,\frac{dx}{(x^2+1)^2},\quad a>0,\ \ b>0.$

10. Доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{2n}\,\frac{1}{\sin\dfrac{2m+1}{2n}\,\pi}\,,$$

где m и n, $m<n$, — целые неотрицательные числа, рассмотрев интеграл от функции $z^{2m}(1+z^{2n})^{-1}$ по границе угла $0<\arg z<\dfrac{\pi}{n}$.

11. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(4x^2+\pi^2)\,\mathrm{sh}\,x};$ 2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x\,dx}{(4x^2+\pi^2)\,\mathrm{ch}\,x};$

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}^2\,x dx}{(4x^2+\pi^2)\,\mathrm{ch}^2\,x};$ 4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{(4x^2+9\pi^2)\,\mathrm{sh}\,x};$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x^2+1)(4\ln^2 x+9\pi^2)};$ 6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{(x^2-1)(\ln^2 x+\pi^2)}\,dx;$

7) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2}\,dx;$ 8) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\,\frac{dx}{x^2+1};$

9) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x^2+a^2)(4\ln^2 x+\pi^2)},\quad a>0;$

10) $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x^2+a^2}\,dx,\quad a>0;$

11) $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \mathrm{arctg}\,\frac{a}{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},\quad a>0;$

12) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-e^{2a}}\right)}{\mathrm{ch}\,x}\,dx.$

Ответы

1. 1) $\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\dfrac{5\pi}{12}$; 3) 0; 4) $\dfrac{4\pi\sqrt{2}}{3}$; 5) $\dfrac{4\pi}{3}$; 6) $\dfrac{\pi}{4}$; 7) $\dfrac{\pi}{84}$; 8) $\dfrac{3\pi}{8}$.

2. 1) $\pi e^{-3/\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right);$

2) $\dfrac{\pi}{3}\,e^{-4}+\dfrac{\pi}{3}\,e^{-2}\left(\cos 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin 2\sqrt{3}\right);$

3) $\pi e^{-4}\left(\cos 4+\dfrac{3}{2}\sin 4\right)$; 4) $\pi e^{-1}(\cos 3-\sin 3)$;

5) $\dfrac{\pi e^{-2}}{4}(4\cos 1-\sin 1)$; 6) $-\dfrac{\pi e^{-6}}{9}(\cos 2+9\sin 2)$;

7) $\pi e^{-3}(\cos 1+\sin 1)$; 8) $\pi e^{-1}(5\sin 3+\cos 3)$;

9) $\dfrac{\pi}{2}e^{-2}(4\cos 3-\sin 3)$; 10) $\pi e^{-2}(3\cos 1-\sin 1)$;

11) $\pi(2e^{-2}-e^{-4})$; 12) $-\pi e^{-2}$;

13) $2\pi\sin 12\,\dfrac{e^{-\sqrt{23}}}{\sqrt{23}}$; 14) $2\pi\cos 4\,\dfrac{e^{-\sqrt{11}}}{\sqrt{11}}$;

15) $-\dfrac{\pi}{e^{\sqrt{2}}}\cos 2$; 16) $\dfrac{\pi}{e^{4}}\sin 1$;

17) $\pi e^{-2}(2\cos 3-\sin 3)$; 18) $\dfrac{\pi}{2e^{6}}(2\cos 2+\sin 2)$;

19) $\dfrac{2\pi\sin 1}{7}\left(\dfrac{2}{e^{4}}-\dfrac{1}{2e^{\sqrt{2}}}\right)$; 20) $\dfrac{\pi(\sqrt{2}-2)}{2}\,\dfrac{\cos 2}{e^{\sqrt{2}}}$.

4. 1) а) $\pi\alpha$, б) $-\pi\alpha$; 2) $\dfrac{\pi\alpha}{2}$; 3) $I_2=\dfrac{\pi}{2}$, $I_3=\dfrac{3\pi}{8}$, $I_4=\dfrac{\pi}{3}$;

4) $\pi(b-a)$; 5) $\dfrac{\pi}{2b^{2}}(1-e^{-ab})$; 6) $-\dfrac{\pi}{2}+\pi e^{-ab}$;

7) $\dfrac{\pi a}{2b^{2}}-\dfrac{\pi}{4b^{3}}(1-e^{-2ab})$; 8) $\dfrac{\pi}{2a^{4}}\left(1-a+\dfrac{a^{2}}{2}-e^{-a}\right)$.

5. 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{5\pi}{12\sqrt{6}}$; 4) $\dfrac{\pi}{2}$;

5) $\sqrt{2}\pi\left(\dfrac{6^{7/4}}{7}-\dfrac{6^{1/4}}{7}-\dfrac{15}{4}\right)$; 6) $\pi(2\sqrt{3}-3)$;

7) $\dfrac{17\pi}{40\sqrt[4]{10}}$; 8) $\dfrac{\pi\left(\dfrac{5\sqrt[3]{2}}{6}-1\right)}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$; 9) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$;

10) $\pi\sqrt{6}$; 11) $\dfrac{5\pi}{\sqrt{2}}$; 12) 0.

6. 1) $\dfrac{4\pi}{3}\ln 2$; 2) $-\dfrac{\pi\ln 3}{2\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{\pi^{2}\sqrt{2}}{4}$; 4) $-\sqrt{2}\pi^{2}$;

5) $-\pi\sqrt{2}\ln 2$; 6) $\dfrac{\pi}{\sqrt[4]{2}}\cos\dfrac{3\pi}{8}$; 7) $\dfrac{\pi}{5\sin\dfrac{\pi}{5}}$; 8) $\pi\sqrt{2}\ln 2$.

7. 1) 0; 2) $\dfrac{\pi}{4}\ln 2$; 3) $-\dfrac{\pi}{4}$; 4) $-\dfrac{\pi^{2}}{16}$; 5) 0; 6) $\dfrac{\pi}{4}$;

7) $\dfrac{\pi^{2}}{4}$; 8) $\dfrac{2\pi^{2}}{3}$; 9) $\dfrac{\pi^{3}}{16}$; 10) $10\pi^{2}$; 11) $\dfrac{\pi^{2}}{2}$; 12) $\dfrac{\pi^{2}}{8}$;

13) $\dfrac{\pi^{2}}{6}$; 14) $\dfrac{\pi^{2}}{8}(20+79\pi^{2})$; 15) $\dfrac{\pi^{3}}{8}$; 16) $\dfrac{\pi}{4}\ln 2$;

17) $\frac{\ln 2}{3}(\ln^2 2+\pi^2)$; 18) $\frac{4\pi^2}{3}$; 19) $\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}$; 20) 1;

21) $\frac{1}{\pi}\left(\frac{26}{15}-\frac{\pi}{2}\right)$; 22) $\frac{1}{2}$; 23) $\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi^2}$; 24) $\frac{1}{12}$; 25) $\frac{\lambda\ln a}{a\sin\lambda}$.

9. 1) $2^{1/6}3^{-1/2}\pi\sqrt{2+\sqrt{3}}$; 2) $\pi\ln 2$; 3) $\pi\ln\left(4+\sqrt{2}+4\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$;

4) π; 5) $\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$; 6) $\frac{\pi}{4}\ln 5-\frac{\pi}{5}$; 7) $\pi(1-\ln 2)$;

8) $\frac{\pi}{2}\ln 2$; 9) $\pi\ln 2$; 10) $\frac{3}{4}\pi^2\ln 2$; 11) $\frac{2\pi}{a}\ln(\sqrt{2}+1)$;

12) $\frac{\pi}{2}$; 13) π; 14) $\frac{\pi}{4}\sqrt{(a+1)(b+1)}$.

11. 1) $\frac{\pi-2}{8}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{10-3\pi}{24}$; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{\pi}{2}$;

8) $\pi\ln(1+\sqrt{2})$; 9) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{2a\ln a}\right)$; 10) $\frac{\pi}{a}\ln(1+\sqrt{2})$;

11) $\frac{\pi}{4}\ln a+\pi\ln(1+\sqrt{2})$; 12) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{\sqrt{e^{2a}+1}+1}{\sqrt{e^{2a}+1}-1}$.

§ 24. Интегралы, сводящиеся к гамма-функции

Справочные сведения

1. Гамма-функция Эйлера $\Gamma(z)$ для точек $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z>0$ определяется интегралом по положительной полуоси:

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt,$$

где под t^{z-1} при $t>0$ понимается функция $e^{(z-1)\ln t}$. Данный интеграл равномерно по z сходится на любом компакте, лежащем в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z>0\}$.

Перечислим основные свойства гамма-функции.

1) Функция $\Gamma(z)$ регулярна в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z>0\}$ и может быть аналитически продолжена на всю плоскость $\mathbb{C}$ с выколотыми точками $z_n=-n$ $(n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 0)$.

2) В точках $z_n=-n$ $(n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 0)$ гамма-функция имеет полюсы первого порядка, причем

$$\operatorname*{res}_{z=-n}\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}\quad (n\in\mathbb{Z},\quad n\geqslant 0).$$

3) Для всех $z \in \mathbb{C}$ справедлива рекуррентная формула

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

4) Для всех $z \in \mathbb{C}$ справедливы формулы дополнения:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z}, \quad \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

$$\Gamma(1+z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}$$

(при целых z каждая из частей этих равенств обращается в бесконечность),

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}.$$

5) С помощью рекуррентной формулы и формул дополнения можно находить точные значения $\Gamma(z)$ в отдельных точках z. В частности,

$$\Gamma(1) = 1; \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi}\,\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\Gamma(-n+1/2) = \sqrt{\pi}\,\frac{(-2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Бета-функция Эйлера $\mathrm{B}(z,w)$ для всех $z, w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$ определяется формулой

$$\mathrm{B}(z,w) = \int\limits_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau.$$

Бета-функция выражается через гамма-функцию по формуле $\mathrm{B}(z,w) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$, которая позволяет аналитически продолжить бета-функцию на всю комплексную плоскость значений z и w.

Примеры с решениями

Пример 1. Выразить через значения гамма-функции интеграл

$$I = \int\limits_{-1}^{1} (1-x)^p(1+x)^q dx,$$

где $p, q \in \mathbb{R}$, $p > -1$, $q > -1$.

△ Делаем замену переменного:

$$x = 2t - 1, \quad t = \frac{x+1}{2}, \quad dx = 2\,dt,$$

если $x \in [-1;1]$, то $t \in [0;1]$.

Тогда, используя формулы для бета-функции, получаем

$$I = \int\limits_0^1 (1-(2t-1))^p \cdot (1+(2t-1))^q \cdot 2\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (2-2t)^p \cdot (2t)^q \cdot 2\,dt = 2^{p+q+1} \int\limits_0^1 t^q (1-t)^p dt =$$

$$= 2^{p+q+1}\,\mathrm{B}(q+1, p+1) = 2^{p+q+1}\,\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}\,. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. Выразить через значения гамма-функции интеграл

$$I = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1} dx,$$

где $p, q, m \in \mathbb{R},\ \ p, q, m > 0$.

△ Делаем замену переменного

$$x^m = t, \quad x = t^{\frac{1}{m}}, \quad dx = \frac{1}{m}\,t^{\frac{1}{m}-1} dt,$$

если $x \in [0;1]$, то $t \in [0;1]$.

Используя формулы для бета-функции, получаем

$$I = \int\limits_0^1 t^{\frac{p-1}{m}} (1-t)^{q-1}\,\frac{1}{m}\,t^{\frac{1}{m}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{m}\int\limits_0^1 t^{\frac{p}{m}-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{1}{m}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{m}, q\right) = \frac{1}{m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}\,. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Выразить через значения гамма-функции интеграл

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi \cos^{q-1}\varphi\, d\varphi,$$

где $p, q \in \mathbb{R},\ \ p, q > 0$.

△ Делаем подстановку

$$x = \sin\varphi, \quad \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = (1-x^2)^{1/2},$$

$$dx = \cos\varphi\, d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dx}{\cos\varphi} = \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}}\,,$$

если $\varphi \in [0; \pi/2]$, то $x \in [0; 1]$.

Интеграл I сводится к интегралу из примера 2:

$$I = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x^2)^{(q-1)/2}\,\frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} =$$

$$= \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x^2)^{(q/2)-1}dx = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{p}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p+q}{2}\right)}\,. \qquad \blacktriangle$$

Пример 4. Выразить через значения гамма-функции интеграл

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^r\varphi\, d\varphi, \quad \text{где} \quad r \in \mathbb{R}, \quad -1 < r < 1.$$

△ Сведем интеграл I к интегралу из примера 3:

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^r\varphi\cos^{-r}\varphi\, d\varphi,$$

где $p = r+1$, $q = 1-r$.

Получим

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{r+1+1-r}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right),$$

так как $\Gamma(1) = 1$.

Ответ можно упростить, исключив из него гамма-функцию. Если взять $z = \dfrac{r+1}{2}$, то по формуле приведения получаем

$$\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} = \frac{\pi}{\sin\left(\pi\,\dfrac{r+1}{2}\right)} = \frac{\pi}{\cos\dfrac{\pi r}{2}}\,,$$

откуда $I = \dfrac{\pi}{2\cos\dfrac{\pi r}{2}}$. ▲

Пример 5. Выразить через значения гамма-функции интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \ln^p \frac{1}{x}\, dx,$$

где $p \in \mathbb{R},\ \ p > -1$.

$\triangle$ Делаем замену переменной

$$\ln \frac{1}{x} = t, \quad x = e^{-t}, \quad dx = -e^{-t} dt,$$

если $x \in [0; 1]$, то t меняется от $+\infty$ до 0.

Используя представление гамма-функции в виде интеграла, получаем

$$I = \int\limits_{+\infty}^{0} t^p (-e^{-t})\, dt = \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = \Gamma(p+1). \qquad \blacktriangle$$

Пример 6. Выразить через значения гамма-функции интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-it} dt,$$

где $z \in \mathbb{C},\ \ 0 < \operatorname{Re} z < 1$.

$\triangle$ Если $r, R > 0,\ \ r < R$, то рассмотрим область

$$D(r, R) = \{z \colon r < |z| < R,\ 0 < \arg z < \pi/2\}$$

(рис. 24.1).

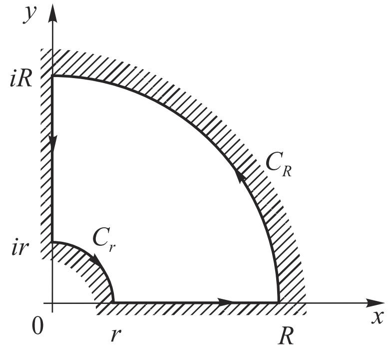

Рис. 24.1

Заметим, что граница $D(r,R)$ состоит из дуг окружностей

$$C_R = \{z\colon |z| = R,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2\},$$
$$C_r = \{z\colon |z| = r,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2\}$$

и отрезков $[r,R]$, $[ir,iR]$.

Пусть $f(\zeta) = \zeta^{z-1}e^{-\zeta}$, $\zeta \in \mathbb{C}$. Тогда по теореме Коши

$$\oint\limits_{\partial D^+(r,R)} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

т. е.

$$\int\limits_{C_r^-} f(\zeta)d\zeta + \int\limits_r^R f(\zeta)d\zeta + \int\limits_{C_R^+} f(\zeta)d\zeta + \int\limits_{iR}^{ir} f(\zeta)d\zeta = 0. \qquad (1)$$

Если $\zeta \in C_R$, то $|\zeta^{z-1}| \leqslant R^{x-1}$ стремится к нулю при $R \to +\infty$ (по условию $x = \operatorname{Re} z < 1$). Поэтому по лемме Жордана

$$\int\limits_{C_R^+} f(\zeta)d\zeta \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

Если $\zeta \in C_r$, то $|\zeta^{z-1}| \leqslant r^{x-1}$. Поэтому

$$\left| \int\limits_{C_r^-} f(\zeta)d\zeta \right| \leqslant \int\limits_{C_r} |f(\zeta)| \cdot |d\zeta| = r^{x-1} \int\limits_{C_r} |d\zeta| =$$
$$= r^{x-1} \cdot \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi r^x}{2} \to 0 \quad (r \to +0),$$

так как по условию $x = \operatorname{Re} z > 0$. Переходя к пределу при $r \to +0$, $R \to +\infty$ в равенстве (1), получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt - \int\limits_0^{+\infty} (it)^{z-1}e^{-it}d(it) = 0,$$

т. е.

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} i^{z-1}t^{z-1}e^{-it}i\,dt =$$
$$= i^z \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-it}dt = \left(e^{i\pi/2}\right)^z \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-it}dt,$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-it} dt = \Gamma(z) e^{-\pi i z/2}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 7. Выразить через значения гамма-функции интегралы

$$\int_0^{+\infty} \cos x^n dx, \quad \int_0^{+\infty} \sin x^n dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2.$$

$\triangle$ Используя результат примера 6, где $z = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, получаем

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) e^{-\pi i/2n} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n}-1} e^{-it} dt = I.$$

Делаем в интеграле замену переменной

$$t^{\frac{1}{n}} = x, \quad t = x^n.$$

Тогда

$$dt = nx^{n-1} dx = nt^{(n-1)/n} dx,$$
$$I = \int_0^{+\infty} t^{(1-n)/n} e^{-ix^n} nt^{(n-1)/n} dx = n \int_0^{+\infty} e^{-ix^n} dx,$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^n} dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) e^{-\pi i/(2n)}.$$

Выделяя в этом равенстве действительные и мнимые части, получаем соответственно

$$\int_0^{+\infty} \cos x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos\frac{\pi}{2n},$$
$$\int_0^{+\infty} \sin x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin\frac{\pi}{2n}.$$

В частности, при $n = 2$ имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,. \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Доказать формулы:

1) $\mathrm{B}(z,\zeta) = \mathrm{B}(\zeta, z)$;

2) $\mathrm{B}(m,n) = \dfrac{1}{m+n-1}\,C_n^m \quad (m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ m < n)$;

3) $\mathrm{B}(z+1,\zeta) = \dfrac{z}{z+\zeta}\,\mathrm{B}(z,\zeta)$;

4) $\Gamma(n+z+1) = (n+z)(n+z-1)\cdots z\Gamma(z)\ (n = 1,\ 2,\ \ldots)$.

2. Доказать формулы:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^z e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) \quad (\operatorname{Re} z > -1)$;

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^z e^{-x^p} dx = \frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{z+1}{p}\right) \quad (p > 0,\ \operatorname{Re} z > -1)$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-\zeta t} dt = \zeta^{-z}\Gamma(z) \quad (\operatorname{Re} z > 0,\ |\arg\zeta| < \frac{\pi}{2})$;

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}\cos t\,dt = \Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2} \quad (0 < \operatorname{Re} z > 1)$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}\sin t\,dt = \begin{cases} \Gamma(z)\sin\dfrac{\pi z}{2}\,, & z \neq 0\ (-1 < \operatorname{Re} z < 1), \\ \dfrac{\pi}{2}\,, & z = 0; \end{cases}$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^p}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p} \quad \left(p > \frac{1}{2}\right)$;

7) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos x^p}{x^{2p}}\,dx = \frac{p}{(p-1)(2p-1)}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p} \quad \left(p > \frac{1}{2}\right)$;

8) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^p\cos p\lambda}\cos(x^p\sin p\lambda)dx = \frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\lambda$

$\left(p > 0,\ -\dfrac{\pi}{2p} < \lambda < \dfrac{\pi}{2p}\right)$;

9) $$\int\limits_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x^p \cos\lambda} \sin(x^p \sin\lambda)dx = \frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{z}{p}\right) \sin\frac{\lambda z}{p}$$
$$\left(\operatorname{Re} z > 0,\ p > 1,\ -\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}\right).$$

3. Доказать формулы:

1) $$\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t^2)^{\beta-1}dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, \beta\right) \quad (\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0);$$

2) $$\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t^p)^{\beta-1}dt = \frac{1}{p}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{p}, \beta\right) \quad (p > 0,\ \operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0);$$

3) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \mathrm{B}(\alpha,\ \beta) \quad (\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0);$$

4) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+t^2)^{\beta}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, \beta - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \left(\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) > 0\right);$$

5) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+t^p)^{\beta}} = \frac{1}{p}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{p}, \beta - \frac{\alpha}{p}\right) \quad \left(p > 0,\ \operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\left(\beta - \frac{\alpha}{p}\right) > 0\right).$$

4. Доказать формулы:

1) $$\int\limits_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t^2)^{\beta-1}}{(1+t^2)^{(\alpha/2)+\beta}}\, dt = 2^{-(\alpha/2)-1}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\ \beta\right) \quad (\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0);$$

2) $$\int\limits_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t^p)^{\beta-1}}{(1+t^p)^{(\alpha/p)+\beta}}\, dt = \frac{1}{p}\, 2^{-(\alpha/p)}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{p},\ \beta\right)$$
(здесь $p > 0,\ \operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0$);

3) $$\int\limits_{-1}^1 \frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{(t+a)^{\alpha+\beta}}\, dt = 2^{\alpha+\beta-1}(a+1)^{-\alpha}(a-1)^{-\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)$$
(здесь $a > 1,\ \operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0$);

5. 1) Пусть $\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0$. Доказать, что
$$\int\limits_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2\alpha-1}(1-x)^{2\beta-1}}{(1+x^2)^{\alpha+\beta}}\, dx = 2^{\alpha+\beta-2}\,\mathrm{B}(\alpha,\ \beta).$$

2) При $a > 0$, $\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0$ доказать, что
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\varphi)^{2\alpha-1}(\cos\varphi)^{2\beta-1}}{(a+\sin^2\varphi)^{\alpha+\beta}}\, d\varphi = \frac{1}{2}\,(a+1)^{-\alpha}a^{-\beta}B(\alpha,\ \beta).$$

3) При $|\operatorname{Re}\alpha| < |\operatorname{Re}\beta|$ доказать, что
$$\int\limits_0^{\infty} e^{\alpha x}(\operatorname{ch} x)^{-\beta}dx = 2^{\beta-1}\,\mathrm{B}\left(\frac{\beta+\alpha}{2},\ \frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

4) При $|\operatorname{Re}\alpha| < |\operatorname{Re}\beta|$ доказать, что
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}\alpha x}{(\operatorname{ch}x)^\beta}\,dx = 2^{\beta-1}\,\mathrm{B}\left(\frac{\beta+\alpha}{2},\ \frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$
5) При $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) < 0$ доказать, что
$$\int\limits_0^{+\infty} (\operatorname{sh}x)^{2\alpha-1}(\operatorname{ch}x)^{2\beta-1}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}(\alpha,\ -\alpha-\beta).$$

6. Пусть Γ — произвольная спрямляемая кривая, идущая из точки $z = -\dfrac{\pi}{2}$ в точку $z = \dfrac{\pi}{2}$, оставаясь в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im}z > 0\}$. Под $(\sin z)^\alpha$ на кривой Γ мы будем понимать ту ветвь этой функции в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im}z > 0\}$, которая обращается в единицу в точке $z = -\dfrac{\pi}{2}$. Доказать, что при всех комплексных значениях α справедлива формула
$$\int\limits_\Gamma (\sin z)^\alpha\,dz = \frac{1+e^{\pi i\alpha}}{2}\,B\left(\frac{\alpha+1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

7. Пусть Γ — произвольная спрямляемая кривая, идущая из точки $z = -i$ в точку $z = i$, оставаясь в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re}z > 0\}$. Под $z^{\alpha-1}$ и $(z^2+1)^{\beta-1}$ на кривой Γ мы будем понимать те ветви этих функций в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re}z > 0\}$, которые обращаются в единицу в точках $z = 1$ и $z = 0$ соответственно. Доказать, что при $\operatorname{Re}\beta > 0$ и при любом комплексном значении α справедлива формула
$$\int\limits_\Gamma z^{\alpha-1}(z^2+1)^{\beta-1}\,dz = i\cos\frac{\pi\alpha}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\ \beta\right).$$

8. Доказать, что

1) при любом α и при $\operatorname{Re}\beta > 0$
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\beta-1}\cos\alpha\varphi\,d\varphi = 2^{-\beta}\sin\frac{\pi(\beta-\alpha)}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha-\beta+1}{2},\ \beta\right);$$

2) при любом α и при $\operatorname{Re}\beta > -\dfrac{1}{2}$
$$\int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\beta}\cos^2\alpha\varphi\,d\varphi = 2^{-2\beta-2}\cos\pi(\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(\alpha-\beta,\ 2\beta) + \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right);$$

3) при $\operatorname{Re}\beta < 1$ и $\operatorname{Re}(\alpha-\beta) > 0$
$$\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{(\operatorname{sh}x)^\beta}\,dx = 2^{\beta-1}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ 1-\beta\right);$$

4) при $\operatorname{Re}\beta > -1$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) < 0$, $\operatorname{Re}(\alpha-\beta) > 0$,

$$\int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^\beta \operatorname{sh}\alpha x\,dx = 2^{-\beta-2}\left[\mathrm{B}\left(\beta+1,\ -\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \mathrm{B}\left(\beta+1,\ \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right].$$

9. Доказать, что при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos\varphi - \sin\varphi)^{2\alpha-1}(\cos\varphi + \sin\varphi)^{2\beta-1}d\varphi = 2^{\alpha+\beta-2}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta).$$

10. Доказать, что при $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ справедлива формула

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}\right)^{2\alpha-1} d\varphi = \frac{\pi}{2\sin\pi\alpha}.$$

11. Доказать формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^t \cdot t^{-z} dt = \frac{1}{\Gamma(z)},$$

где Γ — положительно ориентированная граница области

$$\{t\colon |t| > \rho, \quad |\arg t| < \pi - \eta\}, \qquad \left(0 \leqslant \eta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

12. Обозначим через $D_{\sigma,\rho}$ полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Re} z < \sigma\}$, из которой выброшены круги $\{z\colon |z+n| < \rho\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Доказать, что при любых фиксированных значениях постоянных $\rho > 0$, σ и m справедливо неравенство

$$|\Gamma(z)| \leqslant M(1+|z|)^{-m} \quad (z \in D_{\sigma,\rho})$$

с некоторой постоянной M, зависящей от выбора чисел ρ, σ, m.

13. Доказать, что

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\xi\right)\right| = \sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi}}, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

14. Доказать, что при любых значениях s, лежащих в угле $\left\{s\colon |\arg s| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$, справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12 - i\infty}^{\frac12 + i\infty} \Gamma(z)s^{-z}\,dz = e^{-s}.$$

Глава 6
Конформные отображения

§ 25. Геометрический смысл производной

Справочные сведения

Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ (т. е. ее производная $f'(z)$ существует в некоторой окрестности точки z_0) и пусть $f'(z_0) \neq 0$.

Рассмотрим гладкую кривую Γ на $\mathbb{C}$, проходящую через точку z_0 (считаем, что Γ принадлежит окрестности точки z_0, в которой существует $f'(z)$). Ее образ $\Gamma' = f(\Gamma)$ — также гладкая кривая, проходящая через точку $w_0 = f(z_0)$. Для произвольной точки $z \in \Gamma$, $z \neq z_0$, обозначим $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = f(z) - f(z_0) = w - w_0$.

Поскольку существует и не равна нулю производная $f'(z_0)$, то $\Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$, откуда

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}, \tag{1}$$

$$\arg f'(z_0) = \arg b' - \arg b, \tag{2}$$

где b' — касательный вектор к кривой Γ' в точке w_0, b — касательный вектор к кривой Γ в точке z_0, причем в силу неоднозначности arg равенство (2) следует понимать с точностью до слагаемого $2\pi n$.

1. Постоянство линейных растяжений

1.1. Правая часть формулы (1) является *коэффициентом линейного растяжения кривой Γ в точке z_0 при отображении f*. Как видно из равенства (1), эта величина для заданной точки z_0 не зависит от выбора гладкой кривой Γ и равна $|f'(z_0)|$. Это свойство называется *свойством постоянства линейных растяжений отображения f в точке z_0*.

Итак, геометрический смысл модуля производной состоит в том, что $|f'(z_0)|$ — это коэффициент *линейного растяжения в точке z_0*.

1.2. Если f взаимно-однозначно переводит кривую Γ в кривую Γ', то их длины можно вычислить соответственно по формулам:

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} |dz|, \quad l(\Gamma') = \int_{\Gamma'} |dw| = \int_{\Gamma} |f'(z)||dz|. \tag{3}$$

Отсюда следует, что величина $|f'(z)|$ является коэффициентом линейного растяжения кривой Γ в точке z при отображении f.

1.3. Из формулы (1) также следует, что

$$|\Delta w| = |f'(z_0)||\Delta z| + o(|\Delta z|),$$

т. е. при отображении $w = f(z)$ окружность $\{z\colon |z-z_0| = \rho\}$ с точностью до $o(\rho)$ переходит в окружность $\{w\colon |w-w_0| = \rho|f'(z_0)|\}$. Поэтому свойство постоянства растяжений называется также *свойством сохранения окружности в малом* при отображении $w = f(z)$.

2. Сохранение угла между кривыми

2.1. Правая часть формулы (2) — это угол *поворота кривой* Γ *в точке* z_0. Как показывает формула (2), угол поворота в точке z_0 один и тот же для всех гладких кривых Γ и равен $\arg f'(z_0)$.

Таким образом, геометрический смысл аргумента производной состоит в том, что $\arg f'(z_0)$ — это *угол поворота кривых в точке* z_0.

2.2. Если Γ_1 и Γ_2 — две разные гладкие кривые, проходящие через точку z_0, то при рассматриваемом отображении $w = f(z)$ каждая из них повернется на один и тот же угол, равный $\arg f'(z_0)$. Отсюда получается следующее *свойство сохранения углов:* при отображении $w = f(z)$ угол между кривыми Γ_1 и Γ_2 в точке z_0 равен углу между их образами (соответственно Γ_1' и Γ_2') в точке $w_0 = f(z_0)$; при этом кривые поворачиваются в одном и том же направлении.

3. Коэффициент растяжения областей. Если отображение

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

регулярно в области $D \subset \mathbb{C}$, то из условий Коши—Римана следует, что для отображения

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y)$$

якобиан равен

$$J(x,y) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

т. е.

$$J(z) = J(x,y) = |f'(z)|^2.$$

Если при этом функция f осуществляет взаимно-однозначное отображение области D на область $G \subset \mathbb{C}$, то площадь области G равна

$$S(G) = \iint\limits_G du\,dv = \iint\limits_D |J(x,y)|\,dx\,dy = \iint\limits_D |f'(z)|^2 dx\,dy. \qquad (4)$$

Примеры с решениями

Пример 1. Найти множество всех точек $z_0 \in \mathbb{C}$, в которых коэффициент линейного растяжения при отображении $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, равен единице.

△ Так как коэффициент линейного растяжения в точке z_0 равен $|f'(z_0)|$, то

$$1 = |f'(z_0)| = \left|\frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2}\right|.$$

Откуда

$$|ad-bc| = |cz_0+d|^2, \quad \left|z_0 + \frac{d}{c}\right| = \frac{\sqrt{|ad-bc|}}{|c|},$$

т. е. искомое множество точек z_0 — это окружность с центром в точке $-\dfrac{d}{c}$ и радиусом $\dfrac{\sqrt{|ad-bc|}}{|c|}$. ▲

Пример 2. Найти множество всех точек $z_0 \in \mathbb{C}$, в которых угол поворота кривых при отображении $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, равен нулю.

△ Так как угол поворота в точке z_0 равен $\arg f'(z_0)$, то

$$0 = \arg f'(z_0) = \arg\left(\frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2}\right).$$

Тогда

$$\arg(ad-bc) = \arg\big((cz_0+d)^2\big)$$

(если выбирать $\arg(ad-bc) \in [0;2\pi)$, то $\arg(cz_0+d)^2 \in [0;2\pi)$), т. е. комплексные числа $(ad-bc)$ и $(cz_0+d)^2$ лежат на одном луче, выходящем из нуля. Тогда $(cz_0+d)^2 = (ad-bc)\cdot t$ для некоторого $t > 0$. Отсюда

$$cz_0 + d = \pm\sqrt{|ad-bc|}\,e^{i\varphi/2}\cdot\sqrt{t}, \quad \text{где} \quad \varphi = \arg(ad-bc) \in [0;2\pi),$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{|ad-bc|}\,e^{i\varphi/2}}{c}\cdot\tau - \frac{d}{c}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

т. е. искомое множество точек z_0 — это прямая, проходящая через точку $-\dfrac{d}{c}$ с направляющим вектором $\dfrac{\sqrt{|ad-bc|}}{c}\,e^{i\varphi/2}$. ▲

Пример 3. Пусть отображение $w = f(z)$ регулярно в точке z_0 и при этом $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим гладкие кривые Γ_1 и Γ_2, проходящие через z_0 так, что $|f(z)| = |f(z_0)|$ для любой $z \in \Gamma_1$, $\arg f(z) = \arg f(z_0)$ для любой $z \in \Gamma_2$.

Доказать, что Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точке z_0 под прямым углом.

$\triangle$ Из условий следует, что образом Γ_1 при отображении f является дуга Γ_1' окружности с центром O радиуса $|f(z_0)|$, а образом Γ_2 является отрезок Γ_2' луча, выходящего из точки O под углом $\arg f(z_0)$. Отсюда следует, что Γ_1' и Γ_2' пересекаются в точке $f(z_0)$ под прямым углом. Значит, по свойству сохранения углов кривые Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точке z_0 под прямым углом. $\blacktriangle$

Пример 4. Найти длину Γ' — образа кривой

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}\colon z = e^{it},\ t \in [0;\pi]\}$$

при отображении $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

$\triangle$ Длина кривой Γ' (образа кривой Γ) выражается формулой (3), т. е.

$$l(\Gamma') = \int\limits_{\Gamma} |w'(z)|\,|dz| = \int\limits_{\Gamma} \left|\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\right|\,|dz| = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{e^{2it}}\right| |i||e^{it}|\,|dt| =$$
$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2}\,\frac{|e^{2it} - 1|}{|e^{2it}|}\,dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2}\,|e^{2it} - 1|\,dt =$$
$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2}\,|\cos(2t) - 1 + i\sin(2t)|\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{(\cos(2t) - 1)^2 + \sin^2(2t)}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos(2t)}dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2 t}dt = \int\limits_0^{\pi} |\sin t|\,dt = \int\limits_0^{\pi} \sin t\,dt = 2. \qquad \blacktriangle$$

Пример 5. Найти площадь G — образа области

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}\colon 2 < |z| < 3,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$$

при отображении $w = z^2$.

△ Площадь области G выражается формулой (4), т. е.

$$S(G) = \iint\limits_D |w'(z)|^2 dx\,dy = \iint\limits_D |2z|^2 dx\,dy = 4\iint\limits_D (x^2+y^2)dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получим

$$S(G) = 4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_2^3 r^3 dr = 4\pi\,\frac{r^4}{4}\bigg|_2^3 = 65\pi. \qquad ▲$$

Задачи

1. Пусть дан луч $\{z\colon \arg(z-z_0)=\varphi\}$, выходящий из точки z_0. Найти коэффициент линейного растяжения $R(\varphi)$ в точке z_0 и угол поворота $\alpha(\varphi)$ в точке z_0 для этого луча при следующих отображениях:
1) $w = z^2$, $z_0 = 1$; 2) $w = \overline{z}^2$, $z_0 = i$;
3) $w = ie^{2z}$, $z_0 = 0$; 4) $w = 2z + i\overline{z}$, $z_0 = 0$;
5) $w = \dfrac{z-z_0}{z+z_0}$ $(z_0 \neq 0)$; 6) $w = \dfrac{1-iz}{1+iz}$, $z_0 = -i$.

2. Найти множества всех точек z_0, в которых коэффициент линейного растяжения при следующих отображениях равен единице:
1) $w = z^2$; 2) $w = z^3$; 3) $w = z^2 - 2z$; 4) $w = \dfrac{1}{z}$; 5) $w = \dfrac{1+iz}{1-iz}$.

3. Найти множества всех тех точек z_0, в которых угол поворота при следующих отображениях равен нулю:
1) $w = iz^2$; 2) $w = -z^3$; 3) $w = z^2 - 2z$;
4) $w = \dfrac{i}{z}$; 5) $w = \dfrac{1+iz}{1-iz}$.

4. Пусть функция $w(z)$ регулярна в точке z_0, а гладкие кривые Γ_1 и Γ_2, проходящие через точку z_0, обладают тем свойством, что

$$\operatorname{Re} w(z) = \operatorname{Re} w(z_0) \quad (z \in \Gamma_1);$$
$$\operatorname{Im} w(z) = \operatorname{Im} w(z_0) \quad (z \in \Gamma_2).$$

Доказать, что если $w'(z_0) \neq 0$, то кривые Γ_1 и Γ_2 пересекаются под прямым углом.

5. Пусть функция $w(z)$ регулярна в точке z_0, а гладкие кривые Γ_1 и Γ_2, проходящие через точку z_0, обладают тем свойством, что

$$|w(z)| = |w(z_0)| \quad (z \in \Gamma_1);$$
$$\operatorname{Re} w(z) = \operatorname{Re} w(z_0) \quad (z \in \Gamma_2).$$

Доказать, что если $w'(z_0) \neq 0$, то кривые Γ_1 и Γ_2 при пересечении в точке z_0 образуют углы $\pm\arg w(z_0) + k\pi$.

6. Найти длины образов следующих кривых Γ при указанных отображениях:

1) $\Gamma = \{z\colon z = it + 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\},\ \ w = z^2$;
2) $\Gamma = \{z\colon z = it,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\},\ \ w = e^z$;
3) $\Gamma = \{z\colon z = (1+i)t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\},\ \ w = e^z$;
4) $\Gamma = \{z\colon z = (1+i)t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\},\ \ w = z^m \ \ (m = 1, 2, \ldots)$.

7. Найти площади образов областей D при указанных отображениях:

1) $D = \left\{z\colon 2 < |z| < 3,\ |\arg z| < \dfrac{\pi}{4}\right\},\ \ w = z^2$;
2) $D = \{z\colon 0 < |\operatorname{Re} z| < 1,\ |\operatorname{Im} z| < \pi\},\ \ w = e^z$;
3) $D = \{z\colon 0 < |\operatorname{Re} z| < 1,\ 1 < |\operatorname{Im} z| < 2\},\ \ w = \dfrac{z-1}{z+1}$.

8. Найти область, на которую функция $w = e^z$ отображает прямоугольник

$$D = \{1 < x < 2,\ 0 < y < 8\}.$$

Вычислить площадь области $w(D)$ с помощью формулы (4) и объяснить, почему эта формула дает неправильный ответ.

9. Пусть

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n.$$

Обозначим через $L(r)$ длину образа окружности $\{z\colon |z| = r\}$ при отображении $w = P(z)$, а через $S(r)$ — площадь образа круга $\{z\colon |z| < r\}$ при том же отображении. Доказать, что:

1) справедливо неравенство $S(r) \geqslant \pi r^2 |P'(0)|^2$;
2) справедливо неравенство

$$\int_0^r \frac{L^2(t)}{t}\, dt \leqslant 2\pi S(r);$$

3) справедливо неравенство $L(r) \geqslant 2\pi r |P'(0)|$.

Указание. Вначале доказать формулы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P'(re^{i\varphi})\, d\varphi = P'(0); \qquad \iint\limits_{|z|<r} |P'(z)|^2 dx\, dy = \pi \sum_{m=0}^{n} m|a_m|^2 r^{2m}.$$

10. Пусть $Q(z) = z + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k z^{-k}$. Найти площадь образа кольца $\{z\colon r < |z| < R\}$ при отображении $w = Q(z)$, считая площадь каждой элементарной площадки с центром в точке w_0 столько раз, сколько раз функция $Q(z)$ принимает значение w_0 в кольце $\{z\colon r < |z| < R\}$.

11. Пусть функция $w(z)$ регулярна в области D и пусть ее отображение $w = w(z)$ сохраняет евклидово расстояние между точками, т. е. для любой пары точек $z_1 \in D$ и $z_2 \in D$ имеет место равенство

$$|w(z_2) - w(z_1)| = |z_2 - z_1|.$$

Доказать, что $w(z) = e^{i\varphi} z + a$, где φ действительная и a комплексная постоянные.

Ответы

1. 1) $R(\varphi)=2,\ \alpha(\varphi)=0$;

2) $R(\varphi)=2,\ \alpha(\varphi)=-2\varphi-\dfrac{\pi}{2}$; 3) $R(\varphi)=2,\ \alpha(\varphi)=\dfrac{\pi}{2}$;

4) $R(\varphi)=\sqrt{5+4\sin 2\varphi},\ \alpha(\varphi)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi}\right)$;

5) $R(\varphi)=\dfrac{1}{2|z_0|},\ \alpha(\varphi)=-\arg z_0$; 6) $R(\varphi)=\dfrac{1}{2},\ \alpha(\varphi)=-\dfrac{\pi}{2}$.

2. 1) $|z_0|=\dfrac{1}{2}$; 2) $|z_0|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $|z_0-1|=\dfrac{1}{2}$;

4) $|z_0|=1$; 5) $|z_0+i|=\sqrt{2}$.

3. 1) $\arg z_0=-\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{Re} z=0$; 3) $1<z_0<+\infty$;

4) $\operatorname{Im}((1+i)z_0)=0$; 5) $\operatorname{Im}((1-i)(z_0+i))=0$.

6. 1) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$; 2) 2π; 3) $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$; 4) $2^{m/2}$.

7. 1) $\dfrac{65}{2}\pi$; 2) $\pi(e^2-1)$; 3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

8. $w(D)=\{w\colon e<|w|<e^2,\ 0<\arg w<2\pi\}$; нарушается взаимная однозначность $w(z)$ в D.

§ 26. Определение и общие свойства конформных отображений

Справочные сведения

1. Однолистные функции и конформные отображения. Пусть функция $w=f(z)$ задана на множестве $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ и принимает значения в множестве $G=f(D)\subset\overline{\mathbb{C}}$ (если точка z_0 из D — полюс функции $w=f(z)$, то считаем, что $f(z_0)=\infty$). Тогда говорят, что функция f *осуществляет отображение* множества D на множество G.

Функция $f(z)$ называется *однолистной* на множестве $D\subset\overline{\mathbb{C}}$, если для любых точек $z_1,\ z_2\in D$, для которых справедливо равенство $f(z_1)=f(z_2)$, следует, что $z_1=z_2$.

Отображение, осуществляемое функцией f, называется *конформным в области* $D\subset\overline{\mathbb{C}}$, если

1) функция $f(z)$ однолистна на D;

2) функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности каждой точки из D.

Говорят, что отображение f *конформно в точке* $z_0 \in D$, если оно является конформным в некоторой окрестности этой точки.

Для конформности отображения f в области D необходимо, чтобы для каждой точки $z_0 \in D$ отображение f было конформно в z_0. Заметим, что если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то отображение, ею осуществляемое, не является конформным в этой точке.

Критерий конформности в точке. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки $z_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тогда ею осуществляемое отображение f является конформным в точке z_0 в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $z_0 \neq \infty$ — точка регулярности функции $f(z)$ и $f'(z_0) \neq 0$;

2) $z_0 = \infty$ — точка регулярности функции $f(z)$ и $\varphi'(0) \neq 0$ где

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right);$$

3) z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$.

Как показывают приводимые ниже примеры 1 и 2, конформности отображения f в каждой точке области D не достаточно для конформности f в области D, поэтому указанные выше условия (1)–(3) *необходимы, но не достаточны* для конформности отображения f в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$.

2. Основные свойства конформных отображений

2.1. *Групповые свойства*

Свойство 1 (принцип сохранения области). При конформном отображении f образом области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ является область $f(D) \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Свойство 2. Отображение, обратное к конформному отображению, также является конформным.

Свойство 3. Суперпозиция (последовательное выполнение) конформных отображений также является конформным отображением.

2.2. *Геометрические свойства*

Свойство 4 (постоянство линейных растяжений). При конформном отображении f области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ коэффициент линейного растяжения в каждой точке $z_0 \in D$ такой, что $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) \neq \infty$, одинаков для всех гладких кривых, проходящих через z_0, и равен $|f'(z_0)|$. Это означает, что образом окружности $\{z\colon |z - z_0| = \rho\}$ с точностью до $o(\rho)$ является окружность $\{w\colon |w - w_0| = \rho|f'(z_0)|\}$, где $w_0 = f(z_0)$ (см. § 25).

Свойство 5 (сохранение углов). При конформном отображении f области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ углы между кривыми сохраняются в каждой точке

$z_0 \in D$, т. е. угол между кривыми в точке z_0 равен углу между образами этих кривых в точке $w_0 = f(z_0)$, причем если $z_0 \neq \infty$ и $f(z_0) \neq 0$, то угол поворота всех кривых в точке z_0 при отображении f равен $\arg f'(z_0)$.

Замечание. Углом между кривыми в точке $z_0 = \infty$ называется угол между образами этих кривых в точке $\zeta_0 = 0$ при отображении $\zeta = \dfrac{1}{z}$.

В случае конформного отображения односвязной области верна следующая теорема.

Принцип соответствия границ. *Пусть D и G ограниченные односвязные области в $\mathbb{C}$ с жордановыми границами Γ и Γ_1 соответственно и пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает D на G. Тогда $f(z)$ можно продолжить непрерывно на множество $D \cup \Gamma$, причем это продолжение отображает Γ на Γ_1 взаимно-однозначно с сохранением ориентации.*

3. Теорема Римана. *Пусть D — односвязная область расширенной комплексной плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки, G — односвязная область расширенной комплексной плоскости w, граница которой также состоит более чем из одной точки. Тогда существует конформное отображение $w = f(z)$ области D на область G.*

Исключительными являются следующие области:

1) вся расширенная комплексная плоскость — ее можно конформно отобразить только на всю расширенную комплексную плоскость;
2) вся расширенная комплексная плоскость с одной выколотой точкой — ее можно конформно отобразить только на всю расширенную комплексную плоскость с одной выколотой точкой.

Отметим, что конформное отображение односвязной области D на односвязную область G не единственно. Для единственности достаточно, например, выполнения условий

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha, \tag{1}$$

где $z_0 \in D$, $w_0 \in G$, α — действительное число.

Условия (1) называют *условиями нормировки* конформного отображения $w = f(z)$. Эти условия содержат три произвольных действительных параметра: если точка $z_0 \in D$ задана, то точка $w_0 \in G$ содержит два действительных параметра $\operatorname{Re} w_0$, $\operatorname{Im} w_0$ и, кроме этого, условия (1) содержат еще один действительный параметр α.

Геометрические условия (1) будем изображать так, как показано на рис. 26.1.

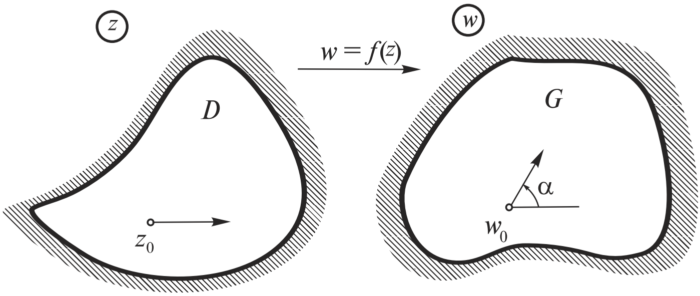

Рис. 26.1

Условия нормировки конформных отображений могут быть и другими, например:

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1,$$

где $z_0 \in D$, $w_0 \in G$, а точки z_1, w_1 принадлежат соответственно границам областей D и G; или

$$f(z_k) = w_k, \quad k = 1,\, 2,\, 3,$$

где z_k, w_k — точки соответственно границ областей D, G, взятых в направлении ориентации этих границ.

Примеры с решениями

Пример 1. Доказать, что отображение $f(z) = e^z$ конформно в каждой точке $z \in \mathbb{C}$, однако не является конформным во всей $\mathbb{C}$.

△ Так как $f'(z) = e^z \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$, то f является конформным в каждой точке $z \in \mathbb{C}$.

Однако $e^{z_1} = e^{z_2}$ при $z_2 = z_1 + 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. однолистность нарушается в любой области, содержащей хотя бы две разные точки z_1 и z_2, такие, что $z_2 = z_1 + 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. ▲

Пример 2. Каким условиям должна удовлетворять область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, чтобы отображение $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ в ней было конформным?

△ 1) Во-первых, отображение f должно быть конформным в каждой точке области D. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $z \neq 0$, тогда

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm 1.$$

Следовательно, отображение f конформно во всех точках плоскости $\mathbb{C}$, кроме точек $0; 1; -1$. Точки 0 и ∞ — полюсы первого порядка функции $f(z)$, следовательно, отображение f конформно в этих точках. Итак, отображение f конформно в каждой точке $\overline{\mathbb{C}}$, кроме точек 1 и -1.

2) Выясним, каким условиям должна удовлетворять область D, чтобы функция $f(z)$ была однолистна в этой области.

Пусть $f(z_1) = f(z_2)$ и $z_1 \neq z_2$, тогда

$$\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right),$$

откуда $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Таким образом, однолистность функции $f(z)$ нарушается в любой области, содержащей хотя бы одну пару точек z_1, z_2 таких, что $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Итак, для конформности отображения $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ необходимо и достаточно, чтобы:

1) область D не содержала точек ± 1;

2) область D не содержала двух разных точек z_1 и z_2, таких, что $z_1 \cdot z_2 = 1$. ▲

Пример 3. Доказать, что области $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ и $D = \{z\colon |z| < 1\}$ невозможно конформно отобразить друг на друга.

△ 1) Если f конформно переводит $\mathbb{C}$ или $\overline{\mathbb{C}}$ в единичный круг, то $f(z)$ — целая функция и $|f(z)| < 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$, поэтому по теореме Лиувилля $f(z) \equiv \mathrm{const}$, что противоречит ее конформности.

2) Если f конформно переводит $\overline{\mathbb{C}}$ в $\mathbb{C}$, то $f(z)$ — целая, причем $f(\infty) \neq \infty$, т. е. f ограничена в окрестности точки ∞. Тогда f ограничена в $\mathbb{C}$, и следовательно, $f(z) \equiv \mathrm{const}$. Противоречие. ▲

Пример 4. Найти все конформные отображения

а) $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$; б) $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$.

△ а) Пусть f конформно переводит $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ и пусть точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ такова, что $f(z_0) = \infty$. Тогда z_0 — полюс первого порядка (критерий конформности в точке).

Главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 равна $g(z) = c_1 z$, если $z_0 = \infty$, или $g(z) = \dfrac{c_{-1}}{z - z_0}$, если $z_0 \neq \infty$. Вычитая из f функцию g, получаем, что $(f - g)$ — целая и ограниченная в $\mathbb{C}$ функция. Следовательно, по теореме Лиувилля $f - g = \mathrm{const}$, т. е.

в обоих случаях

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где} \quad ad - bc \neq 0.$$

В частности, если $f(\infty) = \infty$, то $f(z) = c_1 z + d_1$ $(c_1 \neq 0)$.

б) Пусть отображение f конформно переводит $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$. Тогда оно однолистно в $\mathbb{C}$ и образом любой точки из $\mathbb{C}$ является точка из $\mathbb{C}$. Следовательно, точка ∞ является изолированной особой точкой функции $f(z)$. Она не может быть существенно особой точкой или полюсом порядка выше первого, так как иначе нарушается однолистность в некоторой проколотой окрестности точки ∞.

Главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки ∞ равна $g(z) = c_1 z$, если ∞ — полюс первого порядка или $g(z) = 0$, если ∞ — устранимая особая точка. Тогда аналогично пункту (а) $f - g = \text{const}$, т. е. $f(z) = c_1 z + d_1$ $(c_1 \neq 0)$ (случай $c_1 = 0$ невозможен из-за однолистности f). ▲

Задачи

1. Выяснить, конформно ли отображение $f(z)$ в областях D, указываемых в скобках:

1) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ $(D = \mathbb{C})$;

2) $f(z) = z^2$ $\left(D = \left\{z\colon 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}\right\}\right)$;

3) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ $\big(D = \{z\colon |z| < 1\}\big)$;

4) $f(z) = e^z$ $\big(D = \{z\colon |z| < 4\}\big)$;

5) $f(z) = z^2$ $\left(D = \left\{z\colon 3 < |z+2| < 4,\ 0 < \arg(z+2) < \dfrac{3\pi}{2}\right\}\right)$;

6) $f(z) = e^z$ $\big(D = \{z\colon |\operatorname{Re}[(1+i)z]| < \pi\}\big)$;

7) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ $\big(D = \{z\colon |z - i| < \sqrt{2}\}\big)$.

2. Доказать следующие утверждения:

1) отображение z^2 конформно в области D в том и только в том случае, когда области D и $-D$ не имеют общих точек;

2) отображение $\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ конформно в области D в том и только в том случае, когда области D и $\dfrac{1}{D}$ не имеют общих точек;

3) отображение e^z конформно в области D в том и только в том случае, когда области D и $D + 2\pi i$ не имеют общих точек;

4) отображение $\operatorname{tg} z$ конформно в области D в том и только в том случае, когда области D и $D+\pi$ не имеют общих точек;

5) отображение $\cos z$ конформно в области D в том и только в том случае, когда области D, $-D$, $D+2\pi$, $-D+2\pi$ не имеют попарно общих точек.

3. Пусть $n \geqslant 2$ — целое число, а α — произвольное действительное число. Доказать, что отображение $z^n + ne^{i\alpha}z$ конформно в круге $\{z\colon |z|<1\}$.

4. Доказать, что отображение $z^2 + az$ конформно в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ в том и только в том случае, когда выполняется неравенство $\operatorname{Im} a \geqslant 0$.

5. Доказать, что ни одна из регулярных в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ ветвей функции $\sqrt{z^5}$ не задает конформное отображение этой полуплоскости.

6. Доказать, что если функция $\operatorname{Ln} z$ допускает выделение в области D регулярной ветви, то эта регулярная ветвь задает конформное отображение области D.

7. Пусть n — целое положительное число. Доказать, что если функция $\sqrt[n]{z}$ допускает выделение в области D регулярной ветви, то эта регулярная ветвь задает конформное отображение области D.

8. Пусть отображение $f(z)$ конформно на множестве E, а отображение $g(\zeta)$ определено на множестве E' значений $f(z)$. Доказать, что отображение $g(f(z))$ конформно на множестве E тогда и только тогда, когда $g(\zeta)$ конформно на множестве E'.

9. Пусть функция $f(z)$ регулярна и задает конформное отображение круга $\{z\colon |z|<1\}$, а $f(0)=0$. Доказать, что многозначное отображение $\left\{\sqrt[n]{f(z^n)}\right\}$ в круге $\{z\colon |z|<1\}$ распадается на n регулярных и задающих конформные отображения в круге функций.

10. Доказать, что для конформности квадратного трехчлена az^2+bz+c в выпуклой области D необходимо и достаточно, чтобы этот трехчлен был конформным в каждой точке области D.

Указание. Воспользоваться тем, что середина отрезка, соединяющего любые две точки области D, также лежит в области D.

11. Пусть a, b и z_0 — заданные комплексные числа. Найти наибольшее значение R, при котором отображение z^2+az+b конформно в круге $\{z\colon |z-z_0|<R\}$.

12. Доказать, что отображение z^2+az+b конформно в каждой области D, лежащей по одну сторону от какой-либо прямой, проходящей через точку $z=-\dfrac{a}{2}$.

13. Доказать, что многочлен $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ может быть конформным отображением в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ только в том случае, если его степень не выше второй.

14. Убедиться, что следующие отображения не конформны в указываемых областях D, хотя и конформны в каждой точке этих областей:
1) z^2 $(D\colon = \{z\colon 1 < |z| < 2\})$;
2) z^3 $(D\colon = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\})$;
3) e^z $(D\colon = \{z\colon |z| < 4\})$.

15. Доказать конформность отображения $z^3 - 3z$ в области

$$\{z\colon (\operatorname{Re} z)^2 > 1 + (\operatorname{Im} z)^2,\ \operatorname{Re} z > 0\}.$$

16. Доказать конформность отображения $z + e^z$ в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$.

17. Пусть $-\infty < a_1 < \ldots < a_n < +\infty$. Доказать, что любая регулярная ветвь многозначной функции $f(z) = \sqrt[n]{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}$ в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ задает конформное в этой полуплоскости отображение.

18. Пусть $-\infty < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < +\infty$, $0 < \alpha < 1$. Доказать, что любая регулярная ветвь многозначной функции

$$f(z) = \int\limits_0^z (\zeta - a_1)^{\alpha-1}(\zeta - a_2)^{-\alpha}(\zeta - a_3)^{\alpha-1}(\zeta - a_4)^{-\alpha} d\zeta$$

в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ задает конформное отображение этой полуплоскости.

19. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D, ограниченной простой замкнутой кривой Γ, и непрерывна в замыкании этой области. Доказать, что если образ кривой Γ при отображении $w = f(z)$ является простой замкнутой кривой, то отображение $f(z)$ конформно в области D.

Ответы

1. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) да; 7) да.

11. $R = \left|z_0 + \dfrac{a}{2}\right|$.

§ 27. Дробно-линейные отображения

Справочные сведения

Дробно-линейной называется функция

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{1}$$

где a, b, c, d — заданные комплексные числа. Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что $w \not\equiv \text{const}$. Отображение, осуществляемое функцией (1), называется *дробно-линейным*. При этом предполагается, что если $c \neq 0$, то $w\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$, $w(\infty) = \dfrac{a}{c}$, а если $c = 0$, то $w(\infty) = \infty$. В частности, если $c = 0$, то функция (1) является линейной, а отображение, осуществляемое линейной функцией, называется *линейным.*

1. Свойства дробно-линейных отображений

1.1. *Конформность.* Отображение $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ является конформным во всей расширенной комплексной плоскости.

1.2. *Групповое свойство.* Совокупность всех дробно-линейных отображений образует группу, т. е.

1) суперпозиция (произведение) дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением;
2) отображение $z(w) = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$, обратное к дробно-линейному отображению $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, также является дробно-линейным.

1.3. *Круговое свойство.* При дробно-линейном отображении образом любой окружности или прямой является окружность или прямая.

Отметим, что дробно-линейное отображение $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $c \neq 0$, переводит окружности и прямые, проходящие через точку $z = -\dfrac{d}{c}$, в прямые, а остальные окружности и прямые — в окружности.

1.4. *Свойство сохранения симметрии.* Точки z и z^* называются *симметричными относительно окружности* с центром z_0 и радиусом $R > 0$, если эти точки лежат на одном луче, выходящем из точки z_0, и связаны равенством (рис. 27.1):

$$|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2.$$

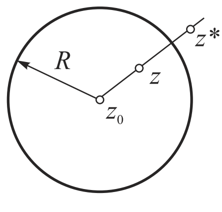

Рис. 27.1

Симметричные относительно окружности $\{z\colon |z-z_0| = R\}$ точки z и z^* связаны соотношением

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}\,.$$

При этом центр z_0 окружности считается точкой, симметричной с точкой $z = \infty$.

В частности, точки z и z^*, симметричные относительно единичной окружности, связаны равенством $z^* = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

При дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности или прямой, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности или прямой.

2. Примеры дробно-линейных отображений.

2.1. *Дробно-линейное отображение, переводящее три точки в три точки.* Существует единственное дробно-линейное отображение, при котором три различные точки z_1, z_2, z_3 из $\overline{\mathbb{C}}$ переходят соответственно в три различные точки w_1, w_2, w_3 из $\overline{\mathbb{C}}$. Это отображение определяется формулой

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\,.$$

2.2. *Конформное отображение полуплоскости на круг.* Любое конформное отображение верхней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на круг $\{w\colon |w| < 1\}$ имеет вид

$$w(z) = \frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}\cdot e^{i\alpha},$$

где $\operatorname{Im} z_0 > 0,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$.

2.3. *Конформное отображение круга на круг.* Любое конформное отображение круга $\{z\colon |z| < 1\}$ на круг $\{w\colon |w| < 1\}$ имеет вид

$$w(z) = \frac{z-z_0}{1-z_0\cdot\overline{z}_0}\cdot e^{i\alpha},$$

где $|z_0| < 1,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$.

2.4. *Конформное отображение полуплоскости на полуплоскость.* Любое конформное отображение верхней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$ имеет вид

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,,$$

где a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$.

Примеры с решениями

Пример 1. Найти образы следующих линий при отображении $w = \dfrac{1}{z}$:

1) Γ_1 — оси Oy; 2) Γ_2 — прямой $y = x$;
3) Γ_3 — прямой $y = 2$;
4) Γ_4 — окружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

$\triangle$ Согласно круговому свойству, образы указанных линий будут прямыми или окружностями. Для их нахождения достаточно найти образы каких-нибудь трех точек или воспользоваться свойством сохранения углов при конформном отображении.

1) Так как $w(0) = \infty$ и $0 \in \Gamma_1$, то $w(\Gamma_1)$ — прямая. Учитывая равенства $w(i) = -i$, $w(-i) = i$, получаем, что $w(\Gamma_1) = \Gamma_1$ (рис. 27.2.)

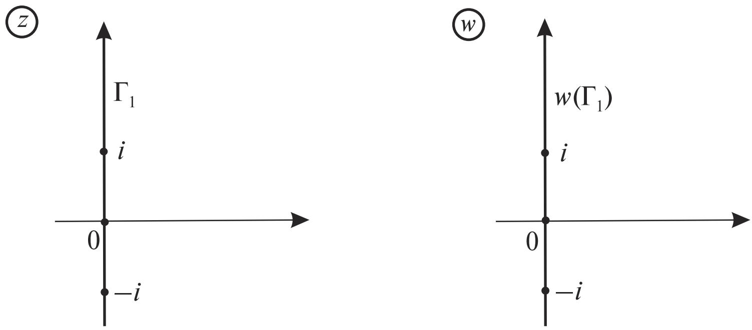

Рис. 27.2

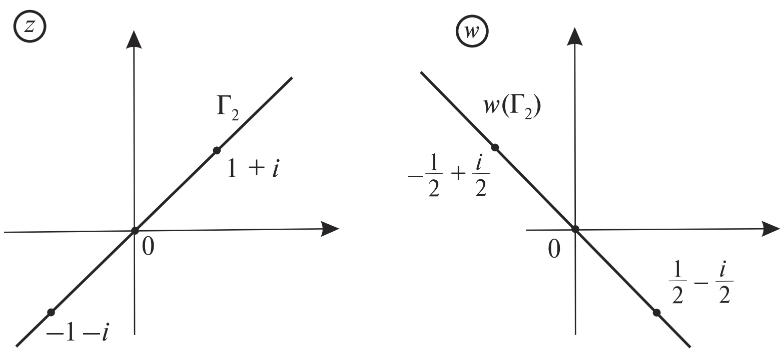

Рис. 27.3

2) Так как $w(0) = \infty$ и $0 \in \Gamma_2$, то $w(\Gamma_2)$ — прямая. Учитывая равенства

$$w(1+i) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \quad w(-1-i) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2},$$

получаем, что $w(\Gamma_2)$ — прямая $y = -x$ (рис. 27.3).

3) Так как точка 0 не принадлежит Γ_3, то $w(\Gamma_3)$ — окружность. Находим значения $w(2i) = -\dfrac{i}{2}$, $w(\infty) = 0$. Прямые Γ_1 и Γ_3 ортогональны. Поэтому окружность $w(\Gamma_3)$ ортогональна прямой $w(\Gamma_1) = \Gamma_1$ (оси $0y$). Следовательно, окружность $w(\Gamma_3)$ касается оси $0x$ в точке $w = 0$ и проходит через точку $w = -\dfrac{i}{2}$. Поэтому ее центр — точка $w = -\dfrac{i}{4}$, а уравнение имеет вид $x^2 + \left(y + \dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$ (рис. 27.4).

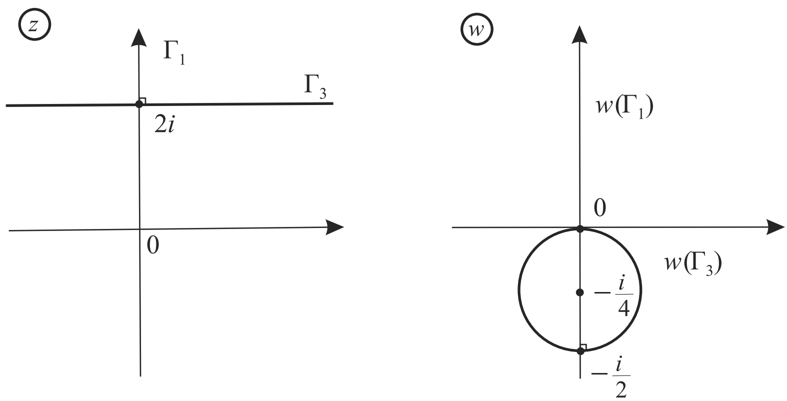

Рис. 27.4

4) Так как точка $0 \in \Gamma_4$ (рис. 27.5), то $w(\Gamma_4)$ — прямая. Окружность Γ_4 касается в точке 0 мнимой оси Γ_1 и проходит через точку $z = 2$. Поэтому прямая $w(\Gamma_4)$ проходит через точку $w(2) = \dfrac{1}{2}$ и параллельна $w(\Gamma_1) = \Gamma_1$ — мнимой оси. Следовательно, $w(\Gamma_4)$ — прямая $x = \dfrac{1}{2}$. ▲

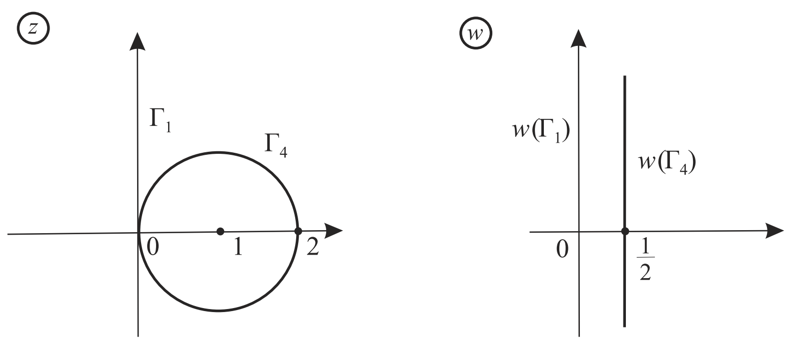

Рис. 27.5

Пример 2. Найти образы следующих линий при отображении функцией $w(z) = \dfrac{z+i}{z-2i}$:

1) Γ_1 — прямой $y = x$;
2) Γ_2 — прямой $y = x + 2$;
3) Γ_3 — окружности $x^2 + (y-4)^2 = 1$;
4) Γ_4 — окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

△ 1) Для данного отображения $w(2i) = \infty$. Так как точка $2i \notin \Gamma_1$ (рис. 27.6), то $w(\Gamma_1)$ будет окружностью. Найдем ее. Точка $z = 2i$ симметрична относительно прямой Γ_1 точке $z = 2$, причем

$$w(2) = \frac{2+i}{2-2i} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\,i.$$

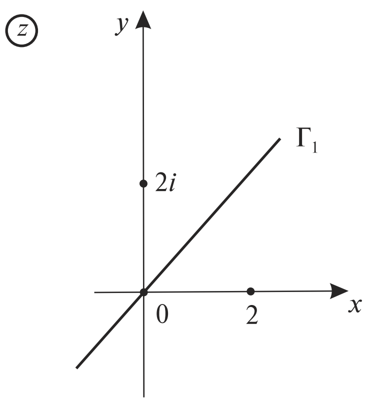

Рис. 27.6

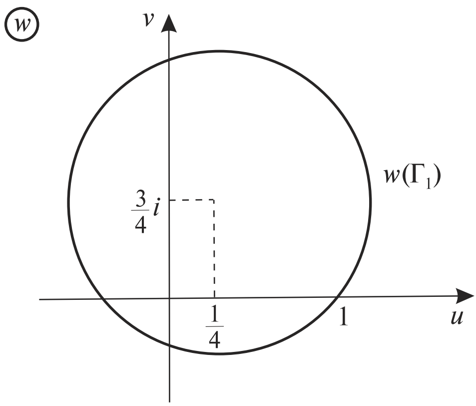

Рис. 27.7

По свойству сохранения симметрии точек при дробно-линейных отображениях точки $w_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3i}{4}$ и ∞ симметричны относительно окружности $w(\Gamma_1)$, т. е. $w_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\,i$ — центр искомой окружности $w(\Gamma_1)$. Кроме того, точка $\infty \in \Gamma_1$ и $w(\infty) = 1$, т. е. $1 \in w(\Gamma_1)$. Поэтому радиус окружности $w(\Gamma_1)$ равен

$$R = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\,,$$

откуда $w(\Gamma_1)$ — окружность, заданная уравнением (рис. 27.7):

$$\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(v - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{8}\,.$$

2) Точка $2i \in \Gamma_2$ и $w(2i) = \infty$ (рис. 27.8). Поэтому $w(\Gamma_2)$ — прямая. Так как $\infty \in \Gamma_2$, то $w(\infty) = 1 \in w(\Gamma_2)$. Поскольку $-2 \in \Gamma_2$, то $w(-2) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3i}{4} \in w(\Gamma_2)$. Через две точки $w_1 = 1$ и $w_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3i}{4}$ проводим прямую $w(\Gamma_2)$ и получаем ее уравнение $v = u - 1$ (рис. 27.9).

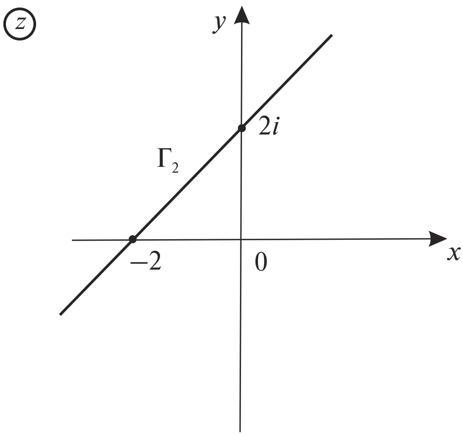

Рис. 27.8

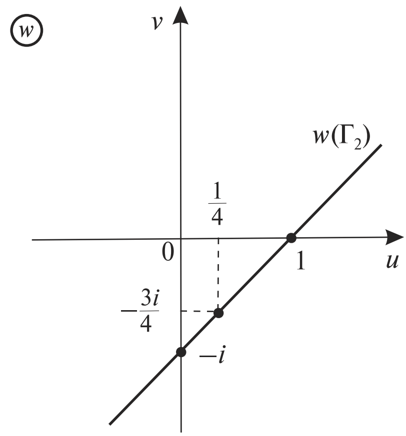

Рис. 27.9

3) Так как окружность Γ_3 не содержит точку $2i$ (рис. 27.10), то ее образ $w(\Gamma_3)$ также будет окружностью. Найдем точку z^*, симметричную точке $z = 2i$ относительно окружности Γ_3. Очевидно, что $z^* = \alpha i$, где

$$(\alpha - 4) \cdot (2 - 4) = R^2 = 1,$$

т. е. $\alpha = 3.5$, а значит,

$$z^* = 3.5 \cdot i, \quad w(3.5i) = \frac{3.5i + i}{3.5i - 2i} = 3.$$

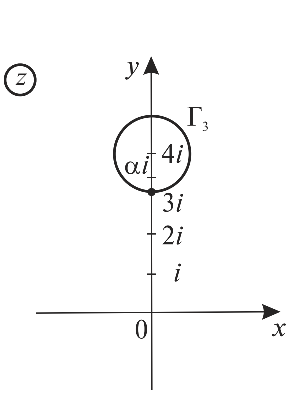

Рис. 27.10

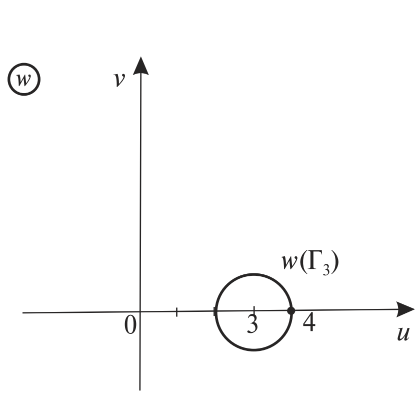

Рис. 27.11

По свойству сохранения симметрии точек при дробно-линейных отображениях, и так как точки $w_1 = \infty$ и $w_1^* = 3$ симметричны относительно окружности $w(\Gamma_3)$, получаем, что центр окружности $w(\Gamma_3)$ находится в точке 3. Кроме того, точка $z = 3i \in \Gamma_3$, и значит, точка $w(3i) = 4 \in w(\Gamma_3)$. Поэтому радиус окружности $w(\Gamma_3)$ равен 1, а ее уравнение имеет вид $(u-3)^2 + v^2 = 1$ (рис. 27.11).

4) Так как окружность Γ_4 содержит точку $2i$ и $w(2i) = \infty$ (рис. 27.12), то ее образ будет прямой. Точка 0 принадлежит Γ_4, поэтому $w(0) = -\dfrac{1}{2} \in w(\Gamma_4)$. Так как $w(z)$ мнимую ось отображает на действительную ось, а окружность Γ_4 ортогональна в точке 0 мнимой оси, то по свойству конформных отображений о сохранении углов получаем, что прямая $w(\Gamma_4)$ ортогональна в точке $z = -\dfrac{1}{2}$ действительной оси. В итоге $w(\Gamma_4)$ есть прямая вида $u = -\dfrac{1}{2}$ (рис. 27.13). ▲

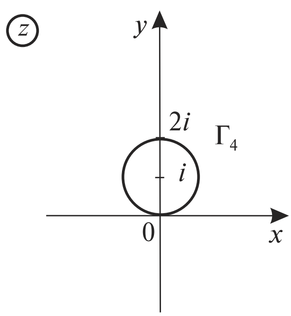

Рис. 27.12

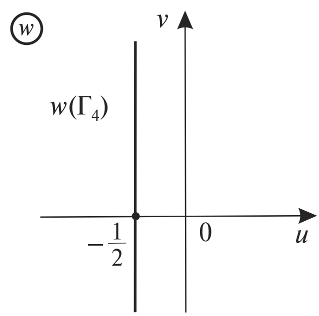

Рис. 27.13

Пример 3. Найти образ области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z\colon |z-1| \leqslant 1,\ |z-i| \leqslant 1\}$ (рис. 27.14) при отображении $w = \dfrac{1}{z}$.

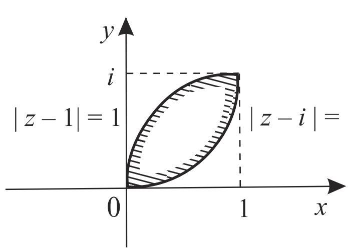

Рис. 27.14

△ Найдем образ границы области D при отображении w. Образом окружности $\{z\colon |z-1|=1\}$ будет прямая $x=\frac{1}{2}$ ($w(0)=\infty$, $w(2)=\frac{1}{2}$, угол с осью Ox в точке 2 сохраняется). При этом дуга Γ_1 этой окружности, которая является частью границы D (рис. 27.15), отобразится на связное подмножество прямой $x=\frac{1}{2}$, соединяющее точки $\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)$ и ∞ (образы концов дуги). Это будет луч, идущий вниз (рис. 27.16), так как он не содержит точку $\frac{1}{2}$ (образ точки 2, принадлежащей дуге, дополняющей Γ_1 до окружности $\{z\colon |z-1|=1\}$).

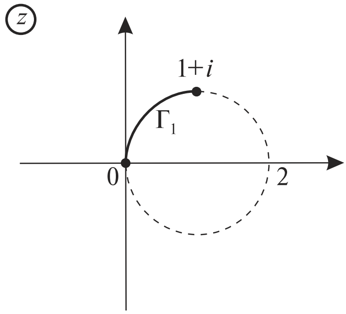

Рис. 27.15

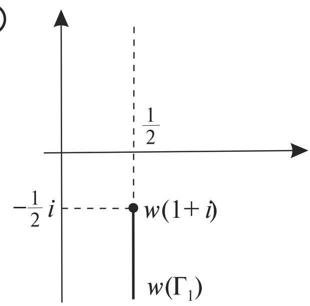

Рис. 27.16

Аналогично функция $w=\frac{1}{z}$ отображает окружность $\{z\colon |z-i|=1\}$ на прямую $y=-\frac{1}{2}$, причем дуга Γ_2 (рис. 27.17) этой окружности, являющаяся частью границы области D, перейдет в луч, идущий вправо (рис. 27.18).

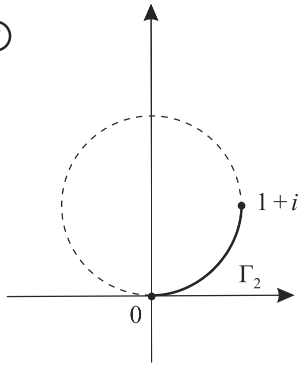

Рис. 27.17

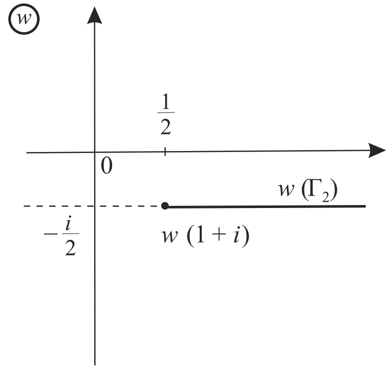

Рис. 27.18

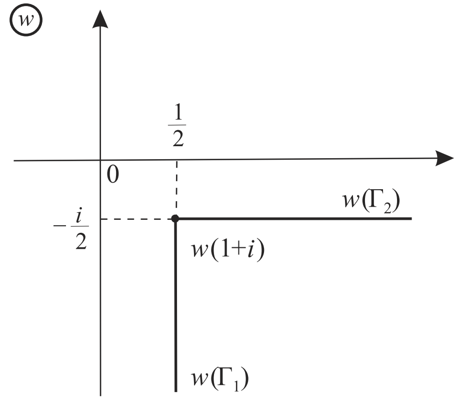

Рис. 27.19

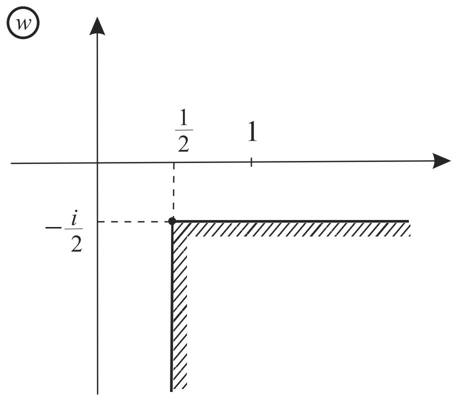

Рис. 27.20

Итак, образом границы области D являются два луча (рис. 27.19). Они делят плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на две области. Так как отображение w взаимно-однозначно в $\overline{\mathbb{C}}$ и образ $w(D)$ области D является областью (согласно принципу сохранения области), то $w(D)$ совпадет с одной из двух образовавшихся областей. Чтобы узнать, с какой именно, достаточно найти образ хотя бы одной точки или из D или из дополнения к D. Например, $w(1) = 1$. Поэтому $w(D)$ — область, содержащая точку 1 (рис. 27.20). ▲

Задачи

1. Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, а C — положительная постоянная. Найти образы каждой линии указанных семейств при отображении $w = \dfrac{1}{z}$:

1) семейство окружностей $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = Cx\}$;
2) семейство прямых $\{(x, y)\colon y = x + C\}$;
3) семейство прямых $\{(x, y)\colon y = Cx\}$.

2. Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Найти образы каждой области указанных семейств при отображении $w = \dfrac{1}{z}$:

1) семейство кругов $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 < Cx\}$ (здесь C — положительная постоянная);

2) семейство кругов $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 < Cx\}$ (здесь C — отрицательная постоянная);

3) семейство кругов $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 < Cy\}$ (C — положительная постоянная);

4) семейство полуплоскостей $\{(x, y)\colon y > Cx\}$ (C — положительная постоянная);

5) семейство кругов $\{z\colon |z-a|<R\}$, где a — фиксированная точка, а положительная постоянная R удовлетворяет условию $R<|a|$;

6) семейство кругов $\{z\colon |z-a|<R\}$, где a — фиксированная точка, а постоянная R удовлетворяет условию $R>|a|$.

3. Найти образ круга $\{z\colon |z-1|<2\}$ при следующих отображениях:

1) $w=1-2iz$; 2) $w=\dfrac{2iz}{z+3}$; 3) $w=\dfrac{z+1}{z-2}$; 4) $w=\dfrac{z-1}{2z-6}$.

4. Найти образ полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z<1\}$ при следующих отображениях:

1) $w=(1+i)z+1$; 2) $w=\dfrac{z}{z-1+i}$;

3) $w=\dfrac{z}{z-2}$; 4) $w=\dfrac{4z}{z+1}$; 5) $w=\dfrac{z-3+i}{z+1+i}$.

5. Найти образы указанных областей D при указанных отображениях:

1) $D=\{z\colon |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $w=\dfrac{1-z}{1+z}$;

2) $D=\{z\colon z\notin[-2,1]\}$, $w=\dfrac{z+2}{1-z}$;

3) $D=\{z\colon |z-i|>1,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $w=\dfrac{1}{z}$;

4) $D=\{z\colon 1<|z|<2\}$, $w=\dfrac{2}{z-1}$.

6. Отыскать дробно-линейные функции $w(z)$, удовлетворяющие условиям:

1) $w(0)=4$, $w(1+i)=2+2i$, $w(2i)=0$;

2) $w(0)=0$, $w(1+i)=2+2i$, $w(2i)=4$;

3) $w(0)=0$, $w(1+i)=\infty$, $w(2i)=2i$.

Найти образ круга $\{z\colon |z-i|<1\}$ при отображениях, задаваемых этими функциями.

7. Отыскать дробно-линейные функции $w(z)$, удовлетворяющие условиям:

1) $w(i)=2$, $w(\infty)=1+i$, $w(-i)=0$;

2) $w(i)=0$, $w(\infty)=1$, $w(-i)=\infty$;

3) $w(i)=-2$, $w(\infty)=2i$, $w(-i)=2$.

Найти образ полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z>0\}$ при отображениях, задаваемых этими функциями.

8. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую область D на область D_1 и удовлетворяющую указанным условиям:

1) $D=\{z\colon |z|<1\}$, $D_1=\{w\colon |w|<1\}$, $w(z_0)=0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ $(|z_0|<1)$;

2) $D=\{z\colon |z|<1\}$, $D_1=\{w\colon |w|<1\}$, $w(z_0)=w_0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ $(|z_0|<1,\ |w_0|<1)$;

3) $D=\{z\colon |\operatorname{Im} z|>0\}$, $D_1=\{w\colon |w|<1\}$, $w(z_0)=0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ $(\operatorname{Im} z_0>0)$;

4) $D=\{z\colon |\operatorname{Im} z|>0\}$, $D_1=\{w\colon |w|<1\}$, $w(z_0)=w_0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ $(\operatorname{Im} z_0>0,\ |w_0|<1)$;

5) $D = \{z\colon |\operatorname{Im} z| > 0\}$, $D_1 = \{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$ $(\operatorname{Im} z_0 > 0,\ \operatorname{Im} w_0 > 0)$;

6) $D = \{z\colon |z| < 1\}$, $D_1 = \{w\colon |w| < 1\}$, $w(1) = 1$, $w(i) = \dfrac{3i-4}{5}$, $w(-1) = -1$;

7) $D = \{z\colon |z| < 1\}$, $D_1 = \{w\colon |w| < 1\}$, $w(i) = i$, $w\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{4i}{5}$;

8) $D = \{z\colon |z| < 1\}$, $D_1 = \{w\colon |w| < 1\}$, $w\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

9) $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_1 = \{w\colon |w| < 1\}$, $w(0) = i$, $w(-1) = 1$, $w(\infty) = -1$;

10) $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_1 = \{w\colon |w| < 1\}$, $w(0) = -i$, $w(2i) = \dfrac{i}{3}$;

11) $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_1 = \{w\colon |w| < 1\}$, $w(1+i) = 0$, $\arg w'(1+i) = \pi$;

12) $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_1 = \{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(-1) = 0$, $w(0) = 2$, $w(1) = \infty$;

13) $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_1 = \{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(-1) = -2$, $w(-2+i) = 1+3i$;

14) $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_1 = \{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(1+i) = i$, $\arg w'(1+i) = \dfrac{\pi}{2}$;

15) $D = \{z\colon |z-1-i| < 2\}$, $D_1 = \{w\colon |w| < 1\}$, $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = \dfrac{\pi}{2}$;

16) $D = \{z\colon \operatorname{Re} z > -1\}$, $D_1 = \{w\colon |w| < 1\}$, $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = \pi$.

9. Найти общий вид конформного отображения следующих областей на кольцо $\{w\colon 1 < |w| < R\}$:

1) $\{z\colon |z-3| > 9,\ |z-8| < 16\}$;

2) $\{z\colon |z-5| > 4,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

10. Пусть $w(z)$ — произвольная дробно-линейная функция, а z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре попарно различные точки расширенной комплексной плоскости. Обозначим

$$w_k = w(z_k), \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Доказать, что

$$\frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

11. Доказать, что линии уровня модуля дробно-линейной функции являются окружностями или прямыми линиями.

12. Доказать, что линии уровня действительной части дробно-линейной функции являются окружностями или прямыми линиями.

13. Найти условие, которому должны удовлетворять точки z_1, z_1^*, z_2, z_2^*, чтобы существовала окружность (или прямая), относительно которой точки z_k были бы симметричны с точками z_k^* $(k = 1,\ 2)$.

14. Пусть функция $w(z)$ мероморфна в области D. Доказать следующие утверждения:

1) если при отображении $w = w(z)$ образом любого отрезка прямой (лежащего в области D) является отрезок прямой, то $w(z)$ — линейная функция;

2) если при отображении $w = w(z)$ образом любого отрезка прямой (лежащего в области D) является дуга окружности или отрезок прямой, то $w = w(z)$ — дробно-линейная функция.

Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *неподвижной точкой дробно-линейного преобразования* f, если $f(a) = a$.

15. Доказать утверждения:

1) каждое дробно-линейное преобразование имеет хотя бы одну неподвижную точку (конечную или бесконечную);

2) каждое дробно-линейное преобразование, отличное от тождественного, имеет не более двух неподвижных точек (конечных и бесконечных).

16. Доказать, что дробно-линейное преобразование f с единственной неподвижной точкой $a \in \overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{f(z) - a} = \frac{1}{z - a} + A, \quad A \in \mathbb{C},$$

при $a \neq \infty$, а при $a = \infty$ имеет вид

$$f(z) = z + A, \quad A \in \mathbb{C}.$$

17. Доказать, что дробно-линейное преобразование f с двумя различными конечными неподвижными точками a и b удовлетворяет уравнению

$$\frac{f(z) - a}{f(z) - b} = A \cdot \frac{z - a}{z - b}, \quad A \in \mathbb{C}.$$

Ответы

1. 1) Семейство прямых $\operatorname{Re} w = \dfrac{1}{C}$;

2) семейство окружностей $\left| w + \dfrac{1+i}{2C} \right| = \dfrac{1}{C\sqrt{2}}$;

3) семейство прямых $\operatorname{Im} w = -C \operatorname{Re} w$.

2. 1) Семейство полуплоскостей $\operatorname{Re} w > \dfrac{1}{C}$;

2) семейство полуплоскостей $\operatorname{Re} w < \dfrac{1}{C}$;

3) семейство полуплоскостей $\operatorname{Im} w < -\dfrac{1}{C}$;

4) семейство полуплоскостей $\operatorname{Im} w < -C \operatorname{Re} w$;

5) семейство кругов

$$\left|w - \frac{|a|^2}{a(|a|^2 - R^2)}\right| < \frac{R}{|a|^2 - R^2};$$

6) семейство кругов

$$\left|w - \frac{|a|^2}{a(|a|^2 - R^2)}\right| > \frac{R}{R^2 - |a|^2}.$$

3. 1) $|w - 1 + 2i| < 4$; 2) $|w| < 1$; 3) $|w - 2| > 4$; 4) $\operatorname{Re} w < \frac{1}{4}$.

4. 1) $\operatorname{Re} w - \operatorname{Im} w < 3$; 2) $\operatorname{Re} w - \operatorname{Im} w < 1$;
3) $|w| < 1$; 4) $|w - 3| > 1$; 5) $|w| > 1$.

5. 1) $-\frac{\pi}{2} < \arg w < 0$; 2) $w \notin [0, +\infty]$;

3) $-\frac{1}{2} < \operatorname{Im} w < 0$; 4) $\operatorname{Re} w > -1$, $\left|w - \frac{2}{3}\right| > \frac{4}{3}$.

6. 1) $w = 2iz + 4$, $|w - 2| < 2$;
2) $w = \frac{2z}{z - i}$, $|w - 2| > 2$;
3) $w = \frac{(1 - i)z}{z - 1 - i}$, $\operatorname{Re} w > 0$.

7. 1) $w = (1 + i)\,\frac{z + i}{z - 1}$, $|w - 1| > 1$;
2) $w = \frac{z - i}{z + i}$, $\operatorname{Im} w > 0$;
3) $w = 2i\,\frac{z - 1}{z + 1}$, $|w| < 2$.

8. 1) $w = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0}\, e^{i\alpha}$; 2) $w = \frac{(e^{i\alpha} - w_0 z_0)z - w_0 - z_0 e^{i\alpha}}{(w_0 e^{i\alpha} - z_0)z + 1 - \overline{w}_0 z_0 e^{i\alpha}}$;

3) $w = i\,\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0}\, e^{i\alpha}$; 4) $w = \frac{(w_0 + e^{i\alpha})z - \overline{z}_0 w_0 - i z_0 e^{i\alpha}}{(1 + i\overline{w}_0 e^{i\alpha})z - \overline{z}_0 - i z_0 \overline{w}_0 e^{i\alpha}}$;

5) $w = \frac{(w_0 - \overline{w}_0 e^{i\alpha})z + z_0 \overline{w}_0 e^{i\alpha} - w_0 \overline{z}_0}{(1 - e^{i\alpha})z + z_0 e^{i\alpha} - \overline{z}_0}$; 6) $w = \frac{2z - 1}{2 - z}$;

7) $w = \frac{2z + i}{2 - iz}$; 8) $w = \frac{(5 - 3i)z - 4}{4z - 5 - 3i}$; 9) $w = \frac{i - 1 - z}{z + 1 + i}$;

10) $w = \frac{iz + 1}{z + i}$; 11) $w = \frac{i - 1 - iz}{z - 1 + i}$;

12) $w = \frac{2z + 2}{1 - z}$; 13) $w = \frac{z - 1}{z + 2}$;

14) $w = \frac{z}{2 - z}$; 15) $w = \frac{2iz + 2}{z + 3 - i}$; 16) $w = -\frac{z}{z + 2}$.

9. 1) $w = e^{i\alpha}\,\frac{3z}{z + 24}$, $\operatorname{Im} \alpha = 0$; 2) $w = 2e^{i\alpha}\,\frac{z - 3}{z + 3}$, $\operatorname{Im} \alpha = 0$.

13. $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1^*} \cdot \frac{z_2^* - z_1^*}{z_2^* - z_1} > 0$.

§ 28. Конформные отображения элементарными функциями

Справочные сведения

1. Степенная функция. Пусть $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим на области $G = \mathbb{C} \backslash [0, +\infty)$ функцию

$$w = |z|^t e^{it \arg z}, \quad \text{где} \quad \arg z \in (0, 2\pi). \tag{1}$$

Эта функция регулярна на G. Причем при $t \neq 0$ функция (1) однолистна на области $D \subset G$, если D не содержит двух различных точек z_1, z_2, таких, что $z_2 = z_1 \cdot e^{2\pi ik/t}$, $k \in \mathbb{Z}$.

В частности, при $t > 0$ функция (1) осуществляет конформное отображение угловой области $G_{0,\varphi_0} = \{z\colon |z| > 0,\ 0 < \arg z < \varphi_0\}$, где $\varphi_0 \leqslant 2\pi$, $|t|\varphi_0 \leqslant 2\pi$, на угловую область $G_{0,t\varphi_0}$ (рис. 28.1).

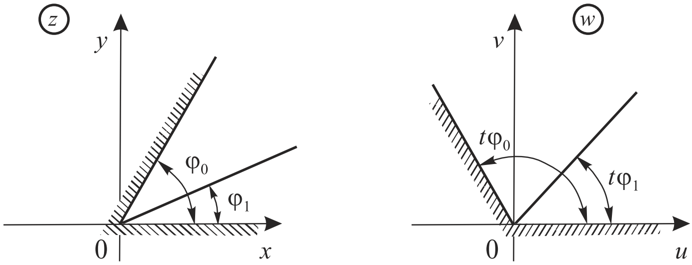

Рис. 28.1

Например, функция $w = z^2$ конформно отображает

1) верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на плоскость с разрезом $\mathbb{C} \backslash [0, +\infty)$ (рис. 28.2);

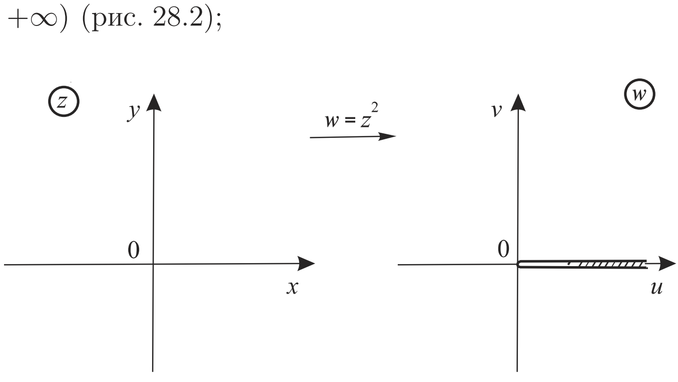

Рис. 28.2

2) полукруг $\{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на круг с разрезом $\{w\colon |w| < 1\} \backslash [0, 1)$ (рис. 28.3);

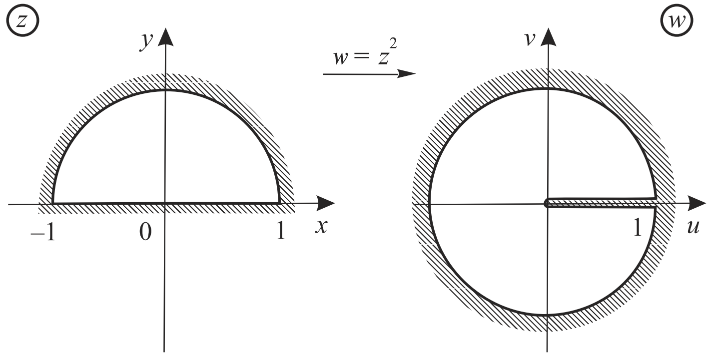

Рис. 28.3

3) полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > a > 0\}$ на внешность параболы $\{w = u + iv\colon v^2 > 4a^2(u + a^2)\}$ (рис. 28.4).

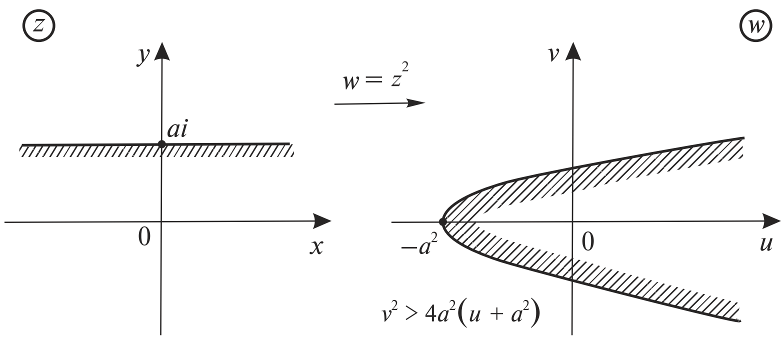

Рис. 28.4

2. Экспоненциальная функция. Функция $w = e^z$ осуществляет конформное отображение в области $D \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда D не содержит двух различных точек z_1, z_2, таких, что $z_2 = z_1 + 2\pi k i$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Например, функция $w = e^z$ конформно отображает

1) полосу $\{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 28.5);

2) полуполосу $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на полукруг $\{w\colon |w| < 1,\ \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 28.6);

3) полуполосу $\{z\colon \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на область $\{w\colon |w| > 1,\ \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 28.7).

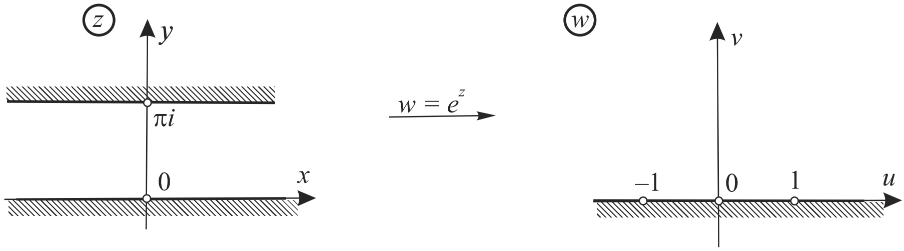

Рис. 28.5

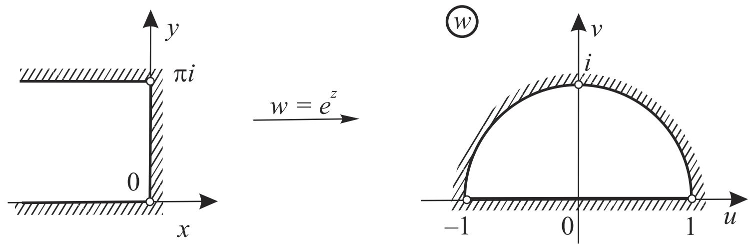

Рис. 28.6

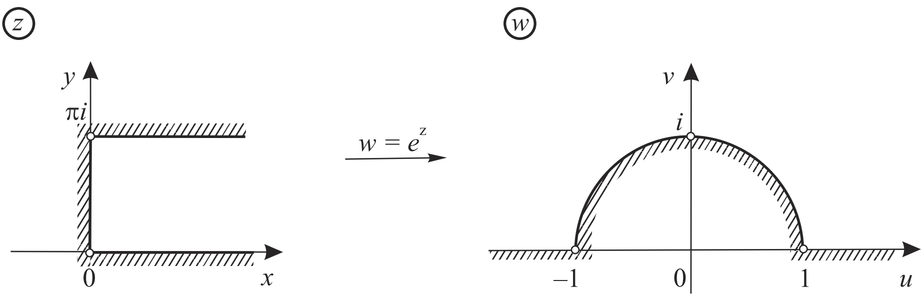

Рис. 28.7

3. Логарифмическая функция. Многозначная функция $w = \operatorname{Ln} z$ распадается на регулярные ветви во всякой односвязной области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, не содержащей точек 0 и ∞. Каждая регулярная ветвь $f(z) \in \operatorname{Ln} z$ в такой области G является однолистной функцией (так как обратная к ней функция e^z является однозначной), поэтому эта ветвь $f(z)$ осуществляет конформное отображение области G на область $f(G)$, которое является обратным к отображению области $f(G)$ на область G функцией $w = e^z$. Например, регулярная ветвь $f(z)$ функции $\operatorname{Ln} z$ конформно отображает

1) плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$ (если $f(-1) = \pi i$) (рис. 28.8);
2) область $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1\}$ на полуполосу $\{w\colon 0 < \operatorname{Im} w < \pi,\ \operatorname{Re} w > 0\}$ (если $f(2 + i0) = \ln 2$) (рис. 28.9).

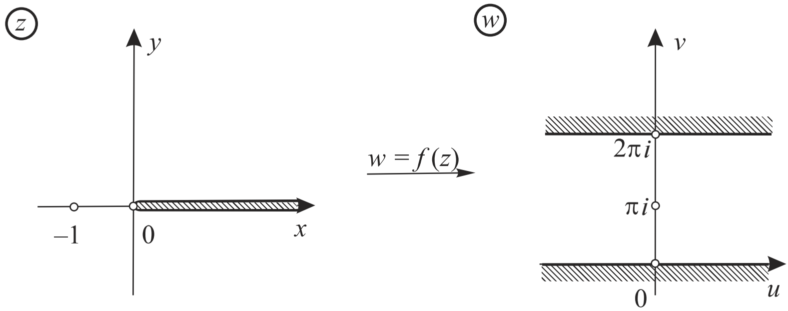

Рис. 28.8

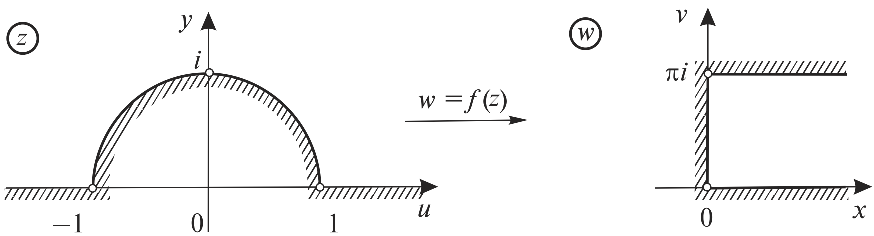

Рис. 28.9

4. Функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ осуществляет конформное отображение области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда точки ± 1 не принадлежат области D и для любой точки $z \in D$ точка $\dfrac{1}{z} \notin D$.

Например, функция Жуковского конформно отображает

1) верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$, т. е. на $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ (рис. 28.10);

Рис. 28.10

2) нижнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z < 0\}$ на $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$;

3) единичный круг $\{z\colon |z| < 1\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$, т. е. на $\mathbb{C}\backslash[-1, 1]$ (рис. 28.11);

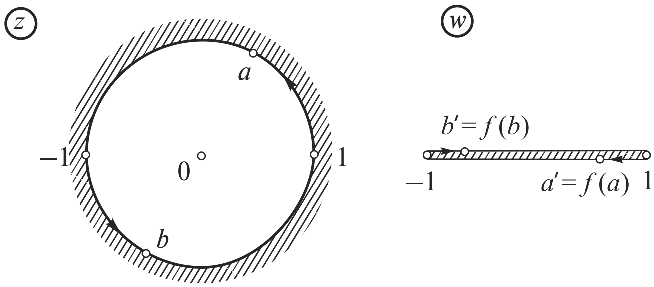

Рис. 28.11

4) внешность единичного круга (т. е. $\{z\colon |z| > 1\}$) на $\mathbb{C}\backslash[-1, 1]$ (рис. 28.12);

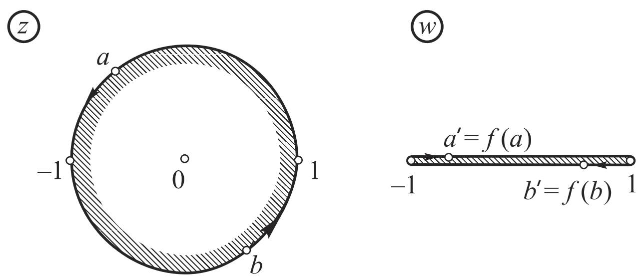

Рис. 28.12

5) область $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 28.13);

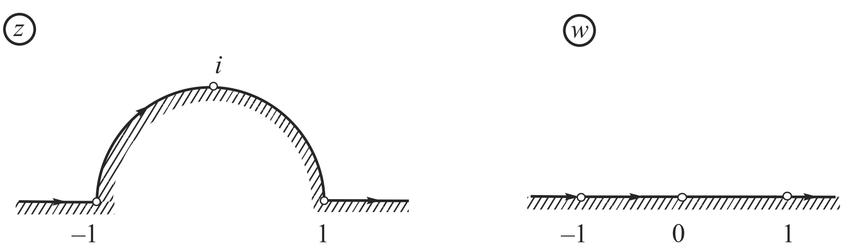

Рис. 28.13

6) полукруг $\{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 28.14);

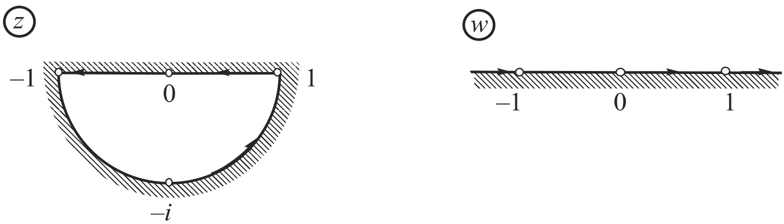

Рис. 28.14

7) область $\{z\colon |z| > \rho > 1\}$ (и круг $\{z\colon |z| < 1/\rho\}$) на внешность эллипса
$$\left\{w = u + iv\colon\ \frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} > 1\right\},$$
где $a_\rho = \dfrac{1}{2}\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right)$, $b_\rho = \dfrac{1}{2}\left|\rho - \dfrac{1}{\rho}\right|$ (рис. 28.15);

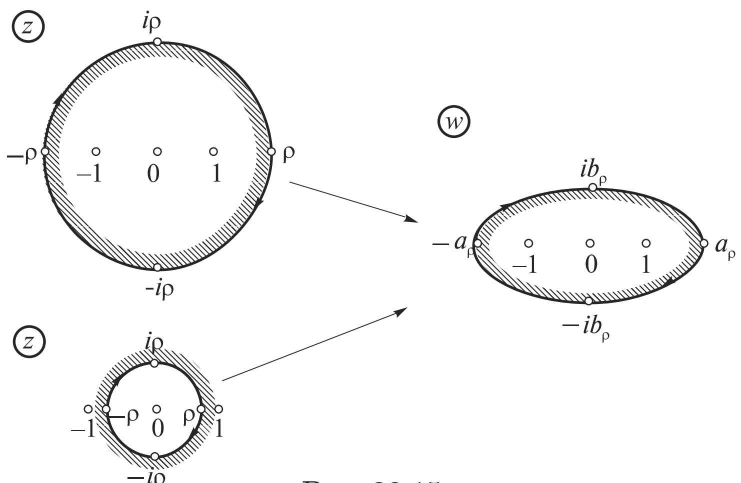

Рис. 28.15

8) угловую область $\{z\colon \alpha < \arg z < \pi - \alpha\}$, где $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, на внешность гиперболы $\dfrac{u^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1$ (рис. 28.16);

9) угловую область $\{z\colon 0 < \arg z < \alpha\}$, где $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, на внутренность правой ветви гиперболы $\dfrac{u^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1$ с разрезом по лучу $[1, +\infty)$ (рис. 28.17);

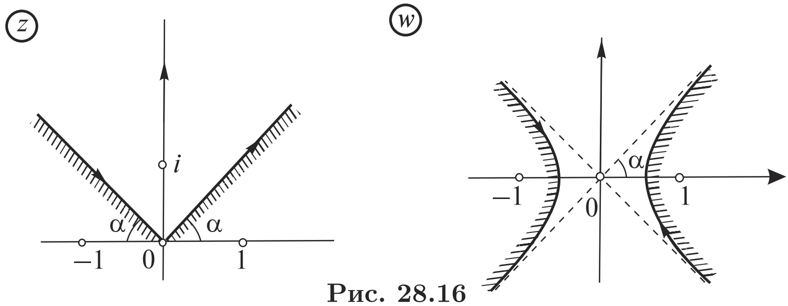

Рис. 28.16

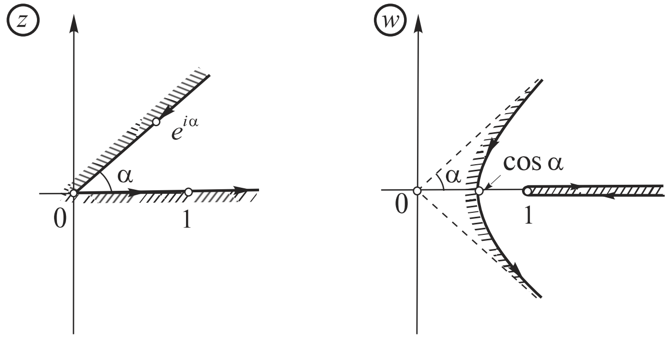

Рис. 28.17

10) угловую область $\{z\colon 0 < \arg z < \pi - \alpha,\ |z| > 1\}$, (рис. 28.18) где $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, на область

$$\left\{w = u + iv\colon\ \frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} > 1,\ u > 0,\ v > 0\right\}.$$

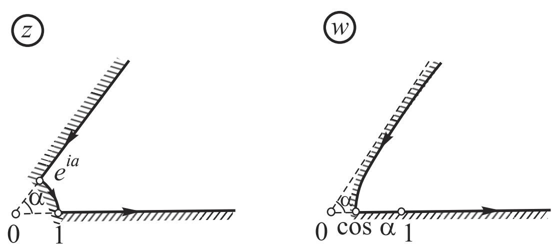

Рис. 28.18

5. Функция, обратная к функции Жуковского. Многозначная функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, являющаяся обратной к функции Жуковского, в любой односвязной области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, не содержащей хотя бы одной кривой, соединяющей точки $z = \pm 1$, распадается на две регулярные ветви. Всякая регулярная в области G ветвь функции $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ является однолистной (так как обратная к ней функция Жуковского является однозначной).

Например, регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$ обратной функции к функции Жуковского конформно отображают

1) плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на внешность единичного круга (если брать $f_1(z)$ такую, что $f_1(\infty) = \infty$) или на внутренность единичного круга (если брать $f_2(z)$ такую, что $f_2(\infty) = 0$) (рис. 28.19);

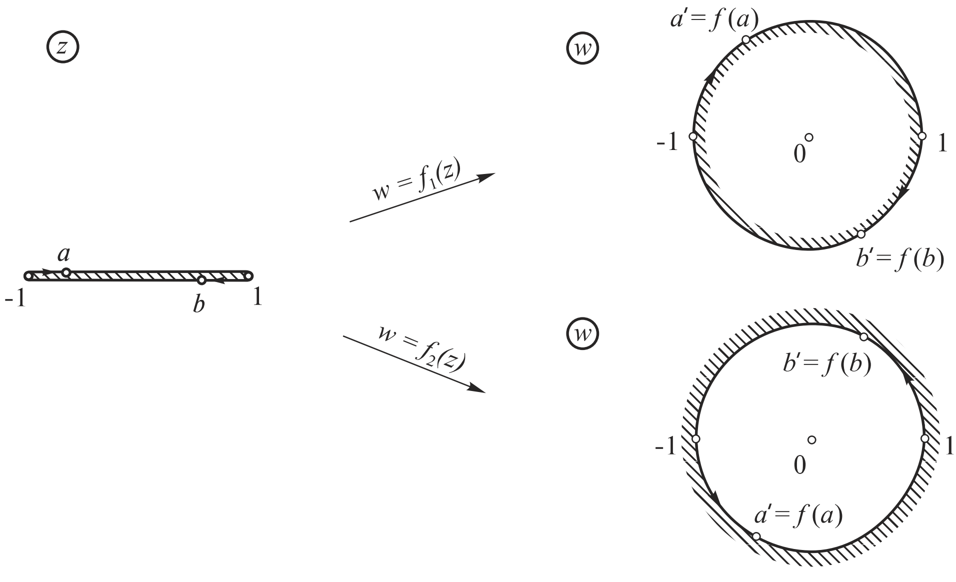

Рис. 28.19

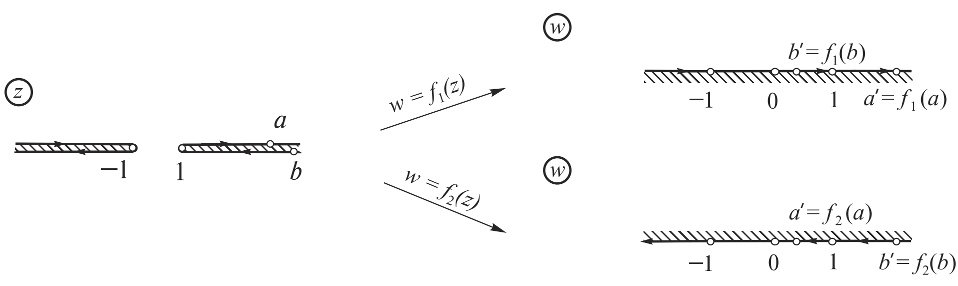

Рис. 28.20

2) плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ на верхнюю полуплоскость (если брать $f_1(z)$ такую, что $f_1(0) = i$) или на нижнюю полуплоскость (если брать $f_2(z)$ такую, что $f_2(0) = -i$) (рис. 28.20);

3) верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на область $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0,\ |w| > 1\}$ (если брать $f_1(z)$ такую, что $f_1(0+i0) = i$) или на область $\{w\colon |w| < 1,\ \operatorname{Im} w < 0\}$ (если брать $f_2(z)$ такую, что $f_2(0+i0) = -i$) (рис. 28.21).

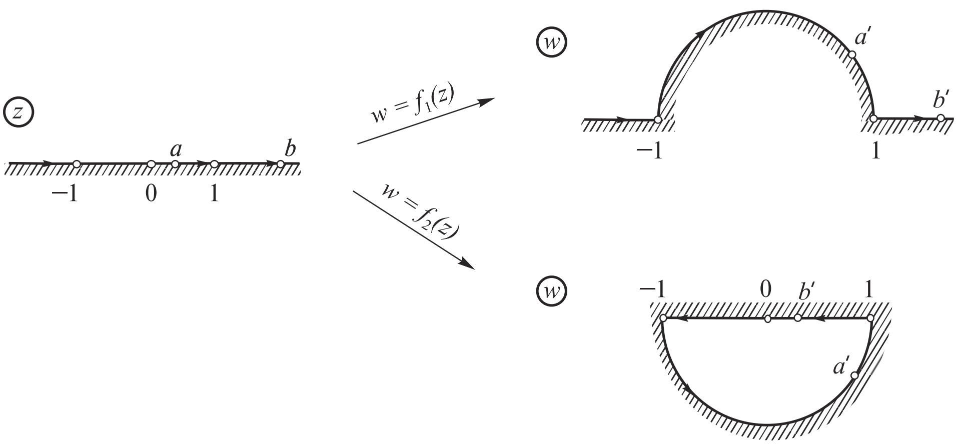

Рис. 28.21

6. Тригонометрические и гиперболические функции. Основные тригонометрические и гиперболические функции можно разложить в суперпозицию уже ранее рассмотренных элементарных функций.

Например, функция $w(z) = \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ является суперпозицией двух функций:

$$\zeta(z) = e^z, \quad w(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

Функция

$$w(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = (-i)\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

является суперпозицией трех функций:

$$\zeta(z) = 2iz, \quad \eta(\zeta) = e^{\zeta}, \quad w(\eta) = (-i)\,\frac{\eta - 1}{\eta + 1}\,.$$

Примеры с решениями

Пример 1. Найти конформное отображение области D, являющейся верхней полуплоскостью $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[0, ih]$, где $h > 0$ (рис. 28.22), на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

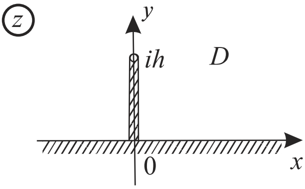

Рис. 28.22

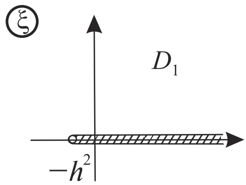

Рис. 28.23

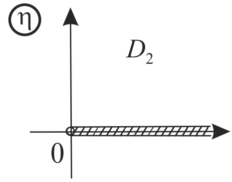

Рис. 28.24

△ Функция $\xi = f_1(z) = z^2$ однолистна на области D и конформно отображает область D на область D_1, являющуюся плоскостью с разрезом по лучу $[-h^2, +\infty)$ (рис. 28.23).

Функция $\eta = f_2(\xi) = \xi + h^2$ конформно отображает область D_1 на область D_2, являющуюся плоскостью с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 28.24).

Функция $w = f_3(\eta) = \sqrt{|\eta|}e^{i\arg\eta/2}$, где $\arg\eta \in (0, 2\pi)$, конформно отображает область D_2 на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

Итак, функция $w = f_3\big(f_2\big(f_1(z)\big)\big)$ конформно отображает область D на область $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$. ▲

Пример 2. Найти конформное отображение области D, являющейся верхней полуплоскостью $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по дуге окружности $\{z\colon |z| = 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha\}$, где $0 < \alpha < \pi$ (рис. 28.25), на верхнюю полуплоскость.

△ Функция Жуковского $\xi = f_1(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ отображает область D на плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[\cos\alpha, +\infty)$ (область D_1) (рис. 28.26).

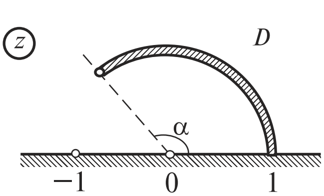

Рис. 28.25

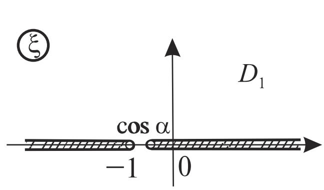

Рис. 28.26

Дробно-линейная функция $\eta = f_2(\xi) = \dfrac{\xi - \cos\alpha}{\xi + 1}$ отображает область D_1 на область D_2, являющуюся плоскостью с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 28.24).

Функция $w = f_3(\eta) = \sqrt{|\eta|}e^{i\arg\eta/2}$, где $\arg\eta \in (0, 2\pi)$, конформно отображает область D_2 на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

Итак, функция $w = f_3\bigl(f_2\bigl(f_1(z)\bigr)\bigr)$ является искомой. ▲

Пример 3. Область $D = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0,\ |z-1| > 1\}\backslash[2,3]$ (рис. 28.27) конформно отобразить на верхнюю полуплоскость.

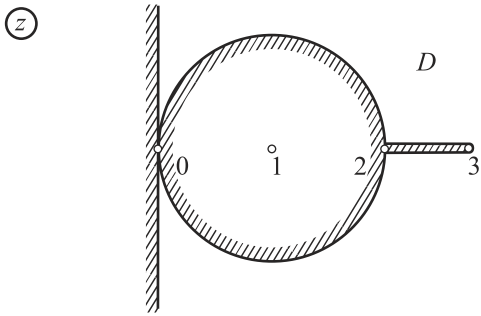

Рис. 28.27

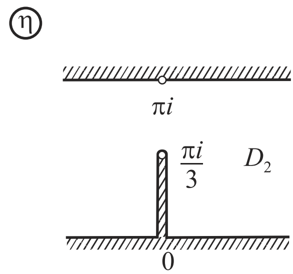

Рис. 28.28

△ Функция $\xi = f_1(z) = \dfrac{1}{z}$ отображает область D на область D_1, являющуюся полосой с разрезом, т. е.

$$D_1 = \left\{\xi\colon 0 < \operatorname{Re}\xi < \frac{1}{2}\right\}\Bigg\backslash\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

Линейная функция $\eta = f_2(\xi) = \pi i(1 - 2\xi)$ отображает область D_1 на область

$$D_2 = \{\eta\colon 0 < \operatorname{Im}\eta < \pi\}\Bigg\backslash\left[0, \frac{\pi}{3}\,i\right]$$

(рис. 28.28). Функция $w = f_3(\eta) = e^{\eta}$ отображает область D_2 на область рис. 28.25 при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Далее см. пример 2. ▲

Пример 4. Найти конформное отображение области D (рис. 28.29), являющейся полуполосой $\{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $\left[\dfrac{\pi i}{2}; \dfrac{\pi i}{2} + 1\right]$ на верхнюю полуплоскость.

△ Функция $\xi = f_1(z) = e^z$ отображает область D на область D_1 (рис. 28.30), являющуюся верхней полуплоскостью с выброшенным единичным полукругом и разрезом $[i,\ ei]$. Функция $\eta = f_2(\xi) = \dfrac{1}{2}\left(\xi + \dfrac{1}{\xi}\right)$ отображает область D_1 на верхнюю полуплоскость с разрезом $[0,\ i\operatorname{sh} 1]$ (рис. 28.22 при $h = \operatorname{sh} 1$). Далее воспользоваться решением примера 1. ▲

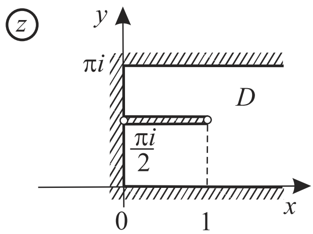

Рис. 28.29

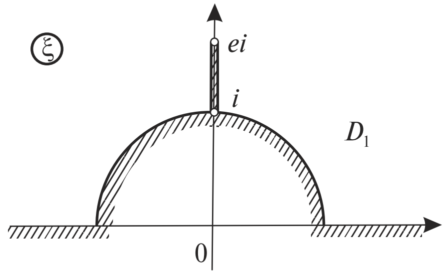

Рис. 28.30

Задачи

1. Найти образы при отображении $w = z^2$ следующих линий:

1) $\{z\colon \arg z = \alpha\}$ $(-\pi < \alpha \leqslant \pi)$; 2) $\{z\colon \operatorname{Re} z = a\}$ $(a > 0)$;

3) $\{z\colon \operatorname{Im} z = a\}$ $(a > 0)$; 4) $\left\{z\colon |z| = \rho,\ |\arg z| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$.

2. Найти образы при отображении $w = z^2$ следующих областей:

1) $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$; 2) $\{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$; 3) $\left\{z\colon \pi < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}\right\}$;

4) $\left\{z\colon |z| < 1,\ \dfrac{5\pi}{4}\pi < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}\right\}$;

5) $\{z\colon \operatorname{Im} z < -1\}$; 6) $\{z\colon \operatorname{Re} z > 1\}$;

7) $\left\{z\colon |z| < 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; 8) $\left\{z\colon |z| > \dfrac{1}{2},\ \operatorname{Re} z > 0\right\}$.

3. Найти образы следующих областей D при отображении регулярной ветвью $f(z)$ функции $\{z\colon \sqrt{z}\}$, выделяемой ее значением в указанной точке:

1) $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, $g(i) = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$;

2) $D = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$, $g(1) = 1$;

3) $D = \{z\colon z \notin [0, +\infty]\}$, $g(-1) = -i$;

4) $D = \{z\colon z \notin [-\infty, -1]\}$, $g(4) = 2$;

5) $D = \{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $g(i/2) = \dfrac{1+i}{2}$;

6) $D = \left\{z\colon |z| > 1,\ \dfrac{3\pi}{4} < \arg z < \dfrac{5\pi}{4}\right\}$, $g(-1) = i$;

7) $D = \{z\colon (\operatorname{Im} z)^2 > 2\operatorname{Re} z + 1\}$, $g(-1) = -i$;

8) $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0,\ (\operatorname{Im} z)^2 > 4\operatorname{Re} z + 4\}$, $g(-1) = i$.

4. Найти образы множеств E при указанных отображениях:

1) $E = \left\{z\colon \arg z = \dfrac{\pi}{4}\right\}$, $w = z^3$;

2) $E = \left\{z\colon |z| = 2,\ \dfrac{n}{8} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$, $w = z^4$;

3) $E = \{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\},\ \ w = z^{3/2},\ \ w\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{1-i}{4}$;

4) $E = \{z\colon |z| > 4,\ \operatorname{Re} z > 0\},\ \ w = z^{-3/2},\ \ w(9) = -\dfrac{1}{27}$;

5) $E = \left\{z\colon |\arg z| < \dfrac{\pi}{8}\,,\ z \in [0,1]\right\},\ \ w = z^{8}$.

5. Найти какие-либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения областей, изображенных на рис. 28.31–28.45, на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

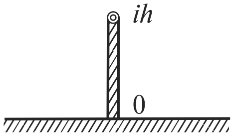

Рис. 28.31

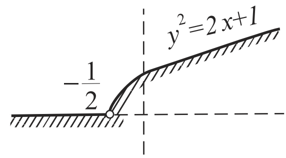

Рис. 28.32

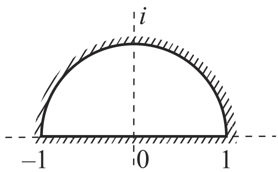

Рис. 28.33

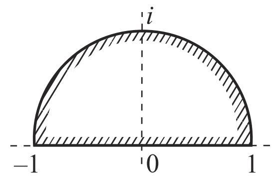

Рис. 28.34

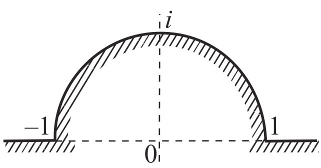

Рис. 28.35

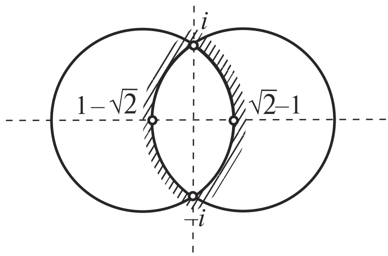

Рис. 28.36

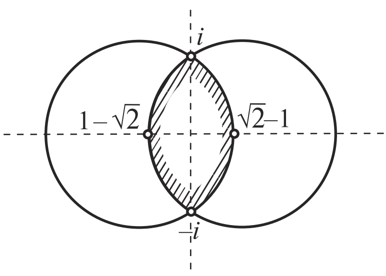

Рис. 28.37

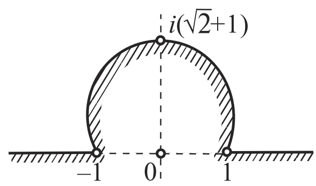

Рис. 28.38

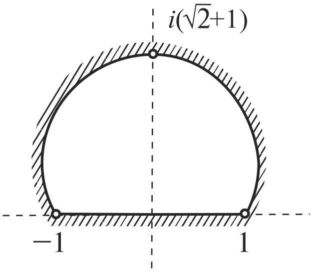

Рис. 28.39

Рис. 28.40

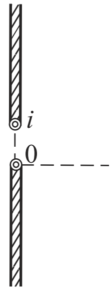

Рис. 28.41

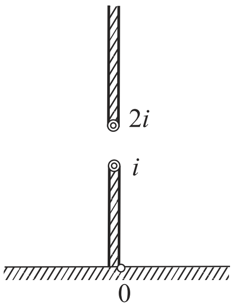

Рис. 28.42

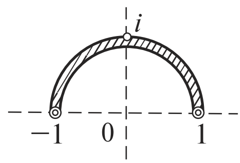

Рис. 28.43

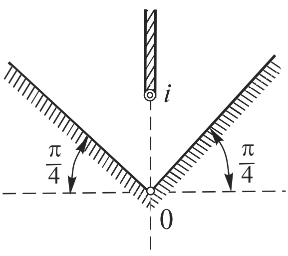

Рис. 28.44

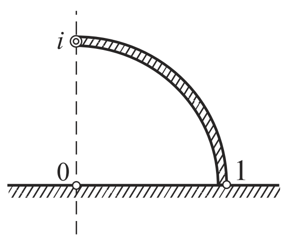

Рис. 28.45

6. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую область

$$\left\{(x,y)\colon\, y^2 > 4(x+1)\right\}\ (x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z)$$

на круг $\{w\colon |w| < 1\}$ и удовлетворяющую условиям

$$w(-4) = 0, \quad \arg w'(-4) = 0.$$

7. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую угол $\left\{z\colon |\arg z| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ на круг $\{w\colon |w| < 1\}$ и удовлетворяющую условиям

$$w(1) = 0, \quad \arg w'(1) = \pi.$$

8. Найти образы следующих областей D при отображении регулярной ветвью функции $w = z + \sqrt{z^2-1}$, выделяемой ее значением в указываемой точке (в неравенствах, определяющих область, положено $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, а a, b и α — действительные постоянные):

1) $D = \left\{(x,y)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-1} > 1\right\}$, $(a > 0)$, $w(\infty) = 0$;

2) $D = \left\{(x,y)\colon \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{1-a^2} < 1\right\}$, $(0 < a < 1)$, $w(0) = i$;

3) $D = \{z\colon z \notin [-\infty, -1],\ z \notin [1, +\infty]\}$, $w(0) = i$;

4) $D = \{z\colon z \notin [-1, 1]\}$, $w(\infty) = \infty$;

5) $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, $w(+i\infty) = 0$;

6) $D = \left\{(x,y)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-1} < 1,\ y > 0\right\}$, $(a > 1)$, $w(+i0) = i$;

7) $D = \left\{(x,y)\colon \dfrac{x^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{y^2}{\sin^2\alpha} > 1,\ x > 0,\ y > 0\right\}$,
$\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $w(+\infty) = 0$;

8) $D = \left\{(x,y)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-1} < 1,\ z \notin [-1, 1]\right\}$, $(a > 1)$, $w(+i0) = -i$;

9) $D = \left\{(x,y)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-1} < 1,\ \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{b^2-1} > 1\right\}$,
$(a > b > 1)$, $w(z) > 1$ при $b < z < a$.

9. Доказать, что образом области $\{z\colon |z - ih| > \sqrt{1+h^2}\}$ при отображении $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ является вся плоскость w с разрезом по дуге окружности, имеющей концы в точках $w = \pm 1$ и проходящей через точку $w = ih$.

10. Найти какие-либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения областей, изображенных на рис. 28.46–28.61, на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

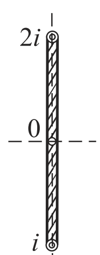

Рис. 28.46

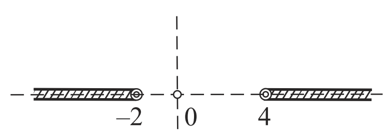

Рис. 28.47

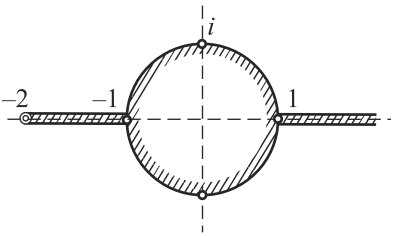

Рис. 28.48

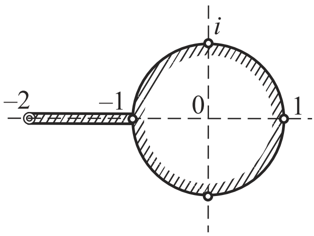

Рис. 28.49

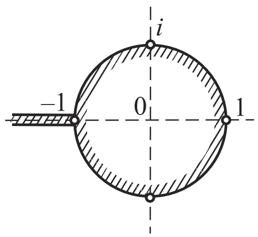

Рис. 28.50

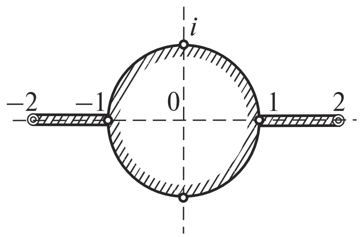

Рис. 28.51

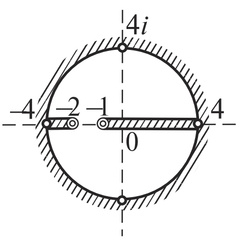

Рис. 28.52

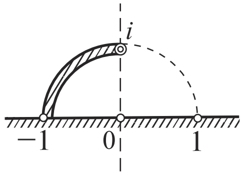

Рис. 28.53

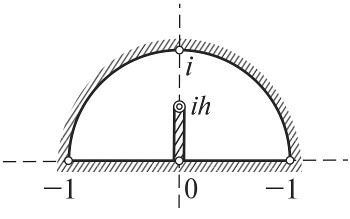

Рис. 28.54

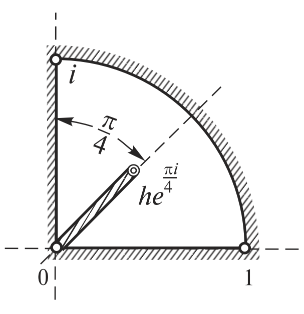

Рис. 28.55

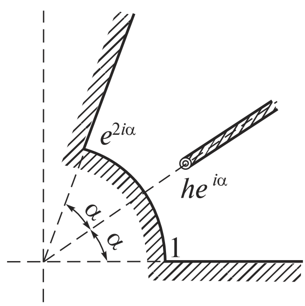

Рис. 28.56

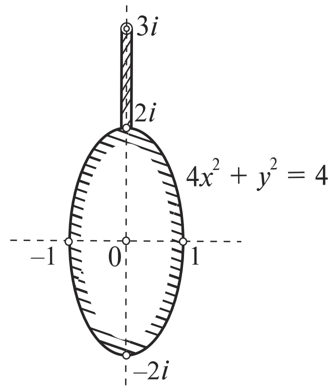

Рис. 28.57

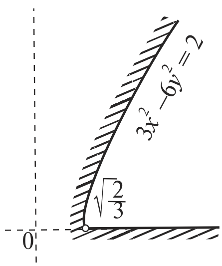

Рис. 28.58

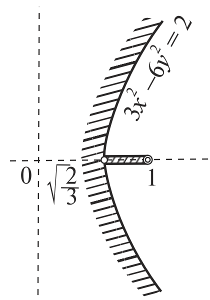

Рис. 28.59

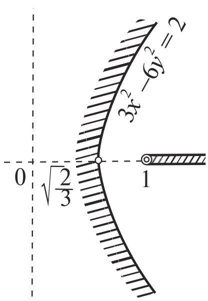

Рис. 28.60

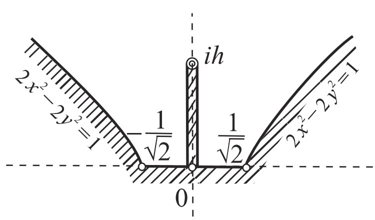

Рис. 28.61

11. Найти какие-либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения областей, изображенных на рис. 28.62–28.69, на круг $\{w\colon |w| < 1\}$.

12. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую полукруг $\{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, на круг $\{w\colon |w| < 1\}$ и удовлетворяющую условиям

$$w\left(\frac{i}{2}\right) = 0, \quad \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = 0.$$

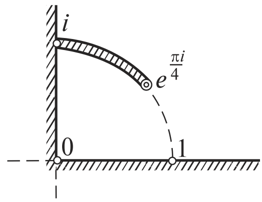

Рис. 28.62

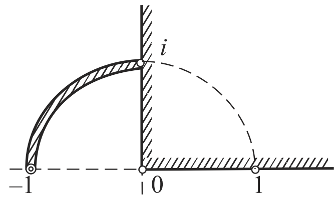

Рис. 28.63

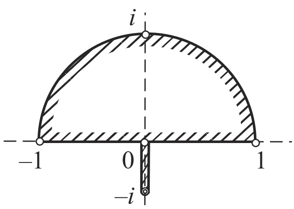

Рис. 28.64

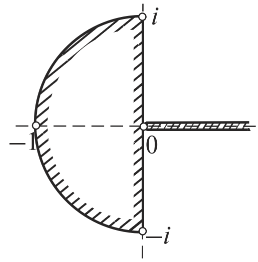

Рис. 28.65

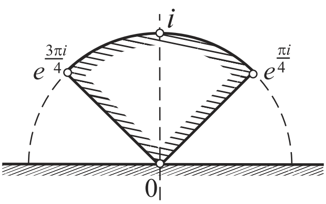

Рис. 28.66

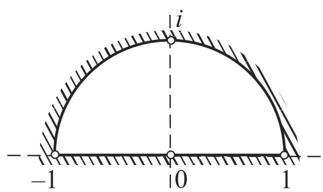

Рис. 28.67

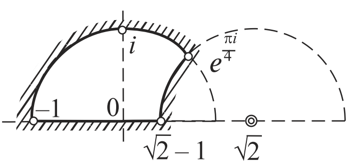

Рис. 28.68

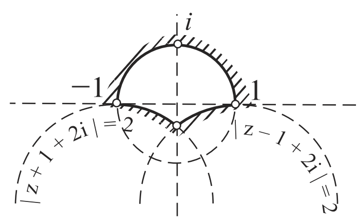

Рис. 28.69

13. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую область $\{z = x + iy\colon x^2 - y^2 < 1\}$ на круг $\{w\colon |w| < 1\}$ и удовлетворяющую условиям $w(0) = 0$, $w(1) = 1$.

14. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую круг $\{z\colon |z| < 1\}$, разрезанный по радиусу $[-1, 0]$, на круг $\{w\colon |w| < 1\}$ и удовлетворяющую условиям

$$w(1) = -1, \quad w(-1 + i0) = \frac{7 - 4i\sqrt{2}}{9}, \quad w(-1 - i0) = \frac{7 + 4i\sqrt{2}}{9}.$$

15. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую всю плоскость z с разрезом по дуге окружности $\{z\colon |z| = 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, на всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ и удовлетворяющую условиям $w(1) = 1$, $w(\infty) = \infty$.

16. Найти образы следующих линий при отображении функцией $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$:

1) $\{z\colon |z| = 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; 2) $\left\{z\colon |z| = 1,\ -\dfrac{3\pi}{4} < \arg z < -\dfrac{\pi}{4}\right\}$;

3) $\{z\colon |z| = 2\}$; 4) $\left\{z\colon |z| = \dfrac{1}{2}\right\}$;

5) $\left\{z\colon \arg z = \dfrac{\pi}{4}\right\}$; 6) $\left\{z\colon \arg z = \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

17. Найти образы следующих областей при отображении функцией $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$:

1) $\{z\colon |z| > 2\}$; 2) $\left\{z\colon |z| < \dfrac{1}{2}\right\}$;

3) $\left\{z\colon \dfrac{\pi}{4} < \arg z = \dfrac{3\pi}{4}\right\}$;

4) $\left\{z\colon \dfrac{\pi}{4} < \arg z = \dfrac{3\pi}{4},\ z \notin [0, i]\right\}$;

5) $\{z\colon |z| < 1,\ z \notin [0, 1]\}$;

6) $\{z\colon |z| > 1,\ z \notin [-2, -1],\ z \notin [1, +\infty]\}$;

7) $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\} \Big\backslash \left\{z\colon |z| = 1,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4} < \arg z < \pi\right\}$;

8) $\left\{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0,\ z \notin \left[-i, -\dfrac{i}{2}\right]\right\}$;

9) $\left\{z\colon |z| < 1,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

10) $\left\{z\colon |z| < 1,\ -\dfrac{3\pi}{4} < \arg z < -\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

18. Найти образы областей D при отображениях, осуществляемых указанными функциями:

1) $D = \{z\colon -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = e^z$;

2) $D = \{z\colon |\operatorname{Im} z| < \pi\}$, $w = e^z$;

3) $D = \left\{z\colon |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$, $w = e^z$;

4) $D = \{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = e^z$;

5) $D = \left\{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2},\ \operatorname{Re} z > 0\right\}$, $w = e^{2z}$;

6) $D = \left\{z\colon 0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z > 0\right\},\ \ w = e^{iz};$

7) $D = \{z\colon z \notin [0, +\infty]\},\ \ w = \ln z,\ \ w(-1) = -\pi i;$

8) $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\},\ \ w = \ln z,\ \ w(i) = \dfrac{\pi i}{2};$

9) $D = \{z\colon z \notin [-\infty, 0],\ z \notin [1, +\infty]\},\ \ w = \ln z,\ \ w(i) = \dfrac{\pi i}{2};$

10) $D = \{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\},\ \ w = \ln z,\ \ w(i - i0) = -\dfrac{3\pi i}{2};$

11) $D = \{z\colon |z| < 1,\ z \notin [0, 1]\},\ \ w = \ln z,\ \ w(-1 + 0) = -\pi i;$

12) $D = \left\{z\colon |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{4}\right\},\ \ w = \operatorname{th} z;$

13) $D = \{z\colon 0 < \operatorname{Re} z < \pi\},\ \ w = \operatorname{tg} z;$

14) $D = \left\{z\colon 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{4}\right\},\ \ w = \operatorname{ctg} z;$

15) $D = \{z\colon 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\},\ \ w = \operatorname{tg} \pi z;$

16) $D = \{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < \pi\},\ \ w = \operatorname{ch} z;$

17) $D = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0,\ -1 < \operatorname{Im} z < 0\},\ \ w = \operatorname{ch} \pi z;$

18) $D = \left\{z\colon \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < 1,\ z \notin \left[\dfrac{i}{2}, \dfrac{1+i}{2}\right]\right\},\ \ w = \operatorname{ch} \pi z;$

19) $D = \{z\colon |\operatorname{Im} z| < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\},\ \ w = \operatorname{sh} z;$

20) $D = \{z\colon 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi,\ \operatorname{Im} z > 0\},\ \ w = \sin z.$

19. Найти какие-либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения областей, изображенных на рис. 28.70–28.85, на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

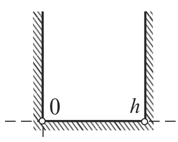

Рис. 28.70

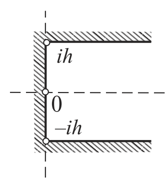

Рис. 28.71

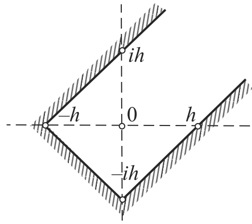

Рис. 28.72

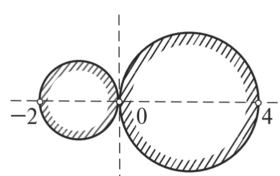

Рис. 28.73

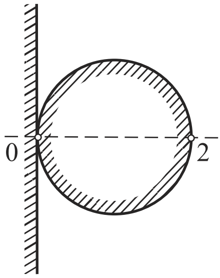

Рис. 28.74

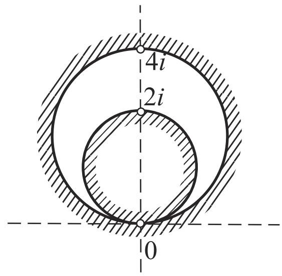

Рис. 28.75

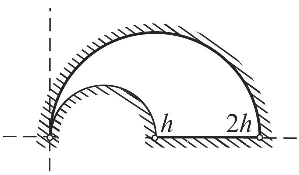

Рис. 28.76

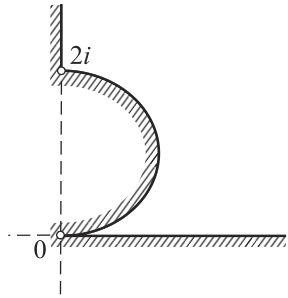

Рис. 28.77

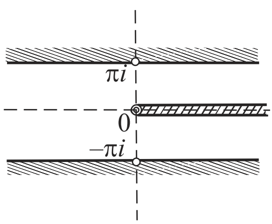

Рис. 28.78

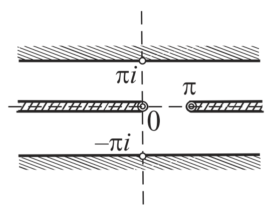

Рис. 28.79

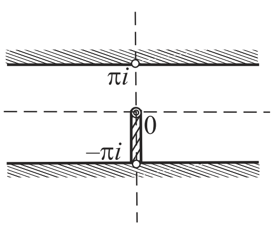

Рис. 28.80

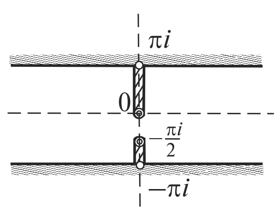

Рис. 28.81

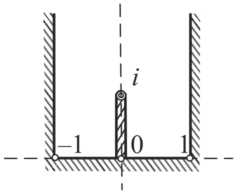

Рис. 28.82

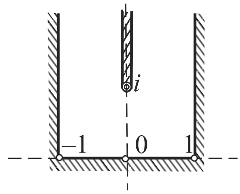

Рис. 28.83

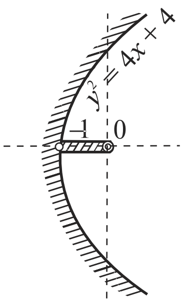

Рис. 28.84

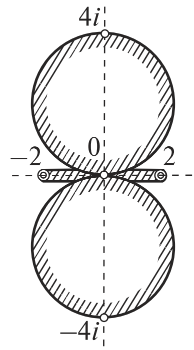

Рис. 28.85

20. Найти какие-либо функции $w(z)$, конформно отображающие области, изображенные на рис. 28.86–28.91, на полосу $\{w\colon 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$.

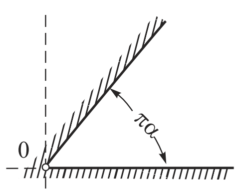

Рис. 28.86

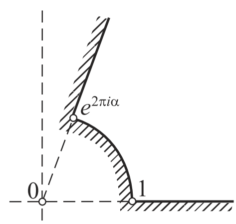

Рис. 28.87

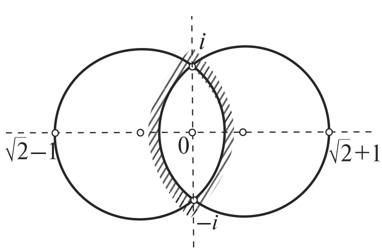

Рис. 28.88

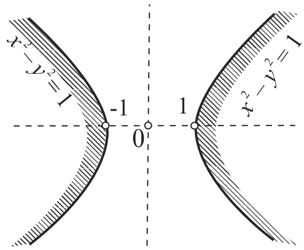

Рис. 28.89

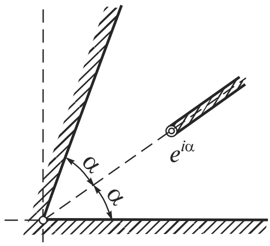

Рис. 28.90

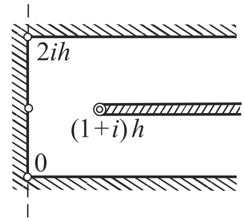

Рис. 28.91

21. Найти функцию $w(z)$ конформно отображающую полосу $\{z\colon |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ на полосу $\{w\colon |\operatorname{Im} w| < \pi\}$ и удовлетворяющую условиям

$$w(\pi i) = +\infty, \quad w(+\infty) = -\pi i, \quad w(-\pi i) = -\infty.$$

22. Найти какие-нибудь функции, осуществляющие конформные отображения областей, изображенных на рис. 28.92–28.107, на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

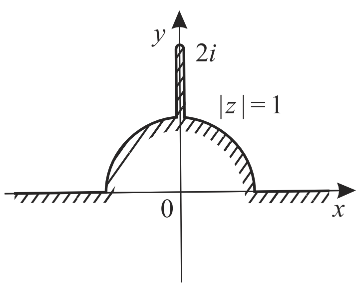

Рис. 28.92

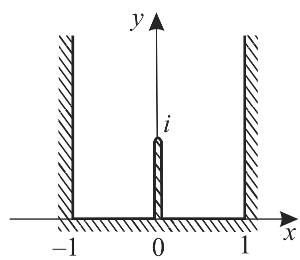

Рис. 28.93

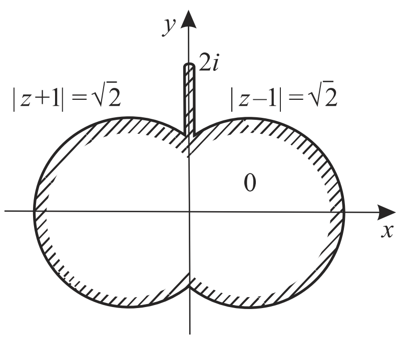

Рис. 28.94

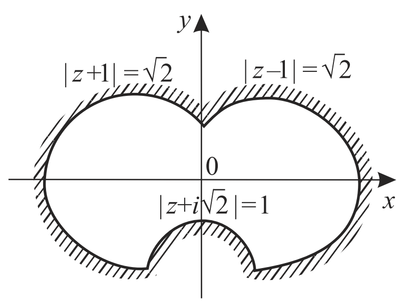

Рис. 28.95

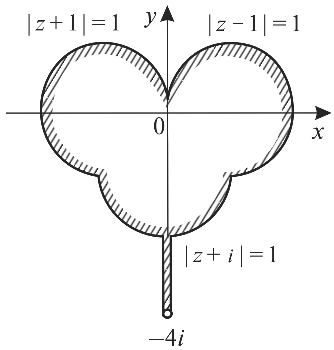

Рис. 28.96

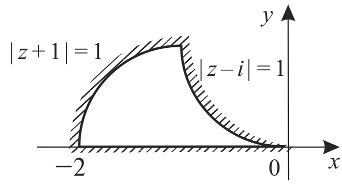

Рис. 28.97

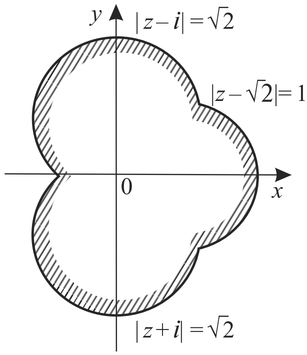

Рис. 28.98

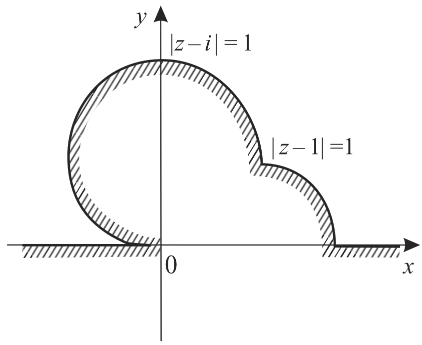

Рис. 28.99

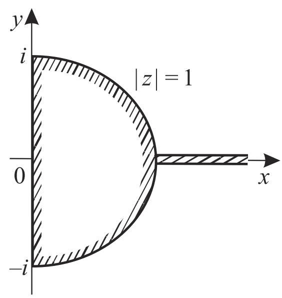

Рис. 28.100

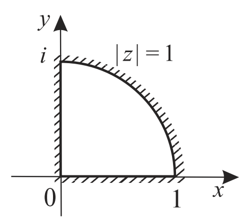

Рис. 28.101

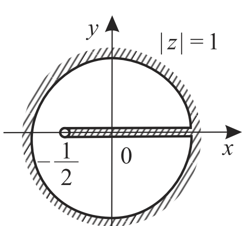

Рис. 28.102

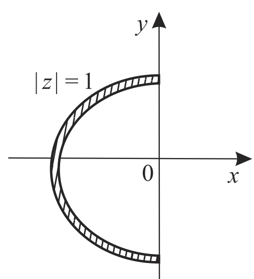

Рис. 28.103

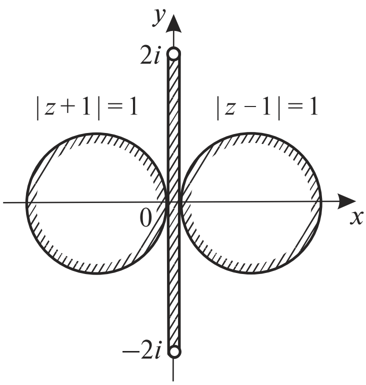

Рис. 28.104

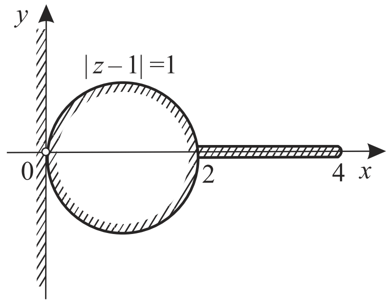

Рис. 28.105

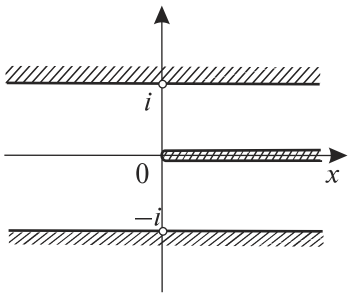

Рис. 28.106

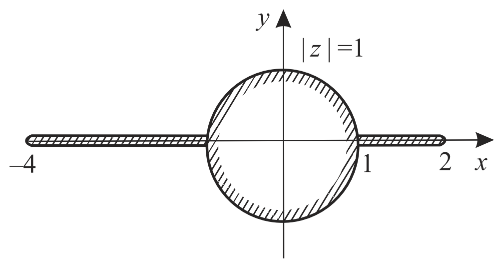

Рис. 28.107

Ответы

1. 1) $\arg w = 2\alpha$; 2) $\operatorname{Re} w = a^2 - \dfrac{1}{4a^2}(\operatorname{Im} w)^2$;

3) $\operatorname{Re} w = -a^2 + \dfrac{1}{4a^2}(\operatorname{Im} w)^2$; 4) $|w| = \rho^2$, $\operatorname{Re} w > 0$.

2. 1) $w \notin [0, +\infty]$; 2) $w \notin [-\infty, 0]$;

3) $\operatorname{Im} w > 0$; 4) $w < 1$, $\dfrac{\pi}{2} < \arg w < \pi$;

5) $\operatorname{Re} w < -1 + \dfrac{1}{4}(\operatorname{Im} w)^2$; 6) $\operatorname{Re} w > 1 - \dfrac{1}{4}(\operatorname{Im} w)^2$;

7) $|w| < 4$, $\operatorname{Im} w > 0$; 8) $|w| > \dfrac{1}{4}$, $w \notin \left[-\infty; -\dfrac{1}{4}\right]$.

3. 1) $-\pi < \arg w < -\dfrac{\pi}{2}$; 2) $|\arg w| < \dfrac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{Im} w < 0$; 4) $\operatorname{Re} w > 0$, $w \notin [0, 1]$;

5) $|w| < 1$, $0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}$; 6) $|w| > 1$, $\left|\dfrac{\pi}{2} - \arg w\right| < \dfrac{\pi}{8}$;

7) $\operatorname{Im} w < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\operatorname{Re} w > 0$, $\operatorname{Im} w > 1$.

4. 1) $\arg w = \dfrac{3\pi}{4}$; 2) $|w| = 1,\ \dfrac{\pi}{2} < \arg w < \pi$;

3) $|w| < 1,\ -\pi < \arg w < \dfrac{\pi}{2}$;

4) $|w| < \dfrac{1}{8},\ |\pi - \arg w| < \dfrac{3\pi}{4}$; 5) $w \notin [-\infty,\, 1]$.

6. $w = \dfrac{2i - \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$. **7.** $w = \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}$.

8. 1) $|w| < a - \sqrt{a^2 - 1}$; 2) $\alpha < \arg w < \pi - \alpha,\ \alpha = \arcsin\sqrt{1 - a^2}$;
3) $\operatorname{Im} w > 0$; 4) $|w| > 1$; 5) $|w| < 1,\ \operatorname{Im} w < 0$;
6) $1 < |w| < a + \sqrt{a^2 - 1},\ \operatorname{Im} w > 0$;
7) $|w| < 1,\ -\alpha < \arg w < 0$; 8) $a - \sqrt{a^2 - 1} < |w| < 1$;
9) $b + \sqrt{1 + b^2} < |w| < a + \sqrt{1 + a^2}$.

12. $w = \dfrac{2i(1 + z^2) - 3z}{3iz - 2(1 + z^2)}$.

13. $w = \dfrac{2 - i2 + (z + \sqrt{z^2 - 2})^2}{2 + i2 - (z + \sqrt{z^2 - 2})^2}$.

14. $w = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{z} - z\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{z} - z\sqrt{2}}$.

15. $w = \dfrac{1 + i}{4z}\,[(z + 1)(z - i) + (z - 1)\sqrt{z^2 - 1}]$.

16. 1) $\operatorname{Im} w = 0,\ -1 < \operatorname{Re} w < 1$;

2) $\operatorname{Im} w = 0,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{Re} w < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\dfrac{16}{25}\,u^2 + \dfrac{16}{9}\,v^2 = 1\ (u = \operatorname{Re} w,\ \ v = \operatorname{Im} w)$;

4) $\dfrac{16}{25}\,u^2 + \dfrac{16}{9}\,v^2 = 1\ (u = \operatorname{Re} w,\ \ v = \operatorname{Im} w)$;

5) $u^2 - v^2 = \dfrac{1}{2},\ \ u > 0\ (u = \operatorname{Re} w,\ \ v = \operatorname{Im} w)$;

6) $u^2 - v^2 = \dfrac{1}{2},\ \ u < 0\ (u = \operatorname{Re} w,\ \ v = \operatorname{Im} w)$.

17. 1) $\dfrac{16}{25}\,u^2 + \dfrac{16}{9}\,v^2 > 1\ (u = \operatorname{Re} w,\ \ v = \operatorname{Im} w)$;

2) $\dfrac{16}{25}\,u^2 + \dfrac{16}{9}\,v^2 > 1\ (u = \operatorname{Re} w,\ \ v = \operatorname{Im} w)$;

3) $u^2 - v^2 < \dfrac{1}{2}\ \ (u = \operatorname{Re} w,\ \ v = \operatorname{Im} w)$;

4) $u^2 - v^2 < \dfrac{1}{2},\ \ w \notin [-i\infty; 0]\ \ (u = \operatorname{Re} w,\ \ v = \operatorname{Im} w)$;

5) $w \notin [-i; +\infty]$; 6) $w \notin \left[-\dfrac{5}{4}\,; +\infty\right]$;

7) $w \notin \left[-\infty; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right],\ \ w \notin \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,; +\infty\right]$;

8) $\operatorname{Im} w > 0,\ \ w \notin \left[0; \dfrac{3i}{4}\right]$; 9) $-\dfrac{\pi}{2} < \arg w < 0$;

10) $u^2 - v^2 < \dfrac{1}{2},\ \ v > 0\ \ (u = \operatorname{Re} w,\ \ v = \operatorname{Im} w)$.

18. 1) $\operatorname{Im} w < 0$; 2) $w \notin [-\infty, 0]$; 3) $\operatorname{Re} w > 0$;

4) $|w| > 1,\ \ w \notin [1, +\infty]$; 5) $|w| > 1,\ \ \operatorname{Im} w > 0$;

6) $|w| < 1,\ \ \operatorname{Im} w > 0$; 7) $-2\pi < \operatorname{Im} w < 0$;

8) $0 < \operatorname{Im} w < \pi$; 9) $|\operatorname{Im} w| < \pi,\ \ w \notin [0, +\infty]$;

10) $\left|\dfrac{3\pi}{2} + \operatorname{Im} w\right| < \dfrac{\pi}{2},\ \ \operatorname{Re} w < 0$;

11) $-2\pi < \operatorname{Im} w < 0,\ \ \operatorname{Re} w < 0$; 12) $|w| < 1$;

13) $w \notin [-i, i]$; 14) $|w| > 1,\ \ \operatorname{Re} w > 0$;

15) $\operatorname{Im} w > 0,\ \ w \notin [0, i]$; 16) $w \notin [-\infty, -1],\ \ w \notin [1, +\infty]$;

17) $\operatorname{Im} w < 0$; 18) $\operatorname{Im} w > 0,\ \ w \notin [0, \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}]$;

19) $w \notin [-\infty, 0],\ \ w \notin [-i, i]$; 20) $w \notin [-1, 1],\ \ w \notin [0, +i\infty]$.

21. $w = 2 \ln\left(\dfrac{i + e^{z/2}}{1 - ie^{z/2}}\right)$.

§ 29. Принцип симметрии

Справочные сведения

Область D из $\overline{\mathbb{C}}$ будем называть *симметричной*, если она обладает симметрией относительно какой-нибудь прямой или окружности.

Следующий принцип помогает существенно упростить нахождение конформного отображения области D на область G в $\overline{\mathbb{C}}$ в случае, если обе они симметричны.

Принцип симметрии. *Пусть области D и G принадлежат верхней полуплоскости и их границы содержат соответственно Γ и Γ' — интервалы действительной оси. Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на область G (рис. 29.1) и непрерывна на $D \cup \Gamma$, причем $f(\Gamma) = \Gamma'$. Тогда функция*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \Gamma; \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in D^* \end{cases}$$

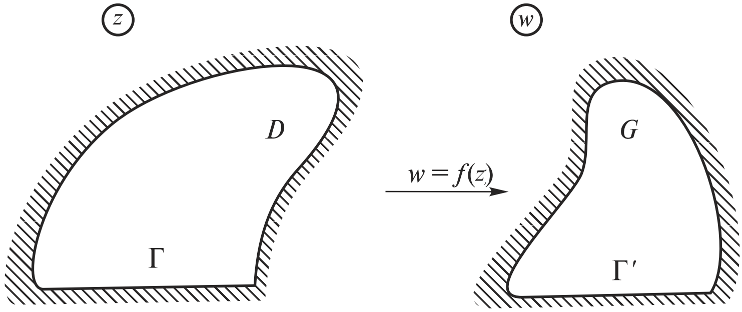

Рис. 29.1

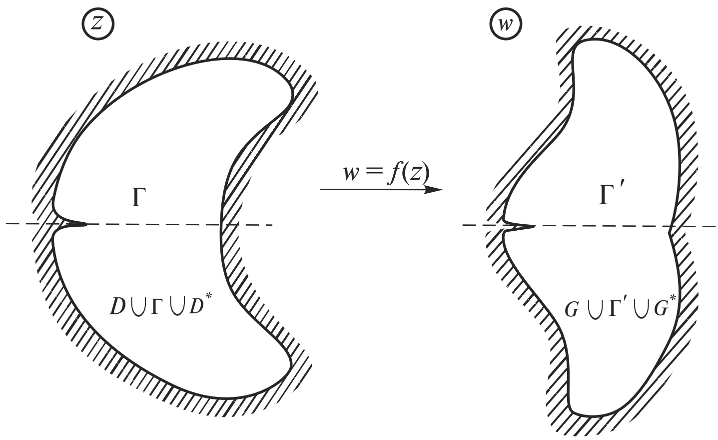

Рис. 29.2

конформно отображает область $D \cup \Gamma \cup D^*$ *на область* $G \cup \Gamma' \cup G^*$, *где* D^* *и* G^* *— области, симметричные областям* D *и* G *соответственно относительно действительной оси (рис. 29.2).*

Данная теорема позволяет находить конформные отображения областей, симметричных относительно действительной оси.

Общий случай конформного отображения симметричных областей можно свести к рассмотренному случаю с помощью дробно-линейных отображений. Действительно, если Γ — дуга окружности или отрезок прямой, относительно которой симметричны области D и D^*, а Γ' — дуга окружности или отрезок прямой, относительно которой симметричны области G и G^*, то строятся дробно-линейные отображения, переводящие Γ и Γ' в отрезки действительной оси. При этом, согласно свойству сохранения симметрии при дробно-линейных отображениях, пары областей D и D^*, G и G^* переходят в пары областей, симметричных относительно оси $\mathbb{R}$. В итоге ситуация сводится к той, которая рассмотрена в **теореме 1.**

Примеры с решениями

Пример 1. Пусть D — плоскость с разрезом по лучу $[-4;+\infty)$ и по отрезку $[-3i;3i]$ (рис. 29.3). Найти конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

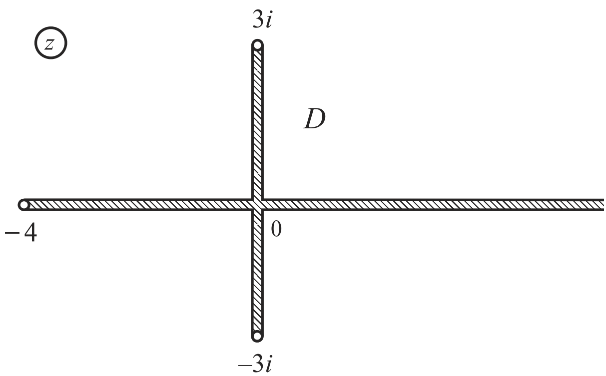

Рис. 29.3

$\triangle$ Область D симметрична относительно оси Ox. Рассмотрим область $D_1 = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}\backslash[0;3i]$ — верхнюю полуплоскость с разрезом по отрезку $[0;3i]$. Пусть D_1^* — область, симметричная D_1 относительно оси Ox. Заметим, что $D = D_1 \cup \Gamma \cup D_1^*$, где Γ — луч $(-\infty;-4)$ (рис. 29.4).

Найдем отображение $w_1 = f_1(z)$, переводящее область D_1 в верхнюю полуплоскость $G = \{w_1\colon \operatorname{Im} w_1 > 0\}$ так, что при непрерывном продолжении функции $f_1(z)$ на границу Γ получается $f_1(\Gamma)$ — интервал оси Ox. Согласно принципу симметрии, F_1 — регулярное продолжение f_1 в нижнюю полуплоскость, будет конформно отображать D на $(\overline{\mathbb{C}}\backslash\mathbb{R}) \cup f(\Gamma)$.

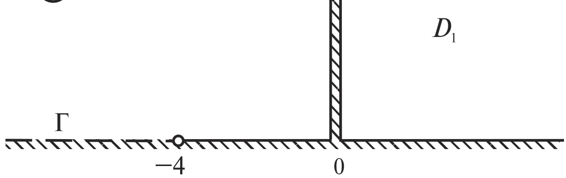

Рис. 29.4

В качестве w_1 можно взять отображение из примера 1 § 28:

$$w_1(z) = \sqrt{|z^2+9|}e^{i\arg(z^2+9)/2}, \quad \arg(z^2+9) \in (0; 2\pi).$$

Но здесь дополнительно надо следить за образом луча Г при отображении w_1.

Последовательно применяя к Г отображения

$$\zeta(z) = z^2, \quad \eta(\zeta) = \zeta + 9,$$
$$w_1(\eta) = \sqrt{|\eta|} \cdot e^{i\arg\eta/2}, \quad \arg\eta \in (0; 2\pi),$$

суперпозицией которых является отображение $w_1(z)$, получаем, что $w_1(\Gamma) = (-\infty; -5)$ (рис. 29.5).

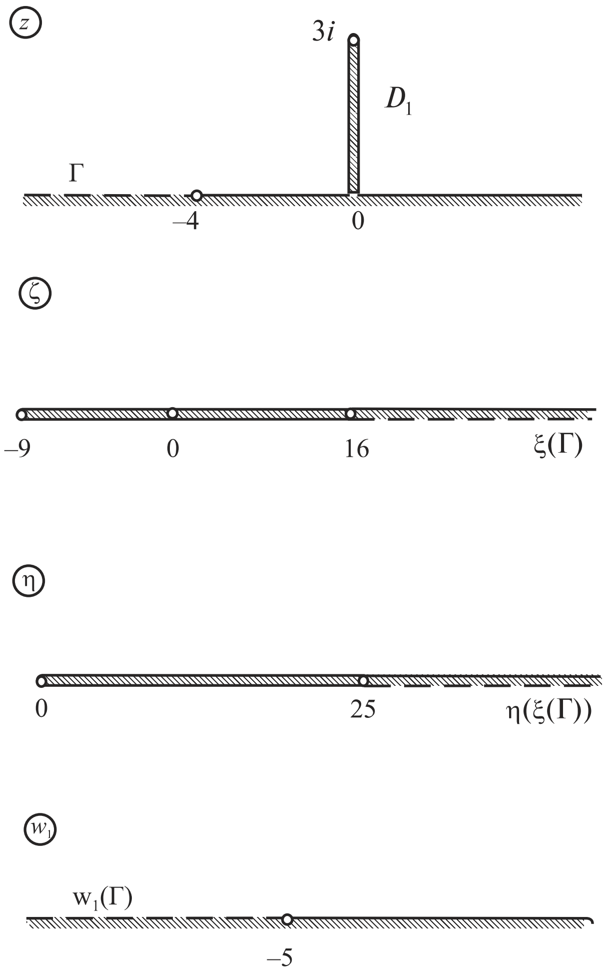

Рис. 29.5

Тогда отображение F_1, являющееся регулярным продолжением функции $w_1 = f_1(z)$ в нижнюю полуплоскость, переводит область D в область $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-5; +\infty)$ (рис. 29.6).

Далее, применяя отображение

$$w_2(w_1) = \sqrt{|w_1 + 5|} \cdot e^{i \arg(w_1+5)/2}, \quad \arg(w_1 + 5) \in (0; 2\pi),$$

получаем

$$w_2(G) = \{w_2 \colon \operatorname{Im} w_2 > 0\}.$$

В итоге $w(z) = w_2(w_1(z))$. ▲

Заметим, что в примере 1 в исходной области D нельзя было использовать отображение $w = z^2$, так как оно не конформно в D (нарушается однолистность).

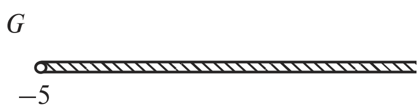

Рис. 29.6

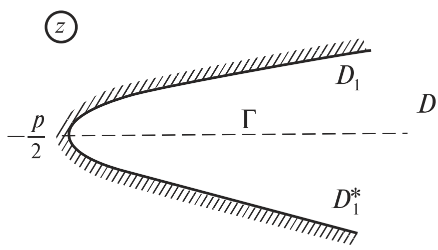

Рис. 29.7

Пример 2. Пусть

$$D = \left\{ z = x + iy \colon y^2 < 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) \right\}, \quad p > 0,$$

т. е. D — внутренность параболы $y^2 = 2p\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$ (рис. 29.7). Найти конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость $\{w \colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

△ Заметим, что область $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ одной из регулярных ветвей функции $\{\sqrt{z}\}$ можно перевести в полуплоскость (см. § 28, п. 1). Однако в области D регулярные ветви корня выделить нельзя (так как его точка ветвления $z = 0$ принадлежит D).

Область D симметрична относительно оси Ox. Рассмотрим область $D_1 = \{z \in D \colon \operatorname{Im} z > 0\}$. Заметим, что $D = D_1 \cup \Gamma \cup D_1^*$, где D_1^* — область, симметричная D_1 относительно Ox, $\Gamma = \left(-\dfrac{p}{2}; +\infty\right)$ — луч (рис. 29.7).

Найдем отображение $w_1 = f_1(z)$, переводящее конформно область D_1 на верхнюю полуплоскость так, что при непрерывном продолжении f_1 на $D_1 \cup \Gamma$ получается $f_1(\Gamma)$ — интервал оси Ox. Тогда, согласно принципу симметрии, функция F_1, являющаяся регулярным продолжением f_1 в нижнюю полуплоскость, будет конформно отображать D на $(\overline{\mathbb{C}}\backslash\mathbb{R}) \cup f(\Gamma)$.

Подействуем на $D_1 \cup \Gamma$ конформным отображением

$$\zeta(z) = \sqrt{|z|} \cdot e^{i \arg z/2},$$

где $\arg z \in (0; \pi)$, и получим область

$$D_1' = \zeta(D_1) = \left\{\zeta \in \mathbb{C}\colon 0 < \operatorname{Im}\zeta < \sqrt{\frac{p}{2}}, \quad \operatorname{Re}\zeta > 0\right\}$$

— полуполосу, причем образ луча Γ имеет вид

$$\Gamma' = \zeta(\Gamma) = \left(\frac{ip}{2}\,; 0\right] \cup [0; +\infty),$$

т. е. является объединением полуинтервала мнимой оси и положительной полуоси Ox (рис. 29.8) Здесь D_1 — объединение лежащих в верхней полуплоскости ветвей парабол

$$\left\{y^2 = 2p_1\left(x + \frac{p_1}{2}\right),\ p_1 \in (0; p)\right\},$$

каждая из которых отобразится в горизонтальный луч

$$\left\{\zeta\colon \operatorname{Im}\zeta = \sqrt{\frac{p_1}{2}},\ \operatorname{Re}\zeta > 0\right\},$$

а полуинтервал $\left(-\dfrac{p}{2}\,; 0\right]$ на Γ перейдет в полуинтервал $\left(i\sqrt{\dfrac{p}{2}}; 0\right]$, луч $[0; +\infty)$ на Γ отобразится на себя (см. § 28, п. 1).

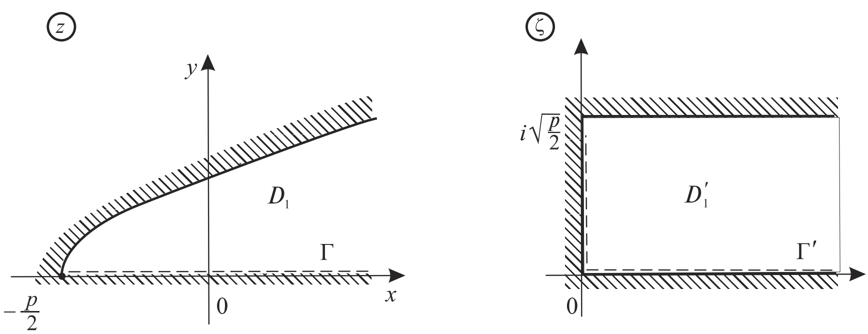

Рис. 29.8

Подействуем конформным отображением $\eta(\zeta) = \sqrt{\dfrac{2}{p}} \cdot \zeta$ на D_1' и Γ' и получим

$$D_1'' = \eta(D_1') = \{\eta\colon 0 < \operatorname{Im}\eta < \pi,\ \operatorname{Re}\eta > 0\},$$
$$\Gamma'' = \eta(\Gamma') = (i\pi; 0] \cup [0; +\infty)$$

(рис. 29.9).

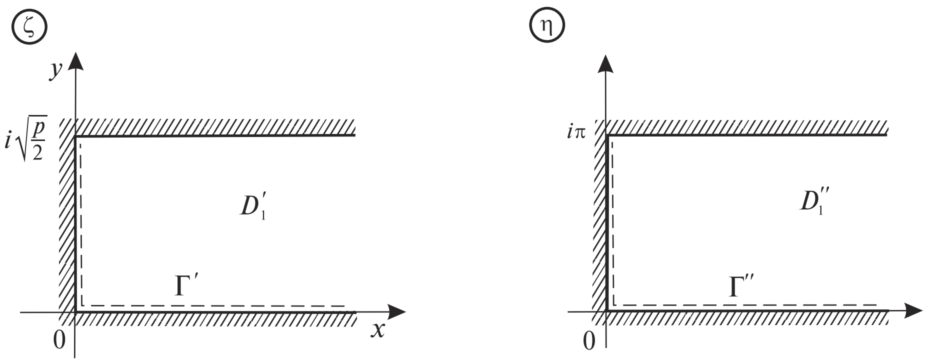

Рис. 29.9

Подействуем конформным отображением $u(\eta) = e^{\eta}$ на D_1'' и Γ'' и получим
$$D''' = u(D'') = \{u\colon \operatorname{Im} u > 0,\ |u| > 1\}$$

— верхнюю полуплоскость с выброшенным единичным полукругом,

$$\Gamma''' = u(\Gamma'') = \{u\colon u = e^{i\varphi},\ \varphi \in [0; \pi]\} \cup [1; +\infty)$$

— объединение верхней единичной полуокружности и луча (см. § 28, п. 4) (рис. 29.10).

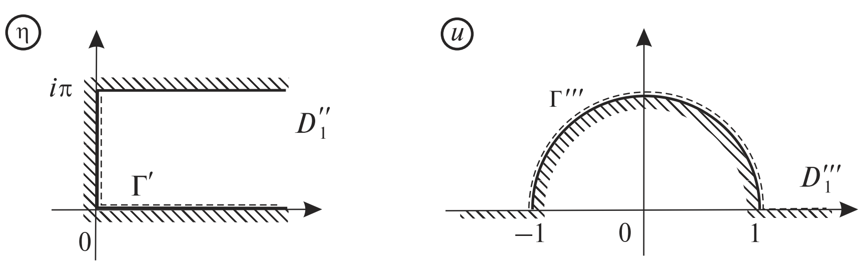

Рис. 29.10

Подействуем конформным отображением

$$w_1(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

на D''' и Γ''' и получим

$$w_1(D''') = \{w_1 \colon \operatorname{Im} w_1 > 0\}$$

— верхнюю полуплоскость,

$$w_1(\Gamma''') = [-1; +\infty)$$

— луч (см. § 28, п. 4) (рис. 29.11).

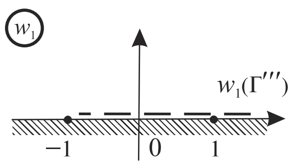

Рис. 29.11

Тогда отображение F_1, являющееся регулярным продолжением функции $w_1 = f_1(z)$ в нижнюю полуплоскость, переводит область D на $G = \overline{\mathbb{C}} \backslash (-\infty; -1]$.

Далее, действуя на G конформным отображением

$$w_2(w_1) = \sqrt{|w_1 + 1|}e^{i\arg(w_1+1)/2} \ \big(\arg(w_1 + 1) \in (0; 2\pi)\big),$$

получаем

$$w_2(G) = \{w_2 \colon \operatorname{Im} w_2 > 0\}.$$

Искомое отображение $w(z) = w_2(w_1(z))$. ▲

Пример 3. Доказать, что любое конформное отображение верхней полуплоскости $D = \{z \colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $G = \{w \colon \operatorname{Im} w > 0\}$ является дробно-линейным.

△ Пусть функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение D на G. Выделим D^* и G^* — области, симметричные областям D и G соответственно относительно действительной оси. При помощи принципа соответствия границ отображение f может быть непрерывно продолжено из области D на замыкание $\overline{D} = D \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{z \colon \operatorname{Im} z = 0\}$ — действительная ось, причем f взаимно-однозначно отображает Γ на $\Gamma_1 = \{w \colon \operatorname{Im} w = 0\}$ — действительную ось.

Заметим, что

$$D \cup \Gamma \cup D^* = \overline{\mathbb{C}} \quad \text{и} \quad G \cup \Gamma_1 \cup G^* = \overline{\mathbb{C}}.$$

Согласно принципу симметрии, F — регулярное продолжение f в $\overline{\mathbb{C}}$ конформно переводит $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$. Следовательно, F — дробно-линейная функция (см. § 26, пример 4). Поэтому отображение f, которое есть сужение F на верхнюю полуплоскость, также является дробно-линейным отображением. ▲

Задачи

1. Обозначим через $w(z)$ функцию, конформно отображающую угол $\left\{z\colon 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ на сектор $\left\{w\colon |w| > 1,\ 0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}\right\}$, и удовлетворяющую условиям $w(1) = 1$, $w(i) = i$, $w(\infty) = \infty$. Отыскав функцию $w(z)$, убедиться, что она:

1) конформно отображает область, изображенную на рис. 29.12, на область $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0,\ |w| > 1\}$;

2) конформно отображает область, изображенную на рис. 29.13, на область $\{w\colon |w| > 1\}$.

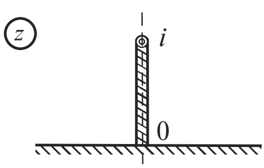

Рис. 29.12

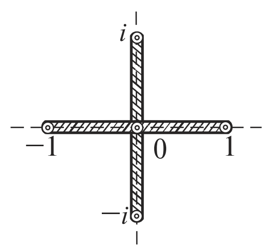

Рис. 29.13

2. Обозначим через $w(z) = w(z;\, z_1,\, z_2,\, z_3)$ функцию, конформно отображающую полукруг $\{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, на такой же полукруг в плоскости w и удовлетворяющую условиям

$$w(z_1) = 1, \quad w(z_2) = i, \quad w(z_3) = -1$$

(точки z_1, z_2, z_3 лежат на границе полукруга $\{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$). Установить, каким условиям должны удовлетворять точки z_1, z_2, z_3, чтобы функция $w(z)$ конформно отображала круг $\{z\colon |z| < 1\}$ на:

1) круг $\{w\colon |w| < 1\}$;
2) полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$;
3) область, изображенную на рис. 29.14;
4) область, изображенную на рис. 29.15;
5) область, изображенную на рис. 29.16;
6) область, изображенную на рис. 29.17.

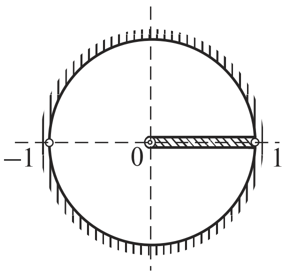

Рис. 29.14

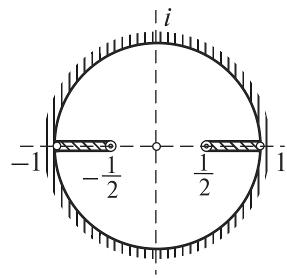

Рис. 29.15

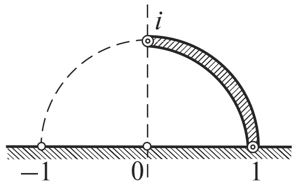

Рис. 29.16

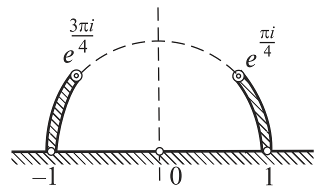

Рис. 29.17

3. Найти какие-либо функции $w(z)$, конформно отображающие области, изображенные на рис. 29.18–29.29, на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

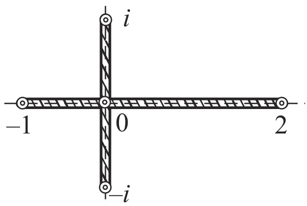

Рис. 29.18

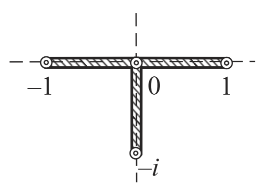

Рис. 29.19

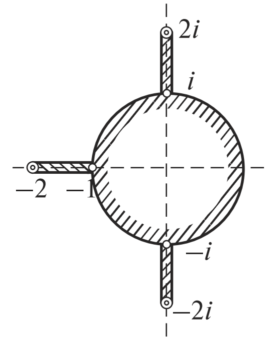

Рис. 29.20

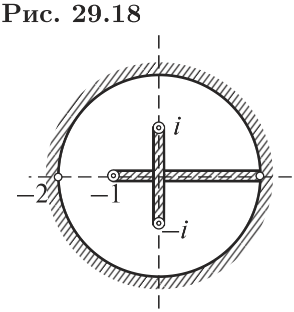

Рис. 29.21

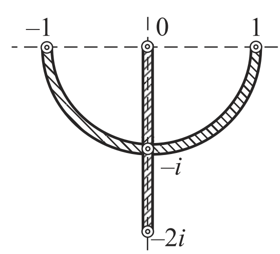

Рис. 29.22

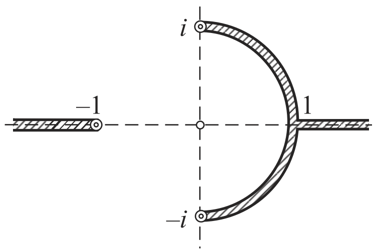

Рис. 29.23

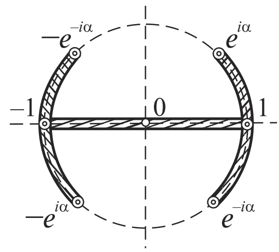

Рис. 29.24

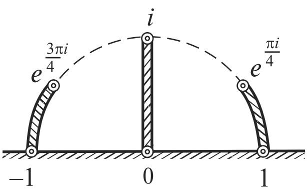

Рис. 29.25

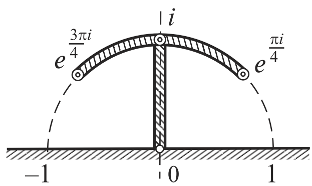

Рис. 29.26

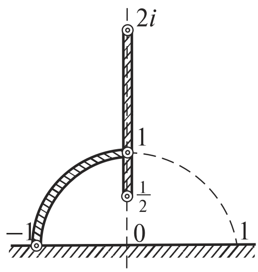

Рис. 29.27

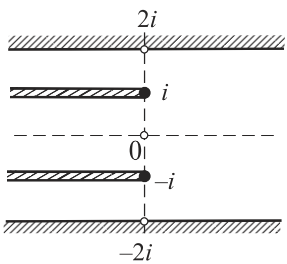

Рис. 29.28

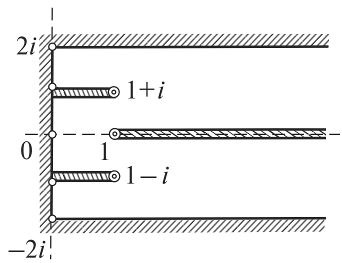

Рис. 29.29

4. Найти какую-либо функцию $w(z)$, конформно отображающую область

$$\left\{z = x + iy\colon\ \ \frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} > 1,\ x > 0\right\}$$

(α — постоянная, $0 < \alpha < \pi/2$) на полуплоскость $\{w\colon\ \operatorname{Im} w > 0\}$.

5. Найти какую-либо функцию $w(z)$, конформно отображающую область

$$\left\{z = x + iy\colon\ y^2 < 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)\right\},\quad p > 0,$$

на полуплоскость $\{w\colon\ \operatorname{Im} w > 0\}$.

6. Найти какие-либо функции $w(z)$, конформно отображающие области, изображенные на рис. 29.30–29.33, на круг $\{w\colon |w| < 1\}$.

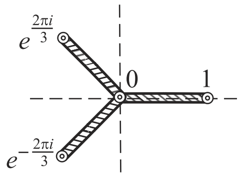

Рис. 29.30

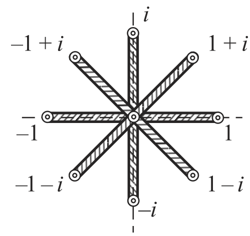

Рис. 29.31

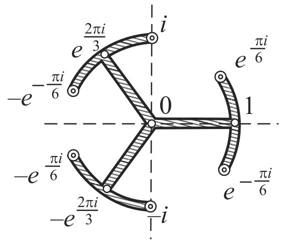

Рис. 29.32

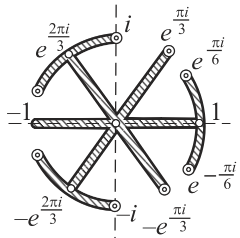

Рис. 29.33

7. Найти какую-либо функцию $w(z)$, конформно отображающую область

$$\{z\colon z \notin [k\pi i,\ k\pi i + i\infty] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\}$$

на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

8. Найти какую-либо функцию $w(z)$, конформно отображающую область

$$\{z\colon \operatorname{Im} z > 0,\ z \notin [k\pi,\ k\pi + \pi i] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\}$$

на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

9. Найти какую-либо функцию $w(z)$, конформно отображающую область

$$\bigl\{z\colon \operatorname{Im} > 0,\ z \notin [2k,\ 2k + 2i],\ z \notin [2k+1,\ 2k+1+i] \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)\bigr\}$$

на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

10. Найти какие-либо функции $w(z)$, конформно отображающие области, изображенные на рис. 29.34–29.36, на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

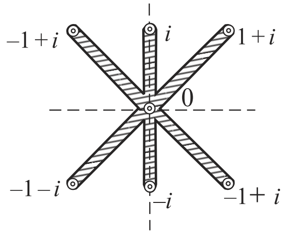

Рис. 29.34

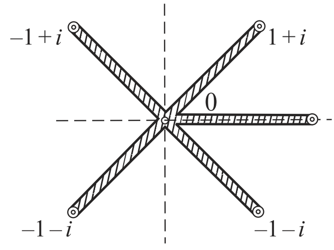

Рис. 29.35

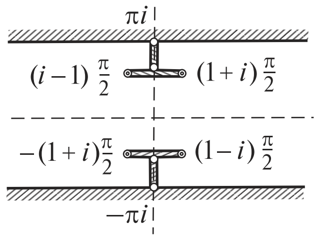

Рис. 29.36

11. Пусть функция $f(z)$ регулярна при $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, непрерывна при $\{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и принимает на действительной оси действительные значения. Доказать, что функцию $f(z)$ можно регулярно продолжить на всю комплексную плоскость.

12. Пусть функция $f(z)$ регулярна при $\{z\colon 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, непрерывна при $\{z\colon 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$ и принимает действительные значения на прямых $\{z\colon \operatorname{Re} z = 0\}$ и $\{z\colon \operatorname{Re} z = 1\}$. Доказать, что функцию $f(z)$ можно регулярно продолжить на всю комплексную плоскость и что функция $F(z)$, осуществляющая это аналитическое продолжение, удовлетворяет условию $F(z+2) = F(z)$.

13. Пусть функция $f(z)$ регулярна при $\{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$, непрерывна при $\{z\colon 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1\}$ и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} f(z) = 0 \quad (\operatorname{Im} z = 0); \qquad \operatorname{Im} f(z) = 0 \quad (\operatorname{Im} z = 1).$$

Доказать, что функцию $f(z)$ можно регулярно продолжить на всю плоскость и что функция $F(z)$, осуществляющая это аналитическое продолжение, удовлетворяет условию $F(z+2i) = -F(z)$.

14. Пусть функция $f(z)$ регулярна в прямоугольнике

$$\bigl\{z\colon |\operatorname{Im} z| < h,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\bigr\},$$

непрерывна в замыкании этого прямоугольника и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Im} f(z) = 0 \quad (\operatorname{Re} z = 0,\ |\operatorname{Im} z| < h);$$
$$\operatorname{Im} f(z) = 1 \quad (\operatorname{Re} z = 1,\ |\operatorname{Im} z| < h).$$

Доказать, что функцию $f(z)$ можно регулярно продолжить на полосу $\{z\colon |\operatorname{Im} z| < h\}$ и что функция $F(z)$, осуществляющая это продолжение, имеет вид $iz + F_1(z)$, где функция $F_1(z)$ регулярна в полосе $\{z\colon |\operatorname{Im} z| < h\}$ и периодична с периодом 2.

15. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полукольце

$$\{z\colon \rho < |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0\},$$

непрерывна в его замыкании и принимает действительные значения на отрезках $(-R, -\rho)$ и (ρ, R). Доказать, что функцию $f(z)$ можно регулярно продолжить в кольцо $\{z\colon \rho < |z| < R\}$ до регулярной в этом кольце функции.

16. Пусть функция $f(z)$ конформно отображает прямоугольник $\{z\colon |\operatorname{Re} z| < h,\ |\operatorname{Im} z| < h\}$ на какой-либо круг (или полуплоскость). Доказать, что регулярное продолжение функции $f(z)$ является функцией, мероморфной во всей плоскости и периодической с периодами $4h$ и $4ih$.

17. Пусть функция $f(z)$ конформно отображает сектор

$$\left\{z\colon |z| < 1,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{n}\right\},$$

на треугольник с теми же вершинами 0, 1, $e^{\pi i/n}$, причем таким образом, что эти вершины остаются на месте. Доказать, что функцию $f(z)$ можно регулярно продолжить в круг $\{z\colon |z| < 1\}$ и что функция $F(z)$, осуществляющая это аналитическое продолжение, конформно отображает круг $\{z\colon |z| < 1\}$ на правильный $2n$-угольник (с центром в точке 0 и одной из вершин в точке 1).

18. Доказать, что любое конформное отображение круга на круг (или на полуплоскость) является дробно-линейным отображением.

19. Доказать, что не существует функции, конформно отображающей кольцо $\{z\colon 1 < |z| < R_1\}$ на кольцо $\{z\colon 1 < |z| < R_2\}$, если только $R_1 \neq R_2$.

20. Пусть функция $f(z)$ конформно отображает полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на область:

$$\left\{w\colon \operatorname{Im} w > 0,\ 0 < \operatorname{Re} w < 1,\ \left|w - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}\right\}.$$

Доказать, что регулярное продолжение функции $f(z)$ приводит к функции $F(z)$, регулярной во всей расширенной комплексной плоскости с тремя выколотыми точками (прообразы точек 0, 1 и ∞).

Ответы

2. 1) $z_1 = 1,\ z_3 = -1$; 2) $z_1 = -1,\ z_3 = 1$;
3) $z_1 = 0,\ z_3 = -1$; 4) $z_1 = \frac{1}{2},\ z_3 = -\frac{1}{2}$;
5) $z_1 = -1,\ z_3 = i$; 6) $z_1 = e^{3\pi i/4},\ z_3 = e^{\pi i/4}$.

§ 30. Отображение многоугольников

Справочные сведения

1. Если П — ограниченный многоугольник на плоскости $\mathbb{C}$, то по теореме Римана существует конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность П. Заметим, что такое отображение заведомо определяется неоднозначно. Следующая теорема описывает все подобные отображения для заданного многоугольника П.

Теорема Кристоффеля—Шварца. *Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на внутренность ограниченного многоугольника с углами $\alpha_k\pi$ $(0 < \alpha_k \leqslant 2$, $k = 1, 2, \ldots, n)$ при вершинах, причем известны точки a_k действительной оси, являющиеся прообразами вершин многоугольника при отображении f. Тогда*

$$f(z) = c\int\limits_0^z (\xi - a_1)^{\alpha_1-1}(\xi - a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(\xi - a_n)^{\alpha_n-1}\,d\xi + c_1,$$

где c, c_1 — комплексные константы и интеграл берется по произвольной кривой в верхней полуплоскости, соединяющей точки 0 и z (рис. 30.1).

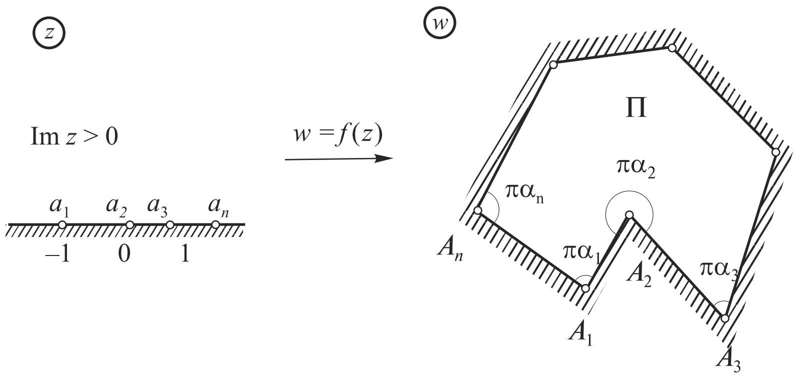

Рис. 30.1

В формуле Кристоффеля, задающей функцию $f(z)$, предполагается, что известны $a_1, \ldots, a_n$ — прообразы вершин многоугольника. Однако в задачах на конформные отображения обычно задаются лишь вершины $A_1, \ldots, A_n$ многоугольника, а точки a_k остаются неизвестными.

Три из них (например, a_1, a_2, a_3) можно выбрать произвольно. Тогда будет выполняться одно из условий нормировки конформного отображения односвязной области, приведенных в § 26, и искомое отображение f будет единственным. Следовательно, оставшиеся точки a_k и константы c, c_1 должны единственным образом определяться из условий задачи.

Конкретные способы нахождения величин a_k, c, c_1 рассмотрены в примерах.

2. Формулу Кристоффеля—Шварца, приведенную в теореме, можно обобщить на перечисленные ниже случаи.

Случай 1. *Одна из точек a_k совпадает с бесконечностью.*

Без ограничения общности пусть $a_n = \infty$. Тогда формула для отображения f изменяется так:

$$f(z) = c\int\limits_0^z (\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1}(\xi - a_2)^{\alpha_2 - 1}\ldots(\xi - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}\,d\xi + c_1.$$

Этот факт можно использовать в решении задач, так как специально выбирая $a_n = \infty$, мы получаем более простое подынтегральное выражение.

Случай 2. *Одна или несколько вершин A_k многоугольника* Π *лежат в бесконечности.*

Тогда формула для f не изменяется:

$$f(z) = c\int\limits_0^z (\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1}(\xi - a_2)^{\alpha_2 - 1}\ldots(\xi - a_n)^{\alpha_n - 1}\,d\xi + c_1.$$

Заметим, что здесь угол между двумя прямыми в точке ∞ понимается как угол в конечной точке их пересечения, взятый со знаком минус.

Случай 3. *Отображение верхней полуплоскости на внешность многоугольника* Π.

Тогда формула для f изменяется так:

$$f(z) = c\int\limits_0^z (\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1}(\xi - a_2)^{\alpha_2 - 1}\ldots(\xi - a_n)^{\alpha_n - 1}\,\frac{d\xi}{(\xi - a)^2(\xi - \overline{a})^2} + c_1,$$

где c, c_1 — комплексные константы, $\alpha_k\pi$ — внешние углы многоугольника Π, a_k — прообразы его вершин при отображении f, a — прообраз точки ∞.

Примеры с решениями

Пример 1. Найти конформное отображение верхней полуплоскости на треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $A_2 = a$ $(a > 0)$ и углами $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$ (рис. 30.2).

$\triangle$ Согласно условиям нормировки конформных отображений односвязных областей (§ 26), в роли прообразов точек A_1, A_2, A_3 можно взять три произвольные точки на границе верхней полуплоскости.

Пусть $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$, тогда

$$f(z) = c\int\limits_0^z \zeta^{\alpha_1 - 1}(\zeta - 1)^{\alpha_2 - 1}d\zeta + c_1.$$

Так как $f(0) = 0$, то $c_1 = 0$.

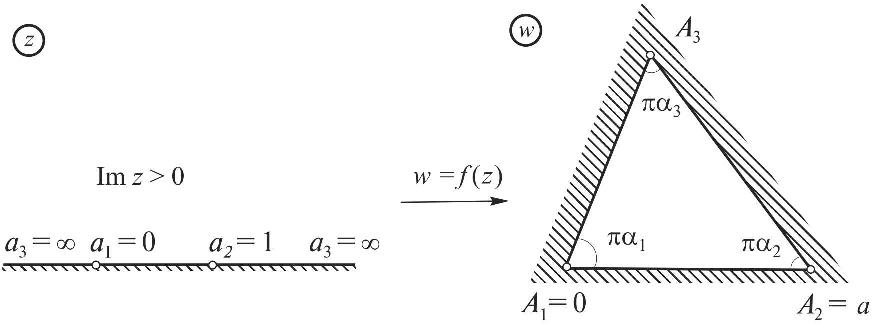

Рис. 30.2

Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = \widetilde{c}\int_0^z \zeta^{\alpha_1 - 1}(1-\zeta)^{\alpha_2 - 1} d\zeta$$

и подставим $z = 1$. Получим

$$a = f(1) = \widetilde{c}\int_0^1 \zeta^{\alpha_1 - 1}(1-\zeta)^{\alpha_2 - 1} d\zeta,$$

откуда

$$\widetilde{c} = \frac{a}{\int\limits_0^1 \zeta^{\alpha_1 - 1}(1-\zeta)^{\alpha_2 - 1} d\zeta} = \frac{a}{\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2)},$$

где $\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2)$ — бета-функция Эйлера (см. § 24).

Следовательно,

$$f(z) = \frac{a}{\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^z \zeta^{\alpha_1 - 1}(1-\zeta)^{\alpha_2 - 1} d\zeta. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. Найти конформное отображение верхней полуплоскости на прямоугольник с вершинами $A_1 = 1$, $A_2 = 1 + iH$, $A_3 = -1 + iH$, $A_4 = -1$ $(H > 0)$ (рис. 30.3).

$\triangle$ Найдем конформное отображение $w = f(z)$ первой четверти плоскости z на правую половину заданного прямоугольника такое, чтобы образом мнимой полуоси $\{iy\colon y \geqslant 0\}$ был отрезок $[0; iH]$. Тогда по принципу симметрии регулярное продолжение f во вторую четверть будет отображать верхнюю полуплоскость на весь прямоугольник (продолжение также будем обозначать f).

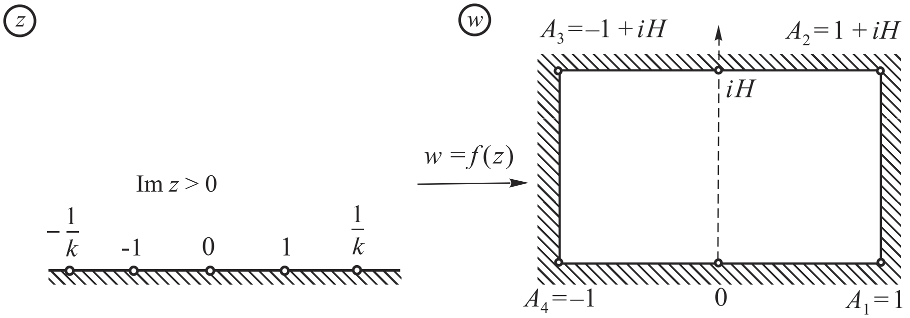

Рис. 30.3

Согласно условиям нормировки конформных отображений односвязных областей (§ 26) в роли прообразов точек 0, 1, iH можно взять произвольные точки на границе первой четверти.

Пусть $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = iH$. Этим соответствием функция f задана единственным образом, причем $f(\{iy\colon y \geqslant 0\}) = [0;\, iH]$.

Прообразом вершины $1 + iH$ будет некоторая точка $\dfrac{1}{k} > 0$ $(k \in \mathbb{R}$, $k < 1)$, так как порядок расположения точек на границе области сохраняется при конформном отображении f.

Согласно принципу симметрии

$$f(-1) = -1, \quad f\left(-\frac{1}{k}\right) = -1 + iH.$$

По условию углы равны $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$, $\alpha_4\pi$, где

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}\,.$$

Поэтому по формуле Кристоффеля—Шварца находим

$$f(z) = c\int\limits_0^z (\zeta - 1)^{(1/2)-1}(\zeta - (-1))^{(1/2)-1} \times$$
$$\times \left(\zeta - \frac{1}{k}\right)^{(1/2)-1}\left(\zeta - \left(-\frac{1}{k}\right)\right)^{(1/2)-1} d\zeta + c_1 =$$
$$= c\int\limits_0^z (\zeta^2 - 1)^{-1/2}\left(\zeta^2 - \frac{1}{k^2}\right)^{-1/2} d\zeta + c_1 =$$
$$= \widetilde{c}\int\limits_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + c_1.$$

Так как $f(0) = 0$, то $c_1 = 0$, а константы $\widetilde{c}$, k можно найти из условий:

а) $f(1) = 1$, т. е.

$$\widetilde{c}\int\limits_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = 1, \tag{1}$$

б) $f\left(\dfrac{1}{k}\right) = 1 + iH$, т. е.

$$\widetilde{c}\int\limits_0^{1/k} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = 1 + iH,$$

или, с учетом равенства (1),

$$\widetilde{c}\int\limits_1^{1/k} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = iH. \tag{2}$$

Система равенств (1), (2) достаточна для нахождения чисел $\widetilde{c}$ и k через значения специальной функции

$$F(z,k) = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}},$$

которая называется *эллиптической функцией Якоби с модулем* k $(0 < k < 1)$. Она определена для всех $z \in \mathbb{C}$. ▲

Пример 3. Найти конформное отображение верхней полуплоскости на область D, содержащую первую четверть, граница которой состоит из полупрямых $\{w\colon \operatorname{Re} w \leqslant 0,\ \operatorname{Im} w = 1\}$, $\{w\colon \operatorname{Re} w \geqslant 0,\ \operatorname{Im} w = -1\}$ и отрезка $[-i;\ i]$ (рис. 30.4).

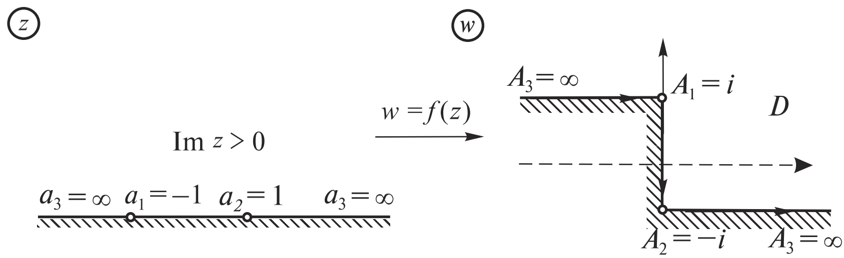

Рис. 30.4

△ Область D является треугольником с вершинами $A_1 = i$, $A_2 = -i$, $A_3 = \infty$ и углами соответственно $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$, где

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = 1.$$

Согласно условиям нормировки конформных отображений односвязных областей (§ 26), в роли прообразов точек A_1, A_2, A_3 можно выбрать произвольные три точки на оси $\mathbb{R}$.

Пусть $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$. Тогда искомое отображение примет вид

$$w = f(z) = c\int_0^z (\zeta+1)^{3/2-1}(\zeta-1)^{1/2-1}d\zeta + c_1 =$$

$$= \widetilde{c}\int_0^z \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2} d\zeta + c_1 = \widetilde{c}\int_1^z \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2} d\zeta + \widetilde{c}_1,$$

где

$$\widetilde{c}_1 = c_1 + \widetilde{c}\int_0^1 \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2} d\zeta.$$

Так как $f(1) = -i$, то $\widetilde{c}_1 = -i$, а из условия $f(-1) = i$ следует, что

$$\widetilde{c}\int_1^{-1} \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2} d\zeta - i = i. \tag{3}$$

Согласно примеру 1 § 24 (если взять $p = -1/2$, $q = 1/2$), имеем

$$\int_{-1}^1 (1-\zeta)^{-1/2}\cdot(1+\zeta)^{1/2}d\zeta = 2^{-1/2+1/2+1}\,\frac{\Gamma(-1/2+1)\cdot\Gamma(1/2+1)}{\Gamma((-1/2)+(1/2)+2)} =$$

$$= 2\,\frac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} = 2\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= 2\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (\sqrt{\pi})^2 = \pi.$$

Здесь использованы значения $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ и свойство

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Подставляя вычисленное значение интеграла в равенство (3), получаем

$$\widetilde{c}\cdot(-\pi) - i = i, \quad \widetilde{c} = -\frac{2i}{\pi}.$$

Следовательно,

$$f(z) = -\frac{2i}{\pi}\int\limits_1^z \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2} d\zeta - i. \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Найти функции $w(z)$, конформно отображающие полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на многоугольники, изображенные на рис. 30.5–30.18, таким образом, чтобы $w(0) = A_1$, $w(1) = A_2$, $w(\infty) = A_3$ (вершины A_k обозначены на рисунках).

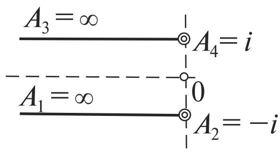

Рис. 30.5

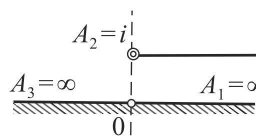

Рис. 30.6

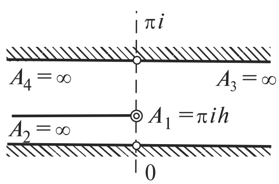

Рис. 30.7

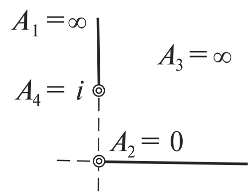

Рис. 30.8

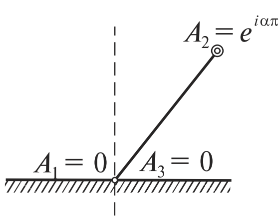

Рис. 30.9

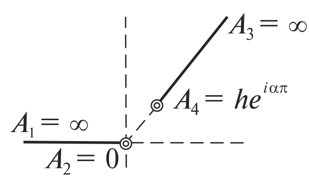

Рис. 30.10

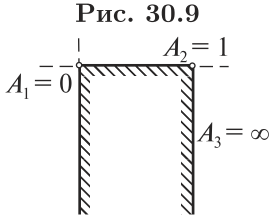

Рис. 30.11

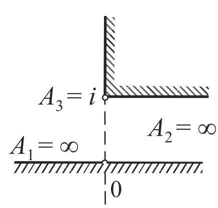

Рис. 30.12

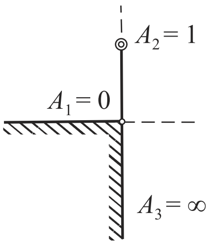

Рис. 30.13

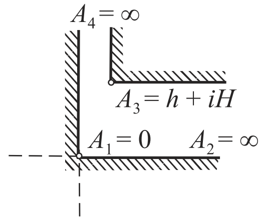

Рис. 30.14

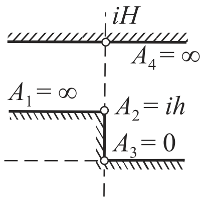

Рис. 30.15

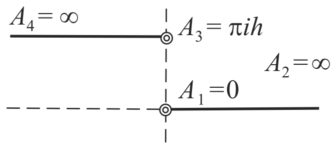

Рис. 30.16

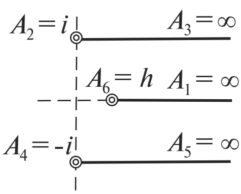

Рис. 30.17

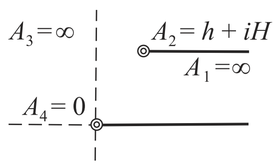

Рис. 30.18

2. Найти какие-либо функции $w(z)$, конформно отображающие полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на симметричные многоугольники, изображенные на рис. 30.19–30.24.

3. Найти функции $w(z)$, конформно отображающие область $\{z\colon |z| > 1\}$ на многоугольники с внутренней точкой $w = \infty$, изображенные на рис. 30.25–30.27, таким образом, чтобы $w(\infty) = \infty$, $w(1) = A_1$.

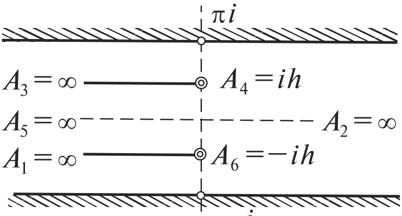

Рис. 30.19

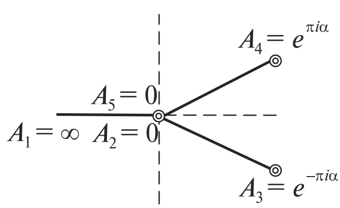

Рис. 30.20

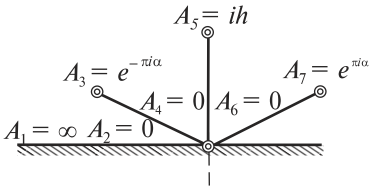

Рис. 30.21

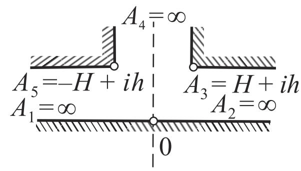

Рис. 30.22

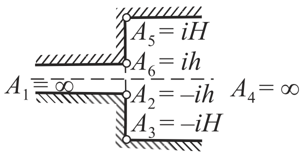

Рис. 30.23

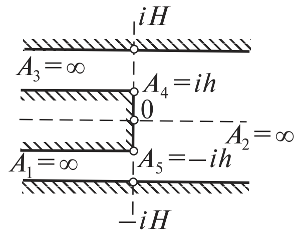

Рис. 30.24

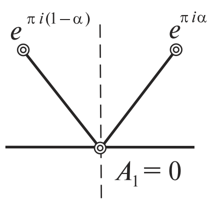

Рис. 30.25

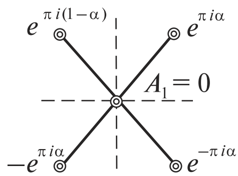

Рис. 30.26

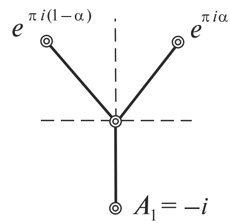

Рис. 30.27

4. Найти функции $w(z)$, конформно отображающие полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на области, изображенные на рис. 30.28–30.31, таким образом, чтобы

$$w(0) = A_1, \quad w(1) = A_2, \quad w(\infty) = A_3.$$

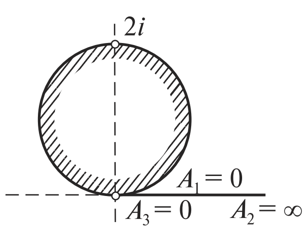

Рис. 30.28

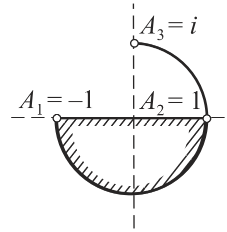

Рис. 30.29

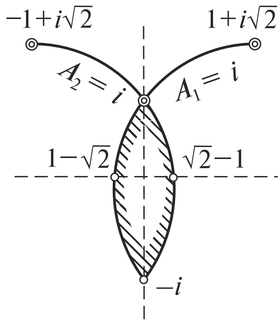

Рис. 30.30

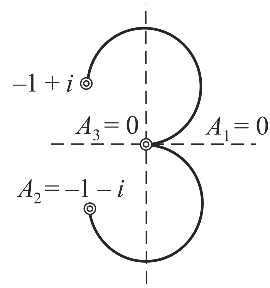

Рис. 30.31

5. Найти функции $w(z)$, конформно отображающие всю плоскость z с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на области, изображенные на рис. 30.32–30.34, таким образом, чтобы $w(\infty) = \infty$, $w(1) = A_1$.

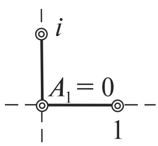

Рис. 30.32

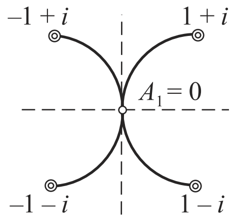

Рис. 30.33

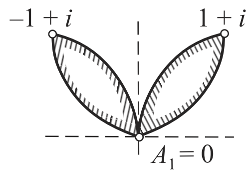

Рис. 30.34

6. Найти функции $w(z)$, конформно отображающие полосу $\left\{z\colon |\,\mathrm{Im}\,| < \dfrac{1}{2}\right\}$ на области, изображенные на рис. 30.35–30.37, таким образом, чтобы $w(0) = 0$, $w(+\infty) = A_1$.

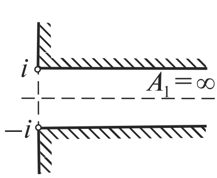

Рис. 30.35

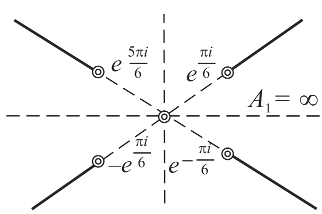

Рис. 30.36

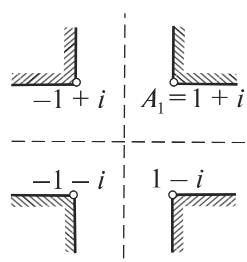

Рис. 30.37

7. Найти функции $w(z)$, конформно отображающие полуполосу $\left\{z\colon \mathrm{Re}\, z > 0,\ |\,\mathrm{Im}\, z| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ на области, изображенные на рис. 30.38–30.39, таким образом, чтобы

$$w\left(-\frac{\pi i}{2}\right) = A_1, \quad w(\infty) = A_2, \quad w\left(\frac{\pi i}{2}\right) = A_3.$$

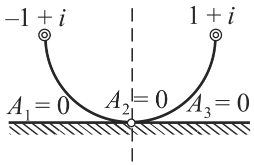

Рис. 30.38

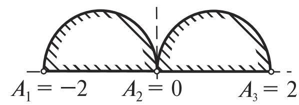

Рис. 30.39

8. Найти какую-либо функцию $w(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на плоскость w с разрезами по лучам

$$[ki,\ ki + i\infty], \quad \left[\left(k+\frac{1}{4}\right)i,\ \left(k+\frac{1}{4}\right)i + i\infty\right] \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

9. Найти какую-либо функцию $w(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на полуплоскость w, из которой выброшены полосы

$$\left\{w\colon\ \operatorname{Re} w < 0,\ |k - \operatorname{Im} w| < \frac{1}{4}\right\} \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

10. Найти функции $w(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на многоугольники, изображенные на рис. 30.40–30.42, таким образом, чтобы $w(0) = A_1$, $w(1) = A_2$, $w(\infty) = A_3$.

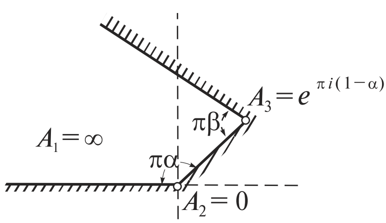

Рис. 30.40

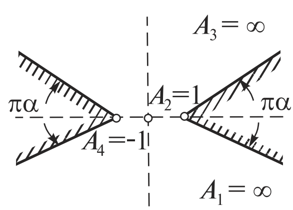

Рис. 30.41

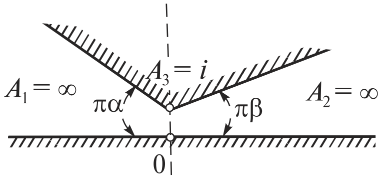

Рис. 30.42

11. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую круг $\{z\colon |z| < 1\}$ на правильный n-угольник, вписанный в круг $\{w\colon |w| < 1\}$, таким образом, чтобы $w(0) = 0$, $w(1) = 1$.

Ответы

1. 1) Рис. 30.5: $w = \dfrac{1}{\pi}(-z^2 + 2\ln z + 1 - \pi i)$;

2) рис. 30.6: $w = \dfrac{1}{\pi}(z - \ln z - 1 + \pi i)$;

3) рис. 30.7: $w = h\ln(z-1) + (1-h)\ln\left(1 + \dfrac{hz}{1-h}\right)$;

4) рис. 30.8: $w = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\,\dfrac{(z-1)^2}{z\sqrt{z}}$;

5) рис. 30.9: $w = \dfrac{z^{1-\alpha}}{(1-\alpha)z+\alpha}\,e^{\pi i\alpha}$;

6) рис. 30.10: $w = -\dfrac{h}{4}(1+\alpha)^{1+\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}z^{\alpha-1}(z-1)^2$;

7) рис. 30.11: $w = \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{z}} + \ln\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)$;

8) рис. 30.12: $w = \dfrac{i}{2}(3-z)\sqrt{z}$;

9) рис. 30.13: $w = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} + \arcsin(2z-1) + 4\left(z - \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{z(1-z)}\right)$;

10) рис. 30.14: $w = \dfrac{1}{\pi}\left(H\ln\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} + ih\ln\dfrac{H - ih\sqrt{z}}{H + ih\sqrt{z}}\right)$;

11) рис. 30.15:

$$w = \frac{H-h}{\pi}\left\{\ln\frac{\sqrt{z-1}-i}{\sqrt{z-1}+i} + \frac{H}{H-h}\ln\frac{(H-h)\sqrt{z-1}+iH}{(H-h)\sqrt{z-1}-iH}\right\};$$

12) рис. 30.16:

$$w = h\left\{\frac{(1+a)z(2z+a-1)}{(1-a)(1-z)(z+a)} - \ln\frac{a(1-z)}{z+a}\right\},$$

где a — единственное положительное решение уравнения $\dfrac{a+1}{a-1} = \dfrac{1}{2}\ln a$;

13) рис. 30.17: $w = i + \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{z(z+a)}{1+a} - 1 - \ln z - \ln\dfrac{z+a}{1+a}\right]$, где a — единственное положительное решение уравнения $\dfrac{(a+2)^2}{4(a+1)} + \ln\dfrac{a^2}{4(a+1)} = -\pi h$;

14) рис. 30.18:

$$w(z) = \frac{H}{\pi}\left[\frac{z^2-1}{2} + \frac{(a-1)(z-1)^2}{2} - \ln z\right] + h + iH,$$

$\dfrac{1}{2}(a^2-1)(a+2) - \ln a = -\pi\dfrac{h}{H}$.

3. 1) Рис. 30.25: $w = \dfrac{C}{z}(z-1)^{1+2\alpha}(z+1)^{1-2\alpha}$, $C = \dfrac{(1-2\alpha)^{\alpha}(1+2\alpha)^{-\alpha}}{2i\sqrt{1-4\alpha^2}}$;

2) рис. 30.26: $w = \dfrac{C}{z}(z^2-1)^{2\alpha}(z^2+1)^{1-2\alpha}$, $C = \dfrac{(1-2\alpha)^{\alpha-(1/2)}}{2^{\alpha+1}\alpha^{\alpha}}$;

3) рис. 30.27:

$$w = -i2^{\alpha-(3/2)}(1+\cos\theta)^{-(1/2)-\alpha}\cdot\frac{1}{z}\,(z+1)^{1-2\alpha}(z^2+2z\cos\theta+1)^{(1/2)+\alpha},$$

где θ — единственное решение уравнения

$$(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}-\alpha} = (1-\cos\theta)\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{(1/2)-\alpha}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^{(1/2)+\alpha},$$

лежащее в интервале $\left(0,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. 1) Рис. 30.28: $w = \dfrac{2\pi}{z-\ln z-1}$;

2) рис. 30.29: $w = \dfrac{2z\sqrt{z}-(1+2z)\sqrt{1-z}}{2z\sqrt{z}+(1+2z)\sqrt{1-z}}$;

3) рис. 30.30:

$$w = i\,\frac{(1+\sqrt{2})(1-2z)^{3/2}+(1+i)3^{3/4}\sqrt{z(1-z)}}{(1+\sqrt{2})(1-2z)^{3/2}-(1+i)3^{3/4}\sqrt{z(1-z)}}$$

(здесь $A_3 = i+0i$);

4) рис. 30.31: $w = \dfrac{2\pi}{z^2-2\ln z+\pi i-\pi-1}$.

5. 1) Рис. 30.32: $w = (1+i)2^{1/2}\cdot 3^{-3/4}\cdot\sqrt[4]{(z-1)(z+1)^3}$;

2) рис. 30.33:

$$w = \pi i\left\{\frac{1}{(a^2-1)\sqrt{1-z^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1-z^2}+1}{\sqrt{1-z^2}-1}\right\}^{-1},$$

где a — единственное положительное решение уравнения

$$\frac{2a}{a^2-1}+\ln\frac{a+1}{a-1} = \pi;$$

3) рис. 30.34:

$$w = -\pi i\left(\sqrt{\frac{(1+a^2)z+a^2-1}{z-1}}-\ln\frac{\sqrt{z-1}+\sqrt{(1+a^2)z+a^2-1}}{a\sqrt{z-1}}-\frac{\pi}{2}\right)^{-1},$$

где a — единственное положительное решение уравнения

$$\sqrt{1+a^2}-\ln\frac{1+\sqrt{a^2+1}}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

6. 1) Рис. 30.35:

$$w = \frac{2}{\pi}\left\{\ln(e^{\pi z}+\sqrt{a^2+e^{2\pi z}})-\sqrt{1+a^2e^{2\pi z}}-\ln a\right\},$$

где a — единственное положительное решение уравнения

$$\sqrt{1+a^2} = \operatorname{cth}\sqrt{1+a^2};$$

2) рис. 30.36: $w = 2^{1/3}3^{-1/2}\operatorname{sh}\pi z(\operatorname{ch}\pi z)^{-2/3}$;

3) рис. 30.37:

$$w = \frac{1}{\pi}\left\{\ln\frac{2\sqrt{\operatorname{ch}\pi z}+(1+i)\operatorname{sh}\pi z}{2\sqrt{\operatorname{ch}\pi z}-(1+i)\operatorname{sh}\pi z}+i\ln\frac{2\sqrt{\operatorname{ch}\pi z}+(1-i)\operatorname{sh}\pi z}{2\sqrt{\operatorname{ch}\pi z}-(1-i)\operatorname{sh}\pi z}\right\}.$$

7. 1) Рис. 30.38:

$$w = -\frac{\pi(a^2-1)}{i\,\mathrm{sh}\,z - \dfrac{a^2-1}{2}\ln\dfrac{1-i\,\mathrm{sh}\,z}{1+i\,\mathrm{sh}\,z}},$$

где a — единственное положительное решение уравнения

$$\frac{2a}{a^2-1} - \ln\frac{a-1}{a+1} = \pi;$$

2) рис. 30.39: $w = \dfrac{\pi i}{z - \mathrm{cth}\,z}$.

10. 1) Рис. 30.40:

$$w = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,e^{\pi i(1-\alpha)}\int\limits_1^z \frac{(\zeta-1)^{\alpha-1}}{\zeta^{\alpha+\beta}}\,d\zeta;$$

2) рис. 30.41:

$$w = e^{\pi i\alpha/2}\cdot\frac{2\Gamma^2\left(\dfrac{3-\alpha}{2}\right)}{\pi\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_1^z \zeta^{\alpha-2}(\zeta^2-1)^{1-\alpha}d\zeta + 1;$$

3) рис. 30.42:

$$w = \frac{\Gamma(\alpha+1)e^{\pi i\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta+1)\sin\pi\beta}\int\limits_z^\infty \zeta^{-\alpha-1}(\zeta-1)^{-\beta-1}d\zeta + i.$$

11. $w = \dfrac{\pi n}{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\sin\dfrac{\pi}{n}}\displaystyle\int\limits_0^z (1-\zeta^n)^{-2/n}d\zeta.$

§ 31. Применение конформных отображений при решении краевых задач для гармонических функций

1. Конформные отображения применяются при решении краевых задач для уравнения Лапласа в плоских областях. Рассмотрим некоторые из этих задач.

Классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Для ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial D = \Gamma$ и непрерывной на Γ функции $u_0(x,y)$ найти функцию $u = u(x,y)$ из класса $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ такую, что

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в } D, \\ u|_{(x,y)\in\Gamma} = u_0(x, y). \end{cases}$$

Общая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Для области $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial D = \Gamma$ и функции $u_0(x, y)$, ограниченной и непрерывной на Γ, кроме быть может конечного числа точек $\zeta_k \in \Gamma$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, в которых функция $u(x, y)$ имеет разрывы 1 рода (вдоль по кривой Γ), найти ограниченную функцию из класса $C^2(D)$, непрерывную в $\overline{D}$, кроме точек ζ_k $(k = 1, \ldots, n)$, такую, что

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в } D, \\ u|_{(x,y)\in\Gamma\setminus\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}} = u_0(x, y). \end{cases}$$

Заметим, что в общей задаче Дирихле область D может быть неограниченной, а если точка ∞ принадлежит D, то решение $u(x, y)$ должно быть ограничено в том числе и в проколотой окрестности точки ∞. Для удобства функцию $u(x, y)$ будем записывать в виде $u(z)$, где $z = x + iy$.

Из курса уравнений математической физики известно, что решение общей задачи Дирихле при указанных условиях на область D и функции u и u_0 существует и единственно.

2. Приведем результат решения задачи Дирихле в случаях, когда D — единичный круг и когда D — верхняя полуплоскость.

1) Решение общей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $D = \{z\colon |z| < 1\}$ с заданной на окружности $\Gamma = \{\zeta\colon |\zeta| = 1\}$ функцией $u_0 = u_0(\zeta)$ представляется *интегралом Пуассона:*

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} u_0(\zeta)\, \frac{\zeta + z}{(\zeta - z)\zeta}\, d\zeta, \quad z \in D.$$

2) Решение общей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ с заданной на действительной прямой функцией $u_0 = u_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, представляется *интегралом Пуассона:*

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cdot u_0(t)}{(t - x)^2 + y^2}\, dt, \quad z = x + iy \in D.$$

3. В случае областей более произвольного вида применима следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть регулярная функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на область G и пусть функция $\widetilde{u} = \widetilde{u}(z)$ является гармонической в области G. Тогда функция $u(z) = \widetilde{u}(f(z))$ является гармонической в области D.*

Согласно теореме 1, для решения задачи Дирихле в произвольной области D достаточно найти конформное отображение области D на более простую область G, в которой решение задачи Дирихле уже известно, или может быть найдено более простым способом, чем в D. Этот прием и лежит в основе метода решения задачи Дирихле с помощью конформных отображений.

4. *Функцией Грина* общей задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D называется функция с действительными значениями вида

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\ln|z-\zeta| + g(z,\zeta), \quad z,\zeta \in D$$

такая, что:

1) при каждом фиксированном $\zeta \in D$ функция $g(z,\zeta)$ является по переменной z гармонической в области D и непрерывной в $\overline{D}$;
2) при каждом $\zeta \in D$ справедливо равенство $G(z,\zeta)|_{z\in\Gamma} = 0$.

Зная функцию Грина, можно получить решение (при определенных условиях на гладкость G) общей задачи Дирихле в виде:

$$u(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n}\, u_0(\zeta)|d\zeta|,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование в направлении единичной внешней нормали $\overline{n}$ к границе Γ области D по переменной ζ.

Если функция $w = w(z)$ реализует конформное отображение области D на единичный круг $\{w\colon |w| < 1\}$, то функция Грина для области D имеет вид

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\ln|w_\zeta(z)|,$$

где

$$w_\zeta(z) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\cdot\overline{w(\zeta)}}\,.$$

5. Вторая краевая задача, или *задача Неймана.* Для заданных ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ и непрерывной на Γ функции $u_1(x,y)$ найти функцию $u = u(x,y)$ класса $C^2(D) \cap C(\overline{D})$, имеющую непрерывную на Γ производную $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ в направлении единичной внешней нормали $\overline{n}$ к Γ и такую, что

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в } D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma} = u_1(x,y). \end{cases}$$

Из курса уравнений математической физики известно, что при условии

$$\int\limits_{\Gamma} u_1(s)\,ds = 0$$

решение задачи Неймана существует и разность двух разных решений является константой.

В случае односвязной области D задачу Неймана можно свести к классической задаче Дирихле следующим образом:

1) найти функцию $v = v(x,y)$, которая является сопряженной гармонической для $u = u(x,y)$, решив следующую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \quad \text{в } D, \\ v|_{\zeta\in\Gamma} = \displaystyle\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} u_1(s)\,ds, \end{cases}$$

где ζ_0 — фиксированная точка на Γ и интеграл берется по произвольной связной части границы Γ, соединяющей точки ζ_0 и ζ.

2) с помощью условий Коши—Римана $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ найти u по v (с точностью до постоянного слагаемого).

Примеры с решениями

Пример 1. Найти решение классической задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad |z| < 1, \\ u|_{|z|=1} = \dfrac{\sin\varphi}{5 + 4\cos\varphi}\,. \end{cases}$$

△ Воспользуемся формулой Пуассона для решения задачи Дирихле в единичном круге. Для этого выразим граничное условие через комплексную переменную $\zeta = e^{i\varphi}$. Тогда

$$\sin\varphi = \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{2i}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right),$$

$$u_0(\zeta) = \frac{\sin\varphi}{5 + 4\cos\varphi} = \frac{\zeta^2 - 1}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)}.$$

Подставляя $u_0(\zeta)$ в формулу Пуассона, получаем, что $u(z) = \operatorname{Re} I(z)$, где $I(z)$ — интеграл вида

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)(\zeta - z)\zeta}\, d\zeta.$$

Вычислим $I(z)$ с помощью вычетов. Найдем все конечные особые точки подынтегральной функции

$$f(\zeta) = \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)(\zeta - z)\zeta}.$$

Это точки $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = -2$, $\zeta_2 = -1/2$ (корни уравнения $2\zeta^2 + 5\zeta + 2 = 0$), $\zeta_3 = z$, где $|z| < 1$.

В области $\{\zeta \colon |\zeta| > 1\}$ функция $f(\zeta)$ имеет только одну конечную особую точку $\zeta_1 = -2$. По теореме Коши о вычетах

$$I(z) = -\operatorname*{res}_{\zeta=-2} f(\zeta) - \operatorname*{res}_{\zeta=\infty} f(\zeta),$$

с учетом ориентации единичной окружности.

Так как $\zeta_1 = -2$ — полюс первого порядка для $f(\zeta)$, то

$$\operatorname*{res}_{\zeta=-2} f = \left.\frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(\zeta - z)\zeta(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)'}\right|_{\zeta=-2} =$$

$$= \frac{3(z - 2)}{2i(-2 - z)(-2)(-3)} = \frac{2 - z}{4i(z + 2)}.$$

Точка $\zeta = \infty$ является нулем первого порядка для функции $f(\zeta)$, причем $f(\zeta) \sim \dfrac{1}{4i\zeta}$ $(\zeta \to \infty)$, поэтому

$$\operatorname*{res}_{\zeta=\infty} f(\zeta) = -\frac{1}{4i}.$$

Тогда

$$I(z) = \frac{z - 2}{4i(z + 2)} + \frac{1}{4i} = \frac{z - 2 + z + 2}{4i(z + 2)} = \frac{z}{2i(z + 2)}.$$

Откуда

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\frac{z}{2i(z + 2)} = \operatorname{Re}\frac{x + iy}{2i(x + iy + 2)} = \operatorname{Re}\left[\frac{(y - ix)}{2} \cdot \frac{(x + 2 - iy)}{(x + 2)^2 + y^2}\right] =$$

$$= \frac{y(x + 2) - xy}{2((x + 2)^2 + y^2)} = \frac{y}{(x + 2)^2 + y^2}.$$

▲

Пример 2. Найти решение общей задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & y > 0, \\ u\big|_{y=0} = \dfrac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

$\triangle$ Воспользуемся формулой Пуассона для решения задачи Дирихле в верхней полуплоскости:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(1+t^2)((t-x)^2+y^2)}\,dt.$$

Вычислим этот несобственный интеграл с помощью вычетов. Для функции $f(\zeta) = \dfrac{y}{(1+\zeta^2)((\zeta-x)^2+y^2)}$ в верхней полуплоскости есть только две особые точки $\zeta_1 = i$ и $\zeta_2 = x+iy$ (так как $y>0$ по условию). Это полюса первого порядка. По теореме 1 § 23 находим

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(2\pi i \cdot (\operatorname*{res}_{\zeta=i} f(\zeta) + \operatorname*{res}_{\zeta=x+iy} f(\zeta)) \right),$$

где

$$\operatorname*{res}_{\zeta=i} f(\zeta) = \frac{y}{((\zeta-x)^2+y^2)\cdot(\zeta^2+1)'}\bigg|_{\zeta=i} = \frac{y}{2i((i-x)^2+y^2)},$$

$$\operatorname*{res}_{\zeta=x+iy} f(\zeta) = \frac{y}{(1+\zeta^2)((\zeta-x)^2+y^2)'}\bigg|_{\zeta=x+iy} = \frac{y}{(1+\zeta^2)(2(\zeta-x))}\bigg|_{\zeta=x+iy} =$$

$$= \frac{y}{(1+(x+iy)^2)2iy} = \frac{1}{2i(1+(x+iy)^2)}.$$

Следовательно,

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\left(2\pi i \left(\frac{y}{2i((i-x)^2+y^2)} + \frac{1}{2i(1+(x+iy)^2)} \right)\right) =$$

$$= \frac{y}{(i-x+iy)(i-x-iy)} + \frac{1}{(1+i(x+iy))(1-i(x+iy))} =$$

$$= \frac{(y+1)(1+ix-y)}{(1+y+ix)(1+y-ix)(1+ix-y)} = \frac{y+1}{(y+1)^2+x^2}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Решить в области $G = \{z\colon |z|<1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ общую задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в } G, \\ u\big|_{(-1,1)} = 0, \qquad u\Big|_{\substack{|z|=1 \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} = 1. \end{cases}$$

△ Функция

$$w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

конформно отображает полукруг $G = \{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ (рис. 31.1) на верхнюю полуплоскость $D = \{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$ (см. § 28, п. 4). При этом верхняя полуокружность $\Gamma_1 = \{z\colon |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ переходит в отрезок $w(\Gamma_1) = [-1; 1]$, а отрезок $\Gamma_2 = [-1; 1]$ — в два луча $w(\Gamma_2) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

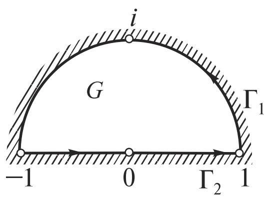

Рис. 31.1

Тогда, согласно теореме 1, если $\widetilde{u}$ — решение задачи Дирихле в области $D = w(G)$:

$$\begin{cases} \Delta\widetilde{u} = 0 \text{ в } D, \\ \widetilde{u}|_{w(\Gamma_1)} = 1, \qquad \widetilde{u}|_{w(\Gamma_2)} = 0, \end{cases}$$

то функция $u(z) = \widetilde{u}(f(z))$ будет решением исходной задачи Дирихле в области G.

Функцию $\widetilde{u} = \widetilde{u}(w) = \widetilde{u}(\zeta, \eta)$, где $w = \zeta + i\eta$, найдем по формуле Пуассона:

$$\widetilde{u}(\zeta, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\eta\, dt}{(t-\zeta)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d(t/\eta)}{\left(\dfrac{t}{\eta} - \dfrac{\zeta}{\eta}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\eta} - \frac{\zeta}{\eta}\right)\Bigg|_{-1}^{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\zeta}{\eta}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\zeta}{\eta}\right)\right).$$

Осталось выразить ζ, η через x, y, где $z = x + iy$, $w = \zeta + i\eta$, из формулы

$$w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Приравнивая действительные и мнимые части в равенстве

$$\zeta + i\eta = -\frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{1}{x + iy}\right),$$

получаем

$$\zeta = -\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

$$\eta = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{x^2+y^2}-1\right).$$

Подставляя ζ, η в формулу для $\widetilde{u}(\zeta,\eta)$ и упрощая, находим

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \widetilde{u}\left(\zeta(x,y),\eta(x,y)\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{2(x^2+y^2)+x(x^2+y^2)+x}{y(1-x^2-y^2)} + \right. \\ &\qquad \left. + \operatorname{arctg}\frac{2(x^2+y^2)-x(x^2+y^2)-x}{y(1-x^2-y^2)}\right). \end{aligned}$$ ▲

Задачи

1. Решить классическую задачу Дирихле для единичного круга $\{z\colon |z|<1\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |z|<1; \\ u\big|_{|z|=1} = \dfrac{1}{2+\sin\varphi}, & \text{где } z = re^{i\varphi}. \end{cases}$$

2. Решить общую задачу Дирихле для верхней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z>0\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & y>0; \\ u\big|_{y=0} = \sin x, & \text{где } z = x+iy. \end{cases}$$

3. Решить общую задачу Дирихле для нижней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z<0\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & y<0; \\ u\Big|_{\substack{\operatorname{Im} z=0 \\ \operatorname{Re} z\geqslant 0}} = 1, & u\Big|_{\substack{\operatorname{Im} z=0 \\ \operatorname{Re} z<0}} = 0. \end{cases}$$

4. Решить общую задачу Дирихле для внешности единичного круга $\{z\colon |z|>1\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |z|>1; \\ u\big|_{|z|=1} = & \dfrac{1}{5-4\cos\varphi}. \end{cases}$$

5. Решить общую задачу Дирихле для первой четверти плоскости $D = \{z\colon \operatorname{Im} z>0,\ \operatorname{Re} z>0\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z\in D; \\ u\Big|_{\substack{\operatorname{Re} z=0 \\ \operatorname{Im} z>0}} = 0, & u\Big|_{\substack{\operatorname{Im} z=0 \\ \operatorname{Re} z\geqslant 0}} = 1. \end{cases}$$

6. Решить общую задачу Дирихле для полуполосы

$$D = \{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\} : \begin{cases} \Delta u = 0, & z \in D; \\ u\Big|_{\substack{\operatorname{Im} z=0 \\ \operatorname{Re} z>0}} = 0, \quad u\Big|_{\substack{\operatorname{Im} z=\pi \\ \operatorname{Re} z>0}} = 0, \quad u\Big|_{\substack{\operatorname{Re} z=0 \\ 0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant \pi}} = 1. \end{cases}$$

7. Решить общую задачу Дирихле для области

$$D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0,\ |z + il| < R\},$$

где $l > R > 0$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z \in D; \\ u\big|_{\operatorname{Im} z=0} = 0, \quad u\big|_{|z+il|=R} = T = \operatorname{const}. \end{cases}$$

8. Найти функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в единичном круге $\{z\colon |z| < 1\}$.

9. Найти функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в на верхней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$.

10. Найти функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в единичном полукруге $\{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

Ответы

1. $u(x, y) = \dfrac{(2+\sqrt{3})^2 - (x^2 + y^2)}{\sqrt{3}(x^2 + (2 + \sqrt{3} + y)^2)}$. **2.** $u(x, y) = e^{-y} \sin x$.

3. $u(x, y) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{x}{y}\right)$.

4. $u(x, y) = \dfrac{4x^2 + 4y^2 - 1}{3((2x - 1)^2 + 4y^2)}$.

5. $u(x, y) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{y^2 - x^2}{2xy}\right)$.

6. $u(x, y) = \dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} \dfrac{1 - \cos y \operatorname{ch} x}{\sin y \operatorname{sh} x} + \operatorname{arctg} \dfrac{1 + \cos y \operatorname{ch} x}{\sin y \operatorname{sh} x}\right)$.

7. $u(x, y) = \dfrac{T}{\ln R_1} \ln \dfrac{\sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2x^2}}{x^2 + (y - a)^2}$,
где $a = \sqrt{l^2 - R^2}$, $R_1 = \dfrac{R + l - a}{R + l + a}$.

8. $G(z, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \ln\left|\dfrac{z - \zeta}{1 - z\overline{\zeta}}\right|$. **9.** $G(z, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \ln\left|\dfrac{(z - \zeta)(\overline{\zeta} - i)}{(\overline{\zeta} - z)(\zeta + i)}\right|$.

10. $G(z, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \ln\left|\dfrac{(\zeta - z)(z\zeta - 1)(\overline{\zeta}^2 + 1 + 2i\overline{\zeta})}{(z - \overline{\zeta})(\overline{\zeta}z - 1)(\zeta^2 + 1 - 2i\zeta)}\right|$.

§ 32. Преобразование Лапласа (операционное исчисление) и его применение к решению дифференциальных уравнений

Справочные сведения

1. Оригинал и его изображение

1.1. *Оригиналом* называют комплекснозначную функцию $f(t)$ действительного переменного, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
2) на каждом отрезке полуоси $t \geqslant 0$ функция $f(t)$ непрерывна, кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода;
3) существуют такие действительные числа $M > 0$ и α, что для всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}.$$

1.2. *Изображением* оригинала $f(t)$ называют комплекснозначную функцию

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \tag{1}$$

комплексного переменного p.

Интеграл (1) называют *преобразованием Лапласа* функции $f(t)$. Функция $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ и

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} F(p) = 0.$$

Связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ записывают так:

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad \text{или} \quad F(p) \fallingdotseq f(t).$$

2. Свойства преобразования Лапласа

2.1. *Линейность.* Если

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad g(t) \risingdotseq G(p),$$

то

$$af(t) + bg(t) \risingdotseq aF(p) + bG(p),$$

где a, b — любые комплексные числа.

2.2. *Подобие.* Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\beta > 0$, то

$$f(\beta t) \risingdotseq \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right). \tag{2}$$

2.3. *Дифференцирование оригинала.* Если $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ — оригиналы и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - \\ - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \to +0} f^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Замечание. Если $f^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p),$$

т. е. дифференцированию оригинала соответствует умножение на p его изображения.

2.4. *Дифференцирование изображения.* Если $F(p) \risingdotseq f(t)$, то

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t). \tag{4}$$

2.5. *Интегрирование оригинала.* Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}. \tag{5}$$

2.6. *Интегрирование изображения.* Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\frac{1}{t} f(t)$ — оригинал, то

$$\frac{1}{t} f(t) \risingdotseq \int_p^\infty F(\zeta)\, d\zeta, \tag{6}$$

где (p, ∞) — горизонтальный луч, принадлежащий полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, от точки p до точки $\operatorname{Re} p = +\infty$.

2.7. *Запаздывание оригинала.* Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $f(t) = 0$ при $t < \tau$, где $\tau > 0$, то

$$f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p). \tag{7}$$

2.8. *Смещение изображения.* Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого комплексного числа a

$$f(t) e^{at} \risingdotseq F(p - a). \tag{8}$$

3. Формула обращения преобразования Лапласа

Теорема 1. *Пусть $F(p) \fallingdotseq f(t)$, где функция $f(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$. Тогда*

$$f(t) \fallingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)e^{pt}dp, \tag{9}$$

где $b \geqslant \alpha$.

4. Теорема разложения

Теорема 2. *Пусть функция $F(p)$ регулярна в точке $p = \infty$ и $F(\infty) = 0$, т. е.*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n} \quad \text{при} \quad |p| > R. \tag{10}$$

Тогда оригиналом функции $F(p)$ является функция

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n. \tag{11}$$

5. Таблица оригиналов и их изображений

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{sh} wt$	$\frac{w}{p^2 - w^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{ch} wt$	$\frac{p}{p^2 - w^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$t \sin wt$	$\frac{2wp}{(p^2 + w^2)^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$t \cos wt$	$\frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}$
$\sin wt$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$	$e^{at} \sin wt$	$\frac{w}{(p-a)^2 + w^2}$
$\cos wt$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$	$e^{at} \cos wt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + w^2}$

6. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$Lx = x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t). \tag{12}$$

Поставим задачу Коши: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \; \ldots \;, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \tag{13}$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — заданные постоянные. Предполагая, что $f(t)$ — оригинал, будем искать решение $x(t)$ задачи (12)–(13) такое, что $x(t) = 0$ при $t < 0$. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. По правилу дифференцирования оригинала и свойству линейности, переходя к изображениям в уравнении с учетом условий (13) получаем

$$\begin{gathered} p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - \ldots - px_{n-2} - x_{n-1} + \\ + a_1(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - \ldots - px_{n-3} - x_{n-2}) + \ldots + \\ + a_{n-1}(pX(p) - x_0) + a_nX(p) = F(p), \end{gathered}$$

или

$$A(p)X(p) - B(p) = F(p),$$

где

$$A(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$$

— характеристический многочлен уравнения $Lx = 0$,

$$\begin{gathered} B(p) = x_0(p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + \\ + x_1(p^{n-2} + a_1p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \\ + \ldots + x_{n-2}(p + a_1) + x_{n-1}. \end{gathered}$$

Отсюда $X(p) = (B(p) + F(p))/A(p)$. Для нахождения искомого решения $x(t)$ задачи (12)–(13) нужно восстановить по изображению $X(p)$ его оригинал $x(t)$. Это можно сделать с помощью формулы обращения. При практическом применении операционного метода вместо формулы обращения обычно используются таблицы оригиналов и их изображений. В частности, если $f(t)$ — квазимногочлен (линейная комбинация функций вида $t^r e^{\lambda t}$), то $X(p)$ — рациональная функция. Для нахождения оригинала эту функцию часто бывает удобно представить в виде суммы элементарных дробей. Способ решения задач для дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа называют *операционным исчислением.*

Примеры с решениями

Пример 1. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, считая, что $f(t) = 0$ при $t < 0$, если:

1) $f(t) = \sin^2 t$; 2) $f(t) = \cos 3t \sin t$;

3) $f(t) = \cos^3 t$; 4) $f(t) = t \operatorname{ch} t$.

△ 1) Используя тождество

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

и таблицу оригиналов и изображений, получаем

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{2}{p(p^2+4)}\,.$$

2) Так как

$$\cos 3t \sin t = \frac{1}{2}\,(\sin 4t - \sin 2t),$$

то по таблице находим

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{p^2+16} - \frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{p^2-8}{(p^2+4)(p^2+16)}\,.$$

3) Используя тождество

$$\cos^3 t = \frac{1}{4}\,(\cos 3t + 3\cos t),$$

находим

$$F(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{p}{p^2+9} + \frac{3p}{p^2+1}\right).$$

4) Так как

$$t \operatorname{ch} t = \frac{1}{2}\,(te^t + te^{-t}),$$

то по таблице находим

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) = \frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}\,. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. Найти оригинал $f(t)$, если задано его отображение $F(p)$:

1) $F(p) = \dfrac{p+8}{p^2+p-2}$; 2) $F(p) = \dfrac{1}{p(p+1)^2}$;

3) $F(p) = \dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+4)}$; 4) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+4)^2}$.

△ 1) Так как $p^2 + p - 2 = (p-1)(p+2)$, то $F(p)$ можно представить в виде суммы простых дробей, т. е.

$$F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2}\,,$$

где

$$A = \operatorname*{res}_{p=1} \frac{p+8}{(p-1)(p+2)} = \left(\frac{p+8}{p+2}\right)_{p=1} = 3,$$

$$B = \operatorname*{res}_{p=-2} F(p) = \left(\frac{p+8}{p-1}\right)_{p=-2} = -2.$$

Числа A и B можно найти из тождества

$$p+8 = A(p+2) + B(p-1).$$

Итак, $F(p) = \dfrac{3}{p-1} - \dfrac{2}{p+2}$, откуда по таблице находим

$$f(t) = 3e^t - 2e^{-2t}.$$

2) Представим $F(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2}\,,$$

откуда

$$1 = A(p+1) + Bp(p+1) + Cp.$$

Полагая в этом тождестве $p=0$, находим $A=1$, а если $p=-1$, то $C=-1$. Наконец, приравнивая в этом тождестве коэффициенты при p, получаем $2A+B+C=0$, откуда $B=-1$. Итак,

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}\,,$$

откуда

$$f(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

3) Чтобы воспользоваться таблицей, преобразуем изображение

$$F(p) = \frac{6}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+9}\right),$$

откуда с помощью таблицы находим

$$f(t) = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t) = \sin^3 t.$$

4) Чтобы использовать таблицу, преобразуем изображение:

$$F(p) = \frac{p^2+4-(p^2-4)}{8(p^2+4)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{p^2+4} - \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}\right).$$

По таблице находим оригинал

$$f(t) = \frac{1}{16}\sin 2t - \frac{1}{8}\,t\cos 2t.$$

▲

Пример 3. Решить задачу Коши для уравнения

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 6e^{-t}$$

с начальными условиями $x(0) = 2,\ \ x'(0) = 0.$

$\triangle$ Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, тогда, используя свойство (3) дифференцирования оригинала, получаем

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 2,$$
$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - p\,x(0) - x'(0) = p^2X(p) - 2p.$$

Поэтому, переходя в уравнении к изображениям, находим

$$p^2X(p) - 2p - 3(pX(p) - 2) + 2X(p) = \frac{6}{p+1}\,,$$

откуда $X(p) = \dfrac{2p}{p^2-1} = \dfrac{1}{p-1} + \dfrac{1}{p+1}$.

По таблице получаем

$$x(t) = e^t + e^{-t} = 2\operatorname{ch} t. \qquad \blacktriangle$$

Пример 4. Решить задачу Коши для уравнения

$$x''(t) + x(t) = t\cos 2t$$

с начальными условиями $x(0) = x'(0) = 0.$

$\triangle$ Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, тогда

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p).$$

Переходя в уравнении к изображениям, получаем

$$p^2X(p) + X(p) = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}\,,$$

откуда

$$X(p) = \frac{p^2-4}{(p^2+1)(p^2+4)^2}\,.$$

Заметим, что таблица содержит оригиналы для функций $\dfrac{1}{p^2+1}$ и $\dfrac{1}{p^2+4}$.

Кроме того, воспользуемся тем, что в примере 2 (4) для изображения $\dfrac{1}{(p^2+4)^2}$ найден оригинал

$$\frac{1}{16}\sin 2t - \frac{t}{8}\cos 2t.$$

Учитывая это, представим $X(p)$ в следующем виде:

$$X(p) = \frac{A}{p^2+1} + \frac{B}{p^2+4} + \frac{C}{(p^2+4)^2}\,.$$

Чтобы найти A, B и C, введем обозначение $p^2 = s$ и приведем дроби к общему знаменателю. Тогда

$$s - 4 = A(s+4)^2 + B(s+1)(s+4) + C(s+1).$$

Полагая в этом тождестве $s = -4$, $s = -1$ и $s = 0$, найдем $C = \dfrac{8}{3}$, $A = -\dfrac{5}{9}$, $-4 = 16A + 4B + C$, откуда $B = \dfrac{5}{9}$.

Так как $\dfrac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t$, $\dfrac{1}{p^2+4} \risingdotseq \dfrac{1}{2}\sin 2t$, то

$$x(t) = -\frac{5}{9}\sin t + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{16}\sin 2t - \frac{1}{8}\,t\cos 2t\right),\ \text{т. е.}$$

$$x(t) = -\frac{5}{9}\sin t + \frac{4}{9}\sin 2t - \frac{1}{3}\,t\cos 2t. \qquad \blacktriangle$$

Пример 5. Решить задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} x'(t) + y'(t) + x(t) + y(t) = t, \\ x''(t) - y'(t) + 2x(t) = 3(e^{-t} - 1) \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

△ Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда

$$x'(t) \risingdotseq pX(p), \quad x''(t) \risingdotseq p^2X(p) + 1, \quad y'(t) \risingdotseq pY(p).$$

Переходя к изображениям в системе уравнений, получаем

$$\begin{cases} pX(p) + pY(p) + X(p) + Y(p) = \dfrac{1}{p^2}\,, \\ p^2X(p) + 1 - pY(p) + 2X(p) \quad = 3\left(\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p}\right). \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$X(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}\,, \quad Y(p) = \frac{1}{p^2}\,,$$

откуда $x(t) = e^{-t} - 1$, $y(t) = t$. ▲

Задачи

1. Найти изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$, если:

1) $f(t) = \sin t \sin 3t$; 2) $f(t) = t \operatorname{sh} t$;
3) $f(t) = \sin^3 t$; 4) $f(t) = \cos^4 t + \sin^4 t$.

2. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)$, если:

1) $F(p) = \dfrac{1}{p^2 - 4p + 5}$; 2) $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$;

3) $F(p) = \dfrac{p+1}{p^3 - 2p^2 - 5p + 6}$; 4) $F(p) = \dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$;

5) $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p+3)^3}$; 6) $F(p) = \dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$;

7) $F(p) = \dfrac{(5p+3)}{(p-1)(p^2+2p+5)}$; 8) $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$;

9) $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)^3(p+3)}$; 10) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$.

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения с заданными начальными условиями:

1) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t^2 e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;
2) $x^{(3)}(t) + 3x^{(2)}(t) + 3x'(t) + x(t) = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;
3) $x^{(3)}(t) - 2x^{(2)}(t) + x'(t) = 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -2$;
4) $x^{(3)}(t) + x^{(2)}(t) = \cos t$, $x(0) = -2$, $x'(0) = x''(0) = 0$;
5) $x''(t) + x(t) = 2\cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$;
6) $x''(t) + 4x(t) = 2\sin 2t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$;
7) $x^{(4)}(t) - x(t) = 1$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 2$, $x^{(3)}(0) = -1$;
8) $x^{(4)}(t) - 5x^{(2)}(t) + 10x'(t) - 6x(t) = 0$,
$x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 6$, $x^{(3)}(0) = -14$.

4. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями:

1) $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -x(t) - 4y(t), \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$;

2) $\begin{cases} x'(t) - 2x(t) - 4y(t) = 0, \\ y'(t) + x(t) + 2y(t) = 0, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1$;

3) $\begin{cases} x'(t) + 3x(t) - 4y(t) = 9e^{2t}, \\ 2x(t) + y'(t) - 3y(t) = 3e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 0$;

4) $\begin{cases} x'(t) + y'(t) = 1, \\ x^{(2)}(t) + y'(t) + x(t) = e^t, \end{cases}$

$x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Ответы

1. 1) $F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+4} - \frac{p}{p^2+16}\right) = \frac{6p}{(p^2+4)(p^2+16)}$;

2) $F(p) = \frac{2p}{(p^2-1)^2}$;

3) $F(p) = \frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$;

4) $F(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{p} + \frac{p}{p^2+4}\right)$.

2. 1) $f(t) = e^{2t}\sin t$; 2) $f(t) = t - \sin t$;

3) $f(t) = -\frac{e^t}{3} - \frac{e^{-2t}}{15} + \frac{2e^{3t}}{5}$;

4) $f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{e^t}{5} + \frac{\cos 2t}{20} - \frac{\sin 2t}{10}$;

5) $f(t) = \frac{e^{-t}}{8} - \frac{e^{-3t}}{8}(2t^2+2t+1)$;

6) $f(t) = e^{-t}(1-t^2)$;

7) $f(t) = \frac{1}{2}(2e^t - 2e^{-t}\cos 2t + 3e^{-t}\sin 2t)$;

8) $f(t) = \frac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t)$;

9) $f(t) = \frac{1}{8}(2t^2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-t} - e^{-3t})$;

10) $f(t) = \frac{1}{2}(t^2e^{2t} - 4te^{2t} + 6e^{2t} - 2te^t - 6e^t)$.

3. 1) $x(t) = e^t\left(t + \frac{t^4}{12}\right)$; 2) $x(t) = 1 - e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)$;

3) $x(t) = 4t + 3 - 2e^t$; 4) $x(t) = -1 - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t + e^{-t})$;

5) $x(t) = t\sin t - \cos t + \sin t$;

6) $x(t) = \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}t\cos t - \cos 2t$;

7) $x(t) = -1 + \sin t + 2\,\mathrm{ch}\,t$;

8) $x(t) = e^t(\cos t + \sin t) - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-3t}$.

4. 1) $x = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$, $y = 3e^{-3t} - 2e^{-2t}$;

2) $x(t) = 2 + 8t$, $y(t) = 1 - 4t$;

3) $x(t) = e^t + e^{2t}$, $y(t) = e^t - e^{2t}$;

4) $x(t) = e^t - 1 + e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $y(t) = t + 1 - x(t)$.

Литература

1. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М: Наука, 1984.
2. *Волковысский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1975.
3. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. — М.: Наука, 1968.
4. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, 1979.
5. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — М.: Высшая школа, 1981, тт. 1, 2.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — СПб.: Издательство «Лань», 2002.
7. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. — М.: Наука, 1967, т. 1; 1968, т. 2.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. — М.: Высшая школа, 1975, тт. 1, 2.
9. *Половинкин Е. С.* Курс лекций по теории функций комплексного переменного. — М: Физматкнига, 2003.
10. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984.
11. *Сборник задач по теории аналитических функций* / Под ред. Евграфова М. А. — М: Наука, 1972.
12. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1979.
13. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1989.
14. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988.
15. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
16. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1985.
17. *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — М.: ЛБЗ, Физматлит, 2002.

Оглавление

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Шабунин Михаил Иванович
Половинкин Евгений Сергеевич
Карлов Михаил Иванович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Ведущий редактор *М. Стригунова*
Художник *Н. Лозинская*
Технический редактор *Е. Денюкова*
Оригинал-макет подготовлен *М. Копаницкой* в пакете $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Подписано к использованию 19.03.15.
Формат 145×225 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Исчерпывающий задачник по теории функций комплексного переменного, написанный авторами на основе многолетнего опыта преподавания этого предмета в Московском физико-техническом институте.

Каждый параграф сборника содержит необходимый теоретический материал, примеры с решениями, а также задачи для самостоятельной работы.

Содержание настоящего сборника задач тесно связано с курсом ТФКП, изложенным в учебнике М. Шабунина и Ю. Сидорова «Теория функций комплексного переменного».

Для студентов инженерно-физических и физико-технических специальностей вузов, а также для студентов университетов.