

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

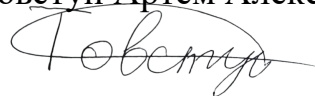
Факультет проблем физики и энергетики

## ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Рассеяние и захват частиц темной материи в Солнце.

Выполнил:

студент 783а группы  
Товстун Артем Александрович



Научный руководитель:

Сергей Владимирович Демидов

Москва 2021

## Содержание

Введение .....	3
1. Расчет сечения захвата .....	4
1.1. Определение матричного элемента .....	4
1.2. Кинематика и дифференциальное сечение .....	9
1.3. Сечение при малых импульсах фотона .....	11
1.4. Кинематика захвата и сечение .....	15
1.5. Влияние температуры .....	17
2. Расчет скорости захвата .....	21
2.1. Определение фазовой плотности частиц ТМ .....	21
2.2. Описание процесса интегрирования .....	24
3. Результаты расчета .....	28
4. Заключение .....	33

## Введение

Согласно современным представлениям темная материя (ТМ) – это одна из основных компонент современной Вселенной. Ее состав и природа не сегодняшний день неизвестны. Существование темной материи следует из анализа распределения массы в галактиках и их скоплений, которое можно определить с помощью гравитационного линзирования, исследования плотности электронов в скоплениях газа, кривой распределения орбитальных скоростей вращения вокруг центра галактики [1].

В общепринятой космологической модели, ТМ — это новые частицы. Кандидаты на роль частиц ТМ возникают во многих расширениях Стандартной модели физики частиц. Так, кандидатами на роль ТМ могут быть достаточно слабо взаимодействующие с видимой материей частицы, такие как, например, стерильные нейтрино, новые стабильные частицы, возникающие в рамках суперсимметричных моделей [1, 2].

В настоящее время активно ведутся поиски сигнала от частиц темной материи. Обнаружить ТМ можно прямым методом в низкофоновых экспериментах по отдаче ядер (прямой метод), в событиях на ускорителях, в которых не сохраняется видимый импульс или энергия, или измеряя потоки продуктов реакции взаимодействия частиц ТМ (косвенные методы) [3].

В настоящей работе нас будет интересовать метод поиска сигнала от частиц ТМ, в котором измеряются возможные потоки нейтрино, возникающие при аннигиляции частиц темной материи [4]. При этом частицы ТМ перед аннигиляцией захватываются гравитационным потенциалом Солнца или Земли и накапливаются в них, что приводит к увеличению числа актов аннигиляции. Эти процессы описываются эволюционным уравнением [5].

$$\frac{dN}{dt} = C - EN - AN^2 \quad (1)$$

$C$  – скорость захвата,  $EN$  – испарения,  $AN^2$  – аннигиляции.

В стандартном подходе к этому сценарию учитывается возможное упругое рассеяние частиц ТМ на частицах видимого вещества, в частности, на ядрах. В данной работе изучается влияние неупругого рассеяния частиц ТМ на величину скорости захвата. При разных типах взаимодействия мы найдем и сравним скорость захвата частиц ТМ Солнцем и Землей за счет упругого и неупругого взаимодействия.

## 1. Расчет сечения захвата

Сечение захвата в данной задаче – это характеристика, показывающая вероятность столкновения частицы темной материи с ядром и ее захватом небесным телом.

Для нахождения сечения захвата необходимо для выбранного типа взаимодействия определить матричный элемент рассеяния и проинтегрировать его по той части фазового объема, при котором частица темной материи переходит на стационарную орбиту. При таком определении сечения захвата эта величина зависит в том числе от точки, в которой произошло взаимодействие внутри Солнца или Земли.

### 1.1. Определение матричного элемента

В этой работе мы рассмотрим Дираковскую частицу ТМ со спином  $\frac{1}{2}$  в качестве кандидата на роль темной материи. Лагранжиан теории тогда содержит фермионы: частицу ТМ и нуклон, взаимодействующие при помощи четырёхточечной вершины, и электромагнитное поле (ЭМП).

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(\gamma^\mu(i\partial_\mu - e_n A_\mu) - m_N)\psi + \\ + \bar{\chi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_k)\chi - \bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi \quad (1.1.1)$$

где  $\psi, m_N, \chi, m_k$  – 4-х компонентные спиноры и массы мишени и частицы темной материи соответственно,  $A_\mu, F^{\mu\nu}$  – вектор потенциал и тензор напряженности ЭМП,  $e_n$  – заряд нуклона.

$\Delta_1^a$  и  $\Delta_{2a}$  – матрицы которые должны быть самосопряженными по Дираку, чтобы лагранжиан был вещественным.

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \Rightarrow (\bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi)^* = \bar{\psi}\overline{\Delta_1^a}\psi\overline{\chi}\Delta_{2a}\chi = \bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi \Rightarrow \Delta_i^a = \overline{\Delta_i^a}$$

где  $\bar{\Delta} = \gamma^0\Delta^\dagger\gamma^0$  – Дираковское сопряжение матрицы.

Возможные матрицы соответствуют взаимодействию через массивный и очень тяжелый скалярный или векторный бозон.

$$\Delta_i^a = \begin{cases} (a_i + i\gamma^5 b_i), & \text{скалярного взаимодействия} \\ \gamma^\mu(a_i - \gamma^5 b_i), & \text{векторное взаимодействие} \end{cases}$$

Сразу заметим, что если рассеивается не частица, а античастица темной материи (со входным и выходным импульсом частицы ТМ  $k$  и  $k'$ ), то вычисления определялись бы лагранжианом преобразованным оператором  $\hat{C}_k$  зарядового сопряжения ТМ.

$$\mathcal{L}^{C_k} = \hat{C}_k \mathcal{L} \hat{C}_k$$

Исходя из правил преобразования вершин [6]

$$\begin{aligned} \hat{C}_k \bar{\chi} \chi \hat{C}_k &= \bar{\chi} \chi, & \hat{C}_k \bar{\chi} \gamma^5 \chi \hat{C}_k &= \bar{\chi} \gamma^5 \chi, \\ \hat{C}_k \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \hat{C}_k &= -\bar{\chi} \gamma^\mu \chi, & \hat{C}_k \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma^5 \chi \hat{C}_k &= \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma^5 \chi \end{aligned}$$

можно получить, что  $\Delta_{2a}$  не изменится в скалярном взаимодействии, и изменится с  $\gamma^\mu(a_2 - \gamma^5 b_2)$  на  $-\gamma^\mu(a_2 + \gamma^5 b_2)$  в векторном случае. Что соответствует замене  $a_2 \rightarrow -a_2$ . Поэтому квадрат матричного элемента для скалярного взаимодействия для частицы и античастицы одинаков. для векторного случая, если рассматривать вклады либо с  $a_2$  либо с  $b_2$ , – аналогично.

Сначала рассмотрим случай рассеяния на одном нуклоном и скалярным взаимодействием. Матричный элемент упругого рассеяния тогда равен

$$i\mathcal{M}_0 = \bar{\psi}(p') \Delta_1^a \psi(p) \bar{\chi}(k') \Delta_{2a} \chi(k)$$

где  $p$  и  $p'$  – начальный и конечный импульс нуклона.

Квадрат матричного элемента находится после усреднения по спинам.

$$|\mathcal{M}_0|^2 = \frac{1}{4} \text{tr}[(\hat{k}' + m_k) \Delta_{2a} (k + m_k) \Delta_{2b}] \text{tr}[(\hat{p}' + m_N) \Delta_{1a} (p + m_N) \Delta_{1b}]$$

Для скалярного матричного элемента это дает

$$|\mathcal{M}_0|^2 = 4 \left( (a_2^2 + b_2^2) k' k + (a_2^2 - b_2^2) m_k^2 \right) \left( (a_1^2 + b_1^2) p' p + (a_1^2 - b_1^2) m_N^2 \right) \quad (1.1.2)$$

В нерелятивистском случае существует несколько вариантов:

$$1) \ a_1^2 \neq 0 \text{ и } a_2^2 \neq 0$$

$$|\mathcal{M}_0^{scal}|^2 = 16(a_1^2 a_2^2) m_N^2 m_k^2 \quad (1.1.3)$$

$$2) \ a_1^2 = 0, a_2^2 \neq 0$$

$$|\mathcal{M}_0^{scal}|^2 = 8b_1^2 a_2^2 m_N^2 (-(k' - k)^2) \quad (1.1.3')$$

$$3) a_1^2 = 0, a_2^2 = 0$$

$$|\mathcal{M}_0^{scal}|^2 = 4b_1^2 b_2^2 (p' - p)^2 (k' - k)^2 \quad (1.1.3'')$$

В этих случаях дифференциальное сечение в системе центра масс принимает следующий вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_{0N}}{4\pi} \quad (1.1.4)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_{0N}}{4\pi} \cdot \frac{(\vec{k}' - \vec{k})^2}{2\vec{k}_0^2} \quad (1.1.4')$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_{0N}}{4\pi} \cdot \frac{3(\vec{k}' - \vec{k})^4}{16\vec{k}_0^4} \quad (1.1.4'')$$

где  $\sigma_{0N}$  – полное сечение упругого взаимодействия с нуклоном, посчитанное при конкретном начальном импульсе  $k_0 = m_k u_0$  ( $u_0$  – характерная скорость в задаче, которая будет определена в разделе 2). Поскольку это неизвестная величина, то ответ будем выражать через него, выделив в сечении зависимость от переданного импульса.

Далее мы рассмотрим неупругое рассеяние, происходящее с испусканием нуклоном фотона (рисунок 1.1.1)

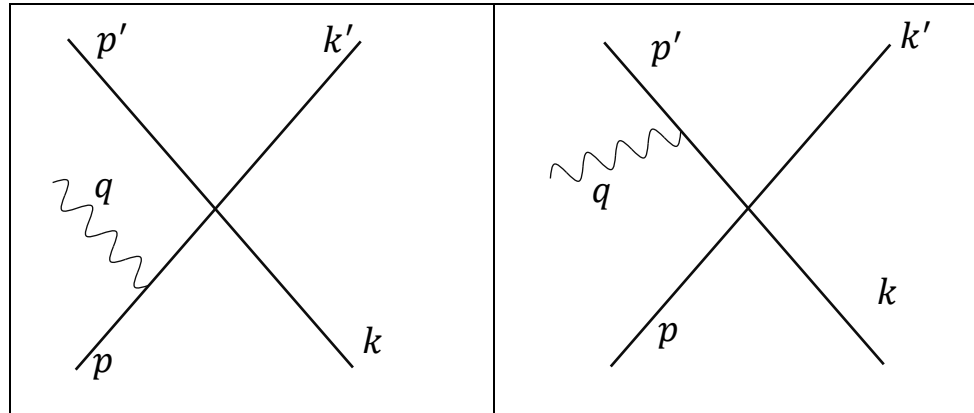


Рисунок 1.1.1

Квадрат матричного элемента, просуммированный по спинам конечных частиц и усредненный по спинам начальных, в таком случае следующий

$$|\mathcal{M}|^2 = 4e^2 \left( (a_2^2 + b_2^2)k'k + (a_2^2 - b_2^2)m_k^2 \right) \times \\ \times \left[ - \left( \frac{p'^\mu}{p'q} - \frac{p^\mu}{pq} \right)^2 \{ (a_1^2 + b_1^2)p'p + (a_1^2 - b_1^2)m_N^2 \} - \right. \\ \left. - \left( \frac{p'^\mu}{p'q} - \frac{p^\mu}{pq} \right)^2 (a_1^2 + b_1^2)(pq - p'q) + \right. \\ \left. + (a_1^2 + b_1^2) \left( \frac{1}{p'q} - \frac{1}{pq} \right)^2 \cdot pq \cdot p'q \right]$$

Видно, что он состоит из трех частей, имеющих разную степень импульса фотона в знаменателе. Друг к другу они соотносятся по порядку величины как

$$\frac{\delta p^2}{q^2} : \frac{\delta p}{q} : 1$$

Как видно из формулы (1.2.1), каждое следующее слагаемое меньше следующего на величину порядка

$$v \cdot \frac{m_N + m_k}{m_N}$$

где  $v$  – скорость ТМ, поэтому в нерелятивистском случае в неупругом рассеянии будет преобладать исключительно мягкий вклад.

Далее необходимо получить сечение для ядра, исходя из сечения для нуклона. В таком случае нужно производить не усреднение по спинам ядра, а разложение спинора в нерелятивистском случае. Для спинора разлагаем известное решение в ряд Тейлора по импульсу.

$$\psi(p) = \sqrt{m} \cdot \left( 1 + \gamma^5 \hat{\vec{S}} \frac{\vec{p}}{m} \right) \xi \quad (1.1.5)$$

где  $\xi$  – классический спинор, а  $\hat{\vec{S}}$  – оператор спина. Тогда скалярное произведение спиноров будет следующим

$$\bar{\psi}(p')\psi(p) = m\xi'^T \left( 1 + \gamma^5 \hat{\vec{S}} \frac{\vec{p}'}{m} \right) \gamma^0 \left( 1 + \gamma^5 \hat{\vec{S}} \frac{\vec{p}}{m} \right) \xi = 2m \quad (1.1.6)$$

$$\bar{\psi}(p')\gamma^5\psi(p) = m\xi'^T\hat{S}(\vec{p} - \vec{p}')\xi \quad (1.1.7)$$

Таким образом, можно считать, что нуклон и частица ТМ взаимодействуют с помощью потенциала  $V(\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k})$  или  $V(\vec{x})$  [7]. Для разных взаимодействий он будет иметь вид:

Вид взаимодействия	Потенциал
$G_{00}\bar{\psi}(p')\psi(p)\bar{\chi}(k')\chi(k)$	$G_{00}$
$iG_{01}\bar{\psi}(p')\psi(p)\bar{\chi}(k')\gamma^5\chi(k)$	$G_{01}\hat{S}_k\frac{-i\vec{q}}{m_k}$
$iG_{01}\bar{\psi}(p')\gamma^5\psi(p)\bar{\chi}(k')\chi(k)$	$G_{01}\hat{S}_p\frac{i\vec{q}}{m_N}$
$G_{11}\bar{\psi}(p')\gamma^5\psi(p)\bar{\chi}(k')\gamma^5\chi(k)$	$-G_{11}\hat{S}_p\frac{\vec{q}}{m_N}\hat{S}_k\frac{\vec{q}}{m_k}$

Таблица 1.1.1

Потенциал взаимодействия с ядром – это сумма потенциалов взаимодействия с нуклонами.

$$V(\vec{x} - \vec{x}_{\text{яд}}) = \sum V_N(\vec{x} - \vec{x}_N)$$

$$V(\vec{q}) = \sum V_N(\vec{q}) e^{-i\vec{q}(\vec{x}_N - \vec{x}_{\text{яд}})}$$

Если переданные импульсы достаточно малы, то можно пренебречь экспоненциальным множителем. Тогда в потенциалах из таблицы 1 можно заменить массу нуклона на массу ядра (если предположить, что нейтроны и протоны взаимодействуют одинаково с ТМ) либо спин нуклона на спин ядра. Дифференциальное сечение тогда будет иметь тот же вид, что (1.1.4), только вместо  $\sigma_{0N}$  будет стоять  $\sigma_{0\text{яд}}$ .

Проблема зависящего от спина ядра потенциала заключается в том, что спин наиболее распространенных земных и солнечных элементов (кроме



водорода) равен нулю. Поэтому полный захват будем изучать на спин независимом потенциале.

Выразим полное сечение рассеяния с ядром через сечение рассеяния на нуклоне.

$$\sigma_{0\text{яд}} = \frac{|\mathcal{M}_{\text{яд}}|^2}{(m_{\text{яд}} + m_k)^2} \cdot \left( \frac{|\mathcal{M}_N|^2}{(m_N + m_k)^2} \right)^{-1} \sigma_{0N}$$

Используя (1.1.3 – 1.1.3'') и, предположив вышесказанное про потенциал (потенциал или матричный элемент на ядре равен сумме потенциалов на нуклонах), получаем

$$\sigma_{0\text{яд}} = \sigma_{0N} \cdot \frac{N^2(1 + \mu_k)^2}{(N + \mu_k)^2} \quad (1.1.8)$$

где  $N$  – число нуклонов в ядре,  $\mu_k$  – отношение массы частицы ТМ к массе нуклона (Мы исходим из предположения, что для нейтронов и протонов взаимодействие одинаково).

## 1.2. Кинематика и дифференциальное сечение

Сечение находится из матричного элемента по формуле [8]

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4 \sqrt{(pk)^2 - m_p^2 m_k^2}} d\Phi$$

$$d\Phi = (2\pi) \delta(E_f - E_i) \times \frac{1}{2E_{p'}} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2q} \times \frac{d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}$$

где  $\vec{k}', E_{k'}$  – импульс и энергия вылетающей частицы,  $\vec{q}, q$  – импульс и энергия фотона,  $E_{p'}$  – приобретаемая энергия мишени. Интеграл будем брать в системе центра масс (рисунок 1.2.1), где кинематика относительно простая.

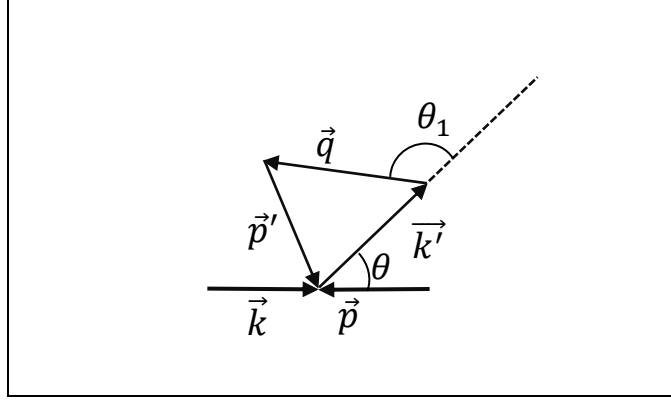


Рисунок 1.2.1

В сферических координатах фазовый объем и телесные углы равны

$$d\Phi = \int \frac{k'^2 q}{4E_{k'}} \times (2\pi) \delta(E_f - E_i) \times \frac{1}{2E_{p'}} \times \frac{d\Omega_q}{(2\pi)^3} \times \frac{d\Omega_{k'}}{(2\pi)^3} dk' dq$$

$$d\Omega_{k'} = 2\pi d \cos \theta$$

$$d\Omega_q = d \cos \theta_1 d\varphi_1$$

При этом телесный угол  $d\Omega_q$  отсчитывается не от оси  $z \parallel \vec{k}$ , а от  $\vec{k}'$ , а телесный угол  $d\Omega_{k'} = 2\pi d \cos \theta$ , если матричный элемент инвариантен относительно вращений вокруг оси  $z$ .

Введя систему координат, связанную с вектором  $\vec{k}'$ , находим выражение для импульса фотона и ядра из закона сохранения импульса.

$$\vec{k}' = k'(\sin \theta, 0, \cos \theta)^T = k' \vec{e}'_3$$

$$\vec{e}'_1 = (\cos \theta, 0, -\sin \theta)^T$$

$$\vec{e}'_2 = \vec{e}_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$\vec{q} = q \vec{n}_q = q(\cos \theta_1 \vec{e}'_3 + \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \vec{e}'_2 + \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \vec{e}'_1)$$

$$\vec{p}' = -\vec{q} - \vec{k}'$$

Далее дельта функция снимается с помощью интегрирования по энергии фотона

$$\frac{\delta(E_f - E_i)}{2E_{p'}} dq = dq \frac{\delta(q + \sqrt{m_p^2 + p'^2} - E_{\text{цм}} + E_{k'})}{2E_{p'}} = \frac{1}{2(E_{p'} + q + k' \cos \theta_1)}$$

А из закона сохранения энергии и импульса находится импульс фотона.

$$q + \sqrt{m_p^2 + p'^2} + \sqrt{m_k^2 + k'^2} = E_{\text{цм}}$$

$$p'^2 = k'^2 + q^2 + 2qk' \cos \theta_1$$

$$q(\cos \theta_1) = \frac{E_{\text{цм}}(E_k - E_{k'})}{(E_k - E_{k'}) + E_p + k' \cos \theta_1} \quad (1.2.1)$$

Итого, дифференциальное сечение в системе центра масс выражается следующим образом

$$\frac{d\sigma}{d^3\vec{k}'} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4kE_{\text{цм}}} \cdot \frac{E_{\text{цм}}(E_k - E_{k'})}{8E_{k'} \left( (E_k - E_{k'}) + E_p + k' \cos \theta_1 \right)^2 \cdot (2\pi)^5} d\Omega_q \quad (1.2.2)$$

Видно, что при неупругом соударении в системе центра масс выходящий импульс  $k'$  пробегает весь шар радиуса  $k$ , а не только его границу. Внутри интеграла по телесному углу фотона стоит полностью аналитическая функция углов, поэтому его можно проводить численно с помощью схемы сколь угодно высокого порядка, например, методом гаусса.

### 1.3. Сечение при малых импульсах фотона

При испускании мягкого фотона с бесконечно малой энергией учитывается только инфракрасно расходящийся вклад матричного элемента равный

$$-Z^2 e^2 \left( \frac{v'^\mu}{v'q} - \frac{v^\mu}{vq} \right)^2 |\mathcal{M}_0|^2(p'(q), k'(q), p, k)$$

где  $|\mathcal{M}_0|^2$  – матричный элемент упругого рассеяния.

Если ввести малую массу фотона  $\mu$  [6], сделать замену и ввести обозначения

$$q = \mu \operatorname{sh} \phi = x, \quad \sqrt{q^2 + \mu^2} = \mu \operatorname{ch} \phi = y, \quad \frac{q}{\sqrt{q^2 + \mu^2}} = \operatorname{th} \phi = t \quad (1.3.1)$$

$$\vec{q} = q \cdot \vec{n}_q \quad (1.3.1')$$

то сечение процесса с испусканием фотона будет иметь следующий вид

$$d\sigma_\gamma = \int_0^\epsilon \frac{dx}{y} \cdot f(y, t) \quad (1.3.2)$$

Но так как матричный элемент и фазовый объем – непрерывно дифференцируемые функции по импульсам  $p'$  и  $k'$ , которые при малых импульсах фотона являются гладкими по  $y$  и  $t$ , потому что задаются в неявном виде с помощью функции, производные которой не ноль и не бесконечность

$$F(k', y, t) = y + \sqrt{m_p^2 + p'^2(k', yt, \cos \theta_1)} + \sqrt{m_k^2 + k'^2} - E_{\text{ци}} = 0$$

$$F'_{k'} = \frac{k'}{E_{k'}} + \frac{k' + q \cdot \cos \theta_1}{E_{p'}} \geq \frac{k}{2} \left( \frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_k} \right) = c_0$$

$$F'_y = 1 + \frac{t^2 y + t k' \cos \theta_1}{E_{p'}} < 1 + \frac{2k}{E_p} = c_1$$

из чего следует, что  $\partial k' / \partial y = F'_y / F'_{k'} < \infty$ , то есть  $k'$  - гладкая функция  $(y, t)$  при  $(y, t) \in [0, \epsilon] \times [0, 1]$ , значит функция из (1.3.2) – гладкая и имеет константу Липшица  $C_f$  по переменной  $y$ . Следовательно, интеграл (1.3.2) можно представить в виде суммы его упрощенного варианта, где  $y = 0$ , и добавки  $D_2$ , стремящейся к нулю с первым по  $\epsilon$  (максимальный импульс фотона, до которого делается аналитическое интегрирование как в [9]) порядку.

$$(2) = \int_0^\epsilon \frac{dx}{y} \cdot f(0, t) + D_2 \quad (1.3.2')$$

$$|D_2| = \left| \int_0^\epsilon \frac{dx}{y} \cdot (f(y, t) - f(0, t)) \right| \leq \int_0^\epsilon \frac{dx}{y} \cdot y C_f = \epsilon C_f$$

Далее, в интеграле (1.3.2') проводим замену переменных (1.3.1)

$$\int_0^{\ln(\frac{2\epsilon}{\mu})} d\phi \cdot f(0, \text{th } \phi)$$

и выделяем расходящуюся часть, приравняв  $\text{th } \phi$  к единице и проделав похожие рассуждения с константой Липшица по аргументу  $t$ . Поэтому расходящаяся часть сечения имеет вид

$$d\sigma_Y^{\text{расх}} = f(0,1) \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \quad (1.3.3)$$

В итоге (1.3.3) переходит при подстановки фазового объема и матричного элемента в следующее выражение

$$d\sigma_Y^{\text{расх}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \int -\frac{d\Omega_q}{4\pi} \left( \frac{v'^\mu}{v'_0 - \vec{v}' \vec{n}_q} - \frac{v^\mu}{v_0 - \vec{v} \vec{n}_q} \right)^2$$

Этот интеграл берется с помощью техники усреднения по телесному углу и параметров Фейнмана.

$$\int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \frac{v' v}{(v'_0 - \vec{v}' \vec{n}_q)(v_0 - \vec{v} \vec{n}_q)} = \int_0^1 dx \frac{d\Omega_q}{4\pi} \frac{v' v}{(xv'_0 + (1-x)v_0 - (\vec{v}' x + \vec{v}(1-x)) \vec{n}_q)^2} \quad (1.3.4)$$

Зная, как проводится усреднение по телесному углу,

$$\int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \frac{1}{(A - \vec{n}_q \vec{B})^2} = \frac{1}{A^2 - \vec{B}^2}$$

получаем значение интеграла (1.3.4).

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{v' v}{(xv'_0 + (1-x)v_0)^2 - (\vec{v}' x + \vec{v}(1-x))^2} = \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{v' v}{\sqrt{(v' v)^2 - 1}} \ln \left( \frac{v' v + \sqrt{(v' v)^2 - 1}}{v' v - \sqrt{(v' v)^2 - 1}} \right) \end{aligned}$$

Мягкая часть сечения равна известному результату [10]

$$d\sigma_{\gamma}^{\text{расх}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \cdot W(x) \quad (1.3.5)$$

Где  $W(x)$  и  $x$  равны следующим выражениям

$$W(x) = \left( \frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)}{(1-x)} - 2 \right)$$

$$x = \frac{\sqrt{(v'v)^2 - 1}}{(v'v)}$$

В нерелятивистском приближении они равны соответственно

$$W(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{5}x^4 + \dots$$

$$x = \sqrt{(\vec{v}' - \vec{v})^2}$$

Известно [6], что петлевой вклад в упругом сечении сокращает расходимость, тогда регуляризованные массой фотона упругое и неупругое сечения имеют соответственно вид

$$d\sigma_{\gamma}^{\text{упругое}} = d\sigma_0 \cdot \left( 1 + \frac{Z^2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\mu}{m}\right) \cdot W(x) \right) \quad (1.3.6)$$

$$d\sigma_{\gamma}^{\text{неупругое}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \cdot W(x) \quad (1.3.6')$$

Хотя сумма сечений не расходится, однако нельзя строго разделить упругое сечение и неупругое – результат будет зависеть от  $\mu$ . Это отражает тот факт, что экспериментально невозможно отличить чисто упругое рассеяние и неупругое с бесконечно маленьким импульсом фотона. Эта проблема приведет к неопределенности понятия неупругого вклада, однако можно сразу отметить как мы поступим: обнулим сечение, если происходит инфракрасная расходимость. В дальнейшем мы вернемся к этому вопросу.

Далее, продифференцировав (1.3.5) по  $\epsilon$ , получаем в нерелятивистском случае выражение для неупругого сечения, которое совпадает с [11].

$$d\sigma_{\gamma}^{\text{неупругое}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \cdot \frac{dq}{q} \cdot \frac{2}{3} (\vec{v}' - \vec{v})^2 \quad (1.3.7)$$

Также, используя результаты выше, можно в нерелятивистском случае выразить интеграл по телесному углу в формуле (1.2.1).

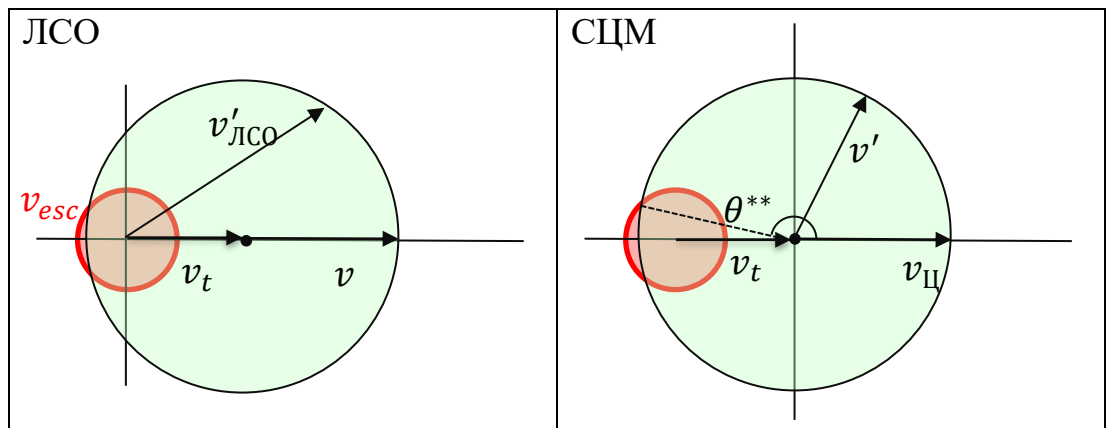
$$\frac{d\sigma}{d^3\vec{k}'} = \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{64E_{\text{ци}}^2 \cdot \pi^3} \cdot \frac{Z^2 \alpha W(x)}{kE_{k'}(E_k - E_{k'})} \quad (1.3.8)$$

#### 1.4. Кинематика захвата и сечение

Захваченной частица считается в том случае, если ее энергия станет менее, чем гравитационный барьер небесного тела в точке, где произошло рассеяние. Это условие эквивалентно тому, что скорость частицы в лабораторной системе отсчета станет меньше скорости вылета ( $v' \leq v_{\text{esc}}$ ), которая выражается через гравитационный потенциал  $\phi(r)$ .

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2\phi(r)} \quad (1.4.1)$$

Изобразим условие захвата на рисунке 1.4.1 (в лабораторной СО и в системе центра масс). Зеленым цветом закрашена область возможного выходного импульса, а красным – область, при в которой происходит захват. Для нахождения сечения захвата необходимо проинтегрировать дифференциальное сечение по пересечению красной и зеленой области.



### Рисунок 1.4.1

В системе центра масс скорость частицы ТМ равна  $v_{\text{ц}}$

$$v_{\text{ц}} = \frac{m_p}{m_p + m_k} v \quad (1.4.2)$$

Расстояние от центра красной сферы захвата до центра масс равно  $v_t$  (скорость движения центра масс в лабораторной системе)

$$v_t = v - v_{\text{ц}} = \frac{m_k}{m_p + m_k} v \quad (1.4.3)$$

В системе центра масс условие захвата выглядит следующим образом

$$(\vec{v}'_{\text{ц}} + \vec{v}_t)^2 < v_{\text{esc}}^2 \Leftrightarrow v_{\text{ц}}'^2 + v_{\text{ц}}' v_t \cos \theta' + v_t^2 < v_{\text{esc}}^2 \quad (1.4.4)$$

Существует несколько вариантов расположения двух сфер:

- 1) При  $v_t + v_{\text{esc}} \leq v_{\text{ц}}$  – красная сфера внутри зеленой. Происходит неупругий процесс.
- 2) При  $v_t + v_{\text{esc}} \geq v_{\text{ц}}$ ,  $v_{\text{ц}} + v_{\text{esc}} \geq v_t$  – упругое столкновение. Неупругий вклад не учитывается.
- 3) При  $v_t \geq v_{\text{esc}} + v_{\text{ц}}$  – частица ТМ не замечает ядро и не захватывается.

Как мы выяснили в предыдущем разделе, для упругого сечения захвата нужно проинтегрировать дифференциальное по переменной  $\cos \theta'$  от  $-1$  до  $\cos \theta^{**}$ , который находится из (1.4.4).

$$\cos \theta^{**} = \frac{v_{\text{esc}}^2 - v_t^2 - v_{\text{ц}}^2}{v_{\text{ц}} v_t} \quad (1.4.5)$$

Для неупругого случая можно интегрировать дифференциальное сечение в сферической системе координат, связанной с красным шаром.

$$\sigma_c = \int_0^{m_k v_{\text{esc}}} 2\pi k_e'^2 dk_e' d \cos \theta_e \cdot \frac{d\sigma}{d^3 \vec{k}'} \quad (1.4.6)$$



Импульс  $k'$  и  $\cos \theta$  выражаются через выходной импульс  $k'_e$  и косинус  $\cos \theta_e$  в лабораторной системе отсчёта (т.е. в координатах красной сферы):

$$k'^2 = k_e'^2 + k_t^2 - 2k'_e k_t \cdot \cos \theta_e$$

$$\cos \theta' = \frac{k'_e \cos \theta_e - k_t}{k'}$$

### 1.5. Влияние температуры

При ненулевой температуре красная сфера смещается и может попасть на границу зеленой, тогда происходит упругий захват. Из-за температуры происходит и испарение.

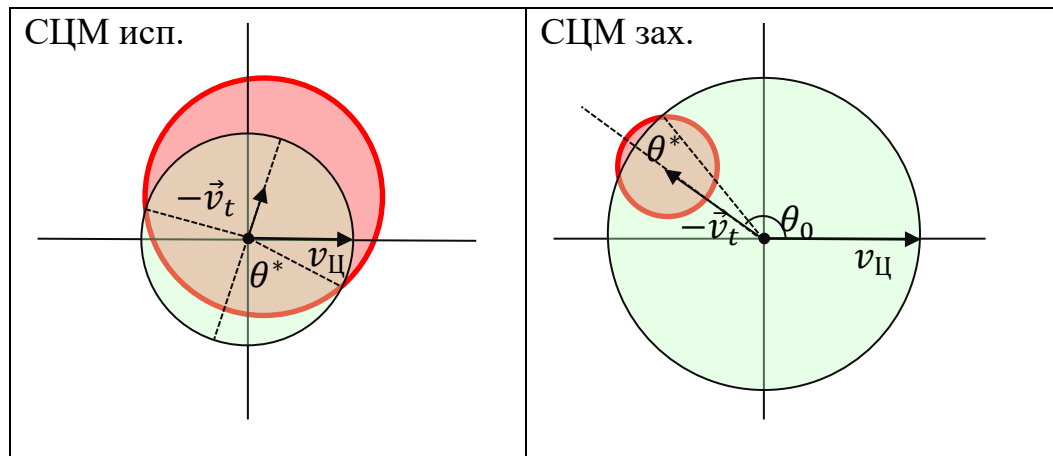


Рисунок 1.5.1

Если  $\vec{w}$  – скорость ядра, а  $\vec{v}$  – скорость частицы ТМ в ЛСО, то скорость переноса (1.4.3) и скорость в системе центра масс изменятся, а между ними появляется угол  $\theta_0$ .

$$\vec{v}_t = \frac{m_p \vec{w} + m_k \vec{v}}{m_p + m_k} \quad (1.5.1)$$

$$\vec{v}_ц = \vec{v} - \vec{v}_t = \frac{m_p}{m_p + m_k} (\vec{v} - \vec{w}) \quad (1.5.2)$$

$$\cos \theta_0 = -\frac{\vec{v}_t \vec{v}_\Pi}{v_\Pi v_t}$$

Упругое столкновение происходит, как мы выяснили выше, при  $v_{esc} > |v_\Pi - v_t|$ . Если раскрыть модуль и найти предельные при постоянных модулях скоростей случаи, достигающиеся при коллинеарных векторах  $\vec{w}$  и  $\vec{v}$ , то мы получим ограничения модуля скорости ядра, при котором происходит температурное взаимодействие.

$$w > \frac{m_p + m_k}{2 \cdot m_p} \cdot \left( \left| \frac{m_p - m_k}{m_p + m_k} \right| v - v_{esc} \right) \quad (1.5.3)$$

$$w > \frac{m_p + m_k}{2 \cdot m_p} \cdot (v_{esc} - v) \quad (1.5.4)$$

С помощью отрицания (1.5.3) можно получить условие, при котором не происходит упругого захвата.

$$\frac{v_{esc}}{v_{ЛСО}} \lesssim \left| \frac{m_k - m_p}{m_p + m_k} \right| - 2 \frac{m_p}{m_p + m_k} \frac{w}{v_{ЛСО}} \quad (1.5.5)$$

Для Солнца при характерной скорости ТМ  $u_0$ , которая будет определено в (2.1.6),  $v_{ЛСО}$  близко к  $v_{esc}$ , поэтому, разлагая его в ряд Тейлора по  $u_0$ , получится условие неупругости захвата

$$\left( \frac{u_0}{v_{esc}} \right)^2 \geq 4 \left( \frac{m_k}{m_p + m_k} + \frac{m_p}{m_p + m_k} \frac{w}{v_{esc}} \right)$$

$$0.1 \gtrsim \frac{m_k}{m_p + m_k} + \frac{m_p}{m_p + m_k} \frac{w}{v_{esc}}$$

Это условие не может быть выполнено в интересующих нас массах и при Солнечных температурных скоростях. Поэтому на Солнце неупругий процесс не вносит значительного никакого вклада в захват.

Для Земли (1.5.3') выполняется, когда массы ядра и частицы ТМ различаются.

Сечение для процесса с температурой будем брать методом Монте-Карло, поскольку пределы интегрирования сложны, а подынтегральные выражения не гладкие функции.

Частично сечение можно посчитать и аналитически. Для этого в системе центра масс нужно перейти в сферические координаты относительно вектора  $-\vec{v}_t$ , выразить угол вылета  $\theta'$  (угол между вектором конечной скорости и начальной) через  $\theta''$  (угол между вектором конечной скорости и скорости переноса  $-\vec{v}_t$ ).

$$\cos \theta' = \cos \theta'' \cos \theta_0 - \sin \theta'' \sin \theta_0 \cos \varphi$$

Тогда в формуле для сечения интегрируем по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , а  $\cos \theta'$  от 1 до  $\cos \theta^*$  в случае захвата и от  $-1$  до  $\cos \theta^*$  в случае испарения.

$$\cos \theta^* = \frac{v_t^2 + v_{\text{ц}}^2 - v_{\text{esc}}^2}{2v_t v_{\text{ц}}}$$

Если сечение взаимодействия имеет следующий вид

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta'} = A(v_{\text{ц}}) \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot \left( \frac{1 - \cos \theta'}{2} \right)^n$$

то сечение захвата или испарения мы представим в следующем виде:

$$\sigma_c = A(v) \cdot \tilde{\sigma}_c$$

где  $\tilde{\sigma}_c$  – безразмерный множитель, приведенный в таблице ниже и выраженный через переменные  $x$  и  $y$ , равные

$$x = \frac{1 - \cos \theta^*}{2}, \quad y = \frac{1 + \cos \theta^*}{2}$$

$n$	захват	испарение
0	$x$	$y$
1	$x \cdot (1 - y \cos \theta_0)$	$y(1 + x \cos \theta_0)$

2	$x \cdot \left( 1 - y \left( \frac{3}{2} \cos \theta_0 + \frac{3}{4} \cos^2 \theta_0 - \frac{1}{4} + y \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta_0 - \frac{1}{2} \right) \right) \right)$	$y \cdot \left( 1 + x \left( \frac{3}{2} \cos \theta_0 - \frac{3}{4} \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{4} + x \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta_0 - \frac{1}{2} \right) \right) \right)$
---	--	--

Таблица 1.5.1

Для того, чтобы получить эффективное сечение захвата, как в неупругом случае (т.е. вероятность процесса на единицу времени равна  $\sigma_c n v$ ), нужно проинтегрировать по температурному распределению ядер сечение, полученное выше.

$$\sigma_c^{\text{эфф}} = \int \frac{d^3 \vec{w}}{(2\pi w_T^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{\vec{w}^2}{2w_T^2}} \cdot \sigma_c(v, v_{esc}, \vec{w}) \cdot \frac{|\vec{v} - \vec{w}|}{v} \quad (1.5.6)$$

Этот интеграл мы будем брать методом Монте-Карло [8]. Направление вектора  $\vec{w}$  находится с помощью сферического распределения, когда косинус угла  $\theta_{\vec{w}}$  распределен равномерно от  $-1$  до  $1$ . Модуль вектора  $\vec{w}$  мы разыграем со следующим генератором:

$$\frac{w}{w_T} = \sqrt{-2 \ln \left( e^{-\frac{w_m^2}{2w_T^2}} \cdot \text{rand}(0..1) \right)}$$

где  $w_m$  – минимальная скорость из (1.5.3) или (1.5.4), а  $\text{rand}(0..1)$  – случайное число от нуля до единицы.

Поскольку плотность распределения в таком распределении следующая

$$dw \frac{w}{w_T^2} e^{-\frac{w^2}{2w_T^2}}$$

то для взятия интеграла (1.5.5) методом Монте-Карло нужно еще домножить подынтегральную функцию на множитель, приведенный ниже, и найти среднее значение итоговой функции в случайных точках.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{w_T} e^{-\frac{w_m^2}{2w_T^2}}$$

## 2. Расчет скорости захвата

Если  $\sigma_c^i = \sigma_c^i(v, v_{esc})$  – сечение захвата на частице определенного сорта, то вероятность захвата на такой частице за единицу времени выражается через концентрацию элемента сорта  $i$ .

$$\frac{dP}{dt} = \sigma_c^i(v, v_{esc}) \cdot n_i \cdot v \quad (2.1)$$

где  $n_i$  – концентрация элемента сорта  $i$ .

Для нахождения скорости захвата нужно проинтегрировать (2.1) по фазовой плотности  $\rho(\vec{x}, \vec{v})$  (распределение частиц по скоростям и координатам).

$$C = \int \rho(\vec{x}, \vec{v}) d^3\vec{x} d^3\vec{v} \cdot \sigma_c^i n_i v \quad (2.2)$$

Если по индексу  $i$  ведется суммирование, то выражение (2.2) дает полную скорость захвата, иначе – скорость захвата на конкретном элементе.

### 2.1. Определение фазовой плотности частиц ТМ

Фазовая плотность удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана, которое следует из закона сохранения частиц (что верно при малом взаимодействии частиц ТМ) и теоремы Лиувилля. Предположим, что  $\rho$  имеет стационарное распределение, в итоге уравнение будет следующим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \phi \quad (2.1.2)$$

здесь  $\phi$  – это гравитационный потенциал с обратным знаком (т.е. его модуль).

Мы не будем учитывать неоднородности сферического тела по угловым координатам, поэтому уравнения движения и фазовая плотность зависит только от трех переменных: скорость  $v$ , радиус  $r$  и угол  $\theta_v$  (рисунок 3).

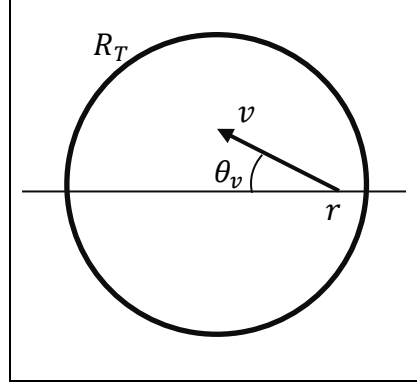


Рисунок 2.1.1

Известно, что решением линейного уравнения первого порядка с тремя переменными – функция, зависящая от двух первых интегралов движения (2.1.2) частицы в центральном поле. Это уравнение имеет два известных интеграла – энергия и момент импульса (мы будем брать их на единицу массы).

$$u^2 = v^2 - 2\phi, \quad L = rv \sin \theta_v \quad (2.1.3)$$

$$\rho = \rho(u^2, L) \quad (2.1.4)$$

В этих переменных фазовый объем будет следующим

$$d\Phi = d^3\vec{x}d^3\vec{v} = dV \cdot \frac{\pi}{\sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}}} du^2 \frac{dL^2}{r^2} \quad (2.1.5)$$

Для решения (2.1.4) осталось определить граничные условия вдали от тела, где фазовая плотность ТМ состоит из постоянной плотности  $\rho_V$  и плотности распределения по скоростям  $f(\vec{u})$ .

$$\rho(r = \infty, \vec{u}) = \rho_V \cdot f(\vec{u})$$

Если  $f(\vec{u})$  – однородно распределена, то ответ найден

$$\rho(r, v, L) = \rho_V \cdot f\left(\sqrt{v^2 - 2\phi}\right) = \rho_V \cdot f(u)$$

Иной случай возникает, когда тело движется относительно гало ТМ со скоростью  $\vec{u}_0$  (скорость вращения Солнечной системы вокруг центра галактики).

$$u_0 = 230 \frac{\text{км}}{\text{с}} = 0.7667 \cdot 10^{-3} \quad (2.1.6)$$

А вот внутри гало ТМ распределена однородно и выражается через скорость  $\vec{\xi} = \vec{u} - \vec{u}_0$

$$f(\vec{u})d^3\vec{u} = f(\xi^2)d^3\vec{\xi}$$

Для того, чтобы найти  $f(u, L)$ , необходимо усреднить по углу  $\theta_0$  (рисунок 4), определяющего положение частицы (рисунок) и углу  $\varphi$ , указывающего на направление скорости частицы в полярных координатах репера  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Тогда можно найти координаты вектора  $\vec{\xi}$  и его модуль.

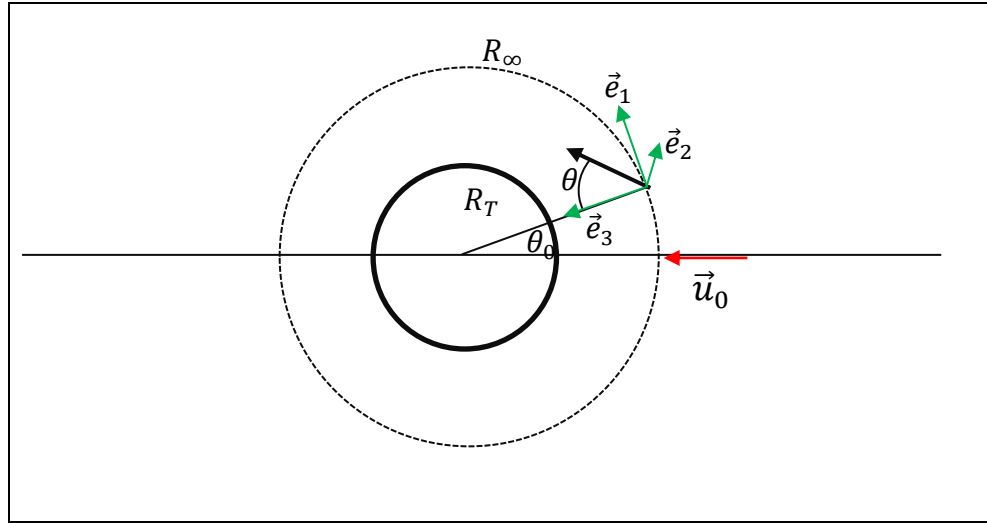


Рисунок 2.1.2

$$\xi^2 = u_\theta^2 + u_r^2 + u_0^2 - 2u_0(u \cos \theta \cos \theta_0 + u \sin \theta \cos \varphi \sin \theta_0)$$

$$f(u, L) = \int \frac{d \cos \theta_0 d\varphi}{4\pi} f(\xi^2)$$

Если заметить, что  $d \cos \theta_0 d\varphi$  – это телесный угол  $d\Omega$ , который проходится вектором  $\vec{n} = (\cos \theta_0, \cos \varphi \sin \theta_0, \sin \varphi \sin \theta_0)^T$  и ввести вектор  $\vec{y} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , то усреднение будет следующим

$$f(u, L) = \int d^2\vec{n} f(u^2 + u_0^2 - 2u_0 u(\vec{y}\vec{n}))$$

В результате эффективная функция распределения будет изотропна.

$$f_{\text{эфф}}(u) = \int_{-1}^1 f(u^2 + u_0^2 - 2u_0 u \cdot x) \cdot \frac{dx}{2} \quad (2.1.7)$$

В нашей задаче мы возьмем нормальное распределение по скоростям темной материи

$$f(\vec{\xi}^2) = \frac{1}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\vec{\xi}^2}{2\xi_0^2}}$$

Итоговая функция распределения будет следующей [12]

$$f(u) = \frac{e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2\xi_0^2}}}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} \text{thc}\left(\frac{2u_0 u}{\xi_0^2}\right) \quad (2.1.8)$$

$$\text{thc}(x) = \frac{(1 - e^{-x})}{x}$$

Поскольку функция распределения однородная, то в (2.1.5) можно проинтегрировать по моменту импульса и получить конечное выражение для скорости захвата [12].

$$C = \rho_V \int dV f(u) \cdot \sigma_c^i n_i v^2 \cdot 4\pi u du \quad (2.1.9)$$

## 2.2. Описание процесса интегрирования

Для интегрирования (2.1.9) будем использовать модель Солнца [13] и Земли [14, 15]. Модель будет представлять из зависимость таких параметров как масса, плотность и концентрация элементов от безразмерного радиуса  $\xi_r$

$$\xi_r = \frac{r}{R}$$

Радиусы Солнца и Земли равны соответственно



$$R_{\text{C}} = 6.957 \cdot 10^8 \text{ м}$$

$$R_{\text{З}} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Мы также введем безразмерную массу  $\mu$  и безразмерный потенциал  $\omega$ , равные отношению соответствующих величин к их значениям в

$$\mu = \frac{M(r)}{M_{\text{T}}}$$

$$\omega = \frac{\phi(r)}{\phi(R)}$$

Потенциалы на поверхности Солнца и Земли следующие

$$\phi_{\text{C}}(R) = 2.114 \cdot 10^{-6}$$

$$\phi_{\text{З}}(R) = 6.97 \cdot 10^{-10}$$

Из уравнения Пуассона находится безразмерный гравитационный потенциал внутри тела.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi_r} = - \frac{\mu}{\xi_r^2}$$

$$\omega = 1 + \int_{\xi}^1 \frac{\mu(\xi'_r)}{\xi_r'^2} d\xi'_r$$

Скорость захвата  $v_{\text{esc}}$  выражается через безразмерный потенциал.

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2\phi} = v_{\text{esc}}^0 \sqrt{\omega}$$

где  $v_{\text{esc}}^0$  – скорость вылета на поверхности. Для Солнца и Земли это

$$v_{\text{esc}}^0 = 2.056 \cdot 10^{-3} \text{ (Солнце)} \quad (2.2.1)$$

$$v_{\text{esc}}^0 = 3.7336 \cdot 10^{-5} \text{ (Земля)} \quad (2.2.1')$$

Для интегрирования (2.1.9) будем использовать безразмерные параметры: радиус  $\xi$ , безразмерное сечение захвата на элементе  $\hat{\sigma}_i = \sigma_c / \sigma_0$  ( $\sigma_0$  – полное упругое сечение взаимодействия, посчитанное при скорости частицы ТМ на бесконечности равной  $u_0$ ), массовую долю элемента  $\alpha_i$ , безразмерную плотность вещества  $\hat{\rho} = \rho(r) / \langle \rho \rangle$  ( $\langle \rho \rangle$  – средняя плотность вещества) и массовое число ядер  $N$ . Тогда скорость захвата на  $i$ -ом элементе равна

$$C_i = \rho_V \cdot \sigma_0 \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\langle \rho \rangle}{m_{\text{нук}}} \right) \int 3 \xi_r^2 d\xi_r \cdot f(u) \cdot \hat{\sigma}_i \frac{\alpha_i}{N} \hat{\rho} \frac{v^2 u}{u_0} \cdot 4\pi du^2$$

Этот интеграл будем считать численно в два этапа. Сначала находим безразмерную величину, характеризующую вероятность захвата при начальной скорости  $u$

$$\tilde{\sigma}_i(u) = \int 3 \xi_r^2 d\xi_r \cdot \hat{\sigma}_i \alpha_i \hat{\rho} \cdot \frac{v^2}{u_0^2} \quad (2.2.2)$$

Данные для параметров сферического тела заданы в таблице, и мы будем их аппроксимировать кусочно-линейной функцией.  $\hat{\sigma}_i$  тоже будет задан в виде таблицы (матрицы), поэтому (2.2.2) будем интегрировать с помощью метода трапеций. Результатом будет одномерный массив.

Далее берем второй интеграл по скоростному распределению методом трапеций и получаем безразмерный фактор подавления.

$$\vartheta_i = \int f(u) \cdot \tilde{\sigma}_i(u) \cdot 4\pi u_0 u du \quad (2.2.3)$$

Скорость захвата выражается через  $\vartheta_i$ .

$$C_i = \rho_V \sigma_0^i \cdot \frac{M}{N m_N} \cdot u_0 \cdot \vartheta_i \quad (2.2.4)$$

Из плотности темной материи равной  $0.4 \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3}$  можно найти концентрацию ТМ  $\rho_V$  зная ее массу. Запишем тогда для Солнца и Земли (2.2.3), подставив известные числа.

$$C_i^c \left[ \frac{1}{\text{с}} \right] = 1.2 \cdot 10^{28} \sigma_0^i [\text{пбн}] \cdot \frac{\vartheta_i}{N \mu_k} \quad (2.2.5)$$

$$C_i^3 \left[ \frac{1}{\text{с}} \right] = 3.5 \cdot 10^{22} \sigma_0^i [\text{пбн}] \cdot \frac{\vartheta_i}{N \mu_k} \quad (2.2.5')$$

где  $\sigma_0^i$  – выражаются в пикобарнах, а  $\mu_k$  – отношение массы частицы ТМ к массе нуклона.

Скорость захвата на единицу объема Солнца и Земли тогда следующие

$$C_i^C \left[ \frac{1}{\text{год}} \right] = 2.6 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{см}^3} \sigma_0^i [\text{пбн}] \cdot \frac{\vartheta_i}{N \mu_k} \quad (2.2.6)$$

$$C_i^3 \left[ \frac{1}{\text{год}} \right] = 10 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{см}^3} \sigma_0^i [\text{пбн}] \cdot \frac{\vartheta_i}{N \mu_k} \quad (2.2.6')$$

Если выразить сечение взаимодействия на ядре (1.1.8) , то (2.2.3) изменится на

$$C = \sigma_{0N} \cdot \left[ \rho_{0.4\text{ГэВ}} \cdot \frac{M}{m_N} \cdot u_0 \right] \cdot P \quad (2.27)$$

$$P = \sum_{\text{ядрам}} \frac{N(1 + \mu_k)^2}{(N + \mu_k)^2 \mu_k} \vartheta_N \quad (2.2.8)$$

Величина сечения на нуклоне неизвестна, выражение в квадратных скобках (2.2.6) – это число в формуле (2.2.4) или (2.2.5), а величина  $P$  – будет искомой величиной в данной задаче.

### 3. Результаты расчета

Для начала обсудим проблему с инфракрасной расходимостью. На рисунке 3.1 изображено безразмерное сечение упругое (синяя линия) и полное сечение (оранжевая линия), полученное с помощью численной регуляризации (1.3.6) + (1.3.6'), при  $\mu_k = 4$ ,  $N = 16$ . Видно, что существует естественная граница между областью с полностью неупругим захватом и упругим из-за того, что промежуточная область очень узкая. Поскольку фотонные поправки дают вклад порядка  $10^{-10}$  к упругому захвату, то для полной скорости захвата поправка от ЭМП в упругой области будет незначительна по сравнению со скоростью неупругого захвата, посчитанной во второй области. Поэтому вариант устранения расходимости с помощью обнуления корректен при вкладах неупругого захвата более чем  $10^{-10}$ .

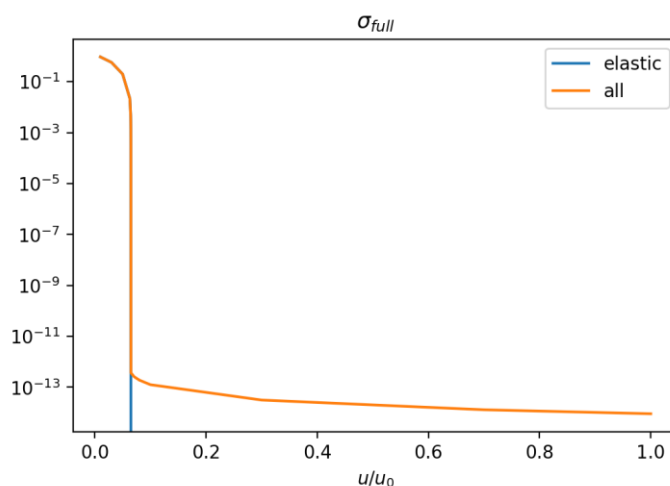


Рисунок 3.1

Построим графики, на которых изображено отношение скорости захвата при учете температуры к скорости захвата без учета температуры на самых легких рассматриваемых элементах, для которых максимальная температурная скорость. У Солнца это протон (рисунок 3.1а), у Земли – кислород (рисунок 3.1б). Во всех графиках число  $n$  – это показатель степени квадрата импульса (таблица 1.5.1).

Видно, что в Солнце температура незначительно (не более 5%) влияет на захват. Для Земли влияние температуры есть только при очень маленьких массах частицы ТМ, притом, изменения не очень большие. Таким образом, температура вносит вклад в захват порядка нескольких процентов.

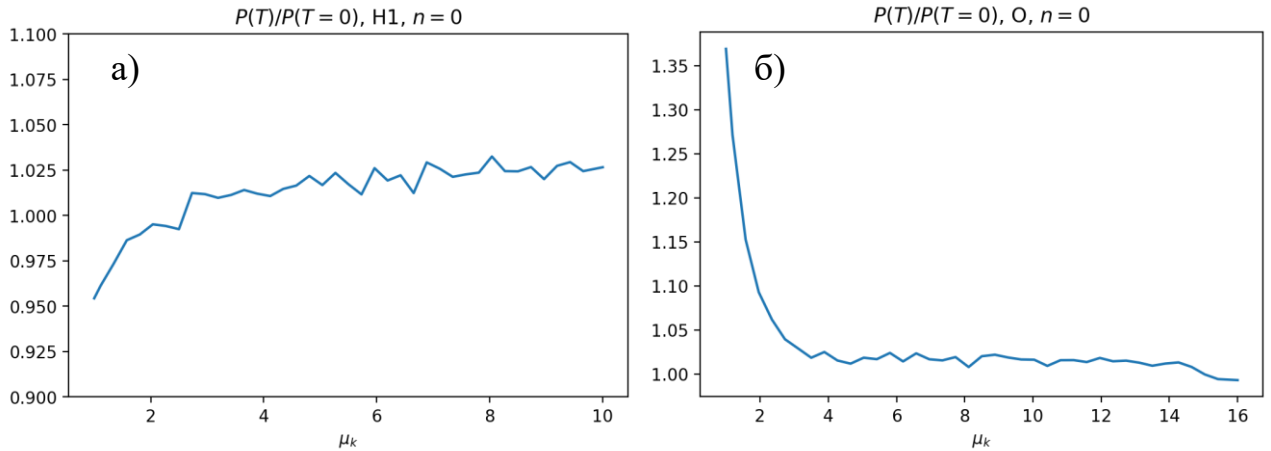
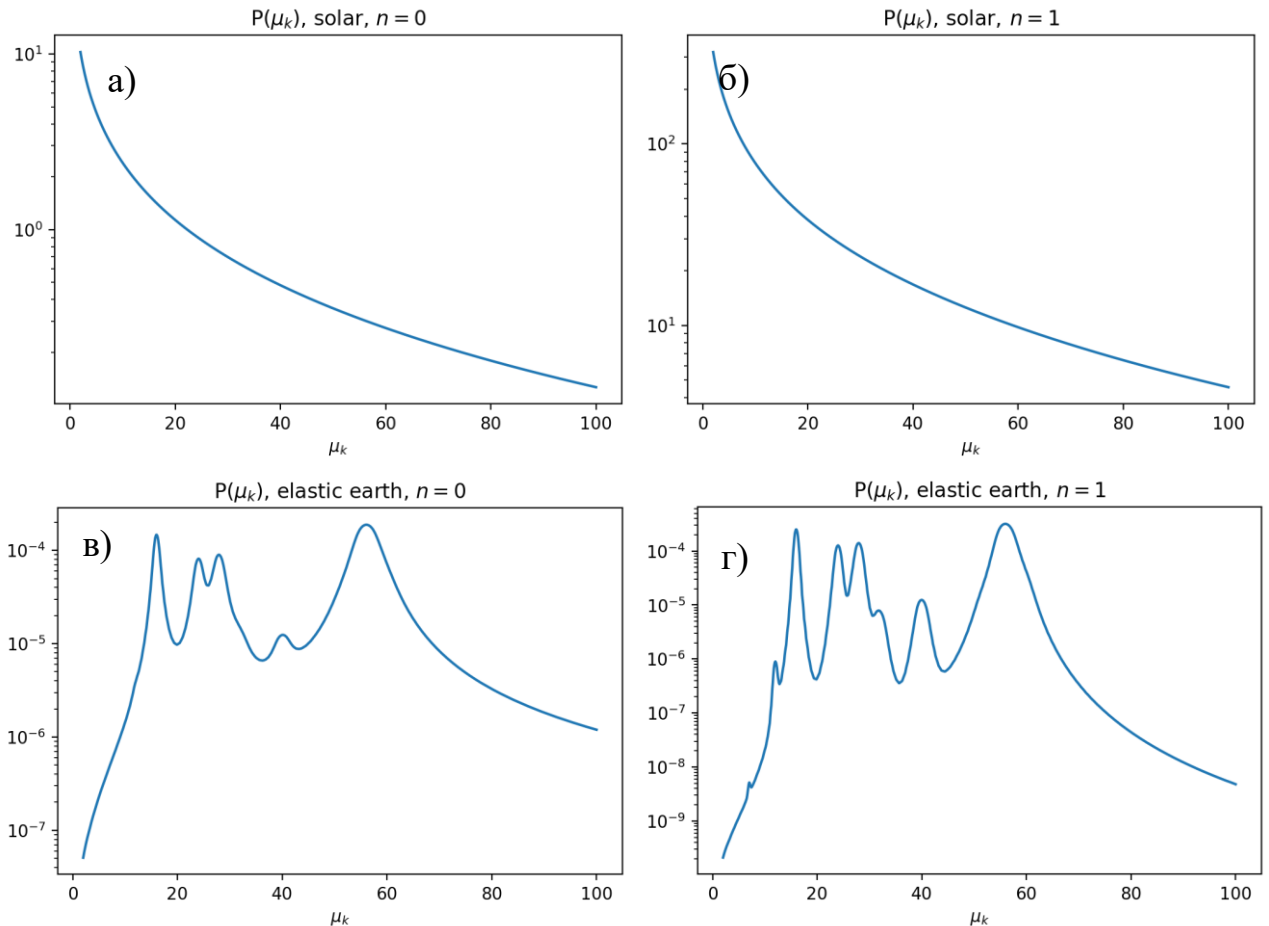


Рисунок 3.2

Ниже представлены (рисунок 3.2) графики величины  $P$  из (2.2.7) на Солнце (а, б) и Земле (в, г, д, е) при упругом и неупругом сечении с  $n = 0$  (1.1.4) (а, в, д, ж) и  $n = 1$  (1.1.4') (б, г, е, з), и отношения неупругой скорости захвата (или  $P$ ) к упругой на Земле для этих случаев (ж, з).



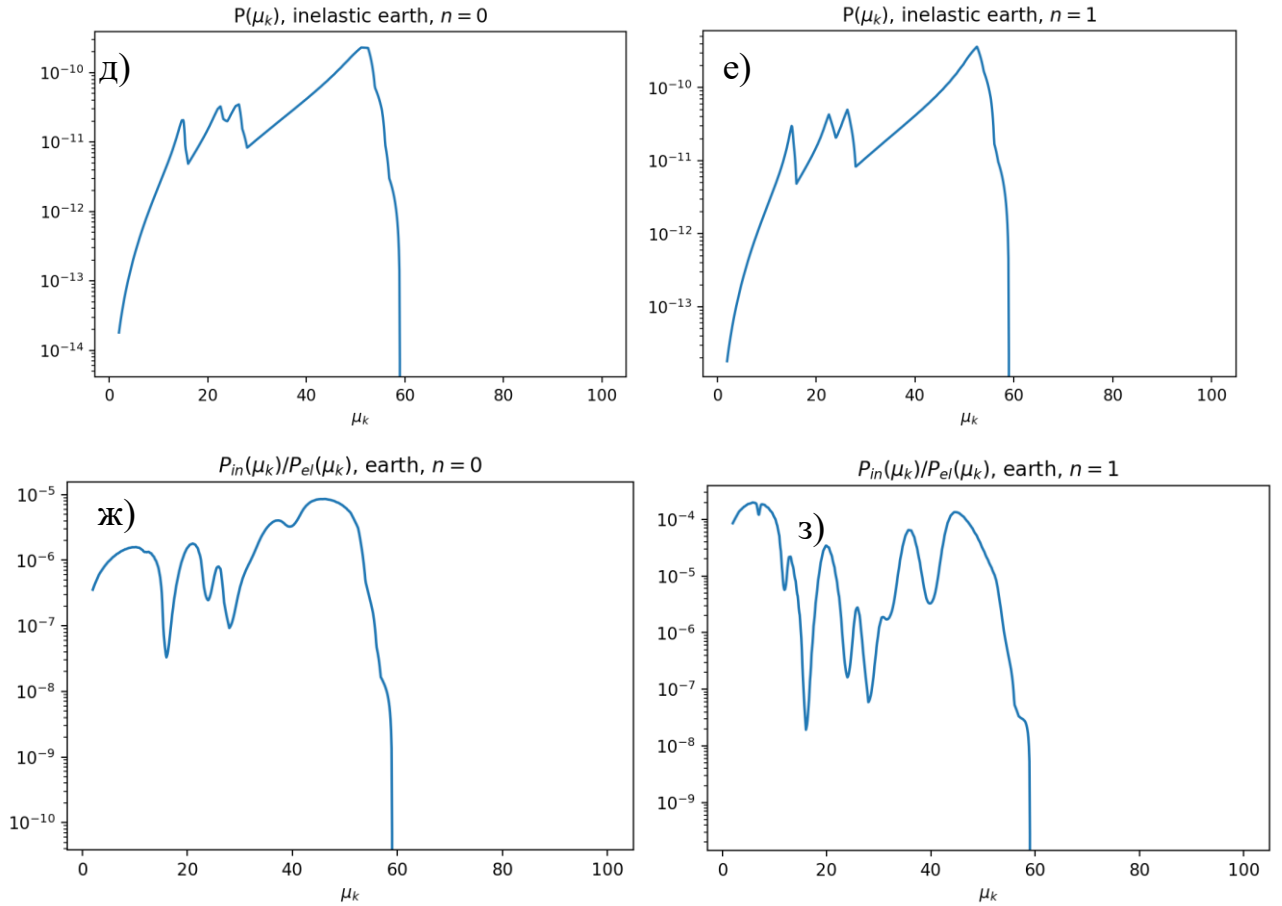


Рисунок 3.3

Малость неупругого сечения объясняется большим фактором подавления в формуле (1.3.7). При характерных скоростях  $u_0$  он будет порядка:

$$P_{in} \sim Z^2 \alpha \cdot \left( \frac{m_k}{m_p + m_k} \right)^2 \frac{v_{esc}^3}{u_0}$$

$v_{esc}^3$  берется из интегрирования по трёхмерному фазовому объёму в сечении. Интегрирование по скоростям (2.2.2) и (2.2.3) не изменяет порядок величины, поскольку неупругое сечение определено при скоростях порядка  $u_0$ .

Упругое сечение в случае резонанса имеет следующее  $P$  (оценить можно из размера телесного угла, в котором происходит захват, находящегося на пересечении зеленой и красной сферы)

$$P_{el}^{res} \sim \frac{v_{esc}^2}{u_0^2}$$

При резонансе, когда масса ТМ и ядра совпадают, захват происходит при всех скоростях, в отличие от случая на рисунке 3.1. При отсутствии резонанса характерная скорость ТМ, при которой может быть захват, – это  $v_{esc}$ . При различных значениях показателя степени  $2n$  переданного импульса в сечении фактор подавления упругого сечения будет следующим:

$$P_{el} \sim \left( \frac{v_{esc}}{u_0} \right)^{2n+4}$$

Четверка берется из формул (2.2.2) и (2.2.3), так как интегрирование происходит при скоростях порядка  $v_{esc}$  и содержит умножение на скорость. Поэтому увеличение  $n$  ведет к увеличению влияния неупругого захвата и, одновременно, к увеличению захвата на Солнце.

Если наивно применить (2.2.8) для  $n = 2$ , то вклад неупругого процесса будет еще более ощутимым (рисунок 3.3а). Также видно, что при увеличении  $n$  проявляются резонансы даже самых редких элементов земли, а температурный вклад будет более ощутимым (рисунок 3.3б – влияние температуры при захвате на кислороде), поскольку упругое сечение (рис 3.1) размазывается по скоростям и становится ненулевым в области с большими скоростями.

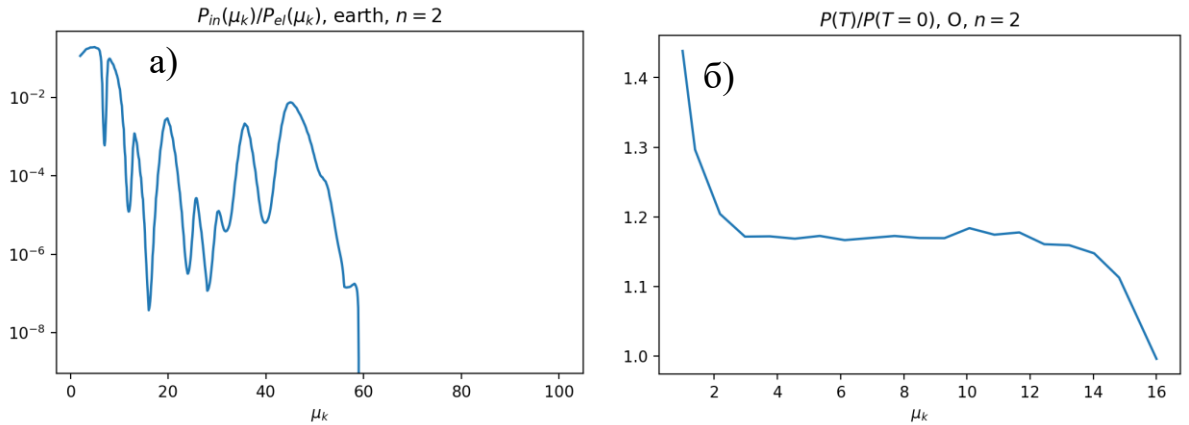


Рисунок 3.4

Более-менее значимый вклад неупругого рассеяния в захват возможен только при массах ТМ до 10 ГэВ, однако он будет порядка температурного вклада.

Неупругий процесс мог бы также происходить за счет переходов уровней в ядре, однако это накладывает ограничения на кинематику (из закона сохранения энергии)

$$\frac{m_p}{m_p + m_k} \sqrt{v_{\text{ЛСО}}^2 - \frac{2\Delta E}{m_p} \cdot \frac{(m_k + m_p)}{m_k}} + v_{\text{esc}} \geq \frac{m_k}{m_p + m_k} v_{\text{ЛСО}}$$

Но  $v_{\text{ЛСО}}^2$  порядка  $10^{-6}$ , а второе слагаемое в корне порядка  $10^{-4}$ , которое соответствует разнице энергий  $\Delta E$  между нижним энергетическим уровнем ядра и первым возбужденным порядка 0.1 – 1 МэВ т.е. требуется скорость на порядок больше, чтобы произошёл резонанс.

Возможен неупругий захват также и за счет эффекта Мигдала [16], когда в результате соударения с ядром происходит переход электрона в атоме на другой уровень. Этот эффект может быть на несколько порядков выше.

Также можно грубо оценить отношение потоков аннигиляции на земле и Солнце. Из уравнения (1), если пренебречь испарением, можно найти число аннигиляций [17]. А отношения потоков определяются радиусом земли  $R_3$  и расстоянием от земли до солнца  $R_{\text{СЗ}}$ .

$$\Gamma_{\text{ann}} = \frac{C}{2} \text{th}^2 \left( \frac{t}{\tau} \right), \quad \tau = \sqrt{CA}$$

Для Земли время  $\tau$  больше чем на Солнце, поэтому гиперболический тангенс будет меньше. Так отношение потока с Земли к потоку с Солнца ограничивается следующим выражением

$$\frac{J_3}{J_{\text{С}}} \lesssim \frac{C_3}{C_{\text{С}}} \cdot \left( \frac{R_3}{R_{\text{СЗ}}} \right)^2 \sim 1.6 \cdot 10^3 \cdot \frac{P_3}{P_{\text{С}}}$$

Получается, что поток частиц с Земли будет меньше потока частиц с Солнца на несколько порядков в области с неупругим взаимодействием (рисунок 3.3 а, в и б, г). Поэтому неупругое рассеяние на Земле или Солнце не могут привести к значительному изменению потока частиц.



## 4. Заключение

Мы вычислили скорость захвата частиц темной материи при разных видах взаимодействия в упругом и неупругом случае.

Неупругое рассеяние происходит в случае, когда масса частицы ТМ меньше массы ядра, а скорость вдали от небесного тела превышает скорость вылета  $v_{esc}$  (1.5.5). На Солнце эти условия, очевидно, не выполняются как при больших массах частицы ТМ, поскольку Солнце состоит в основном из легких элементов, так и при малых массах ТМ, где характерные температурные скорости сместят область неупругого захвата в упругую. Поэтому на Солнце неупругий процесс вносит незначительный вклад.

Однако для Земли ситуация иная.  $v_{esc}$  на один два порядка меньше, чем характерная скорость движения частиц вдали, а вещество состоит из тяжелых элементов. Поэтому упругий захват имеет резонансный характер и вдали от резонансов (совпадение массы ТМ и элемента) упругий захват имеет подавление, которое усиливается тем более, чем больше степень импульса в сечении, а неупругий захват не имеет такого подавления. Неупругий захват с испусканием фотона получился на несколько порядков меньше упругого во всей области масс ТМ. Однако есть шанс, что неупругий захват за счет эффекта Мигдала будет выше.

## 5.Список литературы

1. Д.С.Горбунов, В.А.Рубаков Введение в теорию ранней вселенной. Теория горячего Большого взрыва. 17с.
2. В.А.Рябов, В.А.Царев, А.М. Цховребов. Поиски частиц темной материи.
3. В.А.Бедняков. Физика элементарных частиц и атомного ядра, № 47, Выпуск 5 за 2016 г 1316с.
4. S.Baum, L.Visinelli, K.Freese, P.Stengel. A tale of dark matter capture, subdominant WIMPs, and neutrino observatories. Phys. Rev. D 95, 043007 (2017)
5. G.Busoni, A.De Simone, P.Scott, A.C.Vincent. Evaporation and scattering of momentum- and velocity-dependent dark matter in the Sun. JCAP10(2017)037
6. М.Пескин, Д.Шредер. Введение в квантовую теорию поля.
7. R.Catena. WIMP capture and annihilation in the Earth in effective theories. arXiv:1609.08967.
8. P.A. Zyla et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 083C01 (2020)
9. M.Ram. Inner Bremsstrahlung in Low-Energy Electron-Neutrino (Antineutrino) Scattering. PHYSICAL REVIEW VOLUME 155, NUM 8 ER 5 25 MARCH 1967
- 10.С.Вайнберг. Квантовая теория поля. (580с)
- 11.С.Kouvaris, J.Pradler. Probing sub-GeV Dark Matter with conventional detectors. Phys. Rev. Lett. 118, 031803 (2017)
- 12.A.Gould. Resonant Enhancements In WIMP Capture By The Earth. Astrophys. J. 321, 571 (1987).
- 13.N.Vinyoles et al. A New Generation of Standard Solar Models. The American Astronomical Society (2017).
- 14.A.M. Dziewonski, D.L.Anderson. Preliminary reference Earth model. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 25 (1981) 297— 356
- 15.H.D.Holland, K.K.Turekian, Compositional Model for the Earth's Core. Treatise on Geochemistry, Pergamon (2003) 547-568.
- 16.N.F. Bell et al. The Migdal Effect and Photon Bremsstrahlung in effective field theories of dark matter direct detection and coherent elastic neutrino-nucleus scattering. Phys. Rev. D 101, 015012 (2020)
- 17.F.Ferrer, L.M. Krauss, S.Profumo. Indirect detection of light neutralino dark matter in the NMSSM. Phys.Rev.D74:115007,2006