

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

Факультет проблем физики и энергетики

## **ДИПЛОМНАЯ РАБОТА**

**Захват темной материи Солнцем и Землей.**

Выполнил:  
студент 783а группы

Товстун Артем Александрович

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., проф.

---

Москва 2021

## Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>1.Расчет сечения захвата.....</b>	<b>4</b>
<b>1.1. Определение матричного элемента .....</b>	<b>4</b>
<b>1.2. Кинематика и дифференциальное сечение.....</b>	<b>5</b>
<b>1.3. Сечение при малых импульсах фотона. ....</b>	<b>7</b>
<b>1.4. Кинематика захвата и сечение. ....</b>	<b>10</b>
<b>1.5. Влияние температуры.....</b>	<b>12</b>
<b>2.Расчет скорости захвата.....</b>	<b>16</b>
<b>2.1. Определение фазовой плотности. ....</b>	<b>17</b>
<b>2.2. Описание процесса интегрирования.....</b>	<b>20</b>

## **Введение**

## 1. Расчет сечения захвата

Сечение захвата в данной задаче – это характеристика, показывающая вероятность столкновения частицы темной материи с ядром и ее захватом небесным телом.

Для нахождения сечения захвата необходимо определить матричный элемент теории и проинтегрировать его по той части фазового объема, при котором частица темной материи переходит на стационарную орбиту.

### 1.1. Определение матричного элемента

Мы запишем лагранжиан теории, содержащую фермионы: частицу ТМ и нуклон, взаимодействующие при помощи четырёхточечной вершины, и электромагнитное поле.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(\gamma^\mu(i\partial_\mu - e_n A_\mu) - m_n)\psi + \bar{\chi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_k)\chi - \bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi \quad (1)$$

где  $\psi, m_n, \chi, m_k$  – 4-х компонентные спиноры и массы мишени и частицы темной материи соответственно,  $A_\mu, F^{\mu\nu}$  – вектор потенциал и тензор напряженности ЭМП,  $e_n$  – заряд нуклона.

$\Delta_1^a$  и  $\Delta_{2a}$  – матрицы которые должны быть самосопряженными по Дираку, чтобы лагранжиан был вещественным.

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \Rightarrow (\bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi)^* = \bar{\psi}\overline{\Delta_1^a}\psi\bar{\chi}\overline{\Delta_{2a}}\chi = \bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi \Rightarrow \Delta_i^a = \overline{\Delta_i^a}$$

Мы рассмотрим два случая возможного взаимодействия

$$\Delta_i^a = \begin{cases} (a_i + i\gamma^5 b_i), & \text{скалярного взаимодействия} \\ \gamma^\mu(a_i - \gamma^5 b_i), & \text{векторное взаимодействие} \end{cases}$$

Сразу заметим, что если рассеивается не частица, а античастица темной материи (со входным и выходным импульсом  $\hat{k}$  и  $\hat{k}'$ ), то вычисления определялись бы лагранжианом преобразованным оператором  $\hat{C}_k$  зарядового сопряжения ТМ.

$$\mathcal{L}^{C_k} = \hat{C}_k \mathcal{L} \hat{C}_k$$

Исходя из правил преобразования вершин [ППВ]

$$\begin{aligned}\hat{C}_k \bar{\chi} \chi \hat{C}_k &= \bar{\chi} \chi, & \hat{C}_k \bar{\chi} \gamma^5 \chi \hat{C}_k &= \bar{\chi} \gamma^5 \chi, \\ \hat{C}_k \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \hat{C}_k &= -\bar{\chi} \gamma^\mu \chi, & \hat{C}_k \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma^5 \chi \hat{C}_k &= \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma^5 \chi\end{aligned}$$

можно получить, что  $\Delta_{2a}$  не изменится в скалярном взаимодействии, и изменится с  $\gamma^\mu(a_2 - \gamma^5 b_2)$  на  $-\gamma^\mu(a_2 + \gamma^5 b_2)$  в векторном случае. Что соответствует замене  $a_2 \rightarrow -a_2$ .

Итак, матричный элемент упругого рассеяния равен

$$i\mathcal{M}_0 = \bar{\psi}(p')\Delta_1^a\psi(p)\bar{\chi}(k')\Delta_{2a}\chi(k)$$

будем обозначать входящий/выходящий спинор как поле с индексом импульса.

## 1.2. Кинематика и дифференциальное сечение.

Сечение находится из матричного элемента по формуле[PDG]

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(pk)^2 - m_p^2 m_k^2}} d\Phi$$

$$d\Phi = (2\pi)\delta(E_f - E_i) \times \frac{1}{2E_{p'}} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q} \times \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}$$

где  $\vec{k}', E_{k'}$  – импульс и энергия вылетающей частицы,  $\vec{q}, q$  – импульс и энергия фотона,  $E_{p'}$  – приобретаемая энергия мишени. Интеграл будем брать в системе центра масс (рисунок 1), где кинематика относительно простая.

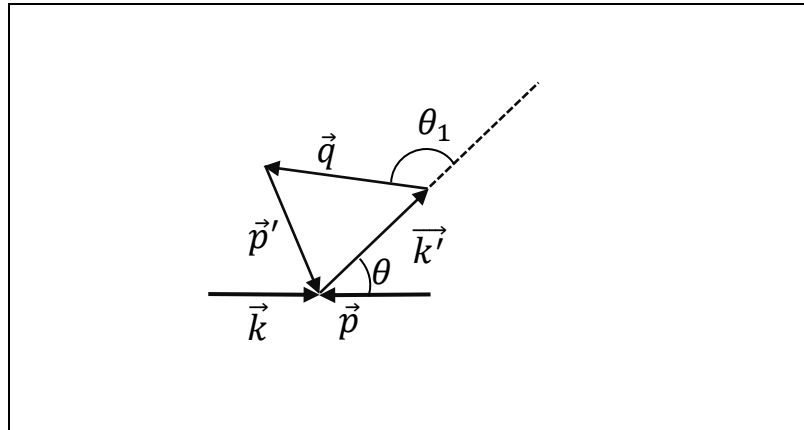


Рисунок 1.

В сферических координатах фазовый объем и телесные углы равны

$$d\Phi = \int \frac{k'^2 q}{4E_{k'}} \times (2\pi) \delta(E_f - E_i) \times \frac{1}{2E_{p'}} \times \frac{d\Omega_q}{(2\pi)^3} \times \frac{d\Omega_{k'}}{(2\pi)^3} dk' dq$$

$$d\Omega_{k'} = 2\pi d \cos \theta$$

$$d\Omega_q = d \cos \theta_1 d\varphi_1$$

При этом телесный угол  $d\Omega_q$  отсчитывается не от оси  $z \parallel \vec{k}$ , а от  $\vec{k}'$ , а телесный угол  $d\Omega_{k'} = 2\pi d \cos \theta$ , если матричный элемент инвариантен относительно вращений вокруг оси  $z$ .

Введя систему координат, связанную с вектором  $\vec{k}'$ , находим выражение для импульса фотона и ядра из закона сохранения импульса.

$$\vec{k}' = k'(\sin \theta, 0, \cos \theta)^T = k' \vec{e}'_3$$

$$\vec{e}'_1 = (\cos \theta, 0, -\sin \theta)^T$$

$$\vec{e}'_2 = \vec{e}_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$\vec{q} = q\vec{n}_q = q(\cos \theta_1 \vec{e}'_3 + \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \vec{e}'_2 + \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \vec{e}'_1)$$

$$\vec{p}' = -\vec{q} - \vec{k}'$$

Далее дельта функция снимается с помощью интегрирования по энергии фотона

$$\frac{\delta(E_f - E_i)}{2E_{p'}} dq = dq \frac{\delta(q + \sqrt{m_p^2 + p'^2} - E_{\text{цн}} + E_{k'})}{2E_{p'}} = \frac{1}{2(E_{p'} + q + k' \cos \theta_1)}$$

А из закона сохранения энергии и импульса находится импульс фотона.

$$q + \sqrt{m_p^2 + p'^2} + \sqrt{m_k^2 + k'^2} = E_{\text{цн}}$$

$$p'^2 = k'^2 + q^2 + 2qk' \cos \theta_1$$

$$q(\cos \theta_1) = \frac{E_{\text{цн}}(E_k - E_{k'})}{(E_k - E_{k'}) + E_p + k' \cos \theta_1}$$

Итого дифференциальное сечение в системе центра масс выражается следующим образом

$$\frac{d\sigma}{d^3\vec{k}'} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4kE_{\text{ци}}} \cdot \frac{E_{\text{ци}}(E_k - E_{k'})}{8E_{k'} \left( (E_k - E_{k'}) + E_p + k' \cos \theta_1 \right)^2 \cdot (2\pi)^5} d\Omega_q \quad (1.2.1)$$

Видно, что при неупругом соударении в системе центра масс выходящий импульс  $k'$  пробегает весь шар радиуса  $k$ , а не только его границу.

Интегрирование по телесному углу фотона не содержит никакой сингулярности, поэтому его можно проводить численно с помощью схемы сколь угодно высокого порядка, например, методом гаусса.

### 1.3. Сечение при малых импульсах фотона.

При испускании мягкого фотона с бесконечно малой энергией учитывается только инфракрасно расходящийся вклад матричного элемента равный

$$-Z^2 e^2 \left( \frac{v'^\mu}{v'q} - \frac{v^\mu}{vq} \right)^2 |\mathcal{M}_0|^2(p'(q), k'(q), p, k)$$

где  $|\mathcal{M}_0|^2$  – матричный элемент упругого рассеяния.

Если ввести малую массу фотона  $\mu$  [ПШКТП], сделать замену и ввести обозначения

$$q = \mu \operatorname{sh} \phi = x, \quad \sqrt{q^2 + \mu^2} = \mu \operatorname{ch} \phi = y, \quad \frac{q}{\sqrt{q^2 + \mu^2}} = \operatorname{th} \phi = t \quad (1.3.1)$$

$$\vec{q} = q \cdot \vec{n}_q \quad (1.3.1')$$

то сечение процесса с испусканием фотона будет иметь следующий вид

$$d\sigma_\gamma = \int_0^\epsilon \frac{dx}{y} \cdot f(y, t) \quad (1.3.2)$$

Но так как матричный элемент и фазовый объем – непрерывно дифференцируемые функции по импульсам  $p'$  и  $k'$ , которые при малых

импульсах фотона являются гладкими по  $y$  и  $t$ , потому что задаются в неявном виде с помощью функции, производные которой не ноль и не бесконечность

$$F(k', y, t) = y + \sqrt{m_p^2 + p'^2(k', yt, \cos \theta_1)} + \sqrt{m_k^2 + k'^2} - E_{\text{ци}} = 0$$

$$F'_{k'} = \frac{k'}{E_{k'}} + \frac{k' + q \cdot \cos \theta_1}{E_{p'}} \geq \frac{k}{2} \left( \frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_k} \right) = c_0$$

$$F'_y = 1 + \frac{t^2 y + t k' \cos \theta_1}{E_{p'}} < 1 + \frac{2k}{E_p} = c_1$$

из чего следует, что  $\partial k' / \partial y = F'_y / F'_{k'} < \infty$ , то есть  $k'$  - гладкая функция  $(y, t)$  при  $(y, t) \in [0, \epsilon] \times [0, 1]$ , значит функция из (1.3.2) – гладкая и имеет константу Липшица  $C_f$  по переменной  $y$ . Следовательно, интеграл (1.3.2) можно представить в виде суммы его упрощенного варианта, где  $y = 0$ , и добавки  $D_2$ , стремящейся к нулю с первым по  $\epsilon$  порядку.

$$(2) = \int_0^\epsilon \frac{dx}{y} \cdot f(0, t) + D_2 \quad (1.3.2')$$

$$|D_2| = \left| \int_0^\epsilon \frac{dx}{y} \cdot (f(y, t) - f(0, t)) \right| \leq \int_0^\epsilon \frac{dx}{y} \cdot y C_f = \epsilon C_f$$

Далее, в интеграле (1.3.2') проводим замену переменных (1.3.1)

$$\int_0^{\ln(\frac{2\epsilon}{\mu})} d\phi \cdot f(0, \text{th } \phi)$$

и выделяем расходящуюся часть, приравняв  $\text{th } \phi$  к единице и проделав похожие рассуждения с константой Липшица по аргументу  $t$ . Поэтому расходящаяся часть сечения имеет вид

$$d\sigma_\gamma^{\text{расх}} = f(0, 1) \ln \left( \frac{\epsilon}{\mu} \right) \quad (1.3.3)$$

В итоге (1.3.3) переходит при подстановки фазового объема и матричного элемента в следующее выражение



$$d\sigma_{\gamma}^{\text{расх}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \int -\frac{d\Omega_q}{4\pi} \left( \frac{v'^\mu}{v'_0 - \vec{v}'\vec{n}_q} - \frac{v^\mu}{v_0 - \vec{v}\vec{n}_q} \right)^2$$

Этот интеграл берется с помощью техники усреднения по телесному углу и параметров Фейнмана.

$$\int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \frac{v'v}{(v'_0 - \vec{v}'\vec{n}_q)(v_0 - \vec{v}\vec{n}_q)} = \int_0^1 dx \frac{d\Omega_q}{4\pi} \frac{v'v}{(xv'_0 + (1-x)v_0 - (\vec{v}'x + \vec{v}(1-x))\vec{n}_q)^2} \quad (1.3.4)$$

Зная, как проводится усреднение по телесному углу,

$$\int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \frac{1}{(A - \vec{n}_q\vec{B})^2} = \frac{1}{A^2 - \vec{B}^2}$$

получаем значение интеграла (1.3.4).

$$\int_0^1 dx \frac{v'v}{(xv'_0 + (1-x)v_0)^2 - (\vec{v}'x + \vec{v}(1-x))^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v'v}{\sqrt{(v'v)^2 - 1}} \ln \left( \frac{v'v + \sqrt{(v'v)^2 - 1}}{v'v - \sqrt{(v'v)^2 - 1}} \right)$$

Мягкая часть сечения равна известному результату [Вайнберг]

$$d\sigma_{\gamma}^{\text{расх}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \cdot W(x) \quad (1.3.5)$$

Где  $W(x)$  и  $x$  равны следующим выражениям

$$W(x) = \left( \frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)}{(1-x)} - 2 \right)$$

$$x = \frac{\sqrt{(v'v)^2 - 1}}{(v'v)}$$

В нерелятивистском приближении они равны соответственно

$$W(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{5}x^4 + \dots$$

$$x = \sqrt{(\vec{v}' - \vec{v})^2}$$

Известно [ПШ], что петлевой вклад в упругом сечении сокращает расходимость, тогда регуляризованные массой фотона упругое и неупругое сечения имеют соответственно вид

$$d\sigma_{\gamma}^{\text{упругое}} = d\sigma_0 \cdot \left( 1 + \frac{Z^2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\mu}{m}\right) \cdot W(x) \right)$$

$$d\sigma_{\gamma}^{\text{неупругое}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \cdot W(x)$$

Хотя сумма сечений не расходится, однако нельзя строго разделить упругое сечение и неупругое – результат будет зависеть от  $\mu$ . Это отражает тот факт, что экспериментально невозможно отличить чисто упругое рассеяние и неупругое с бесконечно маленьким импульсом фотона. Поэтому корректно считать неупругими лишь те столкновения, где кинематика нисколько не задевает упругую часть.

Далее, продифференцировав (1.3.5) по  $\epsilon$ , получаем в нерелятивистском случае выражение для неупругого сечение, которое совпадает с [СТАТЬЯ].

$$d\sigma_{\gamma}^{\text{неупругое}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2\alpha}{\pi} \cdot \frac{dq}{q} \cdot \frac{2}{3} (\vec{v}' - \vec{v})^2 \quad (1.3.6)$$

Также, используя результаты выше, можно в нерелятивистском случае выразить интеграл по телесному углу в формуле (1.2.1).

$$\frac{d\sigma}{d^3\vec{k}'} = \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{64kE_{\text{ци}}^2 \cdot \pi^3} \cdot \frac{Z^2\alpha W(x)}{E_{k'}(E_k - E_{k'})}$$

#### 1.4. Кинематика захвата и сечение.

Захваченной частица считается в том случае, если ее энергия станет менее чем гравитационный барьер небесного тела. Это условие эквивалентно тому, что скорость частицы в лабораторной системе отсчета станет меньше чем скорость вылета ( $v'_{\text{ЛСО}} \leq v_{\text{esc}}$ ), которая выражается через гравитационный потенциал  $\phi(r)$ .

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2\phi(r)} \quad (1.4.1)$$

Изобразим условие захвата на рисунке 2 (в лабораторной СО и в системе центра масс). Зеленым цветом закрашена область возможного выходного импульса, а красным – область, при в которой происходит захват. Для нахождения сечения захвата необходимо проинтегрировать дифференциальное сечение по пересечению красной и зеленой области.

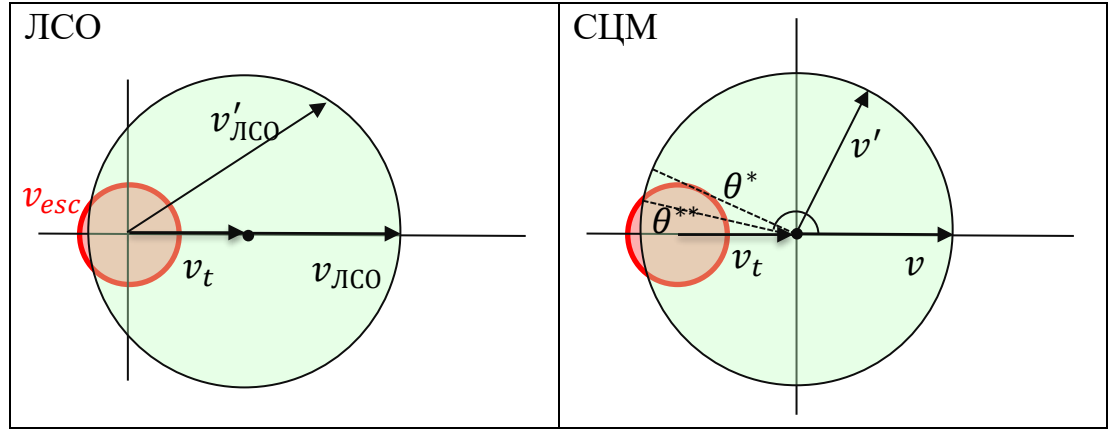


Рисунок 2.

В системе центра масс скорость частицы ТМ равна  $v$

$$v = \frac{m_p}{m_p + m_k} v_{\text{ЛСО}} \quad (1.4.2)$$

Расстояние от центра красной сферы захвата до центра масс равно  $v_t$

$$v_t = v_{\text{ЛСО}} - v = \frac{m_k}{m_p + m_k} v_{\text{ЛСО}} \quad (1.4.3)$$

В системе центра масс условие захвата выглядит следующим образом

$$(\vec{v}' + \vec{v}_t)^2 < v_{\text{esc}}^2 \Leftrightarrow v'^2 + v'v_t \cos \theta' + v_t^2 < v_{\text{esc}}^2 \quad (1.4.4)$$

Существует несколько вариантов расположения двух сфер:

- 1) При  $v_t + v_{esc} \leq v$  – красная сфера внутри зеленой. Происходит неупругий процесс.
- 2) При  $v_t + v_{esc} \geq v$ ,  $v + v_{esc} \geq v_t$  – упругое столкновение. Неупругий вклад не учитывается из соображений в предыдущем разделе.
- 3) При  $v_t \geq v_{esc} + v$  – частица ТМ не замечает ядро и не захватывается.

Как мы выяснили в предыдущем разделе, для упругого сечения захвата нужно проинтегрировать дифференциальное по переменной  $\cos \theta$  от  $-1$  до  $\cos \theta^{**}$ , который находится из (1.4.4).

$$\cos \theta^{**} = \frac{v_{esc}^2 - v_t^2 - v^2}{vv_t} \quad (1.4.5)$$

Для неупругого случая можно интегрировать дифференциальное сечение в сферической системе координат, связанной с красным шаром.

$$\sigma_c = \int_0^{m_k v_{esc}} 2\pi k_e'^2 dk_e' d \cos \theta_e \cdot \frac{d\sigma}{d^3 \vec{k}'} \quad (1.4.6)$$

Импульс  $k'$  и  $\cos \theta$  через вспомогательный импульс  $k_e'$  и косинус  $\cos \theta_e$  выражаются следующим образом:

$$k'^2 = k_e'^2 + k_t^2 - 2k_e'k_t \cdot \cos \theta_e$$

$$\cos \theta' = \frac{k_e' \cos \theta_e - k_t}{k'}$$

## 1.5. Влияние температуры.

При ненулевой температуре красная сфера смещается и может попасть на границу зеленой, тогда происходит упругий захват. Из-за температуры происходит и испарение.

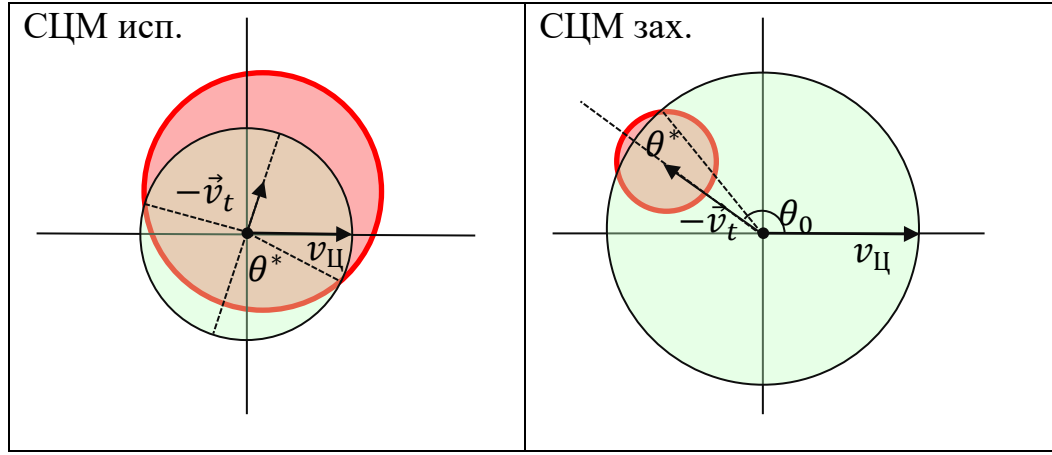


Рисунок 3.

Если  $\vec{w}$  – скорость ядра, а  $\vec{v}$  – частицы ТМ, то скорость переноса (1.4.3) и скорость в системе центра масс изменятся, а между ними появляется угол  $\theta_0$ .

$$\vec{v}_t = \frac{m_p \vec{w} + m_k \vec{v}}{m_p + m_k} \quad (1.5.1)$$

$$\vec{v}_ц = \vec{v} - \vec{v}_t = \frac{m_p}{m_p + m_k} (\vec{v} - \vec{w}) \quad (1.5.2)$$

$$\cos \theta_0 = -\frac{\vec{v}_t \vec{v}_ц}{v_ц v_t}$$

Упругое столкновение происходит, как мы выяснили выше, при  $v_{esc} > |v_ц - v_t|$ . Если раскрыть модуль и найти предельные при постоянных модулях скоростей случаи, достигающиеся при коллинеарных векторах  $\vec{w}$  и  $\vec{v}$ , то мы получим ограничения модуля скорости ядра, при котором происходит температурное взаимодействие.

$$w > \frac{m_p + m_k}{2 \cdot m_p} \cdot \left( \left| \frac{m_p - m_k}{m_p + m_k} \right| v - v_{esc} \right) \quad (1.5.3)$$

$$w > \frac{m_p + m_k}{2 \cdot m_p} \cdot (v_{esc} - v) \quad (1.5.4)$$

С помощью отрицания (1.5.3) можно получить условие, при котором не происходит упругого захвата.

$$\frac{v_{esc}}{v_{ЛСО}} \leq \left| \frac{m_k - m_p}{m_p + m_k} \right| - 2 \frac{m_p}{m_p + m_k} \frac{w}{v_{ЛСО}} \quad (1.5.3')$$

Для Солнца при характерных скоростях ТМ  $u_0$  (2.1.6),  $v_{ЛСО}$  близко к  $v_{esc}$ , поэтому, разлагая его в ряд Тейлора, получится условие неупругости захвата

$$\left( \frac{u_0}{v_{esc}} \right)^2 \geq 4 \left( \frac{m_k}{m_p + m_k} + \frac{m_p}{m_p + m_k} \frac{w}{v_{esc}} \right)$$

$$0.1 \gtrsim \frac{m_k}{m_p + m_k} + \frac{m_p}{m_p + m_k} \frac{w}{v_{esc}}$$

Это условие не может быть выполнено в интересующих нас массах и при Солнечных температурных скоростях. Поэтому на Солнце неупругий процесс не вносит никакого вклада в захват.

Для Земли (1.5.3') выполняется, когда массы ядра и частицы ТМ различаются.

Сечение для процесса с температурой будем брать методом Монте-Карло, поскольку пределы интегрирования сложны, а подынтегральные выражения не гладкие функции.

Частично сечение можно посчитать и аналитически. Для этого в системе центра масс нужно перейти в сферические координаты относительно вектора  $-\vec{v}_t$ , выразить угол вылета  $\theta'$  (угол между вектором конечной скорости и начальной) через  $\theta''$  (угол между вектором конечной скорости и скорости переноса  $-\vec{v}_t$ ).

$$\cos \theta' = \cos \theta'' \cos \theta_0 - \sin \theta'' \sin \theta_0 \cos \varphi$$

Тогда в формуле для сечения интегрируем по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , а  $\cos \theta'$  от 1 до  $\cos \theta^*$  в случае захвата и от  $-1$  до  $\cos \theta^*$  в случае испарения.

$$\cos \theta^* = \frac{v_t^2 + v_{\Pi}^2 - v_{esc}^2}{2v_t v_{\Pi}}$$

Если сечение взаимодействия имеет следующий вид

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta'} = A(v_{\Pi}) \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot \left( \frac{1 - \cos \theta'}{2} \right)^n$$

то сечение захвата или испарения мы представим в следующем виде:

$$\sigma_c = A(v) \cdot \tilde{\sigma}_c$$

где  $\tilde{\sigma}_c$  – безразмерный множитель, приведенный в таблице ниже и выраженный через переменные  $x$  и  $y$ , равные

$$x = \frac{1 - \cos \theta^*}{2}, \quad y = \frac{1 + \cos \theta^*}{2}$$

$n$	захват	испарение
0	$x$	$y$
1	$x \cdot (1 - y \cos \theta_0)$	$y(1 + x \cos \theta_0)$
2	$x \cdot \left( 1 - y \left( \frac{3}{2} \cos \theta_0 + \frac{3}{4} \cos^2 \theta_0 - \frac{1}{4} + y \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta_0 - \frac{1}{2} \right) \right) \right)$	$y \cdot \left( 1 + x \left( \frac{3}{2} \cos \theta_0 - \frac{3}{4} \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{4} + x \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta_0 - \frac{1}{2} \right) \right) \right)$

Таблица 1.

Для того, чтобы получить эффективное сечение захвата, как в неупругом случае (т.е. вероятность процесса на единицу времени равна  $\sigma_c n v$ ), нужно проинтегрировать по температурному распределению ядер сечение, полученное выше.

$$\sigma_c^{\text{эфф}} = \int \frac{d^3 \vec{w}}{(2\pi w_T^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{\vec{w}^2}{2w_T^2}} \cdot \sigma_c(v, v_{esc}, \vec{w}) \cdot \frac{|\vec{v} - \vec{w}|}{v} \quad (1.5.5)$$

Этот интеграл мы будем брать методом Монте-Карло. Направление вектора  $\vec{w}$  находится с помощью сферического распределения, когда косинус угла  $\theta_{\vec{w}}$  распределен равномерно от  $-1$  до  $1$ . Модуль вектора  $\vec{w}$  мы разыграем со следующим генератором:

$$\frac{w}{w_T} = \sqrt{-2 \ln \left( e^{-\frac{w_m^2}{2w_T^2}} \cdot \text{rand}(0..1) \right)}$$

где  $w_m$  – минимальная скорость из (1.5.3) или (1.5.4), а  $\text{rand}(0..1)$  – рандомное число от нуля до единицы.

Поскольку плотность распределения в таком распределении следующая

$$dw \frac{w}{w_T^2} e^{-\frac{w^2}{2w_T^2}}$$

то для взятия интеграла (1.5.5) методом Монте-Карло нужно еще до множить подынтегральную функцию на множитель ниже и найти среднее значение итоговой функции в случайных точках.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{w_T} e^{-\frac{w_m^2}{2w_T^2}}$$

## 2. Расчет скорости захвата

Если  $\sigma_c^i = \sigma_c^i(v, v_{esc})$  – сечение захвата на частице определенного сорта, то вероятность захвата на такой частице за единицу времени выражается через концентрацию элемента сорта  $i$ .

$$\frac{dP}{dt} = \sigma_c^i(v, v_{esc}) \cdot n_i \cdot v \quad (2.1)$$

где  $n_i$  – концентрация элемента сорта  $i$ .

Для нахождения скорости захвата нужно проинтегрировать (2.1) по фазовой плотности  $\rho(\vec{x}, \vec{v})$  (распределение частиц по скоростям и координатам).



$$\frac{dC}{dt} = \int \rho(\vec{x}, \vec{v}) d^3\vec{x} d^3\vec{v} \cdot \sigma_c^i n_i v \quad (2.2)$$

Если по индексу  $i$  ведется суммирование, то (2.2) – полная скорость захвата, иначе – скорость захвата на конкретном элементе.

## 2.1. Определение фазовой плотности.

Фазовая плотность удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана [], которое следует из закона сохранения частиц (что верно при малом взаимодействии частиц ТМ) и теоремы Лиувилля. Предположим, что  $\rho$  имеет стационарное распределение, в итоге стационарное уравнение будет следующим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \phi \quad (2.1.2)$$

здесь  $\phi$  – это гравитационный потенциал с обратным знаком (т.е. его модуль).

Мы не будем учитывать неоднородности сферического тела по угловым координатам, поэтому уравнения движения и фазовая плотность зависит только от трех переменных: скорость  $v$ , радиус  $r$  и угол  $\theta_v$  (рисунок 3).

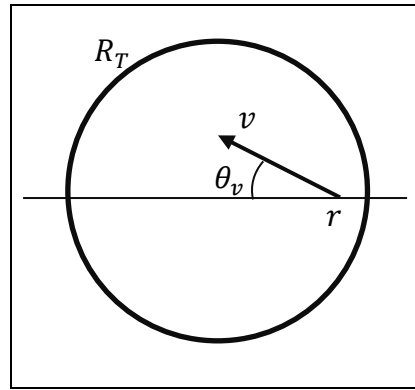


Рисунок 3.

Известно [], решением линейного уравнения первого порядка с тремя переменными – функция, зависящая от двух первых интегралов движения (2.1.2) частицы в центральном поле. Это уравнение имеет два известных интеграла – энергия и момент импульса (мы будем брать их на единицу массы).

$$u^2 = v^2 - 2\phi, \quad L = rv \sin \theta_v \quad (2.1.3)$$

$$\rho = \rho(u^2, L) \quad (2.1.4)$$

В этих переменных фазовый объем будет следующим

$$d\Phi = d^3\vec{x}d^3\vec{v} = dV \cdot \frac{\pi}{\sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}}} du^2 \frac{dL^2}{r^2} \quad (2.1.5)$$

Для решения (2.1.4) осталось определить граничные условия вдали от тела, где фазовая плотность ТМ состоит из постоянной плотности  $\rho_V$  и плотности распределения по скоростям  $f(\vec{u})$ .

$$\rho(r = \infty, \vec{u}) = \rho_V \cdot f(\vec{u})$$

Если  $f(\vec{u})$  – однородно распределена, то ответ найден

$$\rho(r, v, L) = \rho_V \cdot f\left(\sqrt{v^2 - 2\phi}\right) = \rho_V \cdot f(u)$$

Иной случай возникает, когда тело движется относительно гало ТМ со скоростью  $\vec{u}_0$  (скорость вращения Солнечной системы вокруг центра галактики).

$$u_0 = 230 \frac{\text{км}}{\text{с}} = 0.7667 \cdot 10^{-3} \quad (2.1.6)$$

А вот внутри гало ТМ распределена однородно и выражается через скорость  $\vec{\xi} = \vec{u} - \vec{u}_0$

$$f(\vec{u})d^3\vec{u} = f(\xi^2)d^3\vec{\xi}$$

Для того, чтобы найти  $f(u, L)$ , необходимо усреднить по углу  $\theta_0$  (рисунок 4), определяющего положение частицы (рисунок) и углу  $\varphi$ , указывающего на направление скорости частицы в полярных координатах репера  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Тогда можно найти координаты вектора  $\vec{\xi}$  и его модуль.

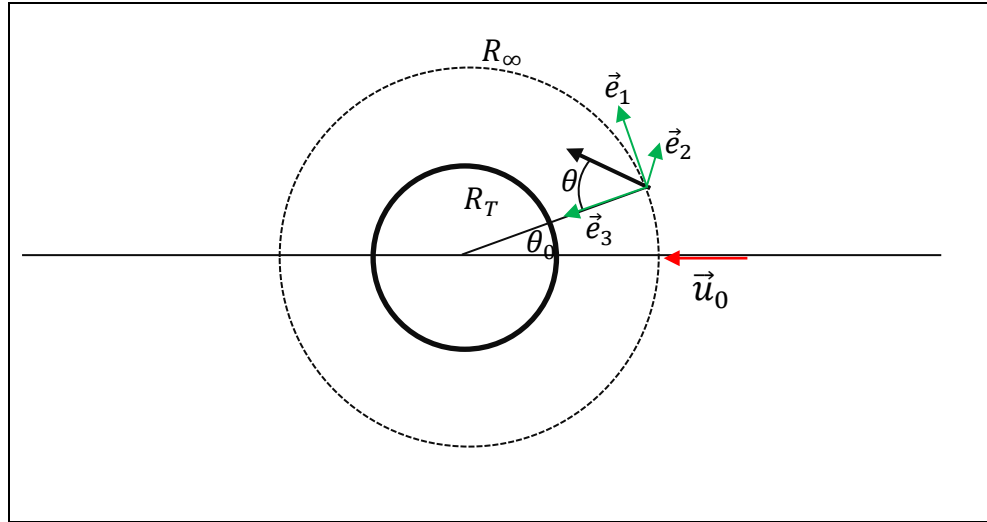


Рисунок 4.

$$\xi^2 = u_\theta^2 + u_r^2 + u_0^2 - 2u_0(u \cos \theta \cos \theta_0 + u \sin \theta \cos \varphi \sin \theta_0)$$

$$f(u, L) = \int \frac{d \cos \theta_0 d\varphi}{4\pi} f(\xi^2)$$

Если заметить, что  $d \cos \theta_0 d\varphi$  – это телесный угол  $d\Omega$ , который проходится вектором  $\vec{n} = (\cos \theta_0, \cos \varphi \sin \theta_0, \sin \varphi \sin \theta_0)^T$  и ввести вектор  $\vec{y} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , то усреднение будет следующим

$$f(u, L) = \int d^2\vec{n} f(u^2 + u_0^2 - 2u_0 u(\vec{y}\vec{n}))$$

В результате, эффективная функция распределения будет изотропна.

$$f_{\text{эфф}}(u) = \int_{-1}^1 f(u^2 + u_0^2 - 2u_0 u \cdot x) \cdot \frac{dx}{2} \quad (2.1.7)$$

В нашей задаче мы возьмем нормальное распределение по скоростям темной материи

$$f(\vec{\xi}^2) = \frac{1}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\vec{\xi}^2}{2\xi_0^2}}$$

Итоговая функция распределения будет следующей

$$f(u) = \frac{e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2\xi_0^2}}}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} \text{thc}\left(\frac{2u_0u}{\xi_0^2}\right) \quad (2.1.8)$$

$$\text{thc}(x) = \frac{(1 - e^{-x})}{x}$$

Поскольку функция распределения однородная, то в (2.1.5) можно проинтегрировать по моменту импульса и получить конечное выражение для скорости захвата.

$$\frac{dC}{dt} = \rho_V \int dV f(u) \cdot \sigma_c^i n_i v^2 \cdot 4\pi u du \quad (2.1.9)$$

## 2.2. Описание процесса интегрирования.

Для интегрирования (2.1.9) будем использовать модель Солнца[] и Земли [], где задана таблица величин, зависящих от безразмерного радиуса  $\xi$ .

$$\xi = \frac{r}{R}$$

Для Солнца и Земли радиусы равны соответственно

$$R_C = 6.957 \cdot 10^8 \text{ м}$$

$$R_3 = 6.4 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Мы также введем безразмерную массу  $\mu$  и безразмерный потенциал  $\omega$ , равные отношению соответствующих величин к их значениям в

$$\mu = \frac{M(r)}{M_T}$$

$$\omega = \frac{\phi(r)}{\phi(R)}$$

Потенциалы на поверхности Солнца и Земли следующие

$$\phi_c(R) = 2.114 \cdot 10^{-6}$$

$$\phi_3(R) = 6.97 \cdot 10^{-10}$$

Из уравнения Пуассона находится безразмерный гравитационный потенциал внутри тела.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = - \frac{\mu}{\xi^2}$$

$$\omega = 1 + \int_{\xi}^1 \frac{\mu(\xi')}{\xi'^2} d\xi'$$

Скорость захвата  $v_{esc}$  выражается через безразмерный потенциал.

$$v_{esc} = \sqrt{2\phi} = v_{esc}^0 \sqrt{\omega}$$

где  $v_{esc}^0$  – скорость вылета на поверхности. Для Солнца и Земли это

$$v_{esc}^0 = 2.056 \cdot 10^{-3} \text{ (Солнце)} \quad (2.2.1)$$

$$v_{esc}^0 = 3.7336 \cdot 10^{-5} \text{ (Земля)} \quad (2.2.1')$$

Для интегрирования (2.1.9) будем использовать безразмерные параметры: радиус  $\xi$ , безразмерное сечение захвата на элементе  $\hat{\sigma}_i = \sigma_c / \sigma_0$  ( $\sigma_0$  – полное упругое сечение взаимодействия, посчитанное при скорости частицы ТМ на бесконечности равной  $u_0$ ), массовую долю элемента  $\alpha_i$ , безразмерную плотность вещества  $\hat{\rho} = \rho(r) / \langle \rho \rangle$  ( $\langle \rho \rangle$  – средняя плотность вещества) и массовое число ядер  $\mu_i$ . Тогда скорость захвата на  $i$ -ом элементе равна

$$\frac{dC_i}{dt} = \rho_V \cdot \sigma_0 \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\langle \rho \rangle}{m_{\text{нук}}} \right) \int 3\xi^2 d\xi \cdot f(u) \cdot \hat{\sigma}_i \frac{\alpha_i}{\mu_i} \hat{\rho} \frac{v^2 u}{u_0} \cdot 4\pi du^2$$

Этот интеграл будем считать численно в два этапа. Сначала находим безразмерную величину, характеризующую вероятность захвата при начальной скорости  $u$

$$\tilde{\sigma}_i(u) = \int 3\xi^2 d\xi \cdot \hat{\sigma}_i \alpha_i \hat{\rho} \cdot \frac{v^2}{u_0^2} \quad (2.2.2)$$

Данные для параметров сферического тела заданы в таблице, и мы будем их аппроксимировать кусочно-линейной функцией.  $\hat{\sigma}_i$  тоже будет задан в виде таблицы (матрицы), поэтому (2.2.2) будем интегрировать с помощью метода трапеций. Результатом будет одномерный массив.

Далее берем второй интеграл по скоростному распределению методом трапеций и получаем безразмерный фактор подавления.

$$\vartheta_i = \int f(u) \cdot \tilde{\sigma}_i(u) \cdot 4\pi u_0 u du$$

Скорость захвата выражается через  $\vartheta_i$ .

$$\frac{dC_i}{dt} = \rho_V \sigma_0^i \cdot \frac{M}{\mu_i m_{\text{нук}}} \cdot u_0 \cdot \vartheta_i \quad (2.2.3)$$

Из плотности темной материи равной  $0.4 \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3}$  можно найти концентрацию ТМ  $\rho_V$  зная ее массу. Запишем тогда для Солнца и Земли (2.2.3), подставив известные числа.

$$\frac{dC_i^C}{dt} = 1.2 \cdot 10^{28} \frac{\sigma_0^i}{\text{пбн}} \cdot \frac{\vartheta_i}{\mu_i \mu_k} \quad (2.2.4)$$

$$\frac{dC_i^3}{dt} = 3.5 \cdot 10^{22} \frac{\sigma_0^i}{\text{пбн}} \cdot \frac{\vartheta_i}{\mu_i \mu_k} \quad (2.2.4')$$

где  $\sigma_0^i$  – выражаются в пикобарнах, а  $\mu_k$  – отношение массы частицы ТМ к массе нуклона.

Скорость захвата на единицу объема Солнца и Земли тогда следующие

$$\frac{dC_i^C}{dt} = 0.83 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{см}^3} \frac{\sigma_0^i}{\text{пбн}} \cdot \frac{\vartheta_i}{\mu_i \mu_k} \quad (2.2.5)$$

$$\frac{dC_i^3}{dt} = 3.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{см}^3} \frac{\sigma_0^i}{\text{пбн}} \cdot \frac{\vartheta_i}{\mu_i \mu_k} \quad (2.2.5')$$