Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Факультет проблем физики и энергетики

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Рассеяние и захват частиц темной материи в Солнце.

Выполнил:
студент 783а группы

Товстун Артем Александрович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф.

____

Москва 2021

Содержание

Введение

1.Расчет сечения захвата

Сечение захвата в данной задаче – это характеристика, показывающая вероятность столкновения частицы темной материи с ядром и ее захватом небесным телом.

Для нахождения сечения захвата необходимо определить матричный элемент теории и проинтегрировать его по той части фазового объема, при котором частица темной материи переходит на стационарную орбиту.

1.1. Определение матричного элемента

Мы запишем лагранжиан теории, содержащую фермионы: частицу ТМ и нуклон, взаимодействующие при помощи четырёхточечной вершины, и электромагнитное поле.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(\gamma^{\mu}\left(i\,\partial_{\mu} - e_n A_{\mu}\right) - m_n\,\right)\psi + \\ +\bar{\chi}\left(i\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} - m_k\,\right)\chi - \bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

где ψ, m_n, χ, m_k – 4-х компонентные спиноры и массы мишени и частицы темной материи соответственно, $A_{\mu}, F^{\mu\nu}$ – вектор потенциал и тензор напряженности ЭМП, e_n – заряд нуклона.

Δ_1^a и Δ_{2a} – матрицы которые должны быть самосопряженными по Дираку, чтобы лагранжиан был вещественным.

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \Rightarrow (\bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi)^* = \bar{\psi}\overline{\Delta_1^a}\psi\bar{\chi}\overline{\Delta_{2a}}\chi = \bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi \Rightarrow \Delta_i^a = \overline{\Delta_i^a}$$

Возможные матрицы соответствуют взаимодействию через массивный и очень тяжелый скалярный или векторный бозон.

$$\Delta_i^a = \begin{cases}(a_i + i\gamma^5 b_i), & \text{скалярного взаимодействие} \\ \gamma^{\mu}(a_i - \gamma^5 b_i), & \text{векторное взаимодействие}\end{cases}$$

Сразу заметим, что если рассеивается не частица, а античастица темной материи (со входным и выходным импульсом $\hat{k}$ и $\hat{k}'$), то вычисления определялись бы лагранжианом преобразованным оператором $\hat{C}_k$ зарядового сопряжения ТМ.

$$\mathcal{L}^{C_k} = \hat{C}_k\mathcal{L}\hat{C}_k$$

Исходя из правил преобразования вершин [ППВ]

$$\hat{C}_k \bar{\chi}\chi \hat{C}_k = \bar{\chi}\chi, \qquad \hat{C}_k \bar{\chi}\gamma^5\chi \hat{C}_k = \bar{\chi}\gamma^5\chi,$$
$$\hat{C}_k \bar{\chi}\gamma^\mu\chi \hat{C}_k = -\bar{\chi}\gamma^\mu\chi, \qquad \hat{C}_k \bar{\chi}\gamma^\mu\gamma^5\chi \hat{C}_k = \bar{\chi}\gamma^\mu\gamma^5\chi$$

можно получить, что Δ_{2a} не изменится в скалярном взаимодействии, и изменится с $\gamma^\mu(a_2 - \gamma^5 b_2)$ на $-\gamma^\mu(a_2 + \gamma^5 b_2)$ в векторном случае. Что соответствует замене $a_2 \to -a_2$.

Сначала рассмотрим случай с одним нуклоном и скалярным взаимодействием. Матричный элемент упругого рассеяния тогда равен

$$i\mathcal{M}_0 = \bar{\psi}(p')\Delta_1^a\psi(p)\bar{\chi}(k')\Delta_{2a}\chi(k)$$

Квадрат матричного элемента находится после усреднения по спинам.

$$|\mathcal{M}_0|^2 = \frac{1}{4}tr\left[\left(\hat{k}' + m_k\right)\Delta_{2a}(k + m_k)\Delta_{2b}\right]tr[(\hat{p}' + m_k)\Delta_{1a}(p + m_k)\Delta_{1b}]$$

Для скалярного матричного элемента это дает

$$|\mathcal{M}_0|^2 = 4\left((a_2^2 + b_2^2)k'k + (a_2^2 - b_2^2)m_\chi^2\right)\left((a_1^2 + b_1^2)p'p + (a_1^2 - b_1^2)m_p^2\right) \quad (1.1.2)$$

В нерелятивистском случае существует несколько вариантов:

1) $a_1^2 \neq 0$ и $a_2^2 \neq 0$
$$\left|\mathcal{M}_0^{scal}\right|^2 = 16(a_1^2 a_2^2)m_p^2 m_k^2 \quad (1.1.3)$$
2) $a_1^2 = 0, a_2^2 \neq 0$
$$\left|\mathcal{M}_0^{scal}\right|^2 = 8b_1^2 a_2^2 m_p^2(-(k' - k)^2) \quad (1.1.3')$$
3) $a_1^2 = 0, a_2^2 = 0$
$$\left|\mathcal{M}_0^{scal}\right|^2 = 4b_1^2 b_2^2 (p' - p)^2 (k' - k)^2 \quad (1.1.3'')$$

В этих случаях дифференциальное сечение принимает следующий вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_{0N}}{4\pi} \quad (1.1.4)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_{0N}}{4\pi} \cdot \frac{\left(\vec{\mathrm{k}}' - \vec{\mathrm{k}}\right)^2}{2\vec{\mathrm{k}}_0^2} \tag{1.1.4'}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_{0N}}{4\pi} \cdot \frac{3\left(\vec{\mathrm{k}}' - \vec{\mathrm{k}}\right)^4}{16\vec{\mathrm{k}}_0^4} \tag{1.1.4''}$$

где σ_{0N} – полное сечение упругого взаимодействия с нуклоном, посчитанное при импульсе k_0 (который соответствует характерной скорости в задаче). Поскольку это неизвестная величина, то ответ будем выражать через него.

Неупругое рассеяние происходит при испускании нуклоном фотона (рисунок 1.1.1)

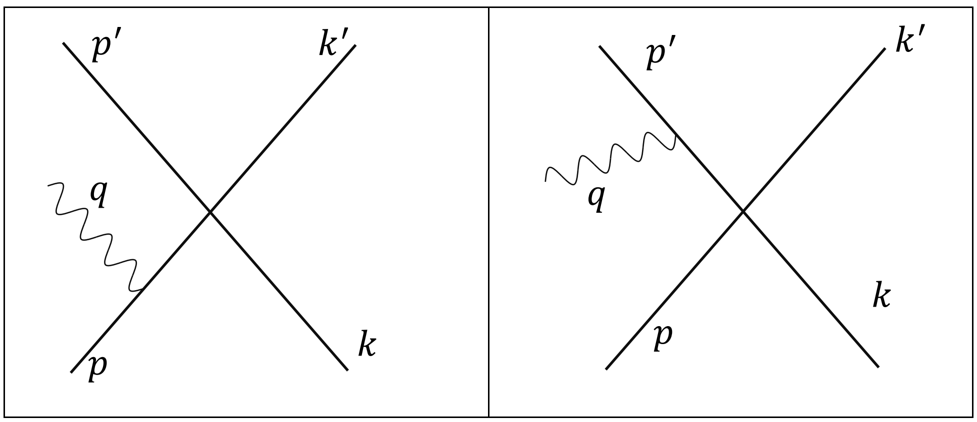

Рисунок 1.1.1

Квадрат матричного элемента в таком случае следующий

$$|\mathcal{M}|^2 = 4e^2\left((a_2^2 + b_2^2)k'k + (a_2^2 - b_2^2)m_k^2\right) \times$$
$$\times \left[\begin{array}{c} -\left(\frac{p'^{\mu}}{p'q} - \frac{p^{\mu}}{pq}\right)^2 \left\{(a_1^2 + b_1^2)p'p + (a_1^2 - b_1^2)m_p^2\right\} - \\ -\left(\frac{p'^{\mu}}{p'q} - \frac{p^{\mu}}{pq}\right)^2 (a_1^2 + b_1^2)(pq - p'q) + \\ +(a_1^2 + b_1^2)\left(\frac{1}{p'q} - \frac{1}{pq}\right)^2 \cdot pq \cdot p'q \end{array} \right]$$

Видно, что он состоит из трех частей, имеющих разную степень импульса фотона в знаменателе. Друг к другу они соотносятся по порядку величины как

$$\frac{\delta \mathrm{p}^2}{\mathrm{q}^2} : \frac{\delta \mathrm{p}}{\mathrm{q}} : 1$$

Как видно из формулы (1.2.1), каждое следующее слагаемое меньше следующего на величину порядка

$$v \cdot \frac{m_N + m_k}{m_N}$$

где v – скорость ТМ, поэтому в нерелятивистском случае в неупругом рассеянии будет преобладать исключительно мягкий вклад.

Далее необходимо получить сечение для ядра, исходя из сечения для нуклона. В таком случае нужно производить не усреднение по спинам ядра, а разложение спинора в нерелятивистском случае. Для спинора разлагаем известное решение в ряд Тейлора по импульсу.

$$\psi(p) = \sqrt{m} \cdot \left(1 + \gamma^5 \hat{\vec{S}} \frac{\vec{p}}{m}\right) \xi \tag{1.1.5}$$

где ξ – классический спинор, а $\hat{\vec{S}}$ – оператор спина. Тогда скалярное произведение спиноров будет следующим

$$\bar{\psi}(p')\psi(p) = m\xi'^T \left(1 + \gamma^5 \hat{\vec{S}} \frac{\vec{p}'}{m}\right) \gamma^0 \left(1 + \gamma^5 \hat{\vec{S}} \frac{\vec{p}}{m}\right) \xi = 2m \tag{1.1.6}$$

$$\bar{\psi}(p')\gamma^5\psi(p) = m\xi'^T \hat{\vec{S}} (\vec{p} - \vec{p}')\xi \tag{1.1.7}$$

Таким образом, можно считать, что нуклон и частица ТМ взаимодействуют с помощью потенциала $V(\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}')$ или $V(\vec{x})$. Для разных взаимодействий он будет иметь вид:

Вид взаимодействия	Потенциал
$G_{00}\bar{\psi}(p')\psi(p)\bar{\chi}(k')\chi(k)$	$4m_p m_k G_{00}$

$G_{01}\bar{\psi}(p')\psi(p)\bar{\chi}(k')\gamma^5\chi(k)$	$4m_p m_k G_{01}\hat{\vec{S}}_k\dfrac{\vec{q}}{m_k}$
$G_{01}\bar{\psi}(p')\gamma^5\psi(p)\bar{\chi}(k')\chi(k)$	$4m_p m_k G_{01}\hat{\vec{S}}_p\dfrac{\vec{q}}{m_k}$
$G_{11}\bar{\psi}(p')\gamma^5\psi(p)\bar{\chi}(k')\gamma^5\chi(k)$	$4m_p m_k G_{11}\hat{\vec{S}}_p\dfrac{\vec{q}}{m_k}\hat{\vec{S}}_k\dfrac{\vec{q}}{m_k}$

Таблица 1.1.1

Потенциал взаимодействия с ядром – это сумма потенциалов взаимодействия с нуклонами.

$$V(\vec{x}-\vec{x}_{\text{яд}}) = \sum V_N(\vec{x}-\vec{x}_N)$$

$$V(\vec{q}) = \sum V_N(\vec{q})\, e^{-i\vec{q}(\vec{x}_N-\vec{x}_{\text{яд}})}$$

Если переданные импульсы достаточно малы, то можно пренебречь экспоненциальным множителем. Тогда в потенциалах из таблицы 1 можно заменить массу нуклона на массу ядра (если предположить, что нейтроны и протоны взаимодействуют одинаково с ТМ) либо спин нуклона на спин ядра. Дифференциальное сечение тогда будет иметь тот же вид, что (1.1.4), только вместо σ_{0N} будет стоять $\sigma_{0\text{яд}}$.

Проблема зависящего от спина ядра потенциала заключается в том, что спин наиболее распространенных земных и солнечных элементов (кроме водорода) равен нулю. Поэтому полный захват будем изучать на спин независимом потенциале.

Выразим полное сечение рассеяния с ядром через сечение рассеяния на нуклоне.

$$\sigma_{0\text{яд}} = \sigma_{0N}\cdot\frac{N^2(1+\mu_k)}{(N+\mu_k)} \tag{1.1.8}$$

где N – число нуклонов в ядре, μ_k – отношение массы частицы ТМ к массе нуклона.

1.2. Кинематика и дифференциальное сечение.

Сечение находится из матричного элемента по формуле[PDG]

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(pk)^2 - m_p^2 m_k^2}} d\Phi$$

$$d\Phi = (2\pi)\delta\big(E_f - E_i\big) \times \frac{1}{2E_{p'}} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2\mathrm{q}} \times \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}$$

где $\vec{k}', E_{k'}$ – импульс и энергия вылетающей частицы, $\vec{q}$, q – импульс и энергия фотона, $E_{p'}$ – приобретаемая энергия мишени. Интеграл будем брать в системе центра масс (рисунок 1), где кинематика относительно простая.

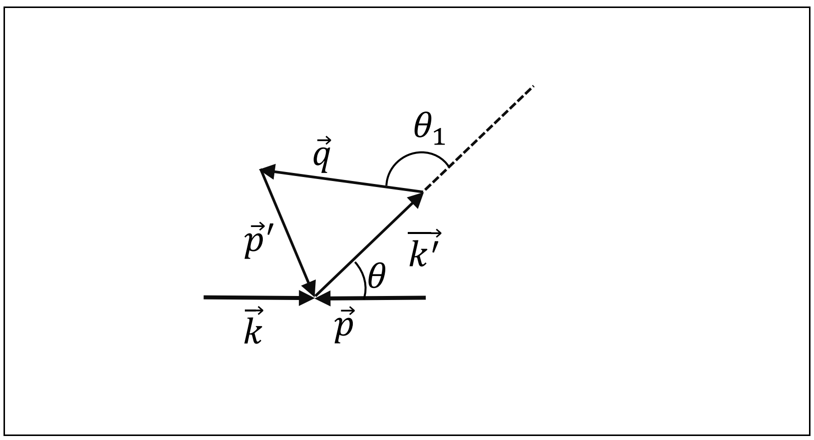

Рисунок 1.2.1

В сферических координатах фазовый объем и телесные углы равны

$$d\Phi = \int \frac{\mathrm{k}'^2 q}{4E_{k'}} \times (2\pi)\delta\big(E_f - E_i\big) \times \frac{1}{2E_{p'}} \times \frac{d\Omega_q}{(2\pi)^3} \times \frac{d\Omega_{k'}}{(2\pi)^3} d\mathrm{k}' d\mathrm{q}$$

$$d\Omega_{k'} = 2\pi\, d\cos\theta$$

$$d\Omega_q = d\cos\theta_1\, d\varphi_1$$

При этом телесный угол $d\Omega_q$ отсчитывается не от оси $z \parallel \vec{k}$, а от $\vec{k}'$, а телесный угол $d\Omega_{k'} = 2\pi\, d\cos\theta$, если матричный элемент инвариантен относительно вращений вокруг оси z.

Введя систему координат, связанную с вектором $\vec{k}'$, находим выражение для импульса фотона и ядра из закона сохранения импульса.

$$\vec{k}' = \mathrm{k}'(\sin\theta, 0, \cos\theta)^T = \mathrm{k}'\vec{e}_3'$$

$$\vec{e}_1' = (\cos\theta, 0, -\sin\theta)^T$$

$$\vec{e}_2' = \vec{e}_2 = (0,1,0)^T$$

$$\vec{q} = \mathrm{q}\vec{n}_q = \mathrm{q}(\cos\theta_1\,\vec{e}_3' + \sin\theta_1\sin\varphi_1\,\vec{e}_2' + \sin\theta_1\cos\varphi_1\,\vec{e}_1')$$

$$\vec{p}' = -\vec{q} - \vec{k}'$$

Далее дельта функция снимается с помощью интегрирования по энергии фотона

$$\frac{\delta(E_f - E_i)}{2E_{p'}}\,d\mathrm{q} = d\mathrm{q}\frac{\delta\left(\mathrm{q} + \sqrt{m_p^2 + \mathrm{p}'^2(\mathrm{q})} - E_{\text{ци}} + E_{k'}\right)}{2E_{p'}} = \frac{1}{2(E_{p'} + \mathrm{q} + \mathrm{k}'\cos\theta_1)}$$

А из закона сохранения энергии и импульса находится импульс фотона.

$$q + \sqrt{m_p^2 + \mathrm{p}'^2} + \sqrt{m_k^2 + \mathrm{k}'^2} = E_{\text{ци}}$$

$$\mathrm{p}'^2 = \mathrm{k}'^2 + \mathrm{q}^2 + 2\mathrm{q}\mathrm{k}'\cos\theta_1$$

$$q(\cos\theta_1) = \frac{E_{\text{ци}}(E_k - E_{k'})}{(E_k - E_{k'}) + E_p + \mathrm{k}'\cos\theta_1} \qquad (1.2.1)$$

Итого дифференциальное сечение в системе центра масс выражается следующим образом

$$\frac{d\sigma}{\mathrm{d}^3\vec{k}'} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\mathrm{k}E_{\text{ци}}}\cdot\frac{E_{\text{ци}}(E_k - E_{k'})}{8E_{k'}\left((E_k - E_{k'}) + E_p + \mathrm{k}'\cos\theta_1\right)^2\cdot(2\pi)^5}\,d\Omega_q \qquad (1.2.2)$$

Видно, что при неупругом соударении в системе центра масс выходящий импульс k' пробегает весь шар радиуса k, а не только его границу. Интегрирование по телесному углу фотона не содержит никакой сингулярности, поэтому его можно проводить численно с помощью схемы сколь угодно высокого порядка, например, методом гаусса.

1.3. Сечение при малых импульсах фотона.

При испускании мягкого фотона с бесконечно малой энергией учитывается только инфракрасно расходящийся вклад матричного элемента равный

$$-Z^2 e^2 \left(\frac{v'^{\mu}}{v'q} - \frac{v^{\mu}}{vq}\right)^2 |\mathcal{M}_0|^2(p'(q), k'(q), p, k)$$

где $|\mathcal{M}_0|^2$ – матричный элемент упругого рассеяния.

Если ввести малую массу фотона μ[ПШКТП], сделать замену и ввести обозначения

$$\mathrm{q} = \mu \operatorname{sh}\phi = x, \qquad \sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2} = \mu \operatorname{ch}\phi = y, \qquad \frac{\mathrm{q}}{\sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2}} = \operatorname{th}\phi = t \tag{1.3.1}$$

$$\vec{q} = \mathrm{q} \cdot \vec{n}_q \tag{1.3.1'}$$

то сечение процесса с испусканием фотона будет иметь следующий вид

$$d\sigma_\gamma = \int_0^{\epsilon} \frac{dx}{y} \cdot f(y, t) \tag{1.3.2}$$

Но так как матричный элемент и фазовый объем – непрерывно дифференцируемые функции по импульсам p' и k', которые при малых импульсах фотона являются гладкими по y и t, потому что задаются в неявном виде с помощью функции, производные которой не ноль и не бесконечность

$$F(\mathrm{k}', y, t) = y + \sqrt{m_p^2 + p'^2(\mathrm{k}', yt, \cos\theta_1)} + \sqrt{m_k^2 + \mathrm{k}'^2} - E_{\text{ци}} = 0$$

$$F'_{k'} = \frac{\mathrm{k}'}{E_{k'}} + \frac{\mathrm{k}' + \mathrm{q} \cdot \cos\theta_1}{E_{p'}} \geq \frac{\mathrm{k}}{2}\left(\frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_k}\right) = c_0$$

$$F'_y = 1 + \frac{t^2 y + t k' \cos\theta_1}{E_{p'}} < 1 + \frac{2\mathrm{k}}{E_p} = c_1$$

из чего следует, что $\partial k'/\partial y = F'_y/F'_{k'} < \infty$, то есть k' - гладкая функция (y,t) при $(y,t) \in \ [0,\epsilon] \times [0,1]$, значит функция из $(1.3.2)$ – гладкая и имеет константу Липшица C_f по переменной y. Следовательно, интеграл $(1.3.2)$ можно представить в виде суммы его упрощенного варианта, где $y = 0$, и добавки D_2, стремящейся к нулю с первым по ϵ порядку.

$$(2) = \int_0^{\epsilon} \frac{dx}{y} \cdot f(0,t) + D_2 \qquad (1.3.2')$$

$$|D_2| = \left| \int_0^{\epsilon} \frac{dx}{y} \cdot \big(f(y,t) - f(0,t)\big) \right| \leq \int_0^{\epsilon} \frac{dx}{y} \cdot yC_f = \epsilon C_f$$

Далее, в интеграле $(1.3.2')$ проводим замену переменных $(1.3.1)$

$$\int_0^{\ln\left(\frac{2\epsilon}{\mu}\right)} d\phi \cdot f(0, \operatorname{th}\phi)$$

и выделяем расходящуюся часть, приравняв $\operatorname{th}\phi$ к единице и проделав похожие рассуждения с константой Липшица по аргументу t. Поэтому расходящаяся часть сечения имеет вид

$$d\sigma_\gamma^{\text{расх}} = f(0,1) \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \qquad (1.3.3)$$

В итоге $(1.3.3)$ переходит при подстановки фазового объема и матричного элемента в следующее выражение

$$d\sigma_\gamma^{\text{расх}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \int -\frac{d\Omega_q}{4\pi} \left(\frac{v'^{\mu}}{v'_0 - \vec{v}'\vec{n}_q} - \frac{v^{\mu}}{v_0 - \vec{v}\vec{n}_q}\right)^2$$

Этот интеграл берется с помощью техники усреднения по телесному углу и параметров Фейнмана.

$$\int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \frac{v'v}{\big(v'_0 - \vec{v}'\vec{n}_q\big)\big(v_0 - \vec{v}\vec{n}_q\big)} =$$

$$\int_0^1 dx \frac{d\Omega_q}{4\pi} \frac{v'v}{\left(xv_0' + (1-x)v_0 - \left(\vec{v}'x + \vec{v}(1-x)\right)\vec{n}_q\right)^2} \qquad (1.3.4)$$

Зная, как проводится усреднение по телесному углу,

$$\int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \frac{1}{\left(A - \vec{\mathrm{n}}_q \vec{B}\right)^2} = \frac{1}{A^2 - \vec{B}^2}$$

получаем значение интеграла (1.3.4).

$$\int_0^1 dx \, \frac{v'v}{(xv_0' + (1-x)v_0)^2 - \left(\vec{v}'x + \vec{v}(1-x)\right)^2} =$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{v'v}{\sqrt{(v'v)^2 - 1}} \ln\left(\frac{v'v + \sqrt{(v'v)^2 - 1}}{v'v - \sqrt{(v'v)^2 - 1}}\right)$$

Мягкая часть сечения равна известному результату [Вайнберг]

$$d\sigma_\gamma^{\text{расх}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \cdot W(x) \qquad (1.3.5)$$

Где $W(x)$ и x равны следующим выражениям

$$W(x) = \left(\frac{1}{x} \ln\frac{(1+x)}{(1-x)} - 2\right)$$

$$x = \frac{\sqrt{(v'v)^2 - 1}}{(v'v)}$$

В нерелятивистском приближении они равны соответственно

$$W(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{5}x^4 + \cdots$$

$$x = \sqrt{(\vec{v}' - \vec{v})^2}$$

Известно [ПШ], что петлевой вклад в упругом сечении сокращает расходимость, тогда регуляризованные массой фотона упругое и неупругое сечения имеют соответственно вид

$$d\sigma_\gamma^{\text{упругое}} = d\sigma_0 \cdot \left(1 + \frac{Z^2\alpha}{\pi}\ln\left(\frac{\mu}{m}\right) \cdot W(x)\right)$$
$$d\sigma_\gamma^{\text{неупругое}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2\alpha}{\pi}\ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) \cdot W(x)$$

Хотя сумма сечений не расходится, однако нельзя строго разделить упругое сечение и неупругое – результат будет зависеть от μ. Это отражает тот факт, что экспериментально невозможно отличить чисто упругое рассеяние и неупругое с бесконечно маленьким импульсом фотона. Поэтому корректно считать неупругими лишь те столкновения, где кинематика нисколько не задевает упругую часть.

Далее, продифференцировав $(1.3.5)$ по ϵ, получаем в нерелятивистском случае выражение для неупругого сечение, которое совпадает с [СТАТЬЯ].

$$d\sigma_\gamma^{\text{неупругое}} = d\sigma_0 \cdot \frac{Z^2\alpha}{\pi} \cdot \frac{dq}{q} \cdot \frac{2}{3}(\vec{v}' - \vec{v})^2 \tag{1.3.6}$$

Также, используя результаты выше, можно в нерелятивистском случае выразить интеграл по телесному углу в формуле $(1.2.1)$.

$$\frac{d\sigma}{\mathrm{d}^3\vec{k}'} = \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{64\mathrm{k}E_{\text{ци}}^2 \cdot \pi^3} \cdot \frac{Z^2\alpha W(x)}{E_{k'}(E_k - E_{k'})}$$

1.4. Кинематика захвата и сечение.

Захваченной частица считается в том случае, если ее энергия станет менее чем гравитационный барьер небесного тела. Это условие эквивалентно тому, что скорость частицы в лабораторной системе отсчета станет меньше чем скорость вылета ($v'_{\text{ЛСО}} \leq v_{esc}$), которая выражается через гравитационный потенциал $\phi(r)$.

$$v_{esc} = \sqrt{2\phi(r)} \tag{1.4.1}$$

Изобразим условие захвата на рисунке 2 (в лабораторной СО и в системе центра масс). Зеленым цветом закрашена область возможного выходного импульса, а красным – область, при в которой происходит захват. Для нахождения сечения захвата необходимо проинтегрировать дифференциальное сечение по пересечению красной и зеленой области.

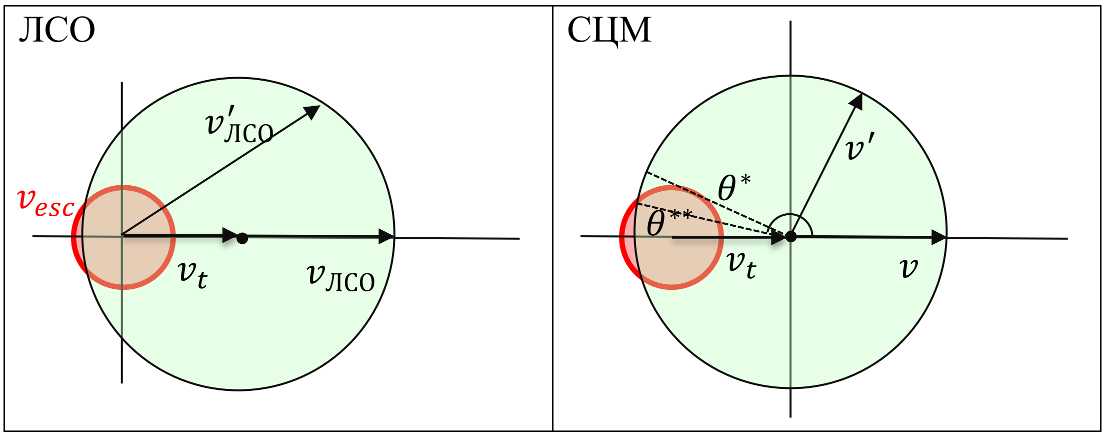

Рисунок 1.4.1

В системе центра масс скорость частицы ТМ равна v

$$v = \frac{m_p}{m_p + m_k} v_{ЛСО} \tag{1.4.2}$$

Расстояние от центра красной сферы захвата до центра мисс равно v_t

$$v_t = v_{ЛСО} - v = \frac{m_k}{m_p + m_k} v_{ЛСО} \tag{1.4.3}$$

В системе центра масс условие захвата выглядит следующим образом

$$(\vec{v}' + \vec{v}_t)^2 < v_{esc}^2 \Leftrightarrow v'^2 + v' v_t \cos\theta' + v_t^2 < v_{esc}^2 \tag{1.4.4}$$

Существует несколько вариантов расположения двух сфер:

1) При $v_t + v_{esc} \leq v$ – красная сфера внутри зеленой. Происходит неупругий процесс.
2) При $v_t + v_{esc} \geq v,\ v + v_{esc} \geq v_t$ – упругое столкновение. Неупругий вклад не учитывается из соображений в предыдущем разделе.
3) При $v_t \geq v_{esc} + v$ – частица ТМ не замечает ядро и не захватывается.

Как мы выяснили в предыдущем разделе, для упругого сечения захвата нужно проинтегрировать дифференциальное по переменной $\cos\theta$ от -1 до $\cos\theta^{**}$, который находится из (1.4.4).

$$\cos\theta^{**} = \frac{v_{esc}^2 - v_t^2 - v^2}{v v_t} \quad (1.4.5)$$

Для неупругого случая можно интегрировать дифференциальное сечение в сферическое системе координат, связанной с красным шаром.

$$\sigma_c = \int_0^{m_k v_{esc}} 2\pi k_e'^2 dk_e' d\cos\theta_e \cdot \frac{d\sigma}{d^3\vec{k}'} \quad (1.4.6)$$

Импульс k' и $\cos\theta$ через вспомогательный импульс k_e' и косинус $\cos\theta_e$ выражаются следующим образом:

$$k'^2 = k_e'^2 + k_t^2 - 2k_e' k_t \cdot \cos\theta_e$$

$$\cos\theta' = \frac{k_e'\cos\theta_e - k_t}{k'}$$

1.5. Влияние температуры.

При ненулевой температуре красная сфера смещается и может попасть на границу зеленой, тогда происходит упругий захват. Из-за температуры происходит и испарение.

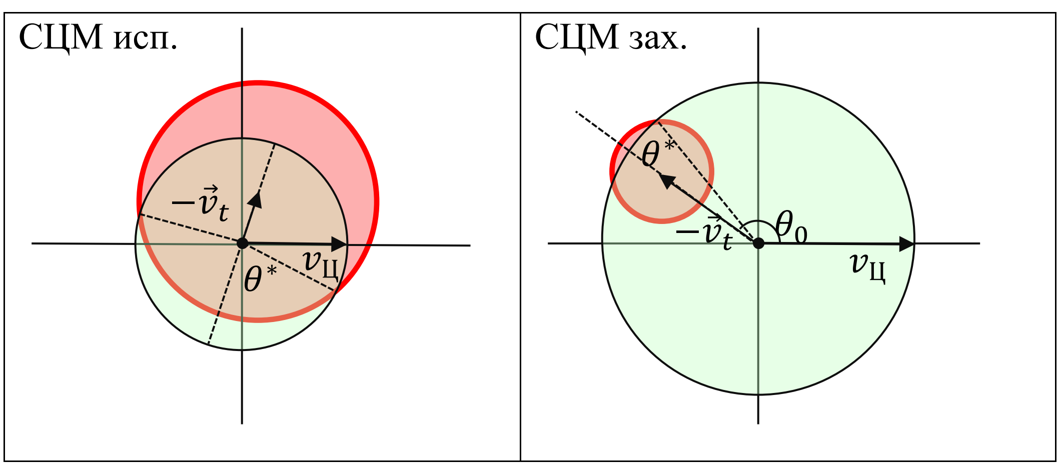

Рисунок 1.5.1

Если $\vec{w}$ – скорость ядра, а $\vec{v}$ – частицы ТМ, то скорость переноса (1.4.3) и скорость в системе центра масс изменятся, а между ними появляется угол θ_0.

$$\vec{v}_t = \frac{m_p \vec{w} + m_k \vec{v}}{m_p + m_k} \tag{1.5.1}$$

$$\vec{v}_Ц = \vec{v} - \vec{v}_t = \frac{m_p}{m_p + m_k}(\vec{v} - \vec{w}) \tag{1.5.2}$$

$$\cos\theta_0 = -\frac{\vec{v}_t \vec{v}_Ц}{v_Ц v_t}$$

Упругое столкновение происходит, как мы выяснили выше, при $v_{esc} > |v_Ц - v_t|$. Если раскрыть модуль и найти предельные при постоянных модулях скоростей случаи, достигающиеся при коллинеарных векторах $\vec{w}$ и $\vec{v}$, то мы получим ограничения модуля скорости ядра, при котором происходит температурное взаимодействие.

$$w > \frac{m_p + m_k}{2 \cdot m_p} \cdot \left(\left| \frac{m_p - m_k}{m_p + m_k} \right| v - v_{esc} \right) \tag{1.5.3}$$

$$w > \frac{m_p + m_k}{2 \cdot m_p} \cdot (v_{esc} - v) \tag{1.5.4}$$

С помощью отрицания (1.5.3) можно получить условие, при котором не происходит упругого захвата.

$$\frac{v_{esc}}{v_{ЛСО}} \le \left| \frac{m_k - m_p}{m_p + m_k} \right| - 2 \frac{m_p}{m_p + m_k} \frac{w}{v_{ЛСО}} \tag{1.5.3'}$$

Для Солнца при характерных скоростях ТМ u_0 (2.1.6), $v_{ЛСО}$ близко к v_{esc}, поэтому, разлагая его в ряд Тейлора, получится условие неупругости захвата

$$\left(\frac{u_0}{v_{esc}}\right)^2 \ge 4 \left(\frac{m_k}{m_p + m_k} + \frac{m_p}{m_p + m_k} \frac{w}{v_{esc}} \right)$$

$$0.1 \gtrsim \frac{m_k}{m_p + m_k} + \frac{m_p}{m_p + m_k} \frac{w}{v_{esc}}$$

Это условие не мажет быть выполнено в интересующих нас массах и при Солнечных температурных скоростях. Поэтому на Солнце неупругий процесс не вносит никакого вклада в захват.

Для Земли (1.5.3′) выполняется, когда массы ядра и частицы ТМ различаются.

Сечение для процесса с температурой будем брать методом Монте-Карло, поскольку пределы интегрирования сложны, а подынтегральные выражения не гладкие функции.

Частично сечение можно посчитать и аналитически. Для этого в системе центра масс нужно перейти в сферические координаты относительно вектора $-\vec{v}_t$, выразить угол вылета θ'(угол между вектором конечной скорости и начальной) через θ''(угол между вектором конечной скорости и скорости переноса $-\vec{v}_t$).

$$\cos\theta' = \cos\theta''\cos\theta_0 - \sin\theta''\sin\theta_0\cos\varphi$$

Тогда в формуле для сечения интегрируем по φ от 0 до 2π, а $\cos\theta'$ от 1 до $\cos\theta^*$ в случае захвата и от -1 до $\cos\theta^*$ в случае испарения.

$$\cos\theta^* = \frac{v_t^2 + v_{\text{Ц}}^2 - v_{esc}^2}{2v_t v_{\text{Ц}}}$$

Если сечение взаимодействия имеет следующий вид

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta'} = A(v_{\text{Ц}}) \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{1-\cos\theta'}{2}\right)^n$$

то сечение захвата или испарения мы представим в следующем виде:

$$\sigma_c = A(v) \cdot \tilde{\sigma}_c$$

где $\tilde{\sigma}_c$ – безразмерный множитель, приведенный в таблице ниже и выраженный через переменные x и y, равные

$$x = \frac{1-\cos\theta^*}{2}, \qquad y = \frac{1+\cos\theta^*}{2}$$

n	захват	испарение
0	x	y
1	$x\cdot(1-y\cos\theta_0)$	$y(1+x\cos\theta_0)$
2	$x\cdot\left(1-y\left(\frac{3}{2}\cos\theta_0+\frac{3}{4}\cos^2\theta_0-\frac{1}{4}+y\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta_0-\frac{1}{2}\right)\right)\right)$	$y\cdot\left(1+x\left(\frac{3}{2}\cos\theta_0-\frac{3}{4}\cos^2\theta_0+\frac{1}{4}+x\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta_0-\frac{1}{2}\right)\right)\right)$

Таблица 1.5.1

Для того, чтобы получить эффективное сечение захвата, как в неупругом случае (т.е. вероятность процесса на единицу времени равна $\sigma_c n v$), нужно проинтегрировать по температурному распределению ядер сечение, полученное выше.

$$\sigma_c^{\text{эфф}}=\int\frac{d^3\vec{w}}{(2\pi w_T^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{-\frac{\vec{w}^2}{2w_T^2}}\cdot\sigma_c(v,v_{esc},\vec{w})\cdot\frac{|\vec{v}-\vec{w}|}{v}\qquad(1.5.5)$$

Этот интеграл мы будем брать методом Монте-Карло. Направление вектора $\vec{w}$ находится с помощью сферического распределения, когда косинус угла $\theta_{\vec{w}}$ распределен равномерно от -1 до 1. Модуль вектора $\vec{w}$ мы разыграем со следующим генератором:

$$\frac{w}{w_T}=\sqrt{-2\ln\left(e^{-\frac{w_m^2}{2w_T^2}}\cdot\mathrm{rand}(0..1)\right)}$$

где w_m – минимальная скорость из $(1.5.3)$ или $(1.5.4)$, а $\mathrm{rand}(0..1)$ – рандомное число от нуля до единицы.

Поскольку плотность распределения в таком распределении следующая

$$dw\,\frac{w}{w_T^2}e^{-\frac{w^2}{2w_T^2}}$$

то для взятия интеграла (1.5.5) методом Монте-Карло нужно еще до множить подынтегральную функцию на множитель ниже и найти среднее значение итоговой функции в случайных точках.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{w_T}e^{-\frac{w_m^2}{2w_T^2}}$$

2.Расчет скорости захвата

Если $\sigma_c^i = \sigma_c^i(v, v_{esc})$ – сечение захвата на частице определенного сорта, то вероятность захвата на такой частице за единицу времени выражается через концентрацию элемента сорта i.

$$\frac{dP}{dt} = \sigma_c^i(v, v_{esc}) \cdot n_i \cdot v \tag{2.1}$$

где n_i – концентрация элемента сорта i.

Для нахождения скорости захвата нужно проинтегрировать (2.1) по фазовой плотности $\rho(\vec{x}, \vec{v})$ (распределение частиц по скоростям и координатам).

$$\frac{dC}{dt} = \int \rho(\vec{x}, \vec{v}) d^3\vec{x} d^3\vec{v} \cdot \sigma_c^i n_i v \tag{2.2}$$

Если по индексу i ведется суммирование, то (2.2) – полная скорость захвата, иначе – скорость захвата на конкретном элементе.

2.1. Определение фазовой плотности частиц ТМ.

Фазовая плотность удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана [], которое следует из закона сохранения частиц (что верно при малом взаимодействии частиц ТМ) и теоремы Лиувилля. Предположим, что ρ имеет стационарное распределение, в итоге стационарное уравнение будет следующим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial\vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial\vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \tag{2.1.1}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}, \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla\phi \tag{2.1.2}$$

здесь ϕ – это гравитационный потенциал с обратным знаком (т.е. его модуль).

Мы не будем учитывать неоднородности сферического тела по угловым координатам, поэтому уравнения движения и фазовая плотность зависит только от трех переменных: скорость v, радиус r и угол θ_v (рисунок 3).

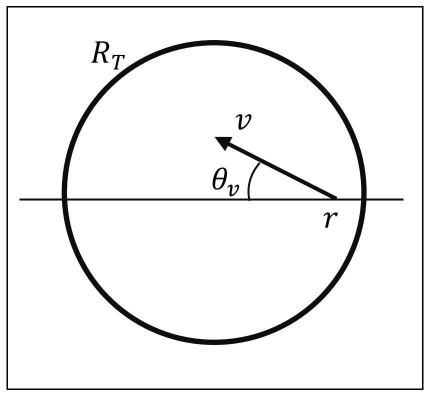

Рисунок 2.1.1

Известно [] , что решением линейного уравнения первого порядка с тремя переменными – функция, зависящая от двух первых интегралов движения (2.1.2) частицы в центральном поле. Это уравнение имеет два известных интеграла – энергия и момент импульса (мы будем брать их на единицу массы).

$$u^2 = v^2 - 2\phi, \qquad L = rv\sin\theta_v \tag{2.1.3}$$

$$\rho = \rho(u^2, L) \tag{2.1.4}$$

В этих переменных фазовый объем будет следующим

$$d\Phi = d^3\vec{x}d^3\vec{v} = dV \cdot \frac{\pi}{\sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}}} du^2 \frac{dL^2}{r^2} \tag{2.1.5}$$

Для решения (2.1.4) осталось определить граничные условия вдали от тела, где фазовая плотность ТМ состоит из постоянной плотности ρ_V и плотности распределения по скоростям $f(\vec{u})$.

$$\rho(r=\infty,\vec{u}) = \rho_V \cdot f(\vec{u})$$

Если $f(\vec{u})$ – однородно распределена, то ответ найден

$$\rho(r,v,L) = \rho_V \cdot f\left(\sqrt{v^2 - 2\phi}\right) = \rho_V \cdot f(u)$$

Иной случай возникает, когда тело движется относительно гало ТМ со скоростью $\vec{u}_0$ (скорость вращения Солнечной системы вокруг центра галактики).

$$u_0 = 230\,\frac{\text{км}}{\text{с}} = 0.7667 \cdot 10^{-3} \qquad (2.1.6)$$

А вот внутри гало ТМ распределена однородно и выражается через скорость $\vec{\xi} = \vec{u} - \vec{u}_0$

$$f(\vec{u})d^3\vec{u} = f(\xi^2)d^3\vec{\xi}$$

Для того, чтобы найти $f(u, L)$, необходимо усреднить по углу θ_0 (рисунок 4), определяющего положение частицы (рисунок) и углу φ, указывающего на направление скорости частицы в полярных координатах репера $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Тогда можно найти координаты вектора $\vec{\xi}$ и его модуль.

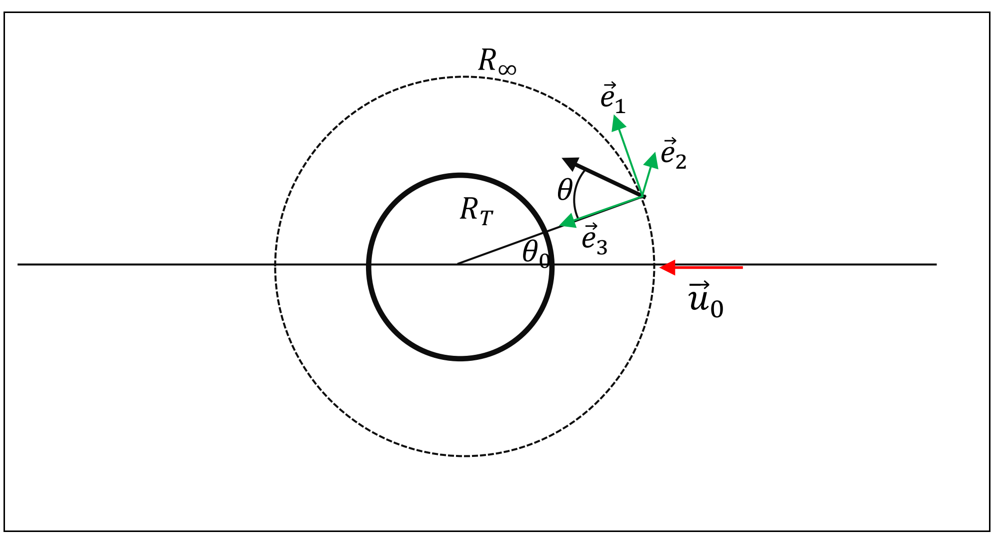

Рисунок 2.1.2

$$\xi^2 = u_\theta^2 + u_r^2 + u_0^2 - 2u_0(u\cos\theta\cos\theta_0 + u\sin\theta\cos\varphi\sin\theta_0)$$

$$f(u,L) = \int \frac{d\cos\theta_0\, d\varphi}{4\pi} f(\xi^2)$$

Если заметить, что $d\cos\theta_0\, d\varphi$ – это телесный угол $d\Omega$, который проходится вектором $\vec{n} = (\cos\theta_0\,, \cos\varphi\sin\theta_0\,, \sin\varphi\sin\theta_0)^T$ и ввести вектор $\vec{y} = (\cos\theta\,, \sin\theta\,, 0)$, то усреднение будет следующим

$$f(u,L) = \int d^2\vec{n} f(u^2 + u_0^2 - 2u_0 u(\vec{y}\vec{n}))$$

В результате, эффективная функция распределения будет изотропна.

$$f_{\text{эфф}}(u) = \int\limits_{-1}^{1} f(u^2 + u_0^2 - 2u_0 u \cdot x) \cdot \frac{dx}{2} \tag{2.1.7}$$

В нашей задаче мы возьмем нормальное распределение по скоростям темной материи

$$f(\vec{\xi}^2) = \frac{1}{(2\pi\xi_0)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\vec{\xi}^2}{2\xi_0^2}}$$

Итоговая функция распределения будет следующей

$$f(u) = \frac{e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2\xi_0^2}}}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{thc}\left(\frac{2u_0 u}{\xi_0^2}\right) \tag{2.1.8}$$

$$\operatorname{thc}(x) = \frac{(1 - e^{-x})}{x}$$

Поскольку функция распределения однородная, то в (2.1.5) можно проинтегрировать по моменту импульса и получить конечное выражение для скорости захвата.

$$\frac{dC}{dt} = \rho_V \int dV f(u) \cdot \sigma_c^i n_i v^2 \cdot 4\pi u du \tag{2.1.9}$$

2.2. Описание процесса интегрирования.

Для интегрирования (2.1.9) будем использовать модель Солнца[] и Земли [], где задана таблица величин, зависящих от безразмерного радиуса ξ.

$$\xi = \frac{r}{R}$$

Для Солнца и Земли радиусы равны соответственно

$$R_{\text{С}} = 6.957 \cdot 10^{8}\text{м}$$

$$R_{\text{З}} = 6.4 \cdot 10^{6}\text{м}$$

Мы также введем безразмерную массу μ и безразмерный потенциал ω, равные отношению соответствующих величин к их значениям в

$$\mu = \frac{M(r)}{M_T}$$

$$\omega = \frac{\phi(r)}{\phi(R)}$$

Потенциалы на поверхности Солнца и Земли следующие

$$\phi_{\text{С}}(R) = 2.114 \cdot 10^{-6}$$

$$\phi_{\text{З}}(R) = 6.97 \cdot 10^{-10}$$

Из уравнения Пуассона находится безразмерный гравитационный потенциал внутри тела.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = -\frac{\mu}{\xi^2}$$

$$\omega = 1 + \int_{\xi}^{1} \frac{\mu(\xi')}{\xi'^2} d\xi'$$

Скорость захвата v_{esc} выражается через безразмерный потенциал.

$$v_{esc} = \sqrt{2\phi} = v_{esc}^0 \sqrt{\omega}$$

где v_{esc}^0 – скорость вылета на поверхности. Для Солнца и Земли это

$$v_{esc}^0 = 2.056 \cdot 10^{-3} \text{ (Солнце)} \tag{2.2.1}$$

$$v_{esc}^0 = 3.7336 \cdot 10^{-5} \text{ (Земля)} \tag{2.2.1$'$}$$

Для интегрирования (2.1.9) будем использовать безразмерные параметры: радиус ξ, безразмерное сечение захвата на элементе $\hat{\sigma}_i = \sigma_c/\sigma_0$ (σ_0 – полное упругое сечение взаимодействия, посчитанное при скорости частицы ТМ на бесконечности равной u_0), массовую долю элемента α_i, безразмерную плотность вещества $\hat{\rho} = \rho(r)/\langle\rho\rangle$ ($\langle\rho\rangle$ – средняя плотность вещества) и массовое число ядер N. Тогда скорость захвата на i-ом элементе равна

$$\frac{dC_i}{dt} = \rho_V \cdot \sigma_0 \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\langle\rho\rangle}{m_{\text{нук}}} \right) \int 3\xi^2 d\xi \cdot f(u) \cdot \hat{\sigma}_i \frac{\alpha_i}{N}\, \hat{\rho}\, \frac{v^2 u}{u_0} \cdot 4\pi du^2$$

Этот интеграл будем считать численно в два этапа. Сначала находим безразмерную величину, характеризующую вероятность захвата при начальной скорости u

$$\tilde{\sigma}_i(u) = \int 3\xi^2 d\xi \cdot \hat{\sigma}_i \alpha_i \hat{\rho} \cdot \frac{v^2}{u_0^2} \tag{2.2.2}$$

Данные для параметров сферического тела заданы в таблице, и мы будем их аппроксимировать кусочно-линейной функцией. $\hat{\sigma}_i$ тоже будет задан в виде таблицы (матрицы), поэтому (2.2.2) будем интегрировать с помощью метода трапеций. Результатом будет одномерный массив.

Далее берем второй интеграл по скоростному распределению методом трапеций и получаем безразмерный фактор подавления.

$$\vartheta_i = \int f(u) \cdot \tilde{\sigma}_i(u) \cdot 4\pi u_0 u du$$

Скорость захвата выражается через ϑ_i.

$$\frac{dC_i}{dt} = \rho_V \sigma_0^i \cdot \frac{M}{N m_{\text{нук}}} \cdot u_0 \cdot \vartheta_i \tag{2.2.3}$$

Из плотности темной материи равной $0.4\,\frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3}$ можно найти концентрацию ТМ ρ_V зная ее массу. Запишем тогда для Солнца и Земли (2.2.3), подставив известные числа.

$$\frac{dC_i^C}{dt}\left[\frac{1}{\text{с}}\right] = 1.2\cdot 10^{28}\sigma_0^i[\text{пбн}]\cdot\frac{\vartheta_i}{N\mu_k} \tag{2.2.4}$$

$$\frac{dC_i^З}{dt}\left[\frac{1}{\text{с}}\right] = 3.5\cdot 10^{22}\sigma_0^i[\text{пбн}]\cdot\frac{\vartheta_i}{N\mu_k} \tag{2.2.4$'$}$$

где σ_0^i – выражаются в пикобарнах, а μ_k – отношение массы частицы ТМ к массе нуклона.

Скорость захвата на единицу объема Солнца и Земли тогда следующие

$$\frac{dC_i^C}{dt}\left[\frac{1}{\text{год}}\right] = 2.6\cdot 10^{2}\,\frac{1}{\text{см}^3}\,\sigma_0^i[\text{пбн}]\cdot\frac{\vartheta_i}{N\mu_k} \tag{2.2.5}$$

$$\frac{dC_i^З}{dt}\left[\frac{1}{\text{год}}\right] = 10\cdot 10^{2}\,\frac{1}{\text{см}^3}\,\sigma_0^i[\text{пбн}]\cdot\frac{\vartheta_i}{N\mu_k} \tag{2.2.5$'$}$$

Если выразить сечение взаимодействия на ядре (1.1.8), то (2.2.3) изменится на

$$\frac{dC}{dt} = \sigma_{0N}\cdot\left[\rho_{0.4\text{ГэВ}}\cdot\frac{M}{m_{\text{нук}}}\cdot u_0\right]\cdot P \tag{2.2.6}$$

$$P = \sum_{\text{ядрам}}\frac{N(1+\mu_k)}{(N+\mu_k)\mu_k}\vartheta_N \tag{2.2.7}$$

Величина сечения на нуклоне неизвестна, выражение в квадратных скобках (2.2.6) – это число в формуле (2.2.4) или (2.2.5), а величина P – будет искомой в данной задаче.

3.Результаты расчета.

Построим графики, на которых изображено отношение скорости захвата при учете температуры к скорости захвата без учета температуры для самых легких элементов (для них максимальная температурная скорость) Солнца (рисунок 3.1а) и Земли (рисунок 3.1б).

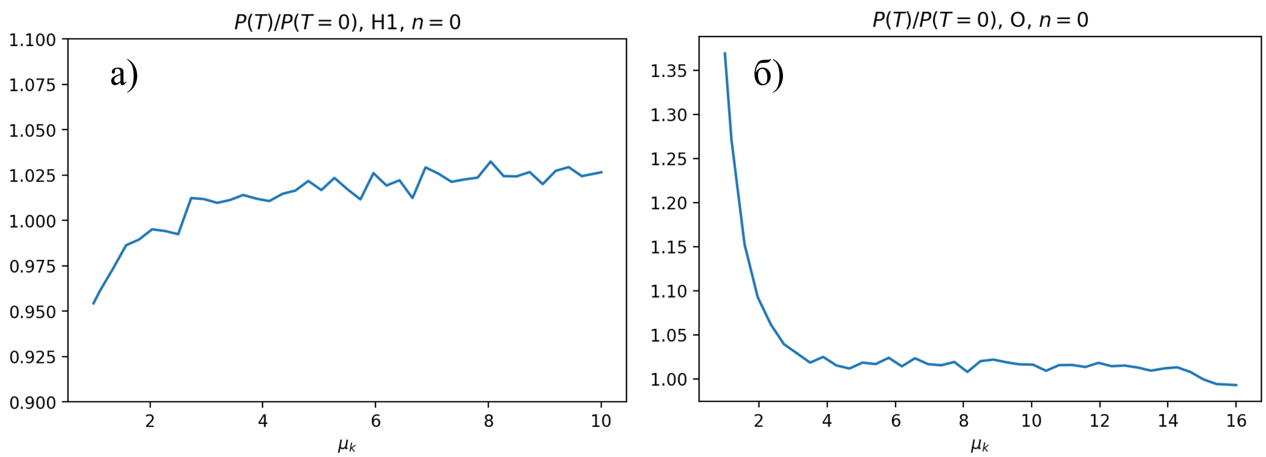

Рисунок 3.1

Видно, что в Солнце температура незначительно (не более 5%) влияет на захват. Для Земли влияние температуры есть только при очень маленьких массах частицы ТМ, притом, изменения не очень большие. Таком образом, температура неспособна значительно сместить кинематику захвата из неупругой области в упругую.

Ниже представлены графики величины P из $(2.2.7)$ на солнце и при упругом сечении нулевого типа $(1.1.4)$ (рисунок 3.2а) и первого типа $(1.1.4')$ (рисунок 3.2б), величины P на земле для упругого сечения нулевого и первого типа (рисунок 3.3а,б), и отношению неупругой скорости захвата (или P) к упругой на земле для сечений нулевого и первого типов (рисунок 3.4а,б).

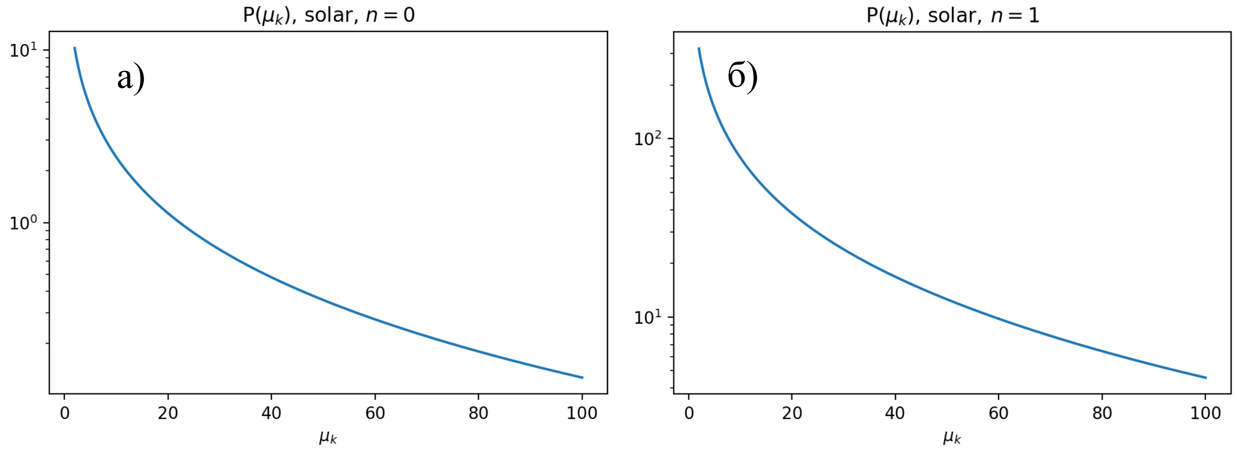

Рисунок 3.2

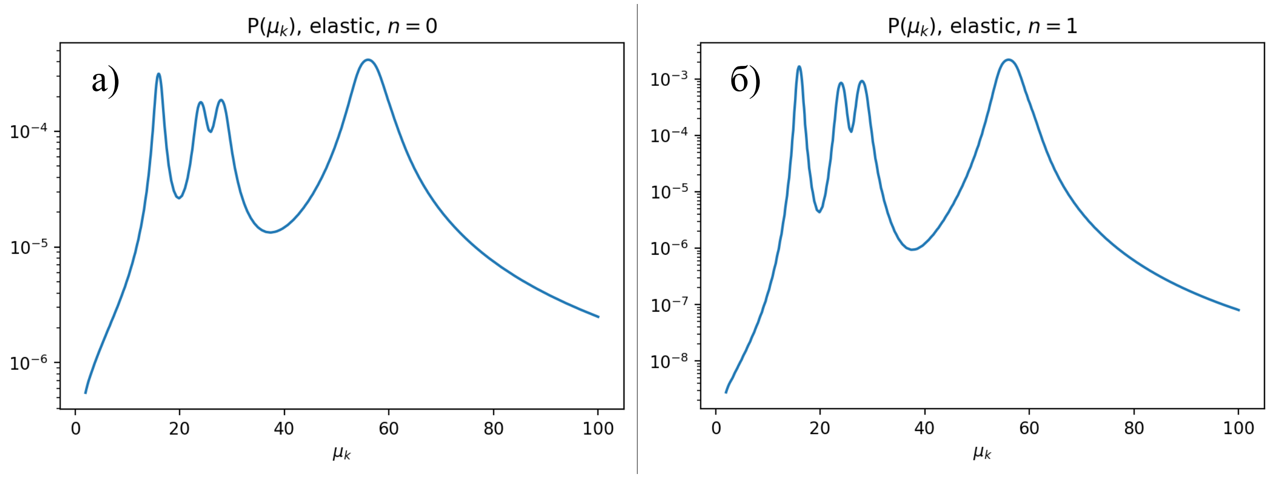

Рисунок 3.3

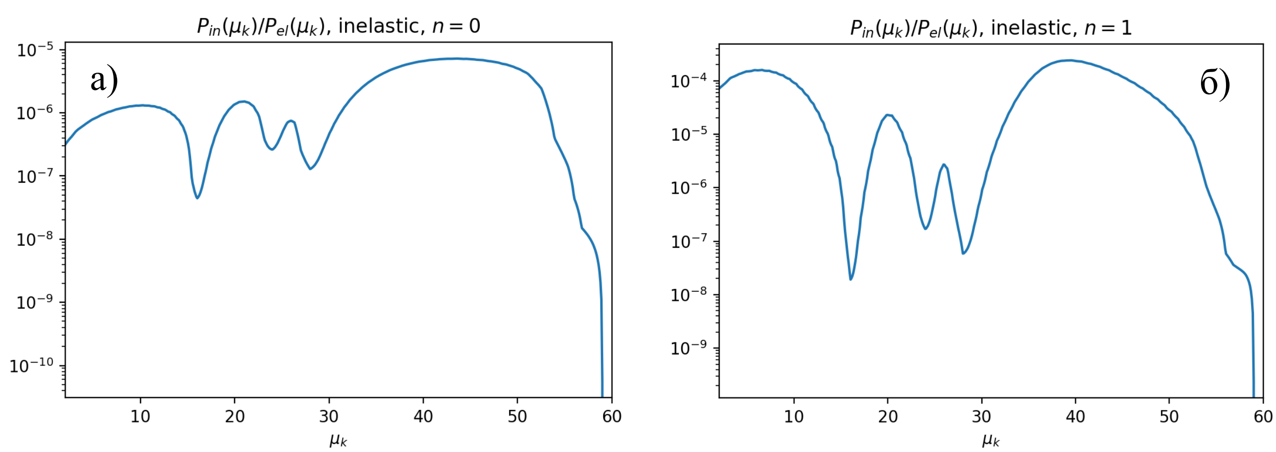

Рисунок 3.4