Неупругий захват частиц темной материи. Скорость захвата.

Скорость захвата частиц темной материи – это количество частиц темной материи за единицу времени, приобретающих энергию меньшую, чем гравитационная яма. Обозначать будем следующим образом:

$$\frac{dC}{dt} \tag{1}$$

Для нахождения скорости захвата необходимо найти соответствующее сечение и распределение частиц внутри сферического тела.

Расчет сечения захвата.

1) Лагранжиан теории.

Мы будем рассматривать теорию с ферменным полем мишени (атом вещества), взаимодействующего с электромагнитным полем, и ферменным полем частицы темной материи, взаимодействующего с мишенью по аналогу теории Ферми (Получается отинтегрированием массивного скалярного/векторного поля)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\big(\gamma^{\mu}\big(i\,\partial_{\mu} - eA_{\mu}\big) - m_p\big)\psi + \bar{\chi}\big(i\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} - m_k\big)\chi - \bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi \tag{2}$$

Где ψ, m_p, χ, m_k – 4-х компонентные спиноры и массы мишени и частицы темной материи соответственно, $A_\mu, F^{\mu\nu}$ – вектор потенциал и тензор напряженности ЭМП.

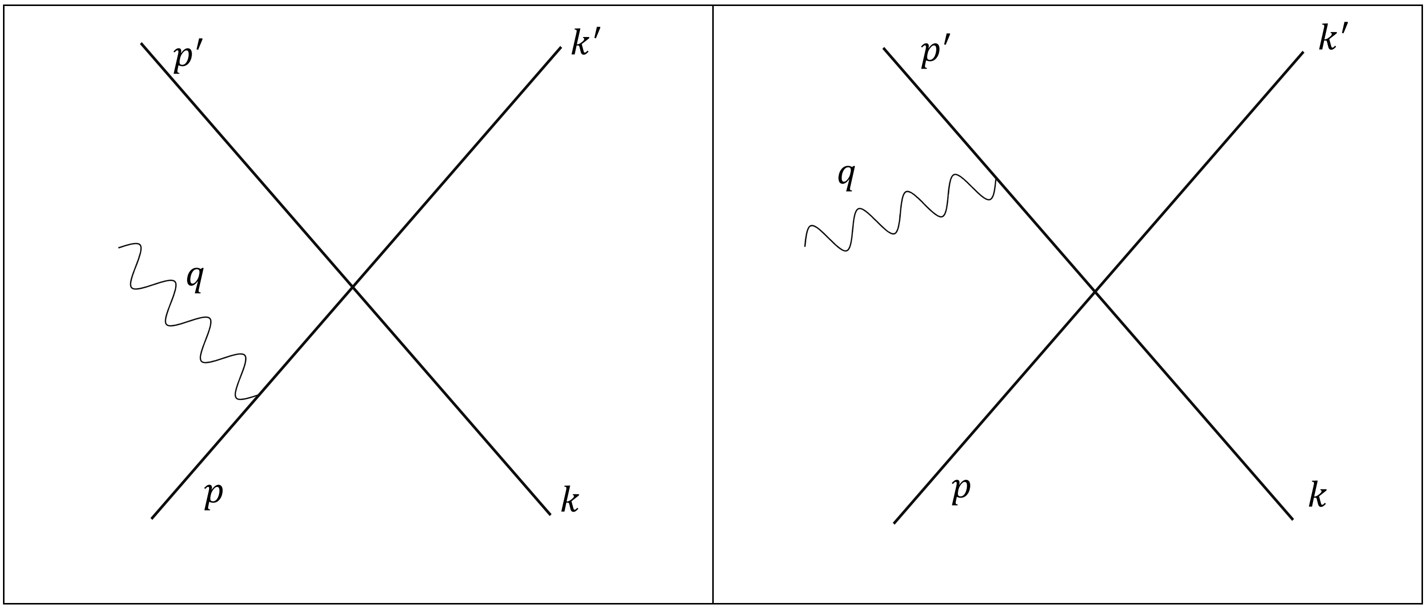
Матрицы Δ_1^a и Δ_{2a} должны быть самосопряженными по Дираку, чтобы лагранжиан был вещественным.

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \Rightarrow (\bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi)^* = \bar{\psi}\overline{\Delta_1^a}\psi\bar{\chi}\overline{\Delta_{2a}}\chi = \bar{\psi}\Delta_1^a\psi\bar{\chi}\Delta_{2a}\chi \Rightarrow \Delta_i^a = \overline{\Delta_i^a}$$

Тогда они будут иметь вид:

$$\Delta_i^a = \begin{cases} (a_i + i\gamma^5 b_i), & \text{скалярного взаимодействие} \\ \gamma^{\mu}(a_i - \gamma^5 b_i), & \text{векторное взаимодействие} \end{cases}$$

В неупругом взаимодействии рассеивается фотон. Нарисуем соответствующую диаграмму Фейнмана (Буквами обозначены соответствующие импульсы частиц)



Начальное и конечное состояние обозначим образом:

$$|p,k\rangle, |p',k',q\rangle$$

Сразу заметим, что если рассеивается не частица, а античастица темной материи (со входным и выходным импульсом $\hat{k}$ и $\hat{k}'$), то вычисления определялись бы зарядово сопряженным лагранжианом. Если $\hat{C}_k$ – оператор зарядового сопряжения частицы темной материи, то сопряженный лагранжиан равен.

$$\mathcal{L}^{C_k} = \hat{C}_k \mathcal{L} \hat{C}_k$$

Тогда изменение действия теории будет только во взаимодействующем члене.

$$\hat{C}_k \bar{\psi} \Delta_1^a \psi \bar{\chi} \Delta_{2a} \chi \hat{C}_k = [\bar{\psi} \Delta_1^a \psi] \hat{C}_k [\bar{\chi} \Delta_{2a} \chi] \hat{C}_k$$

Поскольку

$$\hat{C}_k \bar{\chi} \chi \hat{C}_k = \bar{\chi} \chi, \qquad \hat{C}_k \bar{\chi} \gamma^5 \chi \hat{C}_k = \bar{\chi} \gamma^5 \chi,$$
$$\hat{C}_k \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \hat{C}_k = -\bar{\chi} \gamma^\mu \chi, \qquad \hat{C}_k \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma^5 \chi \hat{C}_k = \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma^5 \chi$$

то Δ_{2a} не изменится в скалярном взаимодействии, и изменится с $\gamma^\mu(a_2 - \gamma^5 b_2)$ на $-\gamma^\mu(a_2 + \gamma^5 b_2)$ в векторном случае. Что соответствует замене $a_2 \to -a_2$

Матричный элемент упругого рассеяния равен

$$i\mathcal{M}_0 = \bar{\psi}(p')\Delta_1^a\psi(p)\bar{\chi}(k')\Delta_{2a}\chi(k)$$

Будем обозначать входящий/выходящий спинор как поле с индексом импульса.

Для модуля квадрата получаем:

$$|\mathcal{M}|^2 = \bar{\psi}(p')\Delta_1^a\psi(p)\bar{\chi}(k')\Delta_{2a}\chi(k)\bar{\chi}(k)\Delta_{2b}\chi(k')\bar{\psi}(p)\Delta_1^b\psi(p')$$

Усредняем по спинам:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}tr\left[\left(\hat{k}' + m_k\right)\Delta_{2a}(k + m_k)\Delta_{2b}\right]tr[(\hat{p}' + m_k)\Delta_{1a}(p + m_k)\Delta_{1b}]$$

Итог (для векторного и скалярного случая):

$$\left|\mathcal{M}_0^{scal}\right|^2 = 4\left((a_2^2 + b_2^2)k'k + (a_2^2 - b_2^2)m_\chi^2\right)\left((a_1^2 + b_1^2)p'p + (a_1^2 - b_1^2)m_p^2\right)$$

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_0^{vec}|^2 = 8\{&(a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)[(k'p)(kp') + (k'p')(kp)] \\ &+ (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)\left[2m_p^2m_k^2\right] \\ &- (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)\left[(k'k)m_p^2\right] - (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)[(p'p)m_k^2] \\ &+ 4a_1a_2b_1b_2[(k'p')(kp) - (k'p)(kp')]\}\end{aligned}$$

В нерелятивистском случае векторный матричный элемент равен

$$|\mathcal{M}_0^{vec}|^2 = 16(a_1^2a_2^2 + 3b_1^2b_2^2)m_p^2m_k^2$$

То есть он является константой при любых параметрах.

Скалярный элемент выражается почти также

$$\left|\mathcal{M}_0^{scal}\right|^2 = 16(a_1^2a_2^2)m_p^2m_k^2$$

В случае, если $a_1^2 = 0$ или $a_2^2 = 0$ матричный элемент принимает один из видов

$$\left|\mathcal{M}_0^{scal}\right|^2 = 8b_2^2a_1^2m_p^2(-(k' - k)^2)$$

$$\left|\mathcal{M}_0^{scal}\right|^2 = 8b_1^2a_2^2m_k^2(-(p' - p)^2)$$

$$\left|\mathcal{M}_0^{scal}\right|^2 = 4b_1^2b_2^2(p' - p)^2(k' - k)^2$$

Дифференциальное сечение упругого процесса выражается следующим образом

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{64\pi^2E_{\text{ЦМ}}^2}$$

Полное сечение σ_0 равно соответственно

$$\frac{(a_1^2a_2^2+3b_1^2b_2^2)m_p^2m_k^2}{\pi\left(m_p+m_k\right)^2}, \qquad \frac{(a_1^2a_2^2)m_p^2m_k^2}{\pi\left(m_p+m_k\right)^2}$$

$$\frac{\left(2b_2^2a_1^2m_p^2\vec{\mathrm{k}}^2 \text{ или } 2b_1^2a_2^2m_k^2\vec{\mathrm{p}}^2\right)}{\pi\left(m_p+m_k\right)^2}, \qquad \frac{8b_1^2b_2^2\vec{\mathrm{k}}^2\vec{\mathrm{p}}^2}{3\pi\left(m_p+m_k\right)^2}$$

Выразим матричный элемент через полное сечение. Он будет иметь вид

$$|\mathcal{M}_0^0|^2 = 16\pi E_{\text{ЦМ}}^2\sigma_0$$

$$|\mathcal{M}_0^{10}|^2 = 4\pi E_{\text{ЦМ}}^2\sigma_0\frac{\left(\vec{\mathrm{k}}'-\vec{\mathrm{k}}\right)^2}{\vec{\mathrm{k}}_0^2}, \qquad |\mathcal{M}_0^{01}|^2 = 4\pi E_{\text{ЦМ}}^2\sigma_0\frac{(\vec{\mathrm{p}}'-\vec{\mathrm{p}})^2}{\vec{\mathrm{p}}_0^2}$$

$$|\mathcal{M}_0^2|^2 = \frac{3\pi}{2}E_{\text{ЦМ}}^2\sigma_0\frac{\left(\vec{\mathrm{k}}'-\vec{\mathrm{k}}\right)^2}{\vec{\mathrm{k}}_0^2}\frac{(\vec{\mathrm{p}}'-\vec{\mathrm{p}})^2}{\vec{\mathrm{p}}_0^2}$$

σ_0 зависит от масс и считается при определенном импульсе.

В случае испускания фотона матричный элемент усложняется

$$i\mathcal{M} = \bar{\psi}(p')\Delta_1^a \cdot \frac{i\left(\hat{p}-\hat{q}+m_p\right)}{(p-q)^2-m_p^2} \cdot e\epsilon_\mu^*(q)\gamma^\mu \cdot \psi(p)\bar{\chi}(k')\Delta_{2a}\chi(k) +$$

$$\bar{\psi}(p') \cdot e\epsilon_\mu^*(q)\gamma^\mu \cdot \frac{i\left(\hat{p}'+\hat{q}+m_p\right)}{(p'+q)^2-m_p^2} \cdot \Delta_1^a\psi(p)\bar{\chi}(k')\Delta_{2a}\chi(k)$$

Учитывая, что $\left(\hat{p}+m_p\right)\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu(\hat{p}-m_p)$ при этом $\left(\hat{p}-m_p\right)\psi(p) = 0$, получаем

$$i\mathcal{M} = \bar{\chi}(k')\Delta_{2a}\chi(k) \times \left[\begin{array}{c} \left\{\dfrac{p'^\mu}{p'q} - \dfrac{p^\mu}{pq}\right\} e\epsilon_\mu^* \cdot \bar{\psi}(p')\Delta_1^a\psi(p) + \\ \bar{\psi}(p')\left(\dfrac{e\epsilon_\mu^*\gamma^\mu\hat{q}\Delta_1^a}{2p'q} + \dfrac{e\Delta_1^a\epsilon_\mu^*\hat{q}\gamma^\mu}{2pq}\right)\psi(p) \end{array}\right]$$

В скалярном случае $\gamma^\mu\hat{q}\Delta_1^a = \Delta_1^a\gamma^\mu\hat{q} = -\Delta_1^a\hat{q}\gamma^\mu$. Последнее равенство условное и получается из тождества Уорда ($\epsilon_\mu^* q^\mu = 0$). Тогда последнее слагаемое существенно упростится.

$$i\mathcal{M} = \bar{\chi}(k')\Delta_{2a}\chi(k) \times \left[\begin{array}{c} \left\{\dfrac{p'^\mu}{p'q} - \dfrac{p^\mu}{pq}\right\} e\epsilon_\mu^* \cdot \bar{\psi}(p')\Delta_1^a\psi(p) + \\ \bar{\psi}(p')\left(\dfrac{1}{2p'q} - \dfrac{1}{2pq}\right) e\epsilon_\mu^*\gamma^\mu\hat{q}\Delta_1^a\psi(p) \end{array}\right]$$

Далее усредняем, делаем замену $\epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \to -g_{\mu\nu}$(из тождества Уорда) и в скалярном случае не учитываем вклады, получающиеся из γ^5, которые имеют вид $\epsilon^{a_1 a_2 a_3 a_4} p_{a_1}^1 p_{a_2}^2 p_{a_3}^3 p_{a_4}^4$, поскольку $p_{a_i}^i$ можно составить только из p, p', q, то есть там будут повторения и такие слагаемые обнулятся. Так в скалярном случае получается матричный элемент:

$$|\mathcal{M}|^2 = 4e^2 \left((a_2^2 + b_2^2) k'k + (a_2^2 - b_2^2) m_\chi^2 \right) \times$$

$$\times \left[-\left(\frac{p'^\mu}{p'q} - \frac{p^\mu}{pq} \right)^2 \left(\{ (a_1^2 + b_1^2) p'p + (a_1^2 - b_1^2) m_p^2 \} + (a_1^2 + b_1^2)(pq - p'q) \right) \right.$$

$$\left. + (a_1^2 + b_1^2) \left(\frac{1}{p'q} - \frac{1}{pq} \right)^2 \cdot pq \cdot p'q \right]$$

Обратим внимание, что матричный элемент состоит из трех частей, которые имеют следующие по порядку величины:

$$\frac{(\delta \mathrm{p})^2}{m^2 \mathrm{q}^2} \cdot (\mathrm{p}^2 \text{ или } m^2), \qquad \frac{(\delta \mathrm{p})^2}{\mathrm{q} m^2} \delta \mathrm{p}, \qquad \frac{(\delta \mathrm{p})^2}{m^2} \ (\delta \vec{\mathrm{p}} = \vec{\mathrm{p}}' - \vec{\mathrm{p}})$$

И относятся друг к другу как

$$\frac{\delta \mathrm{p}^2}{q^2} : \frac{\delta \mathrm{p}}{q} : 1$$

Но поскольку в нерелятивистском случае $q \sim \frac{\delta \mathrm{p}^2}{m} \sim \frac{\mathrm{p} \delta \mathrm{p}}{m}$, то главным слагаемым будет первое, а остальные можно будет не учитывать.

2) Сечение и кинематика.

Сечение – это интеграл матричного элемента по всему выходному фазовому объему.

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(pk)^2 - m_p^2 m_k^2}} d\Phi$$

$$dd\Phi = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p_f - \sum p_i \right) \times \prod \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p_f^2 - m_f^2)$$

Где p_f – выходные 4-импульсы, p_i – входные, то есть p', k', q.

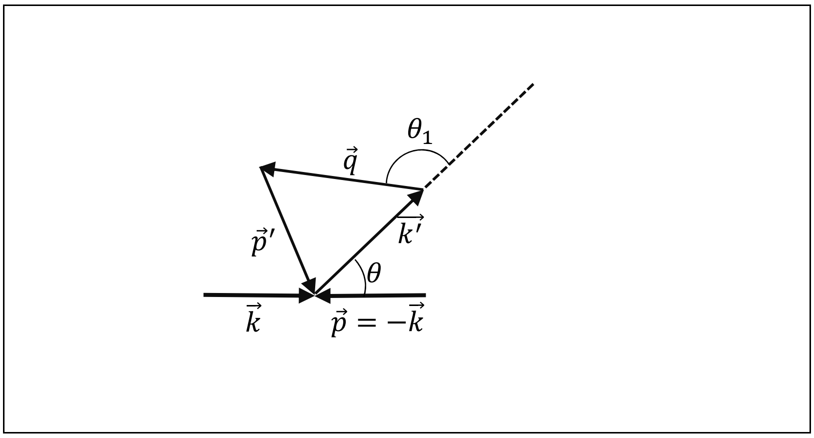
Нам нужно отинтегрировать все кроме выходного импульса частицы темной материи.

Дельта функции массовой поверхности и дельта функции от закона сохранения импульса легко снимаются, и остается

$$d\Phi = (2\pi)\delta\left(E_f - E_i\right) \times \frac{1}{2E_{p'}} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2\mathrm{q}} \times \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}$$

Где $\vec{k}', E_{k'}$ – импульс и энергия вылетающей частицы, $\vec{q}, \mathrm{q}$ – импульс и энергия фотона, $E_{p'}$ – приобретаемая энергия мишени.

Далее нужно перейти в систему центра инерции, где $\vec{p} + \vec{k} = \vec{p}' + \vec{k}' + \vec{q} = 0$. Изобразим это на рисунке.



Перейдем к сферическим координатам в фазовом объеме. Тогда получим

$$d\Phi = \int \frac{k'^2 q}{4E_{k'}} \times (2\pi)\delta\left(E_f - E_i\right) \times \frac{1}{2E_{p'}} \times \frac{d\Omega_q}{(2\pi)^3} \times \frac{d\Omega_{k'}}{(2\pi)^3} d\mathrm{k}' d\mathrm{q}$$

$$d\Omega_{k'} = 2\pi\, d\cos\theta$$

$$d\Omega_q = d\cos\theta_1\, d\varphi_1$$

Тут стоит отметить, что телесный угол $d\Omega_q$ отсчитывается не от оси $z \perp \vec{k}$, а от $\vec{k}'$, при этом в телесный угол $d\Omega_{k'} = 2\pi\, d\cos\theta$, поскольку матричный элемент инвариантен относительно вращений вокруг оси z.

Таким образом вектор $\vec{k}'$ равен

$$\vec{k}' = \mathrm{k}'(\sin\theta, 0, \cos\theta)^T = \mathrm{k}'\vec{e}_3'$$

Тогда для задания $d\Omega_q$ нужно дополнить $\vec{e}_3'$ до ортогонального базиса.

Вектор $\vec{e}_2'$ возьмем равным $\vec{e}_2 = (0,1,0)^T$, а $\vec{e}_1' = (\cos\theta, 0, -\sin\theta)^T$. Тогда получаем, что

$$\vec{n}_q = \cos\theta_1\,\vec{e}_3' + \sin\theta_1 \sin\varphi_1\,\vec{e}_2' + \sin\theta_1\cos\varphi_1\,\vec{e}_1'$$

$$\vec{q} = \mathrm{q}\vec{n}_q = \mathrm{q}(\cos\theta_1 \cdot \sin\theta + \sin\theta_1 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \cos\theta\,, \qquad \sin\theta_1 \sin\varphi_1\,,$$
$$\cos\theta_1 \cdot \cos\theta - \sin\theta_1 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \sin\theta)$$

Вектор $\vec{p}' = -\vec{q} - \vec{k}'$ – выражается из закона сохранения импульса.

Теперь можно снять последнюю дельта функцию. Можно было бы это делать с помощью переменной $\cos\theta_1$, однако это бы привело к плохому поведению, когда обнулялся либо k' либо q. Поэтому будем снимать интегрирование с помощью q.

$$\frac{\delta\left(E_f - E_i\right)}{2E_{p'}}\,d\mathrm{q} = d\mathrm{q}\frac{\delta\left(\mathrm{q} + \sqrt{m_p^2 + \mathrm{p}'^2(\mathrm{q})} - E_{\text{ци}} + E_{k'}\right)}{2E_{p'}} = \frac{1}{2(E_{p'} + \mathrm{q} + \mathrm{k}'\cos\theta_1)}$$

Это следует из того, что $p'^2(q) = k'^2 + q^2 + 2qk'\cos\theta_1$.

Сам же q находится из закона сохранения энергии.

$$q + \sqrt{m_p^2 + \mathrm{p}'^2} + \sqrt{m_k^2 + \mathrm{k}'^2} = E_{\text{ци}}$$

$$\mathrm{p}'^2 = \mathrm{k}'^2 + \mathrm{q}^2 + 2\mathrm{qk}'\cos\theta_1$$

И получается

$$q(\cos\theta_1) = \frac{E_{\text{ци}}(E_k - E_{k'})}{(E_k - E_{k'}) + E_p + k'\cos\theta_1} \tag{q}$$

В итоге мы получаем следующий фазовый объем

$$d\Phi = \frac{E_{\text{ци}}(E_k - E_{k'})}{8E_{k'}\left((E_k - E_{k'}) + E_p + \mathrm{k}'\cos\theta_1\right)^2 \cdot (2\pi)^5}\,d\Omega_q k'^2 dk' d\Omega_{k'}$$

Сечение равно

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(pk)^2 - m_p^2 m_k^2}}\,d\Phi$$

В системе центра масс этот корень можно выразить как

$$\sqrt{(pk)^2 - m_p^2 m_k^2} = \sqrt{\left(E_p E_k + \mathrm{k}^2\right)^2 - \left(E_p^2 - \mathrm{k}^2\right)(E_k^2 - \mathrm{k}^2)} = \sqrt{\mathrm{k}^2\left(E_p + E_k\right)^2} = \mathrm{k}E_{\text{ци}}$$

Тогда

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\mathrm{k}E_{\text{ци}}} d\Phi$$

3) Сечение при малых q. Устранение инфракрасной расходимости.

Для регуляризации вводится фиктивная масса фотона. Учитывается только расходящийся член равный

$$-e^2\left(\frac{p'^{\mu}}{p'q} - \frac{p^{\mu}}{pq}\right)^2 |\mathcal{M}_0|^2(p'(q), k'(q), p, k)$$

Где $|\mathcal{M}_0|^2$ – матричный элемент упругого рассеяния.

Устранить расходимость можно, интегрируя q до достаточно малого параметра ϵ. В таком случае можно не учитывать усложнение кинематики. Покажем это. Общее сечение и фазовый объем равны

$$-\frac{e^2}{4\mathrm{k}E_{\text{ци}}}\left(\frac{p'^{\mu}}{p'q} - \frac{p^{\mu}}{pq}\right)^2 |\mathcal{M}_0|^2(p'(q), k'(q), p, k) d\Phi$$

$$d\Phi = (2\pi)\delta\left(E_f - E_i\right) \times \frac{1}{2E_{p'}} \frac{\mathrm{q}^2 d\mathrm{q} d\Omega_q}{(2\pi)^3 2E_q} \times \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}$$

Если учесть фиктивную массу фотона μ, то получим

$$d\sigma_\gamma = \frac{\mathrm{q}^2 d\mathrm{q}}{(\mathrm{q}^2+\mu^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{p'^{\mu}}{E_{p'} - \vec{p}'\frac{\vec{q}}{\sqrt{\mathrm{q}^2+\mu^2}}} - \frac{p^{\mu}}{E_p - \vec{p}\frac{\vec{q}}{\sqrt{\mathrm{q}^2+\mu^2}}}\right)^2 \cdot \ldots$$

$$d\sigma_\gamma = \frac{\mathrm{q}^2 d\mathrm{q}}{(\mathrm{q}^2+\mu^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot f\left(\frac{\mathrm{q}}{\sqrt{\mathrm{q}^2+\mu^2}}, \sqrt{\mathrm{q}^2+\mu^2}\right)$$

Интеграл по q от 0 до ϵ будет равен

$$A \cdot \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right) + B$$

Но если $f(x,y)$ является гладкой функцией на $[0,1) \times [0,\epsilon]$, то

$$\left|\iint f(x,y) - \int f(x,0)\right| \le C_f \cdot \epsilon, \qquad C_f = \max_{x,y}\left|f'_y\right|$$

И C_f тогда является ограниченной константой не зависящей от μ, поэтому в функции f можно заменить второй аргумент на ноль.

f является гладкой композиций p' и k'. Тогда нужно, чтобы p' и k' гладко зависели от $y = \sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2}$. А это видно исходя из неявного задания k' (ЗСЭ).

$$\sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2} + \sqrt{m_e^2 + p'^2(\mathrm{k}', \mathrm{q}, \cos\theta_1)} + \sqrt{m_k^2 + \mathrm{k}'^2} = E_{\text{ци}} = F(\mathrm{k}', \mathrm{q})$$

Тогда

$$F'_{k'} = \frac{\mathrm{k}'}{E_{k'}} + \frac{\mathrm{k}' + \mathrm{q} \cdot \cos\theta_1}{E_{p'}} > c_0 > 0$$

(Это выполнено, когда q мал и k' близок к k)

$$F'_y = 1 + \frac{x^2 y + xyk' \cos\theta_1}{E_{p'}} < \infty$$

Здесь $x = \mathrm{q}/\sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2}$. Поскольку $\partial k'/\partial y = F'_y/F'_{k'} < \infty$, то условие на гладкость выполнено.

Тогда получается, что сечение неупругое равно упругому, умноженному на следующий фактор.

$$d\sigma_\gamma = d\sigma_0 \cdot \int_0^\epsilon \frac{\mathrm{q}^2 d\mathrm{q} d\Omega_q}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2}} \cdot (-e^2) \left(\frac{p'^\mu}{p'q} - \frac{p^\mu}{pq}\right)^2 = d\sigma_0 \cdot \frac{2\pi e^2 \mathcal{L}_\epsilon(p', p)}{(2\pi)^3} =$$

$$d\sigma_0 \cdot \frac{\alpha}{\pi} \cdot \mathcal{L}_\epsilon(p', p)$$

Где

$$\mathcal{L}_\epsilon(p', p) = \int_0^\epsilon \frac{\mathrm{q}^2 d\mathrm{q} d\vec{\mathrm{n}}_q}{\sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2}} \cdot (-) \left(\frac{p'^\mu}{p'q} - \frac{p^\mu}{pq}\right)^2$$

А $d\vec{\mathrm{n}}_q = d\Omega_q/4\pi$

Сначала усредним по телесному углу.

$$\int d\vec{\mathrm{n}}_q \left(\frac{p'^\mu}{p'q} - \frac{p^\mu}{pq}\right)^2 = \int d\vec{\mathrm{n}}_q \left(\frac{m^2}{(p'q)^2} + \frac{m^2}{(pq)^2} - \frac{2p'p}{(p'q)(pq)}\right)$$

Используя то, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(A - xB)^2} = \frac{2}{A^2 - B^2}$$

При подстановке $x = \cos\theta_q$ получаем.

$$\int d\vec{\mathrm{n}}_q \frac{1}{\left(A - \vec{\mathrm{n}}_q \vec{B}\right)^2} = \frac{1}{A^2 - \vec{B}^2} \qquad (*)$$

Для первого и второго слагаемого это дает (поскольку энергии и модули импульсов равны)

$$\frac{m^2}{\left(E_{p'} E_q\right)^2 - (\mathrm{p'q})^2} + \frac{m^2}{\left(E_p E_q\right)^2 - (\mathrm{pq})^2} = \frac{2m^2}{\left(E_p E_q\right)^2 - (\mathrm{pq})^2}$$

Второй интеграл нужно брать с помощью параметров Фейнмана.

$$\int \frac{2p'pd\vec{\mathrm{n}}_q}{(p'q)(pq)} = \int dx \cdot \frac{2p'pd\vec{\mathrm{n}}_q}{(p'q \cdot x + (1-x) \cdot pq)^2}$$

Делаем перестановку интегралов и берем интеграл по $d\vec{\mathrm{n}}_q$.

$$\int \frac{2p'pd\vec{\mathrm{n}}_q}{(p'q \cdot x + (1-x) \cdot pq)^2} = \int \frac{2p'pd\vec{\mathrm{n}}_q}{\left(E'E_q \cdot x + (1-x) \cdot EE_q - \mathrm{q}\vec{\mathrm{n}}_q(x\vec{p}' + (1-x)\vec{p})\right)^2}$$

Учитывая $(*)$ и то, что $E' = E = E_p$ получаем

$$\frac{2p'p}{\left(E_p E_q\right)^2 - \mathrm{q}^2(x\vec{p}' + (1-x)\vec{p})^2}$$

Далее проинтегрируем по энергии фотона. Тогда интеграл будет иметь вид:

$$\int_0^{\epsilon} \frac{d\mathrm{q}}{\sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2}} \cdot f\left(\frac{\mathrm{q}}{\sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2}}\right)$$

В нем делаем замену переменных

$$\mathrm{q} = \mu \operatorname{sh}\phi\,, \qquad \sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2} = \mu \operatorname{ch}\phi\,, \qquad \frac{\mathrm{q}}{\sqrt{\mathrm{q}^2 + \mu^2}} = \operatorname{th}\phi$$

И получаем

$$\int_0^{\mathrm{arcsh}\frac{\epsilon}{\mu}} d\phi \cdot f(\mathrm{th}\,\phi)$$

При $\mu \to 0$ этот интеграл равен (т.к. на бесконечности $\mathrm{th}\,\phi \to 1$)

$$\int_0^{\mathrm{arcsh}\frac{\epsilon}{\mu}} d\phi \cdot f(1) + \int_0^{\infty} (f(\mathrm{th}\,\phi) - f(1))d\phi$$

Первый интеграл равен, очевидно

$$I_1 = f(1) \cdot \mathrm{arcsh}\frac{\epsilon}{\mu} = \ln\left(\frac{\epsilon}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^2 + 1}\right) \to \ln\left(\frac{2\epsilon}{\mu}\right)$$

Второй интеграл ограничивается по модулю и конечен

$$I_2 = \int_0^{\infty} \big(f(\mathrm{th}\,\phi) - f(1)\big)d\phi <_{|\cdot|} L_f \cdot \int |\mathrm{th}\,\phi - 1| d\phi = L_f \ln 2$$

$$L_f = \max_{[0,1]} |f'|$$

Тогда находим выражение для $\mathcal{L}_\epsilon(p', p)$ заменив q на E_q в интеграле I_1 оставив I_2.

$$\mathcal{L}_\epsilon(p', p) = \left(-\frac{2m^2}{\left(E_p\right)^2 - (\mathrm{p})^2} + \int_0^1 dx \frac{2p'p}{\left(E_p\right)^2 - (x\vec{p}' + (1-x)\vec{p})^2}\right) \ln\left(\frac{2\epsilon}{\mu}\right) + I_2$$

Выражение перед логарифмом назовем $W(x)$, тогда

$$\mathcal{L}_\epsilon(p', p) = W(x) \cdot \ln\left(\frac{2\epsilon}{\mu}\right) + I_2$$

$$x = \frac{\sqrt{(p'p)^2 - m'^2 m^2}}{(p'p)}$$

$$W(x) = \left(\frac{1}{x} \ln\frac{(1+x)}{(1-x)} - 2\right)$$

В системе центра масс модуль импульса не меняется, тогда

$$x = \frac{\sqrt{\left(\mathrm{p}^2(1-\cos\theta)\right)\cdot((p'p)+m^2)}}{(p'p)} = \mathrm{p}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{2\frac{(p'p)+m^2}{(p'p)^2}}$$

Разложение по Тейлору $W(x)$ дает

$$W(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{5}x^4 + \cdots$$

Поэтому неупругое сечение будет отличатся от упругого по порядку на величину

$$\frac{\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{p}^2}{m^2}$$

Поскольку в нерелятивистском режиме при $k' \to k$ верно

$$\mathrm{q} = C(k-k')$$

То полученное выражение дает возможность найти поведение дифференциального сечения в этом пределе для оценки и проверки результата.

$$\frac{d^2\sigma_\gamma}{dk'} \sim \frac{\alpha}{\pi}W(x)\cdot\frac{1}{(k-k')}d\sigma_0$$

$$\frac{d^3\sigma_\gamma}{d^3\vec{k}'} \sim \sigma_0\frac{\alpha}{\pi}W(x)\cdot\frac{1}{4\pi k^2(k-k')}$$

Далее, для устранения инфракрасной расходимости используется петлевая диаграмма, перенормирующая константу связи. В результате, с учетом только расходящегося члена по μ, упругое сечение будет следующим

$$d\sigma_{\text{п}} = d\sigma_0\left(1+\frac{\alpha}{\pi}W(x)\ln\frac{\mu}{m_p}\right)$$

Сумма сечений не расходится, однако теперь нельзя строго разделить упругое сечение и неупругое, результат будет зависеть от μ. Это отражает тот факт, что экспериментально невозможно отличить чисто упругое рассеяние и неупругое с бесконечно маленьким импульсом фотона. Поэтому корректно считать неупругими лишь те столкновения, где кинематика нисколько не задевает упругую часть.

4) Сечение захвата.

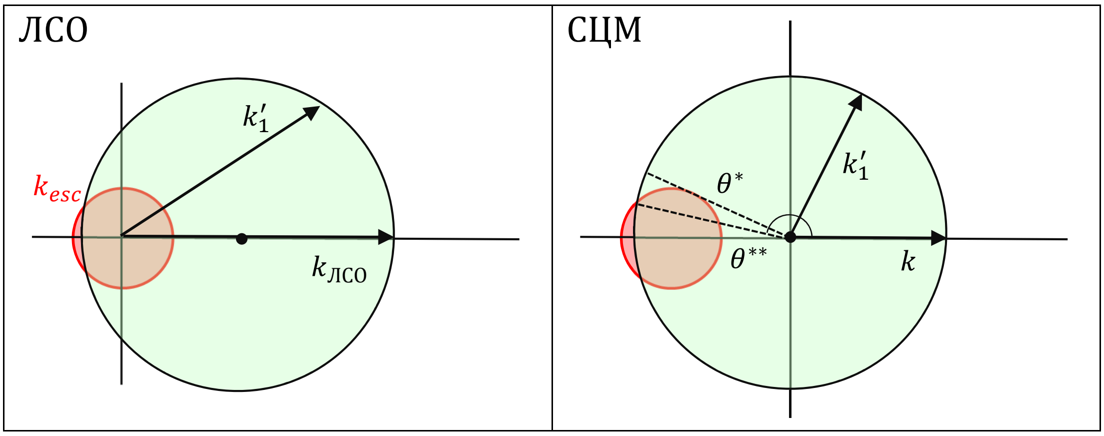
Сечение захвата – это интеграл дифференциального сечения по кинематическим параметрам, при которых происходит захват частицы. Захваченной частица считается в том случае, если ее энергия станет менее чем гравитационный барьер небесного тела.

Это условие эквивалентно тому, что скорость частицы в лабораторной системе отсчета станет меньше чем скорость вылета ($v'_{\text{ЛСО}} \leq v_{esc}$). Где скорость захвата равна

$$v_{esc} = \sqrt{2\phi(r)}$$

$\phi(r)$ – гравитационный потенциал в точке r.

Изобразим условие захвата на рисунке (в лабораторной СО и в системе центра масс). Зеленым цветом закрашена область возможного выходного импульса, а красным – область, при в которой происходит захват. Для нахождения сечения захвата необходимо проинтегрировать дифференциальное сечение по пересечению красной и зеленой области.



Перейдем в систему центра масс, где получено значение для сечения.

Тогда в системе центра масс импульс равен

$$k = \frac{m_p}{m_p + m_k} k_{\text{ЛСО}}$$

А сдвиг импульса, согласно преобразованиям Галилея, будет

$$k_t = k_{\text{ЛСО}} - k = \frac{m_k}{m_p + m_k} k_{\text{ЛСО}}$$

Условие захвата выполняется, когда выходной импульс меньше импульсу вылета $k'_{\text{ЛСО}} \leq k_{esc} = m_k v_{esc}$, в системе центра масс это равносильно следующему

$$\left(\vec{k}' + \vec{k}_t\right)^2 < k_{esc}^2 \Leftrightarrow k'^2 + k' k_t \cos\theta + k_t^2 < k_{esc}^2$$

Если красный шар попадает в зеленый шар, то будем интегрировать в полярных координатах красного шара

$$\sigma_c = \int 2\pi k_e'^2 dk_e' d\cos\theta_e \cdot \frac{d\sigma}{d^3\vec{k}'}$$

Здесь k'_e и θ_e – вспомогательный импульс и угол внутри красного шара. Импульс k' и $\cos\theta$ через вспомогательные выражаются следующим образом:

$$k'^2 = k_e'^2 + k_t^2 - 2k'_e k_t \cdot \cos\theta_e$$

$$\cos\theta = \frac{k'_e \cos\theta_e - k_t}{k'}$$

В случае, если красная сфера пересекается с зеленой (как на рисунке), нужно посчитать упругую часть, интегрируя по $d\cos\theta$ от -1 до $\cos\theta^{**}$, где

$$\cos\theta^{**} = -\frac{k_t^2 + k^2 - k_{esc}^2}{2kk_t}$$

Упругая часть считается аналитически, если дифференциальное сечение имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta'} = \sigma_v \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{1-\cos\theta'}{2}\right)^n \qquad (S)$$

Тогда

$$\sigma_c = \sigma_v \cdot \left(\frac{1-\cos\theta^{**}}{2}\right)^{n+1} = \sigma_0 \cdot \left(\frac{(k+k_t)^2 - k_{esc}^2}{4kk_t}\right)^{n+1}$$

При условии, что $k + k_t > k_{esc},\ k - k_t < k_{esc}$

5) Процесс захвата.

Если $\sigma_c = \sigma_c(v, v_{esc})$ – сечение захвата на частице определенного сорта, то вероятность захвата на единицу длины равна

$$dP = \sigma_c^i(v, v_{esc}) \cdot n_i \cdot dl$$

Тогда за единицу времени вероятность захвата частицы равна

$$\frac{dP}{dt} = \sigma_c^i(v, v_{esc}) \cdot n_i \cdot v$$

Вместо движения одной частицы нужно рассматривать распределение по координатам и скоростям. Пусть $\rho(\vec{x}, \vec{v})$ – концентрация частиц в фазовом пространстве, то есть

$$dN = \rho d^3\vec{x} d^3\vec{v},$$

В нулевом порядке по константе взаимодействия, налетающие частицы не сталкиваются ни с чем и описывается законами движения в гравитационном поле:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}, \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\phi$$

Система является гамильтоновой, фазовый объем $d^3\vec{x}d^3\vec{p} = m^3d^3\vec{x}d^3\vec{v}$ постоянен. Учитывая сохранение числа частиц получаем, что фазовая плотность постоянна

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

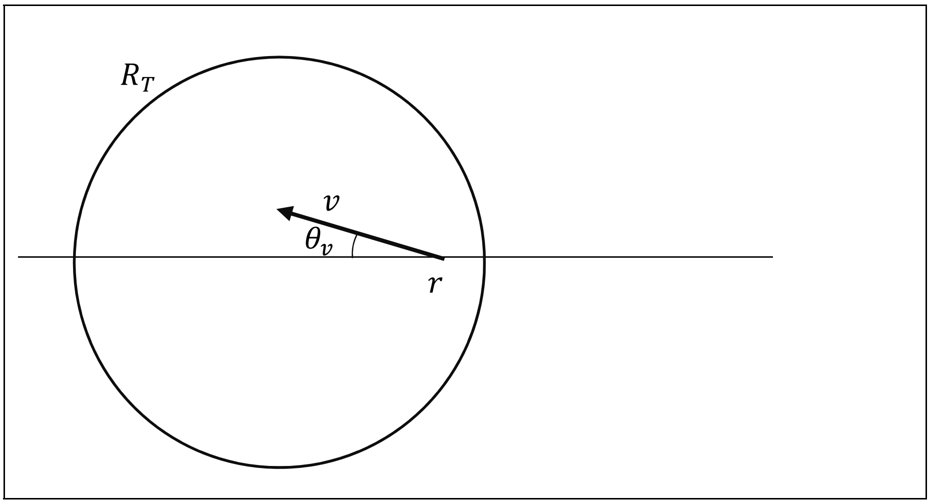
В переменных Эйлера получаем уравнение:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial\vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial\vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

Будем считать, что у частицы образуют стационарный поток, поэтому $\partial\rho/\partial t = 0$. Подставив уравнения движения получаем:

$$(\vec{v}, \nabla\rho) - \left(\nabla\phi, \frac{\partial\rho}{\partial\vec{v}}\right) = 0$$

Отинтегрируем ненужные переменные, не влияющие на уравнения движения, и перейдем к новым переменным: r, v, θ_v – расстоянию от центра то частицы, скорости и углу к нормали.



Теперь у нас есть 3 переменных и уравнение переноса 1 порядка в этих переменных. Как известно, решением будет функция, зависящая от двух первых интегралов движения.

Уравнения движения в центральном поле имеют два первых интеграла, выражающих закон сохранения энергии и импульса.

$$u^2 = v^2 - 2\phi, \qquad L = rv\sin\theta$$

И решение соответственно будет:

$$\rho = \rho(u^2, L)$$

$\rho(\vec{x}, \vec{v})$ находится исходя из условий вдали от тела. Там фазовая плотность находится из пространственной плотности ρ_V и функции распределения по скоростям ($f(\vec{u})d^3\vec{u}$).

$$\rho(r = \infty, \vec{u}) = \rho_V \cdot f(\vec{u})$$

Выразим фазовый объем $d\Phi = dVd^3\vec{v} = 4\pi r^2 dr \cdot 2\pi v^2 dvd\cos\theta_v$ через новые переменные и получим.

$$d\Phi = 4\pi r^2 dr \cdot \pi v \cdot du^2 \frac{2d\sin\theta_v}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_v}}$$

Двойка берется из того, что $\cos\theta_v$ принимает два значения на входе и выходе частицы. В итоге получаем, что

$$d\Phi = 4\pi r^2 dr \cdot \frac{\pi}{r} \cdot du^2 \cdot \frac{dL^2}{\sqrt{r^2v^2 - L^2}} = dV \cdot \frac{\pi}{\sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}}} du^2 \frac{dL^2}{r^2}$$

Теперь перейдем к граничным условиям.

Будем считать, что есть выделенная скорость $\vec{u}_0$, которая отвечает за относительное движение тела, а само распределение по скоростям изотропно, тогда $f(\vec{u}) = f(|\vec{u} - \vec{u}_0|^2)$. Обозначим $\vec{\xi} = \vec{u} - \vec{u}_0$, тогда

$$f(\vec{u})d^3\vec{u} = f(\xi^2)d^3\vec{\xi}$$

$$u_0 = 230\frac{\text{км}}{\text{с}} = 0.7667 \cdot 10^{-3}$$

Нам необходимо усреднить фазовую плотность по углу θ_0, определяющего положение частицы (рисунок) и углу φ, указывающего на направление скорости частицы в полярных координатах репера $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рисунок).

Для этого перейдём в промежуточные переменные v_r, v_θ, φ. Где v_r – радиальная скорость, а v_θ – угловая. В отличии от переменных v, L, такой набор не допускает неоднозначности с двойкой. В этих переменных фазовый объем в скоростях равен

$$d^3\vec{\xi} = d^3\vec{u} = v_\theta dv_r dv_\theta d\varphi$$

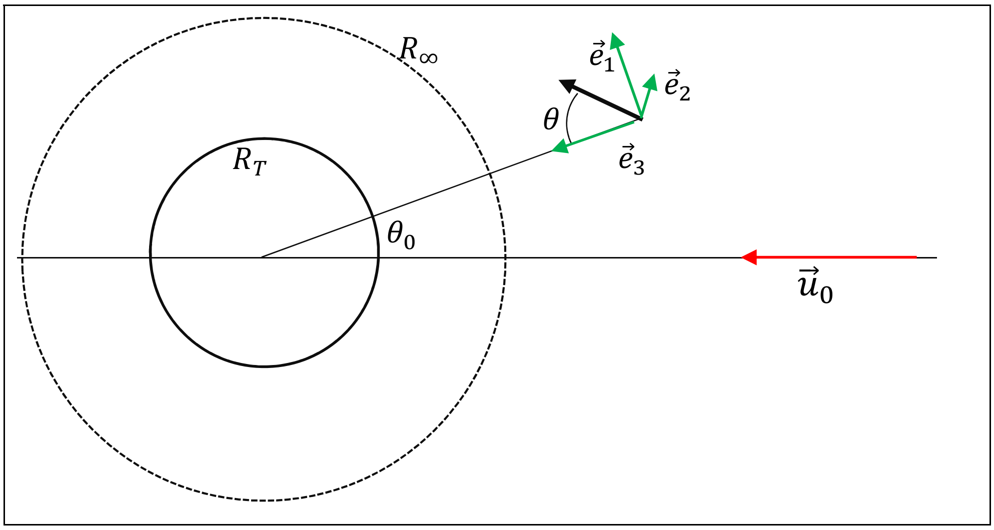
А выражаются переменные через следующие соотношения:

$$u_0\cos\theta_0 + \xi_3 = u_r$$

$$u_0\sin\theta_0 + \xi_1 = u_\theta\cos\varphi$$

$$\xi_2 = u_\theta \sin\varphi$$

$$\xi^2 = u_\theta^2 + u_r^2 + u_0^2 - 2u_0(u_r \cos\theta_0 + u_\theta \cos\varphi \sin\theta_0)$$



Для усреднения берем интеграл:

$$f(u^2, L) = \int \frac{d\cos\theta_0\, d\varphi}{4\pi} f(\xi^2)$$

Заметим, что формально $d\cos\theta_0\, d\varphi$ – это телесный угол $d\Omega$, который проходится вектором $\vec{n} = (\cos\theta_0, \cos\varphi \sin\theta_0, \sin\varphi \sin\theta_0)^T$. Тогда получается усреднение по сфере.

$$f(u^2, L) = \int d^2\vec{n} f(\xi^2)$$

Введем вспомогательный вектор скорости, равный $\vec{y} = u(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ (это не вектор реальной скорости). Он же выражается в наших координатах как $(u_r, u_\theta, 0)^T$. Получаем, что

$$\xi^2 = u^2 + u_0^2 - 2u_0(\vec{y}\vec{n})$$

$$f(u^2, L) = \int_{-1}^{1} f(u^2 + u_0^2 - 2u_0 u \cdot x) \cdot \frac{dx}{2}$$

Видно, что после избавления от ненужных параметров, мы получаем изотропное распределение (нет зависимости от момента) с некоторым сдвигом.

Возьмем нормальное распределение по скоростям.

$$f(\vec{\xi}^2) = \frac{1}{(2\pi\xi_0)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\vec{\xi}^2}{2\xi_0^2}}$$

Интегрирование дает

$$f(u^2) = \frac{e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2\xi_0^2}}}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{thc}\left(\frac{2u_0 u}{\xi_0^2}\right)$$

$$\operatorname{thc}(x) = \frac{(1-e^{-x})}{x}$$

Для получения скорости захвата, нужно проинтегрировать вероятность захвата в единицу времени по количеству частиц в фазовом объеме. Это дает

$$\frac{dC}{dt} = \int \rho dV d^3\vec{v} \cdot \sigma_c n v$$

$$\rho dV d^3\vec{v} = \rho_V dV f(u^2) \frac{\pi}{\sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}}} du^2 \frac{dL^2}{r^2}$$

После интегрирования по моменту получаем

$$\frac{dC}{dt} = \rho_V \int dV f(u^2) \cdot \sigma_c n v^2 \cdot 2\pi du^2 \qquad (C)$$

6) Интегрирование.

В модели тела задается таблица зависимости некоторых величин от радиуса. Радиус и масса вещества внутри этого радиуса дается в относительных единицах. Безразмерный радиус обозначим буквой ξ, а безразмерную массу – μ.

$$\xi = \frac{r}{R}, \qquad \mu = \frac{M(r)}{M_T}$$

$$R = 6.957 \cdot 10^8 \text{м (слнце)}$$

$$R = 6.4 \cdot 10^6 \text{м (земля)}$$

Введем безразмерный потенциал ω по аналогии

$$\omega = \frac{\phi(r)}{\phi(R)}$$

Потенциал $\phi(R)$ – это потенциал точечной массы солнца на расстоянии R. По теореме гаусса

$$\phi(R) = G\frac{M}{R} = G\frac{M}{R^2}R = g_T R$$

Где $g_\odot$ – ускорение свободного падения на поверхности солнца.

$$g_{\text{С}} = g_{\text{З}} \cdot \frac{M_T}{M_{\text{з}}} \cdot \left(\frac{R_{\text{з}}}{R_T}\right)^2 = 273.1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \text{ (солнце)}$$

$$\phi_{\text{С}}(R) = 1.9 \cdot 10^{11} \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = 2.114 \cdot 10^{-6} c^2$$

$$\phi_{\text{З}}(R) = 6.97 \cdot 10^{-10} c^2$$

Из уравнения Пуассона получается уравнение на гравитационный потенциал внутри тела.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = -\ \frac{\mu}{\xi^2}$$

$$\omega = 1 + \int_{\xi}^{1} \frac{\mu(\xi')}{\xi'^2} d\xi'$$

Скорость захвата v_{esc} выражается через безразмерный потенциал.

$$v_{esc} = \sqrt{2\phi} = v_{esc}^0 \sqrt{\omega}$$

$$v_{esc}^0 = \sqrt{2\phi(R)} = 2.056 \cdot 10^{-3} \text{ (Солнце)}$$

$$v_{esc}^0 = 3.7336 \cdot 10^{-5} \text{ (Земля)}$$

Для интегрирования (C) будем использовать безразмерные параметры: радиус ξ, безразмерное сечение на элементе $\hat{\sigma}_i = \sigma_c/\sigma_0$, где σ_0 – характерное упругое сечение, массовую долю элемента α_i, безразмерную плотность $\hat{\rho} = \rho(r)/\langle\rho\rangle$ и массовое число ядер μ_i. Тогда скорость захвата на i-ом элементе равна

$$\frac{dC_i}{dt} = \rho_V \cdot \sigma_0 \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\langle\rho\rangle}{m_p}\right) \int 3\xi^2 d\xi \cdot f(u^2) \cdot \hat{\sigma}_i \frac{\alpha_i}{\mu_i} \hat{\rho} \frac{v^2 u}{u_0} \cdot 4\pi du^2$$

Разделив и умножив на характерную скорость u_0 получаем:

$$\frac{dC_i}{dt} = \rho_V \sigma_0 \cdot \frac{M}{m_p} \cdot u_0 \cdot \int 12\pi \xi^2 d\xi \cdot f(u^2) \cdot \hat{\sigma}_i \frac{\alpha_i}{\mu_i} \hat{\rho} \frac{v^2 u}{u_0} \cdot du$$

Численной процедурой находим величину $\hat{\sigma}_i(v, v_{esc})$, интегрируя по объему получаем преобразованное сечение захвата

$$\tilde{\sigma}_i(u) = \int 3\xi^2 d\xi \cdot \hat{\sigma}_i \frac{\alpha_i}{\mu_i} \hat{\rho} \cdot \frac{v^2}{u_0^2}$$

Выражаем через него скорость захвата.

$$\frac{dC_i}{dt} = \rho_V \sigma_0 \cdot \frac{M}{m_p} \cdot u_0 \cdot \int f(u^2) \cdot \tilde{\sigma}_i(u) \cdot 4\pi u_0 u du$$

7) Температура

При ненулевой температуре красная сфера смещается и может попасть на границу зеленой, тогда происходит упругий захват. Из-за температуры происходит и испарение.

Характерная температурная скорость равна

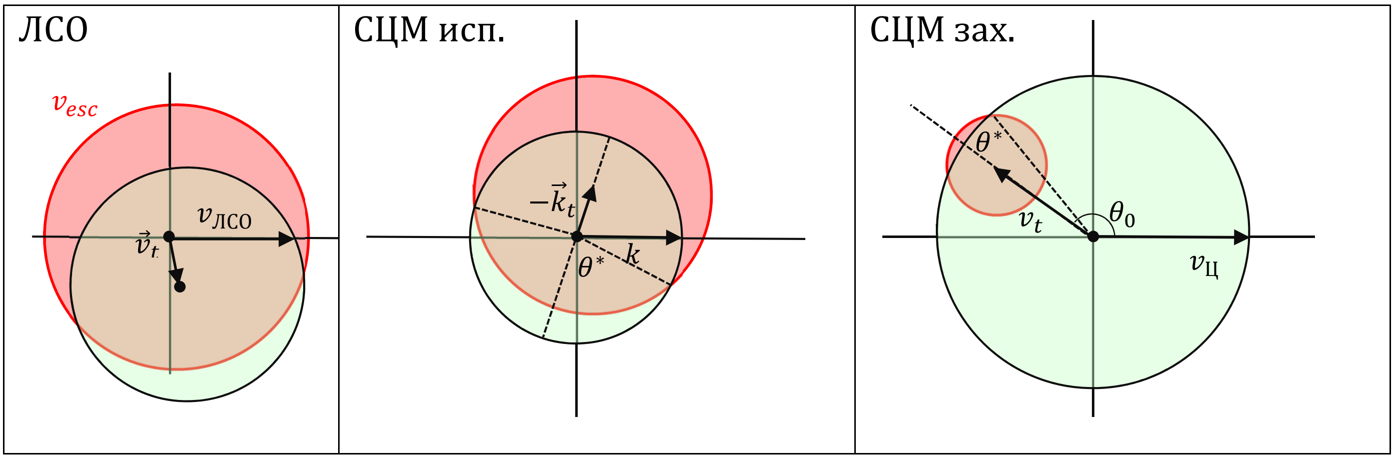
$$w_T \sim \sqrt{\frac{T}{m_p}} \sim v_{esc} \sqrt{\frac{T}{2 m_p \phi}}$$

Для солнца получится около

$$w_T \sim v_{esc} \sqrt{\frac{1}{20 \mu_i}}$$

Для земли

$$w_T \sim v_{esc} \sqrt{\frac{0.8}{\mu_i}}$$



Пусть скорость мишени – $\vec{w}$, а скорость частицы – $\vec{v}$. Скорость переноса равна

$$\vec{v}_t = \frac{m_p \vec{w} + m_k \vec{v}}{m_p + m_k}$$

А скорость частицы в системе центра масс:

$$\vec{v}_Ц = \vec{v} - \vec{v}_t = \frac{m_p}{m_p + m_k} (\vec{v} - \vec{w})$$

Сперва найдем модуль $v_Ц$ и v_t и угол между этими векторами θ_0.

$$v_Ц^2 = \left(\frac{m_p}{m_p + m_k}\right)^2 (v^2 - 2wv\cos\theta_w + w^2)$$

$$v_t^2 = \left(\frac{m_p}{m_p + m_k}\right)^2 \left(w^2 + 2wv\cos\theta_w \frac{m_k}{m_p} + \vec{v}^2 \left(\frac{m_k}{m_p}\right)^2\right)$$

$$\cos\theta_0 = -\frac{\vec{v}_t \vec{v}_Ц}{v_Ц v_t} = \frac{\left(\frac{m_p}{m_p + m_k}\right)^2}{v_Ц v_t}\left(-\left(1 - \frac{m_k}{m_p}\right) wv\cos\theta_w - \frac{m_k}{m_p} v^2 + w^2\right)$$

Упругое столкновение происходит когда

$$v_t + v_Ц > v_{esc} > v_Ц - v_t, \qquad v_t < v_Ц + v_{esc}$$

Тогда угол θ'в сферических координатах нужно выразить через θ'' – угол, отсчитанный от $\vec{v}_t$.

$$\cos\theta' = \cos\theta'' \cos\theta_0 - \sin\theta'' \sin\theta_0 \cos\varphi$$

Тогда в формуле для сечения интегрируем по φ от 0 до π, а $\cos\theta'$ от 1 до $\cos\theta^*$ в случае захвата и от -1 до $\cos\theta^*$ в случае испарения.

$$\cos\theta^* = \frac{v_t^2 + v_Ц^2 - v_{esc}^2}{2v_t v_Ц}$$

Используя формулу сечения (S), получим результат для разных n.

Сечение захвата и испарения принимает вид:

	захват	испарение
$n = 0$	x	y
$n = 1$	$x \cdot (1 - y\cos\theta_0)$	$y(1 + x\cos\theta_0)$
$n = 2$	$x \cdot \left(1 - y\left(\frac{3}{2}\cos\theta_0 + \frac{3}{4}\cos^2\theta_0 - \frac{1}{4} + y\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta_0 - \frac{1}{2}\right)\right)\right)$	$y \cdot \left(1 + x\left(\frac{3}{2}\cos\theta_0 - \frac{3}{4}\cos^2\theta_0 + \frac{1}{4} + x\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta_0 - \frac{1}{2}\right)\right)\right)$

$$x = \frac{1 - \cos\theta^*}{2}, \qquad y = \frac{1 + \cos\theta^*}{2}$$

8) Условие на неупругость захвата.

Для того, чтобы не было упругого захвата, необходимо, чтобы сфера захвата не пересекалась со сферой вылетающей частицы. Это эквивалентно тому, что

$$v_t > v_{esc} + v_{Ц} \text{ или } v_t + v_{esc} < v_{Ц} \quad \Leftrightarrow v_{esc} < \left|v_{Ц} - v_t\right|$$

При $v_{Ц} > v_t$ наихудший вариант температурной скорости – когда $\vec{v} \parallel \vec{w}$, тогда

$$\frac{v_{esc}}{v_{ЛСО}} < \frac{m_p - m_k}{m_p + m_k} - 2\frac{m_p}{m_p + m_k}\frac{w}{v_{ЛСО}}$$

Для солнца $v_{ЛСО}$ почти равно v_{esc}, поэтому нужно разломить в ряд $v_{ЛСО}$ по начальной скорости и получить условие

$$\left(\frac{u}{v_{esc}}\right)^2 \geq 4\left(\frac{m_k}{m_p + m_k} + \frac{m_p}{m_p + m_k}\frac{w}{v_{esc}}\right)$$

Для характерных скоростей $u \sim u_0$ это дает

$$0.1 \geq \frac{m_k}{m_p + m_k} + \frac{m_p}{m_p + m_k}\sqrt{\frac{1}{20\mu_i}}$$

Это условие не может быть выполнено для легких ядер в солнце, поэтому неупругого захвата в нем не будет.

Для земли получается иначе. Первое условие выполняется для характерных скоростей почти всегда.

Также для исключения упругого захвата на легких ядрах необходимо

$$\frac{v_{esc}}{v_{ЛСО}} \leq \frac{m_k - m_p}{m_p + m_k} - 2\frac{m_p}{m_p + m_k}\frac{w}{v_{ЛСО}}$$

Выполняется для характерных скоростей u_0 при промежуточных значениях m_k

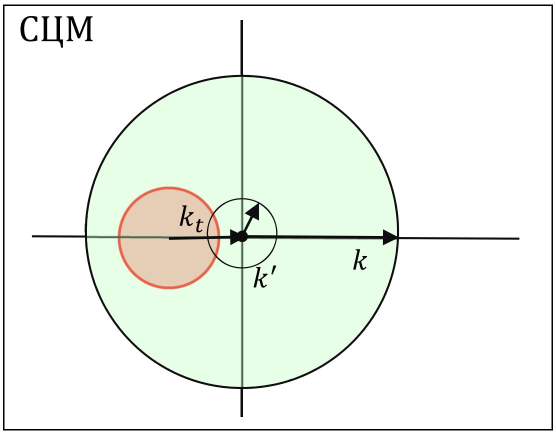
9) Влияние ядерных резонансов.

В случае, если масса налетающей частицы меньше массы мишени, захват может произойти за счет переходя ядра на энергию ΔE. Найдем условие, при котором происходит резонанс.

В системе центра масс запишем закон сохранения энергии. И найдем выходной импульс.

$$k^2\left(\frac{1}{2m_k} + \frac{1}{2m_p}\right) = k'^2\left(\frac{1}{2m_k} + \frac{1}{2m_p}\right) + \Delta E$$

$$k' = \sqrt{k^2 - \Delta E \cdot \frac{2m_k m_p}{m_p + m_k}}$$



Как видно из рисунка, условие захвата выполняется в случае, если

$$k_t \leq k_{esc} + k'$$

Выразим импульсы через скорость в ЛСО

$$\frac{m_k}{m_p + m_k} v_{\text{ЛСО}} \leq v_{esc} + \sqrt{\left(\frac{m_p}{m_p + m_k}\right)^2 v_{\text{ЛСО}}^2 - 2\frac{\Delta E}{m_p} \cdot \frac{m_p^2}{(m_k + m_p)m_k}}$$

$$\frac{m_p}{m_p + m_k}\sqrt{v_{\text{ЛСО}}^2 - \frac{2\Delta E}{m_p} \cdot \frac{(m_k + m_p)}{m_k}} + v_{esc} \geq \frac{m_k}{m_p + m_k} v_{\text{ЛСО}}$$

Только $v_{\text{ЛСО}}^2$ порядка 10^{-6}, то второе слагаемое порядка 10^{-4}, т.е. требуется скорость на порядок больше, чтобы произошёл резонанс.