Неупругий захват частиц темной материи. Скорость захвата.

Скорость захвата частиц темной материи – это количество частиц темной материи за единицу времени, приобретающих энергию меньшую, чем гравитационная яма. Обозначать будем следующим образом:

Для нахождения скорости захвата необходимо найти соответствующее сечение и распределение частиц внутри сферического тела.

Расчет сечения захвата.

1. Лагранжиан теории.

Мы будем рассматривать теорию с ферменным полем мишени (атом вещества), взаимодействующего с электромагнитным полем, и ферменным полем частицы темной материи, взаимодействующего с мишенью по аналогу теории Ферми (Получается отинтегрированием массивного скалярного/векторного поля)

Где – 4-х компонентные спиноры и массы мишени и частицы темной материи соответственно, – вектор потенциал и тензор напряженности ЭМП.

Матрицы и должны быть самосопряженными по Дираку, чтобы лагранжиан был вещественным.

Тогда они будут иметь вид:

В неупругом взаимодействии рассеивается фотон. Нарисуем соответствующую диаграмму Фейнмана (Буквами обозначены соответствующие импульсы частиц)

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Начальное и конечное состояние обозначим образом:

Сразу заметим, что если рассеивается не частица, а античастица темной материи (со входным и выходным импульсом ), то вычисления определялись бы зарядово сопряженным лагранжианом. Если – оператор зарядового сопряжения частицы темной материи, то сопряженный лагранжиан равен.

Тогда изменение действия теории будет только во взаимодействующем члене.

Поскольку

то не изменится в скалярном взаимодействии, и изменится с на в векторном случае. Что соответствует замене

Матричный элемент упругого рассеяния равен

Будем обозначать входящий/выходящий спинор как поле с индексом импульса.

Для модуля квадрата получаем:

Усредняем по спинам и получаем:

Получаем (для векторного и скалярного случая):

В случае испускания фотона матричный элемент усложняется

Учитывая, что при этом , получаем

В скалярном случае . Последнее равенство условное и получается из тождества Уорда (). Тогда последнее слагаемое существенно упростится.

Далее усредняем, делаем замену (из тождества Уорда) и в скалярном случае не учитываем вклады, получающиеся из , которые имеют вид , поскольку можно составить только из , то есть там будут повторения и такие слагаемые обнулятся. Так в скалярном случае получается матричный элемент:

Обратим внимание, что матричный элемент состоит из трех частей, которые имеют следующие по порядку величины:

И относятся друг к другу как

Но поскольку в нерелятивистском случае , то главным слагаемым будет первое, а остальные можно будет не учитывать.

1. Сечение и кинематика.

Сечение – это интеграл матричного элемента по всему выходному фазовому объему.

Где – выходные 4-импульсы, – входные, то есть .

Нам нужно отинтегрировать все кроме выходного импульса частицы темной материи.

Дельта функции массовой поверхности и дельта функции от закона сохранения импульса легко снимаются, и остается

Где – импульс и энергия вылетающей частицы, – импульс и энергия фотона, – приобретаемая энергия мишени.

Далее нужно перейти в систему центра инерции, где . Изобразим это на рисунке.

|  |
| --- |
|  |

Перейдем к сферическим координатам в фазовом объеме. Тогда получим

Тут стоит отметить, что телесный угол отсчитывается не от оси , а от , при этом в телесный угол , поскольку матричный элемент инвариантен относительно вращений вокруг оси .

Таким образом вектор равен

Тогда для задания нужно дополнить до ортогонального базиса.

Вектор возьмем равным , а . Тогда получаем, что

Вектор – выражается из закона сохранения импульса.

Теперь можно снять последнюю дельта функцию. Можно было бы это делать с помощью переменной , однако это бы привело к плохому поведению, когда обнулялся либо либо . Поэтому будем снимать интегрирование с помощью .

Это следует из того, что .

Сам же находится из закона сохранения энергии.

И получается

В итоге мы получаем следующий фазовый объем

Сечение равно

В системе центра масс этот корень можно выразить как

Тогда

1. Сечение при малых . Устранение инфракрасной расходимости.

Для регуляризации вводится фиктивная масса фотона. Учитывается только расходящийся член равный

Где – матричный элемент упругого рассеяния.

Устранить расходимость можно, интегрируя до достаточно малого параметра . В таком случае можно не учитывать усложнение кинематики. Покажем это. Общее сечение и фазовый объем равны

Если учесть фиктивную массу фотона , то получим

Интеграл по от до будет равен

Но если является гладкой функцией на , то

И тогда является ограниченной константой не зависящей от , поэтому в функции можно заменить второй аргумент на ноль.

является гладкой композиций и . Тогда нужно, чтобы и гладко зависели от . А это видно исходя из неявного задания (ЗСЭ).

Тогда

(Это выполнено, когда мал и близок к )

Здесь Поскольку , то условие на гладкость выполнено.

Тогда получается, что сечение неупругое равно упругому, умноженному на следующий фактор.

Где

А

Сначала усредним по телесному углу.

Используя то, что

При подстановке получаем.

Для первого и второго слагаемого это дает (поскольку энергии и модули импульсов равны)

Второй интеграл нужно брать с помощью параметров Фейнмана.

Делаем перестановку интегралов и берем интеграл по .

Учитывая и то, что получаем

Далее проинтегрируем по энергии фотона. Тогда интеграл будет иметь вид:

В нем делаем замену переменных

И получаем

При этот интеграл равен (т.к. на бесконечности )

Первый интеграл равен, очевидно

Второй интеграл ограничивается по модулю и конечен

Тогда находим выражение для заменив на в интеграле оставив .

Выражение перед логарифмом назовем, тогда

В системе центра масс модуль импульса не меняется, тогда

Далее представим член взаимодействия в следующем виде

Тогда дифференциальное сечение с учетом фотона рассеяния равно

Где – упругое сечение, если бы равнялся единице.

Тогда получается, что наблюдаемое значение определяется полным дифференциальным сечением, т.е. когда интеграл по импульсу фотона взят до максимально возможного значения импульса . Если пренебречь кинематикой, то его значение приблизительно равно

А наблюдаемое значение :

Если считать, что мы взяли константу связи при нужной энергии, то . Тогда с точностью до второго порядка по получается, что

Подставим в величину и получим в первом порядке по и получим сечение без расходимости.

С помощью этого соотношения проводится регуляризация сечения и проводится проверка численного расчета сечения. Для этого нужно вспомнить формулу. При пропорционально разности

Поэтому если полное дифференциальное сечение пропорционально логарифму , то дифференциальное сечение по импульсу будет вести себя определенным образом при а именно

1. Сечение захвата.

Сечение захвата – это интеграл дифференциального сечения по кинематическим параметрам, при котором происходит захват частицы. Захваченной частица считается в том случае, если ее энергия станет менее чем гравитационный барьер небесного тела.

Это условие эквивалентно тому, что скорость частицы в лабораторной системе отсчета станет меньше чем скорость вылета ().

Изобразим это на рисунке (в лабораторной СО и в системе центра масс)

|  |  |
| --- | --- |
| ЛСО | СЦМ |

Зеленым цветом закрашена область возможного выходного импульса, а красным – область, при в которой происходит захват. Для нахождения сечения захвата необходимо проинтегрировать дифференциальное сечение по пересечению красной и зеленой области.

Перейдем в систему центра масс, где получено значение для сечения.

Тогда в системе центра масс импульс равен

А сдвиг импульса, согласно преобразованиям Галилея, будет

Условие захвата выполняется, когда выходной импульс меньше импульсу вылета , в системе центра масс это равносильно следующему

Если красный шар попадает в зеленый шар, то будем интегрировать в полярных координатах красного шара

Здесь и – вспомогательный импульс и угол внутри красного шара. Импульс и через вспомогательные выражаются следующим образом:

В случае, если красная сфера пересекается с зеленой,