Неупругий захват частиц темной материи. Скорость захвата.

Скорость захвата частиц темной материи – это количество частиц темной материи за единицу времени, приобретающих энергию меньшую, чем гравитационная яма. Обозначать будем следующим образом:

Для нахождения скорости захвата необходимо найти соответствующее сечение и распределение частиц внутри сферического тела.

Расчет сечения захвата.

1. Лагранжиан теории.

Мы будем рассматривать теорию с ферменным полем мишени (атом вещества), взаимодействующего с электромагнитным полем, и ферменным полем частицы темной материи, взаимодействующего с мишенью по аналогу теории Ферми (Получается отинтегрированием массивного скалярного/векторного поля)

Где – 4-х компонентные спиноры и массы мишени и частицы темной материи соответственно, – вектор потенциал и тензор напряженности ЭМП.

Матрицы и должны быть самосопряженными по Дираку, чтобы лагранжиан был вещественным.

Тогда они будут иметь вид:

В неупругом взаимодействии рассеивается фотон. Нарисуем соответствующую диаграмму Фейнмана (Буквами обозначены соответствующие импульсы частиц)

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Начальное и конечное состояние обозначим образом:

Сразу заметим, что если рассеивается не частица, а античастица темной материи (со входным и выходным импульсом ), то вычисления определялись бы зарядово сопряженным лагранжианом. Если – оператор зарядового сопряжения частицы темной материи, то сопряженный лагранжиан равен.

Тогда изменение действия теории будет только во взаимодействующем члене.

Поскольку

то не изменится в скалярном взаимодействии, и изменится с на в векторном случае. Что соответствует замене

Матричный элемент упругого рассеяния равен

Будем обозначать входящий/выходящий спинор как поле с индексом импульса.

Для модуля квадрата получаем:

Усредняем по спинам:

Итог (для векторного и скалярного случая):

В нерелятивистском случае векторный матричный элемент равен

То есть он является константой при любых параметрах.

Скалярный элемент выражается почти также

В случае, если или матричный элемент принимает один из видов

Дифференциальное сечение упругого процесса выражается следующим образом

Полное сечение равно соответственно

Выразим матричный элемент через полное сечение. Он будет иметь вид

зависит от масс и считается при определенном импульсе.

В случае испускания фотона матричный элемент усложняется

Учитывая, что при этом , получаем

В скалярном случае . Последнее равенство условное и получается из тождества Уорда (). Тогда последнее слагаемое существенно упростится.

Далее усредняем, делаем замену (из тождества Уорда) и в скалярном случае не учитываем вклады, получающиеся из , которые имеют вид , поскольку можно составить только из , то есть там будут повторения и такие слагаемые обнулятся. Так в скалярном случае получается матричный элемент:

Обратим внимание, что матричный элемент состоит из трех частей, которые имеют следующие по порядку величины:

И относятся друг к другу как

Но поскольку в нерелятивистском случае , то главным слагаемым будет первое, а остальные можно будет не учитывать.

1. Сечение и кинематика.

Сечение – это интеграл матричного элемента по всему выходному фазовому объему.

Где – выходные 4-импульсы, – входные, то есть .

Нам нужно отинтегрировать все кроме выходного импульса частицы темной материи.

Дельта функции массовой поверхности и дельта функции от закона сохранения импульса легко снимаются, и остается

Где – импульс и энергия вылетающей частицы, – импульс и энергия фотона, – приобретаемая энергия мишени.

Далее нужно перейти в систему центра инерции, где . Изобразим это на рисунке.

|  |
| --- |
|  |

Перейдем к сферическим координатам в фазовом объеме. Тогда получим

Тут стоит отметить, что телесный угол отсчитывается не от оси , а от , при этом в телесный угол , поскольку матричный элемент инвариантен относительно вращений вокруг оси .

Таким образом вектор равен

Тогда для задания нужно дополнить до ортогонального базиса.

Вектор возьмем равным , а . Тогда получаем, что

Вектор – выражается из закона сохранения импульса.

Теперь можно снять последнюю дельта функцию. Можно было бы это делать с помощью переменной , однако это бы привело к плохому поведению, когда обнулялся либо либо . Поэтому будем снимать интегрирование с помощью .

Это следует из того, что .

Сам же находится из закона сохранения энергии.

И получается

В итоге мы получаем следующий фазовый объем

Сечение равно

В системе центра масс этот корень можно выразить как

Тогда

1. Сечение при малых . Устранение инфракрасной расходимости.

Для регуляризации вводится фиктивная масса фотона. Учитывается только расходящийся член равный

Где – матричный элемент упругого рассеяния.

Устранить расходимость можно, интегрируя до достаточно малого параметра . В таком случае можно не учитывать усложнение кинематики. Покажем это. Общее сечение и фазовый объем равны

Если учесть фиктивную массу фотона , то получим

Интеграл по от до будет равен

Но если является гладкой функцией на , то

И тогда является ограниченной константой не зависящей от , поэтому в функции можно заменить второй аргумент на ноль.

является гладкой композиций и . Тогда нужно, чтобы и гладко зависели от . А это видно исходя из неявного задания (ЗСЭ).

Тогда

(Это выполнено, когда мал и близок к )

Здесь Поскольку , то условие на гладкость выполнено.

Тогда получается, что сечение неупругое равно упругому, умноженному на следующий фактор.

Где

А

Сначала усредним по телесному углу.

Используя то, что

При подстановке получаем.

Для первого и второго слагаемого это дает (поскольку энергии и модули импульсов равны)

Второй интеграл нужно брать с помощью параметров Фейнмана.

Делаем перестановку интегралов и берем интеграл по .

Учитывая и то, что получаем

Далее проинтегрируем по энергии фотона. Тогда интеграл будет иметь вид:

В нем делаем замену переменных

И получаем

При этот интеграл равен (т.к. на бесконечности )

Первый интеграл равен, очевидно

Второй интеграл ограничивается по модулю и конечен

Тогда находим выражение для заменив на в интеграле оставив .

Выражение перед логарифмом назовем, тогда

В системе центра масс модуль импульса не меняется, тогда

Разложение по Тейлору дает

Поэтому неупругое сечение будет отличатся от упругого по порядку на величину

Далее представим член взаимодействия в следующем виде

Тогда дифференциальное сечение с учетом фотона рассеяния равно

Где – упругое сечение, если бы равнялся единице.

Тогда получается, что наблюдаемое значение определяется полным дифференциальным сечением, т.е. когда интеграл по импульсу фотона взят до максимально возможного значения импульса . Если пренебречь кинематикой, то его значение приблизительно равно

А наблюдаемое значение :

Если считать, что мы взяли константу связи при нужной энергии, то . Тогда с точностью до второго порядка по получается, что

Подставим в величину и получим в первом порядке по и получим сечение без расходимости.

С помощью этого соотношения проводится регуляризация сечения и проводится проверка численного расчета сечения. Для этого нужно вспомнить формулу. При пропорционально разности

Поэтому если полное дифференциальное сечение пропорционально логарифму , то дифференциальное сечение по импульсу будет вести себя определенным образом при а именно

1. Сечение захвата.

Сечение захвата – это интеграл дифференциального сечения по кинематическим параметрам, при которых происходит захват частицы. Захваченной частица считается в том случае, если ее энергия станет менее чем гравитационный барьер небесного тела.

Это условие эквивалентно тому, что скорость частицы в лабораторной системе отсчета станет меньше чем скорость вылета (). Где скорость захвата равна

– гравитационный потенциал в точке .

Изобразим условие захвата на рисунке (в лабораторной СО и в системе центра масс). Зеленым цветом закрашена область возможного выходного импульса, а красным – область, при в которой происходит захват. Для нахождения сечения захвата необходимо проинтегрировать дифференциальное сечение по пересечению красной и зеленой области.

|  |  |
| --- | --- |
| ЛСО | СЦМ |

Перейдем в систему центра масс, где получено значение для сечения.

Тогда в системе центра масс импульс равен

А сдвиг импульса, согласно преобразованиям Галилея, будет

Условие захвата выполняется, когда выходной импульс меньше импульсу вылета , в системе центра масс это равносильно следующему

Если красный шар попадает в зеленый шар, то будем интегрировать в полярных координатах красного шара

Здесь и – вспомогательный импульс и угол внутри красного шара. Импульс и через вспомогательные выражаются следующим образом:

В случае, если красная сфера пересекается с зеленой (как на рисунке), нужно посчитать упругую часть, интегрируя по от до , где

Упругая часть считается аналитически, если дифференциальное сечение имеет вид:

Тогда

При условии, что

1. Процесс захвата.

Если – сечение захвата на частице определенного сорта, то вероятность захвата на единицу длины равна

Тогда за единицу времени вероятность захвата частицы равна

Вместо движения одной частицы нужно рассматривать распределение по координатам и скоростям. Пусть – концентрация частиц в фазовом пространстве, то есть

В нулевом порядке по константе взаимодействия, налетающие частицы не сталкиваются ни с чем и описывается законами движения в гравитационном поле:

Система является гамильтоновой, фазовый объем постоянен. Учитывая сохранение числа частиц получаем, что фазовая плотность постоянна

В переменных Эйлера получаем уравнение:

Будем считать, что у частицы образуют стационарный поток, поэтому . Подставив уравнения движения получаем:

Отинтегрируем ненужные переменные, не влияющие на уравнения движения, и перейдем к новым переменным: – расстоянию от центра то частицы, скорости и углу к нормали.

|  |
| --- |
|  |

Теперь у нас есть 3 переменных и уравнение переноса 1 порядка в этих переменных. Как известно, решением будет функция, зависящая от двух первых интегралов движения.

Уравнения движения в центральном поле имеют два первых интеграла, выражающих закон сохранения энергии и импульса.

И решение соответственно будет:

находится исходя из условий вдали от тела. Там фазовая плотность находится из пространственной плотности и функции распределения по скоростям ( ).

Выразим фазовый объем через новые переменные и получим.

Двойка берется из того, что принимает два значения на входе и выходе частицы. В итоге получаем, что

Теперь перейдем к граничным условиям.

Будем считать, что есть выделенная скорость , которая отвечает за относительное движение тела, а само распределение по скоростям изотропно, тогда . Обозначим , тогда

Нам необходимо усреднить фазовую плотность по углу , определяющего положение частицы (рисунок) и углу , указывающего на направление скорости частицы в полярных координатах репера (рисунок).

Для этого перейдём в промежуточные переменные . Где – радиальная скорость, а – угловая. В отличии от переменных , такой набор не допускает неоднозначности с двойкой. В этих переменных фазовый объем в скоростях равен

А выражаются переменные через следующие соотношения:

|  |
| --- |
|  |

Для усреднения берем интеграл:

Заметим, что формально – это телесный угол , который проходится вектором . Тогда получается усреднение по сфере.

Введем вспомогательный вектор скорости, равный (это не вектор реальной скорости). Он же выражается в наших координатах как . Получаем, что

Видно, что после избавления от ненужных параметров, мы получаем изотропное распределение (нет зависимости от момента) с некоторым сдвигом.

Возьмем нормальное распределение по скоростям.

Интегрирование дает

Для получения скорости захвата, нужно проинтегрировать вероятность захвата в единицу времени по количеству частиц в фазовом объеме. Это дает

После интегрирования по моменту получаем

1. Интегрирование.

В модели тела задается таблица зависимости некоторых величин от радиуса. Радиус и масса вещества внутри этого радиуса дается в относительных единицах. Безразмерный радиус обозначим буквой , а безразмерную массу – .

Введем безразмерный потенциал по аналогии

Потенциал – это потенциал точечной массы солнца на расстоянии . По теореме гаусса

Где – ускорение свободного падения на поверхности солнца.

Из уравнения Пуассона получается уравнение на гравитационный потенциал внутри тела.

Скорость захвата выражается через безразмерный потенциал.

Для интегрирования будем использовать безразмерные параметры: радиус , безразмерное сечение на элементе , где – характерное упругое сечение, массовую долю элемента , безразмерную плотность и массовое число ядер . Тогда скорость захвата на -ом элементе равна

Разделив и умножив на характерную скорость получаем:

Численной процедурой находим величину , интегрируя по объему получаем преобразованное сечение захвата

Выражаем через него скорость захвата.

1. Температура

При ненулевой температуре красная сфера смещается и может попасть на границу зеленой, тогда происходит упругий захват. Из-за температуры происходит и испарение. Найдем сечение этих процессов.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ЛСО | СЦМ исп. | СЦМ зах. |

Пусть скорость мишени – , а скорость частицы – . Скорость переноса равна

А скорость частицы в системе центра масс:

Сперва найдем модуль и и угол между этими векторами .

Упругое столкновение происходит когда

Тогда угол в сферических координатах нужно выразить через – угол, отсчитанный от .

Тогда в формуле для сечения интегрируем по от до , а от до в случае захвата и от до в случае испарения.

Используя формулу сечения, получим результат для разных .

Сечение захвата и испарения принимает вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | захват | испарение |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. Влияние ядерных резонансов.

В случае, если масса налетающей частицы меньше массы мишени, захват может произойти за счет переходя ядра на энергию . Найдем условие, при котором происходит резонанс.

В системе центра масс запишем закон сохранения энергии. И найдем выходной импульс.

|  |
| --- |
| СЦМ |

Как видно из рисунка, условие захвата выполняется в случае, если

Выразим импульсы через скорость в ЛСО

Только порядка , то второе слагаемое порядка , т.е. требуется скорость на порядок больше, чтобы произошёл резонанс.