Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт

(государственный университет)»

Факультет проблем физики и энергетики

**ДИПЛОМНАЯ РАБОТА**

Рассеяние и захват частиц темной материи в Солнце.

Выполнил:

студент 783а группы

Товстун Артем Александрович

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., проф.

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Москва 2021

Содержание

[**Введение** 3](#_Toc75709229)

[**1.Расчет сечения захвата** 4](#_Toc75709230)

[**1.1. Определение матричного элемента** 4](#_Toc75709231)

[**1.2. Кинематика и дифференциальное сечение.** 5](#_Toc75709232)

[**1.3. Сечение при малых импульсах фотона.** 7](#_Toc75709233)

[**1.4. Кинематика захвата и сечение.** 10](#_Toc75709234)

[**1.5. Влияние температуры.** 12](#_Toc75709235)

[**2.Расчет скорости захвата** 16](#_Toc75709236)

[**2.1. Определение фазовой плотности.** 17](#_Toc75709237)

[**2.2. Описание процесса интегрирования.** 20](#_Toc75709238)

**Введение**

**1.Расчет сечения захвата**

Сечение захвата в данной задаче – это характеристика, показывающая вероятность столкновения частицы темной материи с ядром и ее захватом небесным телом.

Для нахождения сечения захвата необходимо определить матричный элемент теории и проинтегрировать его по той части фазового объема, при котором частица темной материи переходит на стационарную орбиту.

## **1.1. Определение матричного элемента**

Мы запишем лагранжиан теории, содержащую фермионы: частицу ТМ и нуклон, взаимодействующие при помощи четырёхточечной вершины, и электромагнитное поле.

где – 4-х компонентные спиноры и массы мишени и частицы темной материи соответственно, – вектор потенциал и тензор напряженности ЭМП, – заряд нуклона.

и – матрицы которые должны быть самосопряженными по Дираку, чтобы лагранжиан был вещественным.

Возможные матрицы соответствуют взаимодействию через массивный и очень тяжелый скалярный или векторный бозон.

Сразу заметим, что если рассеивается не частица, а античастица темной материи (со входным и выходным импульсом ), то вычисления определялись бы лагранжианом преобразованным оператором зарядового сопряжения ТМ.

Исходя из правил преобразования вершин [ППВ]

можно получить, что не изменится в скалярном взаимодействии, и изменится с на в векторном случае. Что соответствует замене .

Сначала рассмотрим случай с одним нуклоном и скалярным взаимодействием. Матричный элемент упругого рассеяния тогда равен

Квадрат матричного элемента находится после усреднения по спинам.

Для скалярного матричного элемента это дает

В нерелятивистском случае существует несколько вариантов:

1. и
2. ,
3. ,

В этих случаях дифференциальное сечение принимает следующий вид:

где – полное сечение упругого взаимодействия с нуклоном, посчитанное при импульсе (который соответствует характерной скорости в задаче). Поскольку это неизвестная величина, то ответ будем выражать через него.

Неупругое рассеяние происходит при испускании нуклоном фотона (рисунок 1)

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Рисунок 1.

Квадрат матричного элемента в таком случае следующий

Видно, что он состоит из трех частей, имеющих разную степень импульса фотона в знаменателе. Друг к другу они соотносятся по порядку величины как

Как видно из формулы , каждое следующее слагаемое меньше следующего на величину порядка

где – скорость ТМ, поэтому в нерелятивистском случае в неупругом рассеянии будет преобладать исключительно мягкий вклад.

Далее необходимо получить сечение для ядра, исходя из сечения для нуклона. В таком случае нужно производить не усреднение по спинам ядра, а разложение спинора в нерелятивистском случае. Для спинора разлагаем известное решение в ряд Тейлора по импульсу.

где – классический спинор, а – оператор спина. Тогда скалярное произведение спиноров будет следующим

Таким образом, можно считать, что нуклон и частица ТМ взаимодействуют с помощью потенциала или . Для разных взаимодействий он будет иметь вид:

|  |  |
| --- | --- |
| Вид взаимодействия | Потенциал |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Таблица 1.

Потенциал взаимодействия с ядром – это сумма потенциалов взаимодействия с нуклонами.

Если переданные импульсы достаточно малы, то можно пренебречь экспоненциальным множителем. Тогда в потенциалах из таблицы 1 можно заменить массу нуклона на массу ядра (если предположить, что нейтроны и протоны взаимодействуют одинаково с ТМ) либо спин нуклона на спин ядра. Дифференциальное сечение тогда будет иметь тот же вид, что , только вместо будет стоять .

Проблема зависящего от спина ядра потенциала заключается в том, что спин наиболее распространенных земных и солнечных элементов (кроме водорода) равен нулю. Поэтому полный захват будем изучать на спин независимом потенциале.

Выразим полное сечение рассеяния с ядром через сечение рассеяния на нуклоне.

где – число нуклонов в ядре, – отношение массы частицы ТМ к массе нуклона.

## **1.2. Кинематика и дифференциальное сечение.**

Сечение находится из матричного элемента по формуле[PDG]

где – импульс и энергия вылетающей частицы, – импульс и энергия фотона, – приобретаемая энергия мишени. Интеграл будем брать в системе центра масс (рисунок 1), где кинематика относительно простая.

|  |
| --- |
|  |

Рисунок 1.

В сферических координатах фазовый объем и телесные углы равны

При этом телесный угол отсчитывается не от оси , а от , а телесный угол , если матричный элемент инвариантен относительно вращений вокруг оси .

Введя систему координат, связанную с вектором , находим выражение для импульса фотона и ядра из закона сохранения импульса.

Далее дельта функция снимается с помощью интегрирования по энергии фотона

А из закона сохранения энергии и импульса находится импульс фотона.

Итого дифференциальное сечение в системе центра масс выражается следующим образом

Видно, что при неупругом соударении в системе центра масс выходящий импульс пробегает весь шар радиуса , а не только его границу. Интегрирование по телесному углу фотона не содержит никакой сингулярности, поэтому его можно проводить численно с помощью схемы сколь угодно высокого порядка, например, методом гаусса.

## **1.3. Сечение при малых импульсах фотона.**

При испускании мягкого фотона с бесконечно малой энергией учитывается только инфракрасно расходящийся вклад матричного элемента равный

где – матричный элемент упругого рассеяния.

Если ввести малую массу фотона [ПШКТП], сделать замену и ввести обозначения

то сечение процесса с испусканием фотона будет иметь следующий вид

Но так как матричный элемент и фазовый объем – непрерывно дифференцируемые функции по импульсам и , которые при малых импульсах фотона являются гладкими по и , потому что задаются в неявном виде с помощью функции, производные которой не ноль и не бесконечность

из чего следует, что , то есть - гладкая функция при , значит функция из – гладкая и имеет константу Липшица по переменной . Следовательно, интеграл можно представить в виде суммы его упрощенного варианта, где , и добавки , стремящейся к нулю с первым по порядку.

Далее, в интеграле проводим замену переменных

и выделяем расходящуюся часть, приравняв к единице и проделав похожие рассуждения с константой Липшица по аргументу . Поэтому расходящаяся часть сечения имеет вид

В итоге переходит при подстановки фазового объема и матричного элемента в следующее выражение

Этот интеграл берется с помощью техники усреднения по телесному углу и параметров Фейнмана.

Зная, как проводится усреднение по телесному углу,

получаем значение интеграла .

Мягкая часть сечения равна известному результату [Вайнберг]

Где и равны следующим выражениям

В нерелятивистском приближении они равны соответственно

Известно [ПШ], что петлевой вклад в упругом сечении сокращает расходимость, тогда регуляризованные массой фотона упругое и неупругое сечения имеют соответственно вид

Хотя сумма сечений не расходится, однако нельзя строго разделить упругое сечение и неупругое – результат будет зависеть от . Это отражает тот факт, что экспериментально невозможно отличить чисто упругое рассеяние и неупругое с бесконечно маленьким импульсом фотона. Поэтому корректно считать неупругими лишь те столкновения, где кинематика нисколько не задевает упругую часть.

Далее, продифференцировав по , получаем в нерелятивистском случае выражение для неупругого сечение, которое совпадает с [СТАТЬЯ].

Также, используя результаты выше, можно в нерелятивистском случае выразить интеграл по телесному углу в формуле .

## **1.4. Кинематика захвата и сечение.**

Захваченной частица считается в том случае, если ее энергия станет менее чем гравитационный барьер небесного тела. Это условие эквивалентно тому, что скорость частицы в лабораторной системе отсчета станет меньше чем скорость вылета (), которая выражается через гравитационный потенциал .

Изобразим условие захвата на рисунке 2 (в лабораторной СО и в системе центра масс). Зеленым цветом закрашена область возможного выходного импульса, а красным – область, при в которой происходит захват. Для нахождения сечения захвата необходимо проинтегрировать дифференциальное сечение по пересечению красной и зеленой области.

|  |  |
| --- | --- |
| ЛСО | СЦМ |

Рисунок 2.

В системе центра масс скорость частицы ТМ равна

Расстояние от центра красной сферы захвата до центра мисс равно

В системе центра масс условие захвата выглядит следующим образом

Существует несколько вариантов расположения двух сфер:

1. При – красная сфера внутри зеленой. Происходит неупругий процесс.
2. При – упругое столкновение. Неупругий вклад не учитывается из соображений в предыдущем разделе.
3. При – частица ТМ не замечает ядро и не захватывается.

Как мы выяснили в предыдущем разделе, для упругого сечения захвата нужно проинтегрировать дифференциальное по переменной от до , который находится из .

Для неупругого случая можно интегрировать дифференциальное сечение в сферическое системе координат, связанной с красным шаром.

Импульс и через вспомогательный импульс и косинус выражаются следующим образом:

## **1.5. Влияние температуры.**

При ненулевой температуре красная сфера смещается и может попасть на границу зеленой, тогда происходит упругий захват. Из-за температуры происходит и испарение.

|  |  |
| --- | --- |
| СЦМ исп. | СЦМ зах. |

Рисунок 3.

Если – скорость ядра, а – частицы ТМ, то скорость переноса и скорость в системе центра масс изменятся, а между ними появляется угол .

Упругое столкновение происходит, как мы выяснили выше, при . Если раскрыть модуль и найти предельные при постоянных модулях скоростей случаи, достигающиеся при коллинеарных векторах и , то мы получим ограничения модуля скорости ядра, при котором происходит температурное взаимодействие.

С помощью отрицания можно получить условие, при котором не происходит упругого захвата.

Для Солнца при характерных скоростях ТМ , близко к , поэтому, разлагая его в ряд Тейлора, получится условие неупругости захвата

Это условие не мажет быть выполнено в интересующих нас массах и при Солнечных температурных скоростях. Поэтому на Солнце неупругий процесс не вносит никакого вклада в захват.

Для Земли выполняется, когда массы ядра и частицы ТМ различаются.

Сечение для процесса с температурой будем брать методом Монте-Карло, поскольку пределы интегрирования сложны, а подынтегральные выражения не гладкие функции.

Частично сечение можно посчитать и аналитически. Для этого в системе центра масс нужно перейти в сферические координаты относительно вектора , выразить угол вылета (угол между вектором конечной скорости и начальной) через (угол между вектором конечной скорости и скорости переноса ).

Тогда в формуле для сечения интегрируем по от до , а от до в случае захвата и от до в случае испарения.

Если сечение взаимодействия имеет следующий вид

то сечение захвата или испарения мы представим в следующем виде:

где – безразмерный множитель, приведенный в таблице ниже и выраженный через переменные и , равные

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | захват | испарение |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Таблица 1.

Для того, чтобы получить эффективное сечение захвата, как в неупругом случае (т.е. вероятность процесса на единицу времени равна ), нужно проинтегрировать по температурному распределению ядер сечение, полученное выше.

Этот интеграл мы будем брать методом Монте-Карло. Направление вектора находится с помощью сферического распределения, когда косинус угла распределен равномерно от до . Модуль вектора мы разыграем со следующим генератором:

где – минимальная скорость из или , а – рандомное число от нуля до единицы.

Поскольку плотность распределения в таком распределении следующая

то для взятия интеграла методом Монте-Карло нужно еще до множить

подынтегральную функцию на множитель ниже и найти среднее значение итоговой функции в случайных точках.

**2.Расчет скорости захвата**

Если – сечение захвата на частице определенного сорта, то вероятность захвата на такой частице за единицу времени выражается через концентрацию элемента сорта .

где – концентрация элемента сорта .

Для нахождения скорости захвата нужно проинтегрировать по фазовой плотности (распределение частиц по скоростям и координатам).

Если по индексу ведется суммирование, то – полная скорость захвата, иначе – скорость захвата на конкретном элементе.

## **2.1. Определение фазовой плотности.**

Фазовая плотность удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана [], которое следует из закона сохранения частиц (что верно при малом взаимодействии частиц ТМ) и теоремы Лиувилля. Предположим, что имеет стационарное распределение, в итоге стационарное уравнение будет следующим

здесь – это гравитационный потенциал с обратным знаком (т.е. его модуль).

Мы не будем учитывать неоднородности сферического тела по угловым координатам, поэтому уравнения движения и фазовая плотность зависит только от трех переменных: скорость , радиус и угол (рисунок 3).

|  |
| --- |
|  |

Рисунок 3.

Известно [], решением линейного уравнения первого порядка с тремя переменными – функция, зависящая от двух первых интегралов движения частицы в центральном поле. Это уравнение имеет два известных интеграла – энергия и момент импульса (мы будем брать их на единицу массы).

В этих переменных фазовый объем будет следующим

Для решения осталось определить граничные условия вдали от тела, где фазовая плотность ТМ состоит из постоянной плотности и плотности распределения по скоростям .

Если – однородно распределена, то ответ найден

Иной случай возникает, когда тело движется относительно гало ТМ со скоростью (скорость вращения Солнечной системы вокруг центра галактики).

А вот внутри гало ТМ распределена однородно и выражается через скорость

Для того, чтобы найти , необходимо усреднить по углу (рисунок 4), определяющего положение частицы (рисунок) и углу , указывающего на направление скорости частицы в полярных координатах репера . Тогда можно найти координаты вектора и его модуль.

|  |
| --- |
|  |

Рисунок 4.

Если заметить, что – это телесный угол , который проходится вектором и ввести вектор , то усреднение будет следующим

В результате, эффективная функция распределения будет изотропна.

В нашей задаче мы возьмем нормальное распределение по скоростям темной материи

Итоговая функция распределения будет следующей

Поскольку функция распределения однородная, то в можно проинтегрировать по моменту импульса и получить конечное выражение для скорости захвата.

## **2.2. Описание процесса интегрирования.**

Для интегрирования будем использовать модель Солнца[] и Земли [], где задана таблица величин, зависящих от безразмерного радиуса .

Для Солнца и Земли радиусы равны соответственно

Мы также введем безразмерную массу и безразмерный потенциал , равные отношению соответствующих величин к их значениям в

Потенциалы на поверхности Солнца и Земли следующие

Из уравнения Пуассона находится безразмерный гравитационный потенциал внутри тела.

Скорость захвата выражается через безразмерный потенциал.

где – скорость вылета на поверхности. Для Солнца и Земли это

Для интегрирования будем использовать безразмерные параметры: радиус , безразмерное сечение захвата на элементе ( – полное упругое сечение взаимодействия, посчитанное при скорости частицы ТМ на бесконечности равной ), массовую долю элемента , безразмерную плотность вещества ( – средняя плотность вещества) и массовое число ядер . Тогда скорость захвата на -ом элементе равна

Этот интеграл будем считать численно в два этапа. Сначала находим безразмерную величину, характеризующую вероятность захвата при начальной скорости

Данные для параметров сферического тела заданы в таблице, и мы будем их аппроксимировать кусочно-линейной функцией. тоже будет задан в виде таблицы (матрицы), поэтому будем интегрировать с помощью метода трапеций. Результатом будет одномерный массив.

Далее берем второй интеграл по скоростному распределению методом трапеций и получаем безразмерный фактор подавления.

Скорость захвата выражается через .

Из плотности темной материи равной можно найти концентрацию ТМ зная ее массу. Запишем тогда для Солнца и Земли , подставив известные числа.

где – выражаются в пикобарнах, а – отношение массы частицы ТМ к массе нуклона.

Скорость захвата на единицу объема Солнца и Земли тогда следующие

Если выразить сечение взаимодействия на ядре , то изменится на

Величина сечения на нуклоне неизвестна, выражение в квадратных скобках – это число в формуле или , а величина – будет искомой в данной задаче.

**3.Результаты расчета.**