1 Уравнение Больцмана

1.1 Фазовый объем

Мы не будем учитывать неоднородности сферического тела по угловым координатам, поэтому уравнения движения и фазовая плотность зависит только от трех переменных: скорость v, радиус r и орбитальный момент $L = rv$. Фазовый объем в новых переменных выглядит следующим образом:

$$d\Phi = d^3\vec{x}d^3\vec{v} = 4\pi r^2 dr \cdot \frac{2\pi v dv dL^2}{r\sqrt{r^2v^2 - L^2}} \tag{1}$$

Можно взять вместо скорости v радиальную скорость v_r и тогда фазовый объем станет следующим:

$$d\Phi = 4\pi r^2 dr \cdot \frac{2\pi dv_r dL^2}{r^2} = 8\pi^2 dr dv_r dL^2 \tag{2}$$

Однородный потенциал $\phi(r)$ возьмем положительным. Тогда уравнение движения и закон сохранения энергии будут следующими:

$$\dot{\vec{r}} = -\nabla\phi(r) E = \frac{v^2}{2} + \phi(r) \tag{3}$$

1.2 Сокращение циклических переменных

Если ТМ взаимодействует с собой слабо, то можно не учитывать ее столкновения, и уравнение Больцмана станет линейным. Поскольку планету мы считаем изотропной, то ни интеграл столкновений, ни левая часть не будут зависеть от направления радиус вектора. Тогда по телесному углу в пространстве можно усреднить. Таким же образом можно усреднить по углу ϕ скорости. Останется только переменные r,v_r,L. Уравнение Больцмана примет вид:

$$\frac{df}{dt} = C\,(r,v_r,L) + Stf(r,v_r',L')\,(r,v_r,L) \tag{4}$$

Еще одной циклической переменной, от которой нужно избавится, является параметр обиты (любая орбита определяется переменными E,L). Это может быть угол в полярных координатах либо время траектории τ. Тогда f выражается следующим образом

$$f(E,L,\tau) = f(r(E,L,\tau),v_r(E,L,\tau),L) \tag{5}$$

Введем также операцию усреднения по периоду T (или большому промежутку времени) и проведем циклическое интегрирование по времени τ (т.е. по траектории)

$$\oint \frac{df}{dt} d\tau = \frac{1}{T}\oint \frac{df}{dt} dt = \frac{f\,(t+T,r,v_r,L) - f\,(t,r,v_r,L)}{T} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_T \tag{6}$$

Теперь ни правая ни левая части не зависят от τ и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C\,(E,L) + St[f](E,L) \tag{7}$$

1.3 Уравнение движения в потенциале

Уравнения движения записываются с помощью эффективного потенциала

$$E = H = \frac{v_r^2}{2} + \left(\phi(r) + \frac{L^2}{2r^2}\right) = \frac{v_r^2}{2} + U_{eff}(L,r) \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial v_r} \\ \dot{v}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} \end{cases} \tag{9}$$

В гамильтоновой системе фазовый объем равен $dpdq = dtdE$

$$d\Phi = 8\pi^2 dr dv_r dL^2 = 8\pi^2 T dE dL^2 \tag{10}$$

где T — период траэктории движения при эенргии E и моменте L

Решать уравнения будем в безразмерном виде

$$r = Rx,\;\; v = V_{esc}\nu,\;\; t = T\tau,\;\; \phi = -\varphi\frac{V_{esc}^2}{2},\;\; l = xv_\perp,\;\; e = \frac{E}{\phi(r = R)} \tag{11}$$

Где R – радиус тела, V_esc – скорость захвата в точке $r = R$, $T = \frac{R}{V_esc}$ – характерное время, e – безразмерная энергия.

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\nu},\;\; \dot{\vec{\nu}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\varphi \tag{12}$$

$$e = \varphi - \nu^2 = \varphi - \nu_\parallel^2 - \frac{l^2}{x^2} \tag{13}$$

Период траэктории равен

$$\tau\left(e,l\right) = \int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) - e - \frac{l^2}{x^2}}} \tag{14}$$

в точках x_1 и x_2 корень обнуляется

1. Случай, когда все за планетой

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\frac{1}{x}\\ \tau(e,l) &= \frac{\pi}{2\left(e\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{15}$$

2. Если есть пересечение Внешняя часть интеграла равна

$$\tau_{out}\left(e,l\right) = \int_1^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - e - \frac{l^2}{x^2}}} = \frac{\pi}{2(e)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{1 - e - l^2}}{(e)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{-1+2e}{2\sqrt{e}\sqrt{1-e-l^2}}\right)}{2(e)^{\frac{1}{2}}} \tag{16}$$

Внутренняя часть интеграла вычисляется численно (одновременно находится и траэктория частиц). Потенциал на маленьком отрезке приближенно равен $\varphi = a - bx^2$

$$d\tau \approx \int_x^{x+dx}\frac{dx}{\sqrt{a - bx^2 - e - \frac{l^2}{x^2}}} = \left.\frac{\arcsin\left(\frac{a - e - 2bx^2}{\sqrt{(a-e)^2 - 4bl^2}}\right)}{2\sqrt{b}}\right|_x^{x+dx}$$

1.4 Полная Скорость захвата

Полная скорость захвата это интеграл

$$C_+ = \int d^3\vec{r}\cdot d^3\vec{v} f_k\left(r,v\right)\cdot n_p f_B\left(\vec{v}_1\right) d^3\vec{v}_1\cdot\Gamma\left(\vec{v},\vec{v}_1,r\right)$$

где

$$\Gamma\left(\vec{v},\vec{v}_1,r\right) = \int\limits_{v'<v_{esc}} d^3\vec{v}\,'\delta\left(E_f - E_{in}\right)\cdot\frac{m_k^3\left|\mathcal{M}\right|^2}{64\pi^2 m_i^2 m_k^2}$$

а матричный элемент равен

$$|\mathcal{M}|^2 = 16G_F^2 m_i^2 m_k^2 \cdot \Phi\left(q^2\right) dF$$

$$dF = \begin{cases} 1 & \text{elastic} \\ \dfrac{s^2}{3} I^2(n) dn & \text{migdal} \\ \dfrac{s^2}{3} I^2(\phi) \dfrac{d\phi}{2\pi} & \text{ionization} \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} 1 & \text{scalar-scalar} \\ \dfrac{-\,q^2/2}{m_p^2 \ or \ m_k^2} & \text{scalar-pseudoscalar} \\ \dfrac{q^4/4}{m_p^2 m_k^2} & \text{pseudoscalar-pseudoscalar} \end{cases}$$

Сечение ищется в системе ц.м.

$$\vec{V} = \frac{m_i \vec{v}_1 + m_k \vec{v}}{m_i + m_k}$$

$$\vec{\nu} = \frac{m_i}{m_i + m_k} \left(\vec{v} - \vec{v}_1\right)$$

$$\vec{\nu} - \vec{\nu}\,' = \frac{m_i}{m_i + m_k} \left(\vec{v} - \vec{v}\,' + \vec{v}_1' - \vec{v}_1\right) = \frac{m_i}{m_i + m_k} \left(\vec{v} - \vec{v}\,'\right) \left(1 + \frac{m_k}{m_i}\right) = \left(\vec{v} - \vec{v}\,'\right)$$

В такой замене переданный импульс равен

$$\vec{q} = m_k \left(\vec{\nu} - \vec{\nu}\,'\right)$$

Сечение соударений тогда равно

$$\Gamma\left(\vec{v},\vec{v}_1,r\right) = \frac{m_i}{m_k\left(m_i + m_k\right)} 4\pi\nu' d\vec{n}\,' \cdot \frac{m_k^3 |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_i^2 m_k^2} = \nu' d\vec{n}\,' \frac{G_F^2}{\pi} \frac{m_i m_k^2}{\left(m_i + m_k\right)} \Phi dF$$

А общая скорость захвата имеет вид

$$C_+ = V n_\chi \frac{G_F^2}{\pi} \frac{m_i m_k^2}{\left(m_i + m_k\right)} \ d\xi \cdot f_{rm}\left(\alpha_v\right) d\alpha_v \cdot n_i f_B^{rm} d\omega dc_1 \cdot \nu' d\vec{n}\,' \Phi\left(q^2\right) dF \tag{17}$$

Первая часть — размерные множетели, вторая — безразмерные части интгрирования методом монте-карло. $d\xi$ — выбор координаты r, $f_{rm}\left(\alpha_v\right) d\alpha_v$ — выбор скорости частицы т.м., n_i — концентрация мишени в точке, $f_B^{rm} d\omega dc_1$ — выбор скорости мишени, $\nu' d\vec{n}\,' \Phi\left(q^2\right) dF$ — выбор выходной скорости.

Концентрация элемента i равна

$$n_i(r) = \frac{\rho(r)\widetilde{\rho}_i(r)}{m_i} = \overline{\rho} \frac{\widehat{\rho}(r)\widetilde{\rho}_i(r)}{m_i}$$

Итоговым результатом будет безразмерная скорость захвата c_+, тогда

$$C_+ = \sum c_{i+} \cdot \left[V \overline{\rho} n_\chi \frac{G_F^2}{\pi} m_k\right]$$

$$c_{i+} = \frac{m_k}{m_k + m_i} d\xi \cdot f_{rm}\left(\alpha_v\right) d\alpha_v \cdot \widehat{\rho}(r)\widetilde{\rho}_i(r) f_B^{rm} d\omega dc_1 \cdot \nu' d\vec{n}\,' \Phi\left(q^2\right) dF$$

Для поиска распределения по энергии и импульсу нужно при интегрировании найти выходную скорость и добавить соответствующий вес в гистограмму.

1.4.1 Интеграл столкновений

Интеграл столкновений превратится в матрицу столкновений, элементами которой будут вероятности за единицу времени перейти из одного бина в другой. Помимо матрицы столкновений есть еще вектор испарения (туда попадает то, что не попало в матрицу столкновения).

Эта величина считается точно так же как и скорость захвата (17), но та часть интеграла, которая выбирает скорость и положение частицы $Vn_\chi d\xi f_{rm}(\alpha_v)\, d\alpha_v$, изменяется на выражение, определяющее положение и направление движения частицы при известном e и l

$$\frac{T_{in}}{T_{in}+T_{out}} \cdot d\tau d\vec{n} \tag{18}$$

где T_{in} — часть периода внутри тела, T_{out} — снаружи, $d\tau$ — выбор времени

В итоге получается (после обезразмеривания)

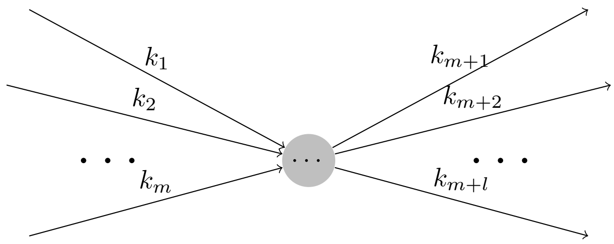
$$ST = \sum st_i \cdot \left[\overline{\rho}\frac{G_F^2}{\pi} m_k\right]$$

$$st_i = \frac{T_{in}}{T_{in}+T_{out}} \cdot d\tau d\vec{n} \frac{m_k}{m_k+m_i} d\xi \cdot \widehat{\rho}(r)\widetilde{\rho}_i(r) f_B^{rm} d\omega dc_1 \cdot \nu' d\vec{n}\,' \Phi\left(q^2\right) dF$$

Интеграл столкновений тоже обезразмерим, выкинув массы и константы

Средняя концентрация элемента i $(\cdot\overline{n}_i)$ выражается через плотность

1.4.2 Неупругости и трехчастичный удар



В классической нормировке вероятность соударения $k_1...k_m \leftarrow k_{m+1}...k_{m+l}$ равна квадрату S-матрицы.

$$P = \left| \langle k_1...k_m|S|k_{m+1}...k_{m+l}\rangle \right|^2$$

Состояния в классическом и релятивистком случае нормируются так:

$$\langle k|p\rangle = \delta_{kp}$$
$$\langle k|p\rangle = 2E_k(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{p})$$

Тогда классический вектор выражается через релятивисткий, (полагая, что $(2\pi)^3\delta^{(3)}(0) = V$ — объем пространства).

$$|p\rangle_K = \frac{|p\rangle_R}{\sqrt{2EV}}$$

а вероятность столкновения

$$P = VT\prod_i \frac{1}{2E_iV} \cdot |\mathcal{M}|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_{out}-k_{in})$$

В этом выражении T — это интервал времени, т.е. dt, а V — объем, т.е. $d^3\vec{x}$.

Суммирование по импульсам в классическом случае — это интеграл с дифференциалом

$$\frac{Vd^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$$

При этом у входных импульсов есть еще функция распределения

В итоге, интеграл столкновений выглядит следующим образом

$$\frac{dN}{dt} = \frac{P}{T} = \int d^3\vec{r} \prod_i \frac{d^3\vec{k}_i}{2E_i(2\pi)^3} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{out} - k_{in}) \prod_{in} f_B(\vec{r},\vec{k}_i)$$

Все входные интегралы умножаются на функцию распределения, которая в Больцмановском случае равна

$$f_B(\vec{r},\vec{k}) = \frac{n}{(2\pi m T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\vec{k}^2}{2mT}\right)$$

1.4.3 Концентрация Атомов

Количество атомов водорода (неионизированнх) и свободных электронов можно очценить с помощбью формула Саха

$$\frac{n_e n_p}{n_A} = \frac{g_e g_p}{g_A} (2\pi m_e T)^{3/2} e^{-J/T}$$

Безразмерный параметр $f = n/m^3$ - концентрация, деленая на куб массы. Через этот параметр выразим степень ионизации c_e.

$$\frac{c_e^2}{1 - c_e} = \frac{1}{s} = \frac{g_e g_p}{g_A} \frac{1}{f_p} \left(\frac{2\pi T}{m}\right)^{3/2} e^{-J/T}$$

Отсюда

$$c_e = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4s}}$$
$$c_A = 1 - c_e = \frac{4s}{(1 + \sqrt{1 + 4s})^2}$$