Оглавление

1. Уравнение Больцмана

1.1. Фазовый объем

Мы не будем учитывать неоднородности сферического тела по угловым координатам, поэтому уравнения движения и фазовая плотность зависит только от трех переменных: скорость v, радиус r и орбитальный момент $L = rv$.

Фазовый объем в новых переменных выглядит следующим образом:

$$d\Phi = d^3\vec{x}d^3\vec{v} = 4\pi r^2 dr \cdot \frac{2\pi v dv dL^2}{r\sqrt{r^2v^2 - L^2}}$$

Можно взять вместо скорости v радиальную скорость v_r и тогда фазовый объем станет следующим:

$$d\Phi = 4\pi r^2 dr \cdot \frac{2\pi dv_r dL^2}{r^2} = 8\pi^2 dr\, dv_r dL^2$$

Однородный потенциал $\phi(r)$ возьмем положительным. Тогда уравнение движения и закон сохранения энергии будут следующими:

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla\phi(r)$$

$$E = \frac{v^2}{2} + \phi(r)$$

1.2. Сокращение циклических переменных

Если ТМ взаимодействует с собой слабо, то можно не учитывать ее столкновения, и уравнение Больцмана станет линейным. Поскольку планету мы считаем изотропной, то ни интеграл столкновений, ни левая часть не будут зависеть от направления радиус вектора. Тогда по телесному углу в пространстве можно усреднить. Таким же образом можно усреднить по углу φ скорости. Останется только переменные r, v_r, L.

Уравнение Больцмана примет вид:

$$\frac{df}{dt} = C(r, v_r, L) + St[f(r, v_r', L')](r, v_r, L)$$

Еще одной циклической переменной, от которой нужно избавится, является параметр обиты (любая орбита определяется переменными E, L). Это может быть угол в полярных координатах либо время траектории τ. Тогда f выражается следующим образом

$$f(E, L, \tau) = f(r(E, L, \tau), v_r(E, L, \tau), L)$$

Введем также операцию усреднения по периоду T (или большому промежутку времени) и проведем циклическое интегрирование по времени τ (т.е. по траектории)

$$\oint \frac{df}{dt} d\tau = \frac{1}{T} \oint \frac{df}{dt} dt = \frac{f(t+T, r, v_r, L) - f(t, r, v_r, L)}{T} = \langle \frac{\partial f}{\partial t} \rangle_T$$

Теперь ни правая ни левая части не зависят от τ и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C(E, L) + St[f](E, L)$$

1.3. Уравнение движения в потенциале

Сразу запишем в полярных координатах.

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$r^2 \dot{\varphi} = L = const$$

$$E = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{2} + \phi(r) = const$$

Делаем замену

$$\dot{r} = v_r, \qquad \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}$$

$$\dot{v}_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{L^2}{r^3} = -g(r) + \frac{L^2}{r^3}$$

$$E = \frac{v_r^2 + \frac{L^2}{r^2}}{2} + \phi(r) = \frac{v_r^2}{2} + \left(\phi(r) + \frac{L^2}{2r^2}\right) = \frac{v_r^2}{2} + U_{eff}(L, r)$$

Из условия $v_r = 0$ находятся r_- и r_+ - максимум и минимум отдаления от центра.

$$E = U_{eff}(L, r_\pm)$$

Поскольку

$$\Delta U_{eff}(L, r) = \Delta\phi(r) + \Delta\frac{L^2}{2r^2} = 4\pi\rho(r) + \frac{L^2}{r^4} > 0$$

И учитывая, что при замене $\xi = r^{-1}$ оператор Лапласа переходит в

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) = \xi^4\partial_\xi^2$$

Получим, что

$$\partial_\xi^2\, U_{eff}(\xi) > 0$$

Что говорит о выпуклости $U_{eff}(\xi)$, существовании единственного экстремума (глобального минимума) и только двух решений уравнения

$$E = U_{eff}(L, r_{\pm})$$

Из ЗСЭ можно выразить $\dot{r}$ и найти период

$$\dot{r} = \sqrt{2\left(E - U_{eff}\right)}$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2\left(E - U_{eff}\right)}} \Rightarrow T = 2\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{2\left(E - U_{eff}\right)}}$$

Делаем замену, которая улучшит сходимость интеграла

$$r = \frac{r_+ + r_-}{2} + \frac{r_+ - r_-}{2}\cos\theta\,, \qquad dr = \frac{r_+ - r_-}{2}\sin\theta\, d\theta$$

$$2\left(E - U_{eff}\right) = Q(r)\cdot(r - r_-)(r_+ - r) = \left(\frac{r_+ - r_-}{2}\right)^2 Q(r)\sin^2\theta$$

$$T = 2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{Q\left(r(\theta)\right)}}$$

Прейдем к переменной τ

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = v_r T, \qquad \frac{\partial v_r}{\partial \tau} = -g(r)T + \frac{L^2}{r^3}T$$

$$r(\tau = 0) = r_-, \qquad v_r(\tau = 0) = 0$$

Якобиан перехода от координат r, v_r к координатам E, L, τ обозначим как

$$J(E, L, \tau) = \frac{\partial(r, v_r, L)}{\partial(E, L, \tau)} = \frac{\partial(r, v_r)}{\partial(E, \tau)}$$

$$dr\, dv_r L^2 = J(E, L, \tau) dE dL^2 d\tau$$

Здесь нужно заметить, что в гамильтоновой системе $p, q, H(p, q)$ можно сделать промежуточную замену

$$dpdq = dq \cdot \frac{dp(q, E)}{dE} dE = \frac{dq}{dt}\frac{dp(q, E)}{dE} dtdE$$

Но исходя из уравнений движения

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Поэтому якобиан преобразования – единица.

$$dpdq = dtdE = T \cdot d\tau dE$$

После интегрирования по переменной τ получаем урезанный якобиан и выражаем фазовый объем

$$J(E,L) = \int_0^1 J(E,L,\tau)d\tau = T$$

$$d\Phi = 8\pi^2 dr\, dv_r dL^2 = 8\pi^2 T dE dL^2$$

Последнее, что нужно тут найти – это максимальный угловой момент в зависимости от энергии. Он определяется наличием решения

$$E = U_{eff}(L, r_\pm) = \frac{L^2}{2r^2} + \phi(r)$$

Поэтому определяется соотношением

$$E(L_m) = \min_r \left(\frac{L_m^2}{2r^2} + \phi(r) \right)$$

Максимальная энергия равна нулю, минимальная равна $\phi(0)$.

Также нужно учесть, что в распределении нет траекторий, которые не касаются небесного тела. Это означает, что, начиная с энергии, при которой существуют орбиты, не касающиеся небесного тела, эффективный потенциал на границе тела должен быть меньше энергии.

$$E > \frac{L^2}{2R^2} + \phi(R) \Rightarrow L^2 < 2R^2\big(E - \phi(R)\big)$$

В таком случае энергия равна

$$E = \frac{\phi(R)}{2}$$

2. Интеграл столкновений

Количество столкнувшихся частиц в объеме $d^3\vec{r}d^3\vec{v}dt$ определяется матричным элементом

$$dN = d^3\vec{r}dt \cdot f_\chi(\vec{r},\vec{v}) \frac{d^3\vec{v}}{2E_v}\, f_n(\vec{r},\vec{v}_1) \frac{d^3\vec{v}_1}{2E_{v_1}} |\mathcal{M}|^2 2\pi\delta^{(4)}\big(p_i - p_f\big) \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} \frac{d^3\vec{p}_1'}{(2\pi)^3 2E_{p_1'}}$$

1) Количество уходящих частиц

$$C_- = \frac{dN_-}{d^3\vec{r}d^3\vec{v}dt} = f_\chi(\vec{r},\vec{v}) f_n(\vec{r},\vec{v}_1) \frac{d^3\vec{v}_1}{2E_{v_1}} \frac{1}{2E_v} |\mathcal{M}|^2 2\pi\delta^{(4)}\big(p_i - p_f\big) \prod_f \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

$$C_-(\vec{r},\vec{v}) = \int d^3\vec{v}_1\, |\vec{v}-\vec{v}_1| \cdot \sigma(\vec{v},\vec{v}_1) f_\chi(\vec{r},\vec{v}) f_n(\vec{r},\vec{v}_1) =$$

$$f_\chi(\vec{r},\vec{v}) \int d^3\vec{v}_1\, |\vec{v}-\vec{v}_1| \sigma(\vec{v},\vec{v}_1) f_n(\vec{r},\vec{v}_1)$$

$$C_-(E,L) = \int d\tau C_-\big(\vec{r}(\tau,E,L),\vec{v}(\tau,E,L)\big) = f_\chi(E,L) \int d\tau \int d^3\vec{v}_1\, |\vec{v}-\vec{v}_1| \sigma(\vec{v},\vec{v}_1) f_n(\vec{r},\vec{v}_1)$$

2) Количество приходящих частиц (так как матричный элемент инвариантен относительно замены штрихованных скоростей с не штрихованными)

$$C_+(\vec{r},\vec{v}) = \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} \frac{d^3\vec{p}_1'}{(2\pi)^3 2E_{p_1'}} |\mathcal{M}|^2 2\pi\delta^{(4)}\big(p_i - p_f\big) \frac{d^3\vec{v}_1}{2E_{v_1}} f_\chi(\vec{r},\vec{v}') f_n(\vec{r},\vec{v}_1') =$$

$$\int d^3\vec{v}_1'\, |\vec{v}-\vec{v}_1| \cdot d\sigma(\vec{v}',\vec{v}_1' \to \vec{v},\vec{v}_1) f_\chi(\vec{r},\vec{v}') f_n(\vec{r},\vec{v}_1')$$

Тут необходимо выразить $\vec{v}'$ через E' и L'. Делать это можно при фиксированном $\vec{r}$.

$$f_\chi(\vec{r},\vec{v}') = f_\chi(E',L')$$

В случае неупругого рассеяния мы не можем так просто обращать сечение во времени. Начнем с начала, предположив, что матричный элемент неупругого рассеяния выражается через упругое с некоторым дифференциальным фактором.

$$|\mathcal{M}_{in}(v,v_1,v',v_1')|^2 = |\mathcal{M}_0(v,v_1,v',v_1')|^2 dF$$

$$C_+(\vec{r},\vec{v}) = \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} \frac{d^3\vec{p}_1'}{(2\pi)^3 2E_{p_1'}} |\mathcal{M}'|^2 dF 2\pi\delta^{(4)}\big(p_i - p_f\big) \frac{d^3\vec{v}_1}{2E_{v_1}} f_\chi(\vec{r},\vec{v}') f_n(\vec{r},\vec{v}_1')$$

$$|\mathcal{M}'|^2 = |\mathcal{M}_0(v',v_1',v,v_1)|^2 dF$$

$$C_+(\vec{r},\vec{v}) = \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} \frac{d^3\vec{v}_1'}{(2\pi)^3 2E_{p_1'}} |\mathcal{M}'|^2 dF 2\pi\delta\big(E_f + \Delta E - E_i\big) \frac{1}{2E_{v_1}} f_\chi(\vec{r},\vec{v}') f_n(\vec{r},\vec{v}_1')$$

$$E_f + \Delta E - E_i = \frac{p^2}{2m_p} + \frac{k^2}{2m_k} + \Delta E - \frac{k'^2}{2m_k} - \frac{p'^2}{2m_p}$$

$$\vec{p} + \vec{k} = \vec{p}' + \vec{k}' \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}' + \vec{k}' - \vec{k}$$

$$\vec{v}_1' = \frac{\vec{p}'}{m_p}, \qquad \vec{v}' = \frac{\vec{k}'}{m_k}$$

Сначала все считается при известных $\vec{r},\vec{v}$. Тогда в штрихованном интеграле нужна замена:

$$d^3\vec{v}' = J_r(E',L',r)\, d\varphi\, dE'\, dL'^2$$

$$d^3\vec{v}' = \frac{d\varphi dv_r' dL'^2}{r^2}$$

Но при фиксированном $\vec{r}$

$$E = \frac{v_r^2 + \frac{L^2}{r^2}}{2} + \phi(r)$$

$$dE = v_r dv_r, dv_r = \frac{dE}{v_r}$$

$$J_r(E', L', r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\big(E' - \phi(r)\big) - \frac{L'^2}{r^2}}}$$

Якобиан имеет корневую особенность при приближении L'^2 к верхнему пределу

При этом необходимо, чтобы E' и L' находились на траектории, значит

$$E' \geq U_{eff}(L', r) => E' \geq \frac{L'^2}{2r^2} + \phi(r)$$

$$L'^2 \leq r^2 2(E' - \phi(r))$$

$$E' \geq \phi(r)$$

$$\vec{k} = m_k \begin{pmatrix} L/r \\ 0 \\ v_r \end{pmatrix}, \qquad \vec{k}' = m_k \begin{pmatrix} L'/r \cos\varphi \\ L'/r \sin\varphi \\ v_r' \end{pmatrix}$$

$$\frac{(\vec{k}' - \vec{k} + \vec{p}')^2}{2m_p} + E + \Delta E = E' + \frac{p'^2}{2m_p}$$

$$\vec{p}' = p' \begin{pmatrix} \sin\theta_p \cos\varphi_p \\ \sin\theta_p \sin\varphi_p \\ \cos\theta_p \end{pmatrix}$$

$$2E + \Delta E - \frac{\vec{k}'\vec{k}}{m_p} = \frac{1}{m_p}(\vec{k}\vec{p}' - \vec{k}'\vec{p}')$$