Оглавление

1. Уравнение Больцмана 2
1.1. Фазовый объем 2
1.2. Сокращение циклических переменных 2
1.3. Уравнение движения в потенциале 3
2. Интеграл столкновений 5
2.1. Полная скорость захвата 8

1. Уравнение Больцмана

1.1. Фазовый объем

Мы не будем учитывать неоднородности сферического тела по угловым координатам, поэтому уравнения движения и фазовая плотность зависит только от трех переменных: скорость v, радиус r и орбитальный момент $L = rv$.

Фазовый объем в новых переменных выглядит следующим образом:

$$d\Phi = d^3\vec{x}d^3\vec{v} = 4\pi r^2 dr \cdot \frac{2\pi v dv dL^2}{r\sqrt{r^2v^2 - L^2}}$$

Можно взять вместо скорости v радиальную скорость v_r и тогда фазовый объем станет следующим:

$$d\Phi = 4\pi r^2 dr \cdot \frac{2\pi dv_r dL^2}{r^2} = 8\pi^2 dr\, dv_r dL^2$$

Однородный потенциал $\phi(r)$ возьмем положительным. Тогда уравнение движения и закон сохранения энергии будут следующими:

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla\phi(r)$$

$$E = \frac{v^2}{2} + \phi(r)$$

1.2. Сокращение циклических переменных

Если ТМ взаимодействует с собой слабо, то можно не учитывать ее столкновения, и уравнение Больцмана станет линейным. Поскольку планету мы считаем изотропной, то ни интеграл столкновений, ни левая часть не будут зависеть от направления радиус вектора. Тогда по телесному углу в пространстве можно усреднить. Таким же образом можно усреднить по углу φ скорости. Останется только переменные r, v_r, L.

Уравнение Больцмана примет вид:

$$\frac{df}{dt} = C(r, v_r, L) + St[f(r, v_r', L')](r, v_r, L)$$

Еще одной циклической переменной, от которой нужно избавится, является параметр обиты (любая орбита определяется переменными E, L). Это может быть угол в полярных координатах либо время траектории τ. Тогда f выражается следующим образом

$$f(E, L, \tau) = f(r(E, L, \tau), v_r(E, L, \tau), L)$$

Введем также операцию усреднения по периоду T (или большому промежутку времени) и проведем циклическое интегрирование по времени τ (т.е. по траектории)

$$\oint \frac{df}{dt} d\tau = \frac{1}{T} \oint \frac{df}{dt} dt = \frac{f(t+T, r, v_r, L) - f(t, r, v_r, L)}{T} = \langle \frac{\partial f}{\partial t} \rangle_T$$

Теперь ни правая ни левая части не зависят от τ и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C(E, L) + St[f](E, L)$$

1.3. Уравнение движения в потенциале

Сразу запишем в полярных координатах.

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$r^2 \dot{\varphi} = L = const$$

$$E = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{2} + \phi(r) = const$$

Делаем замену

$$\dot{r} = v_r, \qquad \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}$$

$$\dot{v}_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{L^2}{r^3} = -g(r) + \frac{L^2}{r^3}$$

$$E = \frac{v_r^2 + \frac{L^2}{r^2}}{2} + \phi(r) = \frac{v_r^2}{2} + \left(\phi(r) + \frac{L^2}{2r^2}\right) = \frac{v_r^2}{2} + U_{eff}(L, r)$$

Из условия $v_r = 0$ находятся r_- и r_+ - максимум и минимум отдаления от центра.

$$E = U_{eff}(L, r_\pm)$$

Поскольку

$$\Delta U_{eff}(L, r) = \Delta\phi(r) + \Delta \frac{L^2}{2r^2} = 4\pi\rho(r) + \frac{L^2}{r^4} > 0$$

И учитывая, что при замене $\xi = r^{-1}$ оператор Лапласа переходит в

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) = \xi^4 \partial_\xi^2$$

Получим, что

$$\partial_\xi^2 \, U_{eff}(\xi) > 0$$

Что говорит о выпуклости $U_{eff}(\xi)$, существовании единственного экстремума (глобального минимума) и только двух решений уравнения

$$E = U_{eff}(L, r_\pm)$$

Из ЗСЭ можно выразить $\dot{r}$ и найти период

$$\dot{r} = \sqrt{2\left(E - U_{eff}\right)}$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2\left(E - U_{eff}\right)}} \Rightarrow T = 2\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{2\left(E - U_{eff}\right)}}$$

Делаем замену, которая улучшит сходимость интеграла

$$r = \frac{r_+ + r_-}{2} + \frac{r_+ - r_-}{2}\cos\theta, \qquad dr = \frac{r_+ - r_-}{2}\sin\theta\, d\theta$$

$$2\left(E - U_{eff}\right) = Q(r)\cdot(r - r_-)(r_+ - r) = \left(\frac{r_+ - r_-}{2}\right)^2 Q(r)\sin^2\theta$$

$$T = 2\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{Q\left(r(\theta)\right)}}$$

Прейдем к переменной τ

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = v_r T, \qquad \frac{\partial v_r}{\partial \tau} = -g(r)T + \frac{L^2}{r^3}T$$

$$r(\tau = 0) = r_-, \qquad v_r(\tau = 0) = 0$$

Якобиан перехода от координат r, v_r к координатам E, L, τ обозначим как

$$J(E, L, \tau) = \frac{\partial(r, v_r, L)}{\partial(E, L, \tau)} = \frac{\partial(r, v_r)}{\partial(E, \tau)}$$

$$dr\, dv_r L^2 = J(E, L, \tau) dE dL^2 d\tau$$

Здесь нужно заметить, что в гамильтоновой системе $p, q, H(p, q)$ можно сделать промежуточную замену

$$dpdq = dq\cdot\frac{dp(q, E)}{dE}dE = \frac{dq}{dt}\frac{dp(q, E)}{dE}dtdE$$

Но исходя из уравнений движения

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Поэтому якобиан преобразования – единица.

$$dpdq = dtdE = T \cdot d\tau dE$$

После интегрирования по переменной τ получаем урезанный якобиан и выражаем фазовый объем

$$J(E,L) = \int_0^1 J(E,L,\tau)d\tau = T$$

$$d\Phi = 8\pi^2 dr\, dv_r dL^2 = 8\pi^2 T dE dL^2$$

Последнее, что нужно тут найти – это максимальный угловой момент в зависимости от энергии. Он определяется наличием решения

$$E = U_{eff}(L, r_\pm) = \frac{L^2}{2r^2} + \phi(r)$$

Поэтому определяется соотношением

$$E(L_m) = \min_r \left(\frac{L_m^2}{2r^2} + \phi(r) \right)$$

Максимальная энергия равна нулю, минимальная равна $\phi(0)$.

Также нужно учесть, что в распределении нет траекторий, которые не касаются небесного тела. Это означает, что, начиная с энергии, при которой существуют орбиты, не касающиеся небесного тела, эффективный потенциал на границе тела должен быть меньше энергии.

$$E > \frac{L^2}{2R^2} + \phi(R) \Rightarrow L^2 < 2R^2\big(E - \phi(R)\big)$$

В таком случае энергия равна

$$E = \frac{\phi(R)}{2}$$

2. Интеграл столкновений

Количество столкнувшихся частиц в объеме $d^3\vec{r}d^3\vec{v}dt$ определяется матричным элементом

$$dN = d^3\vec{r}dt \cdot f_\chi(\vec{r},\vec{v}) \frac{d^3\vec{v}}{2E_v}\, f_n(\vec{r},\vec{v}_1) \frac{d^3\vec{v}_1}{2E_{v_1}} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}\big(p_i - p_f\big) \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} \frac{d^3\vec{p}_1'}{(2\pi)^3 2E_{p_1'}}$$

1) Количество уходящих частиц

$$C_- = \frac{dN_-}{d^3\vec{r}d^3\vec{v}dt} = f_\chi(\vec{r},\vec{v}) f_n(\vec{r},\vec{v}_1) \frac{d^3\vec{v}_1}{2E_{v_1}} \frac{1}{2E_v} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}\big(p_i - p_f\big) \prod_f \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

$$C_-(\vec{r},\vec{v}) = \int d^3\vec{v}_1\,|\vec{v}-\vec{v}_1|\cdot\sigma(\vec{v},\vec{v}_1)f_\chi(\vec{r},\vec{v})f_n(\vec{r},\vec{v}_1) =$$

$$f_\chi(\vec{r},\vec{v})\int d^3\vec{v}_1\,|\vec{v}-\vec{v}_1|\sigma(\vec{v},\vec{v}_1)f_n(\vec{r},\vec{v}_1)$$

$$C_-(E,L) = \int d\tau C_-\big(\vec{r}(\tau,E,L),\vec{v}(\tau,E,L)\big) = f_\chi(E,L)\int d\tau\int d^3\vec{v}_1\,|\vec{v}-\vec{v}_1|\sigma(\vec{v},\vec{v}_1)f_n(\vec{r},\vec{v}_1)$$

2) Количество приходящих частиц (так как матричный элемент инвариантен относительно замены штрихованных скоростей с не штрихованными)

$$C_+(\vec{r},\vec{v}) = \int\frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}\frac{d^3\vec{p}_1'}{2E_{p_1'}}|\mathcal{M}|^2 2\pi\delta^{(4)}\big(p_i-p_f\big)\frac{d^3\vec{v}_1}{2E_{v_1}}f_\chi(\vec{r},\vec{v}')f_n(\vec{r},\vec{v}_1') =$$

$$\int d^3\vec{v}_1'\,|\vec{v}-\vec{v}_1|\cdot d\sigma(\vec{v}',\vec{v}_1'\to\vec{v},\vec{v}_1)f_\chi(\vec{r},\vec{v}')f_n(\vec{r},\vec{v}_1')$$

Тут необходимо выразить $\vec{v}'$ через E' и L'. Делать это можно при фиксированном $\vec{r}$.

$$f_\chi(\vec{r},\vec{v}') = f_\chi(E',L')$$

В случае неупругого рассеяния мы не можем так просто обращать сечение во времени. Начнем с начала, предположив, что матричный элемент неупругого рассеяния выражается через упругое с некоторым дифференциальным фактором.

$$|\mathcal{M}_{in}(v,v_1,v',v_1')|^2 = |\mathcal{M}_0(v,v_1,v',v_1')|^2 dF$$

$$C_+(\vec{r},\vec{v}) = \int\frac{1}{2E_k}\frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}\frac{d^3\vec{p}_1'}{2E_{p_1'}}|\mathcal{M}'|^2 dF 2\pi\delta^{(4)}\big(p_i-p_f\big)\frac{d^3\vec{v}_1}{2E_{v_1}}f_\chi(\vec{r},\vec{v}')f_n(\vec{r},\vec{v}_1')$$

$$|\mathcal{M}'|^2 = |\mathcal{M}_0(v',v_1',v,v_1)|^2 dF$$

$$C_+(\vec{r},\vec{v}) = \int\frac{d^3\vec{k}'}{2E_{k'}}\frac{d^3\vec{v}_1'}{2E_{p_1'}}|\mathcal{M}'|^2 dF 2\pi\delta\big(E_f+\Delta E-E_i\big)\frac{1}{(2\pi)^3 2E_{v_1}2E_k}f_\chi(\vec{r},\vec{v}')f_n(\vec{r},\vec{v}_1')$$

$$C_+(\vec{r},\vec{v}) = \int d^3\vec{v}' d^3\vec{v}_1'|\mathcal{M}'|^2 dF 2\pi\delta\big(E_f+\Delta E-E_i\big)\frac{m_k}{16m_p^2\cdot(2\pi)^3}f_\chi(\vec{r},\vec{v}')f_n(\vec{r},\vec{v}_1')$$

$$E_f+\Delta E-E_i = \frac{p^2}{2m_p}+\frac{k^2}{2m_k}+\Delta E-\frac{k'^2}{2m_k}-\frac{p'^2}{2m_p}$$

$$\vec{p}+\vec{k} = \vec{p}'+\vec{k}' \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}'+\vec{k}'-\vec{k}$$

$$\vec{v}_1' = \frac{\vec{p}'}{m_p},\qquad \vec{v}' = \frac{\vec{k}'}{m_k}$$

Сначала все считается при известных $\vec{r},\vec{v}$. Тогда в штрихованном интеграле нужна замена:

$$d^3\vec{v}' = J_r(E', L', r)\,d\varphi\, dE'\, dL'^2$$

$$d^3\vec{v}' = \frac{d\varphi\, dv'_r\, dL'^2}{r^2}$$

Но при фиксированном $\vec{r}$

$$E = \frac{v_r^2 + \frac{L^2}{r^2}}{2} + \phi(r)$$

$$dE = v_r dv_r, dv_r = \frac{dE}{v_r}$$

$$J_r(E', L', r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\big(E' - \phi(r)\big) - \frac{L'^2}{r^2}}}$$

Якобиан имеет корневую особенность при приближении L'^2 к верхнему пределу

При этом необходимо, чтобы E' и L' находились на траектории, значит

$$E' \geq U_{eff}(L', r) => E' \geq \frac{L'^2}{2r^2} + \phi(r)$$

$$L'^2 \leq r^2 2(E' - \phi(r))$$

$$E' \geq \phi(r)$$

$$\vec{k} = m_k \begin{pmatrix} L/r \\ 0 \\ v_r \end{pmatrix}, \qquad \vec{k}' = m_k \begin{pmatrix} L'/r \cos\varphi \\ L'/r \sin\varphi \\ v'_r \end{pmatrix}$$

$$\frac{(\vec{k}' - \vec{k} + \vec{p}')^2}{2m_p} + E + \Delta E = E' + \frac{p'^2}{2m_p}$$

$$\frac{\left(\vec{k}' - \vec{k}\right)^2}{2m_p} + E - E' + \Delta E - \frac{\vec{p}'(\vec{k} - \vec{k}')}{m_p}$$

$$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$$

$$\frac{\vec{q}^2}{2m_p} + E - E' + \Delta E = \vec{q}\vec{v}'_1$$

Поскольку $\vec{v}'_1$ распределено изотропно, то для этой скорости можно перейти в систему отсчета, связанную с $\vec{v}$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_{1\parallel} + \vec{v}'_{1\perp} = v'_{1z} \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} + \vec{v}'_{1\perp}$$

$$v'_{1z} = \frac{\frac{\vec{q}^2}{2m_p} + E - E' + \Delta E}{q}$$

Если $|\mathcal{M}'|^2$ зависит только от переданного импульса q, то по $\vec{v}'_{1\perp}$ можно проинтегрировать, учитывая распределение по скоростям.

$$f_n(\vec{r}, \vec{v}'_1) = n(r) \cdot \frac{1}{\left(\frac{2\pi T(r)}{m_p}\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_p \vec{v}_1'^2}{2T}\right)$$

$$\int d^2\vec{v}'_{1\perp} \cdot f_n(\vec{r}, \vec{v}'_1) = n(r) \left(\frac{2\pi T(r)}{m_p}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m_p \vec{v}_z'^2}{2T}\right)$$

2.1. Полная скорость захвата

$$C_+ = \int d^3\vec{r} \cdot d^3\vec{v} f_k(r, v) \cdot n_p f_B(\vec{v}_1) d^3\vec{v}_1 \cdot \Gamma_c(\vec{v}, \vec{v}_1, r)$$

$$\Gamma_c(\vec{v}, \vec{v}_1, r) = \int\limits_{v' < v_{esc}} d^3\vec{v}' \delta\left(E_f - E_{in}\right) \cdot \frac{m_k^3 |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_p^2 m_k^2}$$

$$|\mathcal{M}|^2 = 16 G_F^2 m_p^2 m_k^2 \cdot \Phi(q^2) dF = 16 g_F^2 \frac{m_k^2}{m_p^2} \Phi dF$$

$$dF = \begin{cases} 1, & elastic \\ \frac{s^2}{3} I^2(n) dn, & migdal \\ \frac{s^2}{3} I^2(\phi) \frac{d\phi}{2\pi}, & ionization \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} 1, & ss \\ \frac{-q^2/2}{m_p^2 \; or \; m_k^2}, & s5s \; or \; 5ss \\ \frac{q^4/4}{m_p^2 m_k^2}, & 5s5s \end{cases}$$

1) Берем безразмерный случайный параметр, характеризующий радиус

$$r = R\sqrt[3]{\xi}, \qquad d^3\vec{r} = V d\xi$$

2) Для скорости u

$$d^3\vec{v} f_k(r, v) = 4\pi v \cdot n_\chi f_{eff}(u) u du$$

$$f_{eff}(u) = \frac{e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2\xi_0^2}}}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{thc}\left(\frac{2uu_0}{\xi_0^2}\right), \operatorname{thc}(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$$

$$\frac{u}{\xi_0} = \tilde{u}, \qquad \frac{u_0}{\xi_0} = \tilde{u}_0, \qquad v_{esc}(r=0) = v_{esc}^{mx}, \qquad \frac{v_{esc}^{mx}}{\xi_0} = \vartheta_e^m, \qquad \frac{v_{esc}}{\xi_0} = \vartheta_e = \vartheta_e^m\sqrt{\tilde{\phi}}$$

$$\frac{v}{\xi_0} = \tilde{v} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \vartheta_e^2}$$

$$\tilde{u} = \sqrt{-2\ln\alpha_v}$$

$$4\pi v \cdot n_\chi f_{eff}(u) u du = n_\chi \cdot f_{rm}(\alpha_v) d\alpha_v$$

$$f_{rm}(\alpha_v) = \tilde{v}\frac{e^{\frac{\tilde{u}_0(2\tilde{u}-\tilde{u}_0)}{2}}}{\sqrt{2\pi}\tilde{u}_0}\left(1-e^{-2\tilde{u}_0\tilde{u}}\right)$$

3) Для неупругой энергии

$$\frac{1}{3}I^2(n)dn = 0.7165877840 \cdot d\varepsilon, \qquad n = n(\varepsilon)$$

$$E_f - E_i = Rd\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{3}I^2(\phi)\frac{d\phi}{2\pi} = \frac{32}{3} \cdot \frac{e^{-4\frac{\operatorname{arctg}\phi}{\phi}}}{1-e^{-\frac{2\pi}{\phi}}} \cdot d\varepsilon, \qquad \phi = \sqrt{\frac{1}{\sqrt[4]{p}} - 1}$$

$$E_f - E_i = Rd + \frac{\alpha^2 m_e}{2}\phi^2$$

$$dF = \left(\frac{q}{\alpha m_p}\right)^2 \cdot I^2(p)dp$$

4) Термальные скорости ядер

$$n_p f_B(\vec{v}_1) d^3\vec{v}_1 = n_p \cdot \frac{e^{-\frac{v_1^2}{2v_T^2}}}{(2\pi v_T^2)^{\frac{3}{2}}} d^3\vec{v}_1$$

$$\frac{v_1}{v_T} = \sqrt{w_{mx}^2 - 2\ln\omega}, \qquad w_{mx}^2 = \frac{v_{1mx}^2}{v_T^2}$$

$$f_B^{rm} = e^{-\frac{w_{mx}^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{v_1}{v_T}$$

$$n_p f_B(\vec{v}_1) d^3\vec{v}_1 \to n_p f_B^{rm} d\omega d^2\vec{n}$$

$$d^2\vec{n} = dc_1, \qquad \cos\theta_1 = 2c_1 - 1, \qquad \varphi_1 = 0$$

Минимальная скорость ядер находится из соотношения

$$v_{1z} = \frac{\frac{\vec{q}^2}{2m_p} + E_{fk} - E_{ik} + E_{fH} - E_{iH}}{q} = \frac{q}{2m_p} + \frac{\Delta E}{q}$$

В этой формуле свободные параметры – q и v'. Сначала фиксируем v'. Тогда, если $\Delta E(v' = v_{esc}) < 0$, то $v_{1z}(q)$ – возрастает, тогда

$$v_{1z} \in \left[\frac{q_{mn}}{2m_p} + \frac{\Delta E}{q_{mn}}, \qquad \frac{q_{mx}}{2m_p} + \frac{\Delta E}{q_{mx}}\right]$$

$$q_{mn,mx} = m_\chi(v \mp v') \in m_\chi[v - v_{esc}, v + v_{esc}] = [q_-, q_+]$$

$$v_{1z} \in \left[\frac{q_-}{2m_p} + \frac{\Delta E(v' = 0)}{q_-}, \qquad \frac{q_+}{2m_p} + \frac{\Delta E(v' = v_{esc})}{q_+}\right]$$

В этом отрезке находится минимальное по модулю число.

Если $\Delta E(v' = v_{esc}) > 0$ и $\Delta E(v' = 0) > 0$

$$v_{1z} \geq \sqrt{\frac{2\Delta E(0)}{m_p}}$$

Если $\Delta E(v' = v_{esc}) > 0$ и $\Delta E(v' = 0) < 0$, то не будем вставлять ограничения.

$$\Gamma_c(\vec{v}, \vec{v}_1, r) = \int\limits_{v' < v_{esc}} d^3\vec{v}' \delta\left(E_f - E_i\right) \cdot \frac{m_k^3 |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_p^2 m_k^2}$$

В системе центра масс

$$\vec{V} = \frac{m_p\vec{v}_1 + m_k\vec{v}}{m_p + m_k}, \vec{\mathfrak{v}} = \frac{m_p}{m_p + m_k}(\vec{v} - \vec{v}_1)$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\mathfrak{v}}, \qquad \vec{v}' = \vec{V} + \vec{\mathfrak{v}}' => d^3\vec{v}' = d^3\vec{\mathfrak{v}}'$$

Разность равна

$$\vec{\mathfrak{v}} - \vec{\mathfrak{v}}' = \frac{m_p}{m_p + m_k}(\vec{v} - \vec{v}' + \vec{v}_1' - \vec{v}_1) = \frac{m_p}{m_p + m_k}(\vec{v} - \vec{v}')\left(1 + \frac{m_k}{m_p}\right) = (\vec{v} - \vec{v}')$$

$$\vec{q} = m_k(\vec{v} - \vec{v}')$$

$$E_f - E_i = \frac{m_k}{2m_p}\left(m_p + m_k\right)(\vec{v}'^2 - \vec{v}^2) + E_{fH} - E_{iH} = 0$$

$$\Gamma_c(\vec{v}, \vec{v}_1, r) = \frac{m_p}{m_k(m_p + m_k)} 4\pi v' dn' \cdot \frac{m_k^3 |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_p^2 m_k^2} = v' dn' \frac{g_F^2}{\pi} \frac{m_k^2}{m_p^3(m_p + m_k)} \Phi dF$$

Интеграл идет по телесному углу, в котором $v' < v_{esc}$, что означает

$$\left(\vec{V} + \vec{v}'\right)^2 < v_{esc}^2$$

Телесный угол будем отмерять от оси, параллельной $\vec{V} = \vec{n}_V V$. Поскольку y компонента скорости $\vec{V}$ равна нулю, то $\vec{n}_y \perp \vec{n}_V$. Последний единичный вектор тогда равен $\vec{n}_1 = (n_V^z, 0, -n_V^x)^T$. Конечная скорость равна

$$\vec{v}' = v'\left(\vec{n}_V \cos\theta' + \sin\theta' \left(\vec{n}_1 \cos\varphi' + \vec{n}_y \sin\varphi'\right)\right)$$

$$\left(\vec{V} + \vec{v}'\right)^2 = V^2 + v'^2 + 2Vv' \cos\theta' < v_{esc}^2$$

$$\cos\theta' < \frac{v_{esc}^2 - v'^2 - V^2}{2Vv'}$$

$$\cos\theta' < c_{mx} = \max\left(-1, \min\left(1, \frac{v_{esc}^2 - v'^2 - V^2}{2Vv'}\right)\right)$$

$$dn' = \frac{(1 + c_{mx})}{2} dc' df'$$

$$\cos\theta' = (1 + c_{mx}) dc', \varphi' = 2\pi f'$$

В итоге получаем

$$C_+ = V d\xi \cdot n_\chi(r) f_{rm}(\alpha_v) d\alpha_v \cdot n_p(r) f_B^{rm} d\omega dc_1 \cdot v' dn' \frac{g_F^2}{\pi} \frac{m_k^2}{m_p^3\left(m_p + m_k\right)} \Phi(q) dF =$$

$$V n_\chi \bar{n}_p \frac{g_F^2}{\pi} \frac{m_k^2}{m_p^3\left(m_p + m_k\right)} d\xi \cdot f_{rm}(\alpha_v) d\alpha_v \cdot \tilde{n}_p f_B^{rm} d\omega dc_1 \cdot v' dn' \Phi(q^2) dF$$

$$\tilde{n}_p(r) = \frac{n_p}{\bar{n}_p} = \frac{\rho_p}{\bar{\rho}_p}$$

Безразмерный фактор подавления будет таким:

$$Sup = d\xi \cdot f_{rm}(\alpha_v) d\alpha_v \cdot \tilde{n}_p f_B^{rm} d\omega dc_1 \cdot v' dn' \Phi\left(\frac{q^2}{m_k^2}\right) dF$$

$$C_+ = V n_\chi \bar{n}_p \frac{g_F^2}{\pi} \frac{m_k^2}{m_p^3(m_p + m_k)} \cdot Sup$$

Где n_χ – концентрация WIMP в гало, $\bar{n}_p$ – средняя концентрация атомов водорода, m_k – масса WIMP, m_p – масса протона, g_F – константа взаимодействия.

Его график: