Алгоритм расчета интегралов для моментов следующего вида

$$I(s)=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\infty} e^{isxy}P(x)Q(y)e^{-\lambda y}dydx$$

Интеграл возникает при расчете следующего момента в атоме

$$\langle n'l'|e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}}|nl\rangle=\langle n'l'|e^{isr\cos\theta}|nl\rangle$$

$$\langle\vec{r}|nl\rangle=C\cdot P_l(\cos\theta)\cdot L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right)e^{-\frac{r}{n}}$$

Тогда

$$P(x)=P_l(x)P_{l'}(x)$$

$$Q(y)=\tilde{C}\ y^2L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2y}{n}\right)L_{n'-l'-1}^{2l'+1}\left(\frac{2y}{n'}\right)$$

$$\lambda=\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}$$

$$Q(y)=\sum_{k=2}^{K}q_ky^k$$

$$P(x)=\sum_{m=0}^{M}p_mx^m$$

Интеграл по первой переменной берется

$$\int_0^{\infty}e^{isxy}Q(y)e^{-\lambda y}dy=\sum_{k=2}^{K}\frac{q_kk!}{(\lambda-isx)^{k+1}}$$

Далее нужно найти интегралы

$$F_k^m(v)=\int_{-1}^{1}\frac{x^m}{(1-ivx)^k}dx$$

$$F_k^m(v)=2\sum_{j\equiv m\ mod\ 2}(iv)^j\frac{(k+j-1)!}{j!\,(k-1)!\,(m+j+1)}$$

$$F_k^0(v) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-ivx)^k} dx = \frac{1}{iv(k-1)}\left[\frac{1}{(1-iv)^{k-1}} - \frac{1}{(1+iv)^{k-1}}\right]$$

$$F_1^0(v) = \frac{2arctg(v)}{v}$$

$$F_0^m(v) = \frac{2}{m+1}$$

Очевидна рекуррентная формула, позволяющая посчитать остальные интегралы

$$F_k^m(v) = \frac{1}{iv}\left(F_k^{m-1}(v) - F_{k-1}^{m-1}(v)\right)$$

Итого получается

$$I(s) = \sum_k \sum_m \frac{p_m q_k k!}{\lambda^{k+1}} F_{k+1}^m\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

Еще для многочленов Лежандра можно найти рекуррентную формулу для

$$\Pi_k^l(v) = \int_{-1}^{1} \frac{P_l(x)}{(1-ivx)^k} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\left[\frac{2l-1}{l} x P_{l-1}(x) - \frac{l-1}{l} P_{l-2}(x)\right]}{(1-ivx)^k} dx =$$

$$\frac{2l-1}{l}\frac{1}{-iv}\left(\Pi_{k-1}^{l-1}(v) - \Pi_k^{l-1}(v)\right) - \frac{l-1}{l}\Pi_k^{l-2}(v)$$

$$\Pi_0^l(v) = 2\delta_0^l$$

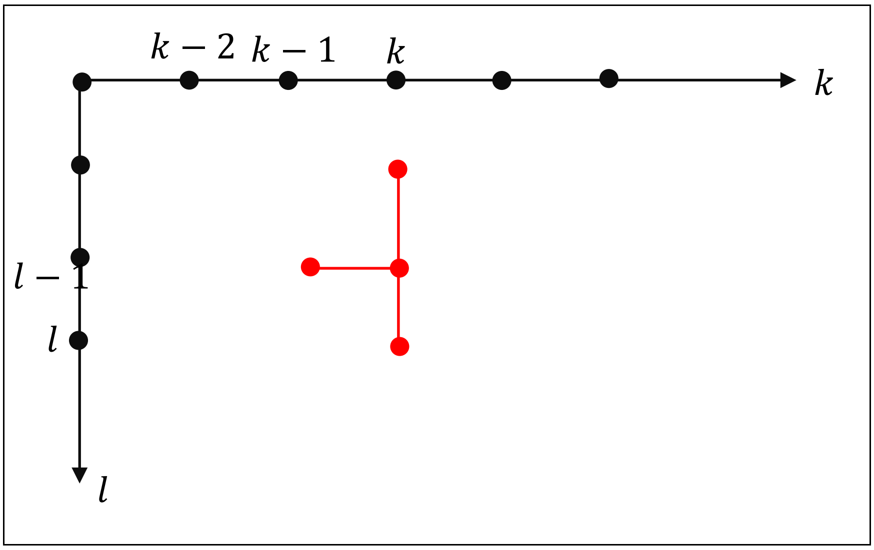
$$\Pi_{-1}^l(v) = -iv\frac{2}{3}\delta_1^l + 2\delta_0^l$$

$$\Pi_k^0(v) = F_k^0(v)$$

$$\Pi_k^1(v) = \frac{1}{iv}\left(F_k^0(v) - F_{k-2}^0(v)\right)$$

$$\Pi_k^{l,m}(v) = \int_{-1}^{1} \frac{P_l(x)P_m(x)}{(1-ivx)^k} dx$$

$$\Pi_k^{l,m}(v) = \frac{2l-1}{l}\frac{1}{-iv}\left(\Pi_{k-1}^{l-1,m}(v) - \Pi_k^{l-1,m}(v)\right) - \frac{l-1}{l}\Pi_k^{l-2,m}(v)$$




$$\Pi_0^{l,m}(v) = \frac{2}{2l+1}\delta_m^l$$

$$\Pi_{-1}^{l,m}(v) = \frac{2}{2l+1}\delta_m^l - iv\cdot\frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}\delta_m^{l+1} - iv\cdot\frac{2l}{(2l-1)(2l+1)}\delta_m^{l-1}$$

$$\Pi_k^{0,m}(v) = \Pi_k^m(v)$$

Еще одно свойство из многочленов Лежандра

$$\left((1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + l(l+1)\right)P_l(x) = 0$$

$$0 = \int_{-1}^{1} f(x)\left[\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + l(l+1)\right]P_l(x)dx$$

$$0 = \int_{-1}^{1} P_l(x)\left[\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + l(l+1)\right]f(x)dx$$

Для нужной нам $f(x)$ это дает

$$\Pi_{k+2}^l(v)\cdot k(k+1)\cdot(v^2+1) = 2k^2\Pi_{k+1}^l(v) + \big(l(l+1) - k(k-1)\big)\Pi_k^l(v)$$

---

Если $v$ мало

$$G_l^m = \int_{-1}^{1} P_l(x)\cdot x^{l+2m}dx = \frac{2^{l+1}}{2l+2m+1}\frac{(l+m)!\,(l+2m)!}{m!\,(2l+2m)!}$$

$$I(s) = \int \sum_{k=2}^{K} \frac{q_k k!}{(\lambda - isx)^{k+1}} P_l(x) dx =$$

$$\int P_l(x) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2}^{K} \frac{q_k k!}{(\lambda)^{k+1}} \cdot C_{-k-1}^{n} \left(-\frac{isx}{\lambda}\right)^{n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2}^{K} \frac{q_k k!}{(\lambda)^{k+1}} \cdot C_{-k-1}^{l+2m} \left(-\frac{is}{\lambda}\right)^{l+2m} \cdot G_l^m$$

---

В ионизации волновая функция электрона равна

$$\psi(\phi, l, \rho) = e^{i \cdot phase} \frac{\Gamma\left(l + 1 - \frac{i}{\phi}\right)}{\Gamma(2l+2)} (2\phi)^{l+1} \rho^l e^{i\phi\rho} e^{\frac{\pi}{2\phi}} F\left(l + 1 - \frac{i}{\phi}, 2l+2, -2i\phi\rho\right)$$

$$F\left(l + 1 - \frac{i}{\phi}, 2l+2, -2i\phi\rho\right) =$$

$$\frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma\left(l + 1 - \frac{i}{\phi}\right)\Gamma\left(l + 1 + \frac{i}{\phi}\right)} \int_0^1 e^{-2i\phi\rho t} t^{l - \frac{i}{\phi}} (1-t)^{l + \frac{i}{\phi}} dt$$

Прежде всего, подкрутим фазу, зная модуль гамма функции

$$\left|\Gamma\left(l + 1 - \frac{i}{\phi}\right)\right| = \left|\Gamma\left(l + 1 + \frac{i}{\phi}\right)\right|$$

$$\Gamma\left(l + 1 - \frac{i}{\phi}\right) = \left(l - \frac{i}{\phi}\right)\left(l - 1 - \frac{i}{\phi}\right) \dots \left(1 - \frac{i}{\phi}\right)\Gamma\left(1 - \frac{i}{\phi}\right)$$

$$= \Gamma\left(1 - \frac{i}{\phi}\right)\left(1 - \frac{i}{\phi}\right)_l$$

$$\left|\Gamma\left(1 - \frac{i}{\phi}\right)\right| = \left(\Gamma\left(1 - \frac{i}{\phi}\right)\Gamma\left(1 + \frac{i}{\phi}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\Gamma\left(1 - \frac{i}{\phi}\right)\frac{i}{\phi}\Gamma\left(\frac{i}{\phi}\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{i}{\phi} \frac{\pi}{\sin\frac{i\pi}{\phi}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2\pi}{\left(e^{\frac{\pi}{\phi}} - e^{-\frac{\pi}{\phi}}\right)\phi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Таким образом можно определить ВФ через символ Похгаммера

$$\left(1-\frac{i}{\phi}\right)_l = \frac{\Gamma\left(l+1-\frac{i}{\phi}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{i}{\phi}\right)} = \left(l-\frac{i}{\phi}\right)\dots\left(1-\frac{i}{\phi}\right)$$

$$\psi(\phi,l) = 2\phi\cdot(2\phi\rho)^l \frac{\left(1-\frac{i}{\phi}\right)_l}{\Gamma(2l+2)} \left(\frac{2\pi e^{\frac{\pi}{\phi}}}{\left(e^{\frac{\pi}{\phi}}-e^{-\frac{\pi}{\phi}}\right)\phi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\phi\rho}F(\dots) =$$

$$\psi(\phi,l) = 2\phi\cdot(2\phi\rho)^l \frac{\left(1-\frac{i}{\phi}\right)_l}{\Gamma(2l+2)} \left(\frac{2\pi}{\left(1-e^{-\frac{2\pi}{\phi}}\right)\phi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\phi\rho}F(\dots) =$$

Теперь считаем момент

$$\langle n'l'|e^{isr\cos\theta}|nl\rangle$$

Сначала можно взять интеграл по углам

$$G(v) = \int_{-1}^{1} P(x)e^{ivx}dx = \frac{e^{iv}\sum_{k=0}^{l} P^{(k)}(1)\left(\frac{i}{v}\right)^k - e^{-iv}\sum_{k=0}^{l} P^{(k)}(-1)\left(\frac{i}{v}\right)^k}{iv}$$

Производные многочленов Лежандра

$$P_l(x) = \frac{1}{l!\,2^l} d^l (x^2-1)^l$$

$$P_l(1+\epsilon) = \frac{1}{l!\,2^l} d^l \epsilon^l (2+\epsilon)^l$$

$$\partial^k P_l(1+\epsilon) = \frac{1}{l!\,2^l}\partial^{l+k}\epsilon^l \sum_{m=0}^{l} C_l^m 2^{l-m}\epsilon^m = \frac{1}{l!\,2^k}\ (l+k)!\,C_l^k = \frac{(l+k)!}{2^k k!\,(l-k)!}$$

$$\partial^k P_l(-1+\epsilon) = \frac{1}{l!\,2^l}\partial^{l+k}\epsilon^l \sum_{m=0}^{l} C_l^m (-2)^{l-m}\epsilon^m == \frac{(-1)^{l-k}(l+k)!}{2^k k!\,(l-k)!}$$

Итого, интеграл равен

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)e^{ivx}dx =$$

$$\frac{e^{iv}\sum_{k=0}^{l}\frac{(l+k)!}{2^k k!\,(l-k)!}\left(\frac{i}{v}\right)^k-(-1)^l e^{-iv}\sum_{k=0}^{l}\frac{(l+k)!}{2^k k!\,(l-k)!}\left(-\frac{i}{v}\right)^k}{iv}$$

Если показатель в экспоненте небольшой, лучше разлагать все в ряд

$$e^{ivx}=\sum\frac{(iv)^k x^k}{k!}$$

Тогда проинтегрируем

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)\frac{x^k}{k!}\,dx=\frac{1}{l!\,2^l k!}\int x^k\partial^l(x^2-1)^l=\frac{(-1)^l}{l!\,2^l k!}\int(x^2-1)^l\,\partial^l x^k$$

Очевидно, что $k=l+2m$ при $m\geq 0$, иначе интеграл будет нулем либо по соображению четности, либо из-за обнуления $\partial^l x^k$.

$$\int(x^2-1)^l\,\partial^l x^k=\frac{k!}{(k-l)!}\int(x^2-1)^l x^{2m}dx$$

Для нахождения интеграла

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l x^{2m}dx$$

Построим функцию

$$I_n(s)=\int_{-\frac{1}{\sqrt{s}}}^{\frac{1}{\sqrt{s}}}(sx^2-1)^n dx=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_{x=-\frac{1}{\sqrt{s}}}^{x=\frac{1}{\sqrt{s}}}\left((\sqrt{s}x)^2-1\right)^n d\sqrt{s}x=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$$

$$I_n(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}(-1)^n\frac{2}{2n+1}\frac{2^{2n}n!^2}{(2n)!}$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-m}x^{2m}dx=\frac{(n-m)!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m I_n(s=1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m\frac{1}{\sqrt{s}}=(-1)^m\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2^m}=(-1)^m\cdot\frac{(2m)!}{2^{2m}m!}$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l x^{2m}dx=\frac{l!}{(l+m)!}(-1)^{l+2m}\frac{2}{2n+1}\frac{2^{2n}n!^2}{(2n)!}\frac{(2m)!}{2^{2m}m!}$$

Итого, получаем

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\frac{x^{l+2m}}{k!}\ dx = \frac{2^{l+1}}{2l+2m+1}\frac{(l+m)!}{m!\,(2l+2m)!}$$

В результате

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)e^{ivx}\ dx = 2^{l+1}(iv)^l\sum_m (-1)^m v^{2m}\cdot\frac{1}{2l+2m+1}\frac{(l+m)!}{m!\,(2l+2m)!}$$

---

ИТОГО

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)e^{ivx}dx =$$

$$\frac{e^{iv}\sum_{k=0}^{l}\frac{(l+k)!}{2^k k!\,(l-k)!}\left(\frac{i}{v}\right)^k-(-1)^l e^{-iv}\sum_{k=0}^{l}\frac{(l+k)!}{2^k k!\,(l-k)!}\left(-\frac{i}{v}\right)^k}{iv} =$$

$$2^{l+1}(iv)^l\sum_m (-1)^m v^{2m}\cdot\frac{1}{2l+2m+1}\frac{(l+m)!}{m!\,(2l+2m)!}$$

---

Как видно, максимальная степень $v = q$ в знаменателе будет $l + 1$ а в гипергеометрической функции степень будет $l$ но еще добавится интеграл $\rho^2 d\rho$ дающий еще $+2$ степени.

В итоге такой интеграл будет сводиться к другому интегралу:

$$\langle\phi|e^{isr\cos\theta}|nl\rangle = \int \psi(\phi,l,\rho)e^{if\rho}\cdot\rho^k e^{-\lambda\rho}\rho^2 d\rho$$

А этот интеграл с помощью интегрального представления вырожденной гипергеометрической функции сведется к

$$\int e^{-\lambda\rho}e^{if\rho}\cdot\rho^k d\rho\frac{\Gamma(a+\bar{a})}{\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})}\int_0^1 e^{i\phi\rho(1-2t)}t^{l-\frac{i}{\phi}}(1-t)^{l+\frac{i}{\phi}}dt =$$

$$\frac{\Gamma(a+\bar{a})}{\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})}\int_0^1\frac{k!}{\big(\lambda-if+i\phi(2t-1)\big)^{k+1}}t^{l-\frac{i}{\phi}}(1-t)^{l+\frac{i}{\phi}}dt$$

$$a = l + 1 - \frac{i}{\phi}$$

$$H_k^l = \frac{\Gamma(a+\bar{a})}{\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})}\int_0^1 \frac{1}{\big(\lambda - if + i\phi(2t-1)\big)^k} t^{l-\frac{i}{\phi}}(1-t)^{l+\frac{i}{\phi}} dt$$

$$H_k^l(-f) = H_{k+1}^l(f)^*$$

$$H_0^l(f) = 1$$

$$2t - 1 = \xi, \qquad 1 - t = \frac{1-\xi}{2}, \qquad t = \frac{1+\xi}{2}, \qquad dt = \frac{d\xi}{2}$$

$$H_k^l = \frac{\Gamma(a+\bar{a})}{\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})}\cdot\frac{1}{2^{2l+1}}\int_{-1}^1 \frac{1}{(\lambda - if + i\phi\xi)^k}(1-\xi^2)^l\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\frac{i}{\phi}} d\xi$$

1) Этот интеграл считается легко при $k \le 0$. Достаточно лишь разложить скобку

$$(\lambda - if + i\phi\xi)^{-k} = \sum_{m=0}^{-k} C_{-k}^m (\lambda - if - i\phi)^{k-m}(2i\phi t)^m$$

Нам нужны будут значения при $k = 0$ и $k = -1$

$$H_0^l = 1$$

$$H_{-1}^l = \frac{\Gamma(a+\bar{a})}{\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})}\int_0^1 \big(\lambda - if + i\phi(2t-1)\big)t^{a-1}(1-t)^{\bar{a}-1}dt =$$

$$\lambda - if - i\phi + 2i\phi\cdot\frac{a}{a+\bar{a}} = \lambda - if + i\phi\frac{a-\bar{a}}{a+\bar{a}} = \lambda - if + \frac{1}{l+1}$$

Теперь, откусив от степени $(1-\xi^2)^l$ кусочек $(1-\xi^2)$, можно получить рекуррентную формулу, верную для любых $k$

$$H_k^l = \frac{\Gamma(a+\bar{a})}{\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})}\cdot\frac{1}{2^{2l+1}}\int_{-1}^1 \frac{1-\xi^2}{(\lambda - if + i\phi\xi)^k}(1-\xi^2)^{l-1}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\frac{i}{\phi}} d\xi =$$

$$1 - \xi^2 = |g = \lambda - if + i\phi\xi| = 1 - \frac{(g - \lambda + if)^2}{(i\phi)^2} = 1 + \frac{g^2 - 2g(\lambda - if) + (\lambda - if)^2}{\phi^2}$$

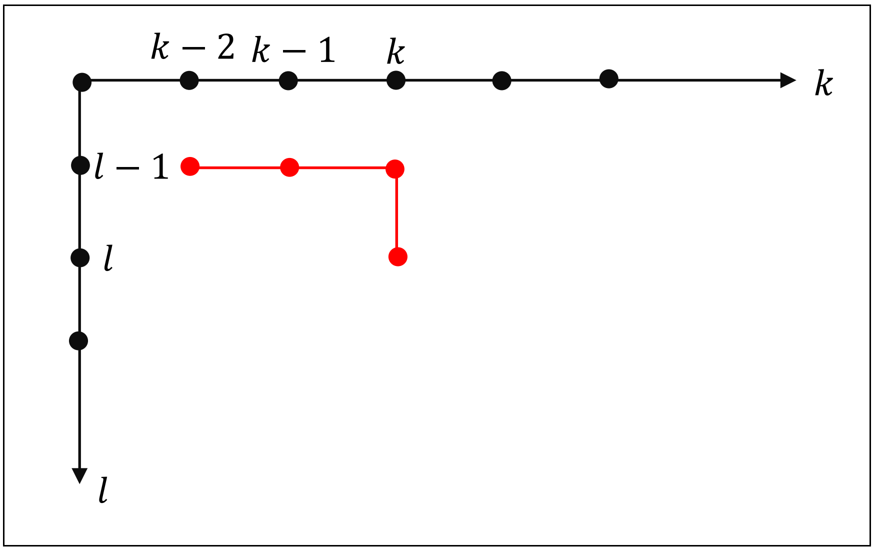
$$\frac{(a+\bar{a}-1)(a+\bar{a}-2)}{4(a-1)(\bar{a}-1)}\frac{\Gamma(a+\bar{a}-2)}{\Gamma(a-1)\Gamma(\bar{a}-1)}\cdot\frac{1}{2^{2l-1}}\times$$

$$\int\left(1+\frac{(\lambda-if)^2}{\phi^2}\right)(\dots k,l-1)+\frac{1}{\phi^2}(\dots k-2,l-1)-\frac{2(\lambda-if)}{\phi^2}(\dots k-1,l-1)=$$

$$\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)l}{l^2+\frac{1}{\phi^2}}\cdot\left[\left(1+\frac{(\lambda-if)^2}{\phi^2}\right)H_k^{l-1}-2\frac{(\lambda-if)}{\phi^2}H_{k-1}^{l-1}+\frac{1}{\phi^2}H_{k-2}^{l-1}\right]=$$

$$H_k^l=\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)l}{\phi^2 l^2+1}\cdot\left[(\phi^2+(\lambda-if)^2)H_k^{l-1}-2(\lambda-if)H_{k-1}^{l-1}+H_{k-2}^{l-1}\right]$$

Это выражение можно изобразить схематично




Еще одно простое рекуррентное соотношение можно получить, интегрируя по частям при $l>0$ и $k>1$

$$H_k^l=\frac{\Gamma(a+\bar{a})}{\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})}\cdot\frac{1}{2^{2l+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1+\xi)^{a-1}(1-\xi)^{\bar{a}-1}}{(\lambda-if+i\phi\xi)^k}d\xi=$$

$$\frac{\Gamma(a+\bar{a})}{\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})}\cdot\frac{1}{2^{2l+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1+\xi)^{a-1}(1-\xi)^{\bar{a}-1}}{(\lambda-if+i\phi\xi)^k}d\xi$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+\xi)^{a-1}(1-\xi)^{\bar{a}-1}}{(\lambda-if+i\phi\xi)^k}d\xi$$

$$= \int_{-1}^{1} (1+\xi)^{a-1}(1-\xi)^{\bar{a}-1} \cdot \frac{1}{-i\phi(k-1)} d\frac{1}{(\lambda - if + i\phi\xi)^{k-1}} =$$

$$\frac{1}{i\phi(k-1)} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(\lambda - if + i\phi\xi)^{k-1}} d(1+\xi)^{a-1}(1-\xi)^{\bar{a}-1} =$$

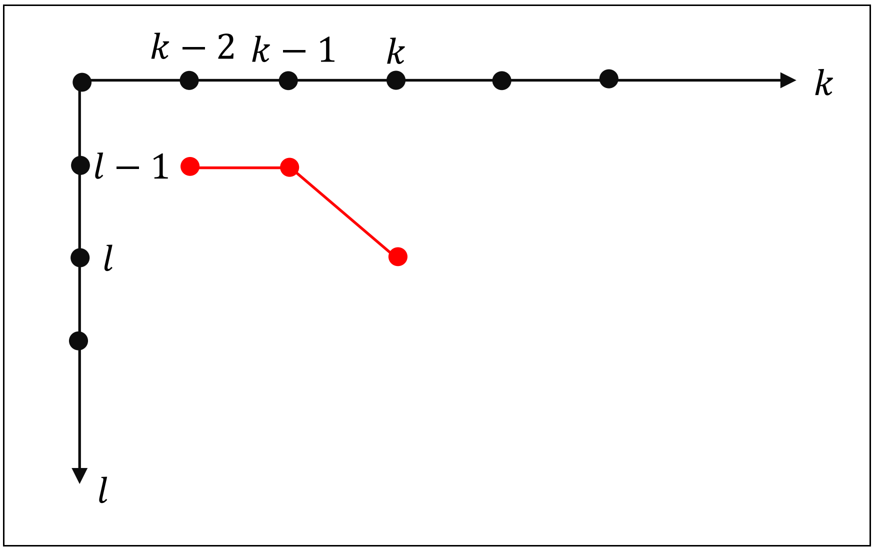
$$\frac{1}{i\phi(k-1)} \int_{-1}^{1} \frac{-(\bar{a}-1)(1+\xi) + (a-1)(1-\xi)}{(\lambda - if + i\phi\xi)^{k-1}} (1+\xi)^{a-2}(1-\xi)^{\bar{a}-2} d\xi =$$

$$\frac{1}{i\phi(k-1)} \int_{-1}^{1} \frac{-\left(\frac{2i}{\phi}\right) - 2l\xi}{(\lambda - if + i\phi\xi)^{k-1}} (1+\xi)^{a-2}(1-\xi)^{\bar{a}-2} d\xi =$$

$$\frac{1}{\phi^2(k-1)} \int_{-1}^{1} \frac{-2 - 2l(\lambda - if) + 2lg}{g^{k-1}} (1-\xi)^{a-2}(1+\xi)^{\bar{a}-2} d\xi$$

$$C_l = \frac{\Gamma(a+\bar{a})}{\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})} \cdot \frac{1}{2^{2l+1}} = \frac{l\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\left(l^2 + \frac{1}{\phi^2}\right)} C_{l-1}$$

$$H_k^l = \frac{l\left(l+\frac{1}{2}\right)}{(\phi^2 l^2 + 1)} \cdot \frac{2}{k-1} [\left(-1 - l(\lambda - if)\right) H_{k-1}^{l-1} + l H_{k-2}^{l-1}]$$




Теперь это выражение можно сравнить с первым и выразить $H_k^{l-1}$

$$(\phi^2 + (\lambda - if)^2) H_k^{l-1} - 2(\lambda - if) H_{k-1}^{l-1} + H_{k-2}^{l-1}$$

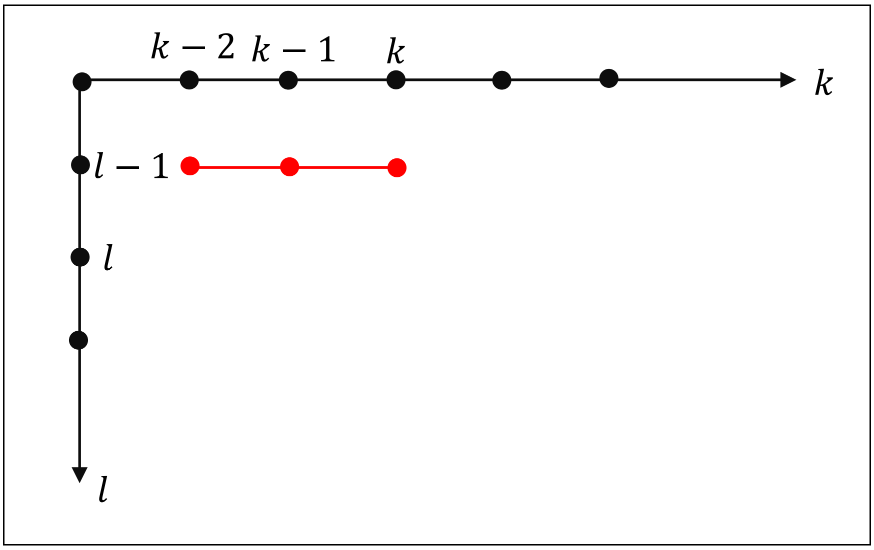
$$= \frac{2}{k-1} [\left(-1 - l(\lambda - if)\right) H_{k-1}^{l-1} + l H_{k-2}^{l-1}]$$

$$H_k^{l-1} = \frac{2H_{k-1}^{l-1} \cdot \left(\frac{-1 + (\lambda - if)(k - 1 - l)}{k - 1}\right) + \frac{2l + 1 - k}{k - 1} H_{k-2}^{l-1}}{\phi^2 + (\lambda - if)^2}$$

И заменяем $l$ на $l + 1$

$$H_k^{l} = \frac{2H_{k-1}^{l} \cdot \left(\frac{1 + (\lambda - if)(k - 2 - l)}{k - 1}\right) + \frac{2l + 3 - k}{k - 1} H_{k-2}^{l}}{\phi^2 + (\lambda - if)^2}$$

С помощью этого выражения можно находить дальнейшие $H_k^l$




Осталось только найти $H_1^0$

$$H_1^0 = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{\lambda - if + i\phi}{\lambda - if - i\phi}\right)^{\frac{i}{\phi}}\right) =$$

$$\frac{1 - e^{\frac{i \ln \frac{\lambda^2 + (\phi - f)^2}{\lambda^2 + (\phi + f)^2}}{2\phi} - \frac{\operatorname{atg}\frac{\phi - f}{\lambda} + \operatorname{atg}\frac{\phi + f}{\lambda}}{\phi}}}{2}$$