Оглавление

1. Обозначения

Гамильтониан системы протон+электрон+ТМ:

$$\hat{H} = \hat{H}_H + \hat{T}_\chi + \hat{U}(\vec{r}_p - \vec{r}_\chi)$$

Где $\hat{H}_H$ – гамильтониан атома водорода, $\hat{T}_\chi$ – оператор кинетической энергии ТМ, $\hat{U}(\vec{r}_p - \vec{r}_\chi)$ – потенциал взаимодействия ядра и ТМ.

$\vec{r}_p$ – положение ядра, $\vec{r}_\chi$ – ТМ.

$\vec{k}, \vec{k}'$– входной и выходной импульсы ТМ.

$\vec{p}, \vec{p}'$– входной и выходной импульсы атома водорода (система ядро + электрон)

$\vec{p}$ – импульс, канонически сопряженный к координате $\vec{R}$ центра масс системы протон+электрон.

$$\vec{R} = \frac{m_p\vec{r}_p + m_e\vec{r}_e}{m_p + m_e}$$

$\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_p$ – относительное положение электрона, канонический импульс к $\vec{r}$ равен $\vec{f}$.

$$\vec{r}_p = \vec{R} - \frac{m_e}{m_p + m_e}\vec{r}$$

$$\vec{f} = \frac{m_p}{m_p + m_e}\vec{p}_e - \frac{m_e}{m_p + m_e}\vec{p}_p$$

$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ – переданный импульс

Гамильтониан без взаимодействия

$\hat{H}_0 = \hat{H}_H + \hat{T}_\chi$

Начальное состояние

$$\Psi_0 = |E_{00}, k, p\rangle, \qquad \hat{H}_0\Psi_0 = \left(E_{00} + \frac{k^2}{2m_\chi} + \frac{p^2}{2M_H}\right)\Psi_0 = E\Psi_0$$

$$\Psi_0 = |E_{00}, k, p\rangle = \psi_0(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}_\chi}e^{i\vec{p}\vec{R}} \cdot S_\chi S_p$$

Конечное состояние

$$\Psi_1 = |E_{l1}, k', p'\rangle, \qquad \hat{H}_0\Psi_1 = \left(E_{l1} + \frac{k'^2}{2m_\chi} + \frac{p'^2}{2M_H}\right)\Psi_1 = E'\Psi_1$$

$$\Psi_1^+ = \langle E_{l1}, k', p'| = \psi_{E'}^*(\vec{r})e^{-i\vec{k}'\vec{r}_\chi}e^{-i\vec{p}'\vec{R}} \cdot S_\chi' S_p'$$

2. Формула для моментов

По правилу ферми вероятность перехода равна

$$\frac{dP}{dt} = \left|\Psi_1^+ \widehat{U} \Psi_0\right|^2 \cdot 2\pi\delta(E' - E)$$

$\psi_0(\vec{r})$ – В.Ф. водорода

S_χ, S_p – спины ТМ и протона

$\widehat{U} = \widehat{U}_S \cdot U_R(\vec{r}_p - \vec{r}_\chi)$ – произведение спин зависимой и независимой частей потенциала.

$$\Psi_1^+ \widehat{U} \Psi_0 = \left\langle S_\chi' S_p' \middle| \widehat{U}_S \middle| S_\chi S_p \right\rangle \cdot \int d^3\vec{R} d^3\vec{r} d^3\vec{r}_\chi \, \psi_{E'}^*(\vec{r}) e^{i(\vec{k}-k')\vec{r}_\chi} e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{R}} \psi_0(\vec{r}) U_R$$

$$\Psi_1^+ \widehat{U} \Psi_0 = V_S \cdot V_R$$

$$U_R\left(\vec{r}_\chi - \vec{r}_p\right) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} U(\vec{q}) e^{i\vec{q}(\vec{r}_p - \vec{r}_\chi)} = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} U(\vec{q}) e^{i\vec{q}(-\vec{r}_\chi + \vec{R} - \vec{r}\cdot\frac{m_e}{m_p + m_e})}$$

$$V_R = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} d^3\vec{R} d^3\vec{r} d^3\vec{r}_\chi \, \psi_{E'}^* \psi_0 e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}_\chi} e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{R}} U(\vec{q}) e^{i\vec{q}(-\vec{r}_\chi + \vec{R} - \vec{r}\cdot\frac{m_e}{m_p + m_e})}$$

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} d^3\vec{r} \, \psi_{E'}^* \psi_0 (2\pi)^6 \delta^{(3)}\left(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{q}\right) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}' + \vec{q}) U(\vec{q}) e^{-i\vec{q}(\vec{r}\cdot\frac{m_e}{m_p + m_e})}$$

$$V_R = (2\pi)^3 \delta^{(3)}\left(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{q}\right) \cdot \int d^3\vec{r} \, \psi_{E'}^*(\vec{r}) \psi_0(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\vec{r}\frac{m_e}{m_p + m_e}}$$

Если бы мы не учитывали ионизацию, то $V_R = (2\pi)^3 \delta^{(3)}\left(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{q}\right)$. Поэтому в выражении сечения добавится форм фактор

$$d\sigma_I = d\sigma_0 \cdot F(q, E') dN'$$

dN' – означает суммирование или интегрирование по энергетическим уровням системы протон+электрон (зависит от нормировки В.Ф.)

В случае перехода на уровень, когда $\langle\psi_{E_2\lambda_2}|\psi_{E_1\lambda_1}\rangle = \delta_{E_1E_2}\delta_{\lambda_2\lambda_1}$

$$\int \dots dN' = \sum_{l,m,n} \dots$$

Если происходит ионизация, а радиальные В.Ф. нормированы следующим образом (см. Ландавшиц)

$$\langle\psi_{f_1\lambda_1}|\psi_{f_2\lambda_2}\rangle = (2\pi)\delta(k_1 - k_1')\delta_{\lambda_2\lambda_1}$$

То

$$\int \dots dN' = \sum_{l,m} \int \frac{df}{2\pi}$$

$$E' = \frac{f^2}{2\mu}, \qquad \mu = m_e \cdot \frac{m_p}{m_p + m_e}$$

2.1. Дипольное приближение

Основная часть интегрирования, когда $r \lesssim r_{\text{Б}}$ – Боровский радиус. Тогда множитель в экспоненте имеет порядок

$$qr\frac{m_e}{m_p + m_e} \sim \frac{m_\chi^3 v_\chi^2}{\left(m_p + m_\chi\right)^2}\frac{m_e}{m_p + m_e}\frac{1}{m_e\alpha} \sim 10^{-2}10^{-6}10^2 \ll 1$$

Можно применять дипольное приближение

$$A(q, E') = -i\int d^3\vec{r}\,\psi_{E'}^*(\vec{r})\psi_0(\vec{r})\vec{q}\vec{r}\frac{m_e}{m_p + m_e}$$

ВФ начального и конечного состояния водорода имеют вид

$$\psi_0(\vec{r}) = R_0(r) \cdot Y_{00}(\theta, \varphi)$$

$$\psi_{E'lm}^*(\vec{r}) = R_{E'l}(r) \cdot Y_{lm'}(\theta, \varphi)$$

Выберем систему отсчета такую, что $\vec{q}\vec{r} = qr\cos\theta$. Тогда

$$A(q, E') = -i\frac{m_e}{m_p + m_e}\int r^2 dr\, R_{E'l}(r)R_0(r)qr\frac{\cos\theta\, P_l(\theta)P_0(\theta)}{\sqrt{\frac{1}{(2l+1)}}}e^{-im\varphi}\,\frac{d\varphi d\cos\theta}{4\pi}$$

$$A(q,E') = -iq\frac{m_e}{m_p+m_e}\frac{\delta_{m0}}{2}\int \frac{\cos\theta\, P_l(\theta)P_0(\theta)}{\sqrt{\frac{4}{(2l+1)}}} d\cos\theta \cdot \int r^3 dr\, R_{E'l}(r)R_0(r)$$

$$\sqrt{2l+1}\int \cos\theta\, P_l(\theta)P_0(\theta)d\cos\theta = \begin{cases} 0, & l \neq 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}}, & l = 1 \end{cases}$$

$$A(q,E') = -iq\frac{m_e}{m_p+m_e}\frac{\delta_{m0}\delta_{l1}}{\sqrt{3}}\int r^3 dr\, R_{E'1}(r)R_0(r)$$

Делаем нормировку на радиус бора и замену

$$r = r_{\text{Б}}\rho, \qquad s = qr_{\text{Б}}\frac{m_e}{m_p+m_e}$$

$$A(s,E') = -is\frac{1}{\sqrt{3}}\int \rho^3 d\rho\, R_{E'1}(\rho)R_0(\rho) = \frac{-is}{\sqrt{3}}I(E')$$

2.1.1. Радиальные ВФ водорода

ВФ начального состояния равна:

$$R_0(\rho) = 2e^{-\rho}$$

ФВ конечного состояния ищется в виде

$$R_{E'l}(\rho) = \rho^l e^{i\phi\rho}v(\rho)$$

Где введен безразмерный импульс

$$E' = \frac{f^2}{2\mu} = \phi^2 E_e, \qquad \phi = fr_{\text{Б}}$$

В итоге приходим к следующему уравнению, делаем замену.

$$\rho v_{\rho\rho} + 2(l+1+i\phi\rho)v_\rho + 2(1+(l+1)i\phi)v = 0$$

$$v(\rho) = V(z), \qquad z = -2i\phi\rho$$

$$zV_{zz} + (2l+2-z)V_z - \left(l+1-\frac{i}{\phi}\right)V = 0$$

$$zV_{zz} + (b-z)V_z - aV = 0 \tag{$*$}$$

$$V(z) = C\cdot F\left(l+1-\frac{i}{\phi}, 2l+2, z\right)$$

$$v = C\cdot F\left(l+1-\frac{i}{\phi}, 2l+2, -2i\phi\rho\right)$$

$$v^* = C^* \cdot F\left(l+1+\frac{i}{\phi}, 2l+2, 2i\phi\rho\right)$$

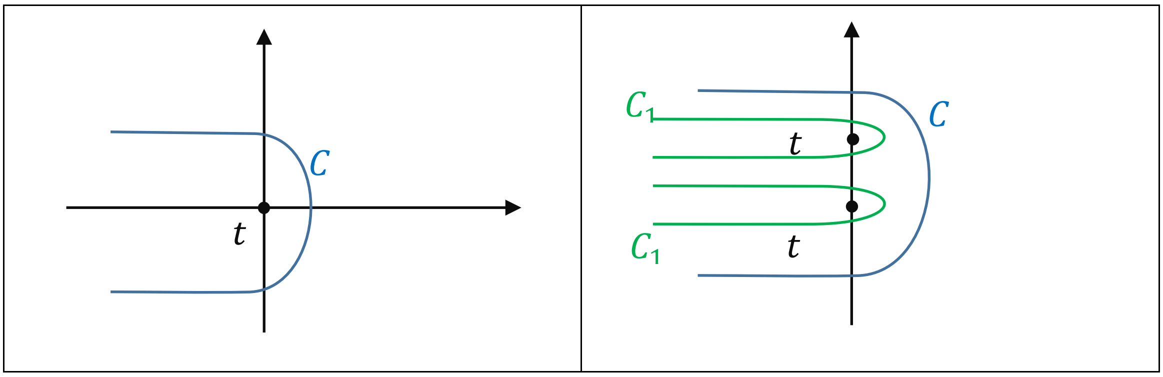
$F(a,b,z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

$$F(a,b,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)n!} z^n$$

$$F(a,b,z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{tz} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt$$

2.1.2. Нормировка

Для нормировки необходимо знать асимптотику $F(a,b,z)$ при $z \to \infty$ с точностью до $O(z^{-1})$.



Упражнение (асимптотика)

1) Интеграл по контуру C дает

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-s} dt$$

2) Если число b в $F(a,b,z)$ больше нуля, то из формулы для вронскиана $(*)$ для F

$$W = e^{-\int \frac{b-z}{z} dz} = Ce^z z^{-b}$$

следует, что одно из решений дифура будет иметь особенность в нуле, однако $F(a,b,z)$ – регулярна в нуле. А значит любое регулярное решение $(*)$ пропорционально F.

3) Проверить, что следующий интеграл является решением $(*)$

$$V(z) = \frac{\Gamma(b)}{2\pi i} \int_C e^t t^{a-b} (t-z)^{-a} dt$$

Поскольку контур на концах экспоненциально стремится к нулю, то после прямой подстановки в уравнение $(*)$ и интегрирования по частям получается ноль.
Так как $V(z)$ – регулярна в нуле и $V(0) = 1 = F(a, b, 0)$, то $V(z) = F(a, b, z)$

4) Интегрирование по контуру C разбиваем на интегралы по C_1 и C_2.

$$V_1(z) = \frac{\Gamma(b)}{2\pi i} \int\limits_C e^{t+z}(t+z)^{a-b}(t)^{-a} dt = z^{a-b} e^z \frac{\Gamma(b)}{2\pi i} \int\limits_C e^t \left(\frac{t}{z} + 1\right)^{a-b} (t)^{-a} dt$$

При больших z скобка в интеграле раскладывается в ряд

$$\left(\frac{t}{z} + 1\right)^{a-b} = 1 + (a-b)\frac{t}{z} + \frac{(a-b)(a-b-1)}{2}\left(\frac{t}{z}\right)^2 + \cdots$$

$$V_1(z) \approx z^{a-b} e^z \Gamma(b) \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(a)} + \frac{(a-b)}{\Gamma(a-1)} \cdot \frac{1}{z} + \cdots\right)$$

$$V_2(z) = \frac{\Gamma(b)}{2\pi i} \int\limits_C e^t t^{a-b} (t-z)^{-a} dt = (-z)^{-a} \frac{\Gamma(b)}{2\pi i} \int\limits_C e^t \left(-\frac{t}{z} + 1\right)^{-a} t^{a-b} dt$$

$$V_2(z) \approx (-z)^{-a} \Gamma(b) \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(b-a)} + \frac{a}{\Gamma(b-a-1)} \cdot \frac{1}{z} + \cdots\right)$$

$$R_{E'l}(\rho) = C\rho^l e^{i\phi\rho} v(\rho) =$$

$$C\rho^l e^{i\phi\rho} \Gamma(2l+2) \left(\frac{(-2i\phi\rho)^{-l-1-\frac{i}{\phi}} e^{-2i\phi\rho}}{\Gamma\left(l+1-\frac{i}{\phi}\right)} + \frac{(2i\phi\rho)^{-l-1+\frac{i}{\phi}}}{\Gamma\left(l+1+\frac{i}{\phi}\right)} + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) =$$

$$\delta = \arg\left(\Gamma\left(l+1-\frac{i}{\phi}\right)\right)$$

$$C\rho^{-1} \frac{\Gamma(2l+2)}{\left|\Gamma\left(l+1-\frac{i}{\phi}\right)\right|} \frac{1}{(2i\phi)^{l+1}} \cdot \left((2i\phi\rho)^{\frac{i}{\phi}} e^{i\phi\rho+i\delta} + \text{к. с.}\right) =$$

$$C\rho^{-1} \frac{\Gamma(2l+2)}{\left|\Gamma\left(l+1-\frac{i}{\phi}\right)\right|} \frac{1}{(2i\phi)^{l+1}} \cdot \left((2i\phi\rho)^{\frac{i}{\phi}} e^{i\phi\rho+i\delta} + \text{к. с.}\right) =$$

$$i^{i/\phi} = (-i)^{-i/\phi} = e^{i\ln(i)/\phi} = e^{i(i\pi/2\phi)} = e^{-\pi/2\phi}$$

$$C\rho^{-1}\frac{\Gamma(2l+2)}{\left|\Gamma\left(l+1-\frac{i}{\phi}\right)\right|}\frac{e^{-\frac{\pi}{2\phi}}}{(2i\phi)^{l+1}}\left(e^{i\phi\rho+i\delta+\frac{i}{\phi}\ln 2\phi\rho}+\text{к.с.}\right)$$

$$R_{E'l}(\rho)=\rho^{-1}\cos(\phi\rho+\ln 2\phi\rho+\delta)\cdot C\frac{\Gamma(2l+2)}{\left|\Gamma\left(l+1-\frac{i}{\phi}\right)\right|}\frac{2e^{-\frac{\pi}{2\phi}}}{(2i\phi)^{l+1}}$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty \cos(kx+\delta)\cdot\cos(k'x+\delta)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^R\big(\cos\big((k+k')x+\delta+\delta'\big)+\cos\big((k-k')x+\delta-\delta'\big)\big)dx=$$

$$\frac{1}{2}R\big(1+o(1)\big)\text{ при }R\to\infty=\frac{2\pi}{4}\delta(k-k')$$

Таким образом для правильной нормировки

$$C=\frac{\Gamma\left(l+1-\frac{i}{\phi}\right)}{\Gamma(2l+2)}(2\phi)^{l+1}e^{\frac{\pi}{2\phi}}$$

2.2. Вычисление момента

$$I(E')=\int\rho^3 d\rho\, R_{E'1}(\rho)R_0(\rho)=$$

$$\frac{\Gamma(b)C^*}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1\int_0^\infty d\rho 2e^{-\rho}\rho^{l+3}e^{2i\phi\rho t}t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\,dt=$$

$$\frac{\Gamma(b)C^*}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}(2\phi)^{l+1}e^{\frac{\pi}{2\phi}}$$

$$\frac{(2\phi)^{l+1}e^{\frac{\pi}{2\phi}}}{\Gamma\left(l+1-\frac{i}{\phi}\right)}\int_0^1\frac{2(l+3)!}{(1-2i\phi t)^{l+4}}\;t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}dt$$

$$a=l+1+\frac{i}{\phi},\qquad b=2l+2$$

Интеграл в формуле берется аналитически. При $l=1$ он равен

$$\int_0^1\frac{1}{(1-2i\phi t)^5}\;t^p(1-t)^{2-p}dt=$$

$$p=1+i/\phi$$

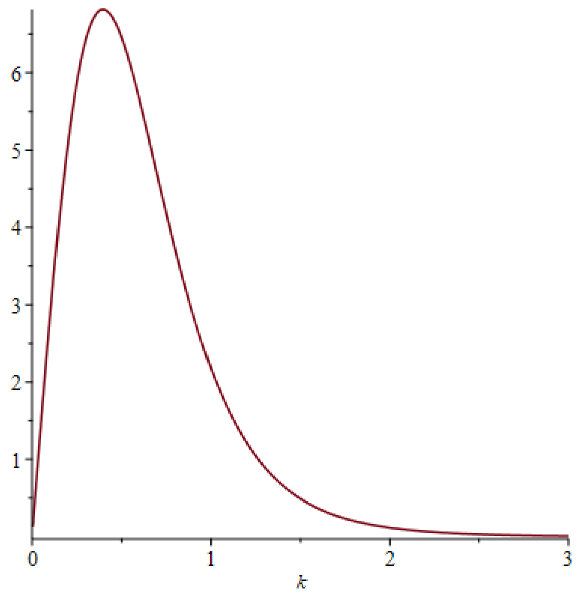
$$\frac{\left(\frac{2\phi+i}{\phi}\right)^{-1-\frac{i}{\phi}}(-i\phi)^{-1-\frac{i}{\phi}}\pi(\phi^2+1)}{12\phi^3\sin\left(\frac{\pi(\phi+i)}{\phi}\right)(2\phi+i)} =$$

Можно сокращать все фазовые множители, так как они не влияют на модуль квадрата.

$$I(\phi) = 16\Gamma\left(1-\frac{i}{\phi}\right)e^{\frac{\pi}{2\phi}}\frac{\phi(\phi-i)(1+i\phi)^{\frac{i}{k}}(1-i\phi)^{-\frac{i}{k}}}{(\phi^2+1)^3}$$

$$|I(\phi)|^2 = \frac{512\pi\phi}{(\phi^2+1)^5}\cdot\frac{e^{-4\frac{\operatorname{arctg}\phi}{\phi}}}{1-e^{-\frac{2\pi}{\phi}}}$$

График $|I(\phi)|^2$



Также для проверки отметим, что

$$I_{ion} = \int\frac{d\phi}{2\pi}|I(\phi)|^2 = 0.8502357153$$

Если нужно уменьшить дисперсию в интеграле

$$\frac{d\phi}{2\pi}|I(\phi)|^2 = 32dp\cdot\frac{e^{-4\frac{\operatorname{arctg}\phi}{\phi}}}{1-e^{-\frac{2\pi}{\phi}}},\qquad \phi = \sqrt{\frac{1}{\sqrt[4]{p}}-1}$$

Для эффекта Мигдала (переход с нулевого уровня на уровень n $(l=1)$) фактор подавления будет аналогичным

$$\frac{s}{\sqrt{3}}I(n)$$

$$I(n) = 16\frac{n^4}{(n^2-1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n^2-1)}}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

Сумма для проверки равна

$$I_{mgd} = \sum_{n=2}^{\infty} I(n)^2 = 2.149763352$$

Проверим верность формул с помощь выражения

$$1 = \langle 0|r^2\cos^2\theta\,|0\rangle = \sum_E \langle 0|r\cos\theta\,|E\rangle\langle E|r\cos\theta\,|0\rangle = \frac{1}{3}\left(I_{mgd} + I_{ion}\right) = 0.9999997$$

При $n \to \infty$ Сумма по уровням приближается интегралом

$$I^2(n)dn = I^2(x)\frac{dn}{dx}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{I(x)}{x^{\frac{3}{4}}}\right)^2 dx, \qquad x = \frac{1}{n^2}$$

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \to \exp\left(-2 - \frac{2}{3}x\right)$$

$$\frac{I(x)}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{16}{(1-x)^2}e^{-2-\frac{2}{3}x}\sqrt{\frac{1}{1-x}}$$

$$E = \frac{\alpha^2 m_e}{2}x$$

$$I^2(n)dn = 128e^{-4-\frac{4}{3}x} \cdot \frac{dx}{(1-x^2)^5}$$

Все сходится.

2.3. Большие импульсы. Упрощения

В.Ф. электрона при больших импульсах равна

$$\psi(\vec{\rho}) = e^{i\vec{\phi}\vec{\rho}}$$

Скалярное произведение равно

$$F(\vec{\phi}) = \int \rho^2 d\rho e^{i(\vec{s}-\vec{\phi})\vec{\rho}}\ \frac{e^{-\rho}}{\sqrt{\pi}}\ d\cos\theta\, d\varphi = \frac{8\sqrt{\pi}}{\left(1+\left(\vec{s}-\vec{\phi}\right)^2\right)^2}$$

Форм-фактор равен

$$F(\vec{\phi})^2 \cdot \frac{d^3\phi}{(2\pi)^3} = \frac{(16\pi)^2}{(1+s^2+\phi^2-2s\phi\cdot c)^4}\frac{4\pi\phi^2 d\phi dc}{(2\pi)^3}$$

$$\frac{d\phi}{2\pi}F^2(\phi)$$

$$F^2(\phi) = \int \frac{(16\pi)^2}{(1 + s^2 + \phi^2 - 2s\phi \cdot c)^4}\frac{dc}{2\pi} = \int \frac{128\pi}{(1 + s^2 + \phi^2 - 2s\phi \cdot c)^4}dc =$$

$$128\pi\frac{6\phi^4 + (20s^2 + 12)\phi^2 + 6(s^2 + 1)^2}{3(\phi^2 + s^2 + 1 + 2\phi s)^3(\phi^2 + s^2 + 1 - 2\phi s)}$$

$$I^2(\phi) \approx 256 \cdot 7 \cdot \frac{k^4}{(k^2 + 1)^6}$$

3. Формула для сечения

$$\frac{d^2\sigma(q)}{d\Omega} = \frac{d\sigma(q)}{d\Omega} \cdot \frac{s^2}{3}|I(\phi')|^2\frac{d\phi'}{2\pi}$$

$$\phi' = r_Б p_e, \qquad s = qr_Б\frac{m_e}{M}$$

Из ЗСЭ и ЗСИ

$$\frac{m_\chi v_{CM}'^2}{2} + \frac{p'^2}{2M} + \frac{\phi'^2}{2m_e r_Б^2} = \frac{m_\chi v_{CM}^2}{2} + \frac{p^2}{2M} + E_0$$

$$m_\chi v_{CM}' = p'$$

$$\frac{m_\chi v_{CM}'^2}{2}\left(1 + \frac{m_\chi}{M}\right) + \frac{\phi'^2}{2m_e r_Б^2} = \frac{m_\chi v_{CM}^2}{2}\left(1 + \frac{m_\chi}{M}\right) + E_0$$

$$\phi' = \sqrt{2m_e r_Б^2 \cdot \left(\frac{m_\chi}{2}\left(1 + \frac{m_\chi}{M}\right)(v_{CM}^2 - v_{CM}'^2) + E_0\right)}$$

$$d\phi' = dv_{CM}' \cdot \frac{v_{CM}'}{\phi'}m_e m_\chi r_Б^2\left(1 + \frac{m_\chi}{M}\right) = v_{CM}'dv_{CM}'\sqrt{\frac{m_e m_\chi r_Б^2\left(1 + \frac{m_\chi}{M}\right)}{\left(v_{CM}^2 - v_{CM}'^2 + 2\left(1 + \frac{m_\chi}{M}\right)^{-1}\frac{E_0}{m_\chi}\right)}}$$

$$\frac{d^2\sigma(q)}{d\Omega} = \frac{d\sigma(q)}{d\Omega}\cdot\frac{\left(qr_{\text{Б}}\frac{m_e}{M}\right)^2}{3}|I(\phi')|^2\frac{dv'_{CM}}{2\pi}\sqrt{\frac{m_e m_\chi r_{\text{Б}}^2\left(1+\frac{m_\chi}{M}\right)v'^2_{CM}}{\left(v^2_{CM}-v'^2_{CM}+2\left(1+\frac{m_\chi}{M}\right)^{-1}\frac{E_0}{m_\chi}\right)}}$$

$$\frac{d^2\sigma_\gamma(q)}{d\Omega} = \frac{d\sigma(q)}{d\Omega}\cdot\frac{32\alpha\left(\frac{q}{m_\chi}\right)^2 v'^2_{CM}}{3(v^2_{CM}-v'^2_{CM})v_{CM}}\frac{dv'_{CM}}{2\pi}$$

---

4. В параболических координатах

4.1. Замены

Ищем решение уравнения Шредингера

$$\left(\Delta+\frac{2}{\rho}+\phi^2\right)R_{E'l}(\vec{\rho}) = 0$$

в цилиндрических координатах ищем решение в виде

$$R_{E'l}(\vec{\rho}) = e^{i\phi z}A(z,r,\varphi)$$

Сразу заметим, что если z направить вдоль оси $\vec{q}$, то от угла φ зависимости не будет, иначе скалярное произведение обнулится. Тогда $A = A(z,r)$

$$\left(\Delta+2i\phi\frac{\partial}{\partial z}+\frac{2}{\rho}\right)A(z,r) = 0$$

Далее переходим к параболическим координатам

$$z = \frac{1}{2}(\xi-\eta),\qquad r = \sqrt{\xi\eta},\qquad \varphi = \varphi$$

$$\rho = \frac{1}{2}(\xi+\eta)$$

Интервал и элемент объема в этих координатах равны

$$ds^2 = \frac{1}{4}\frac{\xi+\eta}{\xi}d\xi^2+\frac{1}{4}\frac{\xi+\eta}{\eta}d\eta^2+\eta\xi d\varphi^2$$

$$dV = \frac{\xi+\eta}{4}d\xi d\eta d\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}(\xi+\eta)d\xi d\eta$$

Оператор Лапласа равен

$$\Delta=\frac{4}{\xi+\eta}\left[\partial_\xi\left(\xi\partial_\xi\right)+\partial_\eta\left(\eta\partial_\eta\right)\right]$$

А оператор производной по z

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial\xi}{\partial z}\partial_\xi+\frac{\partial\eta}{\partial z}\partial_\eta$$

$$\xi=z+\sqrt{z^2+r^2},\qquad \eta=-z+\sqrt{z^2+r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\left(1+\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}\right)\partial_\xi+\left(-1+\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}\right)\partial_\eta=\frac{2}{\xi+\eta}\left(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta\right)$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{4}{\xi+\eta}\left[\partial_\xi\left(\xi\partial_\xi\right)+\partial_\eta\left(\eta\partial_\eta\right)\right]A+\frac{4i\phi}{\xi+\eta}\left(\xi\partial_\xi-\eta\partial_\eta\right)A+\frac{4}{\xi+\eta}A=0$$

Оно упрощается

$$\left[\partial_\xi\left(\xi\partial_\xi\right)+\partial_\eta\left(\eta\partial_\eta\right)\right]A+i\phi\left(\xi\partial_\xi-\eta\partial_\eta\right)A+A=0$$

И решается методом разделения переменных

$$A=f(\xi)g(\eta)$$

$$\left[\partial_\xi\left(\xi\partial_\xi\right)+i\phi\xi\partial_\xi+p_1\right]f=0$$

$$\left[\partial_\eta\left(\xi\partial_\eta\right)-i\phi\eta\partial_\eta+p_2\right]g=0$$

$$p_1+p_2=1$$

Делаем замену

$$z_1=-i\phi\xi,\qquad z_2=i\phi\eta$$

$$\left(z_1\partial_1^2+(1-z_1)\partial_1+\frac{ip_1}{\phi}\right)f=0$$

$$\left(z_2\partial_2^2-(1-z_2)\partial_2-\frac{ip_2}{\phi}\right)g=0$$

4.2. Решение

Тогда решение выражается через гипергеометрические функции

$$\psi_{\phi,p}=C\cdot F\left(-\frac{ip_1}{\phi},1,-i\phi\xi\right)F\left(\frac{ip_2}{\phi},1,i\phi\eta\right)e^{i\phi\frac{\xi-\eta}{2}}$$

$$\psi_{\phi,p}=C\cdot F\left(-\frac{ip_1}{\phi},1,-i\phi\rho(1+\cos\theta)\right)F\left(\frac{ip_2}{\phi},1,i\phi\rho(1-\cos\theta)\right)e^{i\phi\rho\cos\theta}$$

Нас интересуют электроны, вылетающие вперед, а значит асимптотически мы ищем поведение

$$\psi \sim e^{i\phi z}, \qquad z > 0, \qquad \rho \to \infty$$

Но гипергеометрическая функция имеет следующую асимптотику

$$F(a,b,z) \sim z^{a-b} e^{z} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} + (-z)^{-a} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}$$

$$F(ia,1,z) \sim \frac{z^{ia} e^{z}}{z} \frac{1}{\Gamma(ia)} + (-z)^{-ia} \frac{1}{\Gamma(1-ia)}$$

Деление на z означает, что при малых углах будут искажения, если есть член $F\left(\frac{ip_2}{\phi}, 1, i\phi\eta\right)$, что не вписывается в требования. Значит будет только одна ГГ функция. Значит $p_2 = 0, p_1 = 1$

$$\psi = C \cdot F\left(-\frac{i}{\phi}, 1, -i\phi\rho(1+\cos\theta)\right) e^{i\phi\rho\cos\theta}$$

Асимптотика следующая

$$\psi \sim C \cdot (i\phi\xi)^{\frac{i}{\phi}} \frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{i}{\phi}\right)} e^{i\phi z} = \frac{C e^{-\frac{\pi}{2\phi}}}{\Gamma\left(1+\frac{i}{\phi}\right)} e^{i\phi z + \frac{i}{\phi}\ln\phi\xi}$$

Выбираем

$$C = e^{\frac{\pi}{2\phi}} \Gamma\left(1+\frac{i}{\phi}\right)$$

И получаем нормировку

$$\int \psi(\vec{\phi}', \vec{\rho})^{*} \psi(\vec{\phi}, \vec{\rho}) d^3\vec{\rho} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{\phi}' - \vec{\phi})$$

Где $\psi(\vec{\phi}, \vec{\rho})$ это найденное решение, только вместо оси z там ось $\vec{\phi}$

$$\psi(\vec{\phi}, \vec{\rho}) = e^{\frac{\pi}{2\phi}} \Gamma\left(1+\frac{i}{\phi}\right) \cdot F\left(-\frac{i}{\phi}, 1, -i(\phi\rho + \vec{\phi}\vec{\rho})\right) \cdot e^{i\vec{\phi}\vec{\rho}}$$

4.3. Моменты

Найдем теперь значения интегралов.

$$A(\vec{\phi}) = \int \psi(\vec{\phi}, \vec{\rho}) e^{-i\vec{s}\vec{\rho}} R_0(\vec{\rho}) d^3\vec{\rho}$$

В силу сферической симметрии можно положить $\vec{\phi} \ || \ z$ и $\vec{s} = s(\sin\theta_s, 0, \cos\theta_s)$

$$A(\vec{\phi}) = \int CF\left(-\frac{i}{\phi}, 1, -i\phi\rho(1+\cos\theta)\right) \cdot e^{i\phi\rho\cos\theta} e^{-i\vec{s}\vec{n}\rho} \left(\frac{2e^{-\rho}}{\sqrt{4\pi}}\right) \rho^2 d\rho d\cos\theta\, d\varphi$$

$$A(\vec{\phi}) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \int d\vec{n}\, d\rho\rho^2 F\left(-\frac{i}{\phi}, 1, -i\phi\rho(1+\cos\theta)\right) e^{-\rho(1+i\vec{s}\vec{n}-i\phi\cos\theta)}$$

Из Ландау

$$J = \int_0^\infty d\rho\rho^{b+n-1}\, e^{-\rho\lambda} F(a,b,k\rho) = (-1)^n \Gamma(b) \cdot \frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda^{a-b}(\lambda-k)^{-a}\right)$$

В данном случае

$$b = 1, \qquad n = 2$$

тогда

$$J = \lambda^{a-3}(\lambda-k)^{-a-2}\left((\lambda-k)^2(a-1)(a-2) - 2a(a-1)\lambda(\lambda-k) + a(a+1)\lambda^2\right)$$

$$\lambda = 1 + i\vec{s}\vec{n} - i\phi\cos\theta$$

$$k = -i\phi(1+\cos\theta)$$

$$\lambda - k = 1 + i\vec{s}\vec{n} + i\phi$$

$$A(\vec{\phi}) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \int d\vec{n}\, J$$

Попробуем взять такой интеграл с помощью параметров Фейнмана

$$A^{-m}B^{-k} = \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)\Gamma(k)} \int_0^1 dt\, t^{m-1}(1-t)^{k-1}(At + (1-t)B)^{-m-k}$$

- -

$$A(\vec{\phi}) = \frac{C}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \int d\vec{n} d\rho\rho^2 [dt t^{a-1}(1-t)^{-a} e^{-i\rho(\phi+\vec{\phi}\vec{n})t}] e^{-\rho(1+i\vec{s}\vec{n}-i\vec{\phi}\vec{n})} =$$

$$\frac{C}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \int d\vec{n} dt \cdot \frac{2t^{a-1}(1-t)^{-a}}{\left(1 + i\vec{s}\vec{n} - i\vec{\phi}\vec{n} + i(\phi+\vec{\phi}\vec{n})t\right)^3}$$

$$\int d\vec{n} f(\vec{n}\vec{h}) = 2\pi \int_{-1}^1 dx f(h\cdot x)$$

$$\vec{h} = \vec{s} - \vec{\phi}(1-t)$$

$$f\left(\vec{n}\vec{h}\right) = \frac{1}{\left(a + i\vec{h}\vec{n}\right)^3}$$

$$\int d\vec{n} f\left(\vec{n}\vec{h}\right) = \frac{4\pi a}{(a^2 + h^2)^2} = 4\pi \frac{1 + i\phi t}{\left[\left(\vec{s} - \vec{\phi}\right)^2 + 1 + 2t\left(\vec{s}\vec{\phi} - \phi^2 + i\phi\right)\right]^2} =$$

$$4\pi \frac{(1 + i\phi)t + (1 - t)}{\left[(s^2 - \phi^2 + 1 + 2i\phi)t + (1 - t)\left(1 + \left(\vec{s} - \vec{\phi}\right)^2\right)\right]^2}$$

$$A = s^2 - \phi^2 + 1 + 2i\phi, \qquad B = 1 + \left(\vec{s} - \vec{\phi}\right)^2$$

$$A\left(\vec{\phi}\right) = \frac{8\pi e^{-\frac{\pi}{2\phi}}}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1 - a)} \int dt \cdot \frac{(1 + i\phi)t^a (1 - t)^{-a} + t^{a-1}(1 - t)^{1-a}}{\left(At + B(1 - t)\right)^2} =$$

$$\frac{8\sqrt{\pi} e^{\frac{\pi}{2\phi}}}{\Gamma(a)} \cdot \left(\frac{\Gamma(a + 1)\Gamma(1 - a)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{(1 + i\phi)}{A^{a+1}B^{1-a}} + \frac{\Gamma(a)\Gamma(2 - a)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{1}{A^a B^{2-a}}\right) =$$

$$\frac{4\sqrt{\pi} e^{\frac{\pi}{2\phi}} \Gamma(1 - a)}{A^a B^{1-a}} \left(\frac{(1 + i\phi) \cdot \frac{-i}{\phi}}{A} + \frac{1 + \frac{i}{\phi}}{B}\right) = \frac{i}{\phi} \frac{4\sqrt{\pi} e^{-\frac{\pi}{2\phi}} \Gamma(1 - a)}{A^a B^{1-a}} \left(-\frac{1 + i\phi}{A} + \frac{1 - i\phi}{B}\right)$$

$$\left|A\left(\vec{\phi}\right)\right|^2 = \frac{16\pi e^{\frac{\pi}{\phi}} \left|\Gamma\left(\frac{i}{\phi}\right)\right|^2}{\phi^2 |A^a|^2} \left(\left|-\frac{1 + i\phi}{A} + \frac{1 - i\phi}{B}\right|^2\right)$$

$$\frac{1}{B^n} \to \left\langle \frac{1}{B^n} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\left(1 + \left(\vec{s} - \vec{\phi}\right)^2\right)^n} \right\rangle = \frac{1}{2s\phi(n - 1)} \left[\frac{1}{(1 + (s - \phi)^2)^{n-1}} - \frac{1}{(1 + (s + \phi)^2)^{n-1}}\right]$$

$$|A^a| = e^{\frac{\operatorname{atg} \frac{2\phi}{s^2 + 1 - \phi^2}}{\phi}} = e^{\frac{\operatorname{atg}(\phi - s) + \operatorname{atg}(\phi + s)}{\phi}}$$

$$\left|\Gamma\left(1 + \frac{i}{\phi}\right)\right|^2 = \frac{1}{\phi} \left|\Gamma\left(\frac{i}{\phi}\right) \Gamma\left(1 - \frac{i}{\phi}\right)\right| = \frac{\pi}{\phi \operatorname{sh} \frac{\pi}{\phi}}$$

$$\left\langle \left|-\frac{1 + i\phi}{A} + \frac{1 - i\phi}{B}\right|^2 \right\rangle = \frac{8(\phi^2 + 3s^2 + 1)\phi^2 s^2}{3(1 + (s - \phi)^2)^3 (1 + (s + \phi)^2)^3}$$

Теперь все подставляем

$$\left|A(\vec{\phi})\right|^2 \frac{d^3\vec{\phi}}{(2\pi)^3} = \left[\frac{256\phi(\phi^2+3s^2+1)s^2}{3(1+(s-\phi)^2)^3(1+(s+\phi)^2)^3} \cdot \frac{e^{-2\frac{\mathrm{atg}(\phi+s)+\mathrm{atg}(\phi-s)}{\phi}}}{(1-e^{-\frac{2\pi}{\phi}})}\right] d\phi$$