Оглавление

[1. Уравнение Больцмана 2](#_Toc89240411)

[1.1. Фазовый объем 2](#_Toc89240412)

[1.2. Сокращение циклических переменных 2](#_Toc89240413)

[1.3. Уравнение движения в потенциале 3](#_Toc89240414)

[2. Интеграл столкновений 5](#_Toc89240415)

[2.1. Полная скорость захвата 8](#_Toc89240416)

# Уравнение Больцмана

## Фазовый объем

Мы не будем учитывать неоднородности сферического тела по угловым координатам, поэтому уравнения движения и фазовая плотность зависит только от трех переменных: скорость 𝑣, радиус и орбитальный момент .

Фазовый объем в новых переменных выглядит следующим образом:

Можно взять вместо скорости радиальную скорость и тогда фазовый объем станет следующим:

Однородный потенциал возьмем положительным. Тогда уравнение движения и закон сохранения энергии будут следующими:

## Сокращение циклических переменных

Если ТМ взаимодействует с собой слабо, то можно не учитывать ее столкновения, и уравнение Больцмана станет линейным. Поскольку планету мы считаем изотропной, то ни интеграл столкновений, ни левая часть не будут зависеть от направления радиус вектора. Тогда по телесному углу в пространстве можно усреднить. Таким же образом можно усреднить по углу скорости. Останется только переменные .

Уравнение Больцмана примет вид:

Еще одной циклической переменной, от которой нужно избавится, является параметр обиты (любая орбита определяется переменными ). Это может быть угол в полярных координатах либо время траектории . Тогда выражается следующим образом

Введем также операцию усреднения по периоду (или большому промежутку времени) и проведем циклическое интегрирование по времени (т.е. по траектории)

Теперь ни правая ни левая части не зависят от и уравнение принимает вид

## Уравнение движения в потенциале

Сразу запишем в полярных координатах.

Делаем замену

Из условия находятся и - максимум и минимум отдаления от центра.

Поскольку

И учитывая, что при замене оператор Лапласа переходит в

Получим, что

Что говорит о выпуклости , существовании единственного экстремума (глобального минимума) и только двух решений уравнения

Из ЗСЭ можно выразить и найти период

Делаем замену, которая улучшит сходимость интеграла

Прейдем к переменной

Якобиан перехода от координат к координатам обозначим как

Здесь нужно заметить, что в гамильтоновой системе можно сделать промежуточную замену

Но исходя из уравнений движения

Поэтому якобиан преобразования – единица.

После интегрирования по переменной получаем урезанный якобиан и выражаем фазовый объем

Последнее, что нужно тут найти – это максимальный угловой момент в зависимости от энергии. Он определяется наличием решения

Поэтому определяется соотношением

Максимальная энергия равна нулю, минимальная равна .

Также нужно учесть, что в распределении нет траекторий, которые не касаются небесного тела. Это означает, что, начиная с энергии, при которой существуют орбиты, не касающиеся небесного тела, эффективный потенциал на границе тела должен быть меньше энергии.

В таком случае энергия равна

# Интеграл столкновений

Количество столкнувшихся частиц в объеме определяется матричным элементом

1. Количество уходящих частиц
2. Количество приходящих частиц (так как матричный элемент инвариантен относительно замены штрихованных скоростей с не штрихованными)

Тут необходимо выразить через и . Делать это можно при фиксированном .

В случае неупругого рассеяния мы не можем так просто обращать сечение во времени. Начнем с начала, предположив, что матричный элемент неупругого рассеяния выражается через упругое с некоторым дифференциальным фактором.

Сначала все считается при известных . Тогда в штрихованном интеграле нужна замена:

Но при фиксированном

Якобиан имеет корневую особенность при приближении к верхнему пределу

При этом необходимо, чтобы и находились на траектории, значит

Поскольку распределено изотропно, то для этой скорости можно перейти в систему отсчета, связанную с

Если зависит только от переданного импульса , то по можно проинтегрировать, учитывая распределение по скоростям.

## Полная скорость захвата

1. Берем безразмерный случайный параметр, характеризующий радиус
2. Для скорости
3. Для неупругой энергии
4. Термальные скорости ядер

Минимальная скорость ядер находится из соотношения

В этой формуле свободные параметры – и . Сначала фиксируем . Тогда, если , то – возрастает, тогда

В этом отрезке находится минимальное по модулю число.

Если и

Если и , то не будем вставлять ограничения.

В системе центра масс

Разность равна

Интеграл идет по телесному углу, в котором , что означает

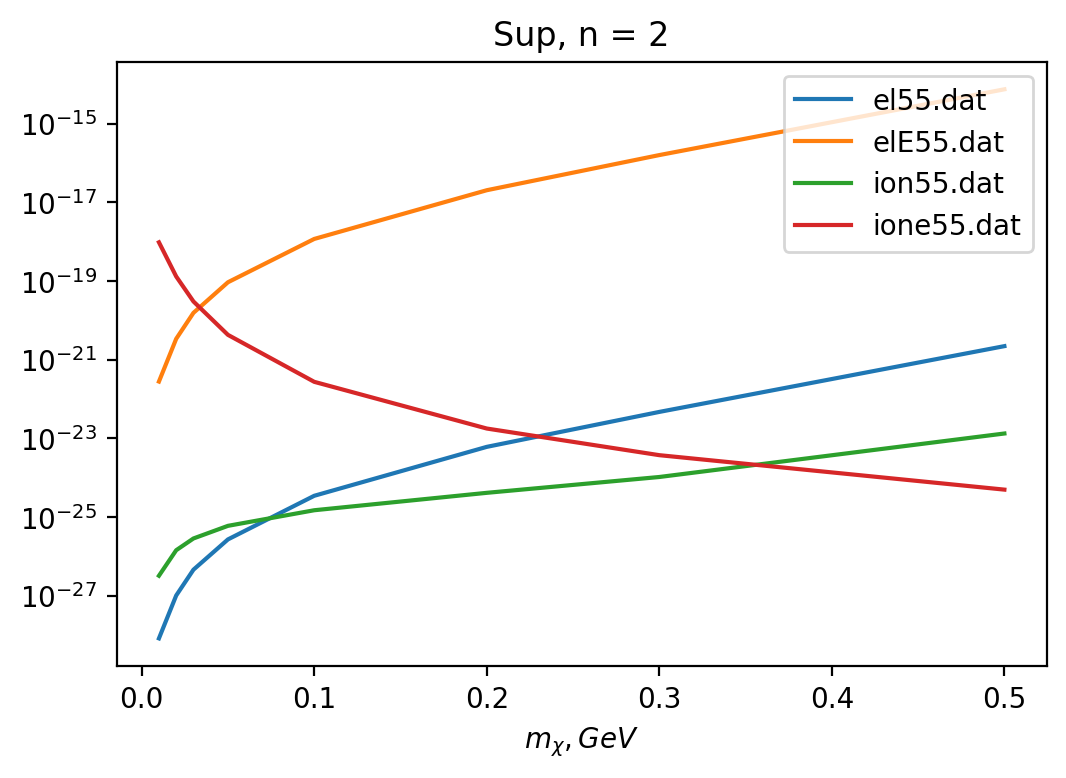
Телесный угол будем отмерять от оси, параллельной . Поскольку компонента скорости равна нулю, то . Последний единичный вектор тогда равен . Конечная скорость равна

В итоге получаем

Безразмерный фактор подавления будет таким:

Где – концентрация WIMP в гало, – средняя концентрация атомов водорода, – масса WIMP, – масса протона, – константа взаимодействия.

Его график:

**