Оглавление

[1. Уравнение Больцмана 2](#_Toc85397371)

[1.1. Фазовый объем 2](#_Toc85397372)

[1.2. Сокращение циклических переменных 2](#_Toc85397373)

[1.3. Уравнение движения в потенциале 3](#_Toc85397374)

[2. Интеграл столкновений 5](#_Toc85397375)

# Уравнение Больцмана

## Фазовый объем

Мы не будем учитывать неоднородности сферического тела по угловым координатам, поэтому уравнения движения и фазовая плотность зависит только от трех переменных: скорость 𝑣, радиус и орбитальный момент .

Фазовый объем в новых переменных выглядит следующим образом:

Можно взять вместо скорости радиальную скорость и тогда фазовый объем станет следующим:

Однородный потенциал возьмем положительным. Тогда уравнение движения и закон сохранения энергии будут следующими:

## Сокращение циклических переменных

Если ТМ взаимодействует с собой слабо, то можно не учитывать ее столкновения, и уравнение Больцмана станет линейным. Поскольку планету мы считаем изотропной, то ни интеграл столкновений, ни левая часть не будут зависеть от направления радиус вектора. Тогда по телесному углу в пространстве можно усреднить. Таким же образом можно усреднить по углу скорости. Останется только переменные .

Уравнение Больцмана примет вид:

Еще одной циклической переменной, от которой нужно избавится, является параметр обиты (любая орбита определяется переменными ). Это может быть угол в полярных координатах либо время траектории . Тогда выражается следующим образом

Введем также операцию усреднения по периоду (или большому промежутку времени) и проведем циклическое интегрирование по времени (т.е. по траектории)

Теперь ни правая ни левая части не зависят от и уравнение принимает вид

## Уравнение движения в потенциале

Сразу запишем в полярных координатах.

Делаем замену

Из условия находятся и - максимум и минимум отдаления от центра.

Поскольку

И учитывая, что при замене оператор Лапласа переходит в

Получим, что

Что говорит о выпуклости , существовании единственного экстремума (глобального минимума) и только двух решений уравнения

Из ЗСЭ можно выразить и найти период

Делаем замену, которая улучшит сходимость интеграла

Прейдем к переменной

Введем переменные производные по энергии, необходимые в дальнейшем для якобианов

Теперь нужно найти

Так как

То

Последнее, что нужно тут найти – это максимальный угловой момент в зависимости от энергии. Он определяется наличием решения

Поэтому равен

Максимальная энергия равна нулю, минимальная равна .

# Интеграл столкновений

Количество столкнувшихся частиц в объеме определяется матричным элементом

1. Количество уходящих частиц
2. Количество приходящих частиц (так как матричный элемент инвариантен относительно замены штрихованных скоростей с не штрихованными)

Тут необходимо выразить через и . Делать это можно при фиксированном .

В случае неупругого рассеяния мы не можем так просто обращать сечение во времени. Начнем с начала, предположив, что матричный элемент неупругого рассеяния выражается через упругое с некоторым дифференциальным фактором.