Алгоритм расчета интегралов для моментов следующего вида

Интеграл возникает при расчете следующего момента в атоме

Тогда

Интеграл по первой переменной берется

Далее нужно найти интегралы

Очевидна рекуррентная формула, позволяющая посчитать остальные интегралы

Итого получается

Еще для многочленов Лежандра можно найти рекуррентную формулу для

|  |
| --- |
|  |

Еще одно свойство из многочленов Лежандра

Для нужной нам это дает

Если мало

В ионизации волновая функция электрона равна

Прежде всего, подкрутим фазу, зная модуль гамма функции

Таким образом можно определить ВФ через символ Похгаммера

Теперь считаем момент

Сначала можно взять интеграл по углам

Производные многочленов Лежандра

Итого, интеграл равен

Если показатель в экспоненте небольшой, лучше разлагать все в ряд

Тогда проинтегрируем

Очевидно, что при , иначе интеграл будет нулем либо по соображению четности, либо из-за обнуления .

Для нахождения интеграла

Построим функцию

Итого, получаем

В результате

ИТОГО

Как видно, максимальная степень в знаменателе будет а в гипергеометрической функции степень будет но еще добавится интеграл дающий еще степени.

В итоге такой интеграл будет сводиться к другому интегралу:

А этот интеграл с помощью интегрального представления вырожденной гипергеометрической функции сведется к

1. Этот интеграл считается легко при . Достаточно лишь разложить скобку

Нам нужны будут значения при и

Теперь, откусив от степени кусочек , можно получить рекуррентную формулу, верную для любых

Это выражение можно изобразить схематично

|  |
| --- |
|  |

Еще одно простое рекуррентное соотношение можно получить, интегрируя по частям при и

|  |
| --- |
|  |

Теперь это выражение можно сравнить с первым и выразить

И заменяем на

С помощью этого выражения можно находить дальнейшие

|  |
| --- |
|  |

Осталось только найти