
Факты о потенциале.

0.0.1 Обозначения

1. $\varphi(r)$ — безразмерный положительный потенциал.

- $\varphi(r) > 0$
- $\varphi(r) = \frac{1}{r}, r \geq 1$
- $\varphi'(r) < 0$
- $\varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = -\rho(r) < 0$

2. e — положительная энергия

3. l — момент импульса

4. $l_m(e)$ — максимальный момент импульса при данной энергии, $r_m(e)$ — точка достижения этого максимума.

$$l_m^2(e) = \max_r r^2(\varphi(r) - e) \quad (1)$$

5. $x_l = \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_m^2}}$

6. $T(e, l)$ — период траектории.

$$T(e, l) = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) - e - \frac{l^2}{x^2}}}$$

- $T(e, l) - \frac{\pi}{2e^{3/2}}$ — ограниченная гладкая функция параметров $e, x_l l_m$.

7. r_{\pm} — корни уравнения $r^2\varphi(r) - er^2 - l^2 = 0$

8. $u = r^2$, u_{\pm} — корни уравнения $u\varphi(u) - eu - l^2 = 0$

9. $F(u) = u\varphi(u)$ — монотонная, гладкая, выпуклая вниз функция.

10. $u_- \downarrow e, \uparrow l^2$

11. $u_+ \downarrow e, \downarrow l^2$

0.0.2 $l_m(e)$

Для нахождения $l_m(e)$ находятся r_{i-1}, r_i, r_{i+1} — точки, такие, что $r_i \geq r_{i\pm 1}$, далее функция $F(u)$ приближается параболой, после чего находятся u, l_m

Заметим, что если $e > \frac{1}{2}$, то максимальный момент равен

$$l_m^2(e) = \frac{1}{4e}$$

однако траектории, пересекающие небесное тело ($\exists t : r(t, e, l) < 1$) ограничиваются $l^2 \leq 1 - e$

0.0.3 Траектории.

При расчете траектории, делаем замену

$$u = \frac{u_- + u_+}{2} - \frac{u_+ - u_-}{2} \cos(\theta)$$

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{u\varphi(u) - eu - l^2}{(u - u_-)(u - u_+)}}$$

1. если $e > 1/2$, то будем линейно интерполировать $\theta(e, l, \tau)$ ($\tau = t/T(e, l)$) по параметрам $e, \sqrt{l_m^2(e) - l^2}$. Однако при интегрировании по траектории методом монте-карло, мы можем взять приближенную траекторию $\tilde{\theta}(t)$, тогда, так как для истинной траектории $F(\theta)dt = d\theta$, то для приближенной траектории $\tilde{F}(t')dt' = d\tilde{\theta}$, т.е.

$$dt = \frac{\tilde{F}(t')}{F(\theta)} dt'$$

$\tilde{\theta}$ будем аппроксимировать по точкам с помощью кубического сплайна для непрерывности производных.

2. если $e < 1/2$, то траектория делится на 2 части: до $r < 1$ и $r > 1$. Нас интересует внутренняя часть траектории и внешняя.

При этом выбирается θ_1 , а u_+ подгоняется так, чтобы $u(\theta_1) = 1$

- Решение уравнения снаружи:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{e}{r^2} \cdot (r - r_-)(r_+ - r)}$$

где

$$r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4el^2}}{2e}$$

Внешняя часть периода траектории равна

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\pi}{2e^{3/2}} + \frac{\sqrt{1 - e - l^2}}{e} - \frac{\text{atan} \frac{2\sqrt{e}\sqrt{1 - e - l^2}}{1 - 2e}}{2e^{3/2}} \quad (2)$$

при маленьких e верно, что

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\pi}{2e^{3/2}} - z + \frac{z^3}{6} - \frac{ez^5}{10} + \dots + (-1)^k \frac{e^k z^{2k+3}}{(4k+6)} + \dots \quad (3)$$

где

$$z = \frac{2\sqrt{1 - e - l^2}}{1 - 2e} \quad (4)$$

Замена $r = \frac{r_- + r_+}{2} - \frac{r_+ - r_-}{2} \cos \theta$ приводит к уравнению:

$$\dot{\theta} \cdot (1 - y \cdot \cos(\theta)) = \frac{2\sqrt{e}}{r_- + r_+} = 2e^{3/2}$$

где

$$y = \frac{r_+ - r_-}{r_- + r_+} = \sqrt{1 - 4el^2}$$

тогда

$$\theta - y \sin \theta - (\theta_- - y \sin \theta_-) = 2e^{3/2}(t - t_-)$$

если $G(y, z)$ — обратная функция $\theta \rightarrow \theta - y \sin \theta$, тогда

$$\theta = G(y, 2e^{3/2}(t - t_-) + (\theta_- - y \sin \theta_-))$$

при использовании временного параметра $\tau = t/T_{ex}(e, l)$, получаем

$$\theta = G \left(y, \pi \cdot \left(\tau \frac{T_{ex}(e, l)}{T(e)} + \frac{T_{in}(e, l)}{T(e)} \right) \right)$$

где T_{in} — внутренняя часть периода, $T_{in} + T_{ex} = T(e) = \frac{\pi}{2e^{3/2}}$

$$\begin{aligned} \theta &= G(y, \pi(1 - (1 - \tau)z)) \\ z &= \frac{T_{ex}(e, l)}{T(e)} \end{aligned}$$

В интерполяции внутреннего периода есть один нюанс: он разрывно зависит от e и l . Продемонстрировать это можно тем, что при $e \rightarrow 1/2 - 0$ $\theta_1 \rightarrow \pi$, а когда $l \rightarrow l_{max} - \theta_1 \rightarrow 0$. Тогда непрерывной будет величина

$$T_{\theta_{in}} = \frac{T_{in}}{\theta_1} \quad (5)$$

Далее: при интерполяции периода по сетке el , возможно, что каждый бин придется разбить на более маленькие части для более точной интерполяции периода. Для этого квадратный бин можно разделить на части (сделаем это по переменным e и $\xi = \sqrt{1 - l^2/l_m^2}$)

0.0.4 Потенциал.

Свяжем величины: безразмерный потенциал $\varphi(r)$, безразмерный радиус r , безразмерная масса $M(r)$ (такая, что $M(1) = 1$), безразмерная плотность $\rho(r)$.

$$\begin{aligned} \frac{M(r)}{r^2} &= -\varphi'(r) \\ 3\rho(r) &= \frac{M'(r)}{r^2} \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится непрерывная функция

$$Q(r) = \frac{M(r)}{r^3} \quad (6)$$

Для нахождения $Q(r)$ будем делить на r^3 $M(r)$, которая определяется квадратурой Гаусса.

$$Q(r+h) = \frac{Q(r)r^3 + I_G[r \rightarrow 3\rho(r)r^2](r, r+h)}{(r+h)^3} \quad (7)$$

После численного интегрирования мы получим $Q(1) \neq 1$, поэтому необходимо будет разделить $Q(r)$ и $\rho(r)$ на $Q(1)$.

Для получения потенциала останется лишь проинтегрировать непрерывную функцию $rQ(r)$ с помощью квадратур Гаусса.

0.0.5 Вычисление функция $S(u)$

Мы хотим вычислить функцию

$$S(u) = \frac{u\varphi(u) - eu - l^2}{(u - u_-)(u_+ - u)} \quad (8)$$

Положим $F(u) = u\varphi(u)$. Тогда

$$S(u) = \frac{1}{u_+ - u_-} \cdot \left(\frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-} - \frac{F(u_+) - F(u)}{u_+ - u} \right) \quad (9)$$

Эта функция является непрерывной и определенной, однако при близких значениях u_+, u_-, u необходимо вычисление с помощью производных. Возможные случаи:

- u_+ близко к u_- . В этом случае получаем, что

$$S(u) = -\frac{1}{2}F''\left(\frac{u_+ + u_- + u}{3}\right) \quad (10)$$

- u близко к u_- , но далеко от u_+ (либо наоборот). Тогда через производные оцениваем только первую разность.

$$S(u) = \frac{1}{u_+ - u_-} \cdot \left(F'\left(\frac{u + u_-}{2}\right) - \frac{F(u_+) - F(u)}{u_+ - u} \right) \quad (11)$$

Далее — очевидные формулы без текста.

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (12)$$

$$F'(u) = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi(r)) = \varphi(r) + \frac{r\varphi'(r)}{2} = \varphi(r) - \frac{r^2}{2} Q(r) \quad (13)$$

$$F''(u) = \frac{1}{4} \left(\varphi''(r) + 3 \frac{\varphi'(r)}{r} \right) = -\frac{1}{4} (3\rho(r) + Q(r)) \quad (14)$$

Видно, что $F(u)$ — выпуклая вниз и монотонная функция, поскольку $F''(u) < 0$, а $F'(\infty) = 0$ и производная убывает, то $F'(u) > 0$

В случае если $u_p, u > 1$ (т.е. $e < 1/2$) Мы заменим функцию $F(u)$ на полином

$$F(u) = 1 + \frac{u-1}{2} - \frac{(u-1)^2}{8}$$

Тогда максимальное значение u_p на мнимой траектории равно

$$u_p = -4e + 3 + 2\sqrt{4e^2 - 2l^2 - 6e + 3}$$

0.0.6 Нахождение $l_m(e)$

- при $e \leq \frac{1}{2}$ $l_m^2(e) = 1 - e$ — определяется из условия пересечения траектории с телом
- если условием пересечения пренебречь, то $l_m^2(e) = \frac{1}{4e}$.
- Когда $e > \frac{1}{2}$, необходимо находить $l_m(e)$ из 1. Дифференцируя это выражение по u , получаем уравнение

$$F'(u) - e = 0$$

Как мы уже знаем, $F''(u) > 0$. Это значит, что корень уравнения можно найти методом бинарного поиска, так как $F'(u)$ убывает.

Найдя ближайшие точки r_1, r_2 на узлах сетки r_i , мы уточним решение, приблизив функцию $F'(u(r))$ линейно. Тогда

$$r_m = \frac{r_2 F'(r_1) - r_1 F'(r_2)}{F'(r_1) - F'(r_2)}$$

Также можно дополнительно уточнить, сделав шаг методом Ньютона

$$r'_m = r_m - \frac{F'(r_m)}{F''(r_m)}$$

Кстати, итерацию ньютона можно модифицировать для случая обнуления первой производной.

$$x' = x - \frac{2f(x)}{f'(x) + \operatorname{sgn}(f'(x)) \sqrt{f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)}}$$

0.0.7 Нахождение концов траектории.

Концы траектории определяются соотношением

$$\Phi(u) = F(u) - eu - l^2 = 0$$

Так как $\Phi'(u) = F'(u) - e$ — функция, которая убывает, причем $\Phi'(u_m(e)) = 0$, то $\Phi(u)$ — возрастает при $u < u_m(e)$ и убывает при $u > u_m(e)$. Таким образом, $\Phi(r)$ ведет себя так же как $\Phi(u)$, тогда для нахождения корней нужно лишь использовать метрд деления отрезка попола, а уточнить можно методом Ньютона.

0.0.8 Переход из фазовых объемов.

Задача номер 1 сводится к нахождению концентрации частиц в точке r , зная распределение частиц в плоскости $E - L$.

Итак, фазовый объем представляется в виде

$$d\Phi = r_{\odot}^3 v_{esc}^3 \cdot 4\pi^2 d\tau dedl^2 \quad (15)$$

А также в виде

$$d\Phi = r_{\odot}^3 v_{esc}^3 \cdot d^3 \vec{r} d^3 \vec{v} \quad (16)$$

Учтем также, что

$$d^3 \vec{v} = 2\pi dE d\sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}} d\vec{n} = \pi ded\sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} d\vec{n}. \quad (17)$$

Причем, поскольку радиальная скорость v_r и тангенциальная v_t фиксированны, для $d\vec{n}$ остается только выбор направления для тангенциальной скорости ($\int d\vec{n} = 1$).

Отсюда получаем, что

$$n(r) = \int \frac{dN}{4\pi T(e, l) dedl^2} ded\sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} \quad (18)$$

1. Предположение 1: равномерное распределение внутри бина по $dedl$:

В этом случае

$$f_1(e, l) = \frac{dN}{dedl} \quad (19)$$

И тогда получим

$$n(r) = \int \frac{1}{r} \frac{f_1(e, l)}{8\pi T(e, l)} de d\sin \frac{l}{rv} \quad (20)$$

Если нужно генерировать распределение, то L — генерируется равномерно, т.е.

$$L = (l_0 + (l_1 - l_0)\xi)L_{max}(e) \quad (21)$$

где $l_i = L/L_{max}e$ — приведенный момент импульса, а ξ — случайная величина в интервале $[0, 1]$.

А энергия генерируется НЕРАВНОМЕРНО:

$$e = e_0 + (e_1 - e_0) \cdot u \quad (22)$$

$$u = \frac{2\xi}{(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4b\xi}} \quad (23)$$

$$b = \frac{L_{max}(e_0) - L_{max}(e_1)}{L_{max}(e_0) + L_{max}(e_1)} \quad (24)$$

2. Предположение 2: равномерное распределение внутри бина по $dedl^2$:

В этом случае

$$f_2(e, l) = \frac{dN}{dedl^2} \quad (25)$$

И тогда получим

$$n(r) = \int \frac{f_2(e, l)}{4\pi T(e, l)} de d\sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} \quad (26)$$

Генерация L :

$$L = \sqrt{l_0^2 + (l_1^2 - l_0^2)\xi} L_{max}(e) \quad (27)$$

$$e = e_0 + (e_1 - e_0) \cdot u \quad (28)$$

$$u = \frac{\xi(3 + b^2)}{(1 - b)^2 + (1 - b) \sqrt[3]{(1 - b)^3 + 2\xi b(3 + b^2)} + \sqrt[3]{\dots}^2} \quad (29)$$

$$b = \frac{L_{max}(e_0) - L_{max}(e_1)}{L_{max}(e_0) + L_{max}(e_1)} \quad (30)$$

При этом важно учитывать пределы интегрирования не только исходя из размеров бина $[e_0, e_1], [\bar{l}_0, \bar{l}_1]$ но и из области определения подинтегральных функций: $e < \varphi(r), l < rv = \sqrt{r^2(\varphi(r) - e)}$. Эти ограничения

Интеграл легче всего взять методом монте-карло (это не очень затратно и просто реализуется)

Вторая интересующая нас величина — скорость аннигиляции

$$\int d^3\vec{r} d^3\vec{v} d^3\vec{v}_1 f(\vec{r}, \vec{v}) f_1(\vec{r}, \vec{v}_1) \sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1| = \frac{\sigma_{a0} v_{a0}}{r_{\odot}^3} \int dN_1 dn_2(r) \phi_{ann}(v). \quad (31)$$

где $\sigma_{a0} v_{a0}$ — размерное сечение * скорость взятое при произвольной скорости v_{a0} , а

$$\phi_{ann} = \frac{\sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1|}{\sigma_{a0} v_{a0}}. \quad (32)$$

dN_1 — дифференциал количества частиц сорта 1, $dn_2(r)$ — дифференциал концентрации частиц сорта 2 (из 20)

$$dN_1 \approx \frac{dN_1}{T(e_1, l_1) de_1 dl_1^2} d\tau de_1 dl_1^2 \approx \frac{dN_1}{T(e_1, l_1) de_1 dl_1} d\tau de_1 dl_1 \quad (33)$$

Величина ϕ_{ann} зависит от разности скоростей и равна $\phi_0 + \phi_1 v + \phi_2 v^2 + \dots$. При интегрировании можно вычислить эту величину для каждого члена ряда v^i а потом просуммировать с весами ϕ_i