

---

Факты о потенциале.

### 0.0.1 Обозначения

1.  $\varphi(r)$  — безразмерный положительный потенциал.

- $\varphi(r) > 0$
- $\varphi(r) = \frac{1}{r}, r \geq 1$
- $\varphi'(r) < 0$
- $\varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = -\rho(r) < 0$

2.  $e$  — положительная энергия

3.  $l$  — момент импульса

4.  $l_m(e)$  — максимальный момент импульса при данной энергии,  $r_m(e)$  — точка достижения этого максимума.

$$l_m^2(e) = \max_r r^2(\varphi(r) - e) \quad (1)$$

5.  $x_l = \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_m^2}}$

6.  $T(e, l)$  — время траектории.

$$T(e, l) = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) - e - \frac{l^2}{x^2}}}$$

- $T(e, l) - \frac{\pi}{2e^{3/2}}$  — ограниченная гладкая функция параметров  $e, x_l l_m$ .

7.  $r_{\pm}$  — корни уравнения  $r^2\varphi(r) - er^2 - l^2 = 0$

8.  $u = r^2$ ,  $u_{\pm}$  — корни уравнения  $u\varphi(u) - eu - l^2 = 0$

9.  $F(u) = u\varphi(u)$  — монотонная, гладкая, выпуклая вниз функция.

10.  $u_- \downarrow e, \uparrow l^2$

11.  $u_+ \downarrow e, \downarrow l^2$

### 0.0.2 $l_m(e)$

Для нахождения  $l_m(e)$  находятся  $r_{i-1}, r_i, r_{i+1}$  — точки, такие, что  $r_i \geq r_{i\pm 1}$ , далее функция  $F(u)$  приближается параболой, после чего находятся  $u, l_m$

Заметим, что если  $e > \frac{1}{2}$ , то максимальный момент равен

$$l_m^2(e) = \frac{1}{4e}$$

однако траектории, пересекающие границу небесного тела ( $\exists t : r(t, e, l) < 1$ ) ограничиваются  $l^2 \leq 1 - e$

### 0.0.3 Траектории.

При расчете траектории, делаем замену

$$u = \frac{u_- + u_+}{2} - \frac{u_+ - u_-}{2} \cos(\theta) \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{u\varphi(u) - eu - l^2}{(u - u_-)(u - u_+)}} = 2\sqrt{S(u)}$$

1. если  $e > 1/2$ , то будем линейно интерполировать  $\theta(e, l, \tau)$  ( $\tau = t/T(e, l)$ ) по параметрам  $e, \sqrt{l_m^2(e) - l^2}$

Однако при интегрировании по траектории методом монте-карло, мы можем взять приближенную траекторию  $\tilde{\theta}(t)$ , тогда, так как для истинной траектории  $F(\theta)dt = d\theta$ , то для приближенной траектории  $\tilde{F}(t')dt' = d\tilde{\theta}$ , т.е.

$$dt = \frac{\tilde{F}(t')}{F(\theta)} dt'$$

$\tilde{\theta}$  будем аппроксимировать по точкам с помощью кубического сплайна для непрерывности производных.

2. если  $e < 1/2$ , то траектория делится на 2 части: до  $r < 1$  и  $r > 1$ . Нас интересует внутренняя часть траектории и внешняя.

При этом выбирается  $\theta_1$ , а  $u_+$  подгоняется так, чтобы  $u(\theta_1) = 1$

- Решение уравнения снаружи:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{e}{r^2} \cdot (r - r_-)(r_+ - r)}$$

где

$$r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4el^2}}{2e}$$

Внешняя часть времени траектории равна при условии, что

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\pi}{2e^{3/2}} + \frac{\sqrt{1 - e - l^2}}{e} - \frac{\operatorname{atan} \frac{2\sqrt{e}\sqrt{1 - e - l^2}}{1 - 2e}}{2e^{3/2}} \quad (3)$$

$$e > 0.5 \quad (4)$$

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\sqrt{1 - e - l^2}}{e} + \frac{\operatorname{atan} \frac{2\sqrt{e}\sqrt{1 - e - l^2}}{2e - 1}}{2e^{3/2}} \quad (5)$$

$$e < 0.5 \quad (6)$$

при маленьких  $e$  верно, что

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\pi}{2e^{3/2}} - z + \frac{z^3}{6} - \frac{ez^5}{10} + \dots + (-1)^k \frac{e^k z^{2k+3}}{(4k+6)} + \dots \quad (7)$$

где

$$z = \frac{2\sqrt{1 - e - l^2}}{1 - 2e} \quad (8)$$

Замена  $r = \frac{r_- + r_+}{2} - \frac{r_+ - r_-}{2} \cos \theta$  приводит к уравнению:

$$\dot{\theta} \cdot (1 - y \cdot \cos(\theta)) = \frac{2\sqrt{e}}{r_- + r_+} = 2e^{3/2}$$

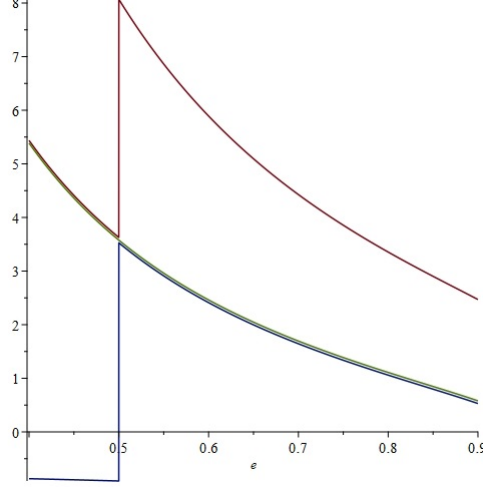


Рис. 1:  $T_{ex}(e, l)$ , красный — по 4, синий — по 6, зелёный — правильный,  $l = 0.2$

где

$$y = \frac{r_+ - r_-}{r_- + r_+} = \sqrt{1 - 4el^2}$$

тогда

$$\theta - y \sin \theta - (\theta_- - y \sin \theta_-) = 2e^{3/2}(t - t_-)$$

если  $G(y, z)$  — обратная функция  $\theta \rightarrow \theta - y \sin \theta$ , тогда

$$\theta = G(y, 2e^{3/2}(t - t_-) + (\theta_- - y \sin \theta_-))$$

при использовании временного параметра  $\tau = t/T_{ex}(e, l)$ , получаем

$$\theta = G\left(y, \pi \cdot \left(\tau \frac{T_{ex}(e, l)}{T(e)} + \frac{T_{in}(e, l)}{T(e)}\right)\right)$$

где  $T_{in}$  — внутренняя часть времени траектории,  $T_{in} + T_{ex} = T(e) = \frac{\pi}{2e^{3/2}}$

$$\begin{aligned} \theta &= G(y, \pi(1 - (1 - \tau)z)) \\ z &= \frac{T_{ex}(e, l)}{T(e)} \end{aligned}$$

- Решение внутри

Если  $r_{max} < 1$ , то всё тривиально, однако если  $r_{max} > 1$ , траектория гибридная. Во внутренней части её время является разрывной функцией параметров  $e, l$ . Однако непрерывной является функция  $T_\theta = T_{in}/\theta_1$ , где  $\theta_1$  — угол, соответствующий  $r = 1$  в 2.  $\theta_1$  тоже разрывен, но он равен

$$\cos \theta_1 = -\frac{2 - u_0 - u_1}{u_1 - u_0} = -\frac{(2 - u_0 - u_1)}{\sqrt{(u_1 - u_0)^2}} \quad (9)$$

И числитель и подкоренное значение знаменателя этой дроби является непрерывными по параметрам.

В интерполяции внутреннего времени есть один нюанс: он разрывно зависит от  $e$  и  $l$ . Продемонстрировать это можно тем, что при  $e \rightarrow 1/2 - 0$   $\theta_1 \rightarrow \pi$ , а когда  $l \rightarrow l_{max} - \theta_1 \rightarrow 0$ . Тогда непрерывной будет величина

$$T_{\theta in} = \frac{T_{in}}{\theta_1} \quad (10)$$

Далее: при интерполяции времени по сетке  $el$ , озможно, что каждый бин придется разбить на более маленькие части для более точной интерполяции времени. Для этого квадратный бин можно разделить на части (сделаем это по переменным  $e$  и  $\xi = \sqrt{1 - l^2/l_m^2}$ )

Итак, Алгоритм для интерполяции внутреннего преиода:

- Интерполяция  $u_1^2 - u_0^2$  и  $u_0^2 + u_1^2$
- можно интерполировать переменные  $r_1^2 - r_0^2$  и  $r_1^2 + r_0^2$
- Получение  $r_0$  и  $r_1$
- Нахождение  $\theta$
- Интерполяция  $T_{\theta in}$
- Вычисление  $T_{in}$

Вообще можно интерполировать ещё одну величину, равную

$$\frac{du_{epm}}{\sqrt{1-l^2}} = \frac{u_{pm} - u_l(e)}{\sqrt{1-l^2}} \rightarrow (l = L/L_{max}(e), l \rightarrow 1) \rightarrow \pm \frac{L_{max}}{\sqrt{-1/2F''(u_e)}} \quad (11)$$

Единственная проблема будет тогда, когда есть большое расхождение между двумя радиусами, т.е. когда  $l^2 \rightarrow 0$ , поэтому такую интерполяцию нежелательно проводить при малых  $l$ . Предлагается использовать эту интерполяцию при условии, что в бине  $l_{max} > 0.8$ , иначе использовать простую интерполяцию  $u_p$  и  $u_m$

Но и тут есть проблема, возникающая при  $L^2 \approx 1 - e$ . Разложим  $F(u)$  вблизи  $u = 1$ .

$$F(u) = 1 + \frac{1}{2}(u-1) + \frac{F_2}{2}(u-1)^2 \quad (12)$$

Решая  $F(u) - eu - l^2 = 0$ , получим:

$$u_{1,0} = 1 + q_e \pm \sqrt{q_e^2 + 2y} \quad (13)$$

где

$$q_e = \frac{1-2e}{-2F_2}$$

$$L^2 = (1-e) + F_2 z$$

Проблемная область поиска  $\theta_1$  та, где  $u_1 \rightarrow 1$ , тогда  $u_1 = 1 + \delta_1$ . Когда  $u_0$  отлично от 1, можно использовать приближение:

$$\cos \theta_1 = -\frac{1-u_0-\delta_1}{1-u_0+\delta_1} = -\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \theta_1 = \pi - \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} (x < 1), \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} (x > 1)$$

где  $x = \delta_1/(1-u_0)$

В случае, если ещё и  $u_0 \rightarrow 1$  т.е.  $u_0 = 1 - \delta_0$

$$\cos \theta_1 = -\frac{1-u_0-\delta_1}{1-u_0+\delta_1} = -\frac{\delta_0-\delta_1}{\delta_0+\delta_1} \approx \frac{q_e}{\sqrt{q_e^2 + 2z}}$$

Если  $\cos \theta_1$  разделить на эту дробь, то результат можно уже интерполировать. Также можно интерполировать

$$du2q = \left( \frac{u_1 - u_0}{\sqrt{q^2 + 2z}} \right)^2 = \frac{(r_1 - r_0)^2 (r_1 + r_0)^2}{q2z}$$

$$suq = \frac{u_1 + u_0 - 2}{q}$$

При  $e < 1/2$ ,  $\delta_1$  известно, поэтому будем интерполировать величину

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e} = \delta_0 \cdot \frac{q_e + \sqrt{q_e^2 + 2z}}{2z}$$

При  $e > 1/2$ , Находится величина  $\delta_1$ . С помощью интерполяции.

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{q_e^2 + 2z} + q_e} = \delta_1 \cdot \frac{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e}{2z}$$

Тут хотелось бы иметь гарантии, что  $q_e^2 + 2z > 0$ . Посмотрим, что тут у нас. Итак, это подкоренное выражение пропорционально величине  $L_m'^2(e) - L^2$  для разложения функции  $F(u)$  в 12, где  $L_m'^2(e)$  — квадрат максимального момента. Нам надо, чтобы  $L_m'^2(e) > L_m^2(e)$  Мы знаем, что

$$L_m^2(e) = F(u_e) - u_e \cdot e$$

при условии что

$$F'(u_e) - e = 0$$

в таком случае

$$\frac{du_e}{de} = \frac{1}{F''}$$

а

$$\frac{dL_m^2(e)}{de} = (F'(u_e) - e) \frac{du_e}{de} - u_e = -u_e$$

Как мы узнаем,  $-F''$  — убывающая положительная функция при  $\rho'(r) < 0$ . Поэтому для реального потенциала  $du_e/de > du_e'/de$  поэтому  $u_e > u_e'$  поэтому  $dL_m^2(e)/de < dL_m'^2(e)/de$ . Но на всякий случай лучше заменить  $\sqrt{q_e^2 + 2z}$ , что равно  $\sqrt{\frac{2}{-F_2}(L_e'^2 - L^2)}$  на  $\sqrt{\frac{2}{-F_2}(L_m^2 - L^2)}$  при  $e > 1/2$

В зависимости от точки  $E$  и  $l$ , нужно использовать разные способы интерполяции  $u_0$  и  $u_1$

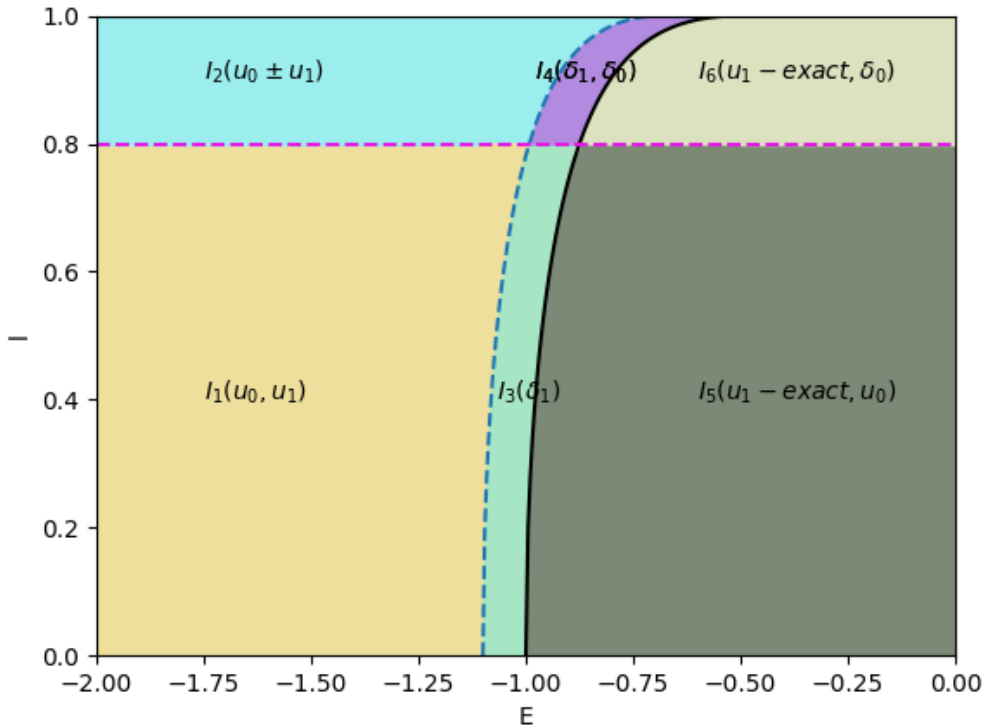


Рис. 2: Зоны на плоскости E-L

Всего есть 6 случаев, они определяются переменной  $l_u = L/L_m(e)$  и  $z$ : когда  $l_u$  близко к 1 или нет, когда  $z$  положительный (справа)/ отрицательный(слева)

- Случай  $l_u$  не близко к 1: тогда  $u_0$  можно интерполировать по  $e, l$ , и не бояться корневой нерегулярности, для  $u_1$  существуют различные варианты:

- Область 1, 3, когда  $u_1$  определяется так же как и  $u_0$ . Но менее 1. При этом  $\theta_{max} = \pi$
- Область 5:  $u_1$  определяется точно по формуле (13)

- Случай  $l_u$  близко к 1:

- В области 2,4 лучше интерполировать величину  $u_1 + u_0$ , которые непрерывны по  $e, l$  и малую величину (11). Помним:  $\theta_{max} = \pi, u_1 < 1$
- В области 6  $u_1$  определяется точно. Но нам нужно знать точно  $\delta_0$ . Для этого используется интерполяция по величине

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e} = \delta_0 \cdot \frac{q_e + \sqrt{q_e^2 + 2z}}{2z}$$

В области 1,3,5 нужно уточнить поведение при малых  $l_u$ . Для поиска  $u_0, u_1$  мы решаем уравнение

$$F(u) - eu - L^2 = 0 = u(\phi(u) - e) - L_m^2(e)l_u^2$$

при  $e \rightarrow e_0$   $\phi(u) - e \approx e_0 - e - C_0 u/2$  тогда

$$u_0 \approx \frac{L_m^2(e)l_u^2}{e_0 - e}$$

Это означает, что при больших  $e_0 - e$  мы можем интерполировать величину  $u_0/l_u^2$ . Однако проблема возникает при малых  $e_0 - e$  Тут мы воспользуемся разложением

$$F(u) \approx e_0 u + F''(0)/2 u^2 = e_0 u - \frac{C_0}{2} u^2 \quad (14)$$

тогда (обозначим  $e_0 - e$  как  $de$ )

$$u_{0/1} \approx \frac{de \pm \sqrt{de^2 - 2C_0 L^2}}{C_0} = \frac{de \pm \sqrt{de^2 - 2C_0 L_m^2(e) \cdot l_u^2}}{C_0} \quad (15)$$

При  $de \rightarrow 0$   $L_m^2(e) \rightarrow \frac{de^2}{2C_0}$

$$u_{0/1} \approx de \frac{1 \pm \sqrt{1 - l_u^2}}{C_0} \quad (16)$$

тогда при малых  $l_u$   $u_1$  можно просто интерполировать по  $e, l$ , а  $u_0$  нужно находить из интерполяции величины

$$u_{0l} = \frac{u_0}{l_u^2} \rightarrow (l_u \rightarrow 0) \rightarrow \frac{L_m^2(e)}{de} \approx (de \rightarrow 0) \approx \frac{de}{2C_0} \quad (17)$$

Однако при малых  $de$ , интерполяция может происходить на всём интервале  $l_u = 0..1$ . тогда 17 плохо работает. В этом случае можно интерполировать величину

$$u_{0s} = \frac{u_{0/1}}{1 - \sqrt{1 - l_u^2}} = \frac{u_{0/1}}{l_u^2} (1 + \sqrt{1 - l_u^2}) \rightarrow (l_u \rightarrow 0) \rightarrow 2 \frac{L_m^2(e)}{de} \approx (de \rightarrow 0) \approx \frac{de}{C_0} \quad (18)$$

#### 0.0.4 Потенциал.

Свяжем величины: безразмерный потенциал  $\varphi(r)$ , безразмерный радиус  $r$ , безразмерная масса  $M(r)$  (такая, что  $M(1) = 1$ ), безразмерная плотность  $\rho(r)$ .

$$\begin{aligned} \frac{M(r)}{r^2} &= -\varphi'(r) \\ 3\rho(r) &= \frac{M'(r)}{r^2} \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится непрерывная функция

$$Q(r) = \frac{M(r)}{r^3} \quad (19)$$

Для нахождения  $Q(r)$  будем делить на  $r^3$   $M(r)$ , которая определяется квадратурой Гаусса.

$$Q(r+h) = \frac{Q(r)r^3 + I_G[r \rightarrow 3\rho(r)r^2](r, r+h)}{(r+h)^3} \quad (20)$$

После численного интегрирования мы получим  $Q(1) \neq 1$ , поэтому необходимо будет разделить  $Q(r)$  и  $\rho(r)$  на  $Q(1)$ .

Для получения потенциала останется лишь проинтегрировать непрерывную функцию  $rQ(r)$  с помощью квадратур Гаусса.

### 0.0.5 Вычисление функция $S(u)$

Мы хотим вычислить функцию

$$S(u) = \frac{u\varphi(u) - eu - l^2}{(u - u_-)(u_+ - u)} \quad (21)$$

Положим  $F(u) = u\varphi(u)$ . Тогда

$$S(u) = \frac{1}{u_+ - u_-} \cdot \left( \frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-} - \frac{F(u_+) - F(u)}{u_+ - u} \right) \quad (22)$$

Эта функция является непрерывной и определенной, однако при близких значениях  $u_+, u_-, u$  необходимо вычисление с помощью производных. Возможные случаи:

- $u_+$  близко к  $u_-$ . В этом случае получаем, что

$$S(u) = -\frac{1}{2}F'' \left( \frac{u_+ + u_- + u}{3} \right) \quad (23)$$

- $u$  близко к  $u_-$ , но далеко от  $u_+$  (либо наоборот). Тогда через производные оцениваем только первую разность.

$$S(u) = \frac{1}{u_+ - u_-} \cdot \left( F' \left( \frac{u + u_-}{2} \right) - \frac{F(u_+) - F(u)}{u_+ - u} \right) \quad (24)$$

Далее — очевидные формулы без текста.

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (25)$$

$$F'(u) = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi(r)) = \varphi(r) + \frac{r\varphi'(r)}{2} = \varphi(r) - \frac{r^2}{2} Q(r) \quad (26)$$

$$F_2 = F''(u) = \frac{1}{4} \left( \varphi''(r) + 3 \frac{\varphi'(r)}{r} \right) = -\frac{1}{4} (3\rho(r) + Q(r)) \quad (27)$$

Видно, что  $F(u)$  — выпуклая вниз и монотонная функция, поскольку  $F''(u) < 0$ , а  $F'(\infty) = 0$  и производная убывает, то  $F'(u) > 0$ . Также заметим, что

$$\frac{dF_2}{dr} = -\frac{3}{4} \left( \rho'(r) + \frac{\rho(r)}{r} - \frac{\int_0^r 3\rho(r')r'^2 dr'}{r^4} \right) = \frac{3}{4r} \left( \frac{\int_0^r 3(\rho(r') - \rho(r))r'^2 dr'}{r^3} - r\rho'(r) \right)$$

поэтому, если  $\rho(r)$  — убывающая функция (что довольно естественно), то  $F''(u)$  — возрастающая функция.

В случае если  $u_p, u > 1$  (т.е.  $e < 1/2$ ) Мы заменим функцию  $F(u)$  на полином

$$F(u) = 1 + \frac{u-1}{2} - \frac{(u-1)^2}{8}$$

Тогда максимальное значение  $u_p$  на мнимой траектории равно

$$u_p = -4e + 3 + 2\sqrt{4e^2 - 2l^2 - 6e + 3}$$

### 0.0.6 Нахождение $l_m(e)$

- при  $e \leq \frac{1}{2}$   $l_m^2(e) = 1 - e$  — определяется из условия пересечения траектории с телом
- если условием пересечения пренебречь, то  $l_m^2(e) = \frac{1}{4e}$ .
- Когда  $e > \frac{1}{2}$ , необходимо находить  $l_m(e)$  из 1. Дифференцируя это выражение по  $u$ , получаем уравнение

$$F'(u) - e = 0$$

Как мы уже знаем,  $F''(u) > 0$ . Это значит, что корень уравнения можно найти методом бинарного поиска, так как  $F'(u)$  убывает.

Найдя ближайшие точки  $r_1, r_2$  на узлах сетки  $r_i$ , мы уточним решение, приблизив функцию  $F'(u(r))$  линейно. Тогда

$$r_m = \frac{r_2 F'(r_1) - r_1 F'(r_2)}{F'(r_1) - F'(r_2)}$$

Также можно дополнительно уточнить, сделав шаг методом Ньютона

$$r'_m = r_m - \frac{F'(r_m)}{F''(r_m)}$$

Кстати, итерацию ньютона можно модифицировать для случая обнуления первой производной.

$$x' = x - \frac{2f(x)}{f'(x) + \operatorname{sgn}(f'(x))\sqrt{f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)}}$$

### 0.0.7 Нахождение концов траектории.

Концы траектории определяются соотношением

$$\Phi(u) = F(u) - eu - l^2 = 0$$

Так как  $\Phi'(u) = F'(u) - e$  — функция, которая убывает, причем  $\Phi'(u_m(e)) = 0$ , то  $\Phi(u)$  — возрастает при  $u < u_m(e)$  и убывает при  $u > u_m(e)$ . Таким образом,  $\Phi(r)$  ведет себя так же как  $\Phi(u)$ , тогда для нахождения корней нужно лишь использовать метод деления отрезка пополам, а уточнить можно методом ньютона.

### 0.0.8 Переход из фазовых объемов

Задача номер 1 сводится к нахождению концентрации частиц в точке  $r$ , зная распределение частиц в плоскости  $E - L$ .

Итак, фазовый объем представляется в виде

$$d\Phi = r_{\odot}^3 v_{esc}^3 \cdot 4\pi^2 d\tau dedl^2 \quad (28)$$

А также в виде

$$d\Phi = r_{\odot}^3 v_{esc}^3 \cdot d^3\vec{r} d^3\vec{v} \quad (29)$$

Самое простое, что можно найти — это полная фазовая плотность

$$\frac{dN}{dr dv_r dv_{tau}} = \frac{dn(r)}{dv_r dv_{tau}} = 4\pi v_{tau} \frac{dn(r)}{d^3v} = v_{tau} \frac{dN}{\pi d\tau dedl^2} = \frac{dN(e, l)}{2\pi r T(e, l) dedl}$$

Учтем также, что

$$d^3\vec{v} = 2\pi ded \sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} d\vec{n}. \quad (30)$$

Причем, поскольку радиальная скорость  $v_r$  и тангенциальная  $v_t$  фиксированны, для  $d\vec{n}$  остается только выбор направления для тангенциальной скорости ( $\int d\vec{n} = 1$ ).

Отсюда получаем, что

$$n(r) = \int \frac{dN}{2\pi T(e, l) dedl^2} ded \sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} \quad (31)$$



1. Предположение 1: равномерное распределение внутри бина по  $dedl$ :

В этом случае

$$f_1(e, l) = \frac{dN}{dedl} \quad (32)$$

И тогда получим

$$n(r) = \int \frac{1}{r} \frac{f_1(e, l)}{4\pi T(e, l)} de d \sin \frac{l}{rv} \quad (33)$$

Если нужно генерировать распределение, то  $L$  — генерируется равномерно, т.е.

$$L = (l_0 + (l_1 - l_0)\xi)L_{max}(e) \quad (34)$$

где  $l_i = L/L_{max}e$  — приведенный момент импульса, а  $\xi$  — случайная величина в интервале  $[0, 1]$ .

А энергия генерируется НЕРАВНОМЕРНО:

$$e = e_0 + (e_1 - e_0) \cdot u \quad (35)$$

$$u = \frac{2\xi}{(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4b\xi}} \quad (36)$$

$$b = \frac{L_{max}(e_0) - L_{max}(e_1)}{L_{max}(e_0) + L_{max}(e_1)} \quad (37)$$

2. Предположение 2: равномерное распределение внутри бина по  $dedl^2$ :

В этом случае

$$f_2(e, l) = \frac{dN}{dedl^2} \quad (38)$$

И тогда получим

$$n(r) = \int \frac{f_2(e, l)}{2\pi T(e, l)} de d\sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} \quad (39)$$

Генерация  $L$ :

$$L = \sqrt{l_0^2 + (l_1^2 - l_0^2)\xi}L_{max}(e) \quad (40)$$

$$e = e_0 + (e_1 - e_0) \cdot u \quad (41)$$

$$u = \frac{\xi(3+b^2)}{(1-b)^2 + (1-b)\sqrt[3]{(1-b)^3 + 2\xi b(3+b^2)} + \sqrt[3]{\dots}^2} \quad (42)$$

$$b = \frac{L_{max}(e_0) - L_{max}(e_1)}{L_{max}(e_0) + L_{max}(e_1)} \quad (43)$$

Интеграл легче всего взять методом монте-карло (это не очень затратно и просто реализуется).

При этом важно учитывать пределы интегрирования не только исходя из размеров бина  $[e_0, e_1], [\bar{l}_0, \bar{l}_1]$  но и из области определения подинтегральных функций:  $e < \varphi(r), l < rv = \sqrt{r^2(\varphi(r) - e)}$ .

Чтобы упростить вычисление,  $e$  мы будем генерировать также, с тем же весом, однако  $l$  необходимо получать в новых пределах, для этого меру бина в каждой МК итерации нужно умножать на

$$m(e) = \frac{l'_{max} - l_{min}}{l_{max} - l_{min}}$$

где

$$l'_{max} = \sqrt{r^2(\varphi(r) - e)}$$

Ещё одно замечание касемо этого ограничения: пределы интегрирования  $e$  тоже необходимо скорректировать.

$$L_{min/max}(e) = L_0 + \frac{e - e_0}{e_1 - e_0} \cdot (L_1 - L_0) \quad (44)$$

$$L_{restrict}^2(e) = r^2(\varphi(r) - e) \quad (45)$$

Вторая интересующая нас величина — скорость аннигиляции

$$\int d^3\vec{r} d^3\vec{v} d^3\vec{v}_1 f(\vec{r}, \vec{v}) f_1(\vec{r}, \vec{v}_1) \sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1| = \frac{\sigma_{a0} v_{a0}}{r_\odot^3} \int dN_1 dn_2(r) \phi_{ann}(v). \quad (46)$$

где  $\sigma_{a0} v_{a0}$  — размерное сечение \* скорость взятое при произвольной скорости  $v_{a0}$ , а

$$\phi_{ann} = \frac{\sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1|}{\sigma_{a0} v_{a0}}. \quad (47)$$

$dN_1$  — дифференциал количества частиц сорта 1,  $dn_2(r)$  — дифференциал концентрации частиц сорта 2 (из 33)

$$dN_1 \approx \frac{dN_1}{T(e_1, l_1) de_1 dl_1^2} d\tau de_1 dl_1^2 \approx \frac{dN_1}{T(e_1, l_1) de_1 dl_1} d\tau de_1 dl_1 \quad (48)$$

Величина  $\phi_{ann}$  зависит от разности скоростей и равна  $\phi_0 + \phi_2 v^2 + \dots$ . При интегрировании можно вычислить эту величину для каждого члена ряда  $v^i$  а потом просуммировать с весами  $\phi_i$

Вклад  $v^2$  можно оптимизировать, так как если мы интегрируем по скоростям двух частиц, то скорости  $\vec{v}_i$  и  $-\vec{v}_i$  входят с одинаковым весом. Тогда можно сделать замену

$$v^2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \rightarrow \frac{1}{2} ((\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2) = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) \quad (49)$$

### 0.0.9 Проверки

- 1) Проверка захвата — по статье. согласие есть
- 2) Проверка Scatter — Проверить полное сечение соударения для  $\sigma = 1/v$
- 3) Проверка концентрации: сохранение числа частиц  $\sum_i N_i = \int n(r) dV$
- 4) Проверка аннигиляции: при  $\sigma v = 1$  аннигиляция равна  $\int n^2(r) dV$ .

### 0.0.10 Нормировка и вычисление интегралов

- Количество частиц:

Полное число частиц в бине  $i$   $N_{ri}$  должно равняться

$$N_{ri} = N_i \cdot N_\odot$$

где  $N_\odot = n_{\chi, \infty} \cdot V_\odot$ ,  $N_i$  — нормированное число частиц, участвующее в расчёте,  $n_{\chi, \infty}$  — концентрация Т.М. в гало,  $V_\odot$  — объём тела.

- Характерное время (частота соударений)

В качестве единицы, обратного времени свободного пробега будем обозначать величину

$$\frac{1}{T_{\chi p}} = \sigma_{\xi p} \bar{n}_p V_{esc}$$

где  $\bar{n}_p$  — средняя концентрация протонов,  $V_{esc}$  — вторая космическая скорость для объекта,  $\sigma_{\xi p}$  — сечение нормировки (сечение рассеяния Т.М. на протоне/нуклоне при некой фиксированной выбранной скорости  $v = |\vec{v}_\chi - \vec{v}_p|$ . Важно, что при более сложных потенциалах или в неупругом случае)

Естественно, мы обезразмерим реальное время:  $t_r = T_{\chi p} t$

- Скорость захвата

Полная скорость захвата в  $i$  том бине равна

$$C_i = c_i \frac{N_\odot}{T_{\chi p}}$$

Тогда темп захвата определяется из

$$\frac{dN_{ri}^{capt}}{dt_r} = C_i \Leftrightarrow \frac{dN_i^{capt}}{dt} = c_i$$

Формуля для неупругого сечения (в системе центра масс):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{|\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}$$

Под ядерным форм фактором понимается величина

$$F(q, v) = \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathcal{M}_0|^2} \cdot \frac{(m_\chi + m_p)^2}{(m_\chi + m_N)^2}$$

где  $m_N$  — масса ядра,  $m_p$  — масса одного нуклона, по которому идет нормировка.

Под  $\sigma_{\xi p}$  подразумевается величина

$$\sigma_{\xi p} = \int \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{64\pi^2(E_p + E_\chi)^2} d\Omega$$

Тогда, используя безразмерные параметры, получаем:

$$c_i = \int dr^3 \int d^3\vec{v}_\chi \int \tilde{f}(\vec{v}_\chi) \tilde{n}_N(r) \cdot |\vec{v}'_\chi - \vec{v}'_N| F(q, v) d\vec{n}'_{CM}$$

где функция распределения ТМ равна  $n_{\chi, \infty} \tilde{f}(\vec{v}_\chi)$ ,  $d\vec{n}'_{CM}$  — элемент выходного фазового объема (направление выходной скорости в системе Ц.М.), полный интеграл которого равен 1 ( $\int d\vec{n}'_{CM} = 1$ )

$$d\vec{n}'_{CM} = \frac{d\cos\theta' d\varphi'}{4\pi}$$

Начальная скорость:

$$d^3\vec{v}_\chi \tilde{f}(\vec{v}_\chi) = 2\pi v dv^2 f_e(v^2) = 2\pi v du^2 f_e(u^2)$$

где  $v^2 = v_{esc}^2(r) + u^2$ ,  $v_{esc}(r)$  — скорость вылета в точке  $r$ ,  $u$  — скорость на бесконечности  $f_e(u^2)$  — эффективная плотность на бесконечности с учётом скорости движения небесного тела относительно гало  $u_0$  ( $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{w}$ ) где  $\vec{w}$  — скорость в гало.

$$f_e(u^2) = \int_{-1}^1 f(u^2 + u_0^2 + 2uu_0x) \frac{dx}{2}$$

- Темп рассеяния

Обезразмеренная матрица рассеяния (тоже на  $T_{\chi p}$ )  $s_{ij}$  определяется из темпа рассеяния частиц (тоже обезразмеренного):

$$\frac{dN_i^{scat}}{dt} = s_{ij} N_j$$

$$\sum_i s_{ij} = \frac{T_{in}}{T_{in} + T_{out}} \cdot d\tau [d^3v_p f_p(v)] \cdot |\vec{v}'_\chi - \vec{v}'_N| F(q, v) d\vec{n}'_{CM}$$

При интегрировании методом Монте-Карло берется случайное время  $\tau$  траектории, скорость мишени (относительно распределения Больцмана  $[d^3v_p f_p(v)]$ ). Энергия и импульс частицы ТМ генерируются внутри бина в предположении, что они равномерно распределены относительно меры либо  $dEdL$  либо  $dEdL^2$ . Конечная скорость определяется направлением вектора разности скоростей в системе центра масс  $d\vec{n}'_{CM}$ .

- Безразмерная концентрация ТМ:

$$\tilde{n}_\chi(r) = \sum_i \int \frac{4\pi}{3} \frac{1}{2\pi T(e, l)} \frac{dN_i}{dedl^2} ded \sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}}$$

В таком случае

$$\int \tilde{n}_\chi(r) 3r^2 dr = \sum N_i = \sum \frac{N_{ri}}{V n_{\chi\infty}}$$

Такой выбор размерности связан с тем, что  $V \cdot 3r^2 dr = dV$  и тогда

$$\int \tilde{n}_\chi(r) n_{\chi\infty} dV = \sum N_{ri} = \text{Полное число частиц}$$

- Аннигиляция: Мы хотим чтобы

$$\frac{dN_i^{ann}}{dt} = \gamma_p a_{ij}^p N_j N_i \quad (50)$$

где

$$\gamma_p = T_{\chi p} \cdot n_{\chi\infty} \langle \sigma_{ann} v \rangle_{v=v_{esc}}$$

отношение темпа аннигиляции к темпу рассеяния. Важно: величина сечения аннигиляции  $\langle \sigma_{ann} v \rangle$  берётся при скорости  $v = v_{esc}$  (для аннигиляции сечение которой ведёт себя как  $\langle \sigma_{ann} v \rangle = const \cdot v^2$ )

$$a_{ij}^p = \int \phi_{ann} 3r^2 dr \left( \frac{4\pi}{3} \right)^2 \left( \frac{1}{2\pi T(e_1, l_1)} \frac{1}{de_1 dl_1^2} de_1 d\sqrt{v_1^2 - \frac{l_1^2}{r^2}} \right) \left( \frac{1}{2\pi T(e_2, l_2)} \frac{1}{de_2 dl_2^2} de_2 d\sqrt{v_2^2 - \frac{l_2^2}{r^2}} \right)$$

Из этого поределения следует:

$$a_{ij}^p N_i N_j = \int 3r^2 dr \tilde{n}_\chi^2(r) \phi_{ann}$$

Полная скорость аннигиляции равна

$$\frac{dN_{ri}^{ann}}{dt_r} = \gamma_p a_{ij}^p N_i N_j \cdot \frac{N_\odot^2}{T_{\chi p}}$$