
Факты о потенциале.

0.0.1 Обозначения

1. $\varphi(r)$ — безразмерный положительный потенциал.

- $\varphi(r) > 0$
- $\varphi(r) = \frac{1}{r}, r \geq 1$
- $\varphi'(r) < 0$
- $\varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = -\rho(r) < 0$

2. e — положительная энергия

3. l — момент импульса

4. $l_m(e)$ — максимальный момент импульса при данной энергии, $r_m(e)$ — точка достижения этого максимума.

$$l_m^2(e) = \max_r r^2(\varphi(r) - e) \quad (1)$$

5. $x_l = \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_m^2}}$

6. $T(e, l)$ — время траектории.

$$T(e, l) = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) - e - \frac{l^2}{x^2}}}$$

- $T(e, l) - \frac{\pi}{2e^{3/2}}$ — ограниченная гладкая функция параметров $e, x_l l_m$.

7. r_{\pm} — корни уравнения $r^2\varphi(r) - er^2 - l^2 = 0$

8. $u = r^2$, u_{\pm} — корни уравнения $u\varphi(u) - eu - l^2 = 0$

9. $F(u) = u\varphi(u)$ — монотонная, гладкая, выпуклая вниз функция.

10. $u_- \downarrow e, \uparrow l^2$

11. $u_+ \downarrow e, \downarrow l^2$

0.0.2 $l_m(e)$

Для нахождения $l_m(e)$ находятся r_{i-1}, r_i, r_{i+1} — точки, такие, что $r_i \geq r_{i\pm 1}$, далее функция $F(u)$ приближается параболой, после чего находятся u, l_m

Заметим, что если $e > \frac{1}{2}$, то максимальный момент равен

$$l_m^2(e) = \frac{1}{4e}$$

однако траектории, пересекающие границу небесного тела ($\exists t : r(t, e, l) < 1$) ограничиваются $l^2 \leq 1 - e$

0.0.3 Траектории.

При расчете траектории, делаем замену

$$u = \frac{u_- + u_+}{2} - \frac{u_+ - u_-}{2} \cos(\theta) \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{u\varphi(u) - eu - l^2}{(u - u_-)(u - u_+)}} = 2\sqrt{S(u)}$$

1. если $e > 1/2$, то будем линейно интерполировать $\theta(e, l, \tau)$ ($\tau = t/T(e, l)$) по параметрам $e, \sqrt{l_m^2(e) - l^2}$

Однако при интегрировании по траектории методом монте-карло, мы можем взять приближенную траекторию $\tilde{\theta}(t)$, тогда, так как для истинной траектории $F(\theta)dt = d\theta$, то для приближенной траектории $\tilde{F}(t')dt' = d\tilde{\theta}$, т.е.

$$dt = \frac{\tilde{F}(t')}{F(\theta)} dt'$$

$\tilde{\theta}$ будем аппроксимировать по точкам с помощью кубического сплайна для непрерывности производных.

2. если $e < 1/2$, то траектория делится на 2 части: до $r < 1$ и $r > 1$. Нас интересует внутренняя часть траектории и внешняя.

При этом выбирается θ_1 , а u_+ подгоняется так, чтобы $u(\theta_1) = 1$

- Решение уравнения снаружи:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{e}{r^2} \cdot (r - r_-)(r_+ - r)}$$

где

$$r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4el^2}}{2e}$$

Внешняя часть времени траектории равна при условии, что

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\pi}{2e^{3/2}} + \frac{\sqrt{1 - e - l^2}}{e} - \frac{\operatorname{atan} \frac{2\sqrt{e}\sqrt{1 - e - l^2}}{1 - 2e}}{2e^{3/2}} \quad (3)$$

$$e > 0.5 \quad (4)$$

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\sqrt{1 - e - l^2}}{e} + \frac{\operatorname{atan} \frac{2\sqrt{e}\sqrt{1 - e - l^2}}{2e - 1}}{2e^{3/2}} \quad (5)$$

$$e < 0.5 \quad (6)$$

при маленьких e верно, что

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\pi}{2e^{3/2}} - z + \frac{z^3}{6} - \frac{ez^5}{10} + \dots + (-1)^k \frac{e^k z^{2k+3}}{(4k+6)} + \dots \quad (7)$$

где

$$z = \frac{2\sqrt{1 - e - l^2}}{1 - 2e} \quad (8)$$

Замена $r = \frac{r_- + r_+}{2} - \frac{r_+ - r_-}{2} \cos \theta$ приводит к уравнению:

$$\dot{\theta} \cdot (1 - y \cdot \cos(\theta)) = \frac{2\sqrt{e}}{r_- + r_+} = 2e^{3/2}$$

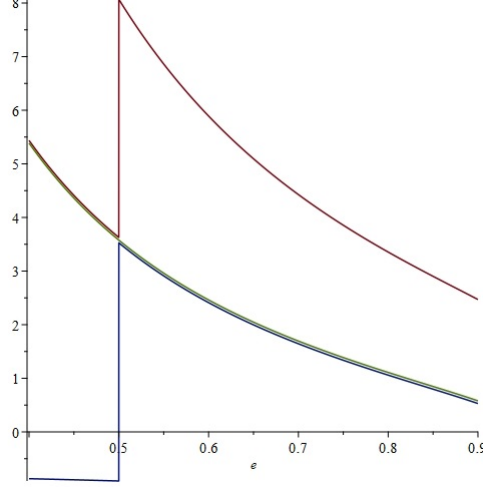


Рис. 1: $T_{ex}(e, l)$, красный — по 4, синий — по 6, зелёный — правильный, $l = 0.2$

где

$$y = \frac{r_+ - r_-}{r_- + r_+} = \sqrt{1 - 4el^2}$$

тогда

$$\theta - y \sin \theta - (\theta_- - y \sin \theta_-) = 2e^{3/2}(t - t_-)$$

если $G(y, z)$ — обратная функция $\theta \rightarrow \theta - y \sin \theta$, тогда

$$\theta = G(y, 2e^{3/2}(t - t_-) + (\theta_- - y \sin \theta_-))$$

при использовании временного параметра $\tau = t/T_{ex}(e, l)$, получаем

$$\theta = G\left(y, \pi \cdot \left(\tau \frac{T_{ex}(e, l)}{T(e)} + \frac{T_{in}(e, l)}{T(e)}\right)\right)$$

где T_{in} — внутренняя часть времени траектории, $T_{in} + T_{ex} = T(e) = \frac{\pi}{2e^{3/2}}$

$$\begin{aligned} \theta &= G(y, \pi(1 - (1 - \tau)z)) \\ z &= \frac{T_{ex}(e, l)}{T(e)} \end{aligned}$$

- Решение внутри

Если $r_{max} < 1$, то всё тривиально, однако если $r_{max} > 1$, траектория гибридная. Во внутренней части её время является разрывной функцией параметров e, l . Однако непрерывной является функция $T_\theta = T_{in}/\theta_1$, где θ_1 — угол, соответствующий $r = 1$ в 2. θ_1 тоже разрывен, но он равен

$$\cos \theta_1 = -\frac{2 - u_0 - u_1}{u_1 - u_0} = -\frac{(2 - u_0 - u_1)}{\sqrt{(u_1 - u_0)^2}} \quad (9)$$

И числитель и подкоренное значение знаменателя этой дроби является непрерывными по параметрам.

В интерполяции внутреннего времени есть один нюанс: он разрывно зависит от e и l . Продемонстрировать это можно тем, что при $e \rightarrow 1/2 - 0$ $\theta_1 \rightarrow \pi$, а когда $l \rightarrow l_{max}$ — $\theta_1 \rightarrow 0$. Тогда непрерывной будет величина

$$T_{\theta in} = \frac{T_{in}}{\theta_1} \quad (10)$$

Далее: при интерполяции времени по сетке el , озможно, что каждый бин придется разбить на более маленькие части для более точной интерполяции времени. Для этого квадратный бин можно разделить на части (сделаем это по переменным e и $\xi = \sqrt{1 - l^2/l_m^2}$)

Итак, Алгоритм для интерполяции внутреннего преиода:

- Интерполяция $u_1^2 - u_0^2$ и $u_0^2 + u_1^2$
- можно интерполировать переменные $r_1^2 - r_0^2$ и $r_1^2 + r_0^2$
- Получение r_0 и r_1
- Нахождение θ
- Интерполяция $T_{\theta in}$
- Вычисление T_{in}

Вообще можно интерполировать ещё одну величину, равную

$$\frac{du_{epm}}{\sqrt{1-l^2}} = \frac{u_{pm} - u_l(e)}{\sqrt{1-l^2}} \rightarrow (l = L/L_{max}(e), l \rightarrow 1) \rightarrow \pm \frac{L_{max}}{\sqrt{-1/2F''(u_e)}} \quad (11)$$

Единственная проблема будет тогда, когда есть большое расхождение между двумя радиусами, т.е. когда $l^2 \rightarrow 0$, поэтому такую интерполяцию нежелательно проводить при малых l . Предлагается использовать эту интерполяцию при условии, что в бине $l_{max} > 0.8$, иначе использовать простую интерполяцию u_p и u_m

Но и тут есть проблема, возникающая при $L^2 \approx 1 - e$. Разложим $F(u)$ вблизи $u = 1$.

$$F(u) = 1 + \frac{1}{2}(u-1) + \frac{F_2}{2}(u-1)^2 \quad (12)$$

Решая $F(u) - eu - l^2 = 0$, получим:

$$u_{1,0} = 1 + q_e \pm \sqrt{q_e^2 + 2y} \quad (13)$$

где

$$q_e = \frac{1-2e}{-2F_2}$$

$$L^2 = (1-e) + F_2 z$$

Проблемная область поиска θ_1 та, где $u_1 \rightarrow 1$, тогда $u_1 = 1 + \delta_1$. Когда u_0 отлично от 1, можно использовать приближение:

$$\cos \theta_1 = -\frac{1-u_0-\delta_1}{1-u_0+\delta_1} = -\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \theta_1 = \pi - \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} (x < 1), \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} (x > 1)$$

где $x = \delta_1/(1-u_0)$

В случае, если ещё и $u_0 \rightarrow 1$ т.е. $u_0 = 1 - \delta_0$

$$\cos \theta_1 = -\frac{1-u_0-\delta_1}{1-u_0+\delta_1} = -\frac{\delta_0-\delta_1}{\delta_0+\delta_1} \approx \frac{q_e}{\sqrt{q_e^2 + 2z}}$$

Если $\cos \theta_1$ разделить на эту дробь, то результат можно уже интерполировать. Также можно интерполировать

$$du2q = \left(\frac{u_1 - u_0}{\sqrt{q^2 + 2z}} \right)^2 = \frac{(r_1 - r_0)^2 (r_1 + r_0)^2}{q2z}$$

$$suq = \frac{u_1 + u_0 - 2}{q}$$

При $e < 1/2$, δ_1 известно, поэтому будем интерполировать величину

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e} = \delta_0 \cdot \frac{q_e + \sqrt{q_e^2 + 2z}}{2z}$$

При $e > 1/2$, Находится величина δ_1 . С помощью интерполяции.

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{q_e^2 + 2z} + q_e} = \delta_1 \cdot \frac{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e}{2z}$$

Тут хотелось бы иметь гарантии, что $q_e^2 + 2z > 0$. Посмотрим, что тут у нас. Итак, это подкоренное выражение пропорционально величине $L_m'^2(e) - L^2$ для разложения функции $F(u)$ в 12, где $L_m'^2(e)$ — квадрат максимального момента. Нам надо, чтобы $L_m'^2(e) > L_m^2(e)$ Мы знаем, что

$$L_m^2(e) = F(u_e) - u_e \cdot e$$

при условии что

$$F'(u_e) - e = 0$$

в таком случае

$$\frac{du_e}{de} = \frac{1}{F''}$$

а

$$\frac{dL_m^2(e)}{de} = (F'(u_e) - e) \frac{du_e}{de} - u_e = -u_e$$

Как мы узнаем, $-F''$ — убывающая положительная функция при $\rho'(r) < 0$. Поэтому для реального потенциала $du_e/de > du_e'/de$ поэтому $u_e > u_e'$ поэтому $dL_m^2(e)/de < dL_m'^2(e)/de$. Но на всякий случай лучше заменить $\sqrt{q_e^2 + 2z}$, что равно $\sqrt{\frac{2}{-F_2}(L_e'^2 - L^2)}$ на $\sqrt{\frac{2}{-F_2}(L_m^2 - L^2)}$ при $e > 1/2$

В зависимости от точки E и l , нужно использовать разные способы интерполяции u_0 и u_1

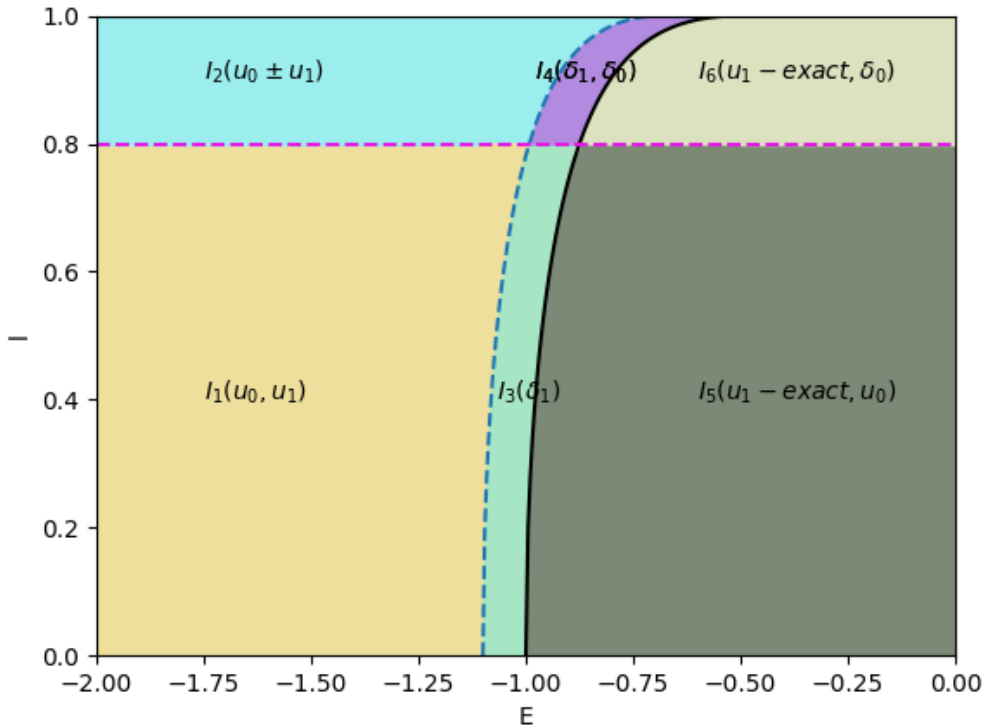


Рис. 2: Зоны на плоскости E-L

Всего есть 6 случаев, они определяются переменной $l_u = L/L_m(e)$ и z : когда l_u близко к 1 или нет, когда z положительный (справа)/ отрицательный(слева)

- Случай l_u не близко к 1: тогда u_0 можно интерполировать по e, l , и не бояться корневой нерегулярности, для u_1 существуют различные варианты:

- Область 1, 3, когда u_1 определяется так же как и u_0 . Но менее 1. При этом $\theta_{max} = \pi$
- Область 5: u_1 определяется точно по формуле (13)

- Случай l_u близко к 1:

- В области 2,4 лучше интерполировать величину $u_1 + u_0$, которые непрерывны по e, l и малую величину (11). Помним: $\theta_{max} = \pi$, $u_1 < 1$
- В области 6 u_1 определяется точно. Но нам нужно знать точно δ_0 . Для этого используется интерполяция по величине

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e} = \delta_0 \cdot \frac{q_e + \sqrt{q_e^2 + 2z}}{2z}$$

В области 1,3,5 нужно уточнить поведение при малых l_u . Для поиска u_0 , u_1 мы решаем уравнение

$$F(u) - eu - L^2 = 0 = u(\phi(u) - e) - L_m^2(e)l_u^2$$

при $e \rightarrow e_0$ $\phi(u) - e \approx e_0 - e - C_0 u/2$ тогда

$$u_0 \approx \frac{L_m^2(e)l_u^2}{e_0 - e}$$

Это означает, что при больших $e_0 - e$ мы можем интерполировать величину u_0/l_u^2 . Однако проблема возникает при малых $e_0 - e$ Тут мы воспользуемся разложением

$$F(u) \approx e_0 u + F''(0)/2u^2 = e_0 u - \frac{C_0}{2}u^2 \quad (14)$$

тогда (обозначим $e_0 - e$ как de)

$$u_{0/1} \approx \frac{de \pm \sqrt{de^2 - 2C_0 L^2}}{C_0} = \frac{de \pm \sqrt{de^2 - 2C_0 L_m^2(e) \cdot l_u^2}}{C_0} \quad (15)$$

При $de \rightarrow 0$ $L_m^2(e) \rightarrow \frac{de^2}{2C_0}$

$$u_{0/1} \approx de \frac{1 \pm \sqrt{1 - l_u^2}}{C_0} \quad (16)$$

тогда при малых l_u u_1 можно просто интерполировать по e, l , а u_0 нужно находить из интерполяции величины

$$u_{0l} = \frac{u_0}{l_u^2} \rightarrow (l_u \rightarrow 0) \rightarrow \frac{L_m^2(e)}{de} \approx (de \rightarrow 0) \approx \frac{de}{2C_0} \quad (17)$$

Однако при малых de , интерполяция может происходить на всём интервале $l_u = 0..1$. тогда 17 плохо работает. В этом случае можно интерполировать величину

$$u_{0s} = \frac{u_{0/1}}{1 - \sqrt{1 - l_u^2}} = \frac{u_{0/1}}{l_u^2} (1 + \sqrt{1 - l_u^2}) \rightarrow (l_u \rightarrow 0) \rightarrow 2 \frac{L_m^2(e)}{de} \approx (de \rightarrow 0) \approx \frac{de}{C_0} \quad (18)$$

0.0.4 Потенциал.

Свяжем величины: безразмерный потенциал $\varphi(r)$, безразмерный радиус r , безразмерная масса $M(r)$ (такая, что $M(1) = 1$), безразмерная плотность $\rho(r)$.

$$\begin{aligned} \frac{M(r)}{r^2} &= -\varphi'(r) \\ 3\rho(r) &= \frac{M'(r)}{r^2} \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится непрерывная функция

$$Q(r) = \frac{M(r)}{r^3} \quad (19)$$

Для нахождения $Q(r)$ будем делить на r^3 $M(r)$, которая определяется квадратурой Гаусса.

$$Q(r+h) = \frac{Q(r)r^3 + I_G[r \rightarrow 3\rho(r)r^2](r, r+h)}{(r+h)^3} \quad (20)$$

После численного интегрирования мы получим $Q(1) \neq 1$, поэтому необходимо будет разделить $Q(r)$ и $\rho(r)$ на $Q(1)$.

Для получения потенциала останется лишь проинтегрировать непрерывную функцию $rQ(r)$ с помощью квадратур Гаусса.

0.0.5 Вычисление функция $S(u)$

Мы хотим вычислить функцию

$$S(u) = \frac{u\varphi(u) - eu - l^2}{(u - u_-)(u_+ - u)} \quad (21)$$

Положим $F(u) = u\varphi(u)$. Тогда

$$S(u) = \frac{1}{u_+ - u_-} \cdot \left(\frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-} - \frac{F(u_+) - F(u)}{u_+ - u} \right) \quad (22)$$

Эта функция является непрерывной и определенной, однако при близких значениях u_+, u_-, u необходимо вычисление с помощью производных. Возможные случаи:

- u_+ близко к u_- . В этом случае получаем, что

$$S(u) = -\frac{1}{2}F'' \left(\frac{u_+ + u_- + u}{3} \right) \quad (23)$$

- u близко к u_- , но далеко от u_+ (либо наоборот). Тогда через производные оцениваем только первую разность.

$$S(u) = \frac{1}{u_+ - u_-} \cdot \left(F' \left(\frac{u + u_-}{2} \right) - \frac{F(u_+) - F(u)}{u_+ - u} \right) \quad (24)$$

Далее — очевидные формулы без текста.

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (25)$$

$$F'(u) = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi(r)) = \varphi(r) + \frac{r\varphi'(r)}{2} = \varphi(r) - \frac{r^2}{2} Q(r) \quad (26)$$

$$F_2 = F''(u) = \frac{1}{4} \left(\varphi''(r) + 3 \frac{\varphi'(r)}{r} \right) = -\frac{1}{4} (3\rho(r) + Q(r)) \quad (27)$$

Видно, что $F(u)$ — выпуклая вниз и монотонная функция, поскольку $F''(u) < 0$, а $F'(\infty) = 0$ и производная убывает, то $F'(u) > 0$. Также заметим, что

$$\frac{dF_2}{dr} = -\frac{3}{4} \left(\rho'(r) + \frac{\rho(r)}{r} - \frac{\int_0^r 3\rho(r')r'^2 dr'}{r^4} \right) = \frac{3}{4r} \left(\frac{\int_0^r 3(\rho(r') - \rho(r))r'^2 dr'}{r^3} - r\rho'(r) \right)$$

поэтому, если $\rho(r)$ — убывающая функция (что довольно естественно), то $F''(u)$ — возрастающая функция.

В случае если $u_p, u > 1$ (т.е. $e < 1/2$) Мы заменим функцию $F(u)$ на полином

$$F(u) = 1 + \frac{u-1}{2} - \frac{(u-1)^2}{8}$$

Тогда максимальное значение u_p на мнимой траектории равно

$$u_p = -4e + 3 + 2\sqrt{4e^2 - 2l^2 - 6e + 3}$$

0.0.6 Нахождение $l_m(e)$

- при $e \leq \frac{1}{2}$ $l_m^2(e) = 1 - e$ — определяется из условия пересечения траектории с телом
- если условием пересечения пренебречь, то $l_m^2(e) = \frac{1}{4e}$.
- Когда $e > \frac{1}{2}$, необходимо находить $l_m(e)$ из 1. Дифференцируя это выражение по u , получаем уравнение

$$F'(u) - e = 0$$

Как мы уже знаем, $F''(u) > 0$. Это значит, что корень уравнения можно найти методом бинарного поиска, так как $F'(u)$ убывает.

Найдя ближайшие точки r_1, r_2 на узлах сетки r_i , мы уточним решение, приблизив функцию $F'(u(r))$ линейно. Тогда

$$r_m = \frac{r_2 F'(r_1) - r_1 F'(r_2)}{F'(r_1) - F'(r_2)}$$

Также можно дополнительно уточнить, сделав шаг методом Ньютона

$$r'_m = r_m - \frac{F'(r_m)}{F''(r_m)}$$

Кстати, итерацию ньютона можно модифицировать для случая обнуления первой производной.

$$x' = x - \frac{2f(x)}{f'(x) + \operatorname{sgn}(f'(x))\sqrt{f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)}}$$

0.0.7 Нахождение концов траектории.

Концы траектории определяются соотношением

$$\Phi(u) = F(u) - eu - l^2 = 0$$

Так как $\Phi'(u) = F'(u) - e$ — функция, которая убывает, причем $\Phi'(u_m(e)) = 0$, то $\Phi(u)$ — возрастает при $u < u_m(e)$ и убывает при $u > u_m(e)$. Таким образом, $\Phi(r)$ ведет себя так же как $\Phi(u)$, тогда для нахождения корней нужно лишь использовать метод деления отрезка пополам, а уточнить можно методом ньютона.

0.0.8 Переход из фазовых объемов

Задача номер 1 сводится к нахождению концентрации частиц в точке r , зная распределение частиц в плоскости $E - L$.

Итак, фазовый объем представляется в виде

$$d\Phi = r_{\odot}^3 v_{esc}^3 \cdot 4\pi^2 d\tau dedl^2 \quad (28)$$

А также в виде

$$d\Phi = r_{\odot}^3 v_{esc}^3 \cdot d^3\vec{r} d^3\vec{v} \quad (29)$$

Самое простое, что можно найти — это полная фазовая плотность

$$\frac{dN}{dr dv_r dv_{tau}} = \frac{dn(r)}{dv_r dv_{tau}} = 4\pi v_{tau} \frac{dn(r)}{d^3v} = v_{tau} \frac{dN}{\pi d\tau dedl^2} = \frac{dN(e, l)}{2\pi r T(e, l) dedl}$$

Учтем также, что

$$d^3\vec{v} = 2\pi ded \sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} d\vec{n}. \quad (30)$$

Причем, поскольку радиальная скорость v_r и тангенциальная v_t фиксированны, для $d\vec{n}$ остается только выбор направления для тангенциальной скорости ($\int d\vec{n} = 1$).

Отсюда получаем, что

$$n(r) = \int \frac{dN}{2\pi T(e, l) dedl^2} ded \sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} \quad (31)$$

1. Предположение 1: равномерное распределение внутри бина по $dedl$:

В этом случае

$$f_1(e, l) = \frac{dN}{dedl} \quad (32)$$

И тогда получим

$$n(r) = \int \frac{1}{r} \frac{f_1(e, l)}{4\pi T(e, l)} de d \sin \frac{l}{rv} \quad (33)$$

Если нужно генерировать распределение, то L — генерируется равномерно, т.е.

$$L = (l_0 + (l_1 - l_0)\xi)L_{max}(e) \quad (34)$$

где $l_i = L/L_{max}e$ — приведенный момент импульса, а ξ — случайная величина в интервале $[0, 1]$.

А энергия генерируется НЕРАВНОМЕРНО:

$$e = e_0 + (e_1 - e_0) \cdot u \quad (35)$$

$$u = \frac{2\xi}{(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4b\xi}} \quad (36)$$

$$b = \frac{L_{max}(e_0) - L_{max}(e_1)}{L_{max}(e_0) + L_{max}(e_1)} \quad (37)$$

2. Предположение 2: равномерное распределение внутри бина по $dedl^2$:

В этом случае

$$f_2(e, l) = \frac{dN}{dedl^2} \quad (38)$$

И тогда получим

$$n(r) = \int \frac{f_2(e, l)}{2\pi T(e, l)} de d\sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} \quad (39)$$

Генерация L :

$$L = \sqrt{l_0^2 + (l_1^2 - l_0^2)\xi}L_{max}(e) \quad (40)$$

$$e = e_0 + (e_1 - e_0) \cdot u \quad (41)$$

$$u = \frac{\xi(3+b^2)}{(1-b)^2 + (1-b)\sqrt[3]{(1-b)^3 + 2\xi b(3+b^2)} + \sqrt[3]{\dots}^2} \quad (42)$$

$$b = \frac{L_{max}(e_0) - L_{max}(e_1)}{L_{max}(e_0) + L_{max}(e_1)} \quad (43)$$

Интеграл легче всего взять методом монте-карло (это не очень затратно и просто реализуется).

При этом важно учитывать пределы интегрирования не только исходя из размеров бина $[e_0, e_1], [\bar{l}_0, \bar{l}_1]$ но и из области определения подинтегральных функций: $e < \varphi(r), l < rv = \sqrt{r^2(\varphi(r) - e)}$.

Чтобы упростить вычисление, e мы будем генерировать также, с тем же весом, однако l необходимо получать в новых пределах, для этого меру бина в каждой МК итерации нужно умножать на

$$m(e) = \frac{l'_{max} - l_{min}}{l_{max} - l_{min}}$$

где

$$l'_{max} = \sqrt{r^2(\varphi(r) - e)}$$

Ещё одно замечание касемо этого ограничения: пределы интегрирования e тоже необходимо скорректировать.

$$L_{min/max}(e) = L_0 + \frac{e - e_0}{e_1 - e_0} \cdot (L_1 - L_0) \quad (44)$$

$$L_{restrict}^2(e) = r^2(\varphi(r) - e) \quad (45)$$

Вторая интересующая нас величина — скорость аннигиляции

$$\int d^3\vec{r} d^3\vec{v} d^3\vec{v}_1 f(\vec{r}, \vec{v}) f_1(\vec{r}, \vec{v}_1) \sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1| = \frac{\sigma_{a0} v_{a0}}{r_\odot^3} \int dN_1 dn_2(r) \phi_{ann}(v). \quad (46)$$

где $\sigma_{a0} v_{a0}$ — размерное сечение * скорость взятое при произвольной скорости v_{a0} , а

$$\phi_{ann} = \frac{\sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1|}{\sigma_{a0} v_{a0}}. \quad (47)$$

dN_1 — дифференциал количества частиц сорта 1, $dn_2(r)$ — дифференциал концентрации частиц сорта 2 (из 33)

$$dN_1 \approx \frac{dN_1}{T(e_1, l_1) de_1 dl_1^2} d\tau de_1 dl_1^2 \approx \frac{dN_1}{T(e_1, l_1) de_1 dl_1} d\tau de_1 dl_1 \quad (48)$$

Величина ϕ_{ann} зависит от разности скоростей и равна $\phi_0 + \phi_2 v^2 + \dots$. При интегрировании можно вычислить эту величину для каждого члена ряда v^i а потом просуммировать с весами ϕ_i

Вклад v^2 можно оптимизировать, так как если мы интегрируем по скоростям двух частиц, то скорости \vec{v}_i и $-\vec{v}_i$ входят с одинаковым весом. Тогда можно сделать замену

$$v^2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \rightarrow \frac{1}{2} ((\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2) = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) \quad (49)$$

0.0.9 Проверки

- 1) Проверка захвата — по статье. согласие есть
- 2) Проверка Scatter — Проверить полное сечение соударения для $\sigma = 1/v$
- 3) Проверка концентрации: сохранение числа частиц $\sum_i N_i = \int n(r) dV$
- 4) Проверка аннигиляции: при $\sigma v = 1$ аннигиляция равна $\int n^2(r) dV$.

0.0.10 Нормировка и вычисление интегралов

- Количество частиц:

Полное число частиц в бине i N_{ri} должно равняться

$$N_{ri} = N_i \cdot N_\odot$$

где $N_\odot = n_{\chi, \infty} \cdot V_\odot$, N_i — нормированное число частиц, участвующее в расчёте, $n_{\chi, \infty}$ — концентрация Т.М. в гало, V_\odot — объём тела.

- Характерное время (частота соударений)

В качестве единицы, обратного времени свободного пробега будем обозначать величину

$$\frac{1}{T_{\chi p}} = \sigma_{\xi p} \bar{n}_p V_{esc}$$

где \bar{n}_p — средняя концентрация протонов, V_{esc} — вторая космическая скорость для объекта, $\sigma_{\xi p}$ — сечение нормировки (сечение рассеяния Т.М. на протоне/нуклоне при некой фиксированной выбранной скорости $v = |\vec{v}_\chi - \vec{v}_p|$. Важно, что при более сложных потенциалах или в неупругом случае)

Естественно, мы обезразмерим реальное время: $t_r = T_{\chi p} t$

- Скорость захвата

Полная скорость захвата в i том бине равна

$$C_i = c_i \frac{N_\odot}{T_{\chi p}}$$

Тогда темп захвата определяется из

$$\frac{dN_{ri}^{capt}}{dt_r} = C_i \Leftrightarrow \frac{dN_i^{capt}}{dt} = c_i$$

Формуля для неупругого сечения (в системе центра масс):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{|\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}$$

Под ядерным форм фактором понимается величина

$$F(q, v) = \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathcal{M}_0|^2} \cdot \frac{(m_\chi + m_p)^2}{(m_\chi + m_N)^2}$$

где m_N — масса ядра, m_p — масса одного нуклона, по которому идет нормировка.

Под $\sigma_{\xi p}$ подразумевается величина

$$\sigma_{\xi p} = \int \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{64\pi^2(E_p + E_\chi)^2} d\Omega$$

Тогда, используя безразмерные параметры, получаем:

$$c_i = \int dr^3 \int d^3\vec{v}_\chi \int \tilde{f}(\vec{v}_\chi) \tilde{n}_N(r) \cdot |\vec{v}'_\chi - \vec{v}'_N| F(q, v) d\vec{n}'_{CM}$$

где функция распределения ТМ равна $n_{\chi, \infty} \tilde{f}(\vec{v}_\chi)$, $d\vec{n}'_{CM}$ — элемент выходного фазового объема (направление выходной скорости в системе Ц.М.), полный интеграл которого равен 1 ($\int d\vec{n}'_{CM} = 1$)

$$d\vec{n}'_{CM} = \frac{d\cos\theta' d\varphi'}{4\pi}$$

Начальная скорость:

$$d^3\vec{v}_\chi \tilde{f}(\vec{v}_\chi) = 2\pi v dv^2 f_e(v^2) = 2\pi v du^2 f_e(u^2)$$

где $v^2 = v_{esc}^2(r) + u^2$, $v_{esc}(r)$ — скорость вылета в точке r , u — скорость на бесконечности $f_e(u^2)$ — эффективная плотность на бесконечности с учётом скорости движения небесного тела относительно гало u_0 ($\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{w}$) где \vec{w} — скорость в гало.

$$f_e(u^2) = \int_{-1}^1 f(u^2 + u_0^2 + 2uu_0x) \frac{dx}{2}$$

- Темп рассеяния

Обезразмеренная матрица рассеяния (тоже на $T_{\chi p}$) s_{ij} определяется из темпа рассеяния частиц (тоже обезразмеренного):

$$\frac{dN_i^{scat}}{dt} = s_{ij} N_j$$

$$\sum_i s_{ij} = \frac{T_{in}}{T_{in} + T_{out}} \cdot d\tau [d^3v_p f_p(v)] \cdot |\vec{v}'_\chi - \vec{v}'_N| F(q, v) d\vec{n}'_{CM}$$

При интегрировании методом Монте-Карло берется случайное время τ траектории, скорость мишени (относительно распределения больцмана $[d^3v_p f_p(v)]$). Энергия и импульс частицы ТМ генерируются внутри бина в предположении, что они равномерно распределены относительно меры либо $dEdL$ либо $dEdL^2$. Конечная скорость определяется направлением вектора разности скоростей в системе центра масс $d\vec{n}'_{CM}$.

- Безразмерная концентрация ТМ:

$$\tilde{n}_\chi(r) = \sum_i \int \frac{4\pi}{3} \frac{1}{2\pi T(e, l)} \frac{dN_i}{dedl^2} ded \sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}}$$

В таком случае

$$\int \tilde{n}_\chi(r) 3r^2 dr = \sum N_i = \sum \frac{N_{ri}}{V n_{\chi\infty}}$$

Такой выбор размерности связан с тем, что $V \cdot 3r^2 dr = dV$ и тогда

$$\int \tilde{n}_\chi(r) n_{\chi\infty} dV = \sum N_{ri} = \text{Полное число частиц}$$

- Аннигиляция: Мы хотим чтобы

$$\frac{dN_i^{ann}}{dt} = \frac{1}{N_\odot} \gamma_p a_{ij}^p N_j N_i \quad (50)$$

где

$$\gamma_p = T_{\chi p} \cdot n_{\chi\infty} \langle \sigma_{ann} v \rangle_{v=v_{esc}}$$

отношение темпа аннигиляции к темпу рассеяния. Важно: величина сечения аннигиляции $\langle \sigma_{ann} v \rangle$ берётся при скорости $v = v_{esc}$ (для аннигиляции сечение которой ведёт себя как $\langle \sigma_{ann} v \rangle = const \cdot v^2$)

$$a_{ij}^p = \int \phi_{ann} 3r^2 dr \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{2\pi T(e_1, l_1)} \frac{1}{de_1 dl_1^2} de_1 d\sqrt{v_1^2 - \frac{l_1^2}{r^2}} \right) \left(\frac{1}{2\pi T(e_2, l_2)} \frac{1}{de_2 dl_2^2} de_2 d\sqrt{v_2^2 - \frac{l_2^2}{r^2}} \right)$$

Из этого поределения следует:

$$a_{ij}^p N_i N_j = \int 3r^2 dr \tilde{n}_\chi^2(r) \phi_{ann}$$

Полная скорость аннигиляции равна

$$\frac{dN_{ri}^{ann}}{dt_r} = \gamma_p a_{ij}^p N_i N_j \cdot \frac{N_\odot}{T_{\chi p}}$$

0.0.11 Уравнение эволюции.

Линейное уравнение имеет вид:

$$\frac{dn_i}{dt} = c_i^0 + s_{ij} n_j, n_i(0) = 0$$

Мы будем решать уравнение на $c_i = \dot{n}_i$

$$\frac{dc_i}{dt} = s_{ij} c_j, c_i(0) = c_i^0$$

тогда

$$n_i(t) = \int_0^t c_i(t') dt'$$

Решение представляется в виде матричной экспоненты:

$$c = e^{st} c^0$$

Для того приближения этого решение используется разбиение на шаги и приближение экспоненты на каждом шаге устойчивой схемой 2 порядка:

$$e^{s\tau} = \frac{2}{\left(1 - \frac{s\tau}{2}\right)^2} - \frac{1}{(1 - s\tau)}$$

(Схема устойчива, так как собственные значения s имеют отрицательную вещественную часть)

Нелинейная эволюция (с учетом аннигиляции) имеет вид:

$$\frac{dn_i}{dt} = c_i^0 + s_{ij} n_j - \sum_j a_{ij} n_j n_i$$

Таким образом

$$\frac{dc_i}{dt} = s_{ij}c_j - \sum_j a_{ij}c_jn_i - \sum_j a_{ij}n_jc_i$$

Тут 2 вклада: удобный и неудобный. Первый вклад выглядит как диагональная матрица, и его эволюция очевидна:

$$D_i = 2a_{ij}n_j \\ e^{-D\tau} = \text{diag}(e^{-D_i\tau})$$

Второй вклад имеет более сложный вид:

$$B_{ij} = -a_{ij}n_i \quad (i \neq j) \\ B_{ij} = 0 \quad (i = j) \\ e_{ij}^{B\tau} \neq e^{B_{ij}\tau}$$

Собственные значения матрицы B_{ij} имеют всегда положительную вещественную часть, что приводит к неустойчивой эволюции. Однако это означает, что любая явная схема по вычислению этой экспоненты будет более устойчивой чем само решение (так как $1 + x + x^2/2 + \dots < \exp(x)$). Поэтому можно вычислять так:

$$e^{B\tau} \approx 1 + B\tau + \frac{(B\tau)^2}{2}$$

Тут важно, что пока мы не достигли равенства захвата и аннигиляции, $B\tau \lesssim 1$, поэтому приближения можно считать верными. Поэтому эволюцию нужно проводить до этого момента.

0.0.12 Неоднородности.

Изменение угла при вращении траектории равно

$$\varphi_T = \int \frac{l}{r^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{u(\psi)} \frac{d\psi}{\sqrt{S(u(\psi))}}$$

В нашей системе координат:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \cos \varphi$$

Тогда изменение угла на траектории равно:

$$\delta\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\psi}{u(\psi)} \left(\frac{1}{\sqrt{S(u(\psi))}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \right)$$

считаем, что $\rho_0 \cdot u_{max} \cdot u_{min} = l^2$

Если $S(u(\psi)) = \text{const}$, то $\varphi_T = \pi/2$, а если $\phi(r) \propto 1/r$ то $\varphi_T = \pi$. В остальных случаях траектория будет апериодической, поэтому влиянием неоднородностей на $\delta\varphi$ можно пренебречь

Пусть V – малая поправка к $\phi(r)$. Тогда изменение углового момента:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = [\vec{r}, \dot{\vec{v}}] = -[\vec{r}, \nabla V]$$

В случае, если V осесимметричный

$$\nabla V = \vec{n}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec{n}_\theta \frac{1}{r_K} \frac{\partial V}{\partial \theta_K}$$

и тогда

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_K}\vec{n}_\varphi$$

Единичный вектор в направлении \vec{L} равен

$$\vec{n}_L = (-\sin \theta, 0, -\cos \theta)$$

а единичный вектор \vec{n}_φ равен

$$\vec{n}_\varphi = \frac{(y, -x, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(\sin \varphi, -\sin \theta \cos \varphi, 0)}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$$

Поперечные изменения \vec{L} неважны, так как приводят лишь к вращению вокруг z плоскости траектории (что несущественно). Поэтому важно лишь изменение вдоль x

Итак,

$$\delta L_T^x = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{S(u(\psi))}} \frac{\partial V}{\partial \theta_K}(r[u(\psi)], \theta) \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$$

В итоге, изменение L_x зависит от следующих параметров:

$$\frac{d}{dt}L_x = X(L_z, L_x, \varphi_T)$$

φ_T будет меняться достаточно быстро, поэтому мы можем усреднить по этому параметру производную \dot{L}_x . Как итог получим некое движение (медленное) с уравнением:

$$\frac{dL_x}{dt} = \langle X(L_z, L_x, \varphi_T) \rangle_{\varphi_T} = X(L_z, L_x)$$

Поскольку потенциал должен обладать P симметрией, то $V(-z) = V(z)$, то тогда

$$\frac{\partial V(z)}{\partial \theta} \sim F(z^2, r^2) \cdot z = F(r^2, \cos^2 \varphi) \cdot \cos \varphi$$

В итоге δL_T^x будет пропорционален комбинации $\cos \varphi \sin \varphi$

$$\delta L_T^x = F(\cos^2 \varphi) \sin(2\varphi)$$

После усреднения по углу траектории (оно возникает, из-за того, что траектория аperiodична и $\varphi = \varphi_T + \varphi(t)$, где φ_T – угол начала траектории, по которому идет усреднение)

Таким образом, в адиабатическом приближении такие неоднородности не влияют на траекторию.

0.0.13 Случайные Изотропные Неоднородности.

Положим мы имеем неоднородности изотропного характера, которые имеют нулевое среднее значение.

$$\langle V \rangle_\Omega = 0 \tag{51}$$

Тогда среднее изменение углового момента под действием неоднородностей тоже равно нулю

$$\langle \delta L \rangle_\Omega = \langle \int_0^T [\vec{r}, \nabla V] dt \rangle_\Omega = 0 \tag{52}$$

Однако ненулевым является среднеквадратичное отклонение:

$$\langle \delta l \rangle_\Omega = \langle \left(\int_0^T [\vec{r}, \nabla V] dt \right)^2 \rangle_\Omega = \sigma^2(l) \frac{T}{T_0} \tag{53}$$

Таким образом мы имеем на функцию распределения $n(r)$ уравнение диффузии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{T_0} \Delta \rho(x)$$

где

$$x = \int \frac{dl}{\sigma(l)}$$

Этот процесс возможно учесть с помощью матрицы рассеяния с помощью вычислительной схемы, определяемой тридиагональной матрицей рассеяния.

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} \approx \frac{\sigma^i}{T_0} \left[\frac{\sigma_R^i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{n_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{n_i}{h_i} \right) + \frac{\sigma_L^i}{h_{i-\frac{1}{2}}} \left(\frac{n_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{n_i}{h_i} \right) \right]$$