Факты о потенциале.

0.0.1 Обозначения

1. $\varphi(r)$ — безразмерный положительный потегнциал.
   - $\varphi(r) > 0$
   - $\varphi(r) = \dfrac{1}{r}, r \geq 1$
   - $\varphi'(r) < 0$
   - $\varphi''(r) + \dfrac{2}{r}\varphi'(r) = -\rho(r) < 0$
2. e — положительная энергия
3. l — момент импульса
4. $l_m(e)$ — максимальный момент импульса при данной энергии, $r_m(e)$ — точка достижения этого максимума.
$$l_m^2(e) = \max_r r^2(\varphi(r) - e) \tag{1}$$
5. $x_l = \sqrt{1 - \dfrac{l^2}{l_m^2}}$
6. $T(e,l)$ — время траектории.
$$T(e,l) = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) - e - \frac{l^2}{x^2}}}$$
   - $T(e,l) - \dfrac{\pi}{2e^{3/2}}$ — ограниченная гладкая функция параметров $e, x_l l_m$.
7. $r_\pm$ — корни уравнения $r^2\varphi(r) - er^2 - l^2 = 0$
8. $u = r^2$, $u_\pm$ — корни уравнения $u\varphi(u) - eu - l^2 = 0$
9. $F(u) = u\varphi(u)$ — монотонная, гладкая, выпуклая вниз функция.
10. $u_- \downarrow e, \uparrow l^2$
11. $u_+ \downarrow e, \downarrow l^2$

0.0.2 $l_m(e)$

Для нахождения $l_m(e)$ находятся r_{i-1}, r_i, r_{i+1} — точки, такие, что $r_i \geq r_{i\pm1}$, далее фунция $F(u)$ приближается параболой, после чего находятся u, l_m

Заметим, что если $e > \dfrac{1}{2}$, то максимальный момент равен

$$l_m^2(e) = \frac{1}{4e}$$

однако траектории, пересекающие границу небесного тело ($\exists t : r(t,e,l) < 1$) ограничиваются $l^2 \leq 1 - e$

0.0.3 Траектории.

При расчете траектории, делаем замену

$$u = \frac{u_- + u_+}{2} - \frac{u_+ - u_-}{2} cos(\theta) \tag{2}$$

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{u\varphi(u) - eu - l^2}{(u-u_-)(u-u_+)}} = 2\sqrt{S(u)}$$

1. если $e > 1/2$, то будем линейно интерполировать $\theta(e,l,\tau)$ $(\tau = t/T(e,l))$ по параметрам e, $\sqrt{l_m^2(e) - l^2}$

   Однако при интегрировании по траектории методом монте-карло, мы можем взять приближенную траекторию $\widetilde{\theta}(t)$, тогда, так как для истинной траектории $F(\theta)dt = d\theta$, то для приближенной таектории $\widetilde{F}(t')dt' = d\widetilde{\theta}$, т.е.

   $$dt = \frac{\widetilde{F}(t')}{F(\theta)}dt'$$

   $\widetilde{\theta}$ будем аппроксимировать по точкам с помощью кубического сплайна для непрерывности производных.

2. если $e < 1/2$, то траектория делится на 2 части: до $r < 1$ и $r > 1$. Нас интересует внутреняя часть траектории и внешняя.

   При этом выбирается θ_1, а u_+ подгоняется так, чтобы $u(\theta_1) = 1$

   - Решение уравнения снаружи:

     $$\dot{r} = \sqrt{\frac{e}{r^2} \cdot (r - r_-)(r_+ - r)}$$

     где

     $$r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4el^2}}{2e}$$

     Внешняя часть времени траектории равна при условии, что

     $$T_{ex}(e,l) = \frac{\pi}{2e^{3/2}} + \frac{\sqrt{1-e-l^2}}{e} - \frac{\operatorname{atan}\dfrac{2\sqrt{e}\sqrt{1-e-l^2}}{1-2e}}{2e^{3/2}} \tag{3}$$

     $$e > 0.5 \tag{4}$$

     $$T_{ex}(e,l) = \frac{\sqrt{1-e-l^2}}{e} + \frac{\operatorname{atan}\dfrac{2\sqrt{e}\sqrt{1-e-l^2}}{2e-1}}{2e^{3/2}} \tag{5}$$

     $$e < 0.5 \tag{6}$$

     при маленьких e верно, что

     $$T_{ex}(e,l) = \frac{\pi}{2e^{3/2}} - z + \frac{z^3}{6} - \frac{ez^5}{10} + ... + (-1)^k \frac{e^k z^{2k+3}}{(4k+6)} + ... \tag{7}$$

     где

     $$z = \frac{2\sqrt{1-e-l^2}}{1-2e} \tag{8}$$

     Замена $r = \dfrac{r_- + r_+}{2} - \dfrac{r_+ - r_-}{2}\cos\theta$ приводит к уравнению:

     $$\dot{\theta} \cdot (1 - y \cdot \cos(\theta)) = \frac{2\sqrt{e}}{r_- + r_+} = 2e^{3/2}$$

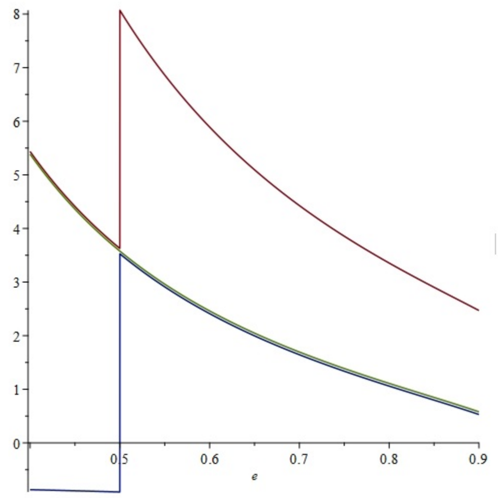

Рис. 1: $T_{ex}(e,l)$, красный — по 4, синий — по 6, зелёный — правильныйб, $l = 0.2$

где

$$y = \frac{r_+ - r_-}{r_- + r_+} = \sqrt{1 - 4el^2}$$

тогда

$$\theta - y\sin\theta - (\theta_- - y\sin\theta_-) = 2e^{3/2}(t - t_-)$$

если $G(y,z)$ — обратная функция $\theta \to \theta - y\sin\theta$, тогда

$$\theta = G(y, 2e^{3/2}(t - t_-) + (\theta_- - y\sin\theta_-))$$

при использовании временного параметра $\tau = t/T_{ex}(e,l)$, получаем

$$\theta = G\left(y, \pi \cdot \left(\tau \frac{T_{ex}(e,l)}{T(e)} + \frac{T_{in}(e,l)}{T(e)}\right)\right)$$

где T_{in} — внутренняя часть времени траектории, $T_{in} + T_{ex} = T(e) = \dfrac{\pi}{2e^{3/2}}$

$$\theta = G(y, \pi(1 - (1 - \tau)z))$$
$$z = \frac{T_{ex}(e,l)}{T(e)}$$

- Решение внутри

  Если $r_{max} < 1$, то всё тривиально, однако если $r_{max} > 1$, траектория гибридная. Во внутренней части её время является разрывной фенкцией параметров e, l. Однако непрерывной является фунция $T_\theta = T_{in}/\theta_1$, где θ_1 — угол, соответствующий $r = 1$ в 2. θ_1 тоже разрывен, но он равен

$$\cos\theta_1 = -\frac{2 - u_0 - u_1}{u_1 - u_0} = -\frac{(2 - u_0 - u_1))}{\sqrt{(u_1 - u_0)^2}} \tag{9}$$

  И числитель и подкоренное значение знаменателя этой дроби является непрерывными по параметрам.

В интерполяции внутреннего времени есть дин нюанс: он разрывно зависит от e и l. Продемонстрировать это можно тем, что при $e \to 1/2 - 0$ $\theta_1 \to \pi$, а когда $l \to l_{max} - \theta_1 \to 0$. Тогда непрерывной будет величина

$$T_{\theta in} = \frac{T_{in}}{\theta_1} \tag{10}$$

Далее: при интерполяции времени по сетке el, озможно, что каждый бин придется разбить на более маленькие части для более точной интерполяции времени. Для этого квадратный бин можно разделить на части (сделаем это по переменным e и $\xi = \sqrt{1 - l^2/l_m^2}$)

Итак, Алгоритм для интерполяции внутреннего преиода:

- Интерполяция $u_1^2 - u_0^2$ и $u_0^2 + u_1^2$
- можно интерполировать переменные $r_1^2 - r_0^2$ и $r_1^2 + r_0^2$
- Получение r_0 и r_1
- Нахождение θ
- Интерполяция $T_{\theta in}$
- Вычисление T_{in}

Вообще можно интерполировать ещё одну величину, равную

$$\frac{du_{epm}}{\sqrt{1-l^2}} = \frac{u_{pm} - u_l(e)}{\sqrt{1-l^2}} \to (l = L/L_{max}(e), l \to 1) \to \pm \frac{L_{max}}{\sqrt{-1/2F''(u_e)}} \tag{11}$$

Единственная проблема будет тогда, когда есть большое расхождение межде двумя радиусами, т.е. когда $l^2 \to 0$, поэтому такую интерполяцию нежелательно проводить при малых l. Предлагается использовать эту интерполяцию при условии, что в бине $l_{max} > 0.8$, иначе использовать простую интерполяцию u_p и u_m

Но и тут есть проблема, возникающая при $L^2 \approx 1 - e$. Разложим $F(u)$ вблизи $u = 1$.

$$F(u) = 1 + \frac{1}{2}(u-1) + \frac{F_2}{2}(u-1)^2] \tag{12}$$

Решая $F(u) - eu - l^2 = 0$, получим:

$$u_{1,0} = 1 + q_e \pm \sqrt{q_e^2 + 2y} \tag{13}$$

где

$$q_e = \frac{1-2e}{-2F_2}$$
$$L^2 = (1-e) + F_2 z$$

Проблемная область поиска θ_1 та, где $u_1 \to 1$, тогда $u_1 = 1 + \delta_1$. Когда u_0 отлично от 1, можно использовать приближение:

$$\cos\theta_1 = -\frac{1-u_0-\delta_1}{1-u_0+\delta_1} = -\frac{1-x}{1+x} \rightrightarrows \theta_1 = \pi - \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}(x<1), \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}(x>1)$$

где $x = \delta_1/(1-u_0)$

В случае, если ещё и $u_0 \to 1$ т.е. $u_0 = 1 - \delta_0$

$$\cos\theta_1 = -\frac{1-u_0-\delta_1}{1-u_0+\delta_1} = -\frac{\delta_0-\delta_1}{\delta_0+\delta_1} \approx \frac{q_e}{\sqrt{q_e^2+2z}}$$

Если $\cos\theta_1$ разделить на эту дробь, то результат можно уже интерполировать. Также можно интерполировать

$$du2q = \left(\frac{u_1-u_0}{\sqrt{q^2+2z}}\right)^2 = \frac{(r_1-r_0)^2(r_1+r_0)^2}{q2z}$$

$$suq = \frac{u_1+u_0-2}{q}$$

При $e < 1/2$, δ_1 известно, поэтому будем интерполировать величину

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{q_e^2+2z}-q_e} = \delta_0 \cdot \frac{q_e + \sqrt{q_e^2+2z}}{2z}$$

При $e > 1/2$, Находится величина δ_1. С помощтю интерполяции.

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{q_e^2 + 2z} + q_e} = \delta_1 \cdot \frac{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e}{2z}$$

Тут хотелось бы иметь гарантии, что $q_e^2 + 2z > 0$. Посмотрим, что тут у нас. Итак, это подкоренное выражение пропорционально величине $L_m'^2(e) - L^2$ для разложения функции $F(u)$ в 12, где $L_m'^2(e)$ — квадрат максимального момента. Нам надо, чтобы $L_m'^2(e) > L_m^2(e)$ Мы знаем, что

$$L_m^2(e) = F(u_e) - u_e \cdot e$$

при условии что

$$F'(u_e) - e = 0$$

в таком случае

$$\frac{du_e}{de} = \frac{1}{F''}$$

а

$$\frac{dL_m^2(e)}{de} = (F'(u_e) - e)\frac{du_e}{de} - u_e = -u_e$$

Как мы узнаем, $-F''$ — убывающая положительная функция при $\rho'(r) < 0$. Поэтому для реального потенциала $du_e/de > du_e'/de$ поэтому $u_e > u_e'$ поэтому $dL_m^2(e)/de < dL_m'^2(e)/de$. Но на всякий случай лучше заменить $\sqrt{q_e^2 + 2z}$, что равно $\sqrt{\frac{2}{-F_2}(L_e'^2 - L^2)}$ на $\sqrt{\frac{2}{-F_2}(L_m^2 - L^2)}$ при $e > 1/2$

В зависимости от точки E и l, нужно использовать разные способы интерполяции u_0 и u_1

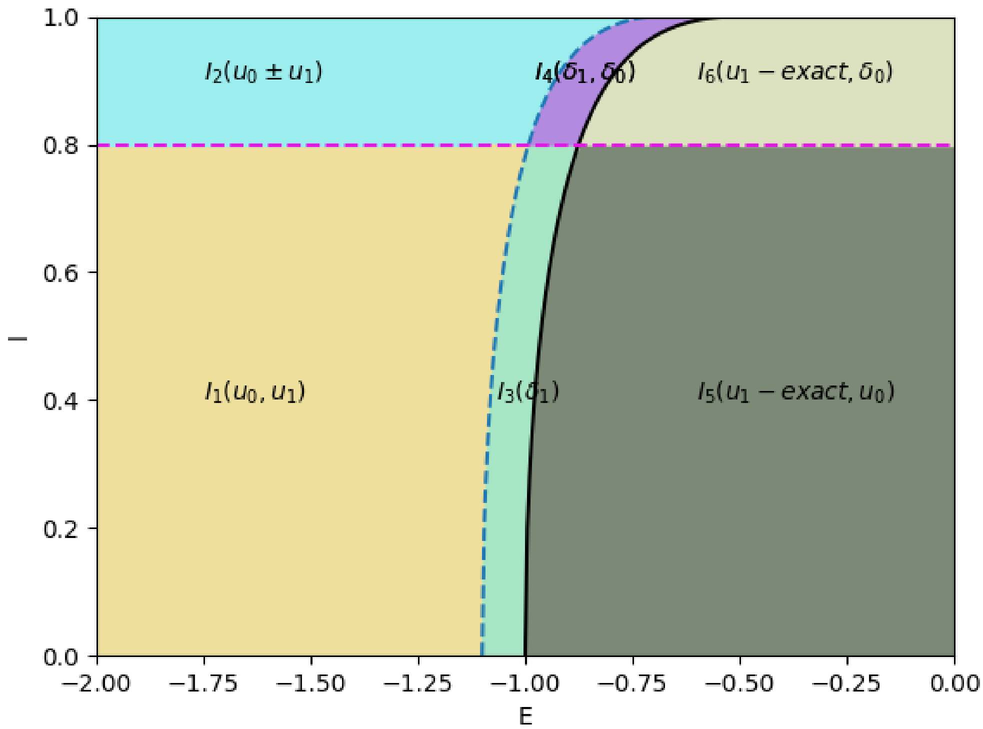

Рис. 2: Зоны на плоскости E-L

Всего есть 6 случаев, они определяются переменной $l_u = L/L_m(e)$ и z: когда l_u близко к 1 или нет, когда z положительный (справа)/ отрицательный(слева)

- Случай l_u не близко к 1: тогда u_0 можно интерполировать по e,l, и не боятся корневой нерегулярности, для u_1 существуют различные варианты:
  - Область 1, 3, когда u_1 определяется так же как и u_0. Но менее 1. При этом $\theta_{max} = \pi$
  - Область 5: u_1 определяется точно по формуле (13)
- Случай l_u близко к 1:
  - В области 2,4 лучше интерполировать величину $u_1 + u_0$, которые непрерывны по e, l и малую величину (11). Помним: $\theta_{max} = \pi$, $u_1 < 1$
  - В области 6 u_1 определяется точно. Но нам нужно знать точно δ_0. Для этого используется интерполяция по величине

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e} = \delta_0 \cdot \frac{q_e + \sqrt{q_e^2 + 2z}}{2z}$$

В области 1,3,5 нужно уточнить поведение при малых l_u. Для поиска u_0, u_1 мы решаем уравнение

$$F(u) - eu - L^2 = 0 = u(\phi(u) - e) - L_m^2(e) l_u^2$$

при $e \to e_0$ $\phi(u) - e \approx e_0 - e - C_0 u/2$ тогда

$$u_0 \approx \frac{L_m^2(e) l_u^2}{e_0 - e}$$

Это означает, что при больших $e_0 - e$ мы можем интеорполировать величину u_0/l_u^2. Однако проблема возникает при малых $e_0 - e$ Тут мы воспользуемся разложением

$$F(u) \approx e_0 u + F''(0)/2u^2 = e_0 u - \frac{C_0}{2} u^2 \tag{14}$$

тогда (обозначим $e_0 - e$ как de)

$$u_{0/1} \approx \frac{de \pm \sqrt{de^2 - 2C_0 L^2}}{C_0} = \frac{de \pm \sqrt{de^2 - 2C_0 L_m^2(e) \cdot l_u^2}}{C_0} \tag{15}$$

При $de \to 0$ $L_m^2(e) \to \frac{de^2}{2C_0}$

$$u_{0/1} \approx de \frac{1 \pm \sqrt{1 - l_u^2}}{C_0} \tag{16}$$

тогда при малых l_u u_1 можно просто интерполировать по e,l, а u_0 нужно находить из интерполяции величины

$$u_{0l} = \frac{u_0}{l_u^2} \to (l_u \to 0) \to \frac{L_m^2(e)}{de} \approx (de \to 0) \approx \frac{de}{2C_0} \tag{17}$$

Однако при малых de, интерполяция может происходить на всём интервале $l_u = 0..1$. тогда 17 плохо работает. В этом случае можно интерполировать величину

$$u_{0s} = \frac{u_{0/1}}{1 - \sqrt{1 - l_u^2}} = \frac{u_{0/1}}{l_u^2}(1 + \sqrt{1 - l_u^2}) \to (l_u \to 0) \to 2\frac{L_m^2(e)}{de} \approx (de \to 0) \approx \frac{de}{C_0} \tag{18}$$

0.0.4 Потенциал.

Свяжем величины: безразмерный потенциал $\varphi(r)$, безразмерный радиус r, безразмерная масса $M(r)$ (такая, что $M(1) = 1$), безразмерная плотность $\rho(r)$.

$$\frac{M(r)}{r^2} = -\varphi'(r)$$

$$3\rho(r) = \frac{M'(r)}{r^2}$$

В дальнейшем нам понадобится непрерывная функция

$$Q(r) = \frac{M(r)}{r^3} \tag{19}$$

Для нахождения $Q(r)$ будем делить на r^3 $M(r)$, которая определяется квадратурой Гаусса.

$$Q(r+h) = \frac{Q(r)r^3 + I_G[r \to 3\rho(r)r^2](r,r+h)}{(r+h)^3} \tag{20}$$

После численного интегрирования мы получим $Q(1) \neq 1$, поэтому необходимо будет разделить $Q(r)$ и $\rho(r)$ на $Q(1)$.

Для получения потенциала останется лишь проинтегрировать непрерывную функцию $rQ(r)$ с помощью квадратур Гаусса.

0.0.5 Вычисление функция $S(u)$

Мы хотим вычислить функцию

$$S(u) = \frac{u\varphi(u) - eu - l^2}{(u-u_-)(u_+-u)} \tag{21}$$

Положим $F(u) = u\varphi(u)$. Тогда

$$S(u) = \frac{1}{u_+ - u_-} \cdot \left(\frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-} - \frac{F(u_+) - F(u)}{u_+ - u} \right) \tag{22}$$

Эта функция является непрерывной и определенной, однако при близких значениях u_+, u_-, u необходимо вычисление с помощью производных. Возможные случаи:

- u_+ близко к u_-. В этом случае получаем, что

$$S(u) = -\frac{1}{2}F''\left(\frac{u_+ + u_- + u}{3}\right) \tag{23}$$

- u близко к u_-, но далеко от u_+ (либо наоборот). Тогда через производные оцениваем только первую разность.

$$S(u) = \frac{1}{u_+ - u_-} \cdot \left(F'\left(\frac{u + u_-}{2}\right) - \frac{F(u_+) - F(u)}{u_+ - u} \right) \tag{24}$$

Далее — очевидные формулы без текста.

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{25}$$

$$F'(u) = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varphi(r)) = \varphi(r) + \frac{r\varphi'(r)}{2} = \varphi(r) - \frac{r^2}{2}Q(r) \tag{26}$$

$$F_2 = F''(u) = \frac{1}{4}\left(\varphi''(r) + 3\frac{\varphi'(r)}{r}\right) = -\frac{1}{4}(3\rho(r) + Q(r)) \tag{27}$$

Видно, что $F(u)$ — выпуклая вниз и монотонная функция, поскольку $F''(u) < 0$, а $F'(\infty) = 0$ и производная убывает, то $F'(u) > 0$ Также заметим, что

$$\frac{dF_2}{dr} = -\frac{3}{4}\left(\rho'(r) + \frac{\rho(r)}{r} - \frac{\int_0^r 3\rho(r')r'^2 dr'}{r^4}\right) = \frac{3}{4r}\left(\frac{\int_0^r 3(\rho(r') - \rho(r))r'^2 dr'}{r^3} - r\rho'(r)\right)$$

пожтому, если $\rho(r)$ — убывающая функция (что довольно естественно), то $F''(u)$ — возрастающая функция.

В случае если $u_p, u > 1$ (т.е. $e < 1/2$) Мы заменим функцию $F(u)$ на полином

$$F(u) = 1 + \frac{u-1}{2} - \frac{(u-1)^2}{8}$$

Тогда максимальное значение u_p на мнимой траектории равно

$$u_p = -4e + 3 + 2\sqrt{4e^2 - 2l^2 - 6e + 3}$$

0.0.6 Нахождение $l_m(e)$

- при $e \le \frac{1}{2}$ $l_m^2(e) = 1 - e$ — определяется из условия пересечения траектории с телом
- если условием пересечения пренебречь, то $l_m^2(e) = \frac{1}{4e}$.
- Когда $e > \frac{1}{2}$, необходимо находить $l_m(e)$ из 1. Дифференцируя это выражение по u, получаем уравнение
$$F'(u) - e = 0$$
Как мы уже знаем, $F''(u) > 0$. Это заначит, что корень уравнения можно найти методом бинарного поиска, так как $F'(u)$ убывает.

Найдя близжайшие точки r_1, r_2 на узлах сетки r_i, мы уточним решение, приблизив функцию $F'(u(r))$ линейно. Тогда
$$r_m = \frac{r_2 F'(r_1) - r_1 F'(r_2)}{F'(r_1) - F'(r_2)}$$
Также можно дополнительно уточнить, сделав шаг методом Ньютона
$$r'_m = r_m - \frac{F'(r_m)}{F''(r_m)}$$
Кастати, итерацию ньютона можно модифицировать для случая обнуления первой производной.
$$x' = x - \frac{2f(x)}{f'(x) + sgn(f'(x))\sqrt{f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)}}$$

0.0.7 Нахождение концов траектории.

Концы траектории определяются соотношением
$$\Phi(u) = F(u) - eu - l^2 = 0$$
Так как $\Phi'(u) = F'(u) - e$ — функция, которая убывает, причем $\Phi'(u_m(e)) = 0$, то $\Phi(u)$ — возрастает при $u < u_m(e)$ и убывает при $u > u_m(e)$. Таким образом, $\Phi(r)$ ведет себя так же как $\Phi(u)$, тогда для нахождения корней нужно лишь использовать метрд деления отрезка попола, а уточнить можно методом ньютона.

0.0.8 Переход из фазовых объемов

Задача номер 1 сводится к нахождению концентрации частиц в точке r, зная распределение частиц в плоскости $E - L$.

Итак, фазовый объем предсавляется в виде
$$d\Phi = r_\odot^3 v_{esc}^3 \cdot 4\pi^2 d\tau de dl^2 \tag{28}$$
А также в виде
$$d\Phi = r_\odot^3 v_{esc}^3 \cdot d^3\vec{r} d^3\vec{v} \tag{29}$$
Самое простое, что можно найти - это полная фазовая плотность
$$\frac{dN}{d^r dv_r dv_{tau}} = \frac{dn(r)}{dv_r dv_{tau}} = 4\pi v_{tau}\frac{dn(r)}{d^3 v} = v_{tau}\frac{dN}{\pi d\tau de dl^2} = \frac{dN(e,l)}{2\pi r T(e,l) de dl}$$
Учтем также, что
$$d^3\vec{v} = 2\pi de d\sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} d\vec{n}. \tag{30}$$
Причем, поскольку радиальная скорость v_r и тангенциальная v_t фиксированны, для $d\vec{n}$ остается только выбор направления для тангенциальной скорости ($\int d\vec{n} = 1$).

Отсюда получаем, что
$$n(r) = \int \frac{dN}{2\pi T(e,l) de dl^2} de d\sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} \tag{31}$$

1. Предположение 1: равномерное распределение внутри бина по $dedl$:
   В этом случае
   $$f_1(e,l) = \frac{dN}{dedl} \tag{32}$$
   И тогда получим
   $$n(r) = \int \frac{1}{r} \frac{f_1(e,l)}{4\pi T(e,l)} de\, d\,\mathrm{asin}\,\frac{l}{rv} \tag{33}$$
   Если нужно генерировать распределение, то L — генерируется равномерно, т.е.
   $$L = (l_0 + (l_1 - l_0)\xi) L_{max}(e) \tag{34}$$
   где $l_i = L/L_{max}e$ — приведенный момент импульса, а ξ — случайная величина в интервале [0,1].
   А энергия генеирустся НЕРАВНОМЕРНО:
   $$e = e_0 + (e_1 - e_0) \cdot u \tag{35}$$
   $$u = \frac{2\xi}{(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4b\xi}} \tag{36}$$
   $$b = \frac{L_{max}(e_0) - L_{max}(e_0)}{L_{max}(e_0) + L_{max}(e_0)} \tag{37}$$
2. Предположение 2: равномерное распределение внутри бина по $dedl^2$:
   В этом случае
   $$f_2(e,l) = \frac{dN}{dedl^2} \tag{38}$$
   И тогда получим
   $$n(r) = \int \frac{f_2(e,l)}{2\pi T(e,l)} de\, d\sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} \tag{39}$$
   Генерация L:
   $$L = \sqrt{l_0^2 + (l_1^2 - l_0^2)\xi} L_{max}(e) \tag{40}$$
   $$e = e_0 + (e_1 - e_0) \cdot u \tag{41}$$
   $$u = \frac{\xi(3+b^2)}{(1-b)^2 + (1-b)\sqrt[3]{(1-b)^3 + 2\xi b(3+b^2)} + \sqrt[3]{\cdots}^2} \tag{42}$$
   $$b = \frac{L_{max}(e_0) - L_{max}(e_0)}{L_{max}(e_0) + L_{max}(e_0)} \tag{43}$$

   Интеграл легче всего взять методом монте-карло (это не очень затратно и просто реализуется).
   При этом важно учитывать пределы интегрирования не только исходя из размеров бина $[e_0,e_1],[\bar{l}_0,\bar{l}_1]$ но и из области определения подинтегральных фунций: $e < \varphi(r), l < rv = \sqrt{r^2(\varphi(r) - e)}$.
   Чтобы упростить вычисление, e мы будем генерировать также, с тем же весом, однако l необходимо получать в новых пределах, для этого меру бина в каждой МК итерации нужно умножать на
   $$m(e) = \frac{l'_{max} - l_{min}}{l_{max} - l_{min}}$$
   где
   $$l'_{max} = \sqrt{r^2(\varphi(r) - e)}$$
   Ещё одно замечание касаемо этого ограничения: пределы интегрирования e тоже необходимо скорректировать.

   $$L_{min/max}(e) = L_0 + \frac{e - e_0}{e_1 - e_0} \cdot (L_1 - L_0) \tag{44}$$
   $$L^2_{restrict}(e) = r^2(\varphi(r) - e) \tag{45}$$

Вторая интересующая нас величина — скорость аннигиляции

$$\int d^3\vec{r}d^3\vec{v}d^3\vec{v_1}f(\vec{r},\vec{v})f_1(\vec{r},\vec{v_1})\sigma_{ann}|\vec{v}-\vec{v}_1| = \frac{\sigma_{a0}v_{a0}}{r_\odot^3}\int dN_1 dn_2(r)\phi_{ann}(v). \quad (46)$$

где $\sigma_{a0}v_{a0}$ — размерное сечение $*$ скорость взятое при произвольной скорости v_{a0}, а

$$\phi_{ann} = \frac{\sigma_{ann}|\vec{v}-\vec{v}_1|}{\sigma_{a0}v_{a0}}. \quad (47)$$

dN_1 — дифференциал количества частиц сорта 1, $dn_2(r)$ — дифференциал концентрации частиц сорта 2 (из 33)

$$dN_1 \approx \frac{dN_1}{T(e_1,l_1)de_1 dl_1^2}d\tau de_1 dl_1^2 \approx \frac{dN_1}{T(e_1,l_1)de_1 dl_1}d\tau de_1 dl_1 \quad (48)$$

Величина ϕ_{ann} зависит от разности скоростей и равна $\phi_0 + \phi_2 v^2 + ...$ При интегрировании можно вычислить эту величину для каждого члена ряда v^i а потом просуммировать с весами ϕ_i

Вклад v^2 можно оптимизировать, так как если мы интегрируем по скоростям двух частиц, то скорости $\vec{v}_i$ и $-\vec{v}_i$ входят с одинаковым весом. Тогда можно сделать замену

$$v^2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \to \frac{1}{2}\left((\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2\right) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) \quad (49)$$

0.0.9 Проверки

1) Проверка захвата — по статье. согласие есть
2) Проверка Scatter — Проверить полное сечение соударения для $\sigma = 1/v$
3) Проверка концентрации: сохранение числа частиц $\sum_i N_i = \int n(r)dV$
4) Проверка аннигилляции: при $\sigma v = 1$ аннигиляция равна $\int n^2(r)dV$.

0.0.10 Нормировка и вычисление интегралов

- Количество частиц:

  Полное число частиц в бине i N_{ri} должно равнятся

  $$N_{ri} = N_i \cdot N_\odot$$

  где $N_\odot = n_{\chi,\infty} \cdot V_\odot$, N_i — нормированное число частиц, участвующее в расчёте, $n_{\chi,\infty}$ — концентрация Т.М. в гало, $V_\odot$ — объём тела.

- Характерное время (частота соударений)

  В качестве единицы, обратного времени свободного пробега будем обозначать величину

  $$\frac{1}{T_{\chi p}} = \sigma_{\xi p}\overline{n}_p V_{esc}$$

  где $\overline{n}_p$ — средняя концентрация протонов, V_{esc} — вторая космическая скорость для объекта, $\sigma_{\xi p}$ — сечение нормировки (сечение рассеяния Т.М. на протоне/нуклоне при некой фиксиоровванной выбранной скорости $v = |\vec{v}_\chi - \vec{v}_p|$. Важно, что при более сложных потенциалах или в неупругом случае)

  Естественно, мы обезразмерим реальное время: $t_r = T_{\chi p}t$

- Скорость захвата

  Полная скорость захвата в iтом бине равна

  $$C_i = c_i \frac{N_\odot}{T_{\chi p}}$$

  Тогда темп захвата определяется из

  $$\frac{dN_{ri}^{capt}}{dt_r} = C_i \Leftrightarrow \frac{dN_i^{capt}}{dt} = c_i$$

Формуля для неупругого сечения (в системе центра масс):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2(E_1+E_2)^2}\cdot\frac{|\vec{v}_1'-\vec{v}_2'|}{|\vec{v}_1-\vec{v}_2|}$$

Под ядерным форм фактором понимается величина

$$F(q,v) = \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathcal{M}_0|^2}\cdot\frac{(m_\chi+m_p)^2}{(m_\chi+m_N)^2}$$

где m_N — масса ядра, m_p — массса одного нуклона, по которому идет нормировка.

Под $\sigma_{\xi p}$ подразумевается величина

$$\sigma_{\xi p} = \int \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{64\pi^2(E_p+E_\chi)^2}d\Omega$$

Тогда, используя безразмерные параметры, получаем:

$$c_i = \int dr^3 \int d^3\vec{v}_\chi \int \widetilde{f}(\vec{v}_\chi)\widetilde{n}_N(r)\cdot|\vec{v}_\chi'-\vec{v}_N'|F(q,v)d\vec{n}_{CM}'$$

где функция распределения ТМ равна $n_{\chi,\infty}\widetilde{f}(\vec{v}_\chi)$, $d\vec{n}_{CM}'$ — элемент выходного фазового объема (направление выходной скорости в системе Ц.М.), полный интеграл которого равен 1 ($\int d\vec{n}_{CM}' = 1$)

$$d\vec{n}_{CM}' = \frac{d\cos\theta' d\varphi'}{4\pi}$$

Начальная скорость:

$$d^3\vec{v}_\chi\widetilde{f}(\vec{v}_\chi) = 2\pi v dv^2 f_e(v^2) = 2\pi v du^2 f_e(u^2)$$

где $v^2 = v_{esc}^2(r) + u^2$, $v_{esc}(r)$ — скорость вылета в точке r, u — скорость на бесконечности $f_e(u^2)$ — эффективная плотность на бесконечности с учётом скорости движения небесного тела относительно гало u_0 ($\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{w}$) где $\vec{w}$ — скорость в гало.

$$f_e(u^2) = \int_{-1}^{1} f(u^2+u_0^2+2uu_0x)\frac{dx}{2}$$

- Темп рассеяния

  Обезразмеренная матрица рассеяния (тоже на $T_{\chi p}$) s_{ij} определяется из темпа расеяния частиц (тоже обезразмеренного):

$$\frac{dN_i^{scat}}{dt} = s_{ij}N_j$$

$$\sum_i s_{ij} = \frac{T_{in}}{T_{in}+T_{out}}\cdot d\tau\left[d^3v_p f_p(v)\right]\cdot|\vec{v}_\chi'-\vec{v}_N'|F(q,v)d\vec{n}_{CM}'$$

  При интегрировании методом Монте-Карло берется случайное время τ траектории, скорость мишени (относительно распределения больцмана $\left[d^3v_p f_p(v)\right]$). Энергия и импульс частицы ТМ генерируются внутри бина в предположении, что они равномерно распределены относительно меры либо $dEdL$ либо $dEdL^2$. Конечная скорость определяется направлением вектора разности скоростей в системе центра масс $d\vec{n}_{CM}'$.

- Безразмерная концентрация ТМ:

$$\tilde{n}_\chi(r) = \sum_i \int \frac{4\pi}{3}\frac{1}{2\pi T(e,l)}\frac{dN_i}{dedl^2}ded\sqrt{v^2-\frac{l^2}{r^2}}$$

В таком случае

$$\int \tilde{n}_\chi(r) 3r^2 dr = \sum N_i = \sum \frac{N_{ri}}{V n_{\chi\infty}}$$

Такой выбор размерности связан с тем, что $V \cdot 3r^2 dr = dV$ и тогда

$$\int \tilde{n}_\chi(r) n_{\chi\infty} dV = \sum N_{ri} = \text{Полное число частиц}$$

- Аннигиляция: Мы хотим чтобы

$$\frac{dN_i^{ann}}{dt} = \frac{1}{N_\odot} \gamma_p a_{ij}^p N_j N_i \tag{50}$$

где

$$\gamma_p = T_{\chi p} \cdot n_{\chi\infty} \langle \sigma_{ann} v \rangle_{v=v_{esc}}$$

отношение темпа аннигиляции к темпу рассеяния. Важно: величина сечения аннигиляции $\langle \sigma_{ann} v \rangle$ берётся при скорости $v = v_{esc}$ (для аннигиляции сечение которой ведёт себя как $\langle \sigma_{ann} v \rangle = const \cdot v^2$)

$$a_{ij}^p = \int \phi_{ann} 3r^2 dr \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2\pi T(e_1, l_1)} \frac{1}{de_1 dl_1^2} de_1 d\sqrt{v_1^2 - \frac{l_1^2}{r^2}}\right) \left(\frac{1}{2\pi T(e_2, l_2)} \frac{1}{de_2 dl_2^2} de_2 d\sqrt{v_2^2 - \frac{l_2^2}{r^2}}\right)$$

Из этого поределения следует:

$$a_{ij}^p N_i N_j = \int 3r^2 dr \tilde{n}_\chi^2(r) \phi_{ann}$$

Полная скорость аннигиляции равна

$$\frac{dN_{ri}^{ann}}{dt_r} = \gamma_p a_{ij}^p N_i N_j \cdot \frac{N_\odot}{T_{\chi p}}$$

0.0.11 Уравнение эволюции.

Линейное уравнение имеет вид:

$$\frac{dn_i}{dt} = c_i^0 + s_{ij} n_j, n_i(0) = 0$$

Мы будем решать уравнение на $c_i = \dot{n}_i$

$$\frac{dc_i}{dt} = s_{ij} c_j, c_i(0) = c_i^0$$

тогда

$$n_i(t) = \int_0^t c_i(t') dt'$$

Решение представляется в виде матричной экспоненты:

$$c = e^{st} c^0$$

Для того приближения этого решение используется разбиение на шаги и приближение экспоненты на каждом шаге устойчивой схемой 2 порядка:

$$e^{s\tau} = \frac{2}{\left(1 - \frac{s\tau}{2}\right)^2} - \frac{1}{(1 - s\tau)}$$

(Схема устойчива, так как собственные значения s имеют отрицательную вещественную часть)
Нелинейная эволюция (с учетом аннигиляции) имеет вид:

$$\frac{dn_i}{dt} = c_i^0 + s_{ij} n_j - \sum_j a_{ij} n_j n_i$$

Таким образом

$$\frac{dc_i}{dt} = s_{ij}c_j - \sum_j a_{ij}c_j n_i - \sum_j a_{ij}n_j c_i$$

Тут 2 вклада: удобный и неудобный. Первый вклад выглядит как диагональная матица, и его эволюция очевидна:

$$D_i = 2a_{ij}n_j$$
$$e^{-D\tau} = diag(e^{-D_i\tau})$$

Второй вклад имеет более сложный вид:

$$B_{ij} = -a_{ij}n_i \quad (i \neq j)$$
$$B_{ij} = \sum_{k\neq i} a_{ik}n_k \quad (i = j)$$
$$e^{B\tau}_{ij} \neq e^{B_{ij}\tau}$$

Собственные значения матрицы B_{ij} имеют всегда положительную вещественную часть, что приводит к неустойчивой эволюции. Однако это означает, что любая явная схема по вычислению этой экспоненты будет более устойчивой чем само решение (так как $1 + x + x^2/2 + ... < \exp(x)$). Поэтому можно вычислять так:

$$e^{B\tau} \approx 1 + B\tau + \frac{(B\tau)^2}{2}$$

Тут важно, что пока мы не достигли равенства захавта и аннигиляции, $B\tau \lesssim 1$, поэтому приближения можно считать верными. Поэтому эволюцию нужно проводит до этого момента.

0.0.12 Неоднородности.

Изменение угла при вращении траектории равно

$$\varphi_T = \int \frac{l}{r^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{1}{u(\psi)}\frac{d\psi}{\sqrt{S(u(\psi))}}$$

В нашей системе координат:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta\cos\varphi$$

Тогда изменение угла на траектории равно:

$$\delta\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d\psi}{u(\psi)}\left(\frac{1}{\sqrt{S(u(\psi))}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\right)$$

считаем, что $\rho_0 \cdot u_{max} \cdot u_{min} = l^2$

Если $S(u(\psi)) = const$, то $\varphi_T = \pi/2$, а если $\phi(r)$ $1/r$ то $\varphi_T = \pi$. В остальных случаях траектория будет апериодической, поэтому влиянием неоднородностей на $\delta\varphi$ можно пренебречь

Пусть V – малая поправка к $\phi(r)$. Тогда изменение углового момента:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = [\vec{r},\dot{\vec{v}}] = -[\vec{r},\nabla V]$$

В случае, если V осесимметричный

$$\nabla V = \vec{n}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{n}_\theta\frac{1}{r_K}\frac{\partial V}{\partial\theta_K}$$

и тогда

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_K}\vec{n}_\varphi$$

Единичный вектор в напревлении $\vec{L}$ равен

$$\vec{n}_L = (-\sin\theta, 0, -\cos\theta)$$

а единичный вектор $\vec{n}_\varphi$ равен

$$\vec{n}_\varphi = \frac{(y, -x, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(\sin\varphi, -\sin\theta\cos\varphi, 0)}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}}$$

Поперечные изменения $\vec{L}$ неважны, так как приводят лишь к вращению вокруг z плоскости траектории (что несущественно). Поэтому важно лишь изменение вдоль x

Итак,

$$\delta L_T^x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{S(u(\psi))}}\frac{\partial V}{\partial \theta_K}(r[u(\psi)], \theta)\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}}$$

В итоге, изменение L_x зависит от следующих параметров:

$$\frac{d}{dt}L_x = X(L_z, L_x, \varphi_T)$$

φ_T будет менятся достаточно быстро, поэтому мы можем усреднить по этому параметру производную $\dot{L}_x$. Как итог получим некое движение (медленное) с уравнением:

$$\frac{dL_x}{dt} = \langle X(L_z, L_x, \varphi_T)\rangle_{\varphi_T} = X(L_z, L_x)$$

Поскольку потенциал должен облаладать P симметрией, то $V(-z) = V(z)$, то тогда

$$\frac{\partial V(z)}{\partial \theta} \sim F(z^2, r^2)\cdot z = F(r^2, \cos^2\varphi)\cdot\cos\varphi$$

В итоге δL_T^x будет пропорционален комбинации $\cos\varphi\sin\varphi$

$$\delta L_T^x = F(\cos^2\varphi)\sin(2\varphi)$$

После усреднения по углу траектории (оно возникает, из-за того, что траектория апериодична и $\varphi = \varphi_T + \varphi(t)$, где φ_T – угол начала траектории, по которому идет усреднение)

Таким образом, в адиабатическом приближении такие неоднородности не влияют на траекторию.

0.0.13 Случайные Изотропные Неоднородности.

Положим мы имеем неоднородности изотропного характера, котороые имеют нулевое среднее значение.

$$\langle V\rangle_\Omega = 0 \tag{51}$$

Тогда среднее изменение углового момента под действием недоднородностей тоже равно нулю

$$\langle \delta L\rangle_\Omega = \langle \int_0^T [\vec{r}, \nabla V]dt\rangle_\Omega = 0 \tag{52}$$

Однако ненулевым является среднеквадратичное отклонение:

$$\langle \delta l\rangle_\Omega = \langle \left(\int_0^T [\vec{r}, \nabla V]dt\right)^2\rangle_\Omega = \sigma^2(l)\frac{T}{T_0} \tag{53}$$

Таким образом мы имеем на функцию распределения $n(r)$ уравнение диффузии:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{T_0}\Delta\rho(x)$$

где

$$x = \int \frac{dl}{\sigma(l)}$$

Этот процесс возможно учесть с помощью матрицы рассеяния с помощью вычислительной схемы, определяемой тридиагональной матрицей рассеяния.

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} \approx \frac{\sigma^i}{T_0}\left[\frac{\sigma^i_R}{h_{i+\frac{1}{2}}}\left(\frac{n_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{n_i}{h_i}\right) + \frac{\sigma^i_L}{h_{i-\frac{1}{2}}}\left(\frac{n_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{n_i}{h_i}\right)\right]$$

0.1 Неравномерная решетка

Если у нас есть какое-то δ, то хотелось бы, чтобы в области малых энергий шаг решетки был маленьким: А именно мы хотим, чтобы шаг по энергии $h_0 << 2\delta/\mu$, где μ — максимальная приведённая масса.

Предлагается сделать это следующим образом: Мы начнём с некоторого начального шага h_0. Затем будем увеличивать шаг в геометрической прогресии с параметром r до шага H_0, так что $H_0 \approx h_0 \cdot r^n$.

Если E_m — максимальная энергия, N — шаг разбиения по энергии, а m — число бинов с большим шагом H_0 (при больших энергиях), то можно записать уравнения:

$$n + m = N$$

$$h_0 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} r^i + H_0 m = E_m = h_0\frac{r^n - 1}{r - 1} + H_0(N - n)$$

В результате мы можем получить уравнение на H_0:

$$H_0 = \frac{E_m}{\frac{1}{r-1}(1 - \frac{h_0}{H_0}) + N - \log_r \frac{H_0}{h_0}}$$

0.2 Оптимизации бина.

Предположим, что масса тёмной материи сильно превышает массу мишени $M >> m$. Начинается диффузное приближение.

Изначально было так:

$$\frac{d\phi_a(x)}{dt} = \sum_b \int f_{ab}(x,y)\phi_b(y)dy - \sum_b \int f_{ba}(y,x)dy\phi_a(x)$$

В диффузном приближении интегральный оператор $f_{ab}(x,y)$ имеет в общем случае вид:

$$f_{ab}(x,y) = Q_{ab}\delta(x - y) - v^i_{ab}(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\delta(x - y) + \frac{\partial}{\partial y_i}D^{ij}_{ab}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\delta(x - y)$$

Причем можно считать, что D^{ij}_{ab} — симметричная матрица Получим отсюда уравнения движения. Первый интеграл дает

$$\sum_b Q_{ab}\phi_b(x) + \frac{\partial}{\partial x_i}v^i_{ab}(x)\phi_b(x) + \frac{\partial}{\partial x_j}D^{ij}_{ab}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_b(x)$$

Воторой же интеграл даёт

$$\phi_a(x)\sum_b Q_{ba}$$

Далее будем считать, что по b иднт суммирование.

$$\frac{d\phi_a(x)}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[v^i_{ab}\phi_b(x) + D^{ij}_{ab}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\phi_b(x)\right] + Q_{ab}\phi_b(x) - Q_{ba}\phi_a(x)$$

Первый член отвечет за перенос а второй — за осцилляции.

$$\frac{d\phi_a(x)}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}J^i_{ab}(x) + S_{ab}(x)\phi_b(x)$$

$$J^i_{ab}(x) = v^i_{ab}\phi_b(x) + D^{ij}_{ab}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\phi_b(x)$$

Численно мы можем методом МК лишь найти только такой интеграл с пробной функцией:

$$I_{ab}[\varphi](y) = \int f_{ab}(x,y)\varphi(x)dx = Q_{ab}\varphi(y) - v^i_{ab}\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(y) + \frac{\partial}{\partial y_i}D^{ij}_{ab}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\varphi(y)$$

Итак, мы имеем рецепт получения коэффициентов:

$$I_{ab}[x \to 1](y) = Q_{ab}$$
$$I_{ab}[x \to x^k - y^k](y) = -v^k_{ba}(y) + \frac{\partial}{\partial y_i}D^{ik}_{ab}(y)$$
$$I_{ab}[x \to \frac{1}{2}(x^k - y^k)(x^m - y^m)](y) = D^{km}_{ab}(y)$$

Далее уравнение можно переписать, проинтегрировав по объему. Мы будем считать, что $\phi_a(x_s)\cdot V_s = N_s$ — количество частиц в бине с объемом V_s

Тогда

$$\frac{dN^a_s}{dt} = \int J^i_{ab}dS_i + S^s_{ab}N^s_b(x)$$

Для взятия интеграла от тока в схеме нужно просуммировать по стенкам dS^k ток в направлении dS^k в центре стенки. Значание и производная ϕ_a в центре стенки получается интерполяцией из центров.

0.2.1 Новый алгоритм.

Пусть, как было выше, $f(x,y)$ — вероятность перехода из y в x.
Монте-Карло интегрирование фактически даёт величину

$$S[V_{out},V_{in}] = \frac{1}{V_{in}}\int_{V_{out}} dx \int_{V_{in}} dy f(x,y)$$

Оптимизация алгоритма следующая:

- В бине V_{in} как-то определяем начальную точку y_0.
- Далее смотрим на конечную точку z рассеяния из точки y_0.
- Затем мы предполагаем, что $f(x,y) = f(x + y_0 - y,y_0)$.
- Интегрирование по бину V_{out} идет по принципу попал/не попал.
- А вот усреднение по бину V_{in} мы делаем так: передвигаем бин на смещение $z - y_0$ и находим объем перечечения $V_I(z) = V_{in}(z) \cap V_{out}$. добавляем к ответу дополнительный вес равный $V_I(z)/V_{in}$

С помощью такого метода мы найдем следующий интеграл:

$$S[V_{out},V_{in},y_0] = \frac{1}{V_{in}}\int_{V_{out}} dx \int_{V_{in}} dy f(x + y_0 - y,y_0)$$

Теперь перейдём к диффузному приближению.

$$f(x,y) = Q(y)\delta(x-y) - v^i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\delta(x-y) + \frac{\partial}{\partial y_i}D^{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\delta(x-y)$$

Заметим, что интегрирование по бину равносильно интегрированию по всему пространству индикаторной функции бина.

$$S[V_{out},V_{in}] = \frac{1}{V_{in}} \int_{V_{out}} dx I_{out}(x) \int_{V_{in}} dy I_{in}(y) f(x,y)$$

Причем интегрирование с пробной функцией $dx s^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} I_{out}(x)$ равносильно интегрированию по границе бина с нормалью **внутрь** $s^i(x) dS^i$

Тогда получим:

$$S[V_{out},V_{in}] = \frac{1}{V_{in}} \int_{V_{out}} dx I_{out}(x) \int_{V_{in}} dy I_{in}(y) \left[Q(y)\delta(x-y) - v^i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \delta(x-y) + \frac{\partial}{\partial y_i} D^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \delta(x-y) \right]$$

Если бины совпадают, то остается только член

$$S[V_{out} = V_{in}] = \frac{1}{V_{in}} \int_{V_{out}} dx I_{out}(x) \int_{V_{in}} dy I_{in}(y) \left[Q(y)\delta(x-y) - \frac{\partial}{\partial y_i} v^i(y) \delta(x-y) + \frac{\partial}{\partial y_i} D^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \delta(x-y) \right]$$