

---

Факты о потенциале.

### 0.0.1 Обозначения

1.  $\varphi(r)$  — безразмерный положительный потенциал.

- $\varphi(r) > 0$
- $\varphi(r) = \frac{1}{r}, r \geq 1$
- $\varphi'(r) < 0$
- $\varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = -\rho(r) < 0$

2.  $e$  — положительная энергия

3.  $l$  — момент импульса

4.  $l_m(e)$  — максимальный момент импульса при данной энергии,  $r_m(e)$  — точка достижения этого максимума.

$$l_m^2(e) = \max_r r^2(\varphi(r) - e) \quad (1)$$

5.  $x_l = \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_m^2}}$

6.  $T(e,l)$  — время траектории.

$$T(e,l) = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) - e - \frac{l^2}{x^2}}}$$

- $T(e,l) - \frac{\pi}{2e^{3/2}}$  — ограниченная гладкая функция параметров  $e, x_l l_m$ .

7.  $r_\pm$  — корни уравнения  $r^2\varphi(r) - er^2 - l^2 = 0$

8.  $u = r^2, u_\pm$  — корни уравнения  $u\varphi(u) - eu - l^2 = 0$

9.  $F(u) = u\varphi(u)$  — монотонная, гладкая, выпуклая вниз функция.

10.  $u_- \downarrow e, \uparrow l^2$

11.  $u_+ \downarrow e, \downarrow l^2$

### 0.0.2 $l_m(e)$

Для нахождения  $l_m(e)$  находятся  $r_{i-1}, r_i, r_{i+1}$  — точки, такие, что  $r_i \geq r_{i\pm 1}$ , далее функция  $F(u)$  приближается параболой, после чего находятся  $u, l_m$

Заметим, что если  $e > \frac{1}{2}$ , то максимальный момент равен

$$l_m^2(e) = \frac{1}{4e}$$

однако траектории, пересекающие границу небесного тела ( $\exists t : r(t,e,l) < 1$ ) ограничиваются  $l^2 \leq 1 - e$

### 0.0.3 Траектории.

При расчете траектории, делаем замену

$$u = \frac{u_- + u_+}{2} - \frac{u_+ - u_-}{2} \cos(\theta) \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{u\varphi(u) - eu - l^2}{(u - u_-)(u - u_+)}} = 2\sqrt{S(u)}$$

- если  $e > 1/2$ , то будем линейно интерполировать  $\theta(e, l, \tau)$  ( $\tau = t/T(e, l)$ ) по параметрам  $e, \sqrt{l_m^2(e) - l^2}$   
Однако при интегрировании по траектории методом монте-карло, мы можем взять приближенную траекторию  $\tilde{\theta}(t)$ , тогда, так как для истинной траектории  $F(\theta)dt = d\theta$ , то для приближенной траектории  $\tilde{F}(t')dt' = d\tilde{\theta}$ , т.е.

$$dt = \frac{\tilde{F}(t')}{F(\theta)} dt'$$

$\tilde{\theta}$  будем аппроксимировать по точкам с помощью кубического сплайна для непрерывности производных.

- если  $e < 1/2$ , то траектория делится на 2 части: до  $r < 1$  и  $r > 1$ . Нас интересует внутренняя часть траектории и внешняя.

При этом выбирается  $\theta_1$ , а  $u_+$  подгоняется так, чтобы  $u(\theta_1) = 1$

- Решение уравнения снаружи:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{e}{r^2} \cdot (r - r_-)(r_+ - r)}$$

где

$$r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4el^2}}{2e}$$

Внешняя часть времени траектории равна при условии, что

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\pi}{2e^{3/2}} + \frac{\sqrt{1 - e - l^2}}{e} - \frac{\text{atan} \frac{2\sqrt{e}\sqrt{1 - e - l^2}}{1 - 2e}}{2e^{3/2}} \quad (3)$$

$$e > 0.5 \quad (4)$$

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\sqrt{1 - e - l^2}}{e} + \frac{\text{atan} \frac{2\sqrt{e}\sqrt{1 - e - l^2}}{2e - 1}}{2e^{3/2}} \quad (5)$$

$$e < 0.5 \quad (6)$$

при маленьких  $e$  верно, что

$$T_{ex}(e, l) = \frac{\pi}{2e^{3/2}} - z + \frac{z^3}{6} - \frac{ez^5}{10} + \dots + (-1)^k \frac{e^k z^{2k+3}}{(4k+6)} + \dots \quad (7)$$

где

$$z = \frac{2\sqrt{1 - e - l^2}}{1 - 2e} \quad (8)$$

Замена  $r = \frac{r_- + r_+}{2} - \frac{r_+ - r_-}{2} \cos \theta$  приводит к уравнению:

$$\dot{\theta} \cdot (1 - y \cdot \cos(\theta)) = \frac{2\sqrt{e}}{r_- + r_+} = 2e^{3/2}$$

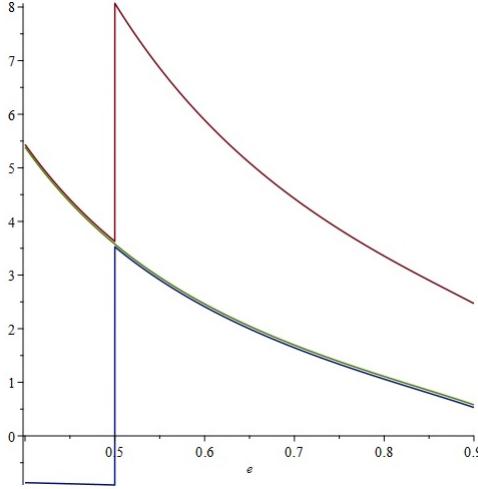


Рис. 1:  $T_{ex}(e,l)$ , красный — по 4, синий — по 6, зелёный — правильныйб,  $l = 0.2$

где

$$y = \frac{r_+ - r_-}{r_- + r_+} = \sqrt{1 - 4el^2}$$

тогда

$$\theta - y \sin \theta - (\theta_- - y \sin \theta_-) = 2e^{3/2}(t - t_-)$$

если  $G(y,z)$  — обратная функция  $\theta \rightarrow \theta - y \sin \theta$ , тогда

$$\theta = G(y, 2e^{3/2}(t - t_-) + (\theta_- - y \sin \theta_-))$$

при использовании временного параметра  $\tau = t/T_{ex}(e,l)$ , получаем

$$\theta = G\left(y, \pi \cdot \left(\tau \frac{T_{ex}(e,l)}{T(e)} + \frac{T_{in}(e,l)}{T(e)}\right)\right)$$

где  $T_{in}$  — внутренняя часть времени траектории,  $T_{in} + T_{ex} = T(e) = \frac{\pi}{2e^{3/2}}$

$$\begin{aligned} \theta &= G(y, \pi(1 - (1 - \tau)z)) \\ z &= \frac{T_{ex}(e,l)}{T(e)} \end{aligned}$$

- Решение внутри

Если  $r_{max} < 1$ , то всё тривиально, однако если  $r_{max} > 1$ , траектория гибридная. Во внутренней части её время является разрывной функцией параметров  $e, l$ . Однако непрерывной является функция  $T_\theta = T_{in}/\theta_1$ , где  $\theta_1$  — угол, соответствующий  $r = 1$  в 2.  $\theta_1$  тоже разрывен, но он равен

$$\cos \theta_1 = -\frac{2 - u_0 - u_1}{u_1 - u_0} = -\frac{(2 - u_0 - u_1)}{\sqrt{(u_1 - u_0)^2}} \quad (9)$$

И числитель и подкоренное значение знаменателя этой дроби являются непрерывными по параметрам.

В интерполяции внутреннего времени есть дин нюанс: он разрывно зависит от  $e$  и  $l$ . Продемонстрировать это можно тем, что при  $e \rightarrow 1/2 - 0$   $\theta_1 \rightarrow \pi$ , а когда  $l \rightarrow l_{max} - \theta_1 \rightarrow 0$ . Тогда непрерывной будет величина

$$T_{\theta in} = \frac{T_{in}}{\theta_1} \quad (10)$$

Далее: при интерполяции времени по сетке  $el$ , озможно, что каждый бин придется разбить на более маленькие части для более точной интерполяции времени. Для этого квадратный бин можно разделить на части (сделаем это по переменным  $e$  и  $\xi = \sqrt{1 - l^2/l_m^2}$ )

Итак, Алгоритм для интерполяции внутреннего преода:

- Интерполяция  $u_1^2 - u_0^2$  и  $u_0^2 + u_1^2$
- можно интерполировать переменные  $r_1^2 - r_0^2$  и  $r_1^2 + r_0^2$
- Получение  $r_0$  и  $r_1$
- Нахождение  $\theta$
- Интерполяция  $T_{\theta in}$
- Вычисление  $T_{in}$

Вообще можно интерполировать ещё одну величину, равную

$$\frac{du_{epm}}{\sqrt{1 - l^2}} = \frac{u_{pm} - u_l(e)}{\sqrt{1 - l^2}} \rightarrow (l = L/L_{max}(e), l \rightarrow 1) \rightarrow \pm \frac{L_{max}}{\sqrt{-1/2F''(u_e)}} \quad (11)$$

Единственная проблема будет тогда, когда есть большое расхождение между двумя радиусами, т.е. когда  $l^2 \rightarrow 0$ , поэтому такую интерполяцию нежелательно проводить при малых  $l$ . Предлагается использовать эту интерполяцию при условии, что в бине  $l_{max} > 0.8$ , иначе использовать простую интерполяцию  $u_p$  и  $u_m$

Но и тут есть проблема, возникающая при  $L^2 \approx 1 - e$ . Разложим  $F(u)$  вблизи  $u = 1$ .

$$F(u) = 1 + \frac{1}{2}(u - 1) + \frac{F_2}{2}(u - 1)^2 \quad (12)$$

Решая  $F(u) - eu - l^2 = 0$ , получим:

$$u_{1,0} = 1 + q_e \pm \sqrt{q_e^2 + 2y} \quad (13)$$

где

$$q_e = \frac{1 - 2e}{-2F_2}$$

$$L^2 = (1 - e) + F_2 z$$

Проблемная область поиска  $\theta_1$  та, где  $u_1 \rightarrow 1$ , тогда  $u_1 = 1 + \delta_1$ . Когда  $u_0$  отлично от 1, можно использовать приближение:

$$\cos \theta_1 = -\frac{1 - u_0 - \delta_1}{1 - u_0 + \delta_1} = -\frac{1 - x}{1 + x} \Rightarrow \theta_1 = \pi - \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} (x < 1), \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} (x > 1)$$

где  $x = \delta_1/(1 - u_0)$

В случае, если ещё и  $u_0 \rightarrow 1$  т.е.  $u_0 = 1 - \delta_0$

$$\cos \theta_1 = -\frac{1 - u_0 - \delta_1}{1 - u_0 + \delta_1} = -\frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_0 + \delta_1} \approx \frac{q_e}{\sqrt{q_e^2 + 2z}}$$

Если  $\cos \theta_1$  разделить на эту дробь, то результат можно уже интерполировать. Также можно интерполировать

$$du2q = \left( \frac{u_1 - u_0}{\sqrt{q^2 + 2z}} \right)^2 = \frac{(r_1 - r_0)^2(r_1 + r_0)^2}{q^2 z}$$

$$suq = \frac{u_1 + u_0 - 2}{q}$$

При  $e < 1/2$ ,  $\delta_1$  известно, поэтому будем интерполировать величину

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e} = \delta_0 \cdot \frac{q_e + \sqrt{q_e^2 + 2z}}{2z}$$

При  $e > 1/2$ , Находится величина  $\delta_1$ . С помощью интерполяции.

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{q_e^2 + 2z} + q_e} = \delta_1 \cdot \frac{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e}{2z}$$

Тут хотелось бы иметь гарантии, что  $q_e^2 + 2z > 0$ . Посмотрим, что тут у нас. Итак, это подкоренное выражение пропорционально величине  $L_m'^2(e) - L^2$  для разложения функции  $F(u)$  в 12, где  $L_m'^2(e)$  — квадрат максимального момента. Нам надо, чтобы  $L_m'^2(e) > L_m^2(e)$  Мы знаем, что

$$L_m^2(e) = F(u_e) - u_e \cdot e$$

при условии что

$$F'(u_e) - e = 0$$

в таком случае

$$\frac{du_e}{de} = \frac{1}{F''}$$

а

$$\frac{dL_m^2(e)}{de} = (F'(u_e) - e) \frac{du_e}{de} - u_e = -u_e$$

Как мы узнаем,  $-F''$  — убывающая положительная функция при  $\rho'(r) < 0$ . Поэтому для реального потенциала  $du_e/de > du'_e/de$  поэтому  $u_e > u'_e$  поэтому  $dL_m^2(e)/de < dL_m'^2(e)/de$ . Но на всякий случай лучше заменить  $\sqrt{q_e^2 + 2z}$ , что равно  $\sqrt{\frac{2}{-F_2}(L_e'^2 - L^2)}$  на  $\sqrt{\frac{2}{-F_2}(L_m^2 - L^2)}$  при  $e > 1/2$

В зависимости от точки  $E$  и  $l$ , нужно использовать разные способы интерполяции  $u_0$  и  $u_1$

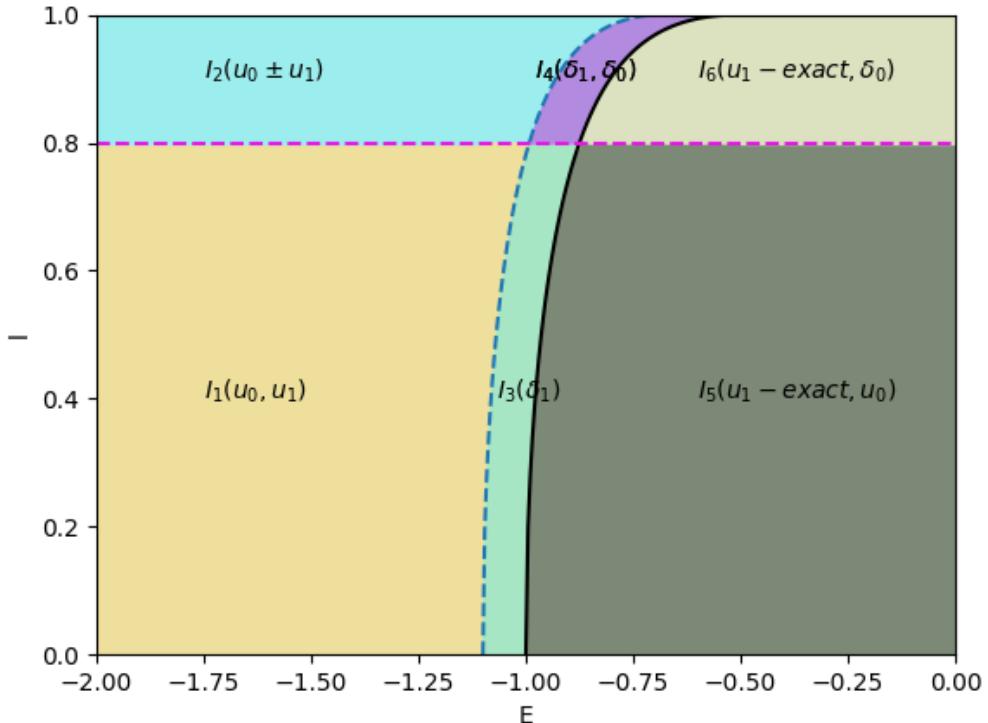


Рис. 2: Зоны на плоскости E-L

Всего есть 6 случаев, они определяются переменной  $l_u = L/L_m(e)$  и  $z$ : когда  $l_u$  близко к 1 или нет, когда  $z$  положительный (справа)/ отрицательный(слева)

- 
- Случай  $l_u$  не близко к 1: тогда  $u_0$  можно интерполировать по  $e, l$ , и не боятся корневой нерегулярности, для  $u_1$  существуют различные варианты:

- Область 1, 3, когда  $u_1$  определяется так же как и  $u_0$ . Но менее 1. При этом  $\theta_{max} = \pi$
- Область 5:  $u_1$  определяется точно по формуле (13)

- Случай  $l_u$  близко к 1:

- В области 2,4 лучше интерполировать величину  $u_1 + u_0$ , которые непрерывны по  $e, l$  и малую величину (11). Помним:  $\theta_{max} = \pi, u_1 < 1$
- В области 6  $u_1$  определяется точно. Но нам нужно знать точно  $\delta_0$ . Для этого используется интерполяция по величине

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{q_e^2 + 2z} - q_e} = \delta_0 \cdot \frac{q_e + \sqrt{q_e^2 + 2z}}{2z}$$

В области 1,3,5 нужно уточнить поведение при малых  $l_u$ . Для поиска  $u_0, u_1$  мы решаем уравнение

$$F(u) - eu - L^2 = 0 = u(\phi(u) - e) - L_m^2(e)l_u^2$$

при  $e \rightarrow e_0 \phi(u) - e \approx e_0 - e - C_0 u / 2$  тогда

$$u_0 \approx \frac{L_m^2(e)l_u^2}{e_0 - e}$$

Это означает, что при больших  $e_0 - e$  мы можем интегрировать величину  $u_0/l_u^2$ . Однако проблема возникает при малых  $e_0 - e$ . Тут мы воспользуемся разложением

$$F(u) \approx e_0 u + F''(0)/2u^2 = e_0 u - \frac{C_0}{2} u^2 \quad (14)$$

тогда (обозначим  $e_0 - e$  как  $de$ )

$$u_{0/1} \approx \frac{de \pm \sqrt{de^2 - 2C_0 L^2}}{C_0} = \frac{de \pm \sqrt{de^2 - 2C_0 L_m^2(e) \cdot l_u^2}}{C_0} \quad (15)$$

При  $de \rightarrow 0 L_m^2(e) \rightarrow \frac{de^2}{2C_0}$

$$u_{0/1} \approx de \frac{1 \pm \sqrt{1 - l_u^2}}{C_0} \quad (16)$$

тогда при малых  $l_u$   $u_1$  можно просто интерполировать по  $e, l$ , а  $u_0$  нужно находить из интерполяции величины

$$u_{0l} = \frac{u_0}{l_u^2} \rightarrow (l_u \rightarrow 0) \rightarrow \frac{L_m^2(e)}{de} \approx (de \rightarrow 0) \approx \frac{de}{2C_0} \quad (17)$$

Однако при малых  $de$ , интерполяция может происходить на всём интервале  $l_u = 0..1$ . тогда 17 плохо работает. В этом случае можно интерполировать величину

$$u_{0s} = \frac{u_{0/1}}{1 - \sqrt{1 - l_u^2}} = \frac{u_{0/1}}{l_u^2} (1 + \sqrt{1 - l_u^2}) \rightarrow (l_u \rightarrow 0) \rightarrow 2 \frac{L_m^2(e)}{de} \approx (de \rightarrow 0) \approx \frac{de}{C_0} \quad (18)$$

#### 0.0.4 Потенциал.

Связем величины: безразмерный потенциал  $\varphi(r)$ , безразмерный радиус  $r$ , безразмерная масса  $M(r)$  (такая, что  $M(1) = 1$ ), безразмерная плотность  $\rho(r)$ .

$$\frac{M(r)}{r^2} = -\varphi'(r)$$

$$3\rho(r) = \frac{M'(r)}{r^2}$$

В дальнейшем нам понадобится непрерывная функция

$$Q(r) = \frac{M(r)}{r^3} \quad (19)$$

Для нахождения  $Q(r)$  будем делить на  $r^3 M(r)$ , которая определяется квадратурой Гаусса.

$$Q(r+h) = \frac{Q(r)r^3 + I_G[r \rightarrow 3\rho(r)r^2](r, r+h)}{(r+h)^3} \quad (20)$$

После численного интегрирования мы получим  $Q(1) \neq 1$ , поэтому необходимо будет разделить  $Q(r)$  и  $\rho(r)$  на  $Q(1)$ .

Для получения потенциала останется лишь проинтегрировать непрерывную функцию  $rQ(r)$  с помощью квадратур Гаусса.

#### 0.0.5 Вычисление функция $S(u)$

Мы хотим вычислить функцию

$$S(u) = \frac{u\varphi(u) - eu - l^2}{(u - u_-)(u_+ - u)} \quad (21)$$

Положим  $F(u) = u\varphi(u)$ . Тогда

$$S(u) = \frac{1}{u_+ - u_-} \cdot \left( \frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-} - \frac{F(u_+) - F(u)}{u_+ - u} \right) \quad (22)$$

Эта функция является непрерывной и определенной, однако при близких значениях  $u_+, u_-, u$  необходимо вычисление с помощью производных. Возможные случаи:

- $u_+$  близко к  $u_-$ . В этом случае получаем, что

$$S(u) = -\frac{1}{2}F''\left(\frac{u_+ + u_- + u}{3}\right) \quad (23)$$

- $u$  близко к  $u_-$ , но далеко от  $u_+$  (либо наоборот). Тогда через производные оцениваем только первую разность.

$$S(u) = \frac{1}{u_+ - u_-} \cdot \left( F'\left(\frac{u + u_-}{2}\right) - \frac{F(u_+) - F(u)}{u_+ - u} \right) \quad (24)$$

Далее — очевидные формулы без текста.

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (25)$$

$$F'(u) = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi(r)) = \varphi(r) + \frac{r\varphi'(r)}{2} = \varphi(r) - \frac{r^2}{2} Q(r) \quad (26)$$

$$F_2 = F''(u) = \frac{1}{4} \left( \varphi''(r) + 3 \frac{\varphi'(r)}{r} \right) = -\frac{1}{4} (3\rho(r) + Q(r)) \quad (27)$$

Видно, что  $F(u)$  — выпуклая вниз и монотонная функция, поскольку  $F''(u) < 0$ , а  $F'(\infty) = 0$  и производная убывает, то  $F'(u) > 0$ . Также заметим, что

$$\frac{dF_2}{dr} = -\frac{3}{4} \left( \rho'(r) + \frac{\rho(r)}{r} - \frac{\int_0^r 3\rho(r')r'^2 dr'}{r^4} \right) = \frac{3}{4r} \left( \frac{\int_0^r 3(\rho(r') - \rho(r))r'^2 dr'}{r^3} - r\rho'(r) \right)$$

поктыому, если  $\rho(r)$  — убывающая функция (что довольно естественно), то  $F''(u)$  — возрастающая функция.

В случае если  $u_p, u > 1$  (т.е.  $e < 1/2$ ) Мы заменим функцию  $F(u)$  на полином

$$F(u) = 1 + \frac{u-1}{2} - \frac{(u-1)^2}{8}$$

Тогда максимальное значение  $u_p$  на мнимой траектории равно

$$u_p = -4e + 3 + 2\sqrt{4e^2 - 2l^2 - 6e + 3}$$

### 0.0.6 Нахождение $l_m(e)$

- при  $e \leq \frac{1}{2}$   $l_m^2(e) = 1 - e$  — определяется из условия пересечения траектории с телом
- если условием пересечения пренебречь, то  $l_m^2(e) = \frac{1}{4e}$ .
- Когда  $e > \frac{1}{2}$ , необходимо находить  $l_m(e)$  из 1. Дифференцируя это выражение по  $u$ , получаем уравнение

$$F'(u) - e = 0$$

Как мы уже знаем,  $F''(u) > 0$ . Это значит, что корень уравнения можно найти методом бинарного поиска, так как  $F'(u)$  убывает.

Найдя ближайшие точки  $r_1, r_2$  на узлах сетки  $r_i$ , мы уточним решение, приблизив функцию  $F'(u(r))$  линейно. Тогда

$$r_m = \frac{r_2 F'(r_1) - r_1 F'(r_2)}{F'(r_1) - F'(r_2)}$$

Также можно дополнительно уточнить, сделав шаг методом Ньютона

$$r'_m = r_m - \frac{F'(r_m)}{F''(r_m)}$$

Кстати, итерацию ньютона можно модифицировать для случая обнуления первой производной.

$$x' = x - \frac{2f(x)}{f'(x) + \text{sgn}(f'(x))\sqrt{f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)}}$$

### 0.0.7 Нахождение концов траектории.

Концы траектории определяются соотношением

$$\Phi(u) = F(u) - eu - l^2 = 0$$

Так как  $\Phi'(u) = F'(u) - e$  — функция, которая убывает, причем  $\Phi'(u_m(e)) = 0$ , то  $\Phi(u)$  — возрастает при  $u < u_m(e)$  и убывает при  $u > u_m(e)$ . Таким образом,  $\Phi(r)$  ведет себя так же как  $\Phi(u)$ , тогда для нахождения корней нужно лишь использовать метод деления отрезка пополам, а уточнить можно методом ньютона.

### 0.0.8 Переход из фазовых объемов

Задача номер 1 сводится к нахождению концентрации частиц в точке  $r$ , зная распределение частиц в плоскости  $E - L$ .

Итак, фазовый объем представляется в виде

$$d\Phi = r_\odot^3 v_{esc}^3 \cdot 4\pi^2 d\tau dedl^2 \quad (28)$$

А также в виде

$$d\Phi = r_\odot^3 v_{esc}^3 \cdot d^3 \vec{r} d^3 \vec{v} \quad (29)$$

Самое простое, что можно найти — это полная фазовая плотность

$$\frac{dN}{dr dv_r dv_{tau}} = \frac{dn(r)}{dv_r dv_{tau}} = 4\pi v_{tau} \frac{dn(r)}{d^3 v} = v_{tau} \frac{dN}{\pi d\tau dedl^2} = \frac{dN(e,l)}{2\pi r T(e,l) dedl}$$

Учтем также, что

$$d^3 \vec{v} = 2\pi ded \sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} d\vec{n}. \quad (30)$$

Причем, поскольку радиальная скорость  $v_r$  и тангенциальная  $v_t$  фиксированы, для  $d\vec{n}$  остается только выбор направления для тангенциальной скорости ( $\int d\vec{n} = 1$ ).

Отсюда получаем, что

$$n(r) = \int \frac{dN}{2\pi T(e,l) dedl^2} ded \sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} \quad (31)$$

1. Предположение 1: равномерное распределение внутри бина по  $dedl$ :

В этом случае

$$f_1(e,l) = \frac{dN}{dedl} \quad (32)$$

И тогда получим

$$n(r) = \int \frac{1}{r} \frac{f_1(e,l)}{4\pi T(e,l)} de d \arcsin \frac{l}{rv} \quad (33)$$

Если нужно генерировать распределение, то  $L$  — генерируется равномерно, т.е.

$$L = (l_0 + (l_1 - l_0)\xi)L_{max}(e) \quad (34)$$

где  $l_i = L/L_{max}e$  — приведенный момент импульса, а  $\xi$  — случайная величина в интервале  $[0,1]$ .

А энергия генерируется НЕРАВНОМЕРНО:

$$e = e_0 + (e_1 - e_0) \cdot u \quad (35)$$

$$u = \frac{2\xi}{(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4b\xi}} \quad (36)$$

$$b = \frac{L_{max}(e_0) - L_{max}(e_0)}{L_{max}(e_0) + L_{max}(e_0)} \quad (37)$$

2. Предположение 2: равномерное распределение внутри бина по  $dedl^2$ :

В этом случае

$$f_2(e,l) = \frac{dN}{dedl^2} \quad (38)$$

И тогда получим

$$n(r) = \int \frac{f_2(e,l)}{2\pi T(e,l)} de d \sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}} \quad (39)$$

Генерация  $L$ :

$$L = \sqrt{l_0^2 + (l_1^2 - l_0^2)\xi}L_{max}(e) \quad (40)$$

$$e = e_0 + (e_1 - e_0) \cdot u \quad (41)$$

$$u = \frac{\xi(3+b^2)}{(1-b)^2 + (1-b)\sqrt[3]{(1-b)^3 + 2\xi b(3+b^2)}} \quad (42)$$

$$b = \frac{L_{max}(e_0) - L_{max}(e_0)}{L_{max}(e_0) + L_{max}(e_0)} \quad (43)$$

Интеграл легче всего взять методом монте-карло (это не очень затратно и просто реализуется).

При этом важно учитывать пределы интегрирования не только исходя из размеров бина  $[e_0, e_1], [\bar{l}_0, \bar{l}_1]$  но и из области определения подинтегральных функций:  $e < \varphi(r), l < rv = \sqrt{r^2(\varphi(r) - e)}$ .

Чтобы упростить вычисление,  $e$  мы будем генерировать также, с тем же весом, однако  $l$  необходимо получать в новых пределах, для этого меру бина в каждой МК итерации нужно умножать на

$$m(e) = \frac{l'_{max} - l_{min}}{l_{max} - l_{min}}$$

где

$$l'_{max} = \sqrt{r^2(\varphi(r) - e)}$$

Ещё одно замечание касаемо этого ограничения: пределы интегрирования  $e$  тоже необходимо скорректировать.

$$L_{min/max}(e) = L_0 + \frac{e - e_0}{e_1 - e_0} \cdot (L_1 - L_0) \quad (44)$$

$$L_{restrict}^2(e) = r^2(\varphi(r) - e) \quad (45)$$

Вторая интересующая нас величина — скорость аннигиляции

$$\int d^3\vec{r}d^3\vec{v}d^3\vec{v}_1 f(\vec{r}, \vec{v}) f_1(\vec{r}, \vec{v}_1) \sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1| = \frac{\sigma_{a0} v_{a0}}{r_\odot^3} \int dN_1 dn_2(r) \phi_{ann}(v). \quad (46)$$

где  $\sigma_{a0} v_{a0}$  — размерное сечение \* скорость взятое при произвольной скорости  $v_{a0}$ , а

$$\phi_{ann} = \frac{\sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1|}{\sigma_{a0} v_{a0}}. \quad (47)$$

$dN_1$  — дифференциал количества частиц сорта 1,  $dn_2(r)$  — дифференциал концентрации частиц сорта 2 (из 33)

$$dN_1 \approx \frac{dN_1}{T(e_1, l_1) de_1 dl_1^2} d\tau de_1 dl_1^2 \approx \frac{dN_1}{T(e_1, l_1) de_1 dl_1} d\tau de_1 dl_1 \quad (48)$$

Величина  $\phi_{ann}$  зависит от разности скоростей и равна  $\phi_0 + \phi_2 v^2 + \dots$ . При интегрировании можно вычислить эту величину для каждого члена ряда  $v^i$  а потом просуммировать с весами  $\phi_i$

Вклад  $v^2$  можно оптимизировать, так как если мы интегрируем по скоростям двух частиц, то скорости  $\vec{v}_i$  и  $-\vec{v}_i$  входят с одинаковым весом. Тогда можно сделать замену

$$v^2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \rightarrow \frac{1}{2} ((\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2) = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) \quad (49)$$

### 0.0.9 Проверки

- 1) Проверка захвата — по статье. согласие есть
- 2) Проверка Scatter — Проверить полное сечение соударения для  $\sigma = 1/v$
- 3) Проверка концентрации: сохранение числа частиц  $\sum_i N_i = \int n(r) dV$
- 4) Проверка аннигиляции: при  $\sigma v = 1$  аннигиляция равна  $\int n^2(r) dV$ .

### 0.0.10 Нормировка и вычисление интегралов

- Количество частиц:

Полное число частиц в бине  $i$   $N_{ri}$  должно равняться

$$N_{ri} = N_i \cdot N_\odot$$

где  $N_\odot = n_{\chi, \infty} \cdot V_\odot$ ,  $N_i$  — нормированное число частиц, участвующее в расчёте,  $n_{\chi, \infty}$  — концентрация Т.М. в гало,  $V_\odot$  — объём тела.

- Характерное время (частота соударений)

В качестве единицы, обратного времени свободного пробега будем обозначать величину

$$\frac{1}{T_{xp}} = \sigma_{\xi p} \bar{n}_p V_{esc}$$

где  $\bar{n}_p$  — средняя концентрация протонов,  $V_{esc}$  — вторая космическая скорость для объекта,  $\sigma_{\xi p}$  — сечение нормировки (сечение рассеяния Т.М. на протоне/нуклоне при некой фиксиированной выбранной скорости  $v = |\vec{v}_\chi - \vec{v}_p|$ ). Важно, что при более сложных потенциалах или в неупругом случае

Естественно, мы обезразмерим реальное время:  $t_r = T_{xp} t$

- Скорость захвата

Полная скорость захвата в  $i$ том бине равна

$$C_i = c_i \frac{N_\odot}{T_{xp}}$$

Тогда темп захвата определяется из

$$\frac{dN_{ri}^{capt}}{dt_r} = C_i \Leftrightarrow \frac{dN_i^{capt}}{dt} = c_i$$

Формуля для неупругого сечения (в системе центра масс):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{|\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}$$

Под ядерным фактором понимается величина

$$F(q,v) = \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathcal{M}_0|^2} \cdot \frac{(m_\chi + m_p)^2}{(m_\chi + m_N)^2}$$

где  $m_N$  — масса ядра,  $m_p$  — массса одного нуклона, по которому идет нормировка.

Под  $\sigma_{\xi p}$  подразумевается величина

$$\sigma_{\xi p} = \int \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{64\pi^2(E_p + E_\chi)^2} d\Omega$$

Тогда, используя безразмерные параметры, получаем:

$$c_i = \int dr^3 \int d^3\vec{v}_\chi \int \tilde{f}(\vec{v}_\chi) \tilde{n}_N(r) \cdot |\vec{v}'_\chi - \vec{v}'_N| F(q,v) d\vec{n}'_{CM}$$

где функция распределения ТМ равна  $n_{\chi,\infty}\tilde{f}(\vec{v}_\chi)$ ,  $d\vec{n}'_{CM}$  — элемент выходного фазового объема (направление выходной скорости в системе Ц.М.), полный интеграл которого равен 1 ( $\int d\vec{n}'_{CM} = 1$ )

$$d\vec{n}'_{CM} = \frac{d\cos\theta' d\varphi'}{4\pi}$$

Начальная скорость:

$$d^3\vec{v}_\chi \tilde{f}(\vec{v}_\chi) = 2\pi v dv^2 f_e(v^2) = 2\pi v du^2 f_e(u^2)$$

где  $v^2 = v_{esc}^2(r) + u^2$ ,  $v_{esc}(r)$  — скорость вылета в точке  $r$ ,  $u$  — скорость на бесконечности  $f_e(u^2)$  — эффективная плотность на бесконечности с учётом скорости движения небесного тела относительно гало  $u_0$  ( $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{w}$ ) где  $\vec{w}$  — скорость в гало.

$$f_e(u^2) = \int_{-1}^1 f(u^2 + u_0^2 + 2uu_0x) \frac{dx}{2}$$

- Темп рассеяния

Образмеренная матрица рассеяния (тоже на  $T_{\chi p}$ )  $s_{ij}$  определяется из темпа расеяния частиц (тоже образмеренного):

$$\frac{dN_i^{scat}}{dt} = s_{ij} N_j$$

$$\sum_i s_{ij} = \frac{T_{in}}{T_{in} + T_{out}} \cdot d\tau [d^3v_p f_p(v)] \cdot |\vec{v}'_\chi - \vec{v}'_N| F(q,v) d\vec{n}'_{CM}$$

При интегрировании методом Монте-Карло берется случайное время  $\tau$  траектории, скорость мишени (относительно распределения Больцмана  $[d^3v_p f_p(v)]$ ). Энергия и импульс частицы ТМ генерируются внутри бина в предположении, что они равномерно распределены относительно меры либо  $dEdL$  либо  $dEdL^2$ . Конечная скорость определяется направлением вектора разности скоростей в системе центра масс  $d\vec{n}'_{CM}$ .

- Безразмерная концентрация ТМ:

$$\tilde{n}_\chi(r) = \sum_i \int \frac{4\pi}{3} \frac{1}{2\pi T(e,l)} \frac{dN_i}{dedl^2} ded \sqrt{v^2 - \frac{l^2}{r^2}}$$

В таком случае

$$\int \tilde{n}_\chi(r) 3r^2 dr = \sum N_i = \sum \frac{N_{ri}}{V n_{\chi\infty}}$$

Такой выбор размерности связан с тем, что  $V \cdot 3r^2 dr = dV$  и тогда

$$\int \tilde{n}_\chi(r) n_{\chi\infty} dV = \sum N_{ri} = \text{Полное число частиц}$$

- **Аннигиляция:** Мы хотим чтобы

$$\frac{dN_i^{ann}}{dt} = \frac{1}{N_\odot} \gamma_p a_{ij}^p N_j N_i \quad (50)$$

где

$$\gamma_p = T_{\chi p} \cdot n_{\chi\infty} \langle \sigma_{ann} v \rangle_{v=v_{esc}}$$

отношение темпа аннигиляции к темпу рассеяния. Важно: величина сечения аннигиляции  $\langle \sigma_{ann} v \rangle$  берётся при скорости  $v = v_{esc}$  (для аннигиляции сечение которой ведёт себя как  $\langle \sigma_{ann} v \rangle = const \cdot v^2$ )

$$a_{ij}^p = \int \phi_{ann} 3r^2 dr \left( \frac{4\pi}{3} \right)^2 \left( \frac{1}{2\pi T(e_1, l_1)} \frac{1}{de_1 dl_1^2} de_1 d\sqrt{v_1^2 - \frac{l_1^2}{r^2}} \right) \left( \frac{1}{2\pi T(e_2, l_2)} \frac{1}{de_2 dl_2^2} de_2 d\sqrt{v_2^2 - \frac{l_2^2}{r^2}} \right)$$

Из этого поределения следует:

$$a_{ij}^p N_i N_j = \int 3r^2 dr \tilde{n}_\chi^2(r) \phi_{ann}$$

Полная скорость аннигиляции равна

$$\frac{dN_{ri}^{ann}}{dt_r} = \gamma_p a_{ij}^p N_i N_j \cdot \frac{N_\odot}{T_{\chi p}}$$

### 0.0.11 Уравнение эволюции.

Линейное уравнение имеет вид:

$$\frac{dn_i}{dt} = c_i^0 + s_{ij} n_j, n_i(0) = 0$$

Мы будем решать уравнение на  $c_i = \dot{n}_i$

$$\frac{dc_i}{dt} = s_{ij} c_j, c_i(0) = c_i^0$$

тогда

$$n_i(t) = \int_0^t c_i(t') dt'$$

Решение представляется в виде матричной экспоненты:

$$c = e^{st} c^0$$

Для того приближения этого решения используется разбиение на шаги и приближение экспоненты на каждом шаге устойчивой схемой 2 порядка:

$$e^{s\tau} = \frac{2}{\left(1 - \frac{s\tau}{2}\right)^2} - \frac{1}{(1 - s\tau)}$$

(Схема устойчива, так как собственные значения  $s$  имеют отрицательную вещественную часть)  
Нелинейная эволюция (с учетом аннигиляции) имеет вид:

$$\frac{dn_i}{dt} = c_i^0 + s_{ij} n_j - \sum_j a_{ij} n_j n_i$$

Таким образом

$$\frac{dc_i}{dt} = s_{ij}c_j - \sum_j a_{ij}c_j n_i - \sum_j a_{ij}n_j c_i$$

Тут 2 вклада: удобный и неудобный. Первый вклад выглядит как диагональная матрица, и его эволюция очевидна:

$$D_i = 2a_{ij}n_j$$

$$e^{-D\tau} = \text{diag}(e^{-D_i\tau})$$

Второй вклад имеет более сложный вид:

$$B_{ij} = -a_{ij}n_i \quad (i \neq j)$$

$$B_{ij} = \sum_{k \neq i} a_{ik}n_k \quad (i = j)$$

$$e^{B\tau} \neq e^{B_{ij}\tau}$$

Собственные значения матрицы  $B_{ij}$  имеют всегда положительную вещественную часть, что приводит к неустойчивой эволюции. Однако это означает, что любая явная схема по вычислению этой экспоненты будет более устойчивой чем само решение (так как  $1 + x + x^2/2 + \dots < \exp(x)$ ). Поэтому можно вычислять так:

$$e^{B\tau} \approx 1 + B\tau + \frac{(B\tau)^2}{2}$$

Тут важно, что пока мы не достигли равенства захвата и аннигиляции,  $B\tau \lesssim 1$ , поэтому приближения можно считать верными. Поэтому эволюцию нужно проводить до этого момента.

### 0.0.12 Неоднородности.

Изменение угла при вращении траектории равно

$$\varphi_T = \int \frac{l}{r^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{u(\psi)} \frac{d\psi}{\sqrt{S(u(\psi))}}$$

В нашей системе координат:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta \cos \varphi$$

Тогда изменение угла на траектории равно:

$$\delta\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\psi}{u(\psi)} \left( \frac{1}{\sqrt{S(u(\psi))}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \right)$$

считаем, что  $\rho_0 \cdot u_{max} \cdot u_{min} = l^2$

Если  $S(u(\psi)) = const$ , то  $\varphi_T = \pi/2$ , а если  $\phi(r) \propto 1/r$  то  $\varphi_T = \pi$ . В остальных случаях траектория будет апериодической, поэтому влиянием неоднородностей на  $\delta\varphi$  можно пренебречь

Пусть  $V$  – малая поправка к  $\phi(r)$ . Тогда изменение углового момента:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = [\vec{r}, \dot{\vec{v}}] = -[\vec{r}, \nabla V]$$

В случае, если  $V$  осесимметричный

$$\nabla V = \vec{n}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec{n}_\theta \frac{1}{r_K} \frac{\partial V}{\partial \theta_K}$$

и тогда

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_K} \vec{n}_\varphi$$

Единичный вектор в направлении  $\vec{L}$  равен

$$\vec{n}_L = (-\sin \theta, 0, -\cos \theta)$$

а единичный вектор  $\vec{n}_\varphi$  равен

$$\vec{n}_\varphi = \frac{(y, -x, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(\sin \varphi, -\sin \theta \cos \varphi, 0)}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$$

Поперечные изменения  $\vec{L}$  неважны, так как приводят лишь к вращению вокруг  $z$  плоскости траектории (что несущественно). Поэтому важно лишь изменение вдоль  $x$

Итак,

$$\delta L_T^x = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{S(u(\psi))}} \frac{\partial V}{\partial \theta_K}(r[u(\psi)], \theta) \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$$

В итоге, изменение  $L_x$  зависит от следующих параметров:

$$\frac{d}{dt} L_x = X(L_z, L_x, \varphi_T)$$

$\varphi_T$  будет меняться достаточно быстро, поэтому мы можем усреднить по этому параметру производную  $\dot{L}_x$ . Как итог получим некое движение (медленное) с уравнением:

$$\frac{dL_x}{dt} = \langle X(L_z, L_x, \varphi_T) \rangle_{\varphi_T} = X(L_z, L_x)$$

Поскольку потенциал должен обладать  $P$  симметрией, то  $V(-z) = V(z)$ , то тогда

$$\frac{\partial V(z)}{\partial \theta} \sim F(z^2, r^2) \cdot z = F(r^2, \cos^2 \varphi) \cdot \cos \varphi$$

В итоге  $\delta L_T^x$  будет пропорционален комбинации  $\cos \varphi \sin \varphi$

$$\delta L_T^x = F(\cos^2 \varphi) \sin(2\varphi)$$

После усреднения по углу траектории (оно возникает, из-за того, что траектория апериодична и  $\varphi = \varphi_T + \varphi(t)$ , где  $\varphi_T$  – угол начала траектории, по которому идет усреднение)

Таким образом, в адиабатическом приближении такие неоднородности не влияют на траекторию.

### 0.0.13 Случайные Изотропные Неоднородности.

Положим мы имеем неоднородности изотропного характера, которые имеют нулевое среднее значение.

$$\langle V \rangle_\Omega = 0 \tag{51}$$

Тогда среднее изменение углового момента под действием недонородностей тоже равно нулю

$$\langle \delta L \rangle_\Omega = \left\langle \int_0^T [\vec{r}, \nabla V] dt \right\rangle_\Omega = 0 \tag{52}$$

Однако ненулевым является среднеквадратичное отклонение:

$$\langle \delta l \rangle_\Omega = \left\langle \left( \int_0^T [\vec{r}, \nabla V] dt \right)^2 \right\rangle_\Omega = \sigma^2(l) \frac{T}{T_0} \tag{53}$$

Таким образом мы имеем на функцию распределения  $n(r)$  уравнение диффузии:

---


$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{T_0} \Delta \rho(x)$$

где

$$x = \int \frac{dl}{\sigma(l)}$$

Этот процесс возможно учесть с помощью матрицы рассеяния с помощью вычислительной схемы, определяемой тридиагональной матрицей рассеяния.

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} \approx \frac{\sigma^i}{T_0} \left[ \frac{\sigma_R^i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \left( \frac{n_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{n_i}{h_i} \right) + \frac{\sigma_L^i}{h_{i-\frac{1}{2}}} \left( \frac{n_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{n_i}{h_i} \right) \right]$$

## 0.1 Неравномерная решетка

Если у нас есть какое-то  $\delta$ , то хотелось бы, чтобы в области малых энергий шаг решетки был маленьким: А именно мы хотим, чтобы шаг по энергии  $h_0 \ll 2\delta/\mu$ , где  $\mu$  — максимальная приведённая масса.

Предлагается сделать это следующим образом: Мы начнём с некоторого начального шага  $h_0$ . Затем будем увеличивать шаг в геометрической прогрессии с параметром  $r$  до шага  $H_0$ , так что  $H_0 \approx h_0 \cdot r^n$ .

Если  $E_m$  — максимальная энергия,  $N$  — шаг разбиения по энергии, а  $m$  — число бинов с наибольшим шагом  $H_0$  (при больших энергиях), то можно записать уравнения:

$$n + m = N$$

$$h_0 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} r^i + H_0 m = E_m = h_0 \frac{r^n - 1}{r - 1} + H_0(N - n)$$

В результате мы можем получить уравнение на  $H_0$ :

$$H_0 = \frac{E_m}{\frac{1}{r-1}(1 - \frac{h_0}{H_0}) + N - \log_r \frac{H_0}{h_0}}$$

## 0.2 Оптимизация бина.

Предположим, что масса тёмной материи сильно превышает массу мишени  $M \gg m$ . Начинается диффузное приближение.

Изначально было так:

$$\frac{d\phi_a(x)}{dt} = \sum_b \int f_{ab}(x,y)\phi_b(y)dy - \sum_b \int f_{ba}(y,x)dy\phi_a(x)$$

В диффузном приближении интегральный оператор  $f_{ab}(x,y)$  имеет в общем случае вид:

$$f_{ab}(x,y) = Q_{ab}\delta(x-y) - v_{ab}^i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \delta(x-y) + D_{ab}^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \delta(x-y)$$

Причем можно считать, что  $D_{ab}^{ij}$  — симметричная матрица. Получим отсюда уравнения движения. Первый интеграл дает

$$\sum_b Q_{ab}\phi_b(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} v_{ab}^i(x)\phi_b(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{ab}^{ij}(x)\phi_b(x)$$

Второй же интеграл даёт

$$\phi_a(x) \sum_b Q_{ba}$$

Далее будем считать, что по  $b$  иднт суммирование.

---


$$\frac{d\phi_a(x)}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ v_{ab}^i \phi_b(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ab}^{ij}(x) \phi_b(x) \right] + Q_{ab} \phi_b(x) - Q_{ba} \phi_a(x)$$

Первый член отвечает за перенос а второй — за осцилляции.

$$\frac{d\phi_a(x)}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} J_{ab}^i(x) + S_{ab}(x) \phi_b(x)$$

$$J_{ab}^i(x) = v_{ab}^i \phi_b(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ab}^{ij}(x) \phi_b(x)$$

Численно мы можем методом МК лишь найти только такой интеграл с пробной функцией:

$$I_{ab}[\varphi](y) = \int f_{ab}(x,y) \varphi(x) dx = Q_{ab} \varphi(y) - v_{ab}^i \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi(y) + \frac{\partial}{\partial y_i} D_{ab}^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \varphi(y)$$

Итак, мы имеем рецепт получения коэффициентов:

$$\begin{aligned} I_{ab}[x \rightarrow 1](y) &= Q_{ab} \\ I_{ab}[x \rightarrow x^k - y^k](y) &= -v_{ba}^k(y) \\ I_{ab}[x \rightarrow \frac{1}{2}(x^k - y^k)(x^m - y^m)](y) &= D_{ab}^{km}(y) \end{aligned}$$

Далее уравнение можно переписать, проинтегрировав по объему. Мы будем считать, что  $\phi_a(x_s) \cdot V_s = N_s$  — количество частиц в бине с объемом  $V_s$

Тогда

$$\frac{dN_s^a}{dt} = \int J_{ab}^i dS_i + S_{ab}^s N_b^s(x)$$

Для взятия интеграла от тока в схеме нужно просуммировать по стенкам  $dS^k$  ток в направлении  $dS^k$  в центре стенки. Значение и производная  $\phi_a$  в центре стенки получается интерполяцией из центров.

### 0.2.1 Новый алгоритм.

Пусть, как было выше,  $f(x,y)$  — вероятность перехода из  $y$  в  $x$ .

Монте-Карло интегрирование фактически даёт величину

$$S[V_{out}, V_{in}] = \frac{1}{V_{in}} \int_{V_{out}} dx \int_{V_{in}} dy f(x,y)$$

Оптимизация алгоритма следующая:

- В бине  $V_{in}$  как-то определяем начальную точку  $y_0$ .
- Далее смотрим на конечную точку  $z$  рассеяния из точки  $y_0$ .
- Затем мы предполагаем, что  $f(x,y) = f(x + y_0 - y, y_0)$ .
- Интегрирование по бину  $V_{out}$  идет по принципу попал/не попал.
- А вот усреднение по бину  $V_{in}$  мы делаем так: передвигаем бин на смещение  $z - y_0$  и находим объем перечечения  $V_I(z) = V_{in}(z) \cap V_{out}$ . добавляем к ответу дополнительный вес равный  $V_I(z)/V_{in}$

С помощью такого метода мы найдем следующий интеграл:

$$S[V_{out}, V_{in}, y_0] = \frac{1}{V_{in}} \int_{V_{out}} dx \int_{V_{in}} dy f(x + y_0 - y, y_0)$$

Теперь перейдём к диффузному приближению.

$$f(x,y) = Q(y) \delta(x - y) - v^i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \delta(x - y) + \frac{\partial}{\partial y_i} D^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \delta(x - y)$$

---

Заметим, что интегрирование по бину равносильно интегрированию по всему пространству индикаторной функции бина.

$$S[V_{out}, V_{in}] = \frac{1}{V_{in}} \int_{V_{out}} dx I_{out}(x) \int_{V_{in}} dy I_{in}(y) f(x, y)$$

Причем интегрирование с пробной функцией  $dx s^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} I_{out}(x)$  равносильно интегрированию по границе бина с нормалью **внутрь**  $s^i(x) dS^i$

Тогда получим:

$$S[V_{out}, V_{in}] = \frac{1}{V_{in}} \int_{V_{out}} dx I_{out}(x) \int_{V_{in}} dy I_{in}(y) \left[ Q(y) \delta(x - y) - v^i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \delta(x - y) + \frac{\partial}{\partial y_i} D^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \delta(x - y) \right]$$

Если бины совпадают, то остается только член

$$S[V_{out} = V_{in}] = \frac{1}{V_{in}} \int_{V_{out}} dx I_{out}(x) \int_{V_{in}} dy I_{in}(y) \left[ Q(y) \delta(x - y) - \frac{\partial}{\partial y_i} v^i(y) \delta(x - y) + \frac{\partial}{\partial y_i} D^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \delta(x - y) \right]$$

Вывод пока только один: в диффузном приближении схема плохо моделирует диффузию.

### 0.2.2 Определение $\Delta E_{max}$ и $\Delta l_{max}$

Пусть  $\mu_i = m_i / (m_i + m_k)$  а  $\mu_k = m_k / (m_i + m_k)$

## 0.3 Монте-Карло алгоритм.

Изначально есть  $(e, l)$  и массовое состояние  $a$  Мы будем генерировать следующее

- Время  $T = -\ln p_{a,total}(e, l)$  — время жизни в состоянии  $e, l$
- новое состояние  $b$  из  $a$  с вероятностью  $p_{ba}(e, l)$
- Элемент рассеяния с вероятностью  $p_{ba,i}(e, l)$
- точку столкновения  $r$  с учетом плотности вероятности  $dp_{ba,i}(e, l)(r) / dr$  — отсюда получается функция сэмплирования  $dr / d\xi(b, a, i, e, l, r)$
- новые  $e$  и  $l$

Последний вопрос — как сэмплировать термальные скорости.

Будем считать, что форм фактор  $f(q, v)$  медленно меняется и его можно сэмплировать мажорантой  $f(q, v) = const$ .

Остается только часть с  $\vec{v}_1$ . В вероятность входит величина

$$|\vec{v}'_1 - \vec{V}'| 2\pi \frac{v_1^2}{(2\pi)^{3/2} v_T^3} dv_1 e^{-v_1^2/2v_T^2} d\cos\theta = \sqrt{v_1^2 + V^2 - 2v_1 V \cos\theta \pm \Delta^2} \frac{v_1^2}{v_T^3 \sqrt{2\pi}} dv_1 e^{-v_1^2/2v_T^2} d\cos\theta$$

Существует несколько случаев

- $+\Delta^2$  либо  $-\Delta^2$ , но  $v_1 > V + \Delta$  либо  $0 < v_1 < V - \Delta$

Тогда  $\cos\theta$  меняется от  $-1$  до  $1$ .

- $-\Delta^2$  и  $|\Delta - V| < v_1 < V + \Delta$

Тогда  $\cos\theta$  меняется от  $-1$  до  $\cos\theta_{max}$

В первом случае берется интеграл по  $\cos\theta$ . Он имеет вид

$$\sqrt{A - By} dy = dG(y)$$

где

$$G(y) = 2 \frac{(A + B)^{3/2} - (A - By)^{3/2}}{3B}$$

Остюда легко сэмлировать  $y$ , обращая  $G(y)/G(1)$

$$\xi_\theta = \frac{G(y)}{G(1)} = \frac{(1+t)^{3/2} - (1-ty)^{3/2}}{(1+t)^{3/2} - (1-t)^{3/2}}, t = \frac{B}{A} < 1$$

$$y = \frac{1 - ((1+t)^{3/2} - \xi [(1+t)^{3/2} - (1-t)^{3/2}])^{2/3}}{t}$$

Далее наш интеграл свелся к

$$G(1) \frac{v_1^2}{v_T^3 \sqrt{2\pi}} dv_1 e^{-v_1^2/2v_T^2} d\xi_\theta$$

$$G(1) = 2\sqrt{A} \cdot \left[ Q(t = B/A) = \frac{(1+t)^{3/2} - (1-t)^{3/2}}{3t} \right]$$

$$= G(1) \sqrt{\frac{u}{\pi}} e^{-u} du$$

Теперь рассмотрим эндотермический случай, когда  $v \in [|V - \Delta|, V + \Delta]$ . тогда  $\cos \theta$  ограничен  $\cos \theta^{max}$

$$\cos \theta^{max} = \frac{V^2 + v_1^2 - \Delta^2}{2Vv_1} = A/B = t$$

тогда вместо  $G(1)$  будет стоять  $G(y^{max}) = 2(A+B)^{3/2}/3B = 2/3\sqrt{B}(t+1)^{3/2}$

$$\xi_\theta = \frac{G(y)}{G(y^{max})} = \frac{(t+1)^{3/2} - (t-y)^{3/2}}{(1+t)^{3/2}}$$

$$y = t - \left( (1+t)^{3/2} (1-\xi) \right)^{2/3}$$

### 0.3.1 Детали реализации

Мы возьмём сетку по  $e,l$  в виде квадродерева. В узлах сетки будут предварительно рассчитанные массивы  $P(e_m, l_m)[i]$ , равные полной вероятности столкновения частицы на траектории с ядром типа  $i$ .

Вероятность столкновения в точке  $(e,l)$  будет аппроксимироваться логарифмически

$$\ln p(e,l) \approx \sum_{m=0}^4 a_m \ln p(e_m, l_m)$$

Далее определяется случайное время  $\tau = -\ln \xi / p_{a,total}(e,l)$  ( $\xi$  распределен равномерно)

Если  $\tau$  не превышает оставшееся время симуляции  $T$ , то мы разыгрываем столкновение и присваиваем  $T = T - \tau$

Потом разыгрывается элемент с вероятностью пропорциональной  $p(e,l)[i]$

После этого нужно определить место столкновения. Для этого есть еще одна сетка в координатах  $(r,v)$  для каждого элемента, где находится информация о вероятности столкновения за единицу времени на элементе  $i$ .

$$p[i](r,v) = \frac{dP}{d\tau}(r,v)$$

(величина в точке  $r,v$  интерполируется так же: логарифмически )

После этого строится распределение по параметру  $\theta$ , а именно

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{dP}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta}$$

и выбирается  $\theta$  с соответствующей вероятностью.

Теперь, когда есть  $\theta$ , а следовательно и  $(r,v)$ , идет столкновение с ядром  $i$  в этой точке.

Для столкновения мы разыгрываем скорость ядра, но делаем это с вероятностью

$$p \sim e^{-\frac{v^2}{2mT}}$$

Таким образом у нас еще остается фактор от меры  $p_m$ . Затем мы генерируем остальные параметры столкновения (углы  $\theta_{in}, \theta_{out}, \phi_{out}$ ) и вычисляем форм фактор от столкновения  $f(q)$ .

В итоге у нас появился неучтенный фактор

$$F = p_m \cdot f(q)$$

из-за этого фактора у нас неправильно сэмплируются столкновения, поэтому мы запоминаем для  $F$  мажоранту  $M_F(r,v)$  (на этапе расчета  $p(r,v)$ ) и принимаем столкновение с вероятностью  $F/M_F(r,v)$ , а в противном случае, разыгрываем столкновение в точке  $r,v$  заново, пока мы его не примем.

(для увеличения эффективности интервал скоростей  $v_1$  ядер разбивается на части и в каждой части мажоранта находится отдельно).

Когда мы создаем решетку у нас такие параметры:

1)  $L_0$  — начальный уровень (число бинов  $2^{L_0} \times 2^{L_0}$ ) 2)  $p_0$  — пороговая вероятность 3)  $\delta_0 = 2$  — разница вероятностей, считающаяся большой. 4)  $\delta_{acc}$  — разница вероятностей, считающаяся приемлемой. 5)  $N_{max}$  — максимальное число бинов

Алгоритм такой:

- сначала сетка имеет размер  $2^{L_0} \times 2^{L_0}$
- затем, пока  $N < N_{max}/2$  или уточнять не нужно мы уточняем бины, если относительная разница величин на его краях больше  $\delta_{acc}$
- затем пока  $N < N_{max}/2$  или уточнять не нужно мы уточняем бины, если относительная разница величин на его краях больше  $\delta_0$  (если все значения менее порога, то не уточняем)
- Если еще  $N < N_{max}/2$ , то уточняем по  $\delta_{acc}$

### 0.3.2 Самодействие

Итак, дискретное уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{dN_i}{dt} = C_i + S_{ij}N_j + A_{ijk}N_jN_k \quad (54)$$

Предлагается решать это методом среднего поля: при малом шаге во времени  $dt$  часть с  $A_{ijk}N_jN_k$  выглядит так:

$$A_{ijk}N_jN_k = [A_{ijk}N_k(t_0)]N_j(t) + O(dt)$$

т.е. мы рассеиваем наши частицы на неизменяющейся мишени  $[A_{ijk}N_k(t_0)]$

Для того, чтобы найти вероятность рассеяния  $p(r,v)$  мы наши замороженные частицы каждый раз должны строить гистограмму в плоскости  $r,v, \cos(\theta)$  где  $\cos(\theta) = v_r/v$

Далее мы можем найти вероятность столкновения:

$$\frac{dP}{dt} = \int d\cos(\theta) dv d\varphi n(r, v, \cos(\theta)) P(|\vec{v} - \vec{v}'|)$$

где

$$P(|\vec{v} - \vec{v}'|) = \sigma |\vec{v} - \vec{v}'| = \sigma_0 \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}_0^2} \sqrt{v^2 + v'^2 - 2v_r v'_r \eta - 2v_{tau} v'_{tau} \cos \varphi - \frac{4\delta}{M}}$$

мы считаем, что распределение равномерное по  $\varphi$  (есть изотропность)

Обратить внимание нужно вот на что: если мы возьмем 1 траекторию, то она создает концентрацию

$$n(r) = \frac{1}{3r^2} \frac{1}{v_r(\tau)}$$

— очень плохо ведущую себя функцию. Предполагается, что бинирование по  $r$  загладит все.