

АННОТАЦИЯ

Аннотация

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	8
1.1. Взаимодействие ТМ	8
1.2. Неупругая темная материя	10
1.3. Захват темной материи	13
1.4. Аннигиляционные потоки	15
2. МЕТОД РАСЧЕТ	17
2.1. Расчет числа захваченных частиц	17
2.2. Расчет распределения частиц	20
2.3. Интеграл столкновений	24
2.4. Аннигиляция	24
2.5. Уравнение эволюции	26
2.6. Численное решение уравнений эволюции	26
2.7. Модификация уравнения для двухкомпонентной темной ма- терии	29
3. РЕЗУЛЬТАТЫ	31
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	32
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	33

ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем современной космологии — это проблема темной материи. Темная материя — это часть нерелятивистской материи, находящейся во вселенной, которая не наблюдается напрямую, однако участвует в расширении вселенной, образовании структур.

Наблюдения за астрономическими объектами и исследование анизотропии реликтового излучения позволяет найти основные параметры космологических моделей, такие как доля материи (нерелятивистского вещества) и барионной материи. Для современных космологических моделей доля вещества в настоящий момент составляет $\Omega_M = 0.2 - 0.3$, при этом барионная материя составляет $0.03 - 0.05$ [1]. Большая часть вещества во вселенной остается не объясненной наблюдаемой материей.

На наличие темной материи также указывают наблюдения скоростей звезд внутри галактик. Исследование скоростей звезд внутри галактик позволяет найти распределение массы и плотность материи [2], [3]. Отношение измеренной таким образом массы и массы наблюдаемого светимого вещества оказывается значительно больше единицы. Аналогичные исследования позволяют найти локальную плотность темной материи в солнечной системе. Эта плотность равна $\rho_{DM} = 0.2 - 0.4, GeV \cdot cm^{-3}$ [4]. В данной работе мы будем использовать значение $\rho_{DM} = 0.4, GeV \cdot cm^{-3}$.

Возможны разные способы объяснить темную материю. Так, в качестве темной материи могут являться массивные астрономические компактные объекты (первичные черные дыры с массой порядка $10 - 100 M_\odot$). Такие объекты могут быть обнаружены с помощью измерения светимости и гравитационного линзирования, и сегодняшний день наблюдения дают ограничения на их долю в массе нерелятивистского вещества в районе $0.15 - 0.3$ [5], [6]. Также существуют различные модификации теории гравитации которые могут объяснить кривые вращения или вклад материи в метрики без включения в модель новых частиц [7].

Наиболее распространенные же модели ТМ предполагают наличие новых частиц вне стандартной модели (СМ), которые находятся в активном поиске. В качестве кандидатов рассматривают, например, майорановские стерильные нейтрино в keV ном диапазоне масс [8], наличие которых может указать регистрация двойного безнейтринный β -распада или спектральных

линии фотонов, соответствующие их распаду. Также, темной материей могут быть аксионы, призванные решить проблему сильных СР нарушений, которые могут осциллировать в фотоны в сильных э-м. полях [9]. Частицы ТМ появляются и в суперсимметричных расширениях СМ [10], так как из-за сохранения R-четности, легчайшая частица-суперпартнер становится стабильной и может быть основой для WIMПов, о которых будет идти речь далее.

WIMP, массивная слабовазаимодействующая частица, — это частица темной материи в широком диапазоне масс ($MeV - TeV$). Предполагается, что такие частицы находились в термальном равновесии с остальной материей на ранних этапах эволюции вселенной. Затем, при расширении вселенной, когда темп анигиляции становится меньше, чем темп расширения (постоянная Хаббла на соответствующий момент времени), эти частицы замораживаются будучи нерелятивистскими [11]. Температура фризаута определяется соотношением

$$x_f = \frac{m_\chi}{T_f} = \ln \left(\frac{0.038 g_\chi M_{pl} m_\chi \langle \sigma_{ann} v \rangle}{\sqrt{g_*} x_f} \right) \quad (1)$$

где g_χ и g_* — степени свободы ТМ и релятивистского вещества, M_{pl} — масса планка, $\sigma_{ann} v = \sigma_0$ — сечение аннигиляции. И доля темной материи, состоящий из этих частиц, равна

$$\Omega_\chi = \frac{1.9 \cdot 10^{-27} x_f cm^3}{\sqrt{g_*} \sigma_0} \frac{1}{s} \quad (2)$$

При разумных параметрах ($x_f \approx 20, g_* \approx 80$), для объяснения сегодняшней плотности темной материи механизмом фризаута необходимо, чтобы $\sigma_0 \approx 10^{26} cm^3 s^{-1}$, порядку величины близко к слабым взаимодействиям.

WIMПы, находящиеся в гало, могут быть обнаружены прямыми методами в низкофоновых экспериментах. Такой способ детектирования основан на детектировании отдачи при взаимодействии частиц ТМ, находящихся в гало, с ядром [12]. Наиболее известные эксперименты — DAMA/LIBRA, COSINE-100, XENON100, XENON1T, CDMS, использующие в качестве мишени NaI, Xe, Ge. На данный момент эти эксперименты на обнаружи-

ли значительного превышения сигнала над фоном, кроме DAMA/LIBRA, регистрирующий сигнал годовых модуляций, подтверждающий концепцию WIMPов [13], однако, эксперимент COSINE-100, имеющий ту же мишень (NaI) не подтвердил результаты [14].

Мы будем рассматривать косвенный метод обнаружения ТМ, основанный на детектировании аннигиляционных потоков частиц темной материи, захваченной небесными объектами. Частицы темной материи, взаимодействуя с веществом, сосредоточенном в астрономических объектах, передают им часть кинетической энергии. Это приводит к захвату в гравитационном потенциале небесного тела. В результате ТМ накапливается, что приводит к значительному усилению темпа аннигиляции. Таким образом создаются потоки нейтрино, которые возможно зарегистрировать в нейтринных обсерваториях IceCube [15], SuperKamiokande [16], ANTARES [17]. Для захвата частиц ТМ рассматривается Солнце [18], Землю [19], Юпитер [?] (для более легких WIMPов, так как температурное испарение ТМ на Юпитере значительно ниже). Отсутствие нейтринного сигнала дает ограничение ограничивает сечение взаимодействия с протоном $\sigma_{\chi p}$.

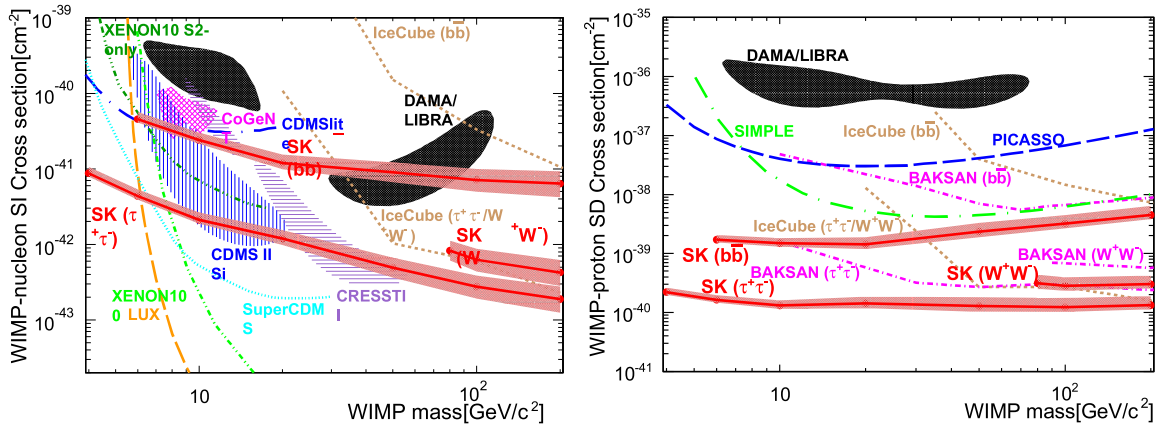


Рис. 1. Ограничения на сечение взаимодействия из разных экспериментов с протоном $\sigma_{\chi p}$. Слева — для спин независимых взаимодействий, справа для спин зависимых взаимодействий [16].

Поскольку на данный момент ни прямыми, ни косвенными методами не удалось обнаружить частицы темной материи, более сложные модели частиц. Рассматриваемый здесь класс моделей, довольно естественно возникающий во многих теориях, — это модель двухкомпонентной неупругой темой

материи. В таких моделях WIMP имеет основное χ и возбужденное состояние χ^* с массами m_χ и $m_\chi + \delta$. Изначально такая модификация WIMPов была предложена для объяснения расхождений между экспериментом DAMA/LIBRA и CDMS [20], поскольку от массы мишени зависит, будет ли преодолен энергетический порог δ . Хотя результаты DAMA/LIBRA не смогли воспроизвестись на COSINE-100, такие модели могут ослабить ограничения на сечения, и поэтому представляют интерес.

Важное отличие неупругой темой материи является нетривиальная термализация. Если в упругом случае частицы приходят в больцмановское равновесие, то неупругая ТМ не успевает прийти в термальное равновесие со звездой [21]. Поэтому термализация требует более детального анализа.

Целью данной работы является численное исследование

1. Захвата частиц темной материи (упругой/неупругой)
2. Термализация
3. Ограничения на потоки нейтрино
4. Равновесие с аннигиляцией
5. зависимость от начального распределения

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Взаимодействие ТМ

Для нахождения сечений взаимодействия с материей обычно используют эффективные лагранжианы [22], соответствующие векторному или скалярному переносчику взаимодействия. В нерелятивистском пределе, матричный элемент рассеяния соответствует квантовомеханическому потенциалу взаимодействия. В релятивистской нормировке для двух частиц массами m_1, m_2 он равен

$$\mathcal{M} = 4m_1m_2V(\vec{q}) \quad (1.1)$$

где $V(\vec{q})$ — фурье образ от нерелятивистского потенциала.

Наиболее простые члены взаимодействия скалярного ($g\bar{\chi}\chi\bar{\psi}\psi$) или векторного типа ($g\bar{\chi}\gamma^\mu\chi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$) дают константный спин независимый потенциал

$$V(\vec{q}) = g \rightarrow V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{g}{4\pi}\delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1.2)$$

где \vec{q} — переданный импульс. Приведем простейшие лагранжианы и потенциалы взаимодействия с нуклоном (обозначим спины нуклона и ТМ как \vec{S}_i и \vec{S}_χ)

	\mathcal{L}_{int}	$\hat{V}(\vec{q})$
1	$g\bar{\chi}\chi\bar{\psi}\psi$ и $g\bar{\chi}\gamma^\mu\chi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	g
2	$g\bar{\chi}\gamma^5\chi\bar{\psi}\psi$	$2ig\vec{S}_\chi\vec{q}$
3	$g\bar{\chi}\chi\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$2ig\vec{S}_i\vec{q}$
4	$g\bar{\chi}\gamma^5\chi\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$-4g\vec{S}_i\vec{q}\vec{S}_\chi\vec{q}$

Таблица 1.1. Примеры простейших потенциалов

Выбрав эффективный потенциал взаимодействия с протоном/нейтроном, можно найти эффективный потенциал взаимодействия с ядром $\hat{V}_N(q)$.

Волновые функции ядра и частицы ТМ равны

$$\begin{cases} |\Psi_N\rangle = e^{-i\vec{r}_N\vec{p}} |\psi_N\rangle \\ |\chi\rangle = e^{-i\vec{r}_\chi\vec{k}} |\chi\rangle \end{cases} \quad (1.3)$$

где \vec{r}_N — центр масс ядра, $|\psi_N\rangle$ — волновая функция нуклонов в ядре, $|\chi\rangle$ — спиновая волновая функция ТМ \vec{p} — импульс ядра, \vec{k} — импульс частицы ТМ. Оператор взаимодействия с нуклоном имеет тензорную структуру вида $\hat{V}_i(\vec{q}) = V(\vec{q})^{ab} \hat{F}_a^\chi(\vec{S}_\chi) \hat{F}_b^i(\vec{S}_i)$, где a и b пробегает либо нулевой индекс, либо векторный индекс. Потенциал взаимодействия с ядром равен сумме потенциалов взаимодействия с нуклонами $\hat{V}_N = \sum_i \hat{V}_i(\vec{r}_i + \vec{r}_N - \vec{r}_\chi)$, где \vec{r}_i — положение нуклона относительно центра масс, причем

$$\hat{V}_i(\vec{r}_i + \vec{r}_N - \vec{r}_\chi) = \int d^3\vec{q}' V(\vec{q}')^{ab} \hat{F}_a^\chi(\vec{S}_\chi) \hat{F}_b^i(\vec{S}_i) e^{i\vec{q}'(\vec{r}_i + \vec{r}_N - \vec{r}_\chi)} \quad (1.4)$$

Тогда матричный элемент (или эффективный потенциал) равен

$$\langle out | \hat{V}_N | in \rangle = V(\vec{q})^{ab} \langle \chi' | \hat{F}_a^\chi | \chi \rangle \langle \psi'_N | \sum_i e^{i\vec{r}_i\vec{q}} \hat{F}_b^i(\vec{S}_i) | \psi_N \rangle \quad (1.5)$$

Полный квадрат матричный элемент из 1.1 получается при усреднении по спинам и равен

$$|\mathcal{M}|^2 = 16m_N^2 m_\chi^2 V(\vec{q})^{ab} V^*(\vec{q})^{cd} W_{ac}^\chi W_{bd}^N \quad (1.6)$$

где

$$W_{ab} = \frac{1}{N_i} \sum_{i,f} \langle f | F_a | i \rangle \langle i | F_b^+ | f \rangle \quad (1.7)$$

В случае спин независимого (SI) или спин зависимого (SD) для частицы ТМ это равно

$$\begin{aligned} W_{00}^{\chi SI} &= 1 \\ W_{ij}^{\chi SD} &= \frac{S_\chi(S_\chi + 1)}{3} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для ядра такие факторы усложняются суммой осциллирующих экспонентой, однако в случае, когда рассеяние когерентно, эта сумма равна

количеству нуклонов A (если взаимодействие изоспин-инвариантно). Тогда суммирование по ядрам даст аналогичный ответ

$$W_{00}^{NSI} \approx A^2$$

$$W_{ij}^{NSD} \approx \frac{S_N(S_N + 1)}{3} \delta_{ij} \quad (1.9)$$

Видно, что для спин-независимого сечения квадрат матричного элемента растёт как A^4 , что значительно усиливает сечение на тяжёлых ядрах. А для спин-зависимого случая квадрат матричного элемента зависит от спина ядра, но для большинства ядер спин равен нулю, поэтому в спин-зависимых моделях рассеяние на тяжёлых ядрах подавлено.

Условие когерентности выполняется, если $qr_N \ll 1$. Радиус ядра оценивается в $r_N \approx A^{\frac{1}{3}} fm = 5A^{\frac{1}{3}} GeV^{-1}$. Для скоростей порядка $10^{-3}c$ переданный импульс будет порядка $10^{-3} Am_p$, тогда $qr_N \approx 5 \cdot 10^{-3} A^{4/3}$, что для $A = 56$ (Fe) порядка единицы. Это означает, что нелокальность ядра необходимо учитывать. Для этого мы будем использовать форм-фактор Гельма [23].

$$W_{00}^N(q) = \left(3J_1(qR) \cdot e^{-\frac{q^2 s^2}{2}} \right)^2 \quad (1.10)$$

где q — это переданный импульс, J_1 — сферическая функция Бесселя, $s = 0.9 fm$, $a = 0.52 fm$, $R = \sqrt{b^2 + 7\pi^2 \cdot a^2/3 - 5s^2}$ и $b = 1.23A^{1/3} - 0.6 fm$

$$J_1(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \quad (1.11)$$

1.2. Неупругая темная материя

Неупругая темная материя возникает естественным образом. Один из механизмов — добавление малой майорановской массы в лагранжиан дираковского фермиона [20]. Возьмем, например, векторное взаимодействие (или аксиальное).

$$\mathcal{L} = \bar{\chi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_D)\chi + \bar{\chi}\gamma^\mu(g_A + \gamma^5 g_V)\chi \bar{\psi}\gamma_\mu(g_{A'} + \gamma^5 g_{V'})\psi \quad (1.12)$$

где $\chi = (\eta, \varepsilon\xi^*)$ — дираковский фермион то после добавления майорановского массового слагаемого, например $m_R \xi^T \varepsilon \xi + h.c.$, после диагонализации

кинетического слагаемого для майорановских фермионов

$$\begin{cases} N_1^M = (\eta, \varepsilon \eta^*)^T \\ N_1^M = (\xi, \varepsilon \xi^*)^T \end{cases} \quad (1.13)$$

с матрицей масс

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

появляются два майорановских фермиона

$$\begin{cases} \chi^1 \approx \frac{\eta + \xi}{\sqrt{2}} - \frac{\delta}{2m_D} \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}} \\ \chi^2 \approx \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}i} + \frac{\delta}{2m_D} \frac{\eta + \xi}{\sqrt{2}i} \end{cases} \quad (1.15)$$

с массами

$$\begin{cases} m_1 \approx m_D + \delta \\ m_2 \approx m_D - \delta \end{cases} \quad (1.16)$$

При этом левая часть слагаемого со взаимодействием векторного типа станет равной

$$\begin{aligned} \bar{\chi} \gamma^\mu g_A \chi &= g_A (\eta^+ \bar{\sigma}^\mu \eta - \xi^+ \bar{\sigma}^\mu \xi) \approx \\ & i g_A (\chi^{1+} \bar{\sigma}^\mu \chi^2 - \chi^{2+} \bar{\sigma}^\mu \chi^1) + \frac{\delta}{2m_D} g_A (\chi^{2+} \bar{\sigma}^\mu \chi^2 - \chi^{1+} \bar{\sigma}^\mu \chi^1) \end{aligned} \quad (1.17)$$

В результате сечение упругого процесса подавлен по сравнению с неупругим на $\left(\frac{\delta}{2m_D}\right)^2$. С аксиальным взаимодействием (спин зависимым), однако, такого подавления не будет

$$\bar{\chi} \gamma^\mu g_V \gamma^5 \chi = g_V (\eta^+ \bar{\sigma}^\mu \eta + \xi^+ \bar{\sigma}^\mu \xi) \approx g_V (\chi^{1+} \bar{\sigma}^\mu \chi^1 + \chi^{2+} \bar{\sigma}^\mu \chi^2) \quad (1.18)$$

В случае, если аксиальное взаимодействие присутствует, играет фактор подавления из-за спина, так как большинство тяжелых ядер имеют нулевой спин, а спин независимое сечение на тяжелых ядрах растет как A^4 , поэтому упругое взаимодействие остается подавленным.

При таком взаимодействии сечение неупругого процесса с протоном

равно

$$\sigma_{\chi p} = \frac{g_A^2 m_\chi^2 m_p^2}{4\pi(m_p + m_\chi)^2} \cdot \sqrt{1 \pm \frac{2\delta}{\mu v^2}} =$$

$$6.1 \cdot 10^{-38} \text{cm}^2 \left(\frac{g_A}{10^{-5} \text{GeV}^{-2}} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{m_p}{m_\chi} \right)^{-2} \cdot \sqrt{1 \pm \frac{2\delta}{\mu v^2}} \quad (1.19)$$

где μ — приведенная масса, а v — относительная скорость.

Интересен также вопрос о скорости распада более тяжелых частиц. При разнице масс порядка 100keV в лидирующем порядке распад может быть только на нейтрино-антинейтрино. Рассмотрим аналогичное взаимодействие с ядрами, но для нейтрино,

$$L_{int} = g_1 \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \bar{\nu} \gamma_\mu \nu$$

$$|\mathcal{M}|^2 = 2g_1^2 m_\chi^2 \cdot E E' (1 + \cos \theta) \quad (1.20)$$

где E и E' — выходящие энергии нейтрино/антинейтрино. Тогда скорость распада будет следующей:

$$\Gamma = \frac{g_1^2 \delta^5}{60 \cdot (2\pi)^3} \cdot 3 \quad (1.21)$$

Соответствующее время жизни тяжелой частицы (в годах) составит

$$T_{\chi^*} = 1.1 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{g_1}{10^{-5} \text{GeV}^{-2}} \right)^{-2} \left(\frac{\delta}{10 \text{keV}} \right)^{-5} \quad (1.22)$$

При сечении взаимодействия с протоном порядка 10^{-42}cm^2 ожидаемое время жизни будет менее $2 \cdot 10^7$ лет (при $\delta > 10 \text{keV}$). Сравнивая это с возрастом Вселенной (10^{10} лет), можно сделать вывод о том, что тяжелая фракция почти вся распадется. При сечении $\sigma_{\chi p} < 10^{-45} \text{cm}^2$ ситуация может быть разной в зависимости от δ , поэтому мы будем рассматривать два предельных случая, когда тяжелых и легких частиц поровну и когда есть только легкие частицы.

1.3. Захват темной материи

Когда считается захват темной материи, предполагается, что частицы внутри гало имеют распределение больцмана со среднеквадратичной скоростью по направлению равной $\xi_0 = 0.52 \cdot 10^{-3}c$.

$$f_\infty(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2\xi_0^2}}}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.23)$$

При этом скорость солнечной системы внутри гало равна $u_0 = 0.73 \cdot 10^{-3}c$. Эта скорость будет влиять на распределение частиц, попавших в солнце. Общее количество захваченных, попавших в гравитационное поле объекта будет пропорционально следующей величине:

$$N_\odot = V_\odot n_\chi \quad (1.24)$$

где n_χ — концентрация темной материи, соответствующая плотности $\rho_\chi = 0.4 \text{ GeV}/\text{cm}^3 = n_\chi m_\chi$. Также, мы будем использовать величину T_s , характеризующую темп процессов соударения частиц темной материи и ядер. Эту величину мы определим следующим образом

$$T_s^{-1} = \sigma_0 n_p v_{esc} \quad (1.25)$$

где n_p — средняя плотность протонов в небесном теле, а

$$\sigma_0 = \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{16\pi(m_p + m_k)^2} \quad (1.26)$$

где \mathcal{M}_0 — матричный элемент столкновения протона и частицы ТМ при некоторых выбранных параметрах. В случае упругого спин-независимого столкновения σ_0 — это сечение взаимодействия частицы ТМ с протоном. Величина v_{esc} — это вторая космическая скорость для небесного тела.

Также введем безразмерный параметр, показывающий соотношение темпа аннигиляции и захвата.

$$a_\gamma = \frac{\sigma_{a0} v_{a0} n_\chi}{\sigma_0 v_{esc} n_p} \quad (1.27)$$

где $\sigma_{a0}v_{a0}$ — произведение сечения аннигиляции на скорость, которое должно быть порядка $10^{-26} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$

Приведем значения указанных выше параметров для $\sigma_0 = 10^{-42} \text{ cm}$ и $\sigma_{a0}v_{a0} = 3 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^3 \text{s}^{-1}$ (параметр T_\odot — время существования солнца)

Небесное тело	$n_p, \text{ cm}^{-3}$	$N_\odot m_\chi, \text{ GeV}$	v_{esc}, c
Солнце	$8.42 \cdot 10^{23}$	$5.64 \cdot 10^{32}$	$2.06 \cdot 10^{-3}$
Земля	$3.3 \cdot 10^{24}$	$4.33 \cdot 10^{26}$	$3.73 \cdot 10^{-5}$
Юпитер	$7.93 \cdot 10^{23}$	$4.57 \cdot 10^{29}$	$1.98 \cdot 10^{-4}$
Небесное тело	T_s, s	T_s/T_\odot	$a_\gamma m_\chi, \text{ GeV}$
Солнце	$1.92 \cdot 10^{10}$	$1.33 \cdot 10^{-7}$	$2.31 \cdot 10^{-16}$
Земля	$2.71 \cdot 10^{11}$	$1.87 \cdot 10^{-6}$	$3.26 \cdot 10^{-15}$
Юпитер	$2.12 \cdot 10^{11}$	$1.46 \cdot 10^{-6}$	$2.55 \cdot 10^{-15}$

Таблица 1.2. Значения некоторых параметров для небесных тел

Как видно, для захвата лучше всего подходит солнце, так как обладает наибольшей второй космической скоростью и имеет наибольший объем. Ведь для того, чтобы частица осталась в потенциале необходимо, чтобы ее скорость была меньше скорости v_{esc} (см. Рисунок 1.1). Также захват лучше происходит на тяжелых ядрах, которых больше всего на Земле, так как они забирают больший импульс.

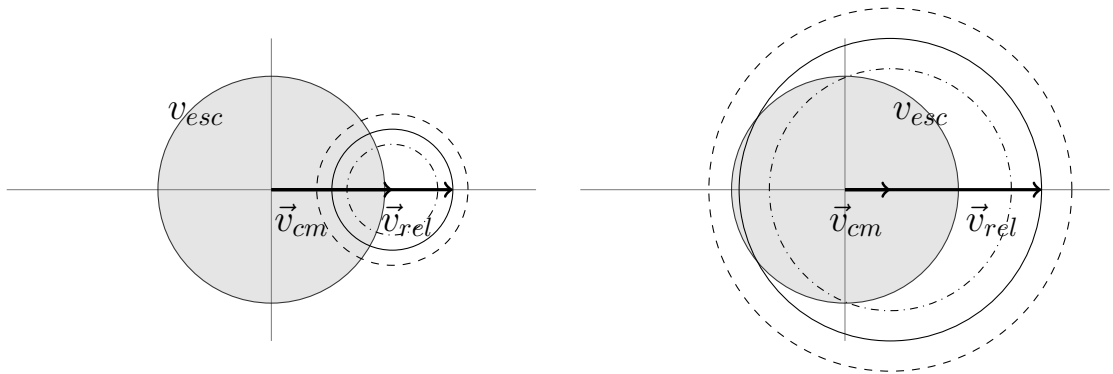


Рис. 1.1. Кинематика соударения, слева $m_N < m_\chi$, справа $m_N > m_\chi$

После захвата темная материя термализуется и аннигилирует. Тогда полное число частиц удовлетворяет уравнению

$$\frac{dN}{dt} = C - AN^2 \quad (1.28)$$

где C — захват, AN^2 — аннигиляция.

Решением этого уравнения является

$$N = \sqrt{\frac{C}{A}} \tanh \frac{t}{t_0} \quad (1.29)$$

где $t_0 = (AC)^{-\frac{1}{2}}$. И существует два случая поведения: когда преобладает захват и $N = Ct$, либо когда система находится в равновесии и $N = \sqrt{\frac{C}{A}}$, тогда скорость аннигиляции равна скорости захвата. Распределение по радиусу при этом считается термальным и имеет, согласно Н-теореме Больцмана, следующий вид

$$f(r)d^3\vec{r} = n_0 \exp\left(-\frac{m\phi(r)}{2T_0}\right)d^3\vec{r} \approx n_1 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)d^3\vec{r} \quad (1.30)$$

(потенциал приближается квадратичной формой)

Для того, чтобы определить концентрацию элементов, температуру и плотность используются следующие модели Солнца и Земли *****.

1.4. Аннигиляционные потоки

Зная количество частиц внутри небесного тела и темп аннигиляции, определяется спектр нейтрино. При этом аннигиляция идет по каналу f (это могут быть нейтрино $\nu\bar{\nu}$, кварки $b\bar{b}, t\bar{t}, \tau\bar{\tau}$ в случае s-канальной аннигиляции или бозоны W^+W^-, ZZ, hh в случае t-канальной). Нейтрино образуется в результате распада этих промежуточных состояний [24]

$$\frac{dN_\nu}{dE_\nu} = \frac{\Gamma_{ann}}{4\pi L^2} \sum_f p_f \frac{dN_\nu^f}{dE_\nu} \quad (1.31)$$

где L — расстояние до детектора, p_f — доля канала f в аннигиляции.

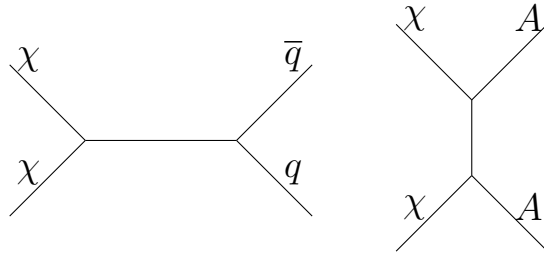


Рис. 1.2. Аннигиляция в кварки и бозоны

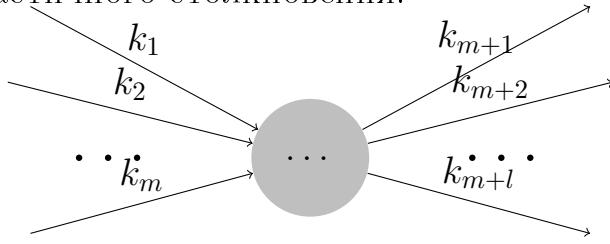
Эти потоки нейтрино достигают детектора и дают события регистрации нейтрино. Вероятность зарегистрировать нейтрино пропорциональна числу актов аннигиляции Γ_{ann} , происходящих внутри небесного тела. Поэтому отсутствие сигнала в конкретном детекторе приводит к ограничению темпа аннигиляции Γ_{ann} . Мы будем использовать ограничения из IceCube [15]

2. МЕТОД РАСЧЕТА

Для нахождения аннигиляционных потоков нужно решить уравнение Больцмана для эволюции частиц темной материи внутри солнца.

В уравнении Больцмана правая часть — интеграл столкновений, который описывает изменение распределений при определенных видах столкновений. В общем случае его величина выражается при помощи матричного элемента

N -частичного столкновения.



$$\frac{dN}{dt} = \frac{P}{T} = \int d^3\vec{r} \prod_{i \in in, out} \frac{d^3\vec{k}_i}{2E_i(2\pi)^3} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{out} - k_{in}) \prod_{i \in in} f_B(\vec{r}, \vec{k}_i) \quad (2.1)$$

где \mathcal{M} — матричный элемент процесса в релятивистской нормировке, $f_B(\vec{r}, \vec{k}_i)$ — функции распределения частиц по координате и импульсу.

Этот интеграл будет фигурировать в соотношениях захвата, матрицы соударений и аннигиляции.

2.1. Расчет числа захваченных частиц

Для нахождения числа захваченных частиц необходимо найти плотности частиц темной материи в каждой точке небесного тела. Предполагая изотропность сферического тела, можно найти решение стационарного уравнения Больцмана как функцию от первых интегралов движения — энергии и момента импульса (на единицу массы).

$$\frac{df(\vec{v}, \vec{r})}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} v - \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \nabla \phi(r) \quad (2.2)$$

$$f(\vec{v}, \vec{r}) = f(u^2, L) \quad (2.3)$$

где

$$L = rv \sin \theta_{nu} \quad (2.4)$$

$$u^2 = v^2 + \phi(r) \quad (2.5)$$

а θ_{nu} — угол между направлением скорости и радиус вектором \vec{r} от центра

Вдали от небесного тела функция распределения ТМ соответствует распределению ТМ в гало внутри галактики

$$f(r = \infty, \vec{u}) = n_\chi f_\infty(u) \quad (2.6)$$

Также, необходимо учесть движение самого небесного тела относительно гало. Поэтому функцию распределения $f_\infty(u)$ необходимо выразить исходя из плотности заданной в переменной $\vec{\xi} = \vec{u} - \vec{u}_0$. Предполагая изотропность распределения ТМ внутри гало, можно найти $f_\infty(u)$ путем усреднения $f_\infty(\vec{\xi})$ по направлению вектора скорости $\vec{\xi}$.

$$\xi^2 = (\vec{u} - \vec{u}_0)^2 = u^2 + u_0^2 - 2uu_0 \cos \theta \quad (2.7)$$

$$f_\infty(u) = \int_{-1}^1 f \left(\sqrt{u^2 + u_0^2 - 2u_0u \cos \theta} \right) d \cos \theta \quad (2.8)$$

При усреднении плотности ТМ по углам сферы пропадает зависимость от момента импульса. Тогда выраженное с помощью переменной u распределение частиц в гало 1.23 будет следующим:

$$f_\infty(u) = \frac{e^{-\frac{(u-u_0)}{2\xi_0^2}}}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1 - e^{-\frac{2uu_0}{\xi^2}}}{\frac{2uu_0}{\xi^2}} \quad (2.9)$$

Эта функция распределения будет находится в интеграле столкновений для скорости захвата. Для вычисления скорости захвата необходимо учесть столкновения с каждым сортом частиц (мы будем учитывать столкновения на ядрах элементов).

$$C_+ = \int d^3\vec{r} \cdot d^3\vec{v} f_k(r, v) \cdot n_i f_B(\vec{v}_1) d^3\vec{v}_1 \cdot \Gamma(\vec{v}, \vec{v}_1, r) \quad (2.10)$$

где Γ — это сечение соударения умноженное на скорость

$$\Gamma(\vec{v}, \vec{v}_1, r) = \int_{v' < v_{esc}} d^3\vec{v}' \delta(E_f - E_{in}) \cdot \frac{m_k^3 |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_i^2 m_k^2}$$

В интеграле $n_i f_B(\vec{v}_1)$ — это концентрация i -го элемента в теле и больцмановский термальный фактор. Для получения концентрации используется файл, где представлены массовые доли элементов в зависимости от радиуса $\tilde{\rho}_i(r)$ а также безразмерная (нормированная на единицу) плотность в зависимости от радиуса.

$$n_i(r) = n_p \hat{\rho}(r) \tilde{\rho}_i(r) \frac{m_p}{m_i}$$

Кинематику соударения будем считать в переменных \vec{V} — скорость центра масс и \vec{v} — скорость частицы ТМ относительно центра масс

$$\vec{V} = \frac{m_k \vec{v}_k + m_i \vec{v}_1}{m_k + m_i} \quad (2.11)$$

$$\vec{v} = \frac{m_i}{m_i + m_k} (\vec{v} - \vec{v}_1) \quad (2.12)$$

Тогда Γ равна следующему интегралу

$$\Gamma(\vec{v}, \vec{v}_1, r) = \frac{m_i}{m_k (m_i + m_k)} 4\pi \nu' d\vec{n}' \cdot \frac{m_k^3 |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_i^2 m_k^2} \quad (2.13)$$

причем интеграл по телесному углу $d\vec{n}'$ ведется только в той области, которая соответствует захвату, то есть $v' = |\vec{V} + \vec{v}'| < v_{esc}(r)$, где $v_{esc}(r)$ — скорость "выхода" из гравитационной ямы, порождаемой небесным телом, при удалении от центра на расстояние r .

Расчет этого интеграла проводится методом Монте-Карло. Для этого каждая величина в интеграле (скорости, радиус) вычисляется с помощью генератора псевдослучайных чисел, а в итоговый интеграл прибавляется произведение дифференциалов.

Так, радиус можно определить как $r = r_\odot (g())^\alpha$, где $g()$ — значение

генератора случайных чисел от 0 до 1, r_\odot — радиус небесного тела, а α — положительное число, определяющее, насколько близко к центру будут генерироваться события. Тогда $d^3r = 4\pi r^2 dr = V \cdot 3\alpha r_{nd}^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}} \cdot r_{nd}$ — безразмерный радиус.

Величина $f_B(\vec{v}_1) d^3\vec{v}_1$ в интеграле соответствует генерации термальной скорости ядра.

При интегрировании по функции распределения частиц ТМ $d^3\vec{v} f_k$ берется известное из 2.9 распределение, причем $v^2 = u^2 - \varphi(r)$. Тогда этот фактор в интеграле равен $n_\chi 2\pi v du^2 f_\infty(u)$, который можно просто получить с помощью двумерного распределения гаусса для величины u .

Для удобства происходит обезразмеривание интеграла путем выноса из него размерных констант. В итоге должно получиться

$$C_+ = V n_\chi \cdot \sigma_0 n_p v_{esc} \cdot c_+ \quad (2.14)$$

Безразмерное отношение $|\mathcal{M}|^2 / |\mathcal{M}_0|^2$ обозначим как $\Phi \cdot dF$, где Φ — отвечает за когерентное рассеяние и для спин-независимого взаимодействия равен A^4 , а dF — форм фактор, возникающий из-за размеров ядра.

$$c_+ = \sum_i \int [3r_{nd}^2 dr_{nd}] \cdot [d^3\vec{v} f_k(r, v)] \cdot \hat{\rho}(r) \tilde{\rho}_i(r) \cdot [f_B(\vec{v}_1) d^3\vec{v}_1] \cdot \frac{\nu'}{v_{esc}} d\vec{n}' \cdot \frac{m_p(m_p + m_k)^2}{m_i^2(m_i + m_k)} \cdot \Phi \cdot dF \quad (2.15)$$

2.2. Расчет распределения частиц

Вся информация о распределении частиц в фазовом объеме $d\Phi = d^3\vec{x} d^3\vec{v}$ требует знания распределения частиц в 6 измерениях. Для упрощения задачи используется предположение об однородности задачи. В таком случае число переменных может быть сведено до 3х: радиус r , скорость в направлении радиуса v_r и момент импульса $L = r v_\tau$. Фазовый объем в этих переменных будет $d\Phi = 8\pi^2 dr dv_r dL^2$. Решая в этих координатах уравнение движения можно сменить переменные на энергию E , момент импульса L и время τ (имеется ввиду не настоящее время, а временная координата точек на траектории с определенными энергией и моментом импульса). От последней переменной можно избавиться путем усреднения по траектории.

Тогда левая часть уравнения Больцмана станет частной производной функции распределения по времени, а правая — усреднением интеграла столкновения по траектории за период траектории. Итоговое уравнение должно принять вид:

$$\frac{\partial f(E, L)}{\partial t} = C(E, L) + St[f](E, L) \quad (2.16)$$

Такое допущение возможно, если при движении фазового объема вдоль траектории число частиц в нем не успевает существенно измениться. То есть вероятность столкновения частицы, которая по порядку величины составляет $\sigma_0 n_p R_\odot$ должна быть малой величиной. При интересующих нас сечениях ($\sigma_0 \approx 10^{-42} \text{cm}$) эта величина имеет порядок 10^{-9} , что говорит о верности предположения.

Движение в сферическом потенциале $\phi(r)$ в переменных r, v_r описывается гамильтонианом (энергией)

$$E = H = \frac{v_r^2}{2} + \left(\phi(r) + \frac{L^2}{2r^2} \right) = \frac{v_r^2}{2} + U_{eff}(L, r) \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial v_r} \\ \dot{v}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} \end{cases} \quad (2.18)$$

При этом фазовый объем такой системы $dr dv_r$ выражается через энергию-время (координатное время): $dr dv_r = d\tau dE$. Таким образом, фазовый объем в переменных энергия-импульс равен

$$d\Phi = 8\pi^2 dr dv_r dL^2 = 8\pi^2 T(E, L) dE dL^2 \quad (2.19)$$

где $T(E, L)$ — период траектории.

Для расчета используются змерные параметры: безразмерный радиус $x = r/r_\odot$, гравитационный потенциал $\varphi(x) = \phi(r)/\phi(r = r_\odot)$, который находится из файла с моделью тела, безразмерная скорость ν , нормированная на $v_{esc} = \sqrt{-2\phi(r_\odot)}$, энергия $e = E/\phi(r_\odot)$, момент имульса $l = x\nu_\perp$ и время $\tau = t \frac{v_{esc}}{r_\odot}$. Фазовый объем выражается через безразерные параметры следующим образом:

$$d\Phi = r_\odot^3 v_{esc}^3 \cdot 4\pi^2 d\tau de dl^2 \quad (2.20)$$

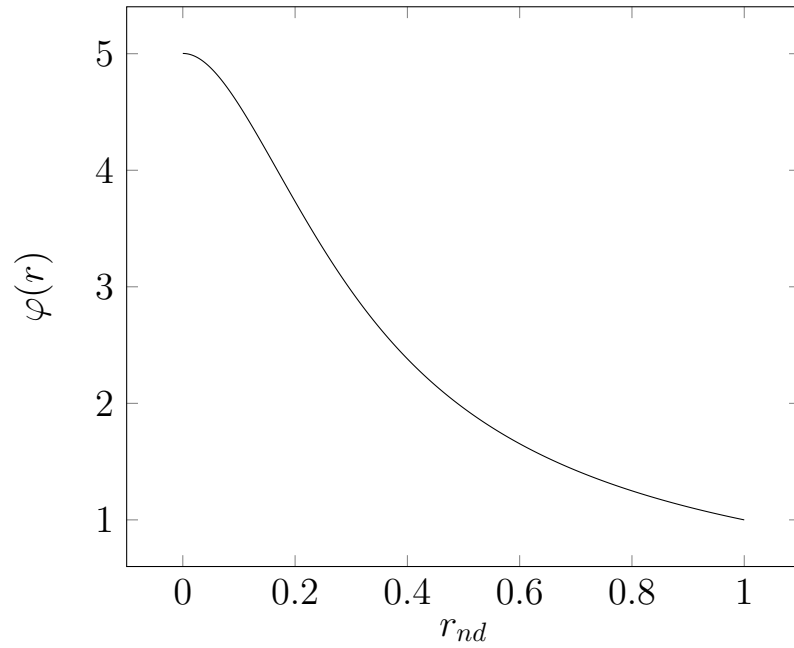


Рис. 2.1. Безразмерный потенциал для Солнца

Решать систему будем с помощью квадратуры, когда находятся x_{min}, x_{max} (находится ноль функции $\sqrt{\varphi(x) - e - \frac{l^2}{x^2}}$) а потом проводится численное интегрирование

$$\tau(e, l) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) - e - \frac{l^2}{x^2}}} \quad (2.21)$$

при этом потенциал на каждом отрезке интерполируется в виде $\varphi = a - bx^2$, тогда

$$d\tau \approx \int_x^{x+dx} \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2 - e - \frac{l^2}{x^2}}} = \frac{\arcsin \left(\frac{a - e - 2bx^2}{\sqrt{(a - e)^2 - 4bl^2}} \right)}{2\sqrt{b}} \Bigg|_x^{x+dx} \quad (2.22)$$

а снаружи небесного тела потенциал равен $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$ и время

$$\tau_{out}(e, l) = \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - e - \frac{l^2}{x^2}}} = \frac{\pi}{2(e)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{1 - e - l^2}}{(e)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\arctg \left(\frac{-1+2e}{2\sqrt{e}\sqrt{1-e-l^2}} \right)}{2(e)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.23)$$

При движении в гравитационном поле частица может принимать толь-

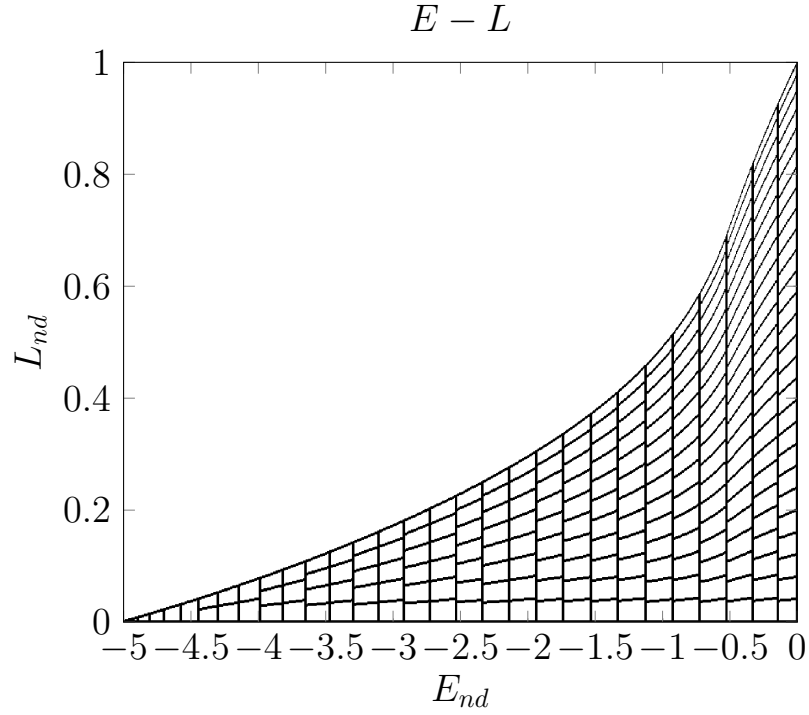


Рис. 2.2. Пример разбиения плоскости $E - L$

ко определенные значения момента импульса L , которые находятся в интервале от 0, когда траектория проходит через центр небесного тела, до $L_{max}(E)$, что соответствует круговой таектории.

Мы разобьем отрезок $[E_{min}, E_{max}]$ на N_e частей. Тогда, для каждого отрезка разбиения $[E_i, E_{i+1}]$, мы разобьем отрезок $[0, 1]$, который соответствует координате $L/L_{max}(E)$ на N_l частей. Причем N_l бдет зависеть от индекса i . Реальной разбиение по L будет получаться при умножении на $L_{max}(E)$

Выбор такого разбиения связан с удобством его реализации в функциональных языках программирования.

Для нахождения разбиения захваченных частиц по энергии и импульсу необходимо при интегрировании методом Монте-Карло (2.15) в каждом столкновении считать E и L , прибавляя в соответствующий бин гистограммы вес такого столкновения. В результате скорость захвата станет векторной величиной и вместо количества частиц N у нас будет вектор N_i являющийся количеством частиц в бине с номером i .

2.3. Интеграл столкновений

Для расчета матрицы столкновений в каждом бине выбирается энергия и момент E_i и L_i (в центре бина) и находится траектория движения частицы. Причем часть траектории проходит внутри тела, а другая часть — снаружи. Соответствующие времена будут T_{in} и T_{out} .

В интеграле столкновений для захвата 2.10 величина $d^3\vec{r} \cdot d^3\vec{v} f_k(r, v)$ соответствует количеству входящих частиц в элементе фазового объема. Поэтому, исходя из 2.19, этот фактор станет равным $N_j dt / T(E_i, L_i)$. Интегрирование по dt методом Монте-Карло нужно лишь равномерно сгенерировать время t на внутренней части траектории (тогда $dt = T_{in} d\tau$). в результате матрица столкновения будет иметь вид:

$$S_{ij} = \sigma_0 n_p v_{esc} \cdot s_{ij} \quad (2.24)$$

$$s_{kj} = \frac{T_{in}}{T_{in} + T_{out}} \sum_i \int d\tau \cdot \hat{\rho}(r) \tilde{\rho}_i(r) \cdot [f_B(\vec{v}_1) d^3\vec{v}_1] \cdot \frac{\nu'}{v_{esc}} d\vec{n}' \cdot \frac{m_p(m_p + m_k)^2}{m_i^2(m_i + m_k)} \cdot \Phi \cdot dF \quad (2.25)$$

При этом часть выходящих частиц при столкновениях испарится. За это будет отвечать член с испарением e_j

2.4. Аннигиляция

Аннигиляция определяется аналогичным интегралом столкновения, только вместо ядер мишенью являются сами частицы ТМ.

$$\int d^3\vec{r} d^3\vec{v} d^3\vec{v}_1 f(\vec{r}, \vec{v}) f_1(\vec{r}, \vec{v}_1) \sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1| \quad (2.26)$$

Для расчета матрицы аннигиляции так же производится обезразмеривание. для этого выносятся фактор $\frac{4\pi}{3} \sigma_{a0} v_{a0} / r_\odot^3$ и далее интеграл считается в безразмерных параметрах. Вместо величины $\sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1|$ будем использовать

$$\phi_{ann} = \frac{\sigma_{ann} |\vec{v} - \vec{v}_1|}{\sigma_{a0} v_{a0}} \quad (2.27)$$

Чтобы в этом интеграле найти фазовые плотности, необходимо разделить число частиц в бине гистограммы на объем этого бина 2.19

$$f(r) = \frac{N_i}{d\Phi} \quad (2.28)$$

Факторы $d^3\vec{v}$ и $d^3\vec{v}_1$ соответствуют интегрированию по скоростям. При этом этот объем выражается через переменные E и L .

$$d^3\vec{v} = \frac{2\pi v dv dL^2}{r\sqrt{r^2v^2 - L^2}} d\vec{n} = 2\pi dE d\sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}} d\vec{n} \quad (2.29)$$

Причем, поскольку радиальная скорость v_r и тангенциальная v_t фиксированны, для $d\vec{n}$ остается только выбор направления для тангенсальной скорости. Более того, нас интересует лишь модуль разности скоростей, который равен $\sqrt{v^2 + v_1^2 - 2 \cdot (v_t v_{t1} \cos(\phi - \phi_1) \pm v_r v_{r1})}$. Поэтому для определения разности скоростей нужно лишь сгенерировать случайный угол $\phi - \phi_1$ от 0 до π . Интегрирование по радиусу выполняется генерацией r от r_{min} до r_{max} , которые определяются из траекторий соответствующих E, L и E_1, L_1 . Однако, если интервалы $[r_{min}, r_{max}]$ для двух траекторий не пересекаются, то частицы не столкнутся и этот член будет равен нулю. В результате матрица аннигиляции будет иметь форму

$$A_{ij} = \frac{3}{4\pi} \frac{\sigma_{a0} v_{a0}}{r_{\odot}^3} a_{ij} \quad (2.30)$$

$$a_{ij} = \frac{4\pi}{3} \int [4\pi r^2 dr] \frac{d^3v d^3v_1}{d\Phi d\Phi_1} \phi_{ann} \quad (2.31)$$

Также, мы посчитаем аннигиляцию захваченной ТМ и налетающей из гало. Для этого в 2.26 вместо фактора $d^3vecv_1 f1(\vec{r}, \vec{v})$ происходит интегрирование по входным скоростям прилетающих частиц ТМ как это было при захвате. Член связанный с аннигиляцией на налетающих из гало частицах представляет из себя вектор, который обозначим как A_i^e

$$A_i^e = \sigma_{a0} v_{a0} n_{\chi} a_i^e \quad (2.32)$$

$$a_i^e = \int [4\pi r^2 dr] \frac{d^3 v}{d\Phi} [d^3 v_1 f_1] \phi_{ann} \quad (2.33)$$

2.5. Уравнение эволюции

Эволюция захваченных частиц имеет следующий вид:

$$\frac{dN_i}{dt} = C_i + S_{ij}N_j - E_iN_i - N_iA_{ij}N_j - A_i^eN_i \quad (2.34)$$

где C_i — захват, S_{ij} — матрица рассеяния, E_i — испарение, A_{ij} и A_i^e — аннигиляция.

В результате обезразмеривания (с учетом 2.14, 2.25, 2.33) уравнение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dt} = V_{\odot} n_{\chi} \cdot \sigma_0 n_p v_{esc} \cdot c_i + \sigma_0 n_p v_{esc} \cdot (s_{ij}N_j - e_iN_i) - \\ - \frac{3}{4\pi} \frac{\sigma_{a0} v_{a0}}{r_{\odot}^3} a_{ij} N_j N_i - \sigma_{a0} v_{a0} n_{\chi} \cdot a_i^e N_i \end{aligned}$$

Обозначим величину $\sigma_0 n_p v_{esc}$ как T_s^{-1} , которая по порядку величины соответствует вероятности соударения в единицу времени, а величину $V_{\odot} n_{\chi}$ как N_{\odot} , по порядку величины равная числу прилетающих частиц ТМ изгало в небесном теле. Таким образом, разделив на N_{\odot} и умножив на T_s , мы получим

$$T_s \frac{d}{dt} \frac{N_i}{N_{\odot}} = c_i + \left(s_{ij} \frac{N_j}{N_{\odot}} - e_i \frac{N_i}{N_{\odot}} \right) - a_{\gamma} a_{ij} \frac{N_i}{N_{\odot}} \frac{N_j}{N_{\odot}} - a_{\gamma}^e a_i^e N_i \quad (2.35)$$

а число a_{γ}^e равно a_{γ}

В программе мы будем использовать безразмерное время $\frac{t}{T_s} \rightarrow t$ и относительное количество частиц $\frac{N}{N_{\odot}} \rightarrow x$.

2.6. Численное решение уравнений эволюции

Уравнение 2.35 состоит из линейной части и нелинейной. Линейная часть отвечает за термализацию и захват и на начальных этапах эволюции

преобладает. Линейное уравнение в безразмерных координатах будет иметь следующий вид

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i + s_{ij}x_j \quad (2.36)$$

Точное решение этого уравнения записывается через матричную экспоненту

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(t_0) + \int_{t_0}^t \exp\{(s(t' - t_0))\}_{ij} c_j dt' \quad (2.37)$$

Физический смысл этого решения заключается в том, что в момент времени $t - t' + t_0$ захватывается $c_i dt'$ частиц в каждом бине, и эти частицы эволюционируют от времени захвата до текущего времени t , давая вклад в общее число частиц равный $\exp\{(s(t' - t_0))\}_{ij} c_j dt'$.

Мы будем приближать матричную экспоненту на некотором интервале τ , используя приближенные методы. В первом порядке по τ получится схема Эйлера. Матрица перехода в этом случае равна

$$R(\tau) = 1 + \tau s \quad (2.38)$$

Чтобы решение было корректно, матрица $R(\tau)$ не должна приводить к отрицательному числу частиц. Для этого τ должен быть таким, для которого $R(\tau)$ — неотрицательна. Поскольку матрица s имеет следующий вид

$$s = \begin{pmatrix} -s_{21} - \dots - s_{n1} - e_1 & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & -s_{12} - \dots - s_{n2} - e_2 & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & -s_{1n} - \dots - s_{n-1n} - e_n \end{pmatrix}$$

где все внедиагональные элементы s_i являются положительными вероятности перейти из одного состояния в другое, а на диагоналяе находятся отрицательные полные вероятности частицы сменить бин, неотрицательность $R(\tau)$ достигается при $\tau \leq \tau_{max}$, где

$$\tau_{max} = \frac{1}{\max_i s_{ii}} \quad (2.39)$$

Более того, при таком выборе τ матрица $R(\tau)$ будет переводить открытое множество возможных конфигураций $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | x_i > 0 \sum_i x_i < \epsilon\}$ в себя. Следовательно, собственные значения $R(\tau)$ по модулю меньше единицы для всех τ меньших τ_{max} и схема является устойчивой. То есть если λ — собственное значение s , то оно удовлетворяет уравнению

$$|1 + \tau_{max} \lambda| \leq 1 \quad (2.40)$$

Для того, чтобы увеличить шаг и не потерять устойчивость, необходимо использовать неявную схему. При этом для схемы порядка n погрешность в показателе экспоненты будет равной $\alpha(\tau\lambda)^{n+1} \frac{T}{\tau}$, где T — конечное время. Если эта погрешность не удовлетворяет требуемой точности δ , то соответствующее решение должно экспоненциально убывать с требуемым показателем экспоненты $-\text{Re}\{\lambda\}T > N_e$. Так как из 2.40 следует, что $-\text{Re}\{\lambda\} > \tau_{max}|\lambda|^2$, можно получить следующее ограничение на τ :

$$\tau \leq \tau_{max} \cdot \left(\frac{T}{\tau_{max}} \right)^{\frac{n-1}{2n}} \cdot \left(\frac{1}{N_e} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \cdot \left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.41)$$

Получив оператор эволюции $R(\tau)$ с требуемой точностью, мы будем итерационно умножать его на столбец \vec{y} , получая тем самым решение для термализации захваченной порции частиц ТМ.

$$\begin{cases} \vec{y}_{k+1} = R(\tau)\vec{y}_k \\ \vec{y}_0 = \vec{c} \end{cases} \quad (2.42)$$

Для получения решения \vec{x} , мы аппроксимируем интеграл 2.36 взятый в пределах $[t, t + \tau]$ матрицей $I(\tau)$, тогда

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + I(\tau)\vec{y}_k \quad (2.43)$$

Для второго порядка интегрирования можно взять

$$I(\tau) = \frac{1 + R(\tau)}{2} \quad (2.44)$$

Тогда если число шагов равно m а размер пространства равен N , то сложность вычисления будет $O(mN^2)$. Можно потенциально ускорить расчет, если пропускать 2^p шагов, используя возможность возвести матрицу в степень за логарифмическое время. Новый шаг τ_p тогда будет равен $2^p\tau$, а оператор эволюции

$$R_p(\tau_p) = R(\tau)^{2^p} \quad (2.45)$$

Матрица, аппроксимирующая интеграл $I_p(\tau_p)$ тоже вычисляется за логарифмическое время при помощи рекуррентного соотношения

$$I_p(\tau_p) = I_{p-1}(\tau_{p-1}) \cdot (1 + R_{p-1}(\tau_{p-1})) \quad (2.46)$$

В итоге, сложность будет $O(pN^3 + \frac{m}{2^p}N^2)$, что быстрее простого итеративного метода в случае, когда число итераций превышает размер системы.

Для учета аннигиляции мы будем использовать схему первого порядка по τ , умножив матрицу эволюции $R(\tau)$, соответствующую линейному уравнению, на матрицу эволюции квадратичного слагаемого:

$$R_1(\tau) = R(\tau) \cdot R_a(\tau) \quad (2.47)$$

где

$$R_a(\tau)_{ii} = e^{-\tau \sum_k a_{ki} x_k} \quad (2.48)$$

2.7. Модификация уравнения для двухкомпонентной темной материи

Для двухкомпонентная ТМ, состоящей из более легкой фракции (обозначим за L) и более тяжелой (H), рассматривается еще и распределение по этим состояниям. Индексы, соответствующие легким частицам будут иметь букву l , а тяжелые — букву h . Уравнение для величины x будет

следующим

$$\begin{cases} \frac{dx_l}{dt} = \nu^L c_l + s_{lh}x_h - \sum_h s_{hl}x_l - e_l x_l - a_\gamma^L x_l - a_\gamma^{LL} a_{ll'} x_l x_{l'} - a_\gamma^{HL} a_{h'l} x_l x_{h'} \\ \frac{dx_h}{dt} = \nu^H c_h + s_{hl}x_l - \sum_l s_{lh}x_h - e_h x_h - a_\gamma^H x_h - a_\gamma^{HH} a_{hh'} x_h x_{h'} - a_\gamma^{HL} a_{hl'} x_{l'} x_h \end{cases} \quad (2.49)$$

Коэффициенты ν^L и ν^H , стоящие перед вектором захваченных частиц, являются долями частиц в гало, которые дают вклад в соответствующий захват. То есть ν^L — это доля тяжелых частиц в гало, а ν^H — легких.

Коэффициенты аннигиляции являются входными параметрами и зависят от сечения аннигиляции легких с легкими, легких с тяжелыми и тяжелых с тяжелыми. При этом, для двухчастичной аннигиляции параметры a_γ^L и a_γ^H должны быть равны:

$$\begin{cases} a_\gamma^L = \nu^L a_\gamma^{HL} + \nu^H a_\gamma^{LL} \\ a_\gamma^H = \nu^H a_\gamma^{HL} + \nu^L a_\gamma^{HH} \end{cases} \quad (2.50)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

...

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Cao S., Ratra B. $H_0 = 69.8 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\Omega_{m0} = 0.288 \pm 0.017$, and other constraints from lower-redshift, non-cmb, ex sion-rate data // Physical Review D. 2023 may. Vol. 107. No. 10. : <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.103521>.
2. Brandt J. C. A spectroscopic study of the motions in messier 33* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1965 04. Vol. 129. No. 4. P. 309–319. <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/129/4/309/8072995/mnras129-0309.pdf>.
3. Rubin V., Ford W.K. J., Thonnard N. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV. Systematic dynamical properties, Sa \rightarrow Sc // apjl. 1978. Vol. 225. P. L107–L111.
4. Palau C. G., Miralda-Escude J. The oblateness of the milky way dark matter halo from the stellar streams of ngc 3201, m68, and palomar 5. 2022. 2212.03587.
5. Zumalacárregui M., Seljak U. Limits on stellar-mass compact objects as dark matter from gravitational lensing of type ia supernovae // Physical Review Letters. 2018 oct. Vol. 121. No. 14. : <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.141101>.
6. New limits from microlensing on galactic black holes in the mass range $10M_{\odot} < M < 1000M_{\odot}$ / T. Blaineau, M. Moniez, C. Afonso et al. // Astronomy & Astrophysics. 2022 aug. Vol. 664. P. A106. : <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202243430>.
7. Bekenstein J., Milgrom M. Does the missing mass problem signal the breakdown of newtonian gravity? // apj. 1984. Vol. 286. P. 7–14.
8. Sterile neutrino dark matter / A. Boyarsky, M. Drewes, T. Lasserre et al. // Progress in Particle and Nuclear Physics. 2019 jan. Vol. 104. P. 1–45. : <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2018.07.004>.
9. Adams C. B., Aggarwal N., Agrawal A. et al. Axion dark matter. 2023. 2203.14923.
10. Berezhinsky V. Dark matter particles. 1996. astro-ph/9610263.
11. Kolb E. W., Turner M. S. The Early Universe. 1990. Vol. 69. P. 119–129. ISBN: 978-0-201-62674-2.
12. Schumann M. Direct detection of wimp dark matter: concepts and

- status // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. 2019 aug. Vol. 46. No. 10. P. 103003. : <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6471/ab2ea5>.
13. First model independent results from DAMA/LIBRA-phase2 / R. Bernabei, , P. Belli et al. // Nuclear Physics and Atomic Energy. 2018 dec. Vol. 19. No. 4. P. 307–325. : <https://doi.org/10.15407/jnpae2018.04.307>.
 14. Three-year annual modulation search with COSINE-100 / G. Adhikari, E. Barbosa de Souza, N. Carlin et al. // Physical Review D. 2022 sep. Vol. 106. No. 5. : <https://doi.org/10.1103/physrevd.106.052005>.
 15. Aartsen M. G., et al. M. A. Search for annihilating dark matter in the sun with 3 years of IceCube data // The European Physical Journal C. 2017 mar. Vol. 77. No. 3. : <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4689-9>.
 16. Collaboration K., Choi K., Abe K. et al. Search for neutrinos from annihilation of captured low-mass dark matter particles in the sun by super-kamiokande. 2015. 1503.04858.
 17. Limits on dark matter annihilation in the sun using the antares neutrino telescope / S. Adrián-Martínez, A. Albert, M. André et al. // Physics Letters B. 2016. Vol. 759. P. 69–74. : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316301666>.
 18. Press W. H., Spergel D. N. Capture by the sun of a galactic population of weakly interacting, massive particles // apj. 1985. Vol. 296. P. 679–684.
 19. Gould A. Resonant Enhancements in Weakly Interacting Massive Particle Capture by the Earth // apj. 1987. Vol. 321. P. 571.
 20. Smith D., Weiner N. Inelastic dark matter // Phys. Rev. D. 2001 Jul. Vol. 64. P. 043502. : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.043502>.
 21. Blennow M., Clementz S., Herrero-Garcia J. The distribution of inelastic dark matter in the sun // The European Physical Journal C. 2018 may. Vol. 78. No. 5. : <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5863-4>.
 22. The effective field theory of dark matter direct detection / A. Liam Fitzpatrick, Wick Haxton, Emanuel Katz et al. // Journal of Cosmology and

- Astroparticle Physics. 2013 feb. Vol. 2013. No. 02. P. 004–004. : <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/02/004>.
23. ū da G. D., Kemper A., Gondolo P. Model-independent form factors for spin-independent neutralino–nucleon scattering from elastic electron scattering data // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2007 apr. Vol. 2007. No. 04. P. 012–012. : <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2007/04/012>.
24. Erratum to: “spectra of neutrinos from dark matter annihilations” [nucl. phys. b 727 (2005) 99–138] / Marco Cirelli, Nicolao Fornengo, Teresa Montaruli et al. // Nuclear Physics B. 2008. Vol. 790. No. 1. P. 338–344. : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321307007596>.