АННОТАЦИЯ

Аннотация

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Введение

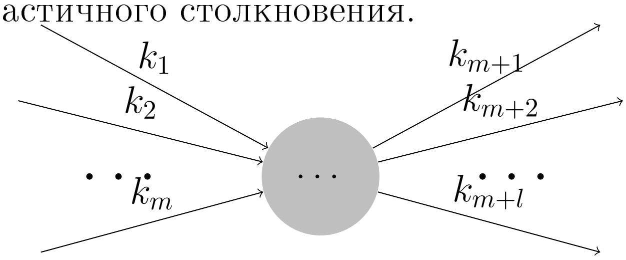
1. ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ И МЕТОДЫ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ

2. МЕТОД РАСЧЕТА

Для нахождения аннигиляционных потоков нужно решить уравнение больцмана для эволюции частиц темной материи внутри солнца.

В уравнении больцмана правая чать — интеграл столкновений, который описывает изменение распределений при определенных видах столкновений. В общем случае его величина выражается при помощи матричного элемента

N-частичного столкновения.



$$\frac{dN}{dt} = \frac{P}{T} = \int d^3\vec{r} \prod_{i \in in,out} \frac{d^3\vec{k}_i}{2E_i(2\pi)^3} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{out} - k_{in}) \prod_{i \in in} f_B(\vec{r}, \vec{k}_i) \quad (2.1)$$

где $\mathcal{M}$ — матричный элемент процесса в релятивисткой нормировке, $f_B(\vec{r}, \vec{k}_i)$ — функции распределения частиц по координате и импульсу.

Этот интеграл будет фигурировать в соотношениях захвата, матрицы соударений и аннигиляции.

2.1. Расчет числа захваченных частиц

Для нахождения числа захваченных частиц необходимо найти плотности частиц темной материи в каждой точке небесного тела. Предполагая изотропность сферического тела, можно найти решение стационарного уравнения Больцмана как функцию от первых интегралов движения — энергии и момента импульса (на единицу массы).

$$\frac{df(\vec{v}, \vec{r})}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} v - \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \nabla \phi(r) \quad (2.2)$$

$$f(\vec{v}, \vec{r}) = f(u^2, L) \quad (2.3)$$

где $L = rvsin\theta_{nu}, u^2 = v^2 + phi(r)$.

Вдали от небесного тела функция распределения ТМ соответствует распределению ТМ в гало внутри галактики

$$f(r = \infty, \vec{u}) = n_\chi f_\infty(u) \tag{2.4}$$

где n_χ — концентрация темной материи, соответствующая плотности $0.3GeV/cm$.

Также, необходимо учесть движение самого небесного тела относительно гало. Так, для солнца скорость этого движения состовляет $u_0 = 230\frac{km}{s} = 0.77 \cdot 10^{-3}c$. Поэтому функцию распределения $f_\infty(u)$ необходимо выразить исходя из плотности заданной в переменной $\vec{\xi} = \vec{u} - \vec{u}_0$. Предполагая изотропность распределения ТМ внутри гало, можно найти $f_\infty(u)$ путем усреднения $f_\infty(\vec{\xi})$ по направлению вектора скорости $\vec{\xi}$.

$$\xi^2 = (\vec{u} - \vec{u_0})^2 = u^2 + u_0^2 - 2uu_0 \cos\theta \tag{2.5}$$

$$f_\infty(u) = \int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{u^2 + u_0^2 - 2u_0 u \cos\theta}\right) d\cos\theta \tag{2.6}$$

При усреднени плотности ТМ по углам сферы пропадает зависимость от момента импульса.

В расчетах для распределения ТМ в гало будем использовать распределение Максвелла с параметром дисперсии $\xi_0 = 210km/s$.

$$f_\infty(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2\xi_0^2}}}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.7}$$

Тогда в переменной u распределение будет следующим:

$$f_\infty(u) = \frac{e^{-\frac{(u-u_0)}{2\xi_0^2}}}{(2\pi\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1 - e^{-\frac{2uu_0}{\xi^2}}}{\frac{2uu_0}{\xi^2}} \tag{2.8}$$

Эта функция распределения будет находится в интеграле столкновений для скорости захвата. Для вычисления скороти захвата необходимо учесть столкновения с каждым сортом частиц (мы будем учитывать столкновения на ядрах элементов).

$$C_+ = \int d^3\vec{r} \cdot d^3\vec{v} f_k\left(r, v\right) \cdot n_i f_B\left(\vec{v}_1\right) d^3\vec{v}_1 \cdot \Gamma\left(\vec{v}, \vec{v}_1, r\right) \tag{2.9}$$

где Γ — это сечение соударения умноженное на скорость

$$\Gamma\left(\vec{v}, \vec{v}_1, r\right) = \int\limits_{v' < v_{esc}} d^3\vec{v}\,'\delta\left(E_f - E_{in}\right) \cdot \frac{m_k^3 \left|\mathcal{M}\right|^2}{64\pi^2 m_i^2 m_k^2}$$

В интеграле $n_i f_B(\vec{v}_1)$ — это концентрация i-го элемента в теле и больцмановский термальный фактор. Для получения концентрации используется файл, где представленны массовые доли элементов в зависимости от рамдиуса $\widetilde{\rho}_i(r)$ а также безразмерная (нормированная на единицу) плотность в зависимости от радиуса.

$$n_i(r) = n_p \widehat{\rho}(r) \widetilde{\rho}_i(r) \frac{m_p}{m_i}$$

Кинематику соударения будем считать в переменных $\vec{V}$ — скорость центра масс и $\vec{\nu}$ — скорость частицы ТМ относительно центра масс

$$\vec{V} = \frac{m_k \vec{v}_k + m_i \vec{v}_1}{m_k + m_i} \tag{2.10}$$

$$\vec{\nu} = \frac{m_i}{m_i + m_k}\left(\vec{v} - \vec{v}_1\right) \tag{2.11}$$

Тогда Γ равна следующему интегралу

$$\Gamma\left(\vec{v}, \vec{v}_1, r\right) = \frac{m_i}{m_k\left(m_i + m_k\right)} 4\pi\nu' d\vec{n}\,' \cdot \frac{m_k^3 \left|\mathcal{M}\right|^2}{64\pi^2 m_i^2 m_k^2} \tag{2.12}$$

причем интеграл по телесному углу $d\vec{n}\,'$ ведется только в той области, которая соответствует захвату, то есть $v' = |\vec{V} + \vec{\nu}\,'| < v_{esc}(r)$, где $v_{esc}(r)$ — скорость "выхода" из гравитационной ямы, порождаемой небесным телом, при удалении от центра на расстояние r.

Расчет этого интеграла проводится методом Монте-Карло. Для этого каждая величина в интеграле (скорости, радиус) вычисляется с помощью генератора псевдослучайных чисел, а в итоговый интеграл прибавляется произведение дифференциалов.

Так, радус можно определить как $r = r_{\odot}(g())^{\alpha}$, где $g()$ — значение генератора случайных чисел от 0 до 1, $r_{\odot}$ — радиус небесного тела, а α — положительное число, определяющее, насколько близко к центру будут генерироваться события. Тогда $d^3r = 4\pi r^2 dr = V \cdot 3\alpha r_{nd}^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}$. r_{nd} — безразмерный радиус.

Величина $f_B(\vec{v}_1)\, d^3\vec{v}_1$ в интеграле соответствует генерации термальной скорости ядра.

При интегрировании по функции распределения частиц ТМ $d^3\vec{v} f_k$ берется известное из 2.8 распределение, причем $v^2 = u^2 - \varphi(r)$. Тогда этот фактор в интеграле равен $n_\chi 2\pi v du^2 f_\infty(u)$, который можно просто получить с помощью двумерного распределения гаусса для величины u.

Для удобства происходит обезразмеривание интеграла путем выноса из него размерных констант. В итоге должно получится

$$C_+ = V n_\chi \cdot \sigma_0 n_p v_{esc} \cdot c_+ \tag{2.13}$$

где V — объем небесного тела, n_χ — концентрация частиц ТМ в гало, n_p — средняя концентрация проонов в небесном теле (равна массе тела деленной на объем и массу протона), v_{esc} — скорость выхода на поверхности небесного тела. В качестве σ_0 мы возмем следующую величину:

$$\sigma_0 = \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{16\pi(m_p + m_k)^2} \tag{2.14}$$

где $\mathcal{M}_0$ — матричный элемент столкновения протона и частицы ТМ при некоторых выбранных пкраметрах. В случае упругого спин-независимого столкнновения σ_0 — это сечение.

Безразмерное отношение $|\mathcal{M}|^2 / |\mathcal{M}_0|^2$ обозначим как Φ. Если размером ядра можно пренебречь, то в спин-независимом процессе $\Phi = A^4$, где A — число нуклонов в ядре. Однако при больших переданных импульсах мишень перестает быть точечным объектом, поэтому и необходимо использовать форм-фактор. Обозначим его как dF. В итоге безразмерная скорость захвата равняется

$$c_+ = \sum_i \int [3r_{nd}^2 dr_{nd}] \cdot [d^3\vec{v} f_k(r,v)] \cdot \widehat{\rho}(r) \widetilde{\rho}_i(r) \cdot [f_B(\vec{v}_1) d^3\vec{v}_1] \cdot \\ \cdot \frac{\nu'}{v_{esc}} d\vec{n}\,' \cdot \frac{m_p(m_p+m_k)^2}{m_i^2(m_i+m_k)} \cdot \Phi \cdot dF \tag{2.15}$$

Для ядер мы брали форм-фактор следующего вида ??

$$dF(q) = \left(3J_1(qR) \cdot e^{-\frac{q^2 s^2}{2}}\right)^2 \tag{2.16}$$

где q — это переданный импульс, J_1 — функция Бесселя, $s = 0.9fm$, $a = 0.52fm$, $R = \sqrt{b^2 + 7\pi^2 \cdot a^2/3 - 5s^2}$ и $b = 1.23A^{1/3} - 0.6fm$

2.2. Расчет распределения частиц

Вся информация о распределении частиц в фазовом объеме $d\Phi = d^3\vec{x}d^3\vec{v}$ требует знания распределения частиц в 6 измерениях. Для упрощения задачи используется предположение об однородности задачи. В таком случае число переменных может быть сведено до 3х: радиус r, скорость в направлении радиуса v_r и момент ипмульса $L = rv_\tau$. Фазовый объем в тих переменных будет $d\Phi = 8\pi^2 dr dv_r dL^2$. Решая в этих координатах уравнение движения можно сменить переменные на энергию E, момент импульса L и время τ(имеется ввиду не настоящее время, а временная координата точек на траектории с определенными энергией и моментом импульса). От последней переменной можно избавиться путем усреднения по траэктории. Тогда левая часть уравнения Больцмана станет частной производной функции распределения по времени, а правая — усреднением интеграла столновения по траектории за период траектории. Итоговое уравнение должно принять вид:

$$\frac{\partial f(E,L)}{\partial t} = C\,(E,L) + St[f](E,L) \tag{2.17}$$

Такое допущение возможно, если при движении фазового объема вдоль траектории число частиц в нем не успевает существенно измениться. То есть вероятность столкновения частицы, которая по порядку величины составляет $\sigma_0 n_p R_\odot$ должна быть малой величиной. При интересующих нас сечениях ($\sigma_0 \approx 10^{-42} cm$) эта величина имеет порядок 10^{-9}, что говорит о верности предположения.

Движение в сферическом потенциале $\phi(r)$ в переменных r, v_r описывается гамильтонианом (энергией)

$$E = H = \frac{v_r^2}{2} + \left(\phi(r) + \frac{L^2}{2r^2}\right) = \frac{v_r^2}{2} + U_{eff}(L, r) \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial v_r} \\ \dot{v}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} \end{cases} \tag{2.19}$$

При этом фазовый объем такой системы $drdv_r$ выражается через энергию-время (координатное время): $drdv_r = d\tau dE$. Таким образом, фазовый объем в переменных энергия-импульс равен

$$d\Phi = 8\pi^2 drdv_r dL^2 = 8\pi^2 T(E, L) dEdL^2 \tag{2.20}$$

где $T(E, L)$ — период траектории.

Для расчета используется безразмерные параметры: безразмерный радиус $x = r/r_\odot$, гравитационный потенциал $\varphi(x) = \phi(r)/\phi(r = r_\odot)$, который находится из файла с моделью тела, безразмерная скорость ν, нормированная на $v_{esc} = \sqrt{-2\phi(r_\odot)}$, энергия $e = E/\phi(r_\odot)$, момент имульса $l = x\nu_\perp$ и время $\tau = t\frac{v_{esc}}{r_\odot}$. Фазовый объем выражается через безразерные параметры следующим образом:

$$d\Phi = r_\odot^3 v_{esc}^3 \cdot 4\pi^2 d\tau dedl^2 \tag{2.21}$$

Решать систему будем с помощью квадратуры, когда находятся x_{min},x_{max} (находится ноль функции $\sqrt{\varphi(x) - e - \frac{l^2}{x^2}}$) а потом проводится численное интегрирование

$$\tau\left(e, l\right) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) - e - \frac{l^2}{x^2}}} \tag{2.22}$$

при этом потенциал на каждом отрезке интерполируется в виде $\varphi = a - bx^2$, тогда

$$d\tau \approx \int_x^{x+dx} \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2 - e - \frac{l^2}{x^2}}} = \left. \frac{\arcsin\left(\frac{a-e-2bx^2}{\sqrt{(a-e)^2-4bl^2}}\right)}{2\sqrt{b}} \right|_x^{x+dx} \tag{2.23}$$

а снаружи небесного тела потенциал равен $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$ и время

$$\tau_{out}(e,l) = \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - e - \frac{l^2}{x^2}}} = \frac{\pi}{2(e)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{1-e-l^2}}{(e)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{-1+2e}{2\sqrt{e}\sqrt{1-e-l^2}}\right)}{2(e)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.24}$$

Тут должен быть график с траекторией

При движении в гравитационном поле частица может принимать только определенные значения момента импульса L, которые находятся в интервале от 0, когда траектория проходит через центр небесного тела, до $L_{max}(E)$, что соответствует круговой таектории.

Тут должен быть график с функцией L(E)

Мы разобъем отрезок $[E_{min}, E_{max}]$ на N_e частей. Тогда, для каждого отрезка разбиения $[E_i, E_{i+1}]$, мы разобъем отрезок $[0, 1]$, который соответствует координате $L/L_{max}(E)$ на N_l частей. Причем N_l бдет зависеть от индекса i. Реальной разбиение по L будет получатьса при умножении на $L_{max}(E)$

Тут должнв быть картинка с сеткой

Выбор такого разбиения связан с удобством его реализации в функциональных языках программирования.

Для нахождения разбиения захваченных частиц по энергии и импульсу необходимо при интегрировании методом Монте-Карло (2.15) в каждом столкновении считать E и L, прибавляя в соответствующий бин гистограммы вес такого столкновения. В результате скорость захвата станет векторной величиной и вместо количества частиц N у нас будет вектор N_i являющийся количеством частиц в бине с номером i.

2.3. Интеграл столкновений

Для расчета матрицы столкновений в каждом бине выбирается энергия и момент E_i и L_i (в центре бина) и находится траектория движения частицы. Причем часть траектории проходит внутри тела, а другая часть — снаружи. Соответствующие времена будут T_{in} и T_{out}.

В интеграле стокновений для захвата 2.9 величина $d^3\vec{r} \cdot d^3\vec{v} f_k(r,v)$ соответствует количеству входящих частиц в элементе фазового объема. Поэтому, исходя из 2.20, этот фактор станет равным $N_j dt/T(E_i, L_i)$. Интегрирование по dt методом Монте-Карло нужно лишь равномерно сгенерировать время t на внутренней части траектории (тогда $dt = T_{in} d\tau$). в результате матрица столкновения будет иметь вид:

$$S_{ij} = \sigma_0 n_p v_{esc} \cdot s_{ij} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} s_{kj} = \frac{T_{in}}{T_{in}+T_{out}} \sum_i \int d\tau \cdot \widehat{\rho}(r) \widetilde{\rho}_i(r) \cdot [f_B(\vec{v}_1) d^3\vec{v}_1] \cdot \frac{\nu'}{v_{esc}} d\vec{n}\,' \cdot \\ \cdot \frac{m_p(m_p+m_k)^2}{m_i^2(m_i+m_k)} \cdot \Phi \cdot dF \end{aligned} \tag{2.26}$$

При этом часть выходящих частиц при столкновениях испарится. За это будет отвечать член с испарением e_j

2.4. Аннигиляция

Аннигиляция определяется аналогичным интегралом столкновения, только вместо ядер мишенью являются сами частицы ТМ.

$$\int d^3\vec{r} d^3\vec{v} d^3\vec{v}_1 f(\vec{r},\vec{v}) f_1(\vec{r},\vec{v}_1) \sigma_{ann} |\vec{v}-\vec{v}_1| \tag{2.27}$$

Для расчета матрицы аннигиляции так же производится обезразмеривание. для этого выносится фактор $\frac{4\pi}{3}\sigma_{a0} v_{a0}/r_\odot^3$ и далее интеграл считается в безразмерных параметрах. Вместо величины $\sigma_{ann}|\vec{v}-\vec{v}_1|$ будем использовать

$$\phi_{ann} = \frac{\sigma_{ann}|\vec{v}-\vec{v}_1|}{\sigma_{a0} v_{a0}} \tag{2.28}$$

Чтобы в этом интеграле найти фазовые плотности, необходимо разделить число частиц в бине гистограммы на объем этого бина 2.20

$$f(r) = \frac{N_i}{d\Phi} \tag{2.29}$$

Факторы $d^3\vec{v}$ и $d^3\vec{v_1}$ соотвкетствуют интегрированию по скоростям. При этом этот объем выражается через переменные E и L.

$$d^3\vec{v} = \frac{2\pi v dv dL^2}{r\sqrt{r^2v^2 - L^2}} d\vec{n} = 2\pi dE d\sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}} d\vec{n} \tag{2.30}$$

Причем, поскольку радиальная скорость v_r и тангенциальная v_t фиксированны, для $d\vec{n}$ остается только быбор напавления для тангенсальной скорости. Более того, нас интересует лишь модуль раности скоростей, который равен $\sqrt{v^2 + v_1^2 - 2 \cdot (v_t v_{t1} cos(\phi - \phi_1) \pm v_r v_{r1})}$. Поэтому для определения разности скоростей нужно лишь сгенерировать случайный угол $\phi - \phi_1$ от 0 до π. Интегрирование по радиусу выполняется генерацией r от r_{min} до r_{max}, которые определяются из траекторий соответствующих E, L и $E_1, L1$. Однако, если интервалы $[r_{min}, r_{max}]$ для двух траекторий не пересекаются, то частицы не столкнутся и этот член будет равен нулю. В результате матрица аннигиляции будет иметь форму

$$A_{ij} = \frac{3}{4\pi} \frac{\sigma_{a0} v_{a0}}{r_\odot^3} a_{ij} \tag{2.31}$$

$$a_{ij} = \frac{4\pi}{3} \int [4\pi r^2 dr] \frac{d^3v d^3v_1}{d\Phi d\Phi_1} \phi_{ann} \tag{2.32}$$

Также, мы посчитаем аннигиляцию захваченной ТМ и налетающей из гало. Для этого в 2.27 вместо фактора $d^3vecv_1 f1(\vec{r}, \vec{v})$ происходит интегрирование по входным скоростиям прилетающих частиц ТМ как это было при захвате. Член связанный с аннигиляцией на налетающих из гало частицах представляет из себя вектор, который обозначим как A_i^e

$$A_i^e = \sigma_{a0} v_{a0} n_\chi a_i^e \tag{2.33}$$

$$a_i^e = \int [4\pi r^2 dr] \frac{d^3 v}{d\Phi} [d^3 v_1 f_1] \phi_{ann} \tag{2.34}$$

2.5. Уравнение эволюции

Эволюция захваченных частиц имеет следующий вид:

$$\frac{dN_i}{dt} = C_i + S_{ij} N_j - E_i N_i - N_i A_{ij} N_j - A_i^e N_i \tag{2.35}$$

где C_i — захват, S_{ij} — матрица рассеяния, E_i – испарение, A_{ij} и A_i^e — аннигиляция.

В результате обезразмеривания (с учетом 2.13, 2.26, 2.34) уравнение будет иметь вид:

$$\frac{dN_i}{dt} = V_\odot n_\chi \cdot \sigma_0 n_p v_{esc} \cdot c_i + \sigma_0 n_p v_{esc} \cdot (s_{ij} N_j - e_i N_i) -$$
$$- \frac{3}{4\pi} \frac{\sigma_{a0} v_{a0}}{r_\odot^3} a_{ij} N_j N_i - \sigma_{a0} v_{a0} n_\chi \cdot a_i^e N_i$$

Обозначим величину $\sigma_0 n_p v_{esc}$ как T_s^{-1}, которая по порядку величины соответствует вероятности соударения в единицу времени, а величину $V_\odot n_\chi$ как $N_\odot$, по порядку величины равная числу прилетающих частиц ТМ изгало в небесном теле. Таким образом, разделив на $N_\odot$ и умножив на T_s, мы получим

$$T_s \frac{d}{dt} \frac{N_i}{N_\odot} = c_i + \left(s_{ij} \frac{N_j}{N_\odot} - e_i \frac{N_i}{N_\odot} \right) - a_\gamma a_{ij} \frac{N_i}{N_\odot} \frac{N_j}{N_\odot} - a_\gamma^e a_i^e N_i \tag{2.36}$$

где

$$a_\gamma = \frac{\sigma_{a0} v_{a0} n_\chi}{\sigma_0 v_{esc} n_p} \tag{2.37}$$

а число a_γ^e равно a_γ

В программе мы будем использовать безразмерное время $\frac{t}{T_s} \to t$ и относительное количество частиц $\frac{N}{N_\odot} \to x$.

2.6. Численное решение уравнений эволюции

Уравнение 2.36 состоит из линейной части и нелинейной. Линейная чать отвечает за термализацию и захват и на начальных этапах эволюции преобладает. Линейное уравнение в безразмерных координатах будет иметь следующий вид

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i + s_{ij}x_j \tag{2.38}$$

Точное решение этого уравнения записывается через матричную экспоненту

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(s(t' - t_0)\right)_{ij} c_j dt' \tag{2.39}$$

Физический смысл этого решения заключается в том, что в момент времени $t - t' + t_0$ захватывается $c_i dt'$ частиц в каждом бине, и эти частицы эволюционируют от времени захвата до текущего времени t, давая вклад в общее число частиц равный $\exp\left(s(t' - t_0)\right)_{ij} c_j dt'$.

Мы будем приближать матричную экспоненту на некотором интервале τ, используя приближенные методы. В первом порядке по τ получится схема Эйлера. Матрица перехода в этом случае равна

$$R(\tau) = 1 + \tau s \tag{2.40}$$

Чтобы решение было корректно, матрица $R(\tau)$ не должна приводить к отрицательному числу чатиц. Для этого τ должен быть таким, для которого $R(\tau)$ — неотрицательна. Поскольку матрица s имеет следующий вид

$$s = \begin{pmatrix} -s_{21} - ... - s_{n1} - e_1 & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & -s_{12} - ... - s_{n2} - e_2 & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & -s_{1n} - ... - s_{n-1n} - e_n \end{pmatrix}$$

где все внедиагональные элементы s_i являются положительными вероятности перейти из одного состояния в другое, а на диагонаяле находятся отрицательные полные вероятности частицы сменить бин, неотрицательность $R(\tau)$ достигается при $\tau \leq \tau_{max}$, где

$$\tau_{max} = \frac{1}{\max_i s_{ii}} \tag{2.41}$$

Более того, при таком выборе τ матрица $R(\tau)$ будет переводить открытое множество возможных конфигураций $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | x_i > 0 \sum_i x_i < \epsilon\}$ в себя. Следовательно, собственные значения $R(\tau)$ по модулю меньше единицы для всех τ меньших τ_{max} и схема является устойчивой. То есть если λ — собственное значение s, то оно удовлетворяет уравнению

$$|1 + \tau_{max}\lambda| \leq 1 \tag{2.42}$$

Для того, чтобы увеличть шаг и не потерять устойчивость, необходимо использовать неявную схему. При этом для схемы порядка n погрешность в показателе экспоненты будет равной $\alpha(\tau\lambda)^{n+1}\frac{T}{\tau}$, где T — конечное время. Если эта погрешность не удовлетворяет требуемой точности δ, то соответствующее решеие доолжно экспоненциально убывать с требуемым показателени экспоненты $-\Re\lambda T > N_e$. Так как из 2.42 следует, что $-\Re\lambda > \tau_{max}|\lambda|^2$, можно получить следующее ограничение на τ:

$$\tau \leq \tau_{max} \cdot \left(\frac{T}{\tau_{max}}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \cdot \left(\frac{1}{N_e}\right)^{\frac{n+1}{2n}} \cdot \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{2.43}$$

Получив оператор эволюции $R(\tau)$ с требуемой точностью, мы будем итерационно умножать его на столбец $\vec{y}$, получая тем самым решение для термализации захваченной порции частиц ТМ.

$$\begin{cases} \vec{y}_{k+1} = R(\tau)\vec{y}_k \\ \vec{y}_0 = \vec{c} \end{cases} \tag{2.44}$$

Для получения решения $\vec{x}$, мы аппроксимируем интеграл 2.38 взятый в пределах $[t, t+\tau]$ матрицей $I(\tau)$, тогда

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + I(\tau)\vec{y}_k \tag{2.45}$$

Для второго порядка интегрирования можно взять

$$I(\tau) = \frac{1 + R(\tau)}{2} \tag{2.46}$$

Тогда если число шагов равно m а размер пространства равен N, то сложность вычисления будет $O(mN^2)$. Можно потенциально ускорить расчет, если пропускать 2^p шагов, используя возможность возвести матрицу в степень за логарифмическое влемя. Новый шаг τ_p тогда будет равен $2^p\tau$, а оператор эволюции

$$R_p(\tau_p) = R(\tau)^{2^p} \tag{2.47}$$

Матрица, аппроксимирующая интеграл $I_p(\tau_p)$ тоже вычисляется за логарифмическое время при помощи рекуррентного соотношения

$$I_p(\tau_p) = I_{p-1}(\tau_{p-1}) \cdot (1 + R_{p-1}(\tau_{p-1})) \tag{2.48}$$

В итоге, сложность будет $O(pN^3 + \frac{m}{2^p}N^2)$, что быстрее простого итеративного метода в случае, когда число итераций превышает размер системы.

Для учета аннигиляции мы будем использвать схему первого порядка по τ, умножив матрицу эволюции $R(\tau)$, соответствующую линейному уравнению, на матрицу эволции квадратичного слагаемого:

$$R_1(\tau) = R(\tau) \cdot R_a(\tau) \tag{2.49}$$

где

$$R_a(\tau)_{ii} = e^{-\tau \sum_k a_{ki} x_k} \tag{2.50}$$

2.7. Модификация уравнения для двухкомпонентной темной материи

Для двухкомпонентная ТМ, состоящей из более легкой фракции (обозначим за L) и более тяжелой (H), рассматривается еще и распределение по этим состояниям. Индексы, соответствующие легким частицам будут иметь букву l, а тяжелые — букву h. Уравнение для величины x будет следующим

$$\begin{cases} \dfrac{dx_l}{dt} = \nu^L c_l + s_{lh}x_h - \sum_h s_{hl}x_l - e_l x_l - a_\gamma^L x_l - a_\gamma^{LL} a_{ll'} x_l x_{l'} - a_\gamma^{HL} a_{h'l} x_l x_{h'} \\ \dfrac{dx_h}{dt} = \nu^H c_h + s_{hl}x_l - \sum_l s_{lh}x_h - e_h x_h - a_\gamma^H x_h - a_\gamma^{HH} a_{hh'} x_h x_{h'} - a_\gamma^{HL} a_{hl'} x_{l'} x_h \end{cases} \tag{2.51}$$

Коэффициенты ν^L и ν^H, стоящие перед вектором захваченных частиц, являются долями частиц в гало, которые дают вклад в соответствующий захват. То есть ν^L — это доля тяжелых частиц в гало, а ν^H — легких.

Коэффициенты аннигиляции являются входными параметрами и зависят от сечения аннигиляции легких с легкими, легких с тяжелыми и тяжелых с тяжелыми. При этом, для двухчастичной аннигиляции параметры a_γ^L и a_γ^H должны быть равны:

$$\begin{cases} a_\gamma^L = \nu^L a_\gamma^{HL} + \nu^H a_\gamma^{LL} \\ a_\gamma^H = \nu^H a_\gamma^{HL} + \nu^L a_\gamma^{HH} \end{cases} \tag{2.52}$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ