

---

# Содержание

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Inelastic Dark Matter in the Sun</b>	<b>2</b>
2.1	Capture . . . . .	2
2.2	Thermalization . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Scenarios</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Numerical Results</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Summary</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Appendix</b>	<b>6</b>
6.1	Computational details . . . . .	6
6.2	Numerical correctness of schemes . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Bibliography</b>	<b>8</b>

## 1 Introduction

Наличие тёмной материи – это хорошо установленный факт, следующий из астрофизических наблюдений и космологических данных. Тёмная материя составляет основную массу галактик, объясняя форму кривой вращения, входит в уравнения Фридмана эволюции Вселенной а также играет ключевую роль в образовании крупномасштабной структуры Вселенной. Тёмная материя практически не взаимодействует с веществом, поэтому состав тёмной материи неизвестен. Вероятно, что она состоит из новых частиц вне Стандартной модели физики частиц. Одним из классов таких частиц являются слабовзаимодействующие массивные частицы (WIMPs), которые мы будем рассматривать.

Образование частиц тёмной материи объясняется механизмом freeze-out, при котором частицы находились в термальном равновесии с плазмой, а потом вышли из равновесия вследствие расширения Вселенной. Для объяснения плотности тёмной материи  $\Omega h^2 = 0.12$  необходимо, чтобы сечение аннигиляции тёмной материи в частицы стандартной модели имело порядок  $10^{-26} \text{см}^3/\text{с}$ . Сечения такого порядка характерны для процессов электрослабого масштаба. В таком случае эти частицы можно зарегистрировать различными способами. Наиболее чувствительным методом является прямое детектирование частиц в галактическом гало путём измерения отдачи ядер в низкофоновых экспериментах, таких как XENON, PANDAX. Отсутствие сигнала накладывает сильные ограничения на упругое сечение взаимодействия с нуклоном  $\sigma_{\chi n}$  (рисунок).

Однако эти ограничения могут быть ослаблены, если тёмная материя является неупругой: частицам в гало не будет хватать энергии для преодоления порога реакции рассеяния на ядре. Тогда более чувствительным методом поиска тёмной материи может стать детектирование нейтрино от аннигиляции тёмной материи захваченной и накопленной внутри Солнца. Для того, чтобы дать предсказание потоков нейтрино нужно найти скорость захвата частиц тёмной материи  $C$ , распределение этих частиц на текущий момент и темп аннигиляции. Имея темп аннигиляции можно найти спектр нейтрино. В случае упругой тёмной материи частицы быстро термализуются и имеют распределение Больцмана с температурой близкой к температуре в центре Солнца. Для исследуемой области параметров масса - сечение  $m_\chi - \sigma\chi\rho$  это означает, что темп аннигиляции в текущий момент должен совпадать с темпом захвата. Однако как было показано в работе [1], неупругая тёмная материя в какой-то момент времени перестанет термализоваться из-за энергетического порога. В таком случае темп аннигиляции может быть существенно меньше темпа захвата, что уменьшит чувствительность метода и, значит, ослабит ограничения.

В данной работе мы пересмотрим численное решение термализации тёмной материи в Солнце и найдём соотношение между аннигиляцией и захватом а также найдём область параметров тёмной материи, при которой равновесие между аннигиляцией и захватом всё ещё наступает.

## 2 Inelastic Dark Matter in the Sun

Для того, чтобы была аннигиляция тёмной материи в Солнце, она должна накопиться в достаточном количестве. Количество частиц, захваченное из гало за единицу времени обозначают как  $C$ . Темп аннигиляции  $A$  зависит от количества частиц  $N$  и их распределения. Темп захвата равен  $aN^2$ , где  $a$  — зависит только от распределения частиц.

Уравнение на полное число частиц выглядит следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = C - aN^2 \quad (1)$$

и имеет решение в момент времени  $t$ :

$$N = \sqrt{\frac{C}{a}} \operatorname{th} [\sqrt{aC}t] \quad (2)$$

$$A = aN^2 = C \operatorname{th}^2 [\sqrt{aC}t]$$

В случае упругой тёмной материи коэффициент  $a$  определяется термальным распределением:

$$a_{el} = \frac{\langle \sigma_a v \rangle \int d^3 r e^{-2\frac{m_\chi \phi(r)}{T_\chi}}}{\left( \int d^3 r e^{-\frac{m_\chi \phi(r)}{T_\chi}} \right)^2} \quad (3)$$

В случае, когда масса тёмной материи больше 10 GeV, температуру термального распределения  $T_\chi$  можно взять равной температуре в центре Солнца  $T_\odot(r=0) = 1.33 \cdot 10^{-6} \text{ GeV}$ , а потенциал  $\phi(r)$  разложить до квадратичного порядка:  $\phi(r) = \phi(0) + \frac{v_{esc}^2}{2} \frac{\rho_0}{R_\odot^2} r^2 + o(r^2)$ , где  $\rho_0 = 105.7$ . Тогда

$$a_{el} = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \frac{\langle \sigma_a v \rangle}{r_\chi^3} \quad (4)$$

где

$$r_\chi = R_\odot \sqrt{\frac{2T_\odot(0)}{m_\chi \rho_0 v_{esc}^2}} = 0.077 R_\odot \sqrt{\frac{\text{GeV}}{m_\chi}} \quad (5)$$

Приведём значение для  $a_{el} t^2$  в момент возраста Солнца  $T_\odot$

$$a_{el} T_\odot^2 = 9 \cdot 10^{-23} \text{ s} \left( \frac{\langle \sigma_a v \rangle}{3 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}} \right) \left( \frac{m_\chi}{\text{GeV}} \right)^{3/2} \quad (6)$$

Для неупругого случая, уравнения эволюции хоть и не учитывают распределение частиц, но всё равно оказываются верными в переходной области, где  $C$  и  $A$  имеют схожее значение. В неупругом случае этот зависит от массы тёмной материи  $m_\chi$ , разницей масс основного и возбуждённого состояния  $\delta$  и от сечения аннигиляции  $\langle \sigma_a v \rangle$  (мы брали  $\langle \sigma_a v \rangle = 3 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^3/\text{s}$ ). Поэтому для нахождения темпа аннигиляции нужно воспользоваться формулой выше и найденными численно коэффициентами  $a$ .

### 2.1 Capture

Захват тёмной материи происходит следующим образом. Изначально тёмная материя находится в гало (вдали от Солнца) и имеет некоторое распределение по скоростям  $f(u)$ . Затем она попадает в Солнце, где может столкнуться с ядрами вещества, потеряв часть кинетической энергии. Частица будет захвачена, если её финальная скорость будет меньше скорости вылета в точке столкновения  $v' < v_{esc}(r)$ . Таким образом, величина захвата — это сумма по всем ядрам мишеням темпа столкновений тёмной материи:

$$C = \sum_\alpha C_\alpha = \sum_\alpha \int d^3 \vec{x} \cdot d^3 \vec{v} f(v^2, r) \cdot n_\alpha(r) d^3 \vec{v}_\alpha f_B(v_\alpha, T(r)) \cdot |\vec{v} - \vec{v}_\alpha| d\sigma_{\chi\alpha} \quad (7)$$

где  $v$  — скорость тёмной материи в точке  $r$ ,  $n_\alpha(r)$  — концентрация ядер сорта  $\alpha$ ,  $f_B(v_\alpha, T(r))$  — Больцмановское распределение по скоростям ядер с локальной температурой  $T(r)$ ,  $d\sigma_{\chi\alpha}$  — дифференциальное сечение тёмной материи и ядра. Интеграл по дифференциальному сечению идёт по области, когда  $v' < v_{esc}(r)$

Мы представим  $C_\alpha$  следующим образом:

$$C_\alpha = V_\odot n_{\chi 0.4} \cdot \sigma_{\chi p} n_p v_{esc} \cdot c_\alpha = \frac{N_\odot}{T_{\chi p}} \cdot c_\alpha \quad (8)$$

Где  $V_\odot$  — полный объем Солнца,  $n_{\chi 0.4}$  — локальная концентрация частиц тёмной материи ( $0.4 \text{ GeV/cm}^3$ ),  $\sigma_{\chi p}$  — характерное сечение взаимодействия тёмной материи и ядра,  $v_{esc} = v_{esc}(r = R_\odot)$  — скорость вылета тёмной материи на краю Солнца. Мы определили  $N_\odot = V_\odot n_{\chi 0.4} = 5.64 \cdot 10^{32} \frac{\text{GeV}}{m_\chi}$ , а  $T_{\chi p} = (\sigma_{\chi p} n_p v_{esc})^{-1}$ , что равно  $1.92 \cdot 10^{10} \text{ s}$ .

Тогда

$$c_\alpha = \int [3r^2 dr] \cdot [4\pi v \cdot u du \cdot f_{eff}(u)] \cdot \left[ \rho(r) \frac{\tilde{\rho}_\alpha(r)}{A_\alpha} \cdot f_B(v_\alpha) d^3 \vec{v}_\alpha \right] \cdot F(q, v) \frac{v'}{v_{esc}} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (9)$$

где:  $r$  обозначает безразмерный радиус, меняющийся от 0 до 1,  $\rho(r)$  — плотность вещества, нормированная согласно  $\int \rho(r) 3r^2 dr = 1$ ,  $\tilde{\rho}_\alpha(r)$  — массовая доля элемента  $\alpha$  в точке  $r$ ,  $A_\alpha$  — число нуклонов в ядре,  $v'$  — разность скоростей тёмной материи и ядра после столкновения.  $f_{eff}(u)$  — распределение частиц тёмной материи вдали от Солнца с учётом движения солнца со скоростью  $u_0$  (скорость тёмной материи вдали Солнца  $u$  и скорость  $v$  в точке  $r$  связаны соотношением  $v^2 = u^2 + v_{esc}^2(r)$ )

$$f_e(u^2) = \int_{-1}^1 f(u^2 + u_0^2 + 2uu_0 \cos \theta) \frac{d \cos \theta}{2} \quad (10)$$

В качестве распределения вдали от Солнца возьмём распределение Максвелла, ограниченное максимальной скоростью  $u_{max}$

$$f(u) = \frac{1}{(2\pi\xi^2)^{3/2}} e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} \cdot \theta(u_{max} - u) \quad (11)$$

Мы предполагаем следующие параметры (из стандартной модели гало):  $v_{esc} = 2.06 \cdot 10^{-3} = 618 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ,  $\xi = 0.423 \cdot 10^{-3} = 127 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ,  $u_0 = 0.733 \cdot 10^{-3} = 220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ,  $u_{max} = 1.78 \cdot 10^{-3} = 533 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ .

$F(q, v)$  — это форм фактор ядра, определённый следующим образом:

$$F(q, v) = \frac{(m_\chi + m_p)^2 |\mathcal{M}_{\chi\alpha}|^2}{(m_\chi + m_\alpha)^2 |\mathcal{M}_{\chi p}|^2} \quad (12)$$

где  $|\mathcal{M}_{\chi\alpha}|^2$  — усреднённый по спинам матричный элемент рассеяния тёмной материи на ядре, а  $|\mathcal{M}_{\chi p}|^2$  — на нуклоне.

Величину  $\sigma_{\chi p}$  мы определяем как:

$$\sigma_{\chi p} = \int \frac{|\mathcal{M}_{\chi p}|^2}{64\pi^2 (m_\chi + m_p)^2} d\Omega \quad (13)$$

## 2.2 Thermalization

Когда тёмная материя захватывается, она далее испытывает вторичные столкновения с веществом и аннигиляцию. Её эволюция описывается уравнением Больцмана. Для решения этого уравнения мы переходим из пространства  $\vec{r} - \vec{v}$  в пространство  $E - L$ , где  $E$  — энергия тёмной материи, а  $L$  — момент импульса. Мы разбиваем пространство на бины, и тогда уравнение эволюции на число частиц  $N_i$  в бине  $i$  будет иметь вид:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{1}{T_{\chi p}} \left( N_\odot c_i + \sum_j [s_{ij} N_j - s_{ji} N_i] - e_i N_i - \frac{a_\gamma}{N_\odot} \sum_j a_{ij} N_j N_i \right) \quad (14)$$

Величины  $c_i$  определяются из интеграла (9), но интеграл ограничивается областью, в которой конечные  $E$  и  $L$  частицы попадают в бин  $i$ . Величины  $s_{ij}$  определяют вероятности переёти из бина  $j$  в бин  $i$  и вычисляются аналогично  $c_i$

$$s_{ij} = \sum_\alpha \int d\Phi_j \frac{T_{in}(\Phi_j)}{T_{in}(\Phi_j) + T_{out}(\Phi_j)} \cdot d\tau [f_B(v_\alpha) d^3 \vec{v}_\alpha] \cdot \frac{v'}{v_{esc}} F(q, v) \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (15)$$

Интеграл  $d\Phi_j$  обозначает интегрирование по фазовому объёму бина  $j$ , причём полный интеграл  $\int d\Phi_j = 1$  равен 1. В выражении присутствует интегрирование вдоль траектории движения частицы в потенциале  $\phi(r)$ :  $T_{in} + T_{out}$  — время, за которое частицы проходит от минимального  $r_{min}$  до максимального  $r_{max}$  положения. Это время разбивается на время пребывания внутри Солнца  $T_{in}$  и Снаружи  $T_{out}$ . Соответственно величина  $\tau$  параметризует внутреннюю части траектории и пробегает от 0 до 1.

Те частицы, которые не попали ни в какой бин  $i$  в интеграле (15) испаряются, что определяет величину  $e_i$ .

Коэффициент  $a_\gamma$  определяет соотношения скорости аннигиляции и столкновений и равен:

$$a_\gamma = \frac{\langle \sigma_{\chi\chi} v \rangle n_{\chi 0.4}}{\sigma_{\chi p} n_p v_{esc}} = T_{\chi p} \cdot \langle \sigma_{\chi\chi} v \rangle n_{\chi 0.4} \quad (16)$$

где  $\langle \sigma_{\chi\chi} v \rangle$  — произведение сечения аннигиляции на скорость, которое мы брали равным  $3 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ . Тогда  $a_\gamma = 2.31 \cdot 10^{-16} \frac{\text{GeV}}{m_\chi}$ . Выражения для  $a_{ij}$  мы приведём в аппендиксе.

### 3 Scenarios

В формулах для рассеяния выше фигурировал формфактор  $F(q, v)$  (12). Его значение является модельно зависимым. Для определения формфактора в конкретных моделях находится из релятивистской теории нерелятивистский оператор  $\hat{V}$  взаимодействия частиц тёмной материи и нуклонов.  $\hat{V}$  раскладывается на линейную комбинацию операторов  $\hat{O}_i$ .

$$\hat{V}_{\chi N}(\vec{r}_\chi - \vec{r}_N) = \sum_i c_i \hat{O}_i \quad (17)$$

А гамильтониан взаимодействия тёмной материи и ядра является суммой  $\hat{V}_{\chi N}$  по всем нуклонам:

$$\mathcal{H}_{int} = \sum_k \hat{V}_{\chi k}(\vec{r}_\chi - \vec{r}_k) \quad (18)$$

Вычисление матричных элементов от  $\mathcal{H}_{int}$  рассматривается в работах [refs].

В случае упругой тёмной материи рассматривают 2 сценария: когда взаимодействие является спин-независимым и спин-зависимым. Например, многих моделях фермионной тёмной материи, взаимодействие с нуклонами имеет вид  $\bar{\chi} \gamma^\mu \chi \bar{N} \gamma^\mu N$ , что соответствует спин-независимому оператору  $\hat{O}_1 = 1$  или  $\bar{\chi} \gamma^\mu \gamma^\mu \chi \bar{N} \gamma^\mu \gamma^5 N$ , что соответствует спин-зависимому оператору  $-4\hat{O}_4 = -4c\vec{S}_\chi \cdot \vec{S}_N$ .

Неупругая тёмная материя возникает в достаточно специфичных сценариях. В данной работе мы рассмотрим неупругую тёмную материю со спин-независимым взаимодействием с нуклоном  $c\hat{O}_1$  а также тёмную материю с магнитным моментом  $\mu_\chi$  со следующим взаимодействием с электромагнитным полем:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\mu_\chi}{2} \bar{\Psi}_1 \Sigma_{\mu\nu} \Psi_2 F^{\mu\nu} + \frac{\mu_\chi}{2} \bar{\Psi}_2 \Sigma_{\mu\nu} \Psi_1 F^{\mu\nu}$$

где  $\Psi_{1,2}$  — майорановские спиноры, состояний 1 и 2, а  $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu \gamma_\nu]$ .

Нерелятивистский оператор взаимодействия с нуклоном тогда следующий:

$$\mathcal{H} = \frac{Q_N e \mu_\chi}{2m_\chi} \hat{O}_1 + \frac{2g_N e \mu_\chi}{m_N} \hat{O}_4 - \frac{2Q_N e \mu_\chi m_N}{q^2} \hat{O}_5 - \frac{2g_N e \mu_\chi m_N}{q^2} \hat{O}_6 \quad (19)$$

где  $eQ_N$  — заряд нуклона,  $g_N$  — множитель Ланде нуклона.

$$\hat{O}_1 = 1 \quad \hat{O}_4 = \vec{S}_\chi \cdot \vec{S}_N \quad (20)$$

$$\hat{O}_5 = i\vec{S}_\chi \cdot \left( \frac{\vec{q}}{m_N} \times \vec{v}_{inel}^\perp \right) \quad \hat{O}_6 = \left( \vec{S}_\chi \cdot \frac{\vec{q}}{m_N} \right) \left( \vec{S}_N \cdot \frac{\vec{q}}{m_N} \right) \quad (21)$$

где  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$  — переданный импульс от тёмной материи к веществу, а

$$\vec{v}_{inel}^\perp = \vec{v}_{el}^\perp + \frac{\delta}{q^2} \vec{q} = \vec{v} + \frac{\vec{q}}{2\mu_N} + \frac{\delta}{q^2} \vec{q} \quad (22)$$

## 4 Numerical Results

Изобразим распределение частиц по энергии и моменту импульса (на единицу массы частицы). Мы будем отсчитывать энергию и момент в безразмерных единицах. Безразмерные энергия и момент импульса соответственно равны:

$$E = \frac{\frac{1}{2}v_\chi^2 + \phi(r)}{\frac{1}{2}v_{esc}^2} \quad (23)$$

$$L = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}|}{R_\odot v_{esc}}$$

Еще одна величина — приведенный момент импульса.

$$l = \frac{L}{L_{max}(E)} \quad (24)$$

где  $L_{max}(E)$  — максимально возможный момент импульса траектории при данной энергии (не учитываются траектории, которые находятся вне Солнца).

Мы будем рассматривать распределение частиц по энерггт и приведенному импульсу  $f(E, l) = \frac{dN}{dE dl}$ .

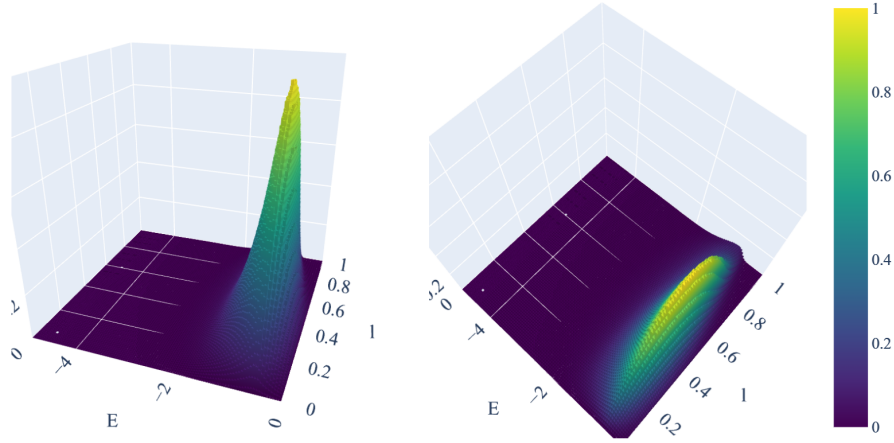


Рис. 1: Распределение захваченных частиц для  $m_\chi = 100$  GeV,  $\delta = 100$  keV.

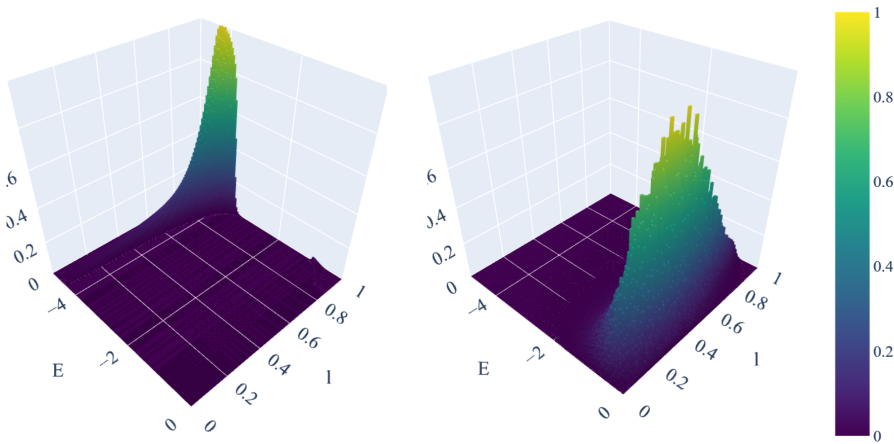


Рис. 2: Распределение частиц в конце эволюции для  $m_\chi = 100$  GeV,  $\delta = 100$  keV.

Главный вопрос заключается в отношении скорости аннигиляции и скорости захвата  $C/A$ . Мы рассматриваем уравнение эволюции как с учётом аннигиляции так и без учета аннигиляции.

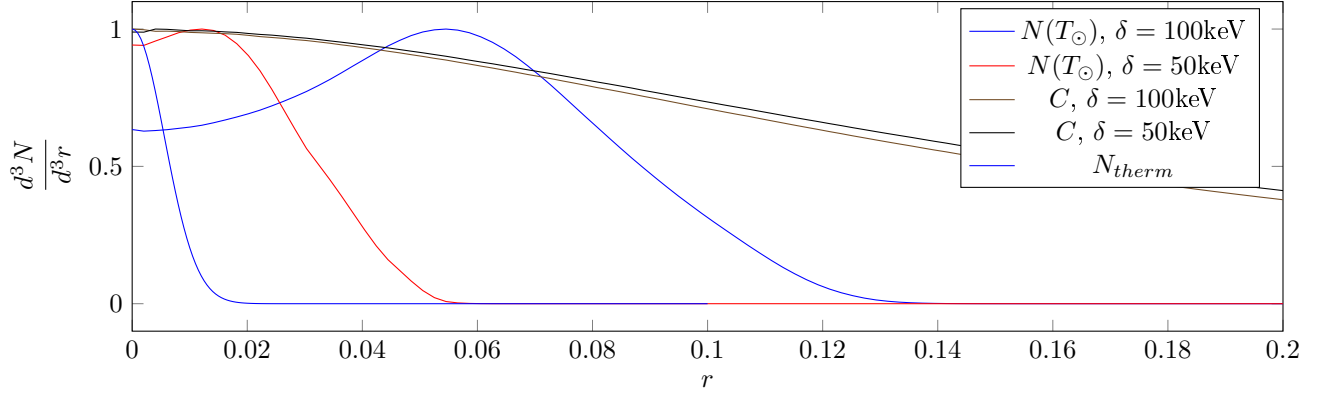


Рис. 3: Концентрация частиц тёмной материи массы  $m_\chi = 100\text{GeV}$

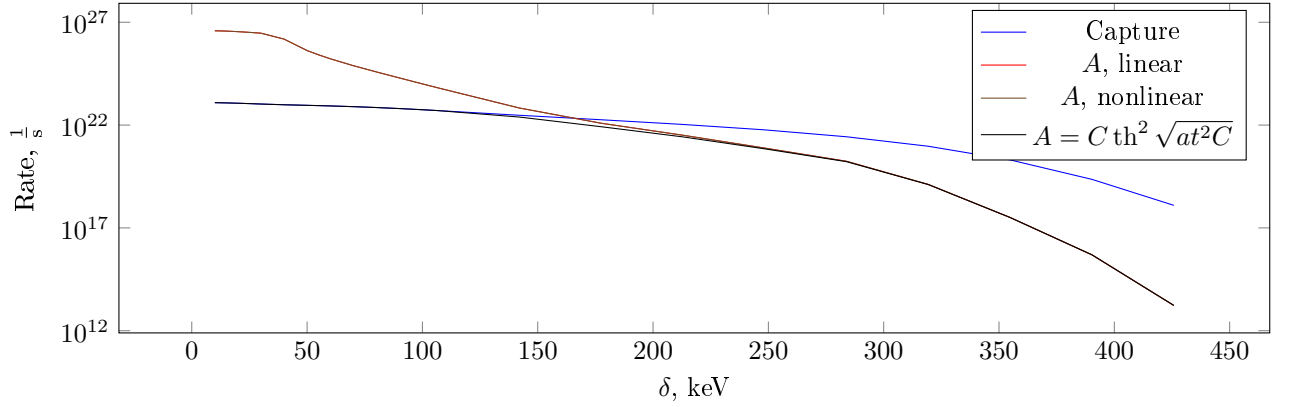


Рис. 4: Зависимость от  $\delta$  захвата и аннигиляции при линейной и нелинейной эволюции для  $m_\chi = 100\text{GeV}$

Как можно заметить, если включить в уравнение эволюции аннигиляцию, то результат совпадает с оценкой (2).

Обозначим величину  $1/(aT_\odot^2)$  как  $a(\langle\sigma_a v\rangle)$ . Тогда для того чтобы сделать ограничения для сечения на протоне  $\sigma_{\chi p}$  исходя из ограничения на темп аннигиляции  $\Gamma$  нужно решить (2) и найти темп захвата.

$$\frac{2\Gamma}{C_a} = F\left(\frac{C}{C_a}\right) \quad (25)$$

где  $F(x) = x \text{th}^2 \sqrt{x}$ . Для оценки с точностью 0.06 можно использовать  $F^{-1}(y) \approx \sqrt{y(1+y)}$ .

Тогда, зная  $C/C_a$  и  $C(\sigma_{\chi p,0})$  — захват при  $\sigma_{\chi p} = \sigma_{\chi p,0}$  можно найти ограничение для сечения  $\sigma_{\chi p}$

$$\sigma_{\chi p} = \sigma_{\chi p,0} \frac{C_a}{C(\sigma_{\chi p,0})} F^{-1}\left(\frac{2\Gamma}{C_a}\right) \quad (26)$$

## 5 Summary

## 6 Appendix

### 6.1 Computational details

Уравнение термализации (14) решается в безразмерном виде, где вводится относительное число частиц  $\tilde{N}_i = N_i/N_\odot$ , а также относительное время  $\tau = t/T_{\chi p}$ .

Уравнение тогда примет вид:

$$\frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \tau} = c_i + \sum_j [s_{ij} \tilde{N}_j - s_{ji} \tilde{N}_i] - e_i \tilde{N}_i - a_\gamma \sum_j a_{ij} \tilde{N}_j \tilde{N}_i \quad (27)$$

Для нахождения относительной концентрации  $\tilde{n}(r)$  нужно взять сумму интегралов по всем бинам

$$\tilde{n}(r) = \sum_i \int \frac{4\pi}{3} \frac{1}{2\pi T(E,L)} \frac{d\tilde{N}_i}{dEdL^2} dEd\sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}} \quad (28)$$

Реальная концентрация тогда равна  $n(r) = \tilde{n}(r)n_{\chi 0.4}$ .

Здесь  $E$  и  $L$  — энергия и момент импульса согласно (23).  $T(E,L)$  — время (обезразмеренное на  $R_\odot/v_{esc}$ ) движения между минимальной и максимальной точками траектории  $r_{min}$  и  $r_{max}$ .

$$T(E,L) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{E - \phi(r) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

где  $\phi(r)$  — определяет Ньютоновский потенциал:

$$\phi(r) = \frac{GM(r)}{r} = \varphi(r) \frac{v_{esc}^2}{2}$$

$\varphi(r)$  удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \right) = 3\rho(r) \quad (29)$$

где  $\rho(r)$  — отношение плотности к средней плотности из (9).

Матрица аннигиляции  $a_{ij}$  из (14) равна

$$a_{ij} = \int 3r^2 dr \tilde{n}_i(r) \tilde{n}_j(r) \quad (30)$$

где  $\tilde{n}_i(r)$  — относительная концентрация из (28), посчитанная только для бина  $i$ .

Для уравнения (27) численно мы вводили переменную-вектор  $\tilde{C}_i$  и решали следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i &= \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \tilde{C}_i}{\partial \tau} &= S_{ij} \tilde{C}_j - a_\gamma [a_{ij} \tilde{N}_i \tilde{C}_j - a_{ij} \tilde{N}_j \tilde{C}_i] \\ \tilde{C}_i(0) &= c_i \end{aligned} \quad (31)$$

где матрица  $S$  определяется так:

$$S_{ij} = s_{ij} - \delta_{ij} \sum_k s_{kj} - \delta_{ij} e_i \quad (32)$$

Для решения линейной части уравнения мы использовали неявную схему 2 порядка:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\tau + h_\tau) &= R_L(h_\tau) \tilde{C} \\ R_L(h_\tau) &= \frac{2}{1 - \frac{h_\tau}{2} S} - \frac{1}{1 - h_\tau S} \end{aligned} \quad (33)$$

Нелинейные эффекты можно оценить схемой 1 порядка:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\tau + h_\tau) &= R_{NL}(h_\tau) R_L(h_\tau) \tilde{C} \\ [R_{NL}(h_\tau) \tilde{C}]_i &= e^{-h_\tau a_\gamma \sum_j a_{ij} \tilde{N}_j} (\delta_{ik} - h_\tau a_\gamma [a_{ik} \tilde{N}_i - \delta_{ik} \sum_m a_{im} \tilde{N}_m]) e^{-h_\tau a_\gamma \sum_j a_{kj} \tilde{N}_j} \tilde{C}_k \end{aligned} \quad (34)$$

## 6.2 Numerical correctness of schemes

Для проверки точности численных схем, мы рассмотрели эволюцию в упругом и неупругом случае.

В упругом случае мы увеличивали число бинов по энергии и смотрели, как зависит аннигиляция от числа бинов  $N_E$  после термализации.

Хотя наивно схема имеет первый порядок точности, на самом деле порядок может быть и вторым.

Рассмотрим уравнение эволюции:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial t} = \int S(X, X') f(X') dX' - f(X) \int S(X', X) dX' \quad (35)$$

Пусть  $P_h$  — проектор решения на сетку. Тогда

$$P_h \frac{\partial f(X)}{\partial t} = P_h \int S(X, X') f(X') dX' - P_h f(X) \int S(X', X) dX' \quad (36)$$

$$\frac{\partial f_h(X)}{\partial t} = \mu(dX)^{-1} \int S(X, X') [f(X') - f(X)] dX' dX \quad (37)$$

После дискретизации оператор эволюции  $S$  равен

$$S_h(X, X') = \mu(dX)^{-1} \mu(dX')^{-1} \int S(X, X') dX dX' \quad (38)$$

Положим  $S(X, X') = S(X_0, X'_0) + A\Delta X + B\Delta X' + O(h^2)$ . Из чего следует, что  $S_h(X, X') = S(X_0, X'_0)$ .

Далее положим, что  $f(X) = f_h(X) + F_1\Delta X$

Тогда

$$\frac{\partial f_h(X)}{\partial t} = \mu(dX)^{-1} \int S_h(X, X') [f_h(X') - f_h(X)] dX' dX + O(h^2) \quad (39)$$

Получаем, что если  $S(X, X')$  и  $f(X)$  — гладкие, то схема имеет 2 порядок точности по  $E, L$ .

Для проверки сходимости в упругом случае мы нашли конечное распределение частиц тёмной материи при разных шагах решетки и вычислили среднюю энергию и темп аннигиляции на этих распределениях. В упругом случае мы рассматривали зависимость от шага по энергии  $h_e$ , который мы уменьшали в 2 раза. Поскольку термальное распределение по моменту импульса не зависит от  $L$  и схема по  $h_L$  не имеет ошибки, мы рассматривали зависимость только от  $h_e$ .

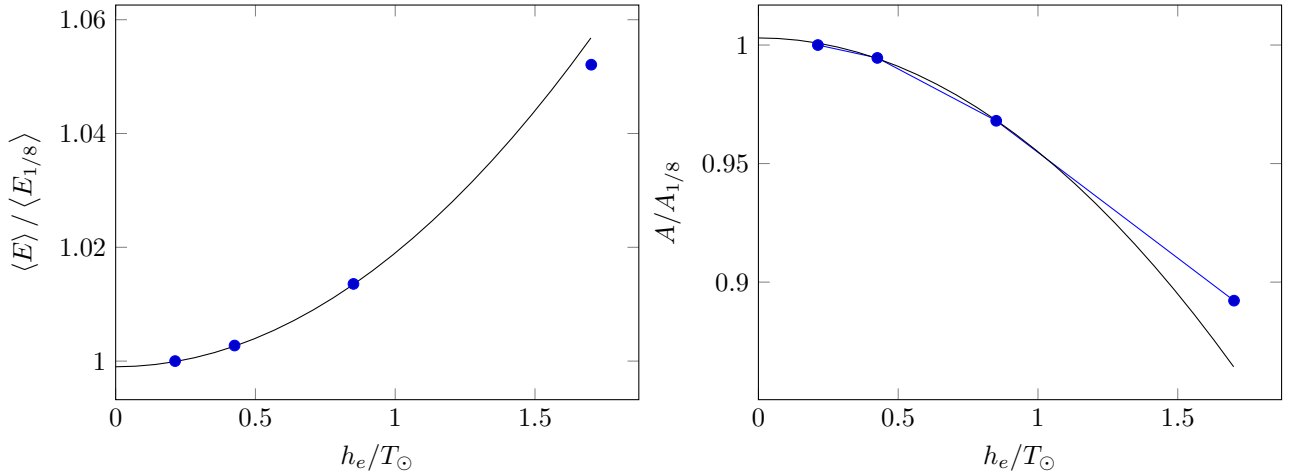


Рис. 5: Зависимость средней энергии  $\langle E \rangle$  и аннигиляции  $A$  при  $m = 10\text{GeV}$ . Шаг по энергии указан в единицах температуры Солнца в центре  $T_\odot$ . Значения нормированны на значения при минимальном шаге.

В неупругом случае мы рассматривали сетки с разбиением по  $E$  и  $L$  на 50, 100 и 200 равномерных отрезков.

## 7 Bibliography



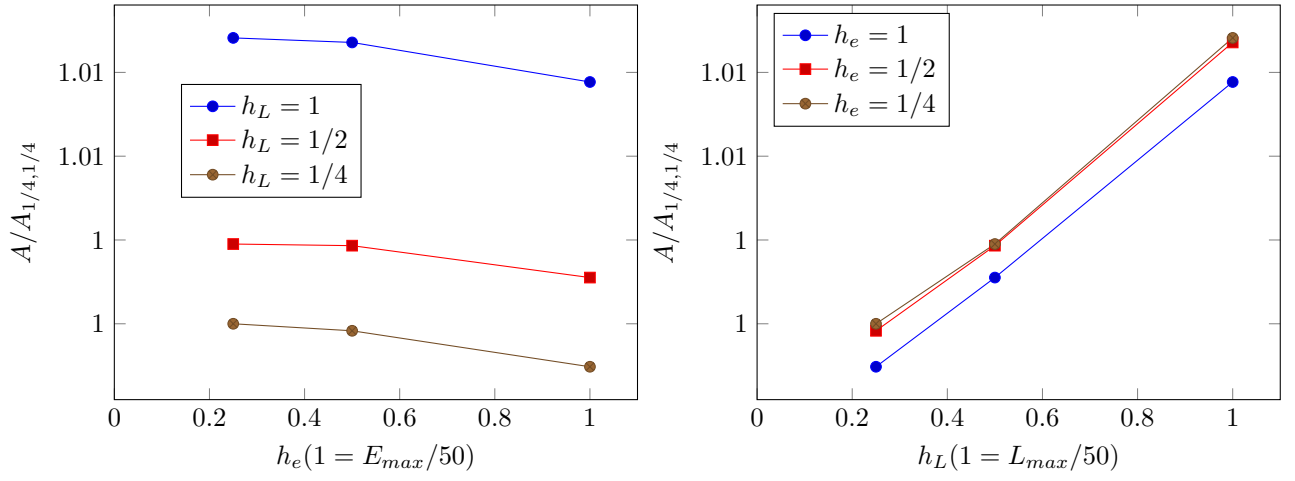


Рис. 6: Зависимость средней энергии  $\langle E \rangle$  и аннигиляции  $A$  при  $m = 10\text{GeV}$ . Шаг по энергии указан в единицах температуры Солнца в центре  $T_\odot$ . Значения нормированны на значениях при минимальном шаге.  $m_\chi = 100\text{GeV}$ ,  $\delta = 100\text{keV}$