

# Algorytmy geometryczne

## Sprawozdanie z laboratorium 1

Iwo Zowada

Gr. 6 Wtorek 15:00-16:30 A

### Dane techniczne

Komputer z systemem Windows 10

Procesor Intel Core i7-3770 CPU 3.40GHz

Pamięć RAM 24GB

Program napisany w języku Python w środowisku Jupyter Notebook z wykorzystaniem bibliotek numpy, random, matplotlib oraz narzędzia przygotowanego przez KN Bit

### Opis ćwiczenia

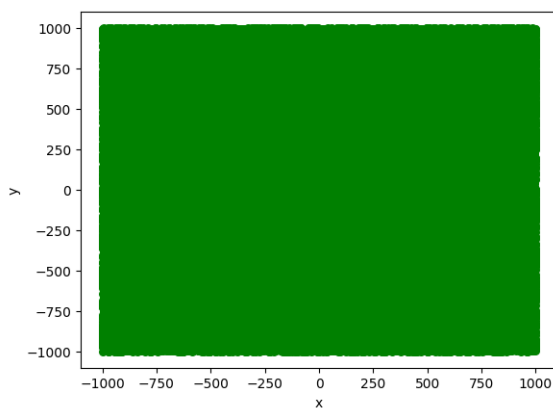
Ćwiczenie polegało na określaniu po której stronie prostej znajduje się punkt, przeprowadzeniu testów oraz wizualizacja i porównanie wyników w zależności od metody obliczania wyznacznika i dokładności obliczeń

### Realizacja ćwiczenia

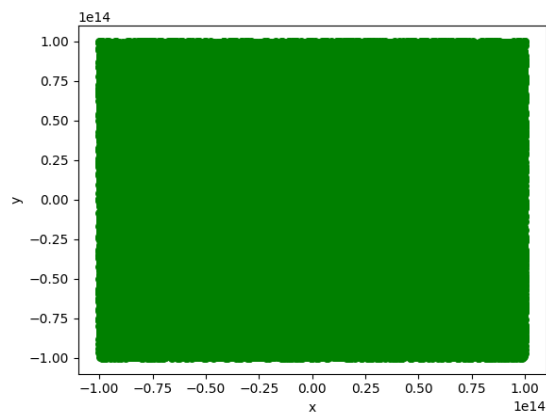
#### 1. Generowanie punktów

Przygotowałem 4 zbiory punktów (2D, współrzędne rzeczywiste typu double), punkty losowe były generowane przy użyciu funkcji `random.uniform()` z biblioteki `numpy`

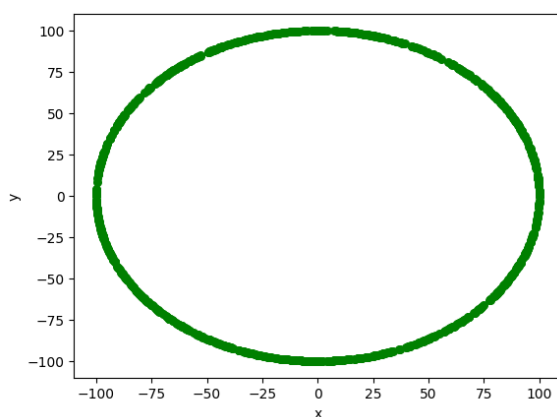
- a)  $10^5$  losowych punktów o współrzędnych z przedziału  $[-1000, 1000]$ ,
- b)  $10^5$  losowych punktów o współrzędnych z przedziału  $[-10^{14}, 10^{14}]$ ,
- c) 1000 losowych punktów leżących na okręgu o środku (0,0) i promieniu  $R=100$ ,
- d) 1000 losowych punktów o współrzędnych z przedziału  $[-1000, 1000]$  leżących na prostej wyznaczonej przez wektor (a, b) gdzie  $a = [-1.0, 0.0]$ ,  $b = [1.0, 0.1]$ ,



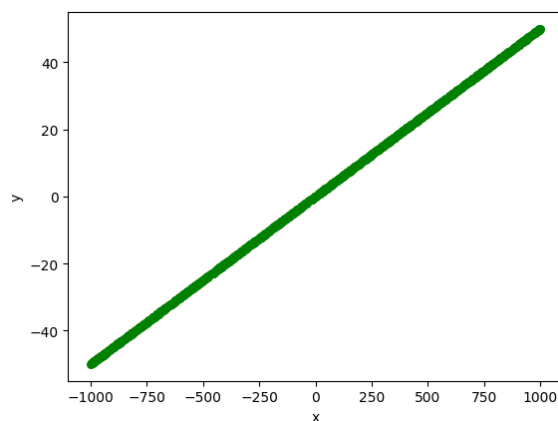
Wykres 1.1 Zbiór A



Wykres 1.2 Zbiór B



Wykres 1.3 Zbiór C



Wykres 1.4 Zbiór D

## 2. Klasyfikacja punktów względem prostej

Teraz dla każdego zbioru punktów będziemy klasyfikować które punkty są po lewej, które po prawej stronie, a które współliniowe w stosunku do odcinka ***ab*** ( $\mathbf{a} = [-1.0, 0.0]$ ,  $\mathbf{b} = [1.0, 0.1]$ ). Każde położenie punktu będziemy określać za pomocą danej metody obliczania wyznacznika:

- Wyznacznik 2x2 obliczany samodzielnie
- Wyznacznik 2x2 obliczany za pomocą funkcji z biblioteki numpy
- Wyznacznik 3x3 obliczany samodzielnie
- Wyznacznik 3x3 obliczany za pomocą funkcji z biblioteki numpy

Czas działania funkcji wyznaczających wyznacznik dla punktów ze zbioru A:

- Mat\_det\_2x2 0.058999061584472656 [s]
- Mat\_det\_2x2\_lib 1.4730067253112793 [s]
- Mat\_det\_3x3 0.0710000991821289 [s]
- Mat\_det\_3x3\_lib 1.4799957275390625 [s]

Dla stosunkowo małych macierzy funkcje obliczające wyznacznik zaimplementowane samodzielnie działają znacznie szybciej.

Pod uwagę będziemy również brać precyzję floata (*float32 i float64*) oraz przyjęte tolerancje dla zera:

- 0
- $10^{-8}$
- $10^{-10}$
- $10^{-12}$
- $10^{-14}$

### 3. Otrzymane wyniki

Poniżej przedstawię analizę wyników klasyfikacji punktów w zbiorach A,B,C i D. Wizualizację klasyfikacji punktów w tych zbiorach przedstawię na wykresach na których:

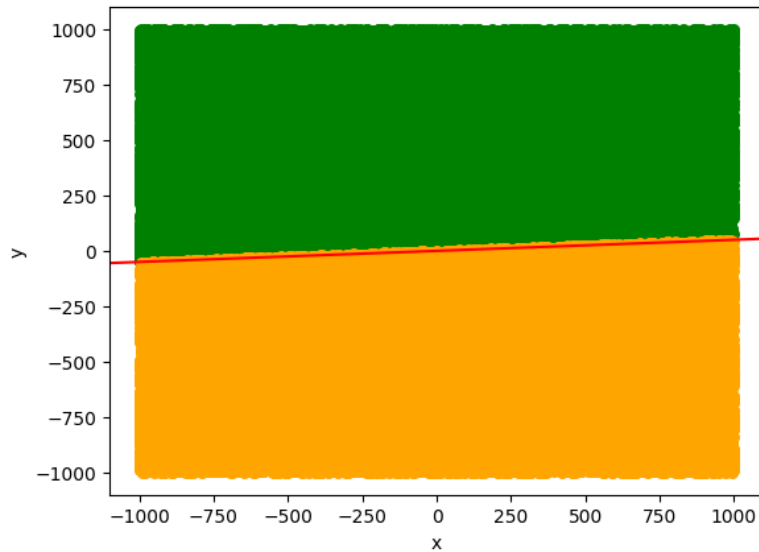
- Punkty koloru zielonego przedstawiają punkty leżące po lewej stronie prostej
- Punkty koloru pomarańczowego przedstawiają punkty leżące po prawej stronie prostej
- Punkty koloru fioletowego przedstawiają punkty leżące na prostej

#### Rozkład punktów w zbiorze A

Funkcja użyta do obliczenia wyznacznika	Precyzja float64			Precyzja float32		
	Liczba punktów z lewej	Liczba punktów na prostej	Liczba punktów z prawej	Liczba punktów z lewej	Liczba punktów na prostej	Liczba punktów z prawej
	$\epsilon = 0$			$\epsilon = 0$		
mat_det_2x2	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_2x2_lib	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_3x3	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_3x3_lib	49869	0	50131	49869	0	50131
	$\epsilon = 10^{-8}$			$\epsilon = 10^{-8}$		
mat_det_2x2	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_2x2_lib	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_3x3	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_3x3_lib	49869	0	50131	49869	0	50131
	$\epsilon = 10^{-10}$			$\epsilon = 10^{-10}$		
mat_det_2x2	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_2x2_lib	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_3x3	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_3x3_lib	49869	0	50131	49869	0	50131
	$\epsilon = 10^{-12}$			$\epsilon = 10^{-12}$		
mat_det_2x2	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_2x2_lib	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_3x3	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_3x3_lib	49869	0	50131	49869	0	50131
	$\epsilon = 10^{-14}$			$\epsilon = 10^{-14}$		
mat_det_2x2	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_2x2_lib	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_3x3	49869	0	50131	49869	0	50131
mat_det_3x3_lib	49869	0	50131	49869	0	50131

Tabela 3.1 Rozkład punktów w zbiorze A

Jak widać w tabeli powyżej, wyniki dla wszystkich funkcji liczenia wyznacznika, dla każdej dokładności i precyzji są identyczne.



Wykres 3.1 Klasyfikacja punktów w zbiorze A

### Rozkład punktów w zbiorze B

Funkcja użyta do obliczenia wyznacznika	Precyzja float64			Precyzja float32		
	Liczba punktów z lewej	Liczba punktów na prostej	Liczba punktów z prawej	Liczba punktów z lewej	Liczba punktów na prostej	Liczba punktów z prawej
	$\varepsilon = 0$			$\varepsilon = 0$		
mat_det_2x2	50220	5	49775	0	100000	0
mat_det_2x2_lib	50221	3	49776	6656	86716	6628
mat_det_3x3	50222	0	49778	50222	0	49778
mat_det_3x3_lib	50222	0	49778	50222	0	49778
	$\varepsilon = 10^{-8}$			$\varepsilon = 10^{-8}$		
mat_det_2x2	50220	5	49775	0	100000	0
mat_det_2x2_lib	50221	3	49776	6656	86716	6628
mat_det_3x3	50222	0	49778	50222	0	49778
mat_det_3x3_lib	50222	0	49778	50222	0	49778
	$\varepsilon = 10^{-10}$			$\varepsilon = 10^{-10}$		
mat_det_2x2	50220	5	49775	0	100000	0
mat_det_2x2_lib	50221	3	49776	6656	86716	6628
mat_det_3x3	50222	0	49778	50222	0	49778
mat_det_3x3_lib	50222	0	49778	50222	0	49778
	$\varepsilon = 10^{-12}$			$\varepsilon = 10^{-12}$		
mat_det_2x2	50220	5	49775	0	100000	0
mat_det_2x2_lib	50221	3	49776	6656	86716	6628
mat_det_3x3	50222	0	49778	50222	0	49778
mat_det_3x3_lib	50222	0	49778	50222	0	49778
	$\varepsilon = 10^{-14}$			$\varepsilon = 10^{-14}$		
mat_det_2x2	50220	5	49775	0	100000	0
mat_det_2x2_lib	50221	3	49776	6656	86716	6628
mat_det_3x3	50222	0	49778	50222	0	49778
mat_det_3x3_lib	50222	0	49778	50222	0	49778

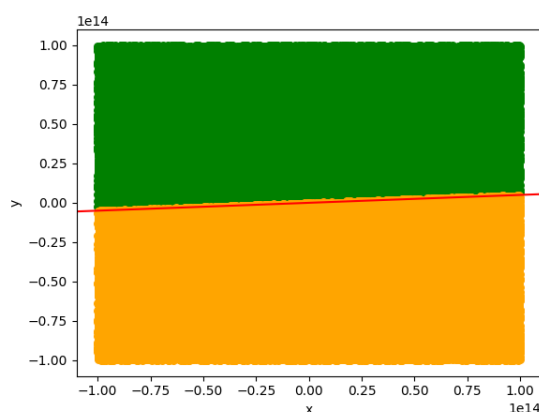
Tabela 3.2 Rozkład punktów w zbiorze B

Dla precyzji float64 różnice w wynikach są znikome. Widać że funkcje niezależnie od dokładności dają ten sam wynik. Różnica wynika z zastosowanej funkcji, gdyż dla funkcji które obliczają wyznacznik macierz 3x3 program nie wykazuje żadnych punktów współliniowych z prostą, gdy funkcje które obliczają wyznacznik macierzy 2x2 podają parę punktów które znajdują się na prostej. Przy wizualizacji wykresów taka nieznaczna ilość punktów na prostej jest niezauważalna lecz przykładowe punkty które zostały zakwalifikowane na prostej mają takie współrzędne:

Współrzędna na osi X	Współrzędna na osi Y	Współrzędna na osi Y podstawiając współrzędną X do wzoru prostej $y=0.05x+0.05$
62250345926246.125	3116360910812.672	3112517296312.3564
-25674687561446.312	-1284947330450.75	-1283734378072.2656
-82275793416798.3	-4108168307129.6094	-4113789670839.865

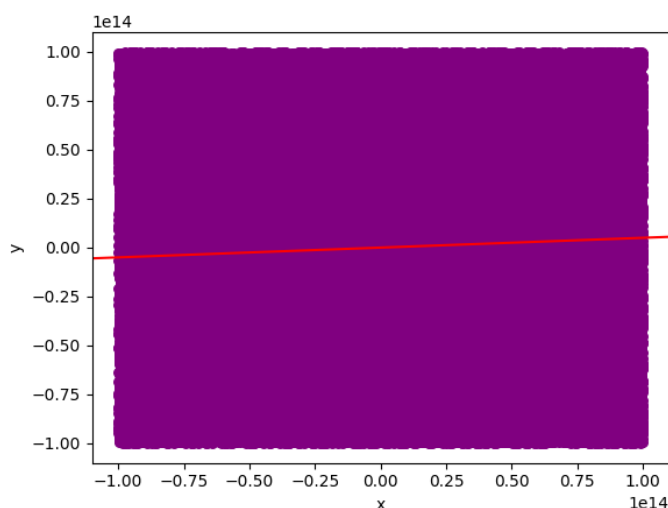
**Tabela 3.3 Punkty ze zbioru B zakwalifikowane na prostej**

Widzimy że pomiędzy współrzędną punktu na osi Y, a współrzędną obliczoną przez podstawienie do wzoru jest znaczna różnica.

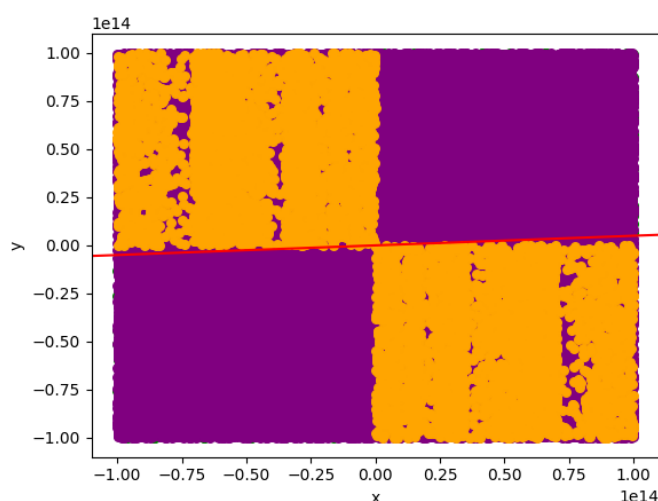


**Wykres 3.2 Klasyfikacja punktów dla precyzji float64**

Dla precyzji float32 możemy zaobserwować „anomalie” w naszej tabeli. Wynika to ze względu na zakres float’a i z tego, że przy liczeniu rozkładu funkcją wyznacznika macierzy 2x2 wychodzimy poza zakres i wychodzą nam błędne wyniki. Przy obliczaniu rozkładu funkcją wyznacznika macierzy 3x3 wyniki są równe wynikom które otrzymaliśmy dla precyzji float64.



**Wykres 3.3 Rozkład punktów dla precyzji float32 obliczanych funkcją mat\_det\_2x2**



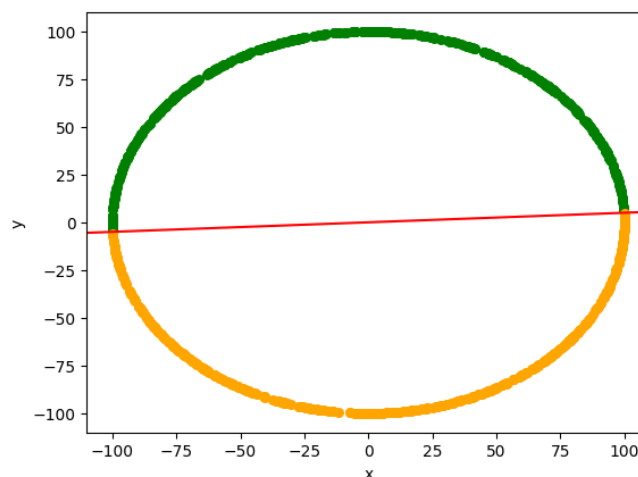
**Wykres 3.4 Rozkład punktów dla precyzji float32 obliczanych funkcją mat\_det\_2x2\_lib**

## Rozkład punktów w zbiorze C

Funkcja użyta do obliczenia wyznacznika	Precyzja float64			Precyzja float32		
	Liczba punktów z lewej	Liczba punktów na prostej	Liczba punktów z prawej	Liczba punktów z lewej	Liczba punktów na prostej	Liczba punktów z prawej
	$\epsilon = 0$			$\epsilon = 0$		
mat_det_2x2	494	0	506	494	0	506
mat_det_2x2_lib	494	0	506	494	0	506
mat_det_3x3	494	0	506	494	0	506
mat_det_3x3_lib	494	0	506	494	0	506
	$\epsilon = 10^{-8}$			$\epsilon = 10^{-8}$		
mat_det_2x2	494	0	506	494	0	506
mat_det_2x2_lib	494	0	506	494	0	506
mat_det_3x3	494	0	506	494	0	506
mat_det_3x3_lib	494	0	506	494	0	506
	$\epsilon = 10^{-10}$			$\epsilon = 10^{-10}$		
mat_det_2x2	494	0	506	494	0	506
mat_det_2x2_lib	494	0	506	494	0	506
mat_det_3x3	494	0	506	494	0	506
mat_det_3x3_lib	494	0	506	494	0	506
	$\epsilon = 10^{-12}$			$\epsilon = 10^{-12}$		
mat_det_2x2	494	0	506	494	0	506
mat_det_2x2_lib	494	0	506	494	0	506
mat_det_3x3	494	0	506	494	0	506
mat_det_3x3_lib	494	0	506	494	0	506
	$\epsilon = 10^{-14}$			$\epsilon = 10^{-14}$		
mat_det_2x2	494	0	506	494	0	506
mat_det_2x2_lib	494	0	506	494	0	506
mat_det_3x3	494	0	506	494	0	506
mat_det_3x3_lib	494	0	506	494	0	506

Tabela 3.4 Rozkład punktów w zbiorze C

Jak widać w tabeli powyżej, wyniki dla wszystkich funkcji liczenia wyznacznika, dla każdej dokładności i precyzji są identyczne.



Wykres 3.5 Klasyfikacja punktów w zbiorze C

## Rozkład punktów w zbiorze D

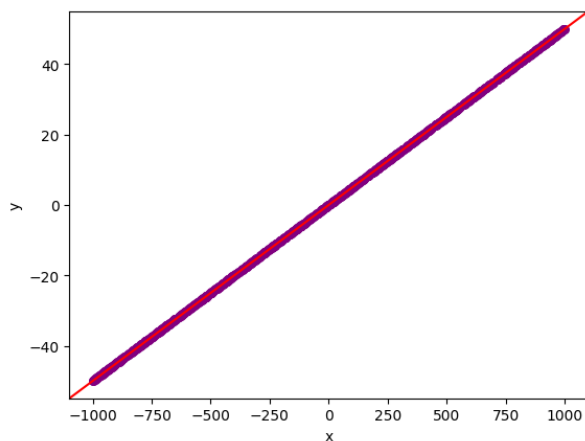
Funkcja użyta do obliczenia wyznacznika	Precyzja float64			Precyzja float32		
	Liczba punktów z lewej	Liczba punktów na prostej	Liczba punktów z prawej	Liczba punktów z lewej	Liczba punktów na prostej	Liczba punktów z prawej
	$\epsilon = 0$			$\epsilon = 0$		
mat_det_2x2	142	717	140	162	663	175
mat_det_2x2_lib	168	671	161	485	0	515
mat_det_3x3	179	406	415	307	391	302
mat_det_3x3_lib	371	181	448	468	38	494
	$\epsilon = 10^{-8}$			$\epsilon = 10^{-8}$		
mat_det_2x2	0	1000	0	161	664	175
mat_det_2x2_lib	0	1000	0	483	4	513
mat_det_3x3	0	1000	0	303	395	302
mat_det_3x3_lib	0	1000	0	388	196	416
	$\epsilon = 10^{-10}$			$\epsilon = 10^{-10}$		
mat_det_2x2	0	1000	0	162	663	175
mat_det_2x2_lib	0	1000	0	485	0	515
mat_det_3x3	0	1000	0	307	391	302
mat_det_3x3_lib	0	1000	0	391	192	417
	$\epsilon = 10^{-12}$			$\epsilon = 10^{-12}$		
mat_det_2x2	76	856	68	162	663	175
mat_det_2x2_lib	114	786	100	485	0	515
mat_det_3x3	0	1000	0	307	391	302
mat_det_3x3_lib	0	1000	0	391	192	417
	$\epsilon = 10^{-14}$			$\epsilon = 10^{-14}$		
mat_det_2x2	137	730	133	162	663	175
mat_det_2x2_lib	161	689	150	485	0	515
mat_det_3x3	0	1000	0	307	391	302
mat_det_3x3_lib	18	860	122	405	164	431

Tabela 3.5 Rozkład punktów w zbiorze D

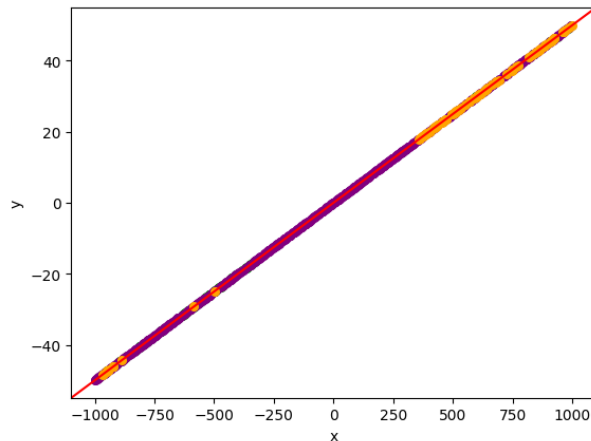
Rozkład punktów w zbiorze D jest generowany na samej prostej, więc czysto teoretycznie powinniśmy otrzymać wynik bliski wszystkim punktom położonym bezpośrednio na prostej. Dzieje się tak jednak tylko dla precyzji float64 i dla stosunkowo dużych dokładności (przypadek dokładności  $\epsilon = 0$  opisze poniżej). Dla precyzji float32 wyniki nie są nawet zbliżone do oczekiwanych, w metodzie obliczania wyznacznika funkcją mat\_det\_2x2 wyniki są znacząco lepsze od pozostałych z precyzją float32, jednak nadal zostawiają wiele do życzenia. Możemy zauważyć nawet, że przy obliczaniu wyznacznika funkcją mat\_det\_2x2\_lib program nie klasyfikuje żadnych punktów na prostej.

Dla precyzji float64 i dokładności  $\epsilon = 0$  obliczenia nie są zbyt dokładne. Funkcje obliczające wyznacznik 2x2 dają wrażenie że są dokładniejsze, lecz tak jak w przypadku precyzji float32 nadal jest im daleko do perfekcji.

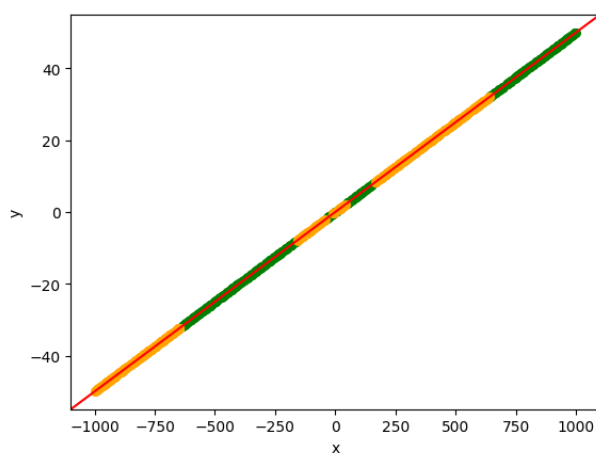
Poniżej przedstawiam reprezentacje graficzne różnych precyzji oraz dokładności danych rozkładów punktów ze zbioru D.



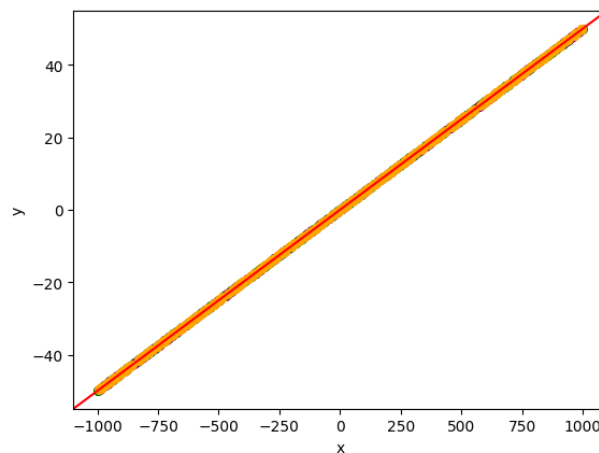
**Wykres 3.6 funkcja mat\_det\_2x2**  
precyzja float64 dokładność  $\varepsilon = 10^{-8}$



**Wykres 3.7 funkcja mat\_det\_2x2\_lib**  
precyzja float64 dokładność  $\varepsilon = 10^{-12}$



**Wykres 3.8 funkcja mat\_det\_2x2\_lib**  
precyzja float32 dokładność  $\varepsilon = 10^{-8}$



**Wykres 3.9 funkcja mat\_det\_3x3\_lib**  
precyzja float32 dokładność  $\varepsilon = 10^{-10}$

#### 4. Podsumowanie i wnioski

Na podstawie przeprowadzonych testów i wyników jesteśmy w stanie stwierdzić że dla zbiorów A,B i C różnic albo nie ma albo są tak niewielkie, że nie widać różnicy nie ważne którą funkcją obliczymy wyznacznik oraz z jaką dokładnością i precyzją będziemy prezentować wyniki.

Natomiast przy rozkładzie punktów w zbiorze D sytuacja ma się inaczej. Zauważyliśmy że jedynie przy dużej precyzji i przy dużej dokładności obliczeń, wyniki są zgodne z oczekiwanymi. Dla mniejszej precyzji (float32) większość punktów nie była klasyfikowana na prostej, tak samo miała się sytuacja dla większych dokładności. Z tabeli można wywnioskować że dla precyzji float32 najgorzej radziły sobie funkcje obliczania macierzy 2x2 (mat\_det\_2x2, mat\_det\_2x2\_lib), jednak dla większej precyzji dopiero przy mniejszych dokładnościach miało znaczenie to jaką funkcją obliczymy wyznacznik.

To ćwiczenie pokazało nam, że operacje na liczbach rzeczywistych w komputerze nie zawsze muszą nam się pokrywać z wynikami teoretycznymi, powinno się brać jak największą precyzję obliczeń w komputerze i należy przyjmować pewną tolerancję błędów.