Sprawozdanie z ćwiczenia drugiego

Algorytmy Geometryczne

Iwo Szczepaniak, Windows 11 – 4,2GHz

Jupyter Notebook, VS Code Python 3.9.12

1) Wstęp

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie otoczki wypukłej(najmniejszego zbioru wypukłego zawierającego podzbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie) dla konkretnego zbioru punktów. Do tego celu, pierwszym zadaniem jest wygenerowanie zadanych punktów i ich wizualizacja, a następnie umożliwienie zmiany ilości punktów oraz ich zakresu w zależności od życzenia użytkownika. Operując na tak wyznaczonych punktach, naszym zadaniem jest wyznaczyć otoczkę wypukłą. Do jej generowania służą dwa algorytmy – Grahama oraz Jarvisa.

2) Opis algorytmów

- Algorytm Grahama:

Złożoność obliczeniowa :
n – szukanie minimum
nlogn – sortowanie
n – przejście po punktach sprawdzając ich położenia względem siebie
Prognozowana złożoność: słabe nlogn

1. Wybierz *punkt startowy* o najmniejszej współrzędnej x; jeśli kilka punktów ma tę samą współrzędną y, wybierz spośród nich ten o największej współrzędnej y.
2. Posortuj punkty względem:
    - Orientacji względem *punktu startowego* -> funkcja orient(a,b,c) z poprzedniego laboratorium
    - Gdy „kąt” równy, względem odległości punktu od punktu startowego
3. Przeglądaj listę posortowanych punktów poczynając od *punktu startowego*:
    - Od bieżącej pozycji weź trzy kolejne punkty
    - Jeśli punkt trzeci punkt leży po prawej stronie od prostej na której leżą pierwsze dwa punkty, to może należeć do otoczki
    - Jeśli punkt B leży na lewo od prostej na której leżą pierwsze dwa punkty, to znaczy, że nie należy do otoczki. Wtedy usuń ten punkt ze stosu i cofnij się o jedną pozycję.
    - Powtarzaj aż dotrzesz z powrotem do punktu startowego

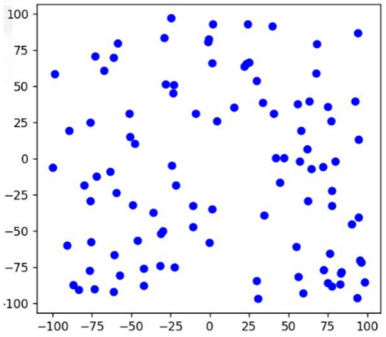
-Algorytm Jarvisa:

Złożoność obliczeniowa:
nh – n szukań dla h punktów otoczki(pesymistycznie n^2)
Prognozowana złożoność: wyniki pomiędzy n a n^2

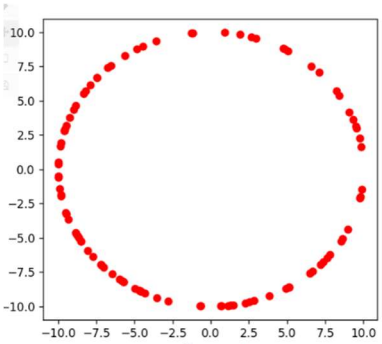
1. Wybierz *punkt startowy* tak samo jak w algorytmie Grahama.
2. Przejrzyj wszystkie wierzchołki i dodaj na stos ten który jest najbardziej na lewo od ostatniego wierzchołka na stosie.
3. Powtarzaj aż dotrzesz z powrotem do punktu startowego.

3) Generowanie i wizualizacja punktów

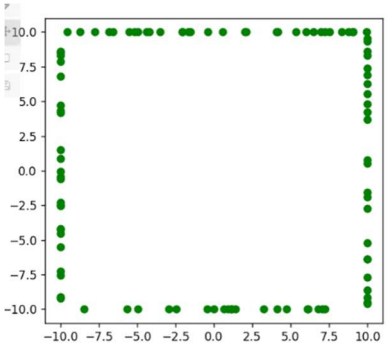
Zadaniem było przygotowanie:
a) zawierający 100 losowo wygenerowanych punktów o współrzędnych z przedziału [-100, 100],
b) zawierający 100 losowo wygenerowanych punktów leżących na okręgu o środku (0,0) i promieniu R=10,
c) zawierający 100 losowo wygenerowanych punktów leżących na bokach prostokąta o wierzchołkach (-10, 10), (-10,-10), (10,-10), (10,10),
d) zawierający wierzchołki kwadratu (0, 0), (10, 0), (10, 10), (0, 10) oraz punkty wygenerowane losowo w sposób następujący: po 25 punktów na dwóch bokach kwadratu leżących na osiach i po 20 punktów na przekątnych kwadratu.



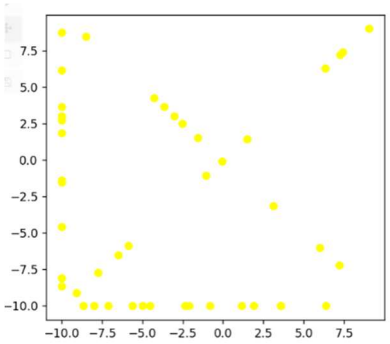
Rys. 1
Wizualizacja zadania a)



Rys. 2
Wizualizacja zadania b)



Rys. 3
Wizualizacja zadania c)



Rys. 4
Wizualizacja zadania d)

Implementacja pozwala też na zmianę ilości generowanych punktów oraz wielkości figur na których są generowane punkty – okręgu, kwadratu i wycinka kwadratu wraz z przekątną– lub zakresu generowanych punktów

4) Wizualizacja działania algorytmów

Pełna wizualizacja w Jupyter Notebook.

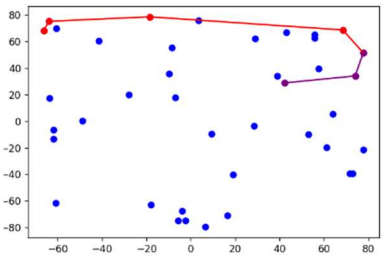
Do wizualizacji działania programu wykorzystano, zgodnie z poleceniem, trzy kolory. Czerwony odpowiada za punkty na otoczce, fioletowy za punkty aktualnie przetwarzane, a niebieski za pozostałe.
Aby zwizualizować konkretny podpunkt należy wprowadzić odpowiadającą mu literę.

Poniżej umieszczono jedynie niektóre interesujące wizualizacje w trakcie działania algorytmów.

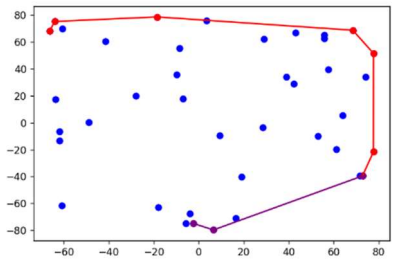
Słowniczek wizualizacji:

n – liczba punktów
r – promień okręgu
S – środek okręgu
downLeft – lewy dolny róg prostokąta
upRight – prawy górny róg prostokąta
a – długość boku w kwadracie w podpunkcie d
m – liczba punktów na przekątnej w podpunkcie d

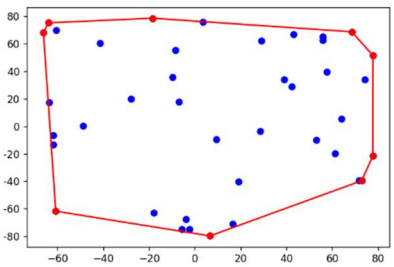
- Algorytm Grahama



Rys. 5a

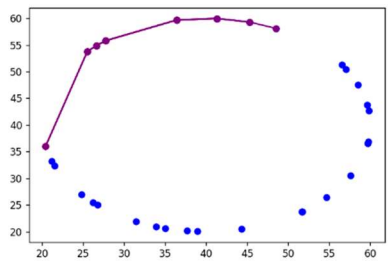


Rys. 5b

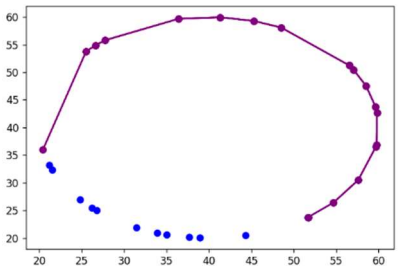


Rys. 5c

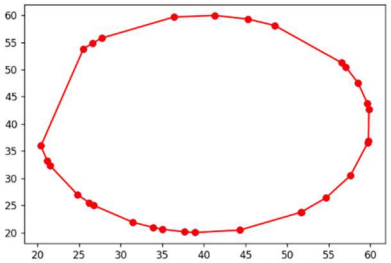
*Podpunkt a) z parametrami: n = 40, zakres [-80,80]



Rys. 6a

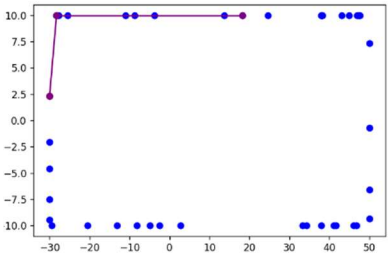


Rys. 6b

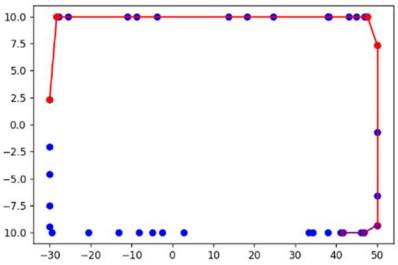


Rys. 6c

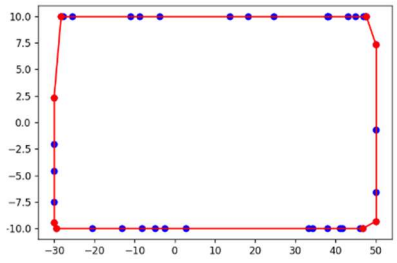
*Podpunkt b) z parametrami: n = 30, r = 20, S = (40,40)



Rys. 7a

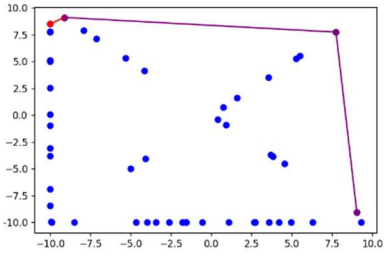


Rys. 7b

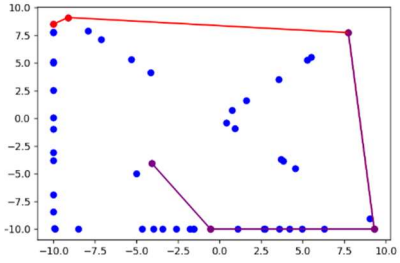


Rys. 7c

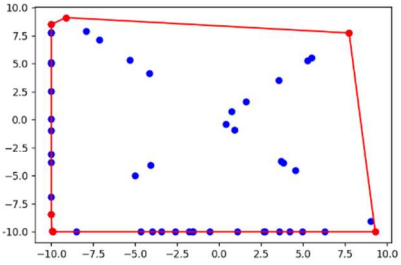
*Podpunkt c) z parametrami: n = 40, downLeft = (-30,-10), upRight = (50,10)



Rys. 8a



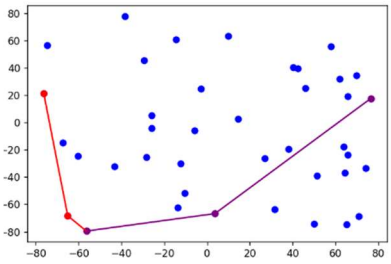
Rys. 8b



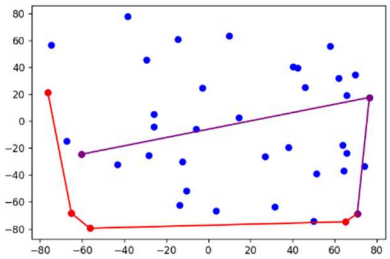
Rys. 8c

*Podpunkt d) z parametrami: n = 30, m =20, downLeft = (-10,-10), a = 20

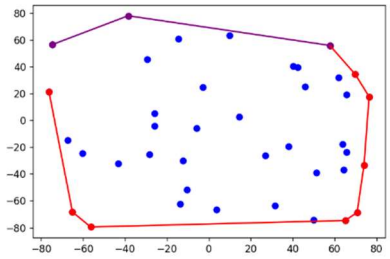
- Algorytm Jarvisa



Rys. 9a

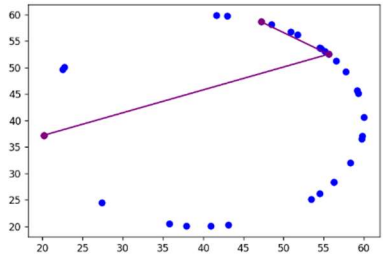


Rys. 9b

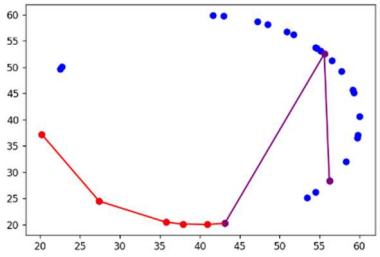


Rys. 9c

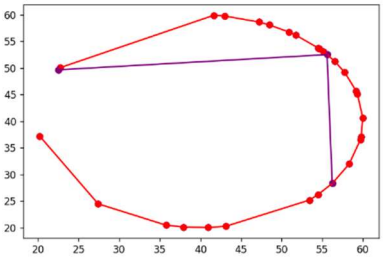
*Podpunkt a) z parametrami: n = 40, zakres [-80,80]



Rys. 10a

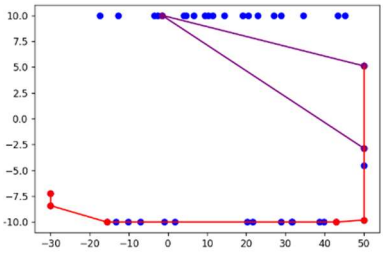


Rys. 10b

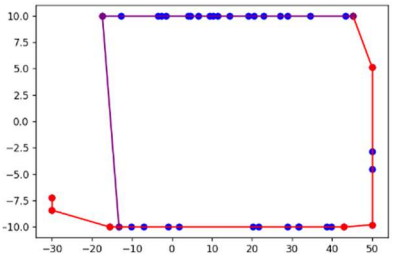


Rys. 10c

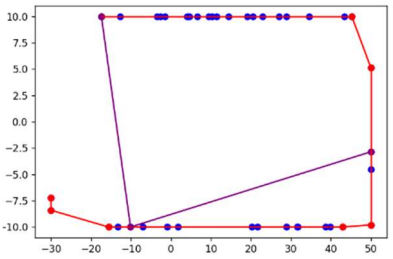
*Podpunkt b) z parametrami: n = 30, r = 20, S = (40,40)



Rys. 11a

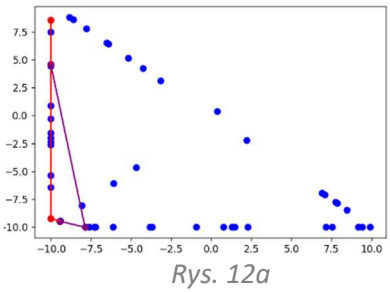


Rys. 11b

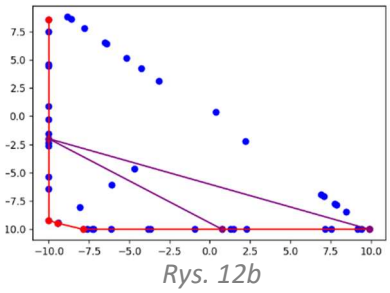


Rys. 11c

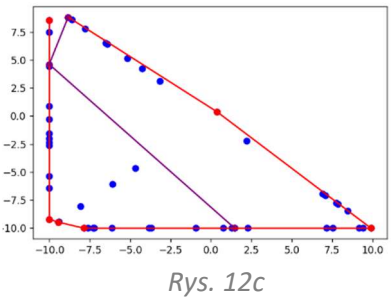
*Podpunkt c) z parametrami: n = 40, downLeft = (-30,-10), upRight = (50,10)



Rys. 12a



Rys. 12b



Rys. 12c

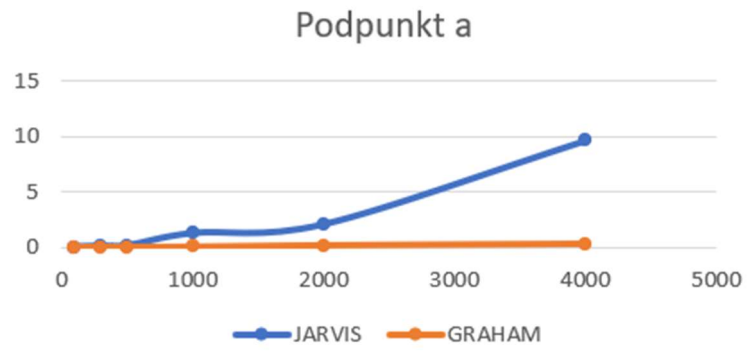
*Podpunkt d) z parametrami: n = 30, m =20, downLeft = (-10,-10), a = 20

5) Czasochłonność ze względu na liczbę punktów algorytm wraz z wizualizacją:

Podpunkt a)

n	JARVIS [s]	GRAHAM [s]
100	0.02352047	0.005017996
300	0.098564863	0.008991718
500	0.128087521	0.018006086
1000	1.25450182	0.043254375
2000	2.045077801	0.177389622
4000	9.666536808	0.33026433

Tab. 1

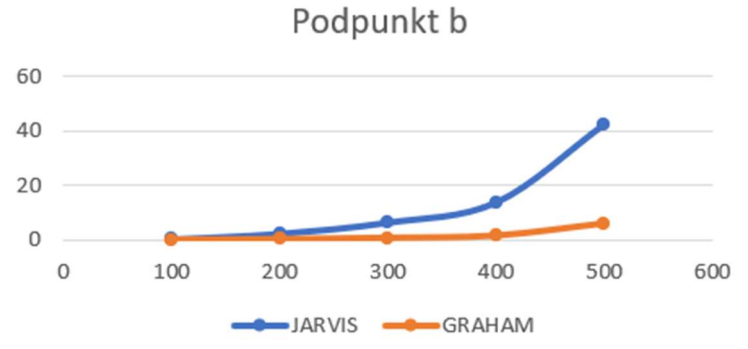


Rys. 13

Podpunkt b)

n	JARVIS [s]	GRAHAM [s]
100	0.192240477	0.0504632
200	2.231305361	0.24768424
300	6.34507966	0.719551086
400	13.7860055	1.574402332
500	42.40614486	6.080311537

Tab. 2

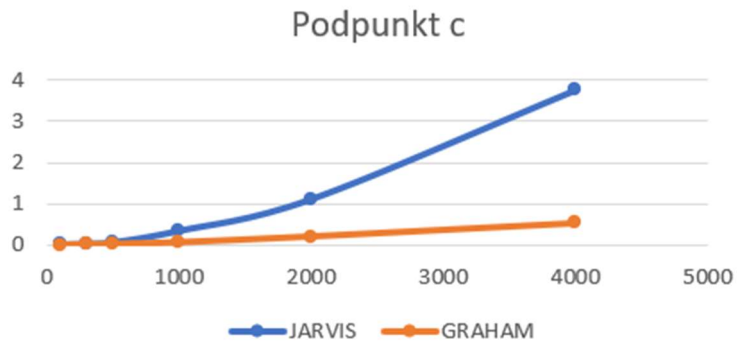


Rys. 14

Podpunkt c)

n	JARVIS [s]	GRAHAM [s]
100	0.015676737	0.005457401
300	0.031009436	0.012002468
500	0.064010859	0.02415061
1000	0.344103336	0.06397748
2000	1.113039494	0.205542088
4000	3.769374609	0.531229258

Tab. 3

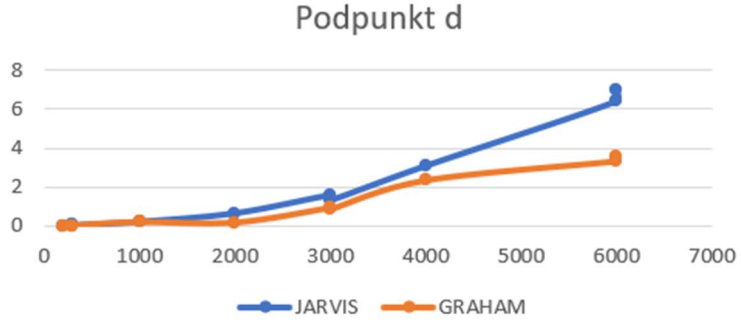


Rys. 15

Podpunkt d)

n+m	JARVIS [s]	GRAHAM [s]
100+100	0.013278008	0.009525299
100+200	0.025690079	0.010002136
200+100	0.024696589	0.014503241
500+500	0.203298807	0.190287113
1000+1000	0.639288664	0.156689405
1000+2000	1.57102704	0.922906399
2000+1000	1.308087111	0.846460342
2000+2000	3.076281786	2.347368002
4000+2000	6.400309324	3.344535828
2000+4000	7.627174616	3.548235416

Tab. 4



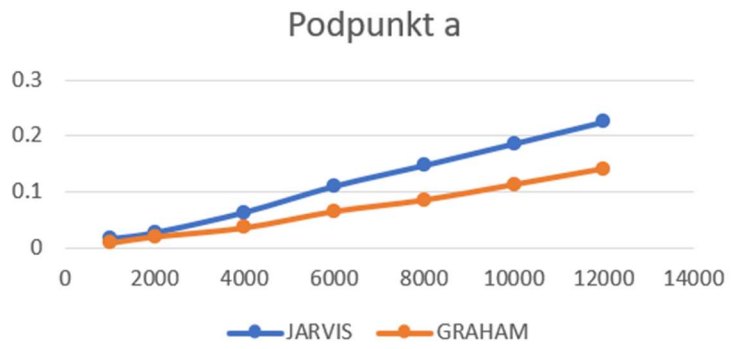
Rys. 16

CZASOCHŁONNOŚĆ – BEZ WIZUALIZACJI

Podpunkt a)

n	JARVIS [s]	GRAHAM [s]
1000	0.01548767	0.00914884
2000	0.02662659	0.02023649
4000	0.06312585	0.03620243
6000	0.10997272	0.06528592
8000	0.14719725	0.08533502
10000	0.18608737	0.11293578
12000	0.22539473	0.14110279

Tab. 5

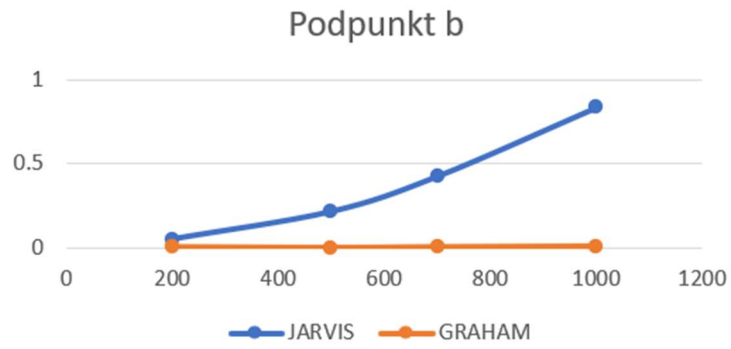


Rys. 17

Podpunkt b)

n	JARVIS [s]	GRAHAM [s]
200	0.04965997	0.00427485
500	0.21457386	0
700	0.42411566	0.00405645
1000	0.83552051	0.0080204

Tab. 6

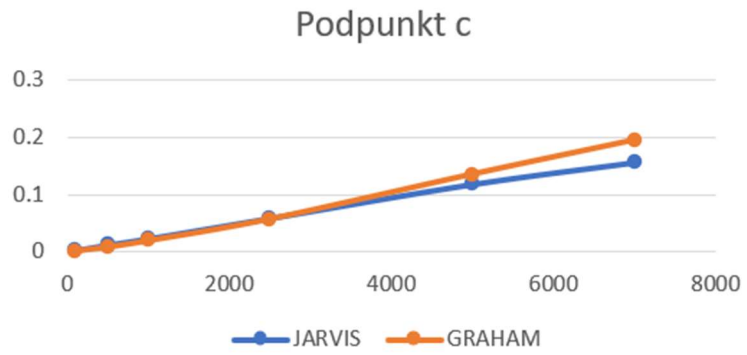


Rys. 18

Podpunkt c)

n	JARVIS [s]	GRAHAM [s]
100	0.00343275	0.0022285
500	0.01285267	0.00894427
1000	0.02377415	0.02002335
2500	0.05917048	0.05750895
5000	0.11804914	0.13523197
7000	0.15590477	0.19451022
10000	0.23317289	0.28978062

Tab. 7

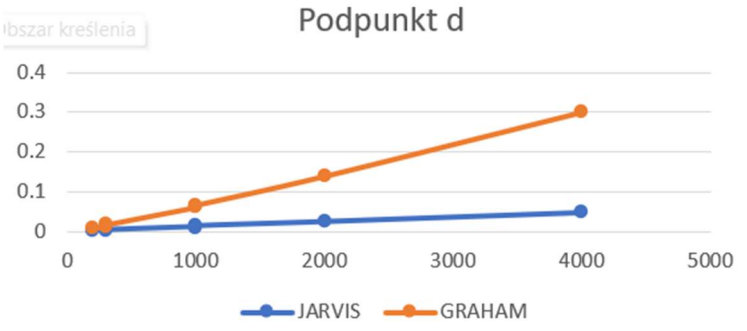


Rys. 19

Podpunkt d)

d	JARVIS [s]	GRAHAM [s]
100+100	0.00305986	0.00857973
100+200	0.00300097	0.01376009
200+100	0.00402522	0.01728296
500+500	0.01195645	0.06151152
300+700	0.00840282	0.06327271
700+300	0.01424789	0.06680799
1000+1000	0.0254457	0.13985467
2000+2000	0.04910636	0.30078149

Tab. 8



Rys. 20

Wnioski

Na podstawie otrzymanych wykresów można stwierdzić, że czas wykonywania był zgodny z przewidywaniami – Graham około nlogn, choć często wygląda na algorytm liniowy z dużym współczynnikiem a. Jarvis natomiast okazał się, jak podejrzewano, znacząco zależny od ilości punktów w otoczce – od złożoności n w podpunkcie d aż do n^2 w podpunkcie b.

Wnioski dla testów z wizualizacją:

W podpunktach a i c widać znaczącą różnicę między dwoma podejściami, ale w podpunkcie b różnica jest największa. Różnica w czasie wykonywania algorytmów wynosząca 35 s pojawia się już przy generowaniu 500 punktów. Jest to prawdopodobnie spowodowane tym, że w tym podpunkcie wszystkie punkty wygenerowane należą do otoczki(zbiorem punktów jest okrąg) więc współczynnik h jest równy n. W podpunkcie d różnica między algorytmami się znacznie zaciera i to z kolei jest to spowodowane stosunkowo małą ilością punktów wchodzących w skład otoczki na zadanej figurze, co zmniejsza współczynnik h. Mimo to algorytm Grahama nadal był zauważalnie wydajniejszy w tym podpunkcie.

Dla wszystkich zbiorów punktów algorytm Grahama okazał się szybszy od algorytmu Jarvisa.

Wnioski dla testów bez wizualizacji:

W podpunkcie a oba algorytmy wykazują niemal liniowy wzrost i różnica między nimi jest dość znikoma, chociaż rośnie stopniowo im więcej punktów - na korzyść algorytmu Grahama(z przewagi 0,006s dla 2000 punktów do 0,1s dla 12000 punktów).

W podpunkcie b przewaga algorytmu Grahama umacnia się znacznie szybciej – już przy 1000 punktów różnica to 1 sekunda. Jest to efektem pesymistycznej złożoności n^2 algorytmu Jarvisa - na okręgu wszystkie punkty należą do otoczki.

Podpunkt c to podpunkt w którym czasy ponownie wydają się rosnąć liniowo, jednak współczynnik prostej dla algorytmu Grahama jest mniej korzystny i dla około 2500 punktów zachodzi przełamanie, powyżej którego to algorytm Jarvisa staje się skuteczniejszy(to oznacza, że od tego punktu $\log n > k$).

Podpunkt d to zupełne odwrócenie sytuacji z punktu b. Tym razem to algorym Jarvisa ma znaczną przewagę, ponieważ za każdym razem ilość punktów które tworzą obwódkę jest równa 4, więc algorytm rośnie liniowo i to z bardzo małym współczynnikiem. Dla 4000 punktów przewaga Jarvisa to około 0,25 sekundy.

Podsumowanie:

Uwzględnienie wizualizacji znacznie zakłamało wyniki na niekorzyść algorytmu Jarvisa – duża ilość dodawanych scen bardzo przeszkadzała w ukazaniu korzyści tego podejścia w podpunktach c i d. Dodatkowo pierwotnie w algorytmie generującym punkty w podpunkcie d brakowało wierzchołkowych punktów, co dodatkowo działało na niekorzyść tego algorytmu.

Analiza testów bez wizualizacji jasno pokazuje, że algorytmy te wykazują podobną złożoność dla większości zbiorów punktów, choć pewne skrajne przypadki takie jak generowanie punktów na okręgu czy gwarancja wystąpienia wierzchołków, znacznie przechyla korzyść z zastosowania na jeden z algorytmów - odpowiednio Grahama i Jarvisa.