# 9

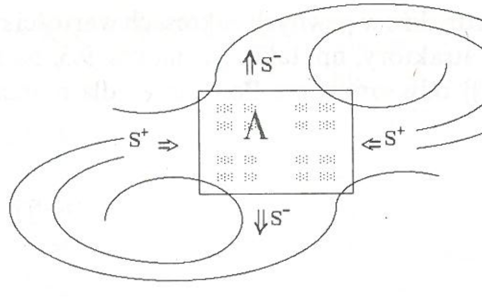
# Przykłady dziwnych atraktorów

W literaturze spotyka się kilka różnych definicji dziwnego atraktora, ale we wszystkich tych definicjach dziwny atraktor jest minimalnym zbiorem niezmienniczym i przyciągającym sąsiednie trajektorie z całego, lub z części swego otoczenia, oraz mającym „dziwną" strukturę geometryczną. To ostatnie ograniczenie wprowadza się po to, aby wyeliminować ze zbioru dziwnych atraktorów takie atraktory jak punkt, skończony zbiór punktów, gładką linię, gładką powierzchnię itp., a pozostawić między innymi zbiory Cantora, zbiory, których wymiar Hausdorffa nie jest liczbą całkowitą itp. Dziwne atraktory są obserwowane w wielu doświadczeniach numerycznych i fizycznych. Jednym z prostszych przykładów dziwnego atraktora jest atraktor Henona opisany w przykładzie 6.4.

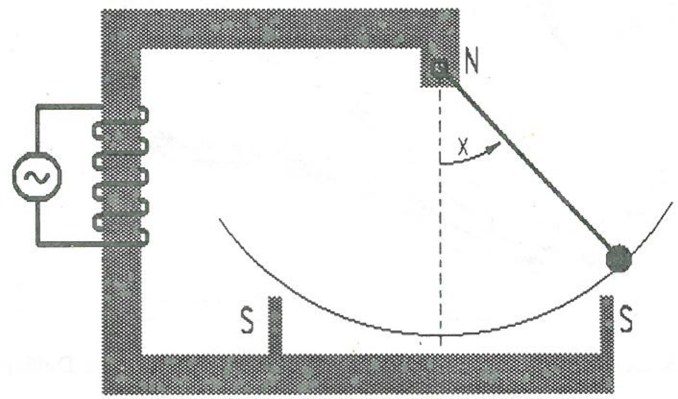
Znane nam przykłady dziwnych atraktorów są często związane ze zbiorami niezmienniczymi podkowy Smale'a. Niech odwzorowanie $F: Q \to R^2$ określone na kwadracie $Q \subset R^2$ będzie podkową Smale'a, mającą zbiór niezmienniczy $\Lambda$. Dla każdej okresowej orbity odwzorowania $F$ istnieją nie należące do zbioru $\Lambda$ trajektorie $\{F^n(z)\}$, które są przyciągane do tej orbity, a również istnieją takie trajektorie, które są od niej odpychane. Oznaczmy przez $S^+$ rodzinę trajektorii przyciąganych do zbioru $\Lambda$, a przez $S^-$ rodzinę trajektorii odpychanych od $\Lambda$ (rys. 9.1). Czasami zdarza się, że trajektorie rodziny $S^-$ trafiają ostatecznie do rodziny $S^+$, tak jak to pokazano schematycznie na rys. 9.1. Powstaje wówczas zbiór niezmienniczy $A_\infty$ (zawierający w sobie $\Lambda$), w którym nie ma ani jednej stabilnej trajektorii, a mimo to cały zbiór $A_\infty$ przyciąga wszystkie trajektorie ze swego otoczenia. Zbiór $A_\infty$ ma miarę (Lebesgue'a) równą zero i „dziwną strukturę". Tego typu zbiory są częstymi przykładami dziwnych atraktorów.

Pokażemy teraz trzy przykłady dziwnych atraktorów występujących w układach dynamicznych opisujących zjawiska przyrodnicze [6], [8].






**Rys. 9.1.** Schemat powstawania dziwnego atraktora z podkowy Smale'a

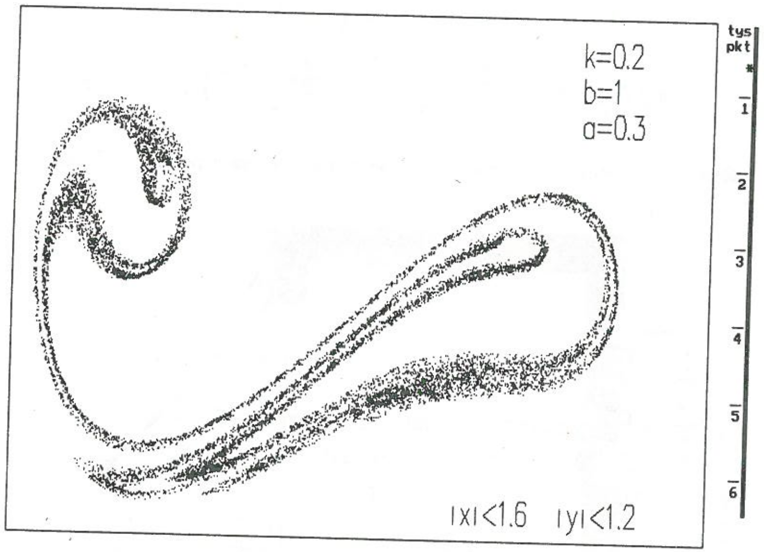



**Rys. 9.2.** Wahadło magnetyczne z okresowym wymuszeniem

**Przykład 9.1.** Prostym układem fizycznym, w którym pojawiają się dziwne atraktory, jest „wahadło magnetyczne" pobudzane do drgań przez okresowo zmienny strumień magnetyczny (rys. 9.2). Uproszczonym opisem takiego wahadła jest równanie różniczkowe Duffinga

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} - b(x - x^3) = a\sin t \tag{9.1}$$

Niech $z_t = \{x(t), y(t)\}$ będzie wektorem, którego pierwsza współrzędna jest wychyleniem wahadła od pionu, a druga prędkością kątową ($y = dx/dt$) w chwili $t$. Niech $F$ będzie odwzorowaniem Poincarégo, tj. funkcją, która punktowi $z_0$ przyporządkowuje punkt $z_T = F(z_0)$, gdzie $T = 2\pi$ jest okresem, z jakim zmienia się siła wymuszająca drgania. Oczywiście odwzorowanie $F$ zależy od trzech dodatnich parametrów $k$, $b$, $a$ i przy zmianie wartości parametrów zmienia się dynamika układu. Układ dynamiczny $(R^2, F)$ zawsze ma przynajmniej jeden atraktor. Najczęściej jest nim stabilny punkt stały lub stabilna okresowa orbita zawierająca skończoną liczbę punktów. Takim atraktorom odpowiadają stabilne rozwiązania okresowe równania (9.1) z okresem $2\pi$ lub odpowiednio wielokrotnością $2\pi$. Jednakże w pewnych zakresach wartości parametrów $k, b, a$ pojawiają się dziwne atraktory, np. takie jak na rys. 9.3, na którym pokazano 6000 punktów $\{F^n(z_0)\}$ odwzorowania Poincarégo dla numerów $n = 500$-$6500$ i dla $z_0 = (0, 0)$.




**Rys. 9.3.** Dziwny atraktor odwzorowania Poincarégo dla równania Duffinga (9.1)

Przy ustalonych wartościach parametrów $k, b, a$ układ dynamiczny $(R^2, F)$ może mieć wiele atraktorów, np. punkt stały, jedną lub kilka okresowych orbit i dziwny atraktor. Wówczas w zależności od punktu początkowego $z_0$ trajektoria $\{F^n(z_0)\}$ zmierza do różnych atraktorów i zachowanie się rozwiązań równania (9.1) w stanie ustalonym zależy od warunku początkowego. Dla jednych punktów startowych $z_0$ może być ono okresowe, a dla innych chaotyczne.

**Przykład 9.2.** Rozpatrzmy dość typowy generator elektroniczny opisany układem równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{d\tau} = ax - y - (z + 2x)^2$$
$$\frac{dy}{d\tau} = x - ay - (a + b)(z + 2x)^2 \qquad (9.2)$$
$$\frac{dz}{d\tau} = -bz + 2(z + 2x)^2$$

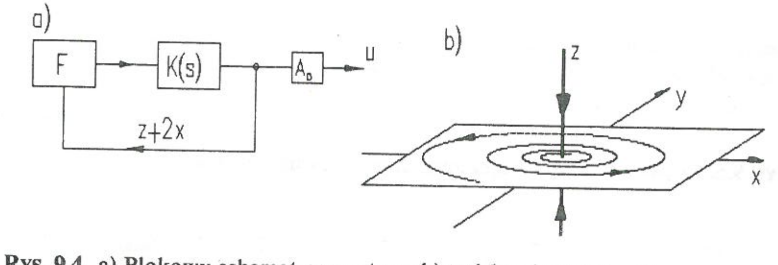
Schemat blokowy takiego generatora przedstawiono na rys. 9.4a. Przyjmujemy, że charakterystyka elementu nieliniowego jest funkcja kwadratowa ...



a transmitancja $K(s)$ liniowej części układu ma trzy bieguny: $-\omega b$, $\omega(a$ - $\omega(a - i)$ (gdzie $a, b, \omega > 0$) i nie ma punktów zerowych. Transmitancja za... więc od czterech parametrów. W zależności od przyjętego układu współrzędn... można opisywać układ rozmaitymi równaniami. We wzorach (9.2) przyjęto ... układ współrzędnych, aby dla układu zlinearyzowanego w punkcie osobliw... (0, 0, 0) płaszczyzna $z = 0$ była rozmaitością niestabilną, a oś $x = y$ ... rozmaitością stabilną (rys. 9.4b). Rozwiązania układu zlinearyzowanego m... więc postać

$$x(\tau) = e^{a\tau}\cos(\tau), \qquad y(\tau) = e^{a\tau}\sin(\tau), \qquad z(\tau) = e^{-b\tau} \qquad (9$$

Ponadto unormowano skalę na osiach $x\ y\ z$ i na osi czasu ($\tau = \omega t$), co pozwo... zredukować liczbę parametrów do dwóch.




**Rys. 9.4.** a) Blokowy schemat generatora; b) trajektorie układu zlinearyzowanego w otoczeniu początku układu współrzędnych

Sygnał wyjściowy generatora $u(t) = A_0[z(t) + 2x(t)]$, w unormowanej sk... czasu ($\tau = \omega t$) i napięcia, spełnia równanie różniczkowe trzeciego rzędu

$$\frac{d^3u}{d\tau^3} + c_2\frac{d^2u}{d\tau^2} + c_1\frac{du}{d\tau} + c_0u - u^2 = 0 \qquad (9.$$

gdzie: $c_2 = b - 2a$, $c_1 = 1 - 2ab + a^2$, $c_0 = b(1 + a^2)$, $A_0 = [1 + (a + b)^2]^-$

Dynamika układu opisanego równaniami (9.2) zależy od dwóch dodatni... parametrów $a$ i $b$. Dla szerokiego zakresu parametrów (np. dla $0{,}2 < b < 0$ i $a < 0{,}08$) układ równań (9.2) ma stabilne okresowe rozwiązanie, któreg... zamknięta trajektoria $\{x(\tau), y(\tau), z(\tau): \tau \in [0, T]\}$ jeden raz otacza oś $z$. Oczywiśc... kształt trajektorii i długość okresu $T$ zależą od parametrów $a$ i $b$. Jeśli $b > 0{,}38$, t... przy wzroście parametru $a$ obserwuje się zjawisko kolejnego podwajani... długości okresu tak jak w kaskadzie Feigenbauma (trajektoria okresowa otacz... wówczas oś $z$ odpowiednio 2, 4, 8, 16, ...-krotnie w ciągu jednego okresu). Prz... dalszym wzroście parametru $a$ trajektoria okresowa zamienia się w chaotyczn... i powstaje dziwny atraktor, np. taki jak pokazano na rys. 9.5. Jest to rysune... trajektorii „w stanie ustalonym" w perspektywicznym rzucie trójwymiarow...