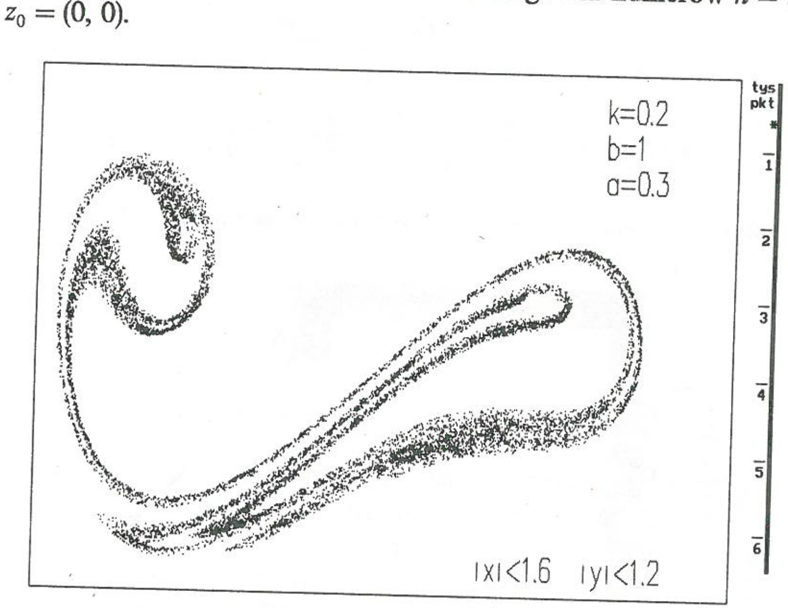
wielokrotnością 2π. Jednakże w pewnych zakresach wartości parametrów k, b, a pojawiają się dziwne atraktory, np. takie jak na rys. 9.3, na którym pokazano 6000 punktów $\{F^n(z_0)\}$ odwzorowania Poincarégo dla numerów $n = 500\text{-}6500$ i dla $z_0 = (0, 0)$.



Rys. 9.3. Dziwny atraktor odwzorowania Poincarégo dla równania Duffinga (9.1)

Przy ustalonych wartościach parametrów k, b, a układ dynamiczny (R^2, F) może mieć wiele atraktorów, np. punkt stały, jedną lub kilka okresowych orbit i dziwny atraktor. Wówczas w zależności od punktu początkowego z_0 trajektoria $\{F^n(z_0)\}$ zmierza do różnych atraktorów i zachowanie się rozwiązań równania (9.1) w stanie ustalonym zależy od warunku początkowego. Dla jednych punktów startowych z_0 może być ono okresowe, a dla innych chaotyczne.

Przykład 9.2. Rozpatrzmy dość typowy generator elektroniczny opisany układem równań różniczkowych:

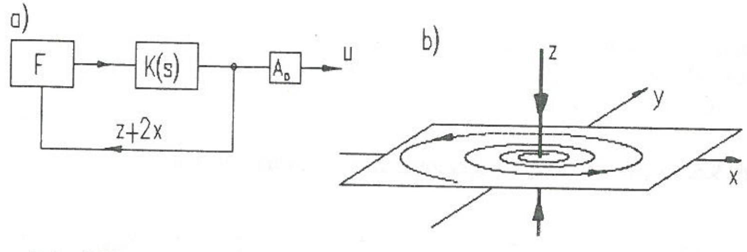
$$\frac{dx}{d\tau} = ax - y - (z + 2x)^2$$
$$\frac{dy}{d\tau} = x - ay - (a + b)(z + 2x)^2 \qquad (9.2)$$
$$\frac{dz}{d\tau} = -bz + 2(z + 2x)^2$$

Schemat blokowy takiego generatora przedstawiono na rys. 9.4a. Przyjmujemy, że charakterystyka elementu nieliniowego jest funkcją kwadratową

a transmitancja $K(s)$ liniowej części układu ma trzy bieguny: $-\omega b$, $\omega(a$ -
$\omega(a - i)$ (gdzie $a, b, \omega > 0$) i nie ma punktów zerowych. Transmitancja za
więc od czterech parametrów. W zależności od przyjętego układu współrzędn
można opisywać układ rozmaitymi równaniami. We wzorach (9.2) przyjęto
układ współrzędnych, aby dla układu zlinearyzowanego w punkcie osobliw
(0, 0, 0) płaszczyzna $z = 0$ była rozmaitością niestabilną, a oś $x = y$
rozmaitością stabilną (rys. 9.4b). Rozwiązania układu zlinearyzowanego m
więc postać

$$x(\tau) = e^{a\tau}\cos(\tau), \qquad y(\tau) = e^{a\tau}\sin(\tau), \qquad z(\tau) = e^{-b\tau} \qquad (\text{9}$$

Ponadto unormowano skalę na osiach $x\ y\ z$ i na osi czasu ($\tau = \omega t$), co pozwo
zredukować liczbę parametrów do dwóch.



Rys. 9.4. a) Blokowy schemat generatora; b) trajektorie układu zlinearyzowanego w otoczeniu początku układu współrzędnych

Sygnał wyjściowy generatora $u(t) = A_0[z(t) + 2x(t)]$, w unormowanej sk
czasu ($\tau = \omega t$) i napięcia, spełnia równanie różniczkowe trzeciego rzędu

$$\frac{d^3u}{d\tau^3} + c_2\frac{d^2u}{d\tau^2} + c_1\frac{du}{d\tau} + c_0u - u^2 = 0 \qquad (9.$$

gdzie: $c_2 = b - 2a$, $c_1 = 1 - 2ab + a^2$, $c_0 = b(1 + a^2)$, $A_0 = [1 + (a + b)^2]^-$

Dynamika układu opisanego równaniami (9.2) zależy od dwóch dodatni
parametrów a i b. Dla szerokiego zakresu parametrów (np. dla $0{,}2 < b < 0$
i $a < 0{,}08$) układ równań (9.2) ma stabilne okresowe rozwiązanie, któreg
zamknięta trajektoria $\{x(\tau), y(\tau), z(\tau): \tau \in [0, T]\}$ jeden raz otacza oś z. Oczywiśc
kształt trajektorii i długość okresu T zależą od parametrów a i b. Jeśli $b > 0{,}38$,
przy wzroście parametru a obserwuje się zjawisko kolejnego podwajani
długości okresu tak jak w kaskadzie Feigenbauma (trajektoria okresowa otacz
wówczas oś z odpowiednio 2, 4, 8, 16, ...-krotnie w ciągu jednego okresu). Prz
dalszym wzroście parametru a trajektoria okresowa zamienia się w chaotyczn
i powstaje dziwny atraktor, np. taki jak pokazano na rys. 9.5. Jest to rysune
trajektorii „w stanie ustalonym" w perspektywicznym rzucie trójwymiarow