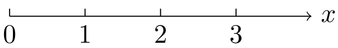
Математика

1 Натуральные числа

1.1 Определение натуральных чисел

Что такое натуральные числа(liczby naturalne)? Множество(zbiór) натуральных чисел - это числа, которые мы используем для подсчёта предметов, людей, времени и других вещей. Они начинаются с единицы и продолжаются до бесконечности, увеличиваясь на единицу: 1, 2, 3, 4, 5 и так далее. Обычно мы обозначаем эти числа на координатной прямой для визуализации:



(1)

Математически оно обозначается вот так:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{2}$$

1.2 Операции над натуральными числами

С натуральными числами мы можем выполнять все основные математические операции:

- Сложение: $2 + 3 = 5$;
- Вычитание: $5 - 2 = 3$;
- Умножение: $5 \times 2 = 10$;
- Деление: $10 \div 2 = 5$, но результат также может быть дробью, если деление нецелочисленное, например $3 \div 4 = \frac{3}{4}$.

Кроме того, мы также можем использовать операции сравнения, такие как $<$, $>$, $=$, чтобы сравнивать натуральные числа между собой.

У всех математических операций есть своя очередность, своя степень важности, чтобы не происходило путаницы и разногласий как в примере:

$$2 + (3 * 5)^2 + (6 - 1) = ? \tag{3}$$

Итак порядок выполнения действий:

1. То, что находится в скобках;
2. Корни и возведение в степень
3. Умножение и деление
4. Сложение и вычитание

1.3 Простые и составные числа

Теперь о простых числах(liczby pierwsze): простые числа - это натуральные числа, которые имеют ровно два различных натуральных делителя: 1 и само число. Другими словами, простые числа делятся только на 1 и на себя самого. Например, числа 2, 3, 5, 7, 11 и так далее являются простыми числами, потому что они не имеют других делителей, кроме 1 и самих себя. Да, мы можем сделать $3 \div 4 = \frac{3}{4}$, но результат не будет натуральным, ведь $\frac{3}{4}$ - дробь.

Все остальные числа называются составными числами(liczby złożone), так как у них больше чем два различных делителя: 1, само число, и что-нибудь еще. Благодаря этому их мы можем разбить на простые делители(dzielniki pierwsze), например возьмем 24:

$$
\begin{array}{r|l}
24 & 2 \\
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
$$

1.4 Признаки делимости

Признаки делимости - это свойства числа, которые помогают определить, делится ли число на другое без остатка. Эти правила облегчают проверку делимости и часто используются при проверке чисел на "составность"или "простоту".

Вот самые основные признаки делимости:

- на 2: Число делится на 2 без остатка, если его последняя цифра четная (0, 2, 4, 6, 8).
- на 3: Число делится на 3 без остатка, если сумма его цифр делится на 3 без остатка.
- на 4: Число делится на 4 без остатка, если его две последние цифры образуют число, которое делится на 4 без остатка.
- на 5: Число делится на 5 без остатка, если его последняя цифра равна 0 или 5.
- на 9: Число делится на 9 без остатка, если сумма его цифр делится на 9 без остатка.
- на 10: Число делится на 10 без остатка, если его последняя цифра 0.

2 NWD() i NWW()

И раз уж мы заговорили про деление, то обязательно где-то рядом всплывают эти 2 замечательные функции, которые нам обязательно понадобятся.

1. Наибольший общий делитель (НОД) или NWD(): Это наибольшее число, на которое можно без остатка разделить два или более числа. Другими словами, это наибольшее положительное число, которое является общим делителем всех чисел. Например, НОД чисел 12 и 18 равен 6, потому что 6 является наибольшим числом, которое делит 12 и 18 без остатка.

$$
\mathrm{NWD}(12,\ 18) = \quad
\begin{array}{r|l}
12 & 2 \\
6 & \cancel{2} \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
18 & \cancel{3} \\
6 & \cancel{2} \\
3 & \cancel{3} \\
1 &
\end{array}
\qquad 2*3 = 6
$$

2. Наименьшее общее кратное (НОК) или NWW(): Это наименьшее положительное число, которое делится на два или более числа без остатка. Другими словами, это наименьшее положительное число, кратное которому являются все числа. Например, НОК чисел 12 и 18 равен 36, потому что 36 является наименьшим числом, которое делится на 12 и 18 без остатка.

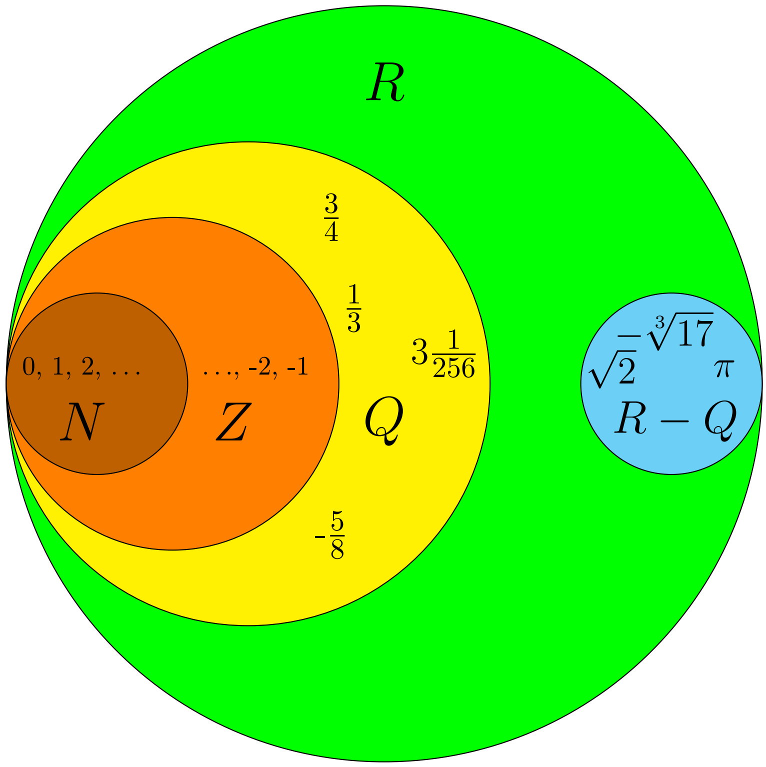
$$
\mathrm{NWW}(12,\ 18) = \quad
\begin{array}{r|l}
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
18 & \cancel{3} \\
6 & \cancel{2} \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\qquad 2*3*2*3 = 36
$$

3. А теперь тест на внимательность. В первом случае мы выбирали только уникальные значения, во втором же взяли все делители из первого числа и уникальные из второго. Вопрос: как мы можем объеденить 2 формулы так, чтобы у нас получилось произведение наших чисел?

NWW(12, 18) * NWD(12, 18) = 2*3 * 2*2*3*3 = 2*2*3 * 2*3*3 = 12 * 18 = 216

3 Числовые множества

Кратко пробежимся на множествах чисел, зачем нужны и что дают.



3.1 Целые числа

Целые числа(liczby całkowite) - можно грубо сказать, что это те же натуральные числа, только помимо положительных, есть еще и отрицательные. То есть это можно представить так: у нас есть обычные натуральные числа:

$$N_1 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{4}$$

а есть тоже самое, только отрицательные:

$$-N_1 = N_2 = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \tag{5}$$

и если их сложить, то мы получим целые числа:

$$N_1 + N_2 = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} + \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = Z \tag{6}$$

Благо нам сейчас не важна математическая строгость, поэтому я надеюсь, что мне не прилетит по шапке от моих преподов за такую грубость.

Какие же законы вводит понятие целых чисел? Тут сразу стоит оговориться, что в математике очень по-разному относятся к 0 в натуральных числах, потому что он не очень понятно вписывается в определение. И происходит так, что одни части математики принимают 0 как натуральное число, другие - нет. Поэтому я его то ставлю в ряд к натуральным числам, то нет, потому что на самом деле даже в кругу математиков есть разногласия в этом плане. Вернёмся к сути. Большая часть понятий схожа с натуральными числами, поэтому обсудим все здесь, чтобы было в одном месте:

- Коммутативный закон сложения: a + b = b + a, где a, b - натуральные/целые числа. 5 + 2 = 2 + 5 и -2 + 5 = 5 + (-2).
- Ассоциативный закон сложения: (a + b) + c = a + (b + c), где a, b - натуральные/целые числа. (5 + 2) + 3 = 5 + (2 + 3) и (-5 + 2) + 3 = -5 + (2 + 3).
- Коммутативный закон умножения: a * b = b * a, где a, b - натуральные/целые числа. 5 * 2 = 2 * 5 и -2 * 5 = 5 * (-2).
- Ассоциативный закон умножения: (a * b) * c = a * (b * c), где a, b - натуральные/целые числа. (5 * 2) * 3 = 5 * (2 * 3) и (-5 * 2) * 3 = -5 * (2 * 3).
- Закон умножения относительно сложения: (a + b) * c = a * c + b * c, где a, b, c - натуральные/целые числа. (5 + 2) * 3 = 5 * 3 + 2 * 3.

- Закон деления относительно сложения: (a + b) : c = a : c + b : c, далее - аналогично.
- Закон подглощения 0: a + 0 = 0 + a = a.
- Закон противоположных чисел: a - a = a + (-a) = 0.
- Закон подглощения a при умножении на 0: a * 0 = 0.

3.2 Рациональные числа

Рациональные числа(liczby wymierne) - это числа, которые можно представить в виде обыкновенной дроби, где числитель и знаменатель являются целыми числами, а знаменатель не равен нулю.

Сразу вопрос, а почему знаменатель не может быть равен 0? Загадка от Жака Фреско, на размышление 30 секунд и 1 стик glo. Но если более серьезно, то нельзя просто потому что это неопределенная сущность в данном случае. Да, в некоторых случаях делить на 0 как бы можно, но по факту там просто обходится этот вариант стороной с помощью различных теорем и методов решения задач.

Так почему же нельзя делить на 0? Для примера возьмем физическую модель. У нас есть яблоко и мы его совершенно спокойно можем разделить на 1 часть - получим само целое яблоко. Мы можем его разделить на 2, 3, 4 части, можем разделить на бесконечно большое количество частей. Но что мы получим, если разделим яблоко на 0 частей? Что это вообще значит? Как можно что-то разделить на 0 частей? Это будет очень много яблок или очень мало яблок? От нашего яблока хоть что-то останется? А если и останется, то что? Хвостик? Тогда почему только хвостик? А если мы возьмем ягоду и тоже захотим разделить на 0 частей, то от нее не останется хвостик, у ягод их зачастую просто нет.

Вот поэтому нельзя делить на ноль. Потому что мы не можем даже понять, а что получится, если что-либо разделить на 0 частей.

Вернёмся к рациональным числам. Общая формула для всех рациональных чисел выглядит так:

$$\frac{a}{b}, \text{ где } a, b - \text{натуральные числа, } a, b \in N, \text{ и } b \neq 0 \tag{7}$$

Вот основные понятия и законы, которые вводят рациональные числа:

- Закон обратных чисел: a*$\frac{1}{a}$ = $\frac{a}{a}$ = 1, где a - натуральные/целые числа.
- Закон подгощения при делении 0: 0*$\frac{1}{a}$ = $\frac{0}{a}$ = 0.

3.3 Иррациональные числа

Иррациональные числа(liczby niewymierne) - это числа, которые не могут быть представлены в виде дроби. Их десятичное представление не оканчивается и не повторяется. Напрмер это число π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[\text{любой натуральной степени}]{\text{из любого натурально числа}}$ и так далее.

Сразу возникают вопросы - "А почему это π - нельзя представить в виде дроби? Ведь это отношение длины окружности к диаметру, то есть, дробь! А почему $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде дроби, что в нем такого?"

Объясняю.

1. Да, число π - это действительно $\frac{\text{длина окружности}}{\text{даметр}}$, но вот в чем штука - мы не можем никак, ну вот вообще никак представить число $\pi = \frac{m}{n}$, где m, n - натуральные, а одно из них нечетно.

   Я все же предлагаю опустить доказательство того, что π - иррационально, потому что оно слишком длинное и довольно сложное для понимания.

2. Зато вот с $\sqrt{2}$ все намного проще.

   Итак, предположим, что $\sqrt{2}$ все же можно представить в виде простой несократимой дроби. Правила те же, что и с π: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где m, n - натуральные, а одно из них нечетно. Нечетность важна, чтобы мы могли получить простую, несократимую дробь.

для простоты избавимся от корня, возведя обе части уравнения в квадрат (про степени более подробно мы поговорим позднее, но сейчас без них нам не обойтись):

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}; \quad 2 = \frac{m^2}{n^2} \tag{8}$$

Домножим обе части на n^2:

$$2 * n^2 = m^2 \tag{9}$$

Из этого равенства следует, что m^2 - четное, значит и m должно быть четным, тогда n - нечетное по условию. Хорошо, тогда мы можем m заменить другим натуральным числом умноженным на 2, например, k: $m = 2 * k$. Тогда получаем:

$$2 * n^2 = 2 * k^2; \quad \cancel{2} * n^2 = \cancel{4} * n^2; \quad n^2 = 2 * k^2 \tag{10}$$

Но стоп, мы же говорили, что n нечетное, а из (10) следует, что n мы тоже можем разделить на 2, так же как и m. Получаем противоречие. А это значит, что $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде простой дроби. А значит, что оно иррационально.

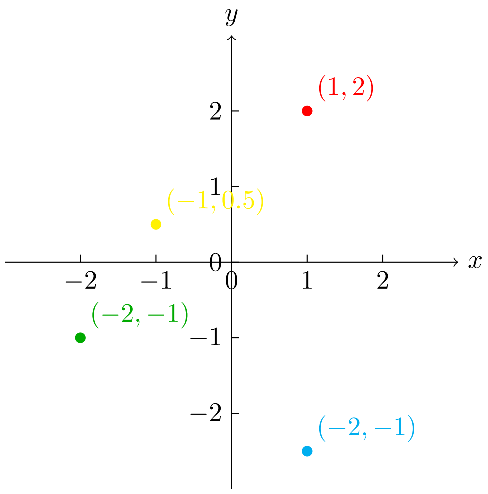
Аналогичным образом можно доказать иррациональность любого числа, находящегося под корнем. А именно из таких чисел и состоит все множество иррациональных чисел.

3.4 Действительные числа

Действительные числа(liczby rzeczywiste) включают в себя все рациональные и иррациональные числа. Иными словами, действительные числа - это все числа, которые могут быть измерены или представлены на числовой оси.

Возьмем какой-нибудь пример для наглядности. Вот у нас есть бесконечно большой сад с деревьями, пусть это будут яблони. Каждый день нам нужно собирать с земли яблоки, чтобы они не сгнили. Но все, что мы будем поднимать с земли - это будут яблоки и только яблоки.

Так и здесь. Какое бы мы не взяли число на числовой оси, они все всегда будут действительными числами.



4 Деление с остатком

Деление с остатком(dzieleniu z resztą) - это деление одного числа на другое, в результате которого мы получаем два числа: частное и остаток. Вот как это работает: предположим, у нас есть a яблок и b корзинок, куда мы хотим разложить яблоки в равных частях. Важно, что мы не можем делить яблоки на части, ведь все хотят свежие, красивые и целые яблоки. Мы положили в карзинки по 1, 2, 3, . . . , q яблок, но у нас все равно осталось r яблок, которые мы не можем положить в корзики так, чтобы везде яблок было поровну. Значит, эти яблоки мы можем аккуратно съесть сами, пока никто не видит. Математически это записывается так:

$$a = b * q + r, \text{ где } a, b, q, r \text{ - натуральные числа, а } r < b. \tag{11}$$

Например, у нас есть 10 яблок и 3 корзины. Поэтому мы в каждую карзину можем положить максимум 3 яблока, а 1 оставить себе:

$$10 = 3 * 3 + 1 \tag{12}$$

Или у нас есть 21 яблоко и 4 корзинки. Мы можем положить в каждую карзину по 5 яблок, а 21 - 5 * 4 = 1 = r мы можем съесть.

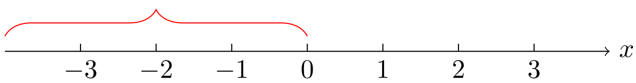
Если бы у нас было 7 корзинок, то мы бы смогли положить туда 21/7 = 3 яблока, то нам бы осталось 21 - 3 * 7 = 0 яблок. Эх.

5 Целые числа

Итак вернемся к целым числам и их особенностям(3.1). А особенностей 2, которые нас интересуют - отрицательные числа(liczby ujemne) и модуль числа(wartość bezwzględna) или абсолютное значение. Разберемся по порядку.

5.1 Отрицательные числа

Отрицательные числа - это числа, которые меньше нуля. Они представляют собой количество или величину, которая меньше нуля или имеет отрицательное значение. Например, -1, -2, -3 и так далее являются отрицательными числами. Они находятся слева от нуля на числовой оси.



(13)

По-сути, мы с ними можем делать все то же самое, что и с натуральными числами, то есть:

- Складывать
- Отнимать, однако тут есть важное отличие от натуральных чисел, о котором мы поговорим ниже.
- Умножать, но с тем же моментом
- Делить (аналогично)

Что за момент такой с вычитаением? А что будет, если сделать так:

$$-5 - -2 =? \tag{14}$$

Чтобы не было такой путаницы почти везде, где мы пользуемся отрицательными числами важно ставить скобки. Скобки - важно!

Скобки мы ставим только после знаков выражения и перед отрицательным числом, то есть так:

$$-5 - (-2) = \ldots \tag{15}$$

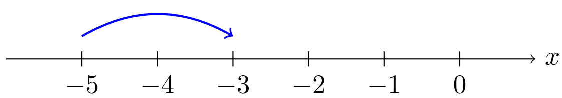
или так:

$$-5 \times (-2) = \ldots \tag{16}$$

Если забыла, в какой очередности выполнять математические операции, то здесь (3) я об этом уже рассказывал.

А что будет, если от отрицательного числа отнять отрицательное (15) или отрицательное умножить на отрицательное (16)?

- В первом случае мы как бы уменьшаем отрицательное число на отрицательное число, то есть делаем вот так:



А это означает, что мы можем заменить эти 2 минуса на плюс:

$$-5 + 2 = -3 \tag{17}$$

Почему так можно сделать? Потому что на самом деле за этими минусами скрывается вот что:

$$-5 - 1 * (-2) = -3 \tag{18}$$

Отсюда мы получаем знаменитое правило "минус (умножить) на минус равно плюс".

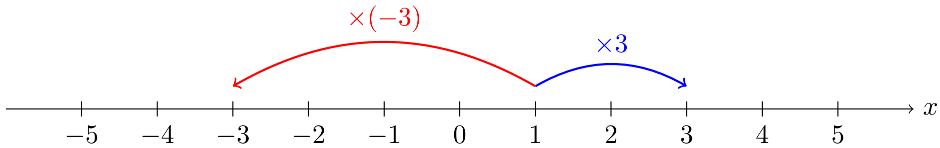
- Но почему мы при умножении двух отрицательных чисел получаем положительное число? Почему это работает?

  Для начала рассмотрим что мы можем делать с положительными числами, для примера возьмем 1. Мы можем это число сделать больше, умножив на другое положительное число, допустим, 3.

$$1 \times 3 = 3 \tag{19}$$

  Если хотим сделать меньше, то умножим на -3:

$$1 \times (-3) = -3 \tag{20}$$

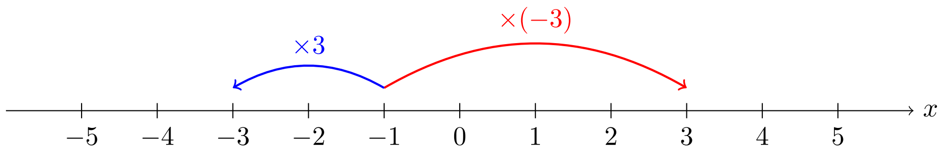


  А что будет, если то же самое сделать с отрицательными числами? Для примера возьмем -1. Что будет, если помножить -1 на 3?

$$-1 \times 3 = -3 \tag{21}$$

  То есть мы его уменьшили еще сильнее относительно 0. А значит, чтобы преодолеть 0 нам ничего не остается как умножить -1 на -3:

$$-1 \times (-3) = 3 \tag{22}$$

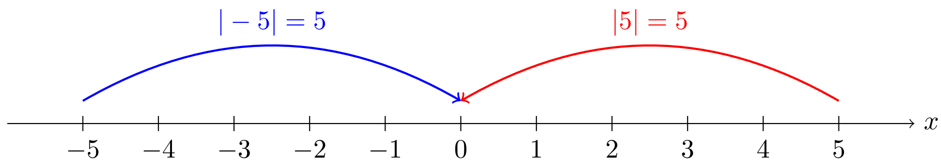


  Это может показаться сложным, но со временем ты даже перестанешь замечать, как ловко это все работает.

5.2 Абсолютное значение

Погрузимся еще глубже. Абсолютное значение(wartość bezwzględna) - это значение числа без его знака. Формально, модуль числа x, обозначаемый как |x|, определяется следующим образом: $|\text{x}| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

То есть, модуль числа показывает нам расстояние числа до 0 на числовой оси, несмотря на знак.



6 Дроби

Ух, сейчас будет весело (нет, мы будем очень много страдать).

Дроби(ułamki) - это числа, которые представляют собой части или доли целого числа. Они имеют две основные части: числитель(licznik) и знаменатель(mianownik). Тут здорово было бы перечитать про рациональные числа (3.2), поскольку дроби - их специализация.

$$\frac{\text{верхняя часть}}{\text{нижняя часть}} \quad \frac{licznik}{mianownik} \tag{23}$$

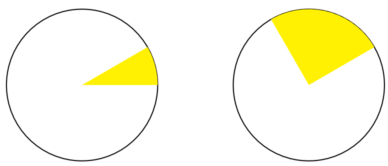
Какие бывают типы дробей:

- Обыкновенные дроби: Это дроби, в которых числитель и знаменатель являются целыми числами. Например, $\frac{3}{4}$ или $\frac{5}{2}$
- Смешанные числа: Это комбинация целого числа и дроби. Например, $2\frac{1}{2}$ это просто $2+\frac{1}{2}$
- Десятичные дроби: Это дроби, представленные в десятичной системе счисления. Они нам еще пригодятся на процентах. Например, $0{,}75 = \frac{3}{4}$

Что можно делать с дробями? В сущности то же самое, что и с обычными числами, но с некоторыми особенностями.

- Сложение и вычитание: чтобы скалдывать и вычитать дроби у них должен быть одинаковый знаменатель. Почему?

  Рассмотрим пример на вишневых пирогах. Из первого пирога мы вырезали $\frac{1}{12}$ часть, а из второго $\frac{1}{4}$. Сколько мы в сумме вырезали из обоих пирогов?

  Мы должны приводить дроби к общему знаменателю, потому что так мы как бы делим оба пирога на равные части, а значит и те куски, которые мы уже вырезали, мы тоже делим на те же равные части.

  Тут нам очень кстати пригодится НОК(2), ведь нам надо найти наименьшее число, которое делится на оба наших знаменателя:

$$\text{NWW}(12,\,4) = \quad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & \cancel{2} \\ 2 & \cancel{2} \\ 1 & \end{array} \qquad 2*2*3 = 12$$

  Значит и общий делитель у нас равен 12.

  Разделим 12 на 4, чтобы узнать, на сколько нам надо домножить вторую дробь:

$$12/4 = 3 \tag{24}$$

  Наконец-то мы готовы узнать, сколько же мы вырезали частей из двух пирогов:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} \tag{25}$$

  Здесь нам пригодятся НОД(2), чтобы понять, можно ли сократить как-то нашу дробь:

$$\text{NWD}(12,\,4) = \quad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{3} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & \cancel{2} \\ 1 & \end{array} \qquad 2*2 = 4$$

Значит и числитель, и знаменатель мы можем сократить на 4:

$$4/4 = 1 \quad 12/4 = 3 \tag{26}$$

Запишем же заветный ответ:

$$\frac{4}{12} = \frac{4/4}{12/4} = \frac{1}{3} \tag{27}$$

ДА МЫ СМОГЛИ МЫ ДОЖИЛИ ДО КОНЦА УРА. Мы отрезали только $\frac{1}{3}$ часть от всех пирогов, а значит отстатки тоже надо быстренько куда-нибудь организовать. Однако это не наша тема.

- Умножение: благо тут все намного проще. Умножение дробей происходит путем перемножения числителей и знаменателей. Например:

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{1 \times 2}{3 \times 7} = \frac{2}{21} \tag{28}$$

  Сокращение происходит аналогичным образом, как и в сложении.

- Деление: Деление дробей происходит путем умножения первой дроби на обратную второй дробь. Почему?

  Вспомним как происходит деление на обычных числах:

$$2/4 = 2 * \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{29}$$

  С дробями так же:

$$\frac{1}{2} / \frac{1}{15} = \frac{1}{2} * \frac{1}{\frac{1}{15}} = \frac{1}{2} * 15 = \frac{15}{2} \tag{30}$$

7 Арифметические выражения