

Metody interpolacji funkcji

Iwo Czarowski 193066 gr.4 Informatyka sem. 4

25 maja 2024

1 Wstęp

Celem niniejszego projektu była implementacja oraz analiza działania metod interpolacji Lagrange'a oraz funkcjami splajnymi 3 stopnia. Postanowiłem również zbadać wpływ rozmieszczenia węzłów interpolujących i charaktetu funkcji oryginalnych na jakość funkcji interpolującej. Postanowiłem zrealizować wymienione algorytmy oraz sporządzić wykresy w języku Python zwarzywszy na wiele przydatnych wbudowanych narzędzi oraz bibliotek takich jak numpy, pandas czy matplotlib.

2 Dobór danych

Dobrane przeze mnie dane reprezentują profile wysokościowe 3 tras o różnej charkterystyce.

- Ostrowa - teren dość gładki o tendencji rosnącej co do wysokości
- Challenger Deep - depresja z jednym charakterystycznym minimum
- Wielki Kanion Kolorado - tere górzysty z wieloma wzniesieniami

3 Interpolacja Lagrange'a

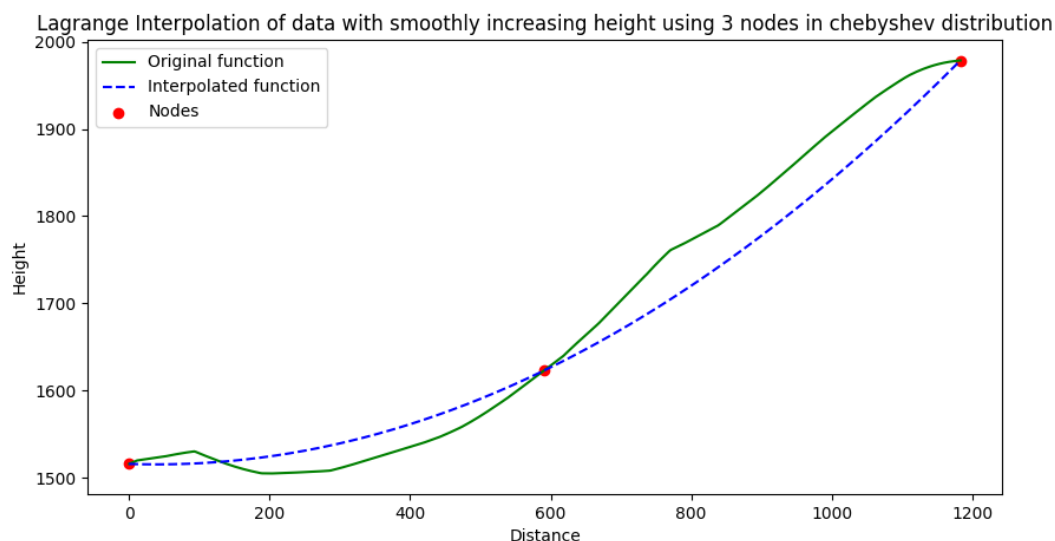
Interpolacja Lagrange'a cechuje się prostotą implementacji wynikającą z braku potrzeby rozwiązywania układów liniowych a jej złożoność obliczeniowa to $O(n^2)$.

Wykorzystuje on baze Lagrange mającą postać:

$$\varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

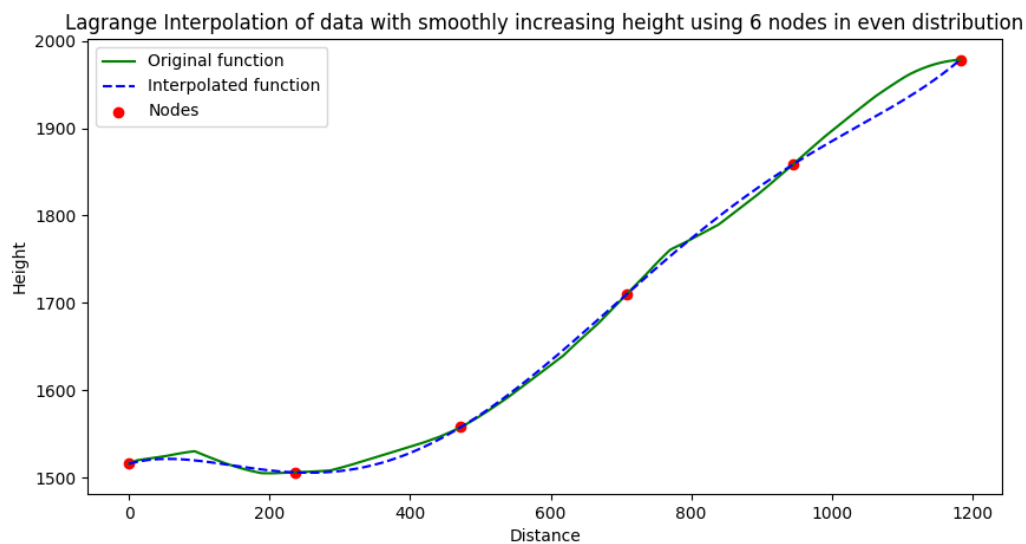
Rozwiązuje to problem bazy funkcji interpolacji wielomianowej która jest złego uwarunkowania dla dużej ilości węzłów.

3.1 Równomierne rozmieszczenie węzłów dla trasy Ostrowa



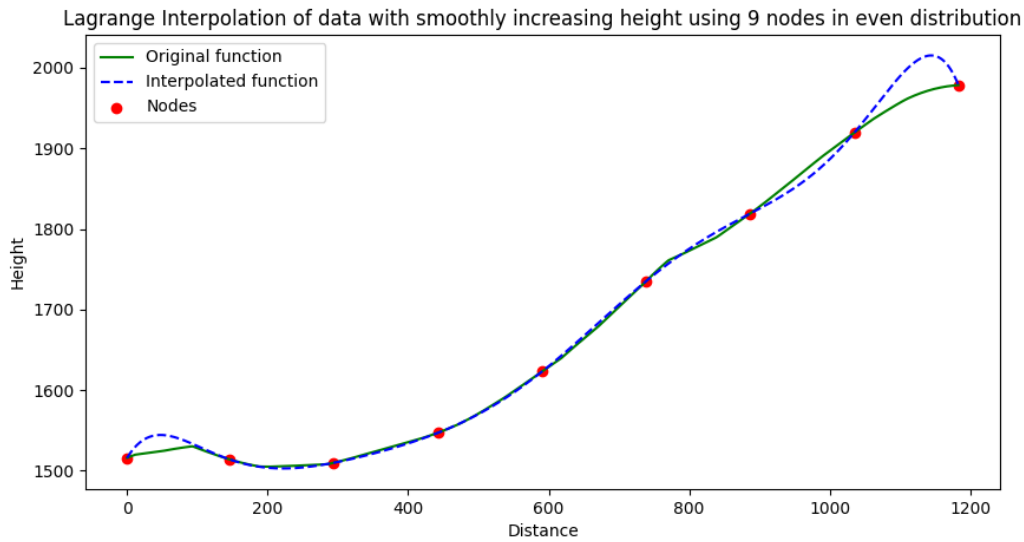
Interpolacja Lagrange'a względnie gładkiej funkcji przy 3 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Mimo małej ilości węzłów omawiana metoda poradziła sobie dopuszczalnie, jednak prawdopodobnie wynika to z prostoty badanej funkcji.



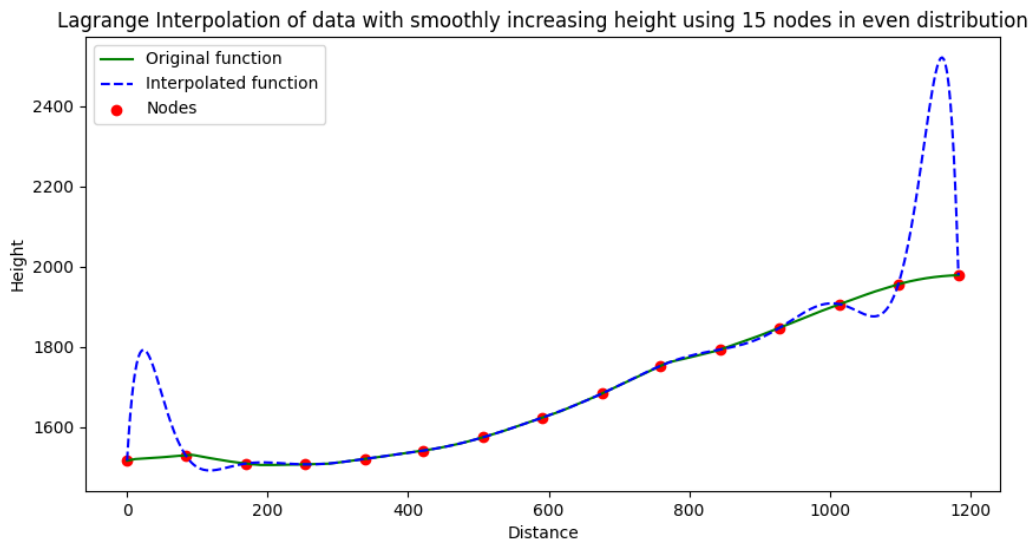
Interpolacja Lagrange'a względnie gładkiej funkcji przy 6 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Zwiększając ilość węzłów udało nam się znacznie lepiej przybliżyć wartości oryginalnej funkcji.



Interpolacja Lagrange'a względnie gładkiej funkcji przy 9 równomiernie rozmieszczonych węzłach

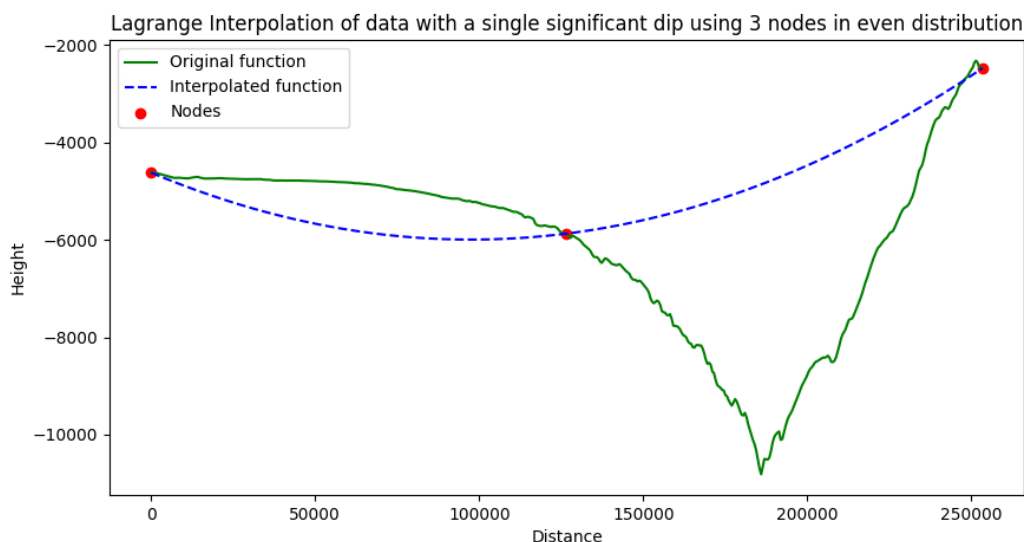
Przybliżenia w środku dziedziny niemalże odwzorowały oryginalną funkcję, jednak na jej krawędziach zaczyna przejawiać się efekt Rungego pogarszający jakość przybliżeń w tych zakresach.



Interpolacja Lagrange'a względnie gładkiej funkcji przy 15 równomiernie rozmieszczonych węzłach

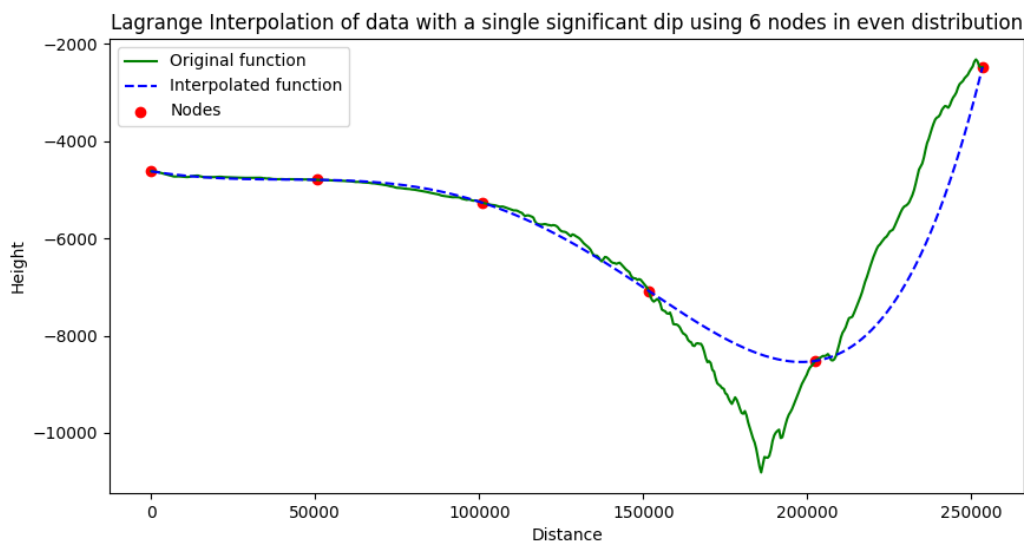
W tym przypadku efekt Rungego drastycznie pogorszył nam jakość naszej interpolacji na krańcach przedziału.

3.2 Równomierne rozmieszczenie węzłów dla profilu wysokościowego Głębi Challenger'a



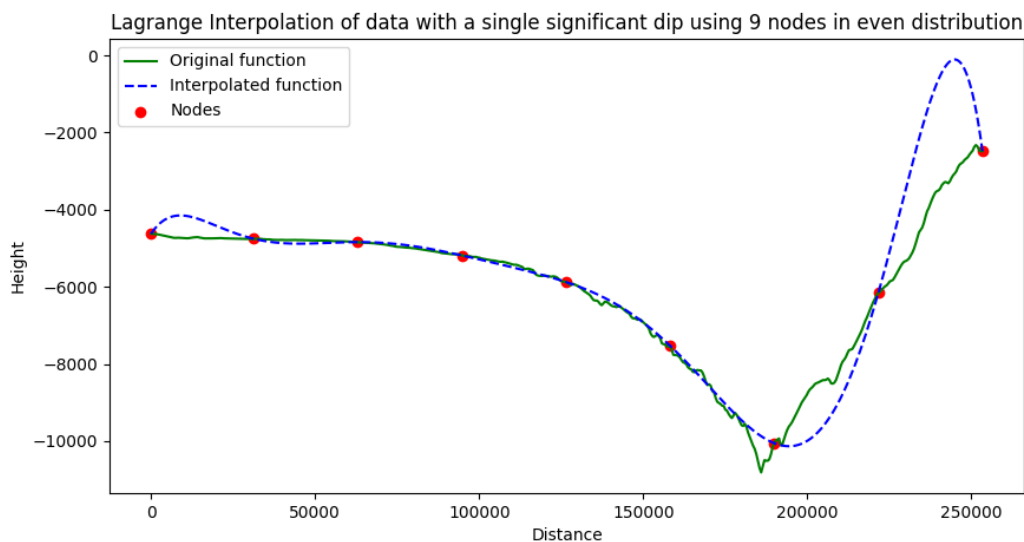
Interpolacja Lagrange'a funkcji z jednym charakterystycznym minimum przy 3 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Uzyskany efekt jest bezwartościowy. Mała ilość węzłów oraz ich rozmieszczenie nie pozwoliły na dopasowanie się naszej interpolacji do oryginalnego wykresu.



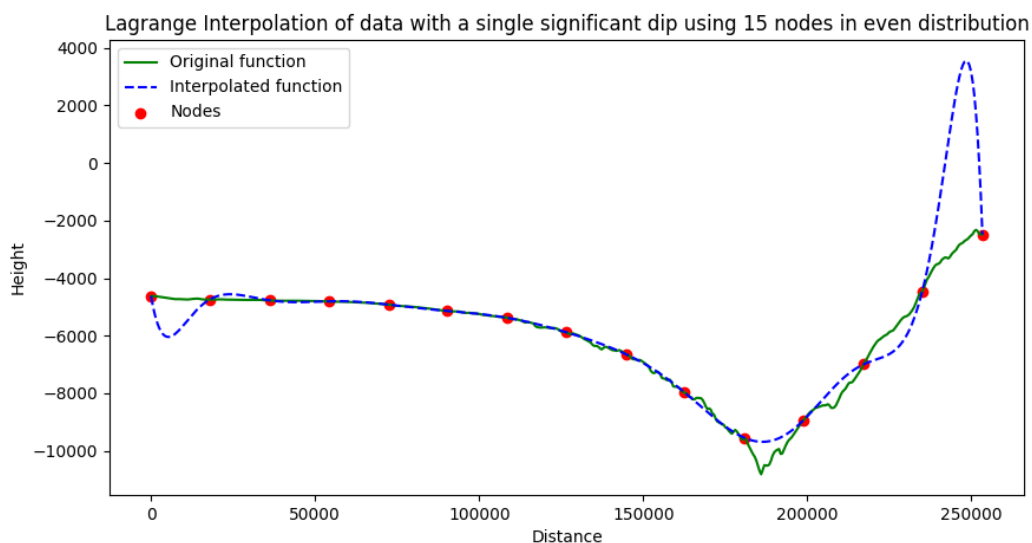
Interpolacja Lagrange'a funkcji z jednym charakterystycznym minimum przy 6 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Tym razem efekt jest znacznie lepszy, jednak niefortunne rozmieszczenie węzłów sprawiło, że interpolacja Lagrange nie poradziła sobie z nagłym spadkiem wysokości.



Interpolacja Lagrange'a funkcji z jednym charakterystycznym minimum przy 9 równomiernie rozmieszczonych węzłach

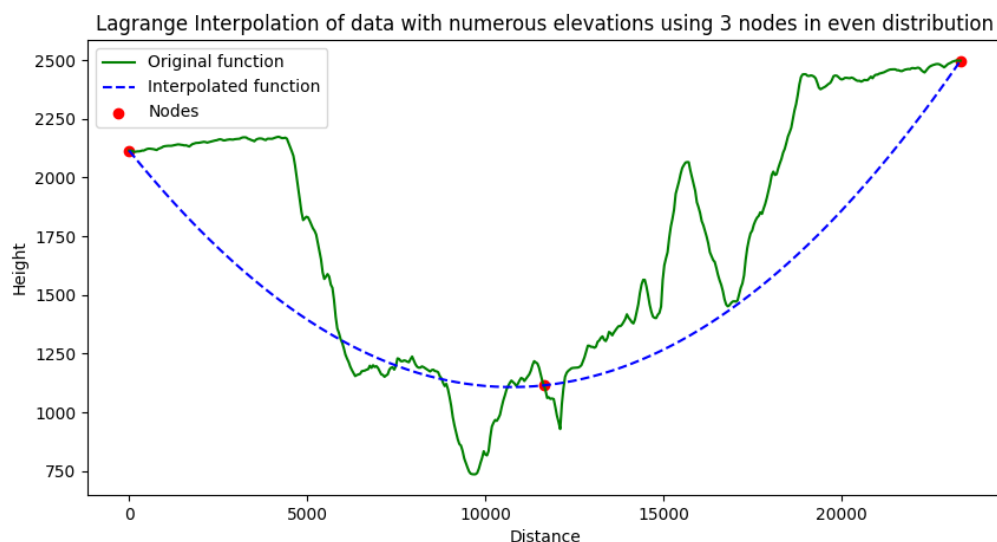
Przybliżenia w środku dziedziny są dobre, jednak na krawędziach zaczynamy zauważać psujące dopasowanie efekt Rungego.



Interpolacja Lagrange'a funkcji z jednym charakterystycznym minimum przy 15 równomiernie rozmieszczonych węzłach

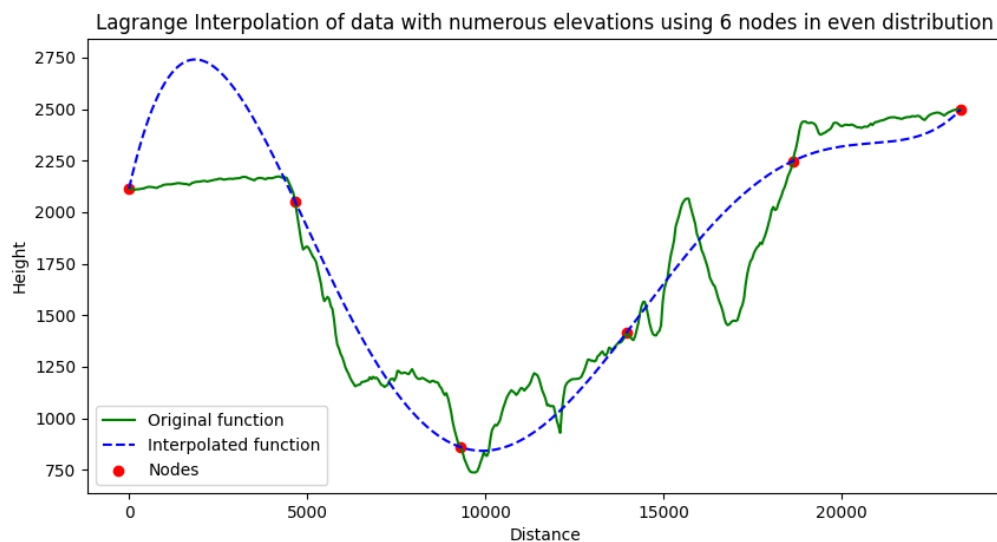
Poraz kolejny zauważamy ogromne odchylenia od oczekiwanych wartości na krawędziach badanego przedziału.

3.3 Równomierne rozmieszczenie węzłów dla profilu wysokościowego Wielkiego kanionu Kolorado



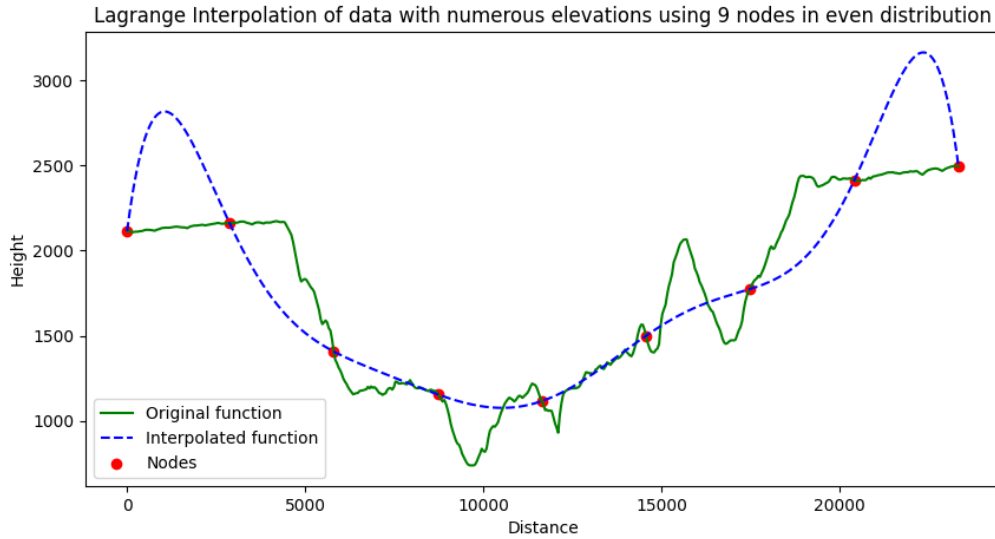
Interpolacja Lagrange'a funkcji z licznymi gwałtownymi wzrostami przy 3 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Funkcja interpolująca słabo dopasowała się do oryginalnej funkcji jednak przyzwoicie ujęła jej ogólną tendencję wzrostową.



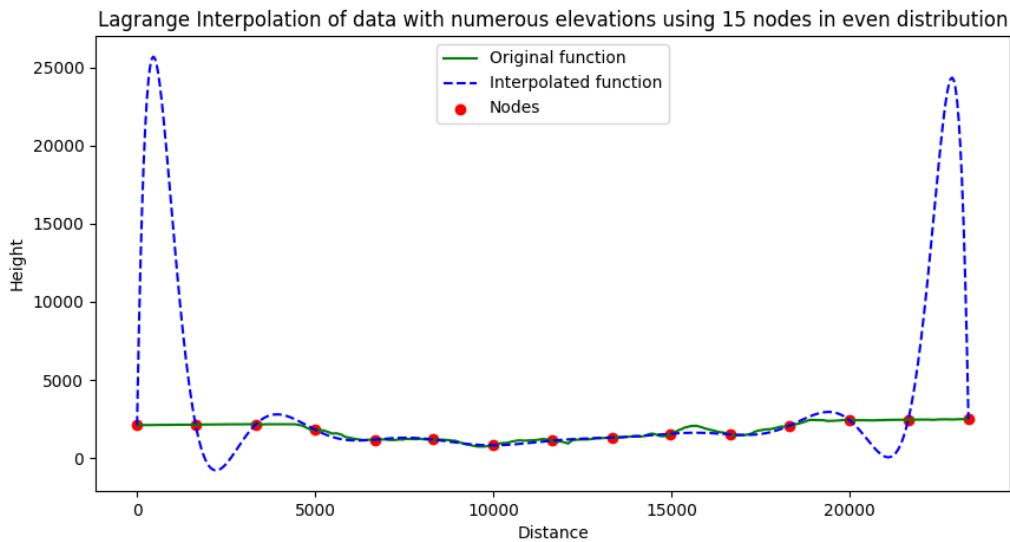
Interpolacja Lagrange'a funkcji z licznymi gwałtownymi wzrostami przy 6 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Poraz kolejny naszemu przybliżeniu udało się jedynie uchwycić ogólny trend wzrostowy a oprócz tego beznadziejnie oszacowała wartości na pierwszym przedziale.



Interpolacja Lagrange'a funkcji z licznymi gwałtownymi wzrostami przy 9 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Interpolacja Lagrange zachowała się podobnie jak poprzednich przypadkach jednak tym razem daje o sobie znać efekt Rungego.



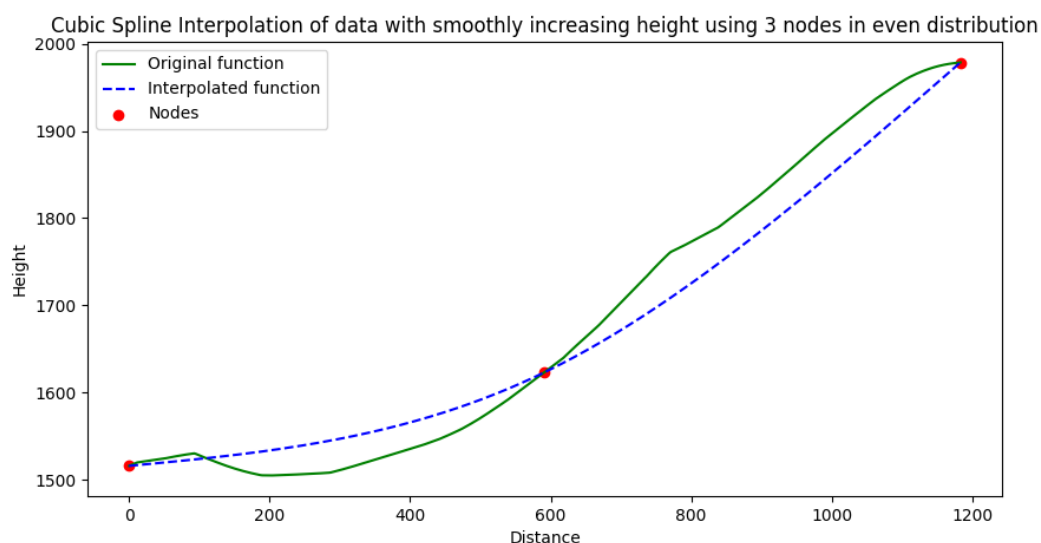
Interpolacja Lagrange'a funkcji z licznymi gwałtownymi wzrostami przy 15 równomiernie rozmieszczonych węzłach

W tym przypadku wartości na krańcach dziedziny przybrały ogromne odchylenia od faktycznych wartości, na tyle zmieniając skalę wykresu, że ciężko jest nam interpretować wartości w środku przedziału.

4 Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia

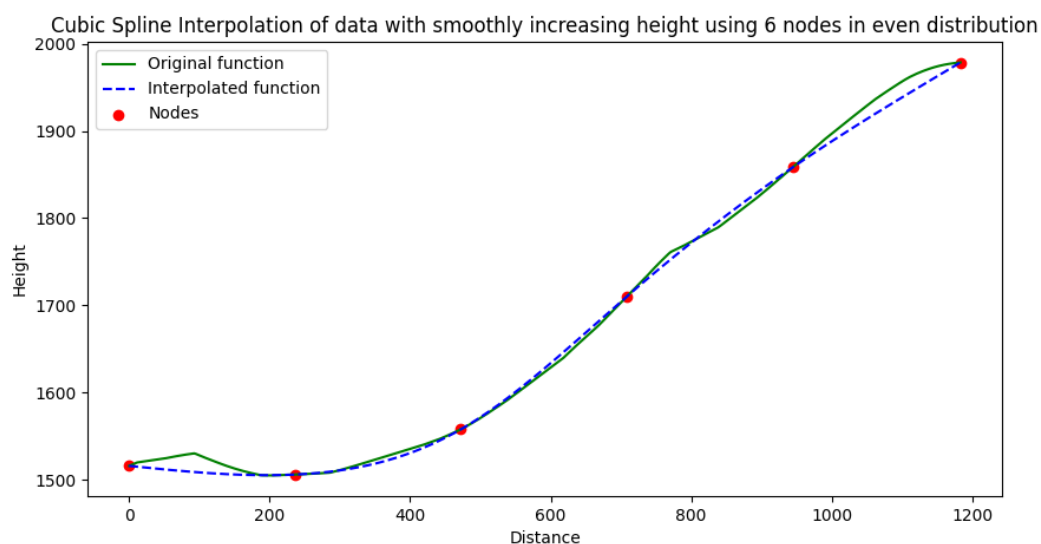
Interpolacja za pomocą funkcji sklepanych skutecznie eliminuje największą wadę interpolacji Lagrange'a, czyli występowanie zjawiska Rungego. Wykorzystuje ona zbiór interpolowanych osobno między węzłami wielomianów 3 stopnia. Do wyznaczenia parametrów każdego z nich musimy sformułować $4(n-1)$ równań (gdzie n to ilość węzłów) a następnie rozwiązać je co wyznacza jej złożoność obliczeniową równą $O(n^3)$. W moim przypadku do rozwiązania wspomnianego równania wykorzystałem udostępnioną w bibliotece funkcję `numpy.linalg.solve`.

4.1 Równomierne rozmieszczenie węzłów dla trasy Ostrowa



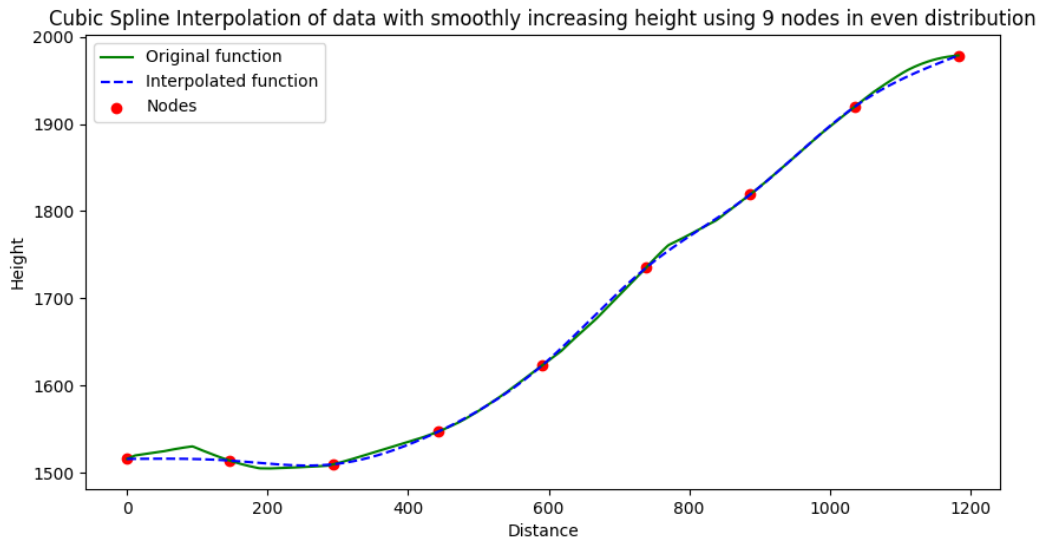
Interpolacja funkcjami splajnami 3 stopnia względnie gładkiej funkcji przy 3 równomiernie rozmieszczonych węzłach

W tym przypadku interpolowanie wielomianami splajnami zaszkodziło podobą do interpolacji Lagrange aproksymacją.



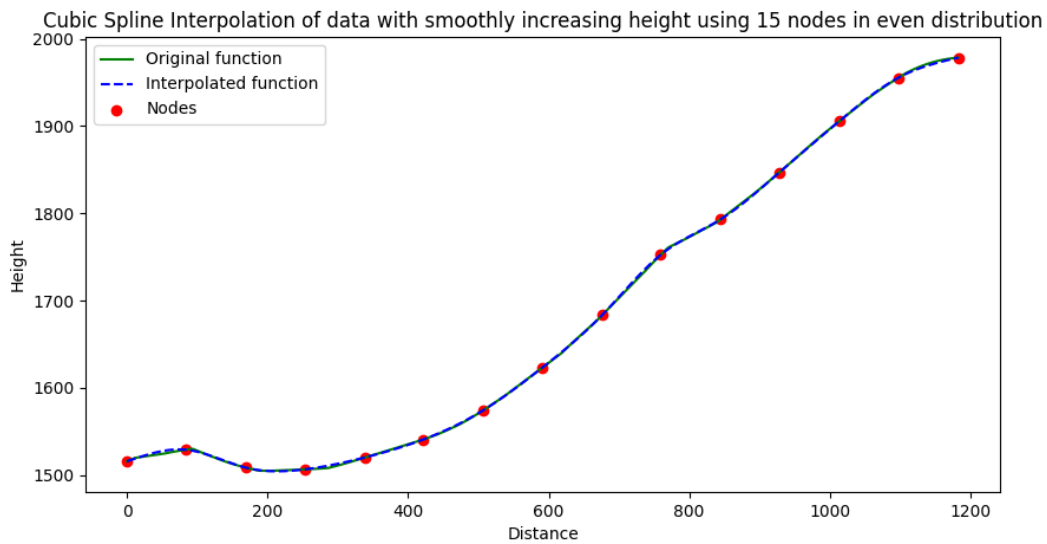
Interpolacja funkcjami splajnami 3 stopnia względnie gładkiej funkcji przy 6 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Dla 6 węzłów dalej trudno zauważyć przewagę sklejania funkcji nad metodą Lagrange.



Interpolacja funkcjami splajanymi 3 stopnia względnie gładkiej funkcji przy 9 równomiernie rozmieszczonych węzłach

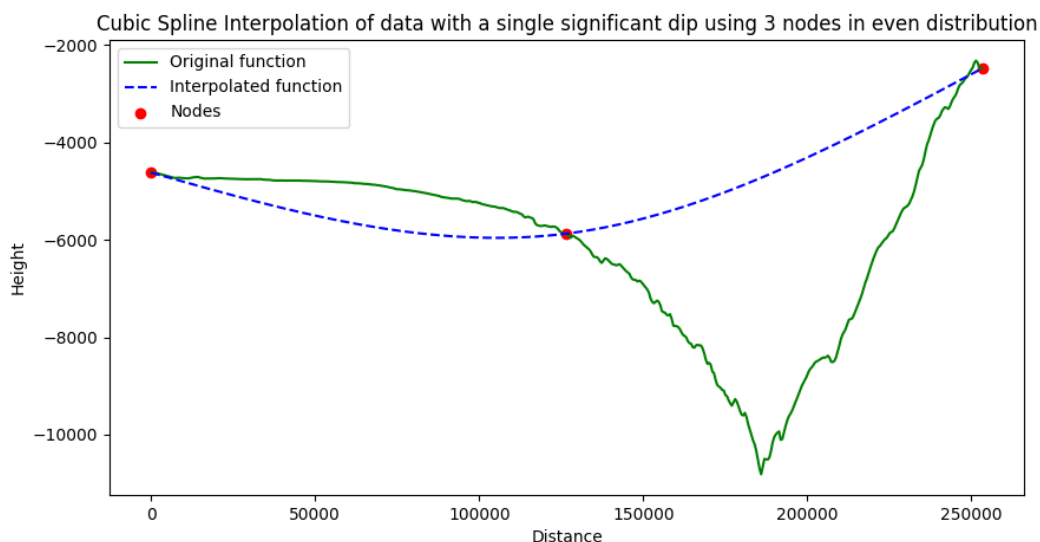
Przybliżenie badanej funkcji jest w tym przypadku bardzo dokładne a co ważniejsze nie obserwujemy eskalujących odchyleń na krańcach przedziału.



Interpolacja funkcjami splajanymi 3 stopnia względnie gładkiej funkcji przy 15 równomiernie rozmieszczonych węzłach

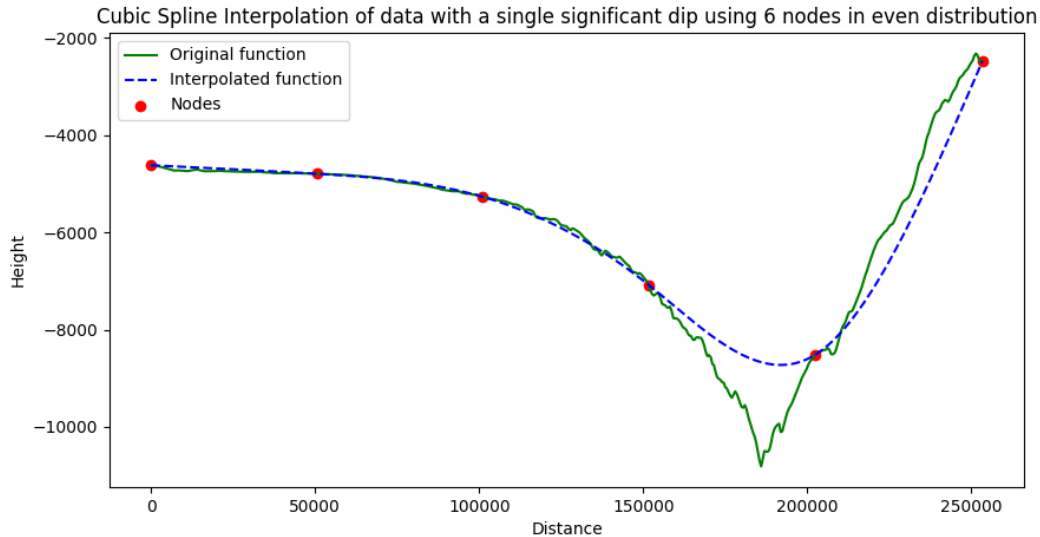
Otrzymana aproksymacja niemalże identycznie odwzorowuje oryginalną funkcję, a rosnąc ilość węzłów nie skutkuje efektem Rangego.

4.2 Równomierne rozmieszczenie węzłów dla profilu wysokościowego Głębi Challenger'a



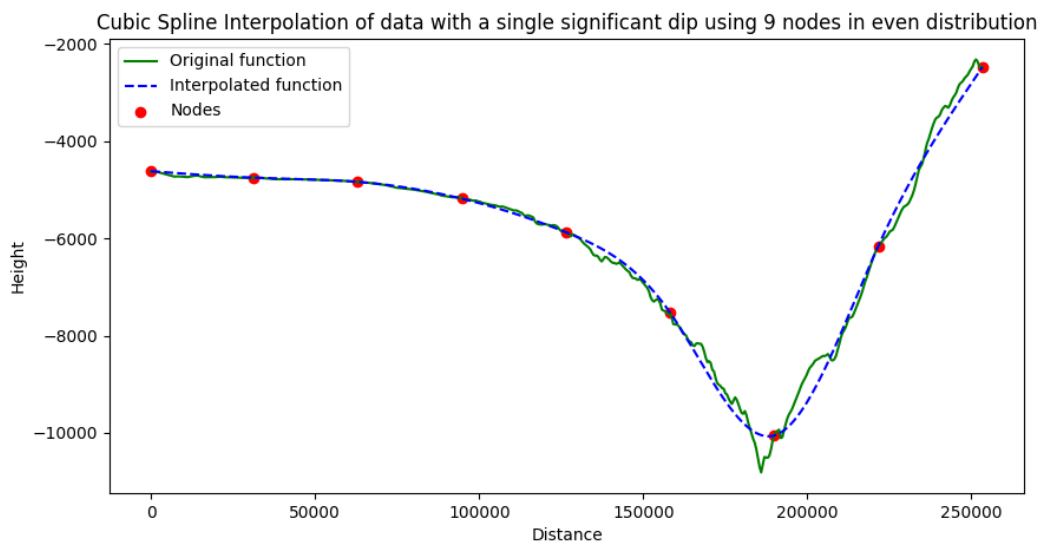
Interpolacja funkcjami splejanymi z jednym charakterystycznym minimum przy 3 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Dla tak małej liczby oraz nietrafnego rozstawienia węzłów interpolacja poprzez splejanie zawodzi podobnie jak przy algorytmie Lagrange.



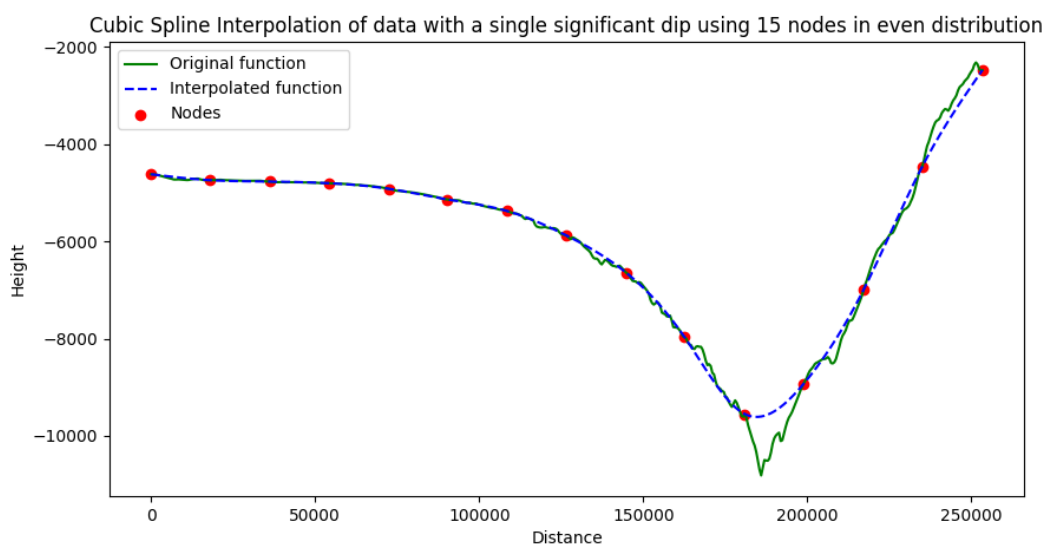
Interpolacja funkcjami splejanymi funkcji z jednym charakterystycznym minimum przy 6 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Analizowana metoda z dobrym przybliżeniem aproksymuje gładką część funkcji jednak przy gwałtownym spadku wysokości zawodzi.



Interpolacja funkcjami splajnymi funkcji z jednym charakterystycznym minimum przy 9 równomiernie rozmieszczonych węzłach

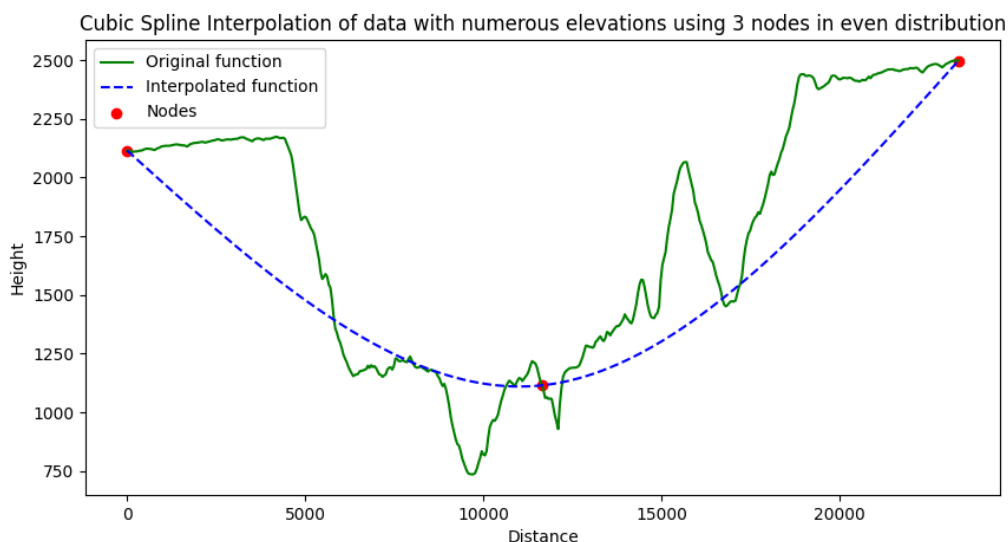
Splajanie wielomianów bardzo dobrze przybliżyło wartości analizowanej funkcji.



Interpolacja funkcjami splajnymi funkcji z jednym charakterystycznym minimum przy 15 równomiernie rozmieszczonych węzłach

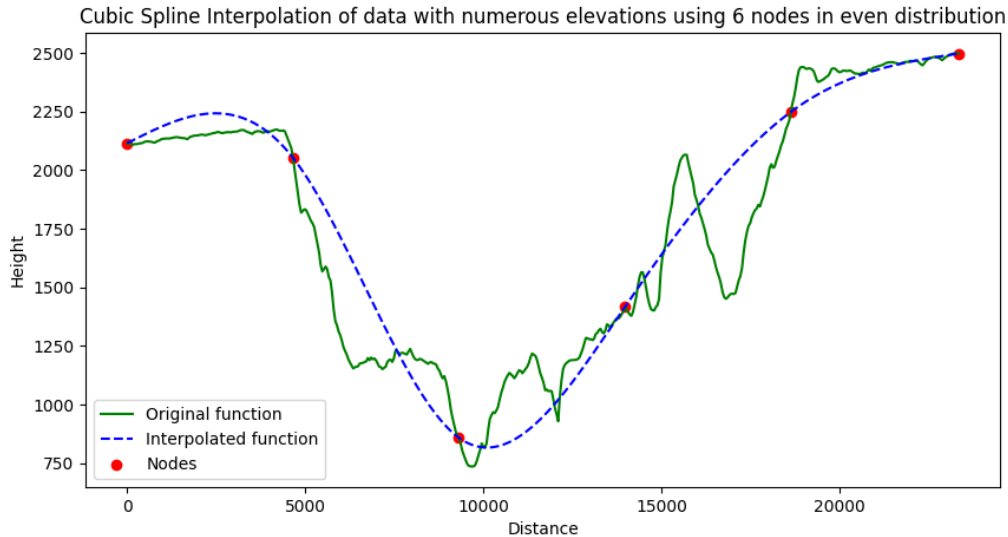
Zwiększanie ilości węzłów wydaje się wpływać w pozytywny sposób jednak możemy zauważyć, że nie optymalne rozstawienie ich sparwiło, iż nasza aproksymacja ominęła minimum funkcji.

4.3 Równomierne rozmieszczenie węzłów dla profilu wysokościowego Wielkiego kanionu Kolorado



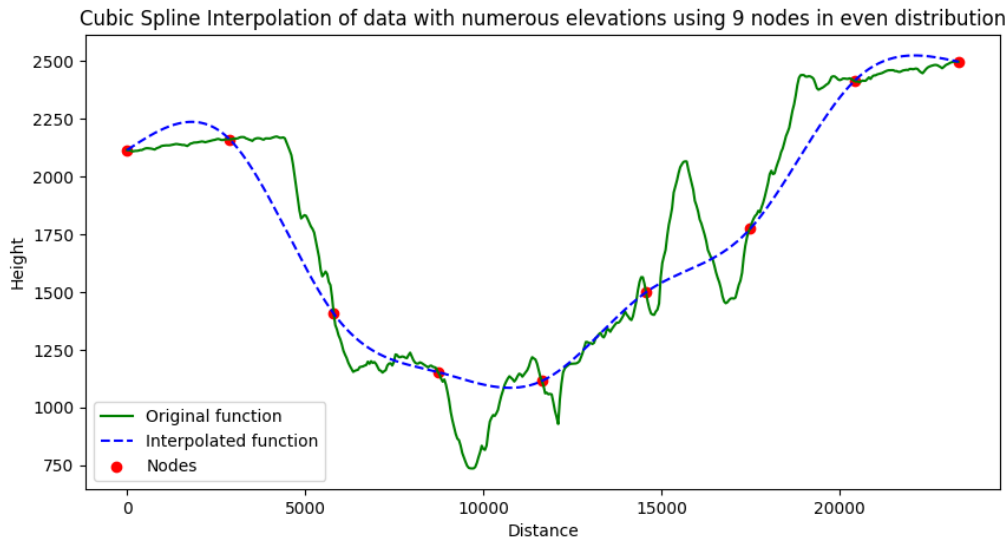
Interpolacja funkcjami splajnymi funkcji z licznymi gwałtownymi wzrostami przy 3 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Zbyt mała ilość użytych węzłów zaskutkowała odzwierciedleniem jedynie ogólnego charakteru wzrostowego oryginalnej funkcji.



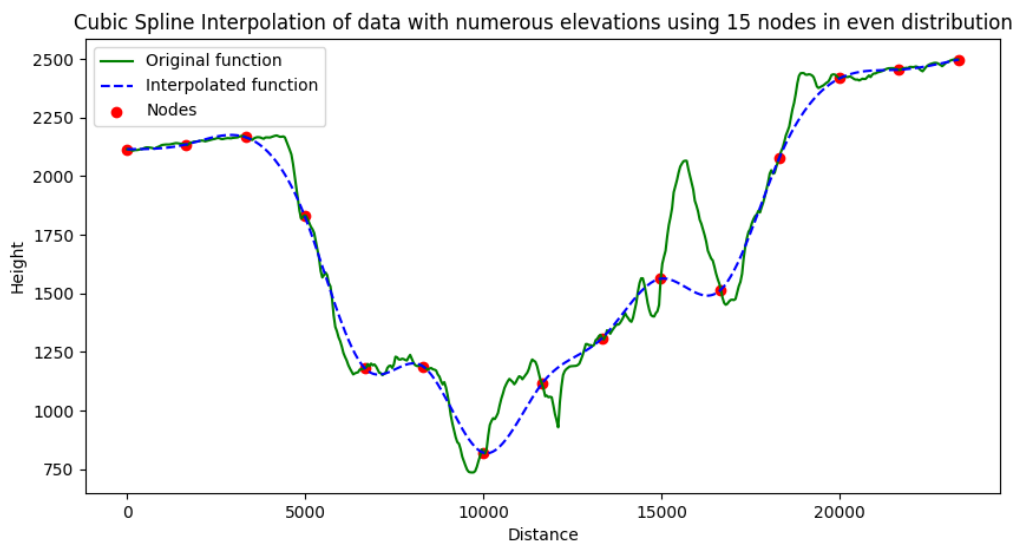
Interpolacja funkcjami splajnymi funkcji z licznymi gwałtownymi wzrostami przy 6 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Po raz kolejny udało nam się uchwycić jedynie ogólną tendencję wzorstową jednak warto zauważyć że pierwszego przedziału między węzłami splajanie okazało się lepiej odzwierciedlać badany profil wysokościowy niż przy interpolacji Lagrange'a. Powodem tego może być wykorzystanie wielomianu o mniejszym stopniu.



Interpolacja funkcjami splajnymi funkcji z licznymi gwałtownymi wzrostami przy 9 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Wraz ze wzrostem węzłów nasza aproksymacja coraz lepiej obrazuje oryginalną funkcję, jednak wciąż nie udaje jej się uchwycić lokalnych wzrostów wartości.



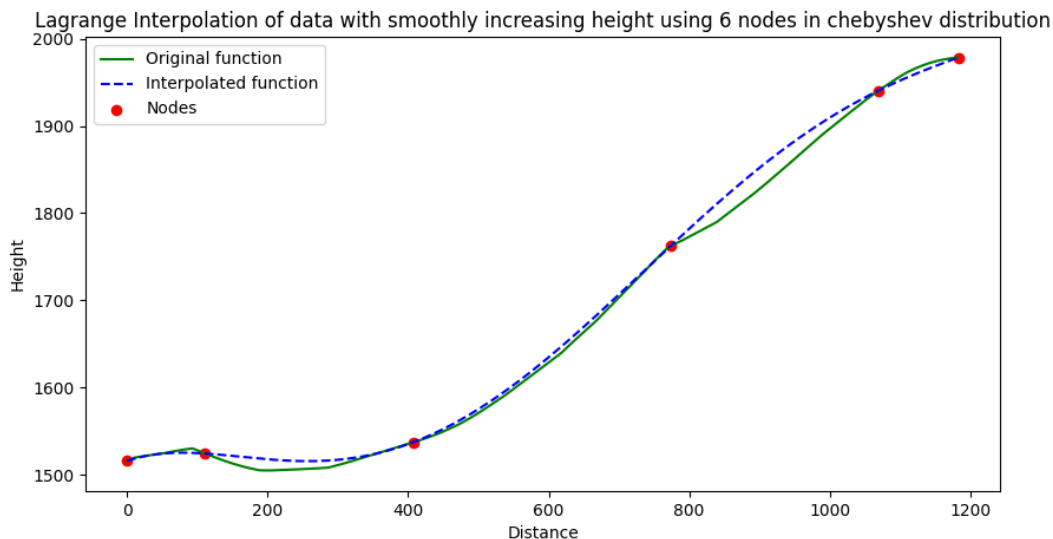
Interpolacja funkcjami splajnymi funkcji z licznymi gwałtownymi wzrostami przy 15 równomiernie rozmieszczonych węzłach

Widoczna jest podobna tendencja co w poprzednich analizach. Uchwycenie wszystkich lokalnych wzniesień wymagało by wyznaczenia dużej ilości węzłów.

5 Analiza wpływu rozmieszczenia węzłów na jakość interpolacji

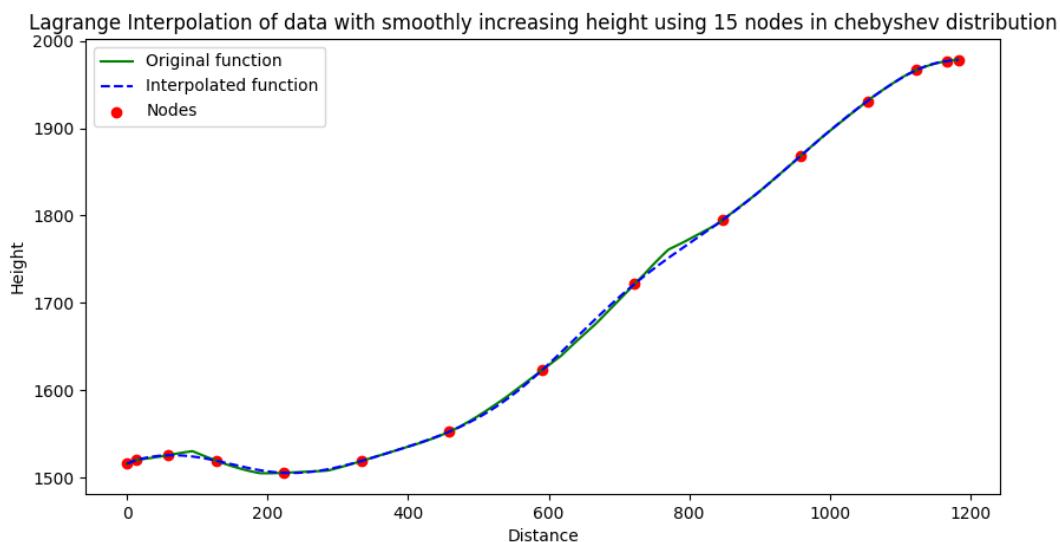
Interpolacja poprzez sklejnienie wielomianów 3 stopnia bardzo dobrze radzi sobie ze wzrastającą ilością węzłów jednak w przypadku Lagrange skutkuje ona w ogromnych odchleniach na krawędziach badanej dziedziny. Satysfakcjonującym rozwiązaniem okazuje się być rozmieszczenie węzłów Chebyszewa. Metoda ta wykorzystuje równomierne rozstawienie punktów na okręgu a następnie

zrzutowanie ich na prostą skutkując zagęszczeniem punktów przy krawędziach i przeładzeniem ich w środku zakresu argumentów.



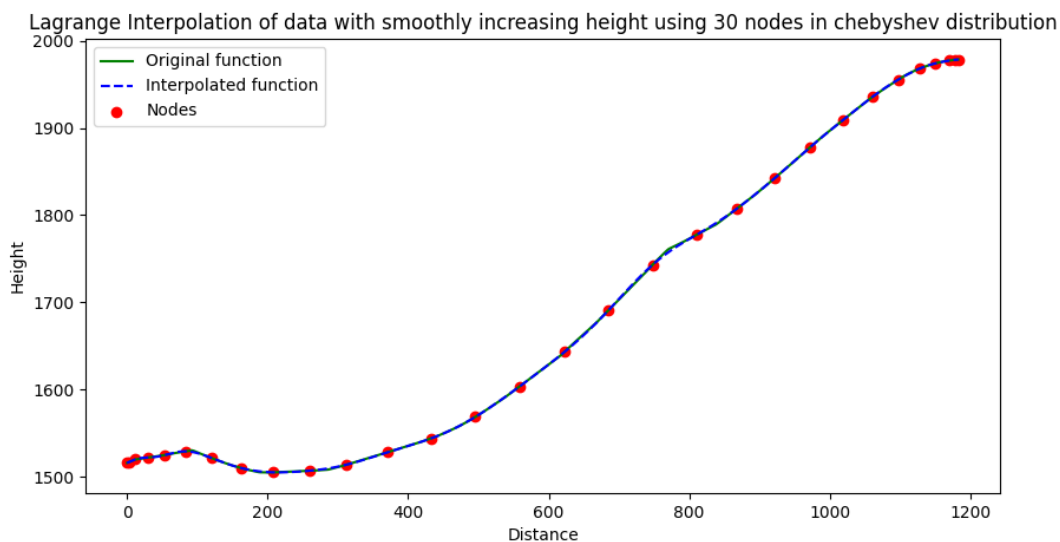
Interpolacja Lagrange'a względnie gładkiej funkcji przy 6 węzłach Chebyszewa

W tym przypadku nie zauważamy żadnych korzyści, z rozkładu Czebyszewa.



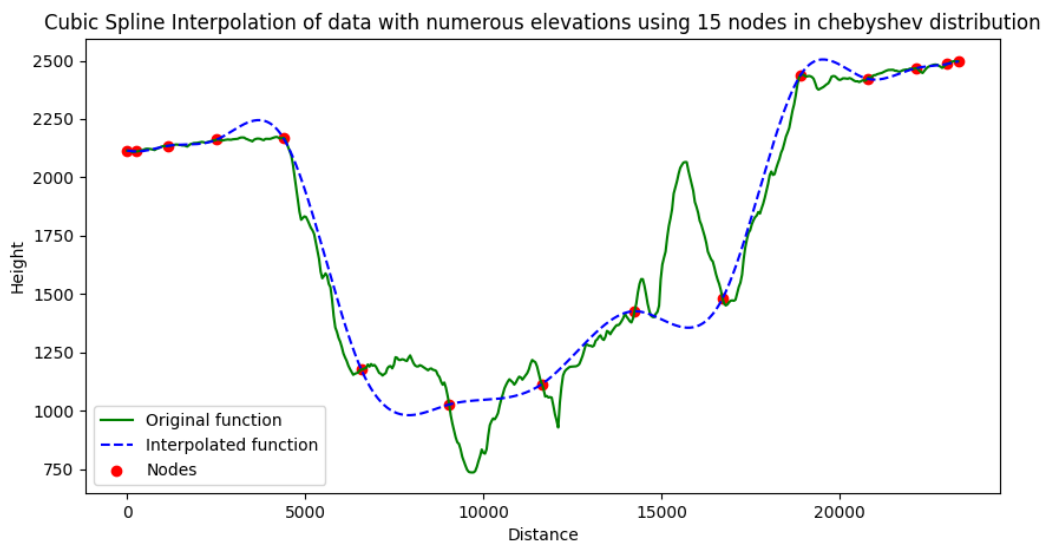
Interpolacja Lagrange'a względnie gładkiej funkcji przy 15 węzłach Chebyszewa

Tym razem możemy zauważyć bardzo dobre przybliżenie wartości poprzez użycie metody Lagrange'a w całym zakresie funkcji mimo dużej ilości węzłów.



Interpolacja Lagrange'a względnie gładkiej funkcji przy 30 węzłach Czebyszewa

Nawet dla tak dużej ilości węzłów efekt Rungego jest w bardzo dużym stopniu chamowany.



Interpolacja funkcjami splajnymi funkcji z licznymi gwałtownymi wzrostami przy 15 węzłach Czebyszewa

Użycie węzłów Czebyszewa jest nie wskazane przy wykorzystaniu metody sklejania wielomianów. Wpływa ono negatywnie na jakość aproksymacji gdyż zmniejsza ono ilość węzłów w środku zakresu skutkując gorszym dopasowaniem funkcji interpolowanej w tym obszarze.

6 Podsumowanie

Metoda interpolacji Lagrange mimo cechowania się szybkością, niską złożonością pamięciową oraz łatwością implementacji zawodzi przy dużych ilościach węzłów generując efekt Rungego skutkującym w dużych rozbieżnościach od prawidłowych wartości na krańcach interpolowanych funkcji. Tam, gdzie metoda Lagrange'a zawodzi, interpolacja za pomocą splajnów kubicznych doskonale się sprawdza, choć jest bardziej złożona zarówno obliczeniowo, jak i pamięciowo. Nie możemy jednak spisywać interpolacji Lagrange'a na straty gdyż wraz z wykorzystaniem węzłów Czebyszewa daje ona

zadawające rezultaty. Biorąc całą analizę pod uwagę mniej zawodna zdecydowanie będzie metoda sklejania wielomianów.