Beispiele zur Minimierung von Aussagenlogik

Minimierung durch Transformationsregeln

Warnsystem für Autos

Ein Warnsystem für Autos besteht aus den folgenden zwei Regeln:

- Ein akustisches Warnsignal ertönt, wenn jemand auf dem Fahrersitz sitzt, die Zündung eingeschalten ist und der Sicherheitsgurt nicht angelegt ist.
- Ein akustisches Warnsignal ertönt, wenn der Fahrersitz leer ist und die Zündung eingeschalten ist.

$$I\text{...Zündung ein.}$$

$$B\text{...Sicherheitsgurt angelegt.}$$

$$S\text{...Jemand sitzt am Fahrersitz}$$

$$(S \land I \land \neg B) \lor (\neg S \land I)$$

Assoziation

$$(I \land (S \land \neg B)) \lor (\neg S \land I)$$

Distribution

$$I \land ((S \land \neg B) \lor \neg S)$$

Distribution

$$I \land ((S \lor \neg S) \land (\neg B \lor \neg S))$$

Tautologie

$$I \land (T \land (\neg B \lor \neg S))$$

Neutralität

$$I \land (\neg B \lor \neg S)$$

Disjunktive Normalform

- Motivation: Finde eine logisch äquivalente aussagenlogische Formel - die im besten Fall kürzer ist.
- Ein guter Ausgangspunkt ist die disjunktive Normalform - bei der im Wesentlichen jede Zeile, die zu wahr führt, mithilfe von Konjunktionen beschrieben wird:

A	B	$A \implies B$

A	B	$A \implies B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$(\neg A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \lor (A \land B)$$

Fällt ihnen etwas auf, wenn sie die ersten beiden Terme betrachten? Denken sie an folgendes Beispiel:

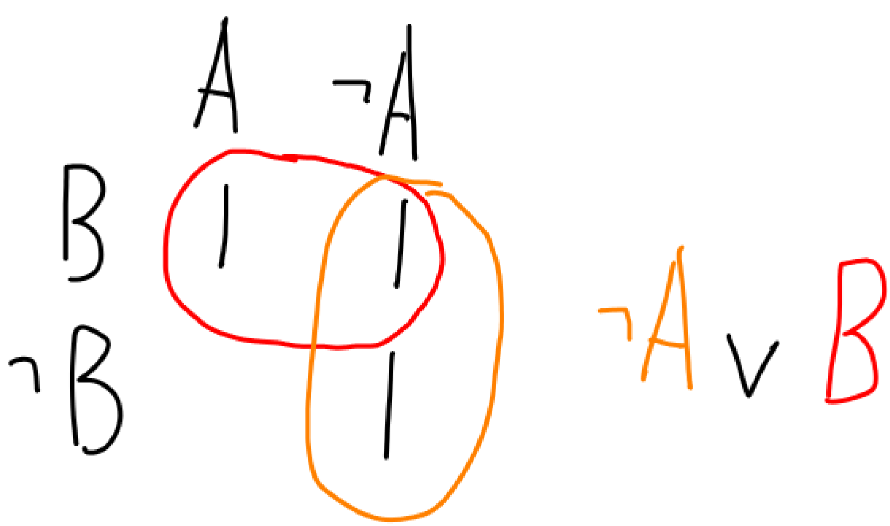
- Ein guter Fußballspieler kann schnell rennen, viele Tore schießen und **hat eine schöne Frisur**.
- Ein guter Fußballspieler kann schnell rennen, viele Tore schießen und **hat keine schöne Frisur**.

Die *disjunktive Normalform (DNF)* ermöglicht uns diese Vereinfachungen leichter zu erkennen. Nachfolgende wird die Lösung mit *Karnaugh-Veitch-Diagrammen* vorgestellt.

Minimierung mit *KV-Diagrammen*

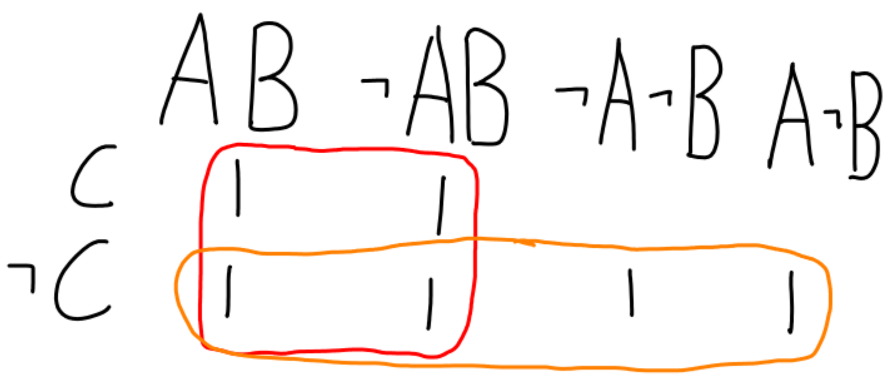
Implikation (logische Beziehung zwischen Aussagen)

$$(\neg A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \lor (A \land B)$$



Beispiel mit drei Variablen

A	B	C	$P(A,B,C)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



$B \lor \neg C$

A	B	C	$P(A,B,C)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	AB	$\neg AB$	$\neg A \neg B$	$A \neg B$
C	1			1
$\neg C$	1		1	1

$$A \lor (\neg B \land \neg C)$$

Beispiel mit vier Variablen

A	B	C	D	$P(A,B,C,D)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

	AB	$\neg AB$	$\neg A\neg B$	$A\neg B$
CD	1		1	
$\neg CD$	1		1	
$\neg C\neg D$	1			1
$C\neg D$	1			1

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge D)$$

A	B	C	D	$P(A,B,C,D)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1

A	B	C	D	$P(A, B, C, D)$
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

	AB	$\neg AB$	$\neg A \neg B$	$A \neg B$
CD	1			1
$\neg C D$				
$\neg C \neg D$				
$C \neg D$	1			1

$(A \wedge C)$