Einführung in die Aussagenlogik

DSAI - Dietmar Steiner

HTL Leonding
next level

Ziel

- Logisches Nachdenken (Validierung) über/von Aussagen
- Regeln für Schlussfolgerungen definieren
- Wiederverwendung der Booleschen Logik

Propositionen

- Eine Aussage wie „Ich bin hungrig“ nennen wir eine Aussage (Proposition)
- Bei Aussagen ist es sinnvoll zu fragen, ob sie wahr oder falsch sind
- In der Aussagenlogik ist die Antwort auf diese Frage entweder wahr oder falsch, es gibt nichts dazwischen

Todo: Finden Sie weitere Propositionen

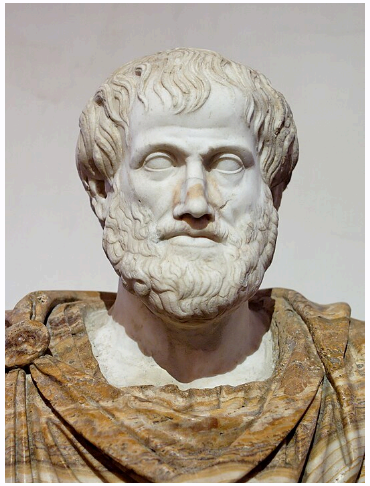
Weitere Beispiele für Propositionen

- Dieser Stromkreis leitet elektrischen Strom
- Heute ist Mittwoch
- Ich kann wie ein Vogel fliegen

Wo finden wir Aussagelogik?

- digitale Schaltkreise (Computerprozessoren)
- Programmiersprachen zur Entscheidungsfindung
- zur Beweisführung in der Mathematik
- Rhetorik und Philosphie - z.B. Analyse, ob ein Argument stimmig ist
- KI und maschinelles Lernen um Regelsysteme zu erstellen

Wurzeln der Logik



Wer ist das? (3 Jhdt n. Christus)

Medhatithi Gautama (6 Jhdt v. Christus) .. erster der Logik studierte

Ibn Sina (9-10 Jhdt)

Propositionale Variablen

- Anstelle von Aussagen sprechen wir oft über Aussagevariablen
- Das bedeutet, dass wir uns nicht für eine bestimmte Aussage interessieren, sondern für eine Variable, die beliebige Aussagen enthalten kann
- Vereinfachend können wir Aussagevariablen als Variablen verstehen, die entweder den Wert „wahr" (t) oder „falsch" (f) annehmen.
- Anstatt zu sagen „Sei A eine beliebige Aussage", können wir sagen „Sei A eine Aussagevariable"

Aussage – Definition

Definition

Eine Aussage ist ein „sprachliches Element“, bei dem es sinnvoll ist, zu fragen, ob sie wahr oder falsch ist. Die Begriffe „wahr“ und „falsch“ nennt man die Wahrheitswerte einer Aussage.

- Aussagevariablen werden hauptsächlich durch Großbuchstaben dargestellt: A, B, C, …
- „Wahr“ wird oft mit „t“ und „falsch“ mit „f“ abgekürzt.
- Uns interessiert nur die Beziehung zwischen den Aussagevariablen, nicht deren spezifischer Inhalt.

Grundlegende Operatoren (∧, ∨, ¬)

Es gibt drei grundlegende Operatoren, um Aussagen zu kombinieren und zu transformieren:

- Konjunktion (∧): Arbeitet mit zwei Aussagevariablen. Wenn beide Variablen wahr sind, ist das Ergebnis wahr, in allen anderen Fällen ist das Ergebnis falsch. Auch als „Und"-Operator bekannt

Grundlegende Operatoren (∧, ∨, ¬)

- Disjunktion (∨): Arbeitet mit zwei Aussagevariablen. Wenn eine der Variablen wahr ist oder beide wahr sind, ist das Ergebnis wahr, sonst ist es falsch. Auch als „Oder“-Operator bekannt
- Negation (¬): Kehrt den Wahrheitswert einer Aussage um. Aus „wahr“ wird „falsch“ und aus „falsch“ wird „wahr“

Kombination von Aussagen – Wahrheitstabelle

Beispiel einer Wahrheitstabelle für die Operatoren ∧, ∨, und ¬:

A	B	A ∧ B	A ∨ B	¬A
t	t	t	t	f
t	f	f	t	f
f	t	f	t	t
f	f	f	f	t

Implikation (⇒)

Die Implikation ($A \Rightarrow B$) bedeutet: „Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr.“

Wahrheitstabelle für die Implikation:

A	B	$A \Rightarrow B$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

Implikation (⇒)

- Die letzten beiden Zeilen sind wahrscheinlich überraschend, da sie zeigen, dass logische Implikation (⇒) sich von einer kausalen Beziehung unterscheidet
- In der Aussagenlogik ist es Konvention, dass $A \Rightarrow B$ automatisch wahr ist, wenn A falsch ist
- Dieser Operator bedeutet streng genommen: „Nicht der Fall, dass A wahr und B falsch“. Aber es ist das Nächste, das wir in der Logik an einer kausalen Beziehung haben. Deshalb sagen wir trotzdem „wenn A, dann B“.

Sprachliche Analyse von Logik

Beispiel: „Wenn es Sonntag ist, besuchen wir unsere Freunde. Wenn es nicht regnet, gehen wir entweder wandern oder fahren Fahrrad.“

Analysieren sie diese Sätze, indem sie diese in Aussagen zerlegen und mit den logischen Operatoren verbinden.

Äquivalenz (⇔)

Die Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$) bedeutet: „A genau dann, wenn B“.
Die Wahrheitstabelle zeigt, dass $A \Leftrightarrow B$ nur wahr ist, wenn beide den gleichen Wahrheitswert haben.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	t

Aussageformel (AF)

Angenommen, wir haben eine Menge von Aussagevariablen oder Aussagen A, B, C, ... Wenn wir diese Aussagen mit den bereits vorgestellten Operatoren kombinieren, nennt man das Ergebnis eine Aussageformel. Wenn wir jeder Aussagevariable in einer Aussageformel Wahrheitswerte (wahr oder falsch) zuweisen, erhalten wir eine konkrete Aussage.

Äquivalenz und Implikation AF

Seien $P = P(A, B, C, \ldots)$ und $Q = Q(A, B, C, \ldots)$ Aussageformeln, dann gilt:

1. P und Q heißen äquivalent ($P \equiv Q$ bzw. $P \Leftrightarrow Q$), wenn P und Q für jede mögliche Zuweisung der Wahrheitswerte ihrer Aussagevariablen denselben Wahrheitswert haben
2. P impliziert Q ($P \vdash Q$ bzw. $P \Rightarrow Q$), wenn für jede Zuweisung der Wahrheitswerte gilt, dass, wenn P wahr ist, auch Q wahr ist. Mit anderen Worten: Wenn P wahr ist, wissen wir, dass auch Q wahr ist

Übung

Beweisen wir, dass die Aussageformeln $\neg A \lor B$ und $A \Rightarrow B$ äquivalent sind: $(\neg A \lor B) \equiv (A \Rightarrow B)$.

Kommutativität, Assoziativität

1. Kommutativität

   $A \land B \equiv B \land A$

   $A \lor B \equiv B \lor A$

2. Assoziativität

   $A \land (B \land C) \equiv (A \land B) \land C \equiv A \land B \land C$

   $A \lor (B \lor C) \equiv (A \lor B) \lor C \equiv A \lor B \lor C$

Distributivität, De Morgan

1. Distributivität

   $$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$

   $$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

2. De Morgan

   $$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$$

   $$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$$

Absorption, Idempotenz

1. Absorption

   $A \land (A \lor B) \equiv A$

   $A \lor (A \land B) \equiv A$

2. Idempotenz

   $A \land A \equiv A$

   $A \lor A \equiv A$

   $\neg(\neg A) \equiv A$

Tautologie und Widerspruch

Definition: Eine Formel, die immer wahr ist, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte ihren Variablen zugewiesen werden, nennt man eine Tautologie (Symbol **T**). Eine Formel, die immer falsch ist, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte ihren Variablen zugewiesen werden, nennt man einen Widerspruch (Symbol **F**).

- Beispiel für eine Tautologie: „Ich bin glücklich oder ich bin nicht glücklich" ($A \vee \neg A$).

Gesetze mit Widersprüchen und Tautologien

Für eine Aussage A gelten die folgenden Gesetze:

- $A \land T \equiv A$
  (*Eine Aussage und eine Tautologie ergibt die Aussage selbst.*)
- $A \lor T \equiv T$
  (*Eine Aussage oder eine Tautologie ergibt immer die Tautologie.*)
- $A \land F \equiv F$
  (*Eine Aussage und ein Widerspruch ergibt immer einen Widerspruch.*)

Gesetze mit Widersprüchen und Tautologien

- $A \lor F \equiv A$
  (*Eine Aussage oder ein Widerspruch ergibt die Aussage selbst.*)
- $A \land \neg A \equiv F$
  (*Eine Aussage und ihr Gegenteil ergibt einen Widerspruch.*)
- $A \lor \neg A \equiv T$
  (*Eine Aussage oder ihr Gegenteil ergibt immer eine Tautologie.*)

Noch Fragen?

d.steiner@htl-leonding.ac.at

basierend auf den Folien von Kollegen: Bauer/Braun/Karpowicz

HTL Leonding
next level