Ecuaciones diferenciales ordinarias para apurados

Marduk Bolaños Puchet

27 de octubre de 2012

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que involucran derivadas. A diferencia de las ecuaciones algebraicas, la solución de una ecuación diferencial no es un número sino una función. Por ejemplo

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \tag{1a}$$

La solución de esta ecuación es una función $x(t)$ cuya derivada es cero. A partir del significado geométrico de la derivada de una función en un punto, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, sabemos que $x(t)$ debe ser una función constante.

Antes de obtener la solución de la ecuación debemos recordar el

Teorema fundamental del cálculo. *Si f es una función real, continua en el intervalo $[a,b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ está definida para toda x en dicho intervalo, entonces F es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$ para toda x en (a,b).*

En particular, si F es una antiderivada de f en el intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. Es importante notar que si $F'(x) = f(x)$, entonces también es cierto que $(F(x)+c)' = f(x)$.

Usando este resultado para integrar (1a) tenemos

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}(t')\,\mathrm{d}t' = \int_{t_0}^{t} 0\,\mathrm{d}t' \tag{1b}$$

De donde la solución a la ecuación diferencial es

$$x(t) = x(t_0) \tag{1c}$$

Por lo tanto, es una función constante, cuyo valor en todo momento es el valor que tenía en el tiempo t_0.

Ahora consideramos la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x \tag{2a}$$

La solución de esta ecuación es una función, cuya derivada es la misma función. De las funciones elementales que conocemos, es decir, polinomios, cocientes de polinomios, funciones trigonométricas, logaritmo y exponencial, esta última tiene la propiedad que buscamos.

Antes de obtener la solución de (2a), es importante recordar la

Regla de la cadena. *Si g es una función diferenciable en un punto x $(u = g(x))$ y f es una función diferenciable en el punto $g(x)$ $(y = f(u))$, entonces la composición de las dos funciones, denotada como $f \circ g$, es diferenciable en x y su derivada es*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

Si $y = f(u) = \log(u)$ con $u = g(t)$, entonces, de acuerdo con el resultado anterior

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\log u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\log u}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$$

Notamos que el lado derecho de esta ecuación es justamente la ecuación (2a) y usando el TFC obtenemos

$$\log(x(t)) - \log(x(t_0)) = t - t_0 \tag{2b}$$

Ahora recordamos que una propiedad de los logaritmos es $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$ y también sabemos que la función inversa del logaritmo es la exponencial. Usando esto, finalmente obtenemos la función que buscamos

$$x(t) = x(t_0)\,\mathrm{e}^{t - t_0} \tag{2c}$$

Las ecuaciones diferenciales que sólo involucran a la primera derivada de la función, se llaman ecuaciones diferenciales de primer orden. Sin embargo, en la mecánica newtoniana las ecuaciones diferenciales que se necesitan resolver son de segundo grado. Esto proviene de la

Segunda Ley de Newton. *El efecto de la suma de las fuerzas que actúan sobre un sistema mecánico es un cambio en el ímpetu o momentum* $\mathbf{p}$ *del sistema.*

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ con $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$. Notamos que para sistemas mecánicos con masa constante, la expresión de la segunda ley de Newton es

$$\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} \tag{3}$$

Antes de dar un ejemplo, es importante recordar también la

Primera Ley de Newton. *Si el efecto de la suma de las fuerzas que actúan sobre un sistema físico es tal que la velocidad del sistema no cambia, entonces el sistema permanecerá en reposo o se moverá con velocidad constante.*

Ahora sí, consideremos como el sistema mecánico de interés a un resorte sujetado del techo del laboratorio. Si en su extremo libre se cuelga una caja de masa m, la longitud del resorte se incrementará y la caja permanecerá suspendida en reposo. La fuerza de atracción que produce el campo gravitacional terrestre sobre la caja es contrarrestada por el resorte.

Si ahora, la caja es desplazada una cierta distancia x hacia el piso del laboratorio, en dirección perpendicular a él, iniciará un movimiento oscilatorio. Robert Hooke, realizó un experimento similar en el siglo XVII y obtuvo una expresión para la fuerza que produce el resorte sobre la caja, conocida como la Ley de Hooke

$$F = -kx \tag{4}$$

Este sistema es tan importante en la Física que se le ha bautizado como el Oscilador Armónico.

Isaac Newton introdujo una notación muy conveniente para las derivadas respecto al tiempo.

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

Si estamos interesados en estudiar el movimiento de la caja, entonces necesitamos resolver la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} = -kx \tag{5}$$

Para simplificar esta ecuación consideraremos que $m = k = 1$. La solución de esta ecuación es una función del tiempo, cuya segunda derivada es igual a la misma función reflejada sobre el eje X. Recordamos que las funciones trigonométricas $\sin(t)$ y $\cos(t)$ tienen esta propiedad. Por otro lado, notamos que esta ecuación es lineal, es decir, que si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación, entonces $x(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ también es una solución de la ecuación. De hecho, ésta es la solución más general que podemos encontrar para (5).

Esta vez, encontramos la solución de la ecuación diferencial buscando en nuestra memoria una función con las propiedades que necesitamos. Sin embargo, para una ecuación diferencial más complicada seguramente será muy difícil, si no es que imposible, encontrar una solución con este procedimiento. Dado que éste es un curso de computación necesitamos encontrar una manera de que la computadora nos ayude a resolver ecuaciones diferenciales.

Para ello, usaremos los conceptos cinemáticos (que describen el movimiento de un objeto) que conocemos y un teorema muy importante del cálculo.

Teorema de Taylor. *Si f es una función real de variable real diferenciable k veces en el punto a, con $k \geq 1$ un número entero, entonces existe una función real de variable real h_k tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(k)(a)}}{k!}(x-a)^k + h_k(x)(x-a)^k$$

$\lim_{x\to a} h_k(x) = 0$

Este resultado nos permite escribir cualquier función para la cual podemos calcular su valor y el de k derivadas de la función en un punto a, como un polinomio de orden k. En particular, si x es muy cercano a a de manera que $(x-a)^2 \ll (x-a) = \Delta x$, entonces

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x \tag{6}$$

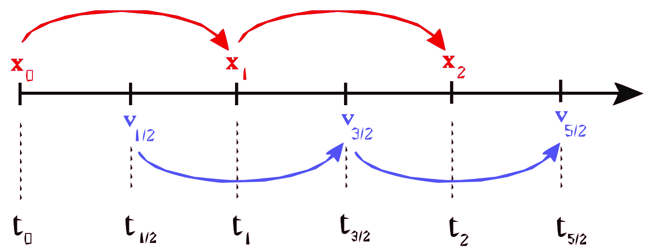
Utilizando esta expresión podemos escribir la posición y la rapidez de la caja del oscilador armónico como

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t \quad (7) \\ v(t) &= v(t_0) + \dot{v}(t_0)\Delta t \quad (8) \end{aligned}$$

Recordando que $\dot{v} = \ddot{x}$ y usando la ecuación (5), podemos conocer el movimiento del sistema en cualquier instante de tiempo si conocemos su posición inicial y su rapidez inicial:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t \quad (9) \\ v(t) &= v(t_0) - x(t_0)\Delta t \quad (10) \end{aligned}$$

Este procedimiento para resolver una ecuación diferencial se llama el Método de Euler. Sin embargo, no es conveniente utilizarlo con una computadora debido a que no conserva la energía. Entonces para resolver una ecuación diferencial numéricamente seguiremos el consejo de Richard Feynman[1] y usaremos el método del salto de rana ilustrado en la figura de abajo. Este método tiene dos propiedades importantes: conserva la energía y es reversible en el tiempo. Por esta última razón es muy utilizado en mecánica celeste.



Los paquetes de cómputo científico como Scipy, Octave o Matlab incluyen rutinas para resolver ecuaciones diferenciales basadas en el método de Runge-Kutta, el cual tiene mejores propiedades que el método del salto de rana. Antes de utilizar estas rutinas necesitamos un resultado muy importante de la teoría de ecuaciones diferenciales.

Reducción de orden. *Cualquier ecuación diferencial de orden* n*, dada por* $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) = y^{(n)}$*, se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden definiendo funciones* $y_i = y^{(i-1)}$ *para* $i = 1, 2, ..., n$*. El sistema de ecuaciones acopladas está dado por* $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ *con* $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ *y* $\mathbf{F}(x, y_1, ..., y_n) = (y_2, ..., y_n, F(x, y_1, ..., y_n))$*.*

En el caso del oscilador armónico se tiene la ecuación diferencial $\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) = -x$, que corresponde al sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\dot{y}_1 = \dot{x} \tag{11}$$
$$\dot{y}_2 = -x \tag{12}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales con Octave, se requiere el paquete `odepkg`, que en Octave 3.6 se instala con la instrucción `pkg install -forge odepkg`. Si el paquete está instalado es necesario activarlo con `pkg load odepkg`.

Ahora definimos una función anónima que representa el sistema de ecuaciones que queremos resolver

```
oscar = @(t,y) [y(2);-y(1)];
```

`y` es un vector columna, cuyas entradas son la posición inicial `y(1)` y la velocidad inicial `y(2)` del oscilador.

Finalmente, calculamos la solución con

```
[t,x]=ode45(oscar,[0,10],[1;0]);
```

[1]Feynman Lectures on Physics Vol. 1, Ch. 9

`ode45` es el método de Runge-Kutta y para operar necesita la función anónima que definimos arriba, un vector renglón, cuyas entradas son el tiempo inicial y el tiempo final para calcular la solución y un vector columna con las condiciones iniciales. La primera entrada del vector es la velocidad inicial y la segunda entrada es la posición inicial.

Esta rutina regresa un vector `t` con los instantes de tiempo en los que calculó la posición y la velocidad del oscilador armónico, y una matriz `x` cuyas columnas son la posición y la velocidad del sistema en cada instante de tiempo.

Si queremos graficar la posición del oscilador en función del tiempo usamos el comando `plot` como

```
plot(t,x(:,1))
```

Donde `x(:,1)` es la sintaxis para obtener todos los renglones de la matriz `y` en la columna 1.

Análogamente, para graficar la velocidad del oscilador con el tiempo usamos

```
plot(t,x(:,2))
```