

Теория категорий

ЮФУ, мехмат, 2016/2017 учебный год, весенний семестр

Программа курса

Абстрагирование как инструмент математики. Предмет теории категорий. Определения категории и функтора. Примеры: **Sets**, **Sets_{fin}**, частично упорядоченные множества и категория **Poset**, отношения и категория **Rel**, конечные категории **0–3**, **Cat**, предпорядок и множество с предпорядком как категория, частично упорядоченное множество как категория, категория логических формул и доказательств, категория языка программирования, дискретная категория на множестве, моноид как категория, категория моноидов. Конкретные категории, малые и большие категории. Ном-множества и локально малые категории. Представление Кэли.

Конструкции на категориях: произведение категорий, двойственная категория, категория стрелок, категории над и под объектом, категория запятой. Характеризация стрелок: мономорфизмы, эпиморфизмы, изоморфизмы, обратные стрелки, расщепляющие моно и эпи. Инициальные и терминальные объекты, единственность, примеры. Стрелки в инициальные объекты. Стрелки из терминальных объектов и обобщённые элементы, примеры. Произведение объектов, единственность произведения, стрелки в произведение, примеры (частично упорядоченное множество, категория **Top**).

Понятие о принципе двойственности в теории категорий. Копроизведение, единственность, примеры: множества, топологические пространства, моноиды (свободное произведение моноидов). Функтор свободного моноида и доказательство его коммутирования с копроизведением.

Простое типизированное лямбда-исчисление: синтаксис, правила типизации и дерева вывода, эквивалентная теория, структура категории, произведения и копроизведения. Произведение и копроизведение в категории доказательств.

Уравнители и коуравнители, примеры. Универсальные (*pushout*) и коуниверсальные (*pullback*) квадраты, их построение в категориях с произведениями и уравнителями. Подобъекты и факторобъекты.

Образ функтора, действующего из категории **J** как диаграмма типа **J**. Конусы и коконусы, категории конусов и коконусов. Понятие предела и копредела, конечного предела и копредела. Примеры пределов и копределов типа **2**, **3**. Формулировка критерия существования конечных пределов и копределов. Непрерывные функторы.

Каррирование для функций двух переменных. Определение экспоненциала. Декартово замкнутые категории: определение, примеры, свойства экспоненциалов. Лямбда-исчисление как декартово замкнутая категория и как язык произвольной декартово замкнутой категории.

Естественное преобразование. Примеры естественного преобразования между функторами: $- \times (B \times C)$ и $(- \times B) \times C$, $A \times -$ и 1_C , List_n с самим собой в категории типов,

G^{op} и 1_G в категории **Group**, $F : \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{Monoid}$ и 1_M в категории **Monoid**, функтором взятия определителя \det и функтором забывания **Ring** \rightarrow **Monoid** в категории **Monoid**. Категория функторов. Критерий того, что естественное преобразование является изо.

Ковариантный и контравариантный Hom-функторы, соответствующие им естественные преобразования, лемма Йонеды и контравариантный случай, вложение Йонеды, принцип Йонеды. Элементарные топосы.

Биекция между функтором свободного моноида и операцией перехода от моноида к множеству его элементов. Предварительное определение сопряжения функторов, пример диагонального функтора и его правого сопряжённого. Характеризация сопряжения с помощью изоморфизма Hom-множеств, основное определение сопряжения, пример функтора-умножателя на объект и вычисления для экспоненциалов, другие примеры сопряжений.

Тождества треугольника для сопряжённых функторов. Эндофункторы и свойства эндофункторов, порождённых сопряжением. Монада как эндофунктор с парой естественных преобразований. Задача восстановления сопряжения по заданному эндофунктору. Теоретико-категорное описание языка программирования Haskell («категория» **Hask**): объекты и стрелки, функторы и монады. Моноидальная категория эндофункторов, монада как моноид в категории эндофункторов.

Темы практических занятий

1. Основные понятия: категория, функтор. Листок 1 от 11 марта.
2. Конструкции на категориях. Листок 2 от 18 марта.
3. Моно, эпи, изо. Инициальные и терминальные объекты. Листок 3 от 25 марта.
4. Элементы и обобщённые элементы. Произведения объектов. Листок 4 от 1 апреля.
5. Произведения и копроизведения. Листок 5 от 8 апреля.
6. Уравнители. Расслоенные произведения и сумма. Листок 6 от 22 апреля.
7. Пределы и копределы. Декартово замкнутые категории. Листок 7 от 6 мая.
8. Естественные преобразования. Листок 8 от 13 мая.

Литература

1. Awodey S. Category Theory. Oxford University Press, 2nd edition, 2010. P. 311.
2. Маклейн С. Категории для работающего математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 352 с.