Дополнение неограниченного языка Дика как группа

Алфавит для слов $\mathscr{U} = \{(_1,)_1, (_2,)_2, \ldots, (_n,)_n\}$. Пусть B_i это скобка типа i, а $B_i^{\backprime}$ другая того же типа. Будем порождать $\mathscr{U}^*$ конкатенацией "$\cdot$" с дополнительным условием:

$$B_i \cdot B_i^{\backprime} = E$$

И для двух комбинаций скобок:

$$B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_n} B_i \cdot B_i^{\backprime} B_{j_1} B_{j_2} \ldots B_{j_n} = B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_n} \cdot E \cdot B_{j_1} B_{j_2} \ldots B_{j_n}$$

Покажем, что для любой комбинации скобок существует обратная комбинация. Пусть слово $A = B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_{n-1}} B_{i_n}$. Тогда, чтобы получить обратный элемент, достаточно взять зеркальный образ $\overline{A} = B_{i_n} B_{i_{n-1}} \ldots B_{i_2} B_{i_1}$ и заменить все скобки на другие того же типа $\overline{A}^{\backprime} = B_{i_n}^{\backprime} B_{i_{n-1}}^{\backprime} \ldots B_{i_2}^{\backprime} B_{i_1}^{\backprime}$:

$$A \cdot \overline{A}^{\backprime} = B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_{n-1}} B_{i_n} \cdot B_{i_n}^{\backprime} B_{i_{n-1}}^{\backprime} \ldots B_{i_2}^{\backprime} B_{i_1}^{\backprime} = E = \overline{A}^{\backprime} \cdot A$$

Тогда $\mathscr{U}^*$ будет *группой* порождённой подмножеством $\mathscr{U}$, т.е. $\mathscr{U}^* = \langle \mathscr{U} \rangle$.

$\cdot$	$(_1$	$)_1$	$(_2$	$)_2$	$\ldots$	$(_n$	$)_n$	$\ldots$
$(_1$	$(_1(_1$	E	$(_1(_2$	$(_1)_2$	$\ldots$	$(_1(_n$	$(_1)_n$	$\ldots$
$)_1$	E	$)_1)_1$	$)_1(_2$	$)_1)_2$	$\ldots$	$)_1(_n$	$)_1)_n$	$\ldots$
$(_2$	$(_2(_1$	$(_2)_1$	$(_2(_2$	E	$\ldots$	$(_2(_n$	$(_2)_n$	$\ldots$
$)_2$	$)_2(_1$	$)_2)_1$	E	$)_2)_2$	$\ldots$	$)_2(_n$	$)_2)_n$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$(_n$	$(_n(_1$	$(_n)_1$	$(_n(_2$	$(_n)_2$	$\ldots$	$(_n(_n$	E	$\ldots$
$)_n$	$)_n(_1$	$)_n)_1$	$)_n(_2$	$)_n)_2$	$\ldots$	E	$)_n)_n$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$