Введение в метаматематику на троечку

Мат.клуб “Тифаретник” по С. Клини

8 января 2022 г.

> Формальные ограничители нужны человеку всегда,
> Они как огнетушители, а это, бля, не ерунда.
>
> Кровосток – Снайпер

Определение (§16, Формальные символы)**.**

- *Логические символы*: $\supset$(влечёт), &(и), $\vee$(или), $\neg$(не), $\forall$(для всех), $\exists$(существует)
- *Символы предикатов*: $=$(равняется)
- *Символы функций*: $+$(сложить с), $\cdot$(умножить на), $'$(следующий за)
- *Индивидуальные символы*: 0(нуль)
- *Переменные*: a, b, c, ...
- *Скобки*: (,)

Определение (§17)**.**

1. 0 есть *терм*
2. Каждая переменная есть *терм*
3. Если s и t — *термы*, то

   (a) $(s)+(t)$ — *терм* (b) $(s)\cdot(t)$ — *терм* (c) $(s)'$ — *терм*

4. Никаких других *термов*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

Определение (§17)**.**

1. Если s и t — *термы*, то $(s)=(t)$ — *формула*
2. Если A и B — *формулы*, то

   (a) $(A)\supset(B)$ — *формула* (c) $(A)\vee(B)$ — *формула*
   (b) $(A)\,\&\,(B)$ — *формула* (d) $\neg(A)$ — *формула*

3. Если x — переменная, а A — *формула*, то

   (a) $\forall x(A)$ — *формула* (b) $\exists x(A)$ — *формула*

4. Никаких других *формул*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

Определение (§18)**.** Вхождение x в формулу A называется *связанным* (или вхождением в качестве *связанной переменной*), если оно является вхождением в квантор $\forall x$ или $\exists x$ или в область действия квантора $\forall x$ или $\exists x$; в противном случае вхождение называется *свободным*.

Определение (§18)**.** *Подстановка терма t вместо* переменной x в терм или формулу A состоит в одновременной замене каждого *свободного вхождения* x в A на вхождение t.

Определение (§18)**.** Будем говорить, что терм t *свободен при свободных вхождениях* переменной x в формулу $A(x)$, если никакое свободное вхождение x в $A(x)$ не входит в область действия какого-нибудь квантора $\forall y$ или $\exists y$, где y — переменная из t (т.е. входящая в t).

Постулаты формальной системы (§19)

Dramatis personae

В постулатах 1–8 A, B и C — формулы. В 9–13 x — переменная, $A(x)$ — формула, C — формула, не содержащая свободно x, а t — терм, свободный для x в $A(x)$.

Группа A. Постулаты исчисления предикатов

Группа A1. Постулаты исчисления высказываний

1a $A \supset (B \supset A)$

1b $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

4a $A \& B \supset A$

4b $A \& B \supset B$

5a $A \supset A \vee B$

5b $B \supset A \vee B$

2 $\dfrac{A, A \supset B}{B}$

3 $A \supset (B \supset A \& B)$

6 $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

7 $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

8° $\neg\neg A \supset A$

Группа A2. (Дополнительные) Постулаты исчисления предикатов

9 $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$

10 $\forall x A(x) \supset A(t)$

11 $A(t) \supset \exists x A(x)$

12 $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$

Группа B. (Дополнительные) Постулаты арифметики

13 $A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$

14 $a' = b' \supset a = b$

15 $\neg a' = 0$

16 $a = b \supset (a = c \supset b = c)$

17 $a = b \supset a' = b'$

18 $a + 0 = a$

19 $a + b' = (a + b)'$

20 $a \cdot 0 = 0$

21 $a \cdot b' = a \cdot b + a$

Определение (§19)**.** Формула является *аксиомой*, если она имеет форму одну из 1a, 1b, 3–8, 10, 11, 13 или она есть одна из 14–21.

Определение (§19)**.** Формула является *непосредственным следствием* (из) одной или двух других формул, если она имеет форму, указанную под чертой, тогда как другая (не) имеет(ют) форму(ы), указанную (не) над чертой в 2, 9 или 12.

Определение (§19)**.** Постулаты 2, 9 и 12 мы называем *правилами вывода*. Для любого (фиксированного) выбора A и B или x, $A(x)$ и C, подчинённого отмеченным выше условиям, формулы указанные над чертой, являются *посылкой* (*первой* и *второй посылкой* соответственно), а формула, указанная под чертой, является *заключением* применения правила вывода.

Формальный вывод

Определение (§20)**.** Если дан перечень $D_1, \dots, D_l (l \geq 0)$ формул, то непустая конечная последовательность формул называется *формальным выводом из исходных формул* $D_1, \dots, D_l$, если каждая формула этой последовательности является или одной из формул $D_1, \dots, D_l$, или аксиомой, или непосредственным следствием из предыдущих формул последовательности. Вывод называется выводом *своей последней* формулы E, и эта формула называется *выводимой из* исходных формул (обозначается $D_1, \dots, D_l \vdash E$), а также *заключением* (или *конечной формулой*) вывода.

Определение (§20, Общие свойства $\vdash$)**.**

- $\Gamma \vdash E$, если E входит в список Γ
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta, \Gamma \vdash E$ для любого перечня Δ (Любая доказуемая выводима из любых исходных)
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ путём перестановки формул Γ или опускания любых таких формул, которые тождественны с другими остающимися
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ опусканием любых формул Γ, которые являются доказуемыми или выводимыми из остающихся формул Γ.

Теорема 1 (§21, О дедукции)**.** Для исчисления высказываний, если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

Теорема 1 (§22, полная)**.** Для исчисления предикатов (или полной арифметической формальной системы), если $\Gamma, A \vdash B$, причём все свободные переменные остаются фиксированными для последней исходной формулы, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

Определение (§23)**.** Переменная “x” приписанная к символу “$\vdash$” в качестве верхнего индекса отличает применение правила 9 или 12 по отношению к x при построении результирующего вывода.

Теорема 2 (§23)**.** В следующих правилах A, B и C или x, $A(x)$, C и t подчинены тем же условиям, что и в соответствующих постулатах, а Γ или $\Gamma(x)$ есть любой список формул.

Для исчисления высказываний справедливы правила от “импликации” до “отрицания” включительно.

Для исчисления предикатов (или полной арифметической системы) справедливы все правила, при условии, что в каждом вспомогательном выводе связанные переменные остаются фиксированными для устраняемой формулы.

	Введение	Удаление
Импликация	Если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$	$A, A \supset B \vdash B$ (modus ponens)
Конъюнкция	$A, B \vdash A \& B$	$A \& B \vdash A$ $A \& B \vdash B$
Дизъюнкция	$A \vdash A \vee B$ $B \vdash A \vee B$	Если $\Gamma, A \vdash C$ и $\Gamma, B \vdash C$, то $\Gamma, A \vee B \vdash C$
Отрицание	Если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, A \vdash \neg B$, то $\Gamma \vdash \neg A$	$\neg\neg A \vdash A$
Общность	$A(x) \vdash^x \forall x A(x)$	$\forall x A(x) \vdash A(t)$
Существование	$A(t) \vdash \exists x A(x)$	Если $\Gamma(x), A(x) \vdash C$, то $\Gamma(x), \exists x A(x) \vdash^x C$

Формулы исчисления высказываний

Определение (§25)**.** Формальные символы нового рода: $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$ называемые пропозициональными буквами, (потенциально) бесконечный перечень которых мы считаем имеющимся в нашем распоряжении. Новое определение "формулы":

1. Пропозициональная буква есть *формула*
2. Если A и B — *формулы*, то

   (a) $(A) \supset (B)$ — *формула*

   (b) $(A) \,\&\, (B)$ — *формула*

   (c) $(A) \vee (B)$ — *формула*

   (d) $\neg(A)$ — *формула*

3. Никаких других *формул*, кроме определённых согласно 1 и 2, нет.

Определение (§25)**.** Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — перечень различных пропозициональных букв. (Здесь "P_1", …, "P_m" — метаматематические буквы, которыми мы пользуемся как названиями для пропозициональных букв, когда не хотим ограничивать наше рассуждение употреблением конкретных пропозициональных букв.)

Пропозициональная формула A называется *формулой составленной* из $P_1, \ldots, P_m$, если никакая пропозициональная буква, отличная от $P_1, \ldots, P_m$ не входит в A.

Определение (§25)**.** *Подстановка* вместо пропозициональной буквы (или одновременно вместо нескольких различных пропозициональных пропозициональных букв) определяется как для переменной в §18, за исключением того, что подстановка применяется теперь ко всем вхождениям без исключений (так как нет связанных вхождений).

Теорема 3 (§25, Подстановка вместо пропозициональных букв)**.** Пусть Γ — перечень пропозициональных формул, а E — пропозициональная формула, составленная из различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — формулы. Пусть Γ^* и E^* получаются из Γ и E соответственно путём одновременной подстановки $A_1, \ldots, A_m$ вместо $P_1, \ldots, P_m$ соответственно.

Если $\Gamma \vdash E$, то $\Gamma^* \vdash E^*$ (Для случая пустой Γ: если $\vdash E$, то $\vdash E^*$)

Определение (§25)**.** Формула называется *элементарной (для исчисления высказываний)*, если она не имеет ни одного из видов $A \supset B$, $A \,\&\, B$, $A \vee B$, $\neg A$, где A и B — формулы.

Теорема 4 (§25, Обращение правила подстановки для проп. переменных)**.** При тех же условиях, что и в теореме 3. Если $A_1, \ldots, A_m$ — элементарные формулы, то из $\Gamma^* \vdash E^*$ следует $\Gamma \vdash E$.

Теорема 4 (§25, вторая форма)**.** Пусть Γ^* — формулы, а E^* — формула, имеющие различные элементарные компоненты $A_1, \ldots, A_m$. Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — пропозициональные буквы, не обязательно различные. Пусть Γ, E получаются из Γ^*, E^* соответственно заменой одновременно во всех вхождениях $A_1, \ldots, A_m$ на $P_1, \ldots, P_m$ соответственно. Тогда $\Gamma^* \vdash E^*$ влечёт $\Gamma \vdash E$.

За исключением того, что "формула" здесь понимается не в смысле пропозициональной формулы, теорема 4 содержится в теореме 3.

Определение (§26)**.** Пусть A и B — формулы. Введём запись "$A \sim B$" в качестве сокращения для записи $(A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$. Символ "$\sim$" можно читать "эквивалентна". Он употребляется в качестве формального оператора, который, будучи помещён между двумя формулами системы, даёт другую формулу этой системы. При опускании скобок ему приписывается ранг более высокий, чем другим формальным операторам (§17)

A эквивалентна B в исчислении высказываний или в другой формальной система, если в этой формальной системе $\vdash A \sim B$. Здесь слово "эквивалентна" употребляется в качестве метаматематического глагола, который, будучи помещён между 2 формулами системы, даёт высказывание об этих формулах

Теорема 5 (§26). Если A, B и C — формулы, то:

1. $\vdash A \supset A$ — принцип тождества
2. $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$ — цепное заключение
3. $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$ — перестановка посылок
4. $A \supset (B \supset C) \vdash A \& B \supset C$ — импортация
5. $A \& B \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$ — экспортация

Введение в импликацию

6. $A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$ — заключения
7. $A \supset B \vdash (C \supset A) \supset (C \supset B)$ — посылки

8a. $A \supset B \vdash A \& C \supset B \& C$ — конъюнктивного члена

8b. $A \supset B \vdash C \& A \supset C \& B$

9a. $A \supset B \vdash A \vee C \supset B \vee C$ — дизъюнктивного члена

9b. $A \supset B \vdash C \vee A \supset C \vee A$

Доказательство импликации путём

10a. $\neg A \vdash A \supset B$ — опровержения посылки

10b. $A \vdash \neg A \supset B$

11. $B \vdash A \supset B$ — доказательства заключения

Контрапозиция

12. $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$
13. $A \supset \neg B \vdash B \supset \neg A$

со снятием двойного отрицания

14°. $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$

15°. $\neg A \supset \neg B \vdash B \supset A$

По определению $\sim$ в терминах $\supset$ и $\&$

16. $A \supset B, B \supset A \vdash A \sim B$

17a. $A \sim B \vdash A \supset B$

17b. $A \sim B \vdash B \supset A$

18a. $A \sim B, A \vdash B$

18b. $A \sim B, B \vdash A$

19. $\vdash A \sim A$ — рефлексивность
20. $A \sim B \vdash B \sim A$ — симметричность
21. $A \sim B, B \sim C \vdash A \sim C$ — транзитивность

Дополнительные результаты, представляющие интерес в связи с интуиционистской системой

22. $A \supset (B \supset C), \neg\neg A, \neg\neg B \vdash \neg\neg C$
23. $\neg\neg(A \supset B) \vdash \neg\neg A \supset \neg\neg B$
24. $\neg\neg(A \supset B), \neg\neg(B \supset C) \vdash \neg\neg(A \supset C)$
25. $\vdash \neg\neg(A \& B) \sim \neg\neg A \& \neg\neg B$; в частности $\vdash \neg\neg(A \sim B) \sim \neg\neg(A \supset B) \& \neg\neg(B \supset A)$

Определение (§26)**.** Пусть A — формальное выражение. Рассмотрим другое формальное выражение C. Может случиться, что A входит в C как (связная) часть, причём это возможно более чем одним способом. Допустим, что это имеет место и что, если это осуществляется более чем одним способом, то выделено некоторое конкретное вхождение A в C. Обозначим теперь C вместе с выделенным конкретным вхождением A в C через "C_A". В обозначении сочленения C_A есть EAF, где E и F — части (возможно, пустые), предшествующая и следующая за этой выделенной частью A. Пусть теперь B — какое-то формальное выражение. Результатом *замены* этой выделенной части A выражения C на B есть выражение EBF. Обозначим через C_B.

Теорема 6 (§26, Теорема о замене)**.** Если A, B, C_A и C_B — пропозициональные формулы, связанные друг с другом, как в предыдущем определении замены, то

$$A \sim B \vdash C_A \sim C_B$$

Теорема 6 (§26, Леммы для замены)**.** Если A, B, C — формулы, то

26. $A \sim B \vdash A \supset C \sim B \supset C$
27. $A \sim B \vdash C \supset A \sim C \supset B$

28a. $A \sim B \vdash A \,\&\, C \sim B \,\&\, C$

28b. $A \sim B \vdash C \,\&\, A \sim C \,\&\, B$

29a. $A \sim B \vdash A \vee C \sim B \vee C$

29b. $A \sim B \vdash C \vee A \sim C \vee B$

30. $A \sim B \vdash \neg A \sim \neg B$

Теорема 6 (§26, вторая форма)**.** Если A и B — формулы, C_A — формула, построенная из некоторого конкретного вхождения A с помощью одних только операторов $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$, а C_B получается из C_A заменой этого вхождения A на B, то

$$A \sim B \vdash C_A \sim C_B$$

Теорема 6 (§26, Следствие: свойство замены для эквивалентности)**.** В условиях теоремы (в любой форме)

$$A \sim B, C_A \vdash C_B$$

Теорема 7 (§27)**.**

Теорема 8 (§27, используется постулат 8°)**.** Пусть D — пропозициональная формула, построенная из различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$ и их отрицаний $\neg P_1, \ldots, \neg P_m$ с помощью одних только операторов $\&$, $\vee$. Тогда формула $D^\dagger$, эквивалентная $\neg D$, получается в результате замены друг на друга в D символов $\&$ и $\vee$ и ещё каждой буквы и её отрицания.

Другими словами, если D — пропозициональная формула описанного рода, а $D^\dagger$ — результат описанной замены друг на друга в D, то

$$\vdash \neg D \sim D^\dagger$$

Теорема 8 (§27, Следствие: принцип двойственности)**.** Эквивалентность между двумя *формулами E и F описанного в теореме 8 типа* сохраняется при замене друг на друга в E и F символов $\&$ и $\vee$.

Другими словами, если E и F — две такие пропозициональные формулы, а E' и F' получаются в результате указанной замены друг на друга в E и F соответственно, то

$$\text{из} \vdash E \sim F \text{ следует} \vdash E' \sim F'$$

Теорема 8 (§27, Следствие: вторая часть, соотношение обратной двойственности)**.** При тех же условиях из $\vdash E \supset F$ следует $\vdash F' \supset E'$

Оценка, непротиворечивость

Определение (§28)**.** Исчисление высказываний (и вообще любая формальная система, имеющая символ $\neg$ для отрицания) называется *(просто) непротиворечивой* системой, если ни для какой формулы A и $\neg A$ не являются обе доказуемыми в этой системе, и *(просто) противоречивой* в противном случае, если для некоторой формулы A одновременно $\vdash A$ и $\vdash \neg A$.

Это строго метаматематическое определение. Оно опирается только на формальный символ $\neg$ и определения формулы и доказуемой формулы. Таким образом, доказательство непротиворечивости данной формальной системы становится точной математической проблемой, которую можно рассматривать в метаматематике.

Метаматематическое доказательство непротиворечивости формальной системы даёт гарантию против возникновения противоречия в соответствующей содержательной теории.

Для исчисления высказываний (и вообще любой формальной системы, которая содержит &-удаление и слабое $\neg$-удаление в качестве постулируемых или выводимых правил), предыдущее определение эквивалентно следующему

Определение (§28)**.** Система *(просто) непротиворечива*, если в ней имеется некоторая недоказуемая формула; *(просто) противоречива*, если любая формула доказуема.

Предположим, что мы нашли метаматематическое свойство формул, такое, что

a аксиомы обладают этим свойством

b при каждом применении правила вывода, если посылки обладают этим свойством, то и заключение тоже

c две формулы вида A и $\neg A$ не могут обе обладать этим свойством.

Тогда в силу a и b каждая доказуемая формула будет обладать этим свойством и в силу c система оказывается непротиворечивой.

Теперь построим некоторую арифметику для области только с двумя предметами и четырьмя функциями $\supset$, &, $\vee$, $\neg$. Поскольку для метаматематики $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ являются объектами, не имеющими смысла, более точное описание состоит в следующем.

Определение (§28)**.** Введём некоторый метаматематический вычислительный процесс (называемый *проведением оценки*), согласно которому с каждым из символов $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ будет связана некоторая функция из этой арифметики (или таблица для такой функции, называемая *таблицей истинности*).

Тем самым с каждой пропозициональной формулой будет связана некоторая такая функция. Затем мы изучим метаматематические свойства пропозициональных формул, определённые в терминах соответствующих функций (или таблиц).

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$
f	f	t
f	t	t
t	f	f
t	t	t

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \mathbin{\&} \mathscr{B}$
f	f	f
f	t	f
t	f	f
t	t	t

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
f	f	f
f	t	t
t	f	t
t	t	t

$\mathscr{A}$	$\neg\mathscr{A}$
f	t
t	f

Тогда каждая пропозициональная формула A, составленная из данного перечня различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$, представляется как функция от этих букв, рассмотренные как независимые переменные над областью $\{t, f\}$. Для каждой m-ки значений этих букв соответствующее значение функции может быть вычислено путём последовательного применения этих основных таблиц.

Определение (§28). Пропозициональная формула E, составленная из различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$, называется *тождественно истинной*, если столбец значений её таблицы содержит одни только t, и *тождественно ложной*, если он содержит одни только f.

Две пропозициональные формулы E и F составленные из $P_1, \ldots, P_m$, называются *тождественно равными*, если их таблицы имеют один и тот же столбец значений.

Теорема 9 (§28). Для того, чтобы пропозициональная формула E была доказуемой (или выводимой из тождественно истинных формул Γ) в исчислении высказываний, необходимо, чтобы она была тождественно истиной, т.е.

$$\text{если } \vdash E, \text{ то } E \text{ тождественно истинна.}$$

Теорема 9 (§28, Следствие 1). Для того, чтобы две пропозициональные формулы E и F были эквивалентны, необходимо, чтобы они были тождественно равны:

$$\text{если } \vdash E \sim F, \text{ то } E \text{ и } F \text{ тождественно равны.}$$

Теорема 9 (§28, Следствие 2). Исчисление высказываний (просто) непротиворечиво; другими словами, ни для какой формулы A не имеют место одновременно $\vdash A$ и $\vdash \neg A$.

Полнота, нормальная форма

Другая проблема, которую можно рассматривать средствами метаматематики, — это проблема "полноты" какой-либо данной формальной системы. Например, мы перечислили одиннадцать постулатов для исчисления высказываний (§19). Можем ли мы указать причину, по которой мы останавливаемся именно на них? Могли бы мы с успехом пытаться обнаружить другие постулаты, которые можно было бы добавить к прежним, чтобы стало больше доказуемых формулы? Чтобы быть в состоянии ответить на эти вопросы, мы должны сперва установить некоторый критерий того, что желательно считать доказуемым в этой системе. Различным выбранным критериям будут соответствовать различные понятия полноты.

Определение (§29). Система *непротиворечива* по отношению к рассматриваемому свойству (или интерпретации), если доказуемы только формулы, обладающие этим свойством (или выражающие предложения, истинные при этой интерпретации).

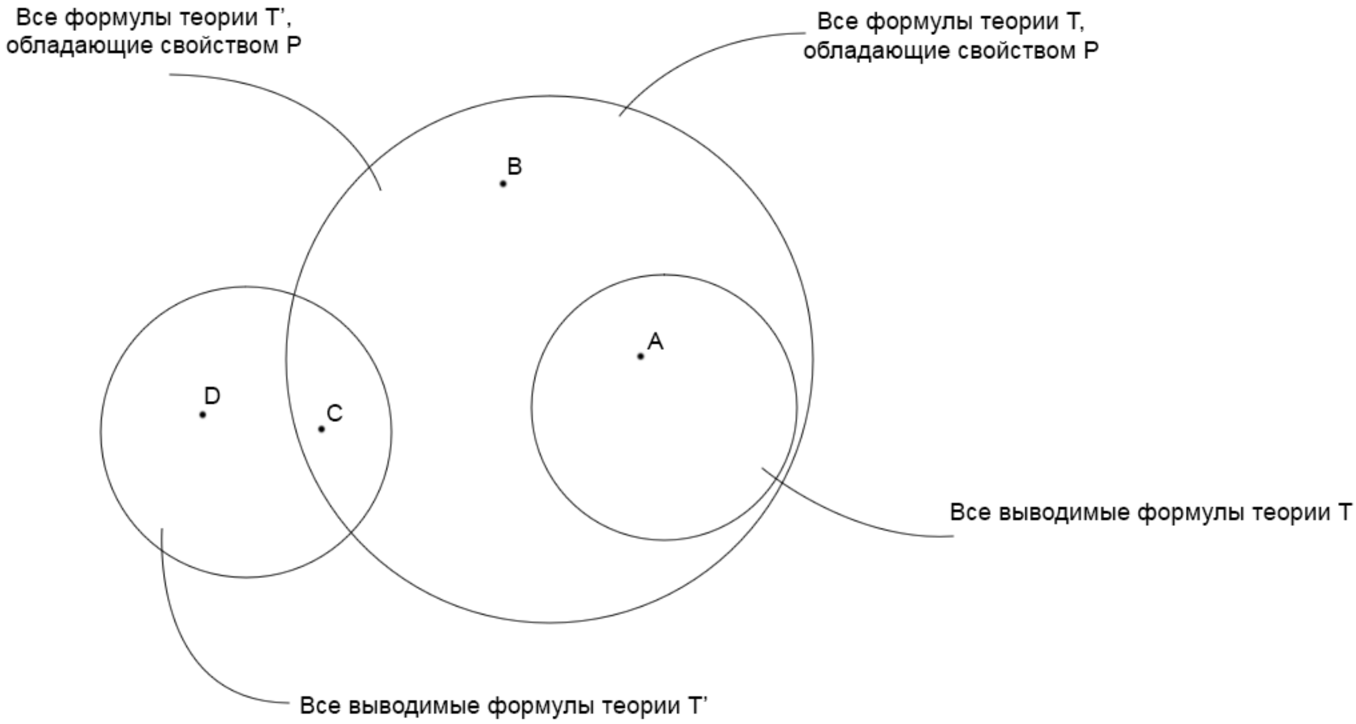
Определение (§29). Система *полна* по отношению к этой свойству (или интерпретации), если доказуемы все формулы, обладающие этим свойством (или выражающие предложения, истинные при этой интерпретации).

В отличие от свойства простой непротиворечивости, понятия непротиворечивости и полноты относительно некоторого свойства или интерпретации не всегда принадлежат метаматематике. Принадлежат ли они метаматематике или нет — это вопрос, который в каждом случае надо решать в соответствии с тем, может ли быть сформулировано в метаматематике данное свойство (или интерпретация).

Для исчисления высказываний у нас имеется свойство тождественной истинности (или, если угодно, интерпретация исчисления как арифметики на области из двух предметов), которое может быть сформулировано в метаматематике. Теорема 9 является, таким образом, метаматематической теоремой о непротиворечивости для некоторого свойства пропозициональной формул (или интерпретации исчисления).

Мы придём к другой формулировке понятия полноты, если дадим отрицательную форму критерию того, какие формулы должны быть доказуемыми. Будем говорить, что система полна, если постулаты дают всё возможное при условии, что наступает некоторый нежелательный результат. Результат, который сразу приходит на ум, — это простая противоречивость. Полученное таким путём понятие полноты всегда будет метаматематическое, если результат, которого надо избежать, может быть описан метаматематически (как, в частности, может быть описана простая противоречивость).

Всякая теорема непротиворечивости является теоремой о том, что только такие-то и такие формулы являются доказуемыми, а всякая теорема полноты утверждает, что доказуемы, по крайней мере, все такие-то и такие формулы.



Теория T' выводит формулу C, но не B.
Значит относительно свойства P теория T' неполна.
Теория T' выводит формулы C и D, значит
T' — противоречива.

Теория T выводит формулу A, но не B.
Значит относительно свойства P теория T неполна.
В то же время никакие кроме формул со свойством P
теория T не выводит, значит T — непротиворечива.

Теорема 10 (§29, и следствие 1, используется постулат 8°)**.** Условия теоремы 9 и следствия 1 являются достаточными (так же, как и необходимыми); иначе говоря, если E тождественно истинна, то $\vdash E$, и если E и F тождественно равны, то $\vdash E \sim F$.

Теорема 10 (§29, Замечание 1)**.** Всё доказательство, за исключением последнего шага проходит и в интуиционистской системе. Поэтому в последней, для любой пропозициональной формулы E, составленной из $P_1, \ldots, P_m$,

a $P_1 \vee \neg P_1, \ldots, P_m \vee \neg P_m \vdash E$, если E тождественно истинна.

b $P_1 \vee \neg P_1, \ldots, P_m \vee \neg P_m \vdash E \vee \neg E$

Теорема 10 (§29, Следствие 2, используется постулат 8°)**.** Добавление недоказуемой пропозициональной формулы в качестве схемы аксиом к перечню постулатов исчисления высказываний нарушает простую непротиворечивость последнего.

Теорема 11 (§29, используется постулат 8°)**.** Пропозициональная формула E, составленная из различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$, эквивалентна некоторой формуле F (называемой совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы E), имеющей один из следующих видов. Если E принимает значение t для некоторых m-ок, составленных из t и f в качестве значений $P_1, \ldots, P_m$, то F — дизъюнкция (в некотором порядке) соответствующих элементарных конъюнкций. Если E тождественно ложна, то F есть $P_1 \,\&\, \neg P_1$. (Двойственным образом, E имеет совершенную конъюнктивную нормальную форму G, в которой переставлены роли $\vee$ и $\&$, а также t и f; $\vdash E \sim G$)

Разрешающая процедура, интерпретация

В математике известны примеры таких общих вопросов, что на любой частный случай этого вопроса может быть дан ответ посредством заранее предписанного единого метода. Точнее, во всяком примере такого рода имеется бесконечный класс частных вопросов и связанная с этим классом процедура, причём тот и другая описаны заранее таким образом, что если мы выберем любой частный вопрос из этого класса, то наша процедура наверное будет применима к этому вопросу и даст нам на него определённый ответ “да” или “нет”.

Определение (§30)**.** Такого рода метод, позволяющий ответить “да” или “нет” на любой частный случай общего вопроса, мы будем называть *разрешающей процедурой*, или *разрешающим методом* или *алгоритмом* для этого вопроса. Проблема нахождения такого метода называется *проблемой разрешимости*. Эта проблема возникает в современной логике у Шрёдера[1895], Лёвенгейма[1915] и Гильберта[1918]. Более точное определение того, что представляет собой разрешающий метод, будет в §60, §61.

Определение (§30)**.** Аналогично, может иметься *вычисляющая процедура* или *алгоритм вычисления* (а потому и *проблема вычислимости*) в связи с общим вопросом, который требует для ответа не “да” или “нет”, а построения некоторого объекта.

Теорема 12 (§30, используется постулат 8°)**.** Алгоритм для определения того, доказуема или нет в исчислении высказываний пропозициональная формула E, даётся процессом вычисления таблицы для функции от t и f, представляемой формулой E. E доказуема или нет в соответствии с тем, только ли t или нет входит в столбец значений.

Наш метаматематический результат, состоящий в том, что исчисление высказываний допускает интерпретацию в арифметике из двух объектов t, f является иллюстрацией обычной логической интерпретации (ср. конец §28). Мы видим, что наше исчисление высказываний является подходящим логическим инструментом,

1 когда конкретные высказывания таковы, что каждое, несомненно, является истинным или ложным или

2 когда мы хотим, чтобы в рассматриваемой теории имелось допущение, что каждое высказывание истинно или ложно.

Для интуиционистов ситуация 1 имеет место в математике конечной области предметов, а также в рассуждения с высказываниями об объектах бесконечной области, если эти высказывания относятся к типу, для которого имеются разрешающие методы (см. замечание 1 §29). Примером ситуации 2 может служить употребление исчисления высказываний в классической математике.