Занятие 2

Упражнение 1

Пусть S - фиксированное множество, X^S - множество всех функций $h: S \to X$. Покажите, что отображение $X \to X^S$ является является функцией объектов для некоторого функтора $Set \to Set$, а сопоставление $e_X: X^S \times S \to X$, определённое как $e(h,s) = h(s)$, т.е. как значение функции h при $s \in S$, является естественным преобразованием.

Решение: Определю $T: X \xrightarrow{f} Y \longmapsto (x \overset{h}{\mapsto} h(x) \longrightarrow x \mapsto fh(x))$

Рассмотрим два фунтора: $Set \xrightarrow{F,G} Set$; $F: \begin{matrix} X \longmapsto X^S \times S \\ (X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto T_f \times 1_S \end{matrix}$; $G = 1_{Set}$. Тогда $e_X: X^S \times S \xrightarrow{e(h,s)=h(s)} X$ -компонента следующего естественного преобразования с коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r, "F"] & X^S \times S \arrow[r, "T_f \times 1_S"] \arrow[d, "e_X"] & Y^S \times S \arrow[d, "e_Y"] & Y \arrow[l, "F"'] \\ Y & X \arrow[r, "1_{Set}"] & X \arrow[r, "f"] & Y & Y \arrow[l, "1_{Set}"'] \end{tikzcd}$$

Упражнение 2

Пусть H - фиксированная группа. Покажите, что соответствие $G \mapsto H \times G$ определяет функтор $H \times - : Grp \to Grp$, а каждый морфизм групп $f: H \to K$ определяет естественное преобразование $H \times - \dot{\longrightarrow} K \times -$.

Определим функтор $H \times - : Grp \longrightarrow Grp \left(\begin{matrix} G \longrightarrow H \times G \\ (G \xrightarrow{\varphi} G') \longrightarrow H \times G \xrightarrow{1_H \times \varphi} H \times G' \end{matrix} \right)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\psi\varphi"'] & G' \arrow[d, "\psi"] \\ & G'' \end{tikzcd} \xrightarrow{H \times -} \begin{tikzcd} H \times G \arrow[r, "1_H \times \varphi"] \arrow[dr, dashed, "1_H \times \psi\varphi"'] & H \times G' \arrow[d, "1_H \times \psi"] \\ & H \times G'' \end{tikzcd}$$

Построим по стрелке $f: H \to K$ естественное преобразование $\pi: H \times - \dot{\longrightarrow} K \times -$; $\pi(G) = H \times G \xrightarrow{f \times 1_G} K \times G$. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[r, "H \times -"] & H \times G \arrow[r, "1_H \times \varphi"] \arrow[d, "\pi_G"'] & H \times G' \arrow[d, "\pi_{G'}"] & G' \arrow[l, "H \times -"'] \\ G & G \arrow[r, "K \times -"] & K \times G \arrow[r, "1_K \times \varphi"] & K \times G' & G' \arrow[l, "K \times -"'] \end{tikzcd}$$

Упражнение 3

Пусть B и C - группы (рассматриваемые как категории), а $S, T: B \longrightarrow C$ - функторы (гомоморфизмы групп). Покажите, естественное преобразование $S \dot{\longrightarrow} T$ существует тогда и только тогда, когда S и T сопряжены, т.е. когда для некоторого элемента $h \in C$ выполнено равенство $Tg = h(Sg)h^{-1}$ при всех $g \in B$.

Пусть $h: S \dot{\longrightarrow} T$ - естественное преобразование функторов, т.е. коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "g"'] & c \arrow[r, "S_g"] \arrow[d, "h"'] & c \arrow[d, "h"] \\ b & c \arrow[r, "T_g"] & c \end{tikzcd}$$

Таким образом $S_g \cdot h = h \cdot T_g$, т.е. $T_g = h^{-1} S_g h$. Обратно, очевидно, тоже верно.

Упражнение 4

Пусть C - категория, P - предпорядок, $S, T: C \longrightarrow P$ - функторы. Покажите, что естественное преобразование $S \dot{\longrightarrow} T$ существует (и единственно) в том и только том случае, когда $S_c \leq T_c$ для любого объекта $c \in C$.

Пусть $\pi: S \dot{\longrightarrow} T$ - естественное преобразование функторов, т.е. коммутативна следующая диаграмма

Из диаграммы вытекает, что $S_c \leq T_c \; \forall c \iff \exists! \; S \dot{\longrightarrow} T$ - естественное преобразование.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & S_c \arrow[r, "S_f"] \arrow[d, "\pi"'] & S_{c'} \arrow[d, "\pi"] \\ c' & T_c \arrow[r, "T_f"] & T_{c'} \end{tikzcd}$$

Упражнение 5

Покажите, что каждое естественное преобразование $\tau : S \dot{\to} T$ определяет функцию, также обозначаемая τ, которая каждой стрелке $f : c \to c'$ в C сопоставляет стрелку $\tau f : S_c \to T_{c'}$ в B, причём $T_g T_f = \tau(gf) = \tau_g S_f$ для каждой перемножаемой пары $\langle g, f \rangle$. Докажите обратный факт, что каждая такая функция τ возникает из единственного естественного преобразования, для которого $\tau_c = \tau(1_c)$. (Это позволяет описать естественное преобразование с помощью одних лишь стрелок.)

Пусть задано естественное преобразование $\tau : S \dot{\to} T$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & S_c \arrow[r, "S_f"] \arrow[d, "\tau_c"'] \arrow[dr, dashed] & S_{c'} \arrow[d, "\tau_{c'}"] \\ c' & T_c \arrow[r, "T_f"'] & T_{c'} \end{tikzcd}$$

Тогда каждой стрелке $c \xrightarrow{f} c'$ можно сопоставить другую стрелку в категории-образе $\tau : f \longmapsto$ $\begin{tikzcd} S_c \arrow[dr, dashed, "S_f \tau_{c'}", "\tau_c T_f"'] & \\ & T_{c'} \end{tikzcd}$

Тогда
$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dashed, "fg"'] & \\ & b \arrow[dl, "g"] \\ c & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S_a \arrow[rr, "\tau_a"] \arrow[dr, "S_f"] \arrow[dd, dashed, "S_{fg}"'] \arrow[rrr, dotted, red, "\tau(f)"] \arrow[rrdd, dotted, red, "\tau(fg)"] & & T_a \arrow[dr, "T_f"] \arrow[dd, dashed, "T_{fg}"] & \\ & S_b \arrow[rr, "\tau_b"] \arrow[dl, "S_g"] \arrow[dr, dotted, red, "\tau(g)"] & & T_b \arrow[dl, "T_g"] \\ S_c \arrow[rr, "\tau_c"'] & & T_c & \end{tikzcd}$$

$$\tau(fg) = S_f \tau(g) = \tau(f) T_g$$

Наоборот, пусть задано отображение $\tau : f \longmapsto$ $\begin{tikzcd} S_c \arrow[dr, dashed] & \\ & T_{c'} \end{tikzcd}$ со свойством $\tau(fg) = S_f \tau(g) = \tau(f) T_g$. Тогда пусть компонента естественного преобразования по отображению τ имеет вид $\tau_c = \tau(1_c)$. Тогда следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & S_c \arrow[r, "S_f"] \arrow[d, "\tau(1_c)"'] \arrow[dr, dashed] & S_{c'} \arrow[d, "\tau(1_{c'})"] \\ c' & T_c \arrow[r, "T_f"'] & T_{c'} \end{tikzcd}$$

$$S_f \tau(1_{c'}) = \tau(f 1_{c'}) = \tau(f)$$
$$\tau(1_c) T_f = \tau(1_c f) = \tau(f)$$

Причём, если есть два естественных преобразования τ и τ', то функции, которые они индуцируют, единственным образом определены компонентами преобразования на объектах

Упражнение 6

Пусть $\mathbb{F}$ - поле. Покажите, что категория всех конечномерных векторных пространств над $\mathbb{F}$, где морфизмами являются все линейные отображения, эквивалентна категории $Matr_{\mathbb{F}}$, описанной в §1.2

Зафиксируем в каждом векторном пр-ве базис., В $\mathbb{F}^n$ зафиксируем очевидный базис

Определим $\kappa_V : V \to \mathbb{F}^{\dim n}$; $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \longmapsto$ Очевидный базис в $\mathbb{F}^n$.

Определим функторы:
$$T : Matr_{\mathbb{F}} \longrightarrow Vect_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} n \rightsquigarrow \mathbb{F}^n \\ n \xrightarrow{A} m \rightsquigarrow \mathbb{F}^n \xrightarrow{A} \mathbb{F}^m \end{pmatrix}$$
$$S : Vect_{\mathbb{F}} \longrightarrow Matr_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} V \rightsquigarrow \dim n \\ V \xrightarrow{e} W \rightsquigarrow n \xrightarrow{\kappa_V^{-1} A_e \kappa_W} m \end{pmatrix}$$

Тогда $TS = 1_{Matr_{\mathbb{F}}}$, $ST \simeq 1_{Vect_{\mathbb{F}}}$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "\kappa_W"] \\ \mathbb{F}^{\dim V} \arrow[r, "\kappa_V^{-1} f \kappa_W"'] & \mathbb{F}^{\dim W} \end{tikzcd}$$

κ_X - обратимы