Введение в метаматематику на троечку

Мат.клуб “Тифаретник” по С. Клини

15 декабря 2021 г.

> Формальные ограничители нужны человеку всегда,
> Они как огнетушители, а это, бля, не ерунда.
>
> Кровосток – Снайпер

Определение (§16, Формальные символы)**.**

- *Логические символы*: $\supset$(влечёт), &(и), $\vee$(или), $\neg$(не), $\forall$(для всех), $\exists$(существует)
- *Символы предикатов*: $=$(равняется)
- *Символы функций*: $+$(сложить с), $\cdot$(умножить на), $'$(следующий за)
- *Индивидуальные символы*: 0(нуль)
- *Переменные*: a, b, c, ...
- *Скобки*: (,)

Определение (§17)**.**

1. 0 есть *терм*
2. Каждая переменная есть *терм*
3. Если s и t — *термы*, то

   (a) $(s) + (t)$ — *терм* (b) $(s) \cdot (t)$ — *терм* (c) $(s)'$ — *терм*

4. Никаких других *термов*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

Определение (§17)**.**

1. Если s и t — *термы*, то $(s) = (t)$ — *формула*
2. Если A и B — *формулы*, то

   (a) $(A) \supset (B)$ — *формула* (c) $(A) \vee (B)$ — *формула*
   (b) $(A)\,\&\,(B)$ — *формула* (d) $\neg(A)$ — *формула*

3. Если x — переменная, а A — *формула*, то

   (a) $\forall x(A)$ — *формула* (b) $\exists x(A)$ — *формула*

4. Никаких других *формул*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

Определение (§18)**.** Вхождение x в формулу A называется *связанным* (или вхождением в качестве *связанной переменной*), если оно является вхождением в квантор $\forall x$ или $\exists x$ или в область действия квантора $\forall x$ или $\exists x$; в противном случае вхождение называется *свободным*.

Определение (§18)**.** *Подстановка терма t вместо* переменной x в терм или формулу A состоит в одновременной замене каждого *свободного вхождения* x в A на вхождение t.

Определение (§18)**.** Будем говорить, что терм t *свободен при свободных вхождениях* переменной x в формулу $A(x)$, если никакое свободное вхождение x в $A(x)$ не входит в область действия какого-нибудь квантора $\forall y$ или $\exists y$, где y — переменная из t (т.е. входящая в t).

Постулаты формальной системы (§19)

Dramatis personae

В постулатах 1–8 A, B и C — формулы. В 9–13 x — переменная, $A(x)$ — формула, C — формула, не содержащая свободно x, а t — терм, свободный для x в $A(x)$.

Группа A. Постулаты исчисления предикатов

Группа A1. Постулаты исчисления высказываний

1a $A \supset (B \supset A)$

1b $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

4a $A \,\&\, B \supset A$

4b $A \,\&\, B \supset B$

5a $A \supset A \vee B$

5b $B \supset A \vee B$

2 $\dfrac{A, A \supset B}{B}$

3 $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$

6 $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

7 $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

8° $\neg\neg A \supset A$

Группа A2. (Дополнительные) Постулаты исчисления предикатов

9 $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$

10 $\forall x A(x) \supset A(t)$

11 $A(t) \supset \exists x A(x)$

12 $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$

Группа B. (Дополнительные) Постулаты арифметики

13 $A(0) \,\&\, \forall x (A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$

14 $a' = b' \supset a = b$

15 $\neg a' = 0$

16 $a = b \supset (a = c \supset b = c)$

17 $a = b \supset a' = b'$

18 $a + 0 = a$

19 $a + b' = (a + b)'$

20 $a \cdot 0 = 0$

21 $a \cdot b' = a \cdot b + a$

Определение (§19). Формула является *аксиомой*, если она имеет форму одну из 1a, 1b, 3–8, 10, 11, 13 или она есть одна из 14–21.

Определение (§19). Формула является *непосредственным следствием* (из) одной или двух других формул, если она имеет форму, указанную под чертой, тогда как другая (не) имеет(ют) форму(ы), указанную (не) над чертой в 2, 9 или 12.

Определение (§19). Постулаты 2, 9 и 12 мы называем *правилами вывода*. Для любого (фиксированного) выбора A и B или x, $A(x)$ и C, подчинённого отмеченным выше условиям, формулы указанные над чертой, являются *посылкой* (*первой* и *второй посылкой* соответственно), а формула, указанная под чертой, является *заключением* применения правила вывода.

Формальный вывод

Определение (§20)**.** Если дан перечень $D_1, \dots, D_l (l \geq 0)$ формул, то непустая конечная последовательность формул называется *формальным выводом из исходных формул* $D_1, \dots, D_l$, если каждая формула этой последовательности является или одной из формул $D_1, \dots, D_l$, или аксиомой, или непосредственным следствием из предыдущих формул последовательности. Вывод называется выводом *своей последней* формулы E, и эта формула называется *выводимой из* исходных формул (обозначается $D_1, \dots, D_l \vdash E$), а также *заключением* (или *конечной формулой*) вывода.

Определение (§20, Общие свойства $\vdash$)**.**

- $\Gamma \vdash E$, если E входит в список Γ
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta, \Gamma \vdash E$ для любого перечня Δ (Любая доказуемая выводима из любых исходных)
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ путём перестановки формул Γ или опускания любых таких формул, которые тождественны с другими остающимися
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ опусканием любых формул Γ, которые являются доказуемыми или выводимыми из остающихся формул Γ.

Теорема 1 (§21, О дедукции)**.** Для исчисления высказываний, если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

Теорема 1 (§22, полная)**.** Для исчисления предикатов (или полной арифметической формальной системы), если $\Gamma, A \vdash B$, причём все свободные переменные остаются фиксированными для последней исходной формулы, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

Определение (§23)**.** Переменная “x” приписанная к символу “$\vdash$” в качестве верхнего индекса отличает применение правила 9 или 12 по отношению к x при построении результирующего вывода.

Теорема 2 (§23)**.** В следующих правилах A, B и C или x, $A(x)$, C и t подчинены тем же условиям, что и в соответствующих постулатах, а Γ или $\Gamma(x)$ есть любой список формул.

Для исчисления высказываний справедливы правила от “импликации” до “отрицания” включительно.

Для исчисления предикатов (или полной арифметической системы) справедливы все правила, при условии, что в каждом вспомогательном выводе связанные переменные остаются фиксированными для устраняемой формулы.

	Введение	Удаление
Импликация	Если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$	$A, A \supset B \vdash B$ (modus ponens)
Конъюнкция	$A, B \vdash A \& B$	$A \& B \vdash A$ $A \& B \vdash B$
Дизъюнкция	$A \vdash A \vee B$ $B \vdash A \vee B$	Если $\Gamma, A \vdash C$ и $\Gamma, B \vdash C$, то $\Gamma, A \vee B \vdash C$
Отрицание	Если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, A \vdash \neg B$, то $\Gamma \vdash \neg A$	$\neg\neg A \vdash A$
Общность	$A(x) \vdash^x \forall x A(x)$	$\forall x A(x) \vdash A(t)$
Существование	$A(t) \vdash \exists x A(x)$	Если $\Gamma(x), A(x) \vdash C$, то $\Gamma(x), \exists x A(x) \vdash^x C$

Формулы исчисления высказываний

Определение (§25)**.** Формальные символы нового рода: $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$ называемые пропозициональными буквами, (потенциально) бесконечный перечень которых мы считаем имеющимся в нашем распоряжении. Новое определение "формулы":

1. Пропозициональная буква есть *формула*
2. Если A и B — *формулы*, то

   (a) $(A) \supset (B)$ — *формула* (c) $(A) \vee (B)$ — *формула*

   (b) $(A) \,\&\, (B)$ — *формула* (d) $\neg(A)$ — *формула*

3. Никаких других *формул*, кроме определённых согласно 1 и 2, нет.

Определение (§25)**.** Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — перечень различных пропозициональных букв. (Здесь "P_1", …, "P_m" — метаматематические буквы, которыми мы пользуемся как названиями для пропозициональных букв, когда не хотим ограничивать наше рассуждение употреблением конкретных пропозициональных букв.)

Пропозициональная формула A называется *формулой составленной* из $P_1, \ldots, P_m$, если никакая пропозициональная буква, отличная от $P_1, \ldots, P_m$ не входит в A.

Определение (§25)**.** *Подстановка* вместо пропозициональной буквы (или одновременно вместо нескольких различных пропозициональных пропозициональных букв) определяется как для переменной в §18, за исключением того, что подстановка применяется теперь ко всем вхождениям без исключений (так как нет связанных вхождений).

Теорема 3 (§25, Подстановка вместо пропозициональных букв)**.** Пусть Γ — перечень пропозициональных формул, а E — пропозициональная формула, составленная из различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — формулы. Пусть Γ^* и E^* получаются из Γ и E соответственно путём одновременной подстановки $A_1, \ldots, A_m$ вместо $P_1, \ldots, P_m$ соответственно.

Если $\Gamma \vdash E$, то $\Gamma^* \vdash E^*$ (Для случая пустой Γ: если $\vdash E$, то $\vdash E^*$)

Определение (§25)**.** Формула называется *элементарной (для исчисления высказываний)*, если она не имеет ни одного из видов $A \supset B$, $A \,\&\, B$, $A \vee B$, $\neg A$, где A и B — формулы.

Теорема 4 (§25, Обращение правила подстановки для проп. переменных)**.** При тех же условиях, что и в теореме 3. Если $A_1, \ldots, A_m$ — элементарные формулы, то из $\Gamma^* \vdash E^*$ следует $\Gamma \vdash E$.

Теорема 4 (§25, вторая форма)**.** Пусть Γ^* — формулы, а E^* — формула, имеющие различные элементарные компоненты $A_1, \ldots, A_m$. Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — пропозициональные буквы, не обязательно различные. Пусть Γ, E получаются из Γ^*, E^* соответственно заменой одновременно во всех вхождениях $A_1, \ldots, A_m$ на $P_1, \ldots, P_m$ соответственно. Тогда $\Gamma^* \vdash E^*$ влечёт $\Gamma \vdash E$.

За исключением того, что "формула" здесь понимается не в смысле пропозициональной формулы, теорема 4 содержится в теореме 3.