Занятие 3

Упражнение 1

Рассмотрим категорию в категории Top полную подкатегорию Met - метрических пространств с индуцированной топологией с непрерывными отображениями. Рассмотрим вложение $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Эта стрелка — мономорфизм, т.к. имеет обратную справа относительно образа. Также она эпиморфизм, т.к. если в цепи $\mathbb{Q} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} X$ $\varphi f_1 = \varphi f_2$, то f_1 и f_2 действуют одинаково на $\mathbb{Q}$, а в силу непр. $\mathbb{Q} \ni x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. Но, очевидно, φ - не обратимо.

$$\mathbb{Q} \ni x_n \to x \Rightarrow \underset{g(x_n)}{\overset{f(x_n)}{\shortparallel}} \to \underset{g(x)}{\overset{f(x)}{\shortparallel}}$$

Упражнение 2

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & \bullet \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rr, bend left, dotted, "\varphi\psi"] & \bullet \arrow[r, "\psi"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

$$f_1\varphi\psi = f_2\varphi\psi \Rightarrow f_1\varphi = f_2\varphi \Rightarrow f_1 = f_2$$

Упражнение 3

Рассмотрим точную посл-ть аб. групп. $0 \xrightarrow{\varphi_1} H \xrightarrow{\varphi_2} G \xrightarrow{\varphi_3} G/H \xrightarrow{\varphi_4} 0$. Очевидно $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5$ - мономорфизм т.к. обратим, но φ_4 - не мономорфизм.

Упражнение 4

Имеем: $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q} \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} R$. Если $\varphi f_1 = \varphi f_2$, то f_1 и f_2 одинаково действуют на целых числах в $\mathbb{Q}$. Но тогда $f_1\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{f_1(a)}{f_1(b)} = \frac{f_2(a)}{f_2(b)} = f_2\left(\frac{a}{b}\right)$ (т.к. гомоморф. сохр. 1), т.е. $f_1 = f_2$.

Упражнение 5

Пусть $G \xrightarrow{\varphi} H$ - эпиморфизм и $\varphi(G) = M$; $[G:M] = 2$. Тогда $H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H/M$ - эпиморфизм $=$ $\pi \circ \varphi$ - эпиморфизм, но $\# H/M = 2$. Рассмотрим

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "0"'] & H \arrow[d, "\pi"] & \\
& H/M \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "f\text{ - естеств.}"'] & \mathbb{Z}_2
\end{tikzcd}$$

Тогда $0 \circ 0 = 0$ и $f \circ 0 = 0$, но $f \neq 0$.

Если $[G:M] > 2$, то рассмотрим группу $Aut(H)$ и три различных класса M, Mu, Mv.
Определим $\sigma \in Bij(H)$ $\sigma(xu) = xv$, $\sigma(xv) = xu$ при $x \in M$, иначе тождественно.
Подействуем H на себе: $H \curvearrowright H$ левыми сдвигами: $\psi: H \longrightarrow Aut(H)$, где ψ_h - умножение слева на h, а $\psi'_h = \sigma^{-1}\psi_h\sigma$. Тогда $\psi\varphi = \psi'\varphi$, но $\psi \neq \psi'$, т.к. $Z(Aut(H)) = \{Id\}$ при $\# H > 2$, но $\sigma \neq Id$.

Упражнение 6

$f^2 = f$

$$\begin{tikzcd}
& X/f \arrow[r, "\pi\hat{f} = 1"] \arrow[d, "\hat{f}"] & X/f \\
X \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "G"] & X \arrow[ur, "\pi"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3, "G"] &
\end{tikzcd}$$

$[x]_f \longrightarrow f(x) \longrightarrow [f(x)]_f$, но $[x]_f = [f(x)]_f$, т.к. $f^2 = f$.

Упражнение 7

- Пусть f имеет левую или правую обратную g. Тогда либо $fg = 1_b$, $gf = 1_a$. Тогда $fgf = f$.
- Пусть $\varnothing \neq a \xrightarrow{f} b$. Тогда пусть $Im f \xrightarrow{g} a$ - функция выбора для f. Тогда доопределим g на $b \setminus Im f$ тождественно. Таким образом, $fgf = f$.

Упражнение 8

Опечатка ???

Упражнение 9

Пусть функтор $T: C \to B$ унивалентен и Tf - мономорфизм

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] \arrow[d, dashed] & b \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed] & c \arrow[d, dashed] \\
Ta \arrow[r, shift left, "Tg_1"] \arrow[r, shift right, "Tg_2"'] & Tb \arrow[r, "Tf"] & Tc
\end{tikzcd}$$

$$fg_1 = fg_2 \Rightarrow T_{fg_1} = T_{fg_2} \Rightarrow T_f \circ T_{g_1} = T_f \circ T_{g_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{g_1} = T_{g_2} \Rightarrow g_1 = g_2 .$$