

Введение в метаматематику на троечку

Мат.клуб “Тифаретник” по С. Клини

6 января 2022 г.

Формальные ограничители нужны человеку всегда,
Они как огнетушители, а это, бля, не ерунда.

Кровосток – Снайпер

Определение (§16, Формальные символы).

- *Логические символы:* \supset (влечёт), $\&$ (и), \vee (или), \neg (не), \forall (для всех), \exists (существует)
- *Символы предикатов:* $=$ (равняется)
- *Символы функций:* $+$ (сложить с), \cdot (умножить на), \uparrow (следующий за)
- *Индивидуальные символы:* 0(нуль)
- *Переменные:* a, b, c, \dots
- *Скобки:* $(,)$

Определение (§17).

1. 0 есть *терм*
2. Каждая переменная есть *терм*
3. Если s и t — *термы*, то

$$(a) \ (s) + (t) \text{ — терм} \quad (b) \ (s) \cdot (t) \text{ — терм} \quad (c) \ (s)' \text{ — терм}$$

4. Никаких других *термов*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

Определение (§17).

1. Если s и t — *термы*, то $(s) = (t)$ — *формула*
2. Если A и B — *формулы*, то

$$(a) \ (A) \supset (B) \text{ — формула} \quad (c) \ (A) \vee (B) \text{ — формула} \\ (b) \ (A) \& (B) \text{ — формула} \quad (d) \ \neg(A) \text{ — формула}$$

3. Если x — переменная, а A — *формула*, то

$$(a) \ \forall x(A) \text{ — формула} \quad (b) \ \exists x(A) \text{ — формула}$$

4. Никаких других *формул*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

Определение (§18). Вхождение x в формулу A называется *связанным* (или вхождением в качестве *связанной переменной*), если оно является вхождением в квантор $\forall x$ или $\exists x$ или в область действия квантора $\forall x$ или $\exists x$; в противном случае вхождение называется *свободным*.

Определение (§18). *Подстановка термина t вместо переменной x в терм или формулу A состоит в одновременной замене каждого свободного вхождения x в A на вхождение t .*

Определение (§18). Будем говорить, что терм t *свободен при свободных вхождениях* переменной x в формулу $A(x)$, если никакое свободное вхождение x в $A(x)$ не входит в область действия какого-нибудь квантора $\forall y$ или $\exists y$, где y — переменная из t (т.е. входящая в t).

Постулаты формальной системы (§19)

Dramatis personae

В постулатах 1–8 A, B и C — формулы. В 9–13 x — переменная, $A(x)$ — формула, C — формула, не содержащая свободно x , а t — терм, свободный для x в $A(x)$.

Группа А. Постулаты исчисления предикатов

Группа А1. Постулаты исчисления высказываний

$$(1a) A \supset (B \supset A)$$

$$(2) \frac{A, A \supset B}{B}$$

$$(1b) (A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$$

$$(3) A \supset (B \supset A \& B)$$

$$(4a) A \& B \supset A$$

$$(6) (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$$

$$(4b) A \& B \supset B$$

$$(7) (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$$

$$(5a) A \supset A \vee B$$

$$(8^\circ) \neg\neg A \supset A$$

$$(5b) B \supset A \vee B$$

Группа А2. (Дополнительные) Постулаты исчисления предикатов

$$(9) \frac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$$

$$(11) A(t) \supset \exists x A(x)$$

$$(10) \forall x A(x) \supset A(t)$$

$$(12) \frac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$$

Группа В. (Дополнительные) Постулаты арифметики

$$(13) A(0) \& \forall x (A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$$

$$(18) a + 0 = a$$

$$(14) a' = b' \supset a = b$$

$$(19) a + b' = (a + b)'$$

$$(15) \neg a' = 0$$

$$(20) a \cdot 0 = 0$$

$$(16) a = b \supset (a = c \supset b = c)$$

$$(21) a \cdot b' = a \cdot b + a$$

$$(17) a = b \supset a' = b'$$

Определение (§19). Формула является *аксиомой*, если она имеет форму одну из (1a), (1b), (3)–(8), (10), (11), (13) или она есть одна из (14)–(21).

Определение (§19). Формула является *непосредственным следствием* (из) одной или двух других формул, если она имеет форму, указанную под чертой, тогда как другая (не) имеет(ют) форму(ы), указанную (не) над чертой в (2), (9) или (12).

Определение (§19). Постулаты (2), (9) и (12) мы называем *правилами вывода*. Для любого (фиксированного) выбора A и B или x , $A(x)$ и C , подчинённого отмеченным выше условиям, формулы указанные над чертой, являются *посылкой* (первой и второй посылкой соответственно), а формула, указанная под чертой, является *заключением* применения правила вывода.

Формальный вывод

Определение (§20). Если дан перечень $D_1, \dots, D_l (l \geq 0)$ формул, то непустая конечная последовательность формул называется *формальным выводом из исходных формул* D_1, \dots, D_l , если каждая формула этой последовательности является или одной из формул D_1, \dots, D_l , или аксиомой, или непосредственным следствием из предыдущих формул последовательности. Вывод называется выводом *своей последней* формулы E , и эта формула называется *выводимой из исходных формул* (обозначается $D_1, \dots, D_l \vdash E$), а также *заключением* (или *конечной формулой*) вывода.

Определение (§20, Общие свойства \vdash).

- $\Gamma \vdash E$, если E входит в список Γ
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta, \Gamma \vdash E$ для любого перечня Δ (Любая доказуемая выводима из любых исходных)
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ путём перестановки формул Γ или опускания любых таких формул, которые тождественны с другими остающимися
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ опусканием любых формул Γ , которые являются доказуемыми или выводимыми из остающихся формул Γ .

Теорема 1 (§21, О дедукции). Для исчисления высказываний, если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

Теорема 1 (§22, полная). Для исчисления предикатов (или полной арифметической формальной системы), если $\Gamma, A \vdash B$, причём все свободные переменные остаются фиксированными для последней исходной формулы, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

Определение (§23). Переменная “ x ” приписанная к символу “ \vdash ” в качестве верхнего индекса отличает применение правила (9) или (12) по отношению к x при построении результирующего вывода.

Теорема 2 (§23). В следующих правилах A, B и C или $x, A(x), C$ и t подчинены тем же условиям, что и в соответствующих постулатах, а Γ или $\Gamma(x)$ есть любой список формул.

Для исчисления высказываний справедливы правила от “импликации” до “отрицания” включительно.

Для исчисления предикатов (или полной арифметической системы) справедливы все правила, при условии, что в каждом вспомогательном выводе связанные переменные остаются фиксированными для удаляемой формулы.

	Введение	Удаление
Импликация	Если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$	$A, A \supset B \vdash B$ (modus ponens)
Конъюнкция	$A, B \vdash A \& B$	$A \& B \vdash A$ $A \& B \vdash B$
Дизъюнкция	$A \vdash A \vee B$ $B \vdash A \vee B$	Если $\Gamma, A \vdash C$ и $\Gamma, B \vdash C$, то $\Gamma, A \vee B \vdash C$
Отрицание	Если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, A \vdash \neg B$, то $\Gamma \vdash \neg A$	$\neg \neg A \vdash A$
Общность	$A(x) \vdash^x \forall x A(x)$	$\forall x A(x) \vdash A(t)$
Существование	$A(t) \vdash \exists x A(x)$	Если $\Gamma(x), A(x) \vdash C$, то $\Gamma(x), \exists x A(x) \vdash^x C$

Формулы исчисления высказываний

Определение (§25). Формальные символы нового рода: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ называемые пропозициональными буквами, (потенциально) бесконечный перечень которых мы считаем имеющимся в нашем распоряжении. Новое определение “формулы”:

1. Пропозициональная буква есть *формула*
2. Если A и B — *формулы*, то
 - (a) $(A) \supset (B)$ — *формула* (c) $(A) \vee (B)$ — *формула*
 - (b) $(A) \& (B)$ — *формула* (d) $\neg(A)$ — *формула*

3. Никаких других *формул*, кроме определённых согласно 1 и 2, нет.

Определение (§25). Пусть P_1, \dots, P_m — перечень различных пропозициональных букв. (Здесь “ P_1 ”, ..., “ P_m ” — метаматематические буквы, которыми мы пользуемся как названиями для пропозициональных букв, когда не хотим ограничивать наше рассуждение употреблением конкретных пропозициональных букв.)

Пропозициональная формула A называется *формулой составленной* из P_1, \dots, P_m , если никакая пропозициональная буква, отличная от P_1, \dots, P_m не входит в A .

Определение (§25). *Подстановка* вместо пропозициональной буквы (или одновременно вместо нескольких различных пропозициональных букв) определяется как для переменной в §18, за исключением того, что подстановка применяется теперь ко всем вхождениям без исключений (так как нет связанных вхождений).

Теорема 3 (§25, Подстановка вместо пропозициональных букв). Пусть Γ — перечень пропозициональных формул, а E — пропозициональная формула, составленная из различных пропозициональных букв P_1, \dots, P_m . Пусть A_1, \dots, A_m — формулы. Пусть Γ^* и E^* получаются из Γ и E соответственно путём одновременной подстановки A_1, \dots, A_m вместо P_1, \dots, P_m соответственно.

Если $\Gamma \vdash E$, то $\Gamma^* \vdash E^*$ (Для случая пустой Γ : если $\vdash E$, то $\vdash E^*$)

Определение (§25). Формула называется *элементарной* (для исчисления высказываний), если она не имеет ни одного из видов $A \supset B$, $A \& B$, $A \vee B$, $\neg A$, где A и B — формулы.

Теорема 4 (§25, Обращение правила подстановки для проп. переменных). При тех же условиях, что и в теореме 3. Если A_1, \dots, A_m — элементарные формулы, то из $\Gamma^* \vdash E^*$ следует $\Gamma \vdash E$.

Теорема 4 (§25, вторая форма). Пусть Γ^* — формулы, а E^* — формула, имеющие различные элементарные компоненты A_1, \dots, A_m . Пусть P_1, \dots, P_m — пропозициональные буквы, не обязательно различные. Пусть Γ , E получаются из Γ^* , E^* соответственно заменой одновременно во всех вхождениях A_1, \dots, A_m на P_1, \dots, P_m соответственно. Тогда $\Gamma^* \vdash E^*$ влечёт $\Gamma \vdash E$.

За исключением того, что “формула” здесь понимается не в смысле пропозициональной формулы, теорема 4 содержится в теореме 3.

Определение (§26). Пусть A и B — формулы. Введём запись “ $A \sim B$ ” в качестве сокращения для записи $(A \supset B) \& (B \supset A)$. Символ “ \sim ” можно читать “эквивалентна”. Он употребляется в качестве формального оператора, который, будучи помещён между двумя формулами системы, даёт другую формулу этой системы. При опускании скобок ему приписывается ранг более высокий, чем другим формальным операторам (§17)

A эквивалентна B в исчислении высказываний или в другой формальной системе, если в этой формальной системе $\vdash A \sim B$. Здесь слово “эквивалентна” употребляется в качестве метаматематического глагола, который, будучи помещён между 2 формулами системы, даёт высказывание об этих формулах

Теорема 5 (§26). Если A , B и C — формулы, то:

1. $\vdash A \supset A$ — принцип тождества
2. $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$ — цепное заключение
3. $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$ — перестановка посылок
4. $A \supset (B \supset C) \vdash A \& B \supset C$ — импортация
5. $A \& B \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$ — экспортация

Введение в импликацию

6. $A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$ — заключения
7. $A \supset B \vdash (C \supset A) \supset (C \supset B)$ — посылки
- 8a. $A \supset B \vdash A \& C \supset B \& C$ — конъюнктивного члена
- 8b. $A \supset B \vdash C \& A \supset C \& B$
- 9a. $A \supset B \vdash A \vee C \supset B \vee C$ — дизъюнктивного члена
- 9b. $A \supset B \vdash C \vee A \supset C \vee A$

Доказательство импликации путём

- 10a. $\neg A \vdash A \supset B$ — опровержения посылки
- 10b. $A \vdash \neg A \supset B$
11. $B \vdash A \supset B$ — доказательства заключения

Контрапозиция

12. $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$
 13. $A \supset \neg B \vdash B \supset \neg A$
- со снятием двойного отрицания
- 14°. $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$
 - 15°. $\neg A \supset \neg B \vdash B \supset A$

По определению \sim в терминах \supset и $\&$

16. $A \supset B, B \supset A \vdash A \sim B$
- 17a. $A \sim B \vdash A \supset B$
- 17b. $A \sim B \vdash B \supset A$
- 18a. $A \sim B, A \vdash B$
- 18b. $A \sim B, B \vdash A$
19. $\vdash A \sim A$ — рефлексивность
20. $A \sim B \vdash B \sim A$ — симметричность
21. $A \sim B, B \sim C \vdash A \sim C$ — транзитивность

Дополнительные результаты, представляющие интерес в связи с интуиционистской системой

22. $A \supset (B \supset C), \neg\neg A, \neg\neg B \vdash \neg\neg C$
23. $\neg\neg(A \supset B) \vdash \neg\neg A \supset \neg\neg B$
24. $\neg\neg(A \supset B), \neg\neg(B \supset C) \vdash \neg\neg(A \supset C)$
25. $\vdash \neg\neg(A \& B) \sim \neg\neg A \& \neg\neg B$; в частности $\vdash \neg\neg(A \sim B) \sim \neg\neg(A \supset B) \& \neg\neg(B \supset A)$

Определение (§26). Пусть A — формальное выражение. Рассмотрим другое формальное выражение C . Может случиться, что A входит в C как (связная) часть, причём это возможно более чем одним способом. Допустим, что это имеет место и что, если это осуществляется более чем одним способом, то выделено некоторое конкретное вхождение A в C . Обозначим теперь C вместе с выделенным конкретным вхождением A в C через " C_A ". В обозначении сочленения C_A есть EAF , где E и F — части (возможно, пустые), предшествующая и следующая за этой выделенной частью A . Пусть теперь B — какое-то формальное выражение. Результатом *замены* этой выделенной части A выражения C на B есть выражение EBF . Обозначим через C_B .

Теорема 6 (§26, Теорема о замене). Если A, B, C_A и C_B — пропозициональные формулы, связанные друг с другом, как в предыдущем определении замены, то

$$A \sim B \vdash C_A \sim C_B$$

Теорема 6 (§26, Леммы для замены). Если A, B, C — формулы, то

$$26. A \sim B \vdash A \supset C \sim B \supset C$$

$$29a. A \sim B \vdash A \vee C \sim B \vee C$$

$$27. A \sim B \vdash C \supset A \sim C \supset B$$

$$29b. A \sim B \vdash C \vee A \sim C \vee B$$

$$28a. A \sim B \vdash A \& C \sim B \& C$$

$$30. A \sim B \vdash \neg A \sim \neg B$$

$$28b. A \sim B \vdash C \& A \sim C \& B$$

Теорема 6 (§26, вторая форма). Если A и B — формулы, C_A — формула, построенная из некоторого конкретного вхождения A с помощью одних только операторов $\supset, \&, \vee, \neg$, а C_B получается из C_A заменой этого вхождения A на B , то

$$A \sim B \vdash C_A \sim C_B$$

Теорема 6 (§26, Следствие: свойство замены для эквивалентности). В условиях теоремы (в любой форме)

$$A \sim B, C_A \vdash C_B$$

Теорема 7 (§27).

Теорема 8 (§27, используется постулат (8°)). Пусть D — пропозициональная формула, построенная из различных пропозициональных букв P_1, \dots, P_m и их отрицаний $\neg P_1, \dots, \neg P_m$ с помощью одних только операторов $\&, \vee$. Тогда формула D^\dagger , эквивалентная $\neg D$, получается в результате замены друг на друга в D символов $\&$ и \vee и ещё каждой буквы и её отрицания.

Другими словами, если D — пропозициональная формула описанного рода, а D^\dagger — результат описанной замены друг на друга в D , то

$$\vdash \neg D \sim D^\dagger$$

Теорема 8 (§27, Следствие: принцип двойственности). Эквивалентность между двумя формулами E и F описанного в теореме 8 типа сохраняется при замене друг на друга в E и F символов $\&$ и \vee .

Другими словами, если E и F — две такие пропозициональные формулы, а E' и F' получаются в результате указанной замены друг на друга в E и F соответственно, то

$$\text{из } \vdash E \sim F \text{ следует } \vdash E' \sim F'$$

Теорема 8 (§27, Следствие: вторая часть, соотношение обратной двойственности). При тех же условиях из $\vdash E \supset F$ следует $\vdash F' \supset E'$