Упражнения после 2.4

(1) Построим функтор $S: R\text{-Mod} \longrightarrow Ab^R$

$M \rightsquigarrow F_M: R \to M$ (модуль M индуцирует единственный гомоморфизм колец $R \to End(M)$)

$M \xrightarrow{f} N \rightsquigarrow \tau_f: F_M \overset{\bullet}{\to} F_N$

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[loop above, "r"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r\cdot"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "r\cdot"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad f(rx) = rf(x)
$$

Этот функтор отображает объекты инъективно, т.к. для данного модуля M индуцируется единственный гомоморфизм колец $R \to End(M)$.
Также если два естественных преобразования $\tau: T \overset{\bullet}{\to} T'$; $\sigma: T \overset{\bullet}{\to} T'$ равны, то их компоненты совпадают, но компоненты это стрелки в R-Mod $\Rightarrow$ S - функтор вложения
Также если уже задано преобразование двух функторов в Ab^R, то его компонента – линейна, т.к. она является гомоморфизмом групп + пропускает умножение на скаляр.

(2) X – конечная дискр. категория
B^X?

Функторы в B^X – все отображения из X в B
Пусть $T, T': X \to B$ – два функтора. Тогда $\tau: T \overset{\bullet}{\to} T'$ – естественное преобразование, если $\forall x: T_x \xrightarrow{\exists} T'_x$, поскольку такой квадрат всегда коммутирует
Таким образом, преобразование $\tau: T \overset{\bullet}{\to} T'$ определяется набором стрелок в категории B между T_x и T'_x $\forall x$.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[loop above, "1_x"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_x \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, "1_{T_x}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T'_x \arrow[d, "1_{T'_x}"] \\
T_x \arrow[r, "\tau_x"'] & T'_x
\end{tikzcd}
$$

(3) $\mathbb{N}$ – категория натуральных чисел (почему дискретная ???)
Описать $Ab^{\mathbb{N}}$ (категория градуированных абелевых групп)
Выбрать функтор в $Ab^{\mathbb{N}}$ это то же самое, что построить последовательность абелевых групп

$$
T: \mathbb{N} \to Ab \qquad
\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "T_{12}"] \arrow[rr, bend right, dashed, "T_{13}"'] & G_2 \arrow[r, "T_{23}"] & G_3 \arrow[r] & G_4 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

Тогда естественное преобразование между последовательностями T и S это последовательность морфизмов групп, такая, что каждый квадрат (достаточно внутренний) коммутативен:

$$
\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_3 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_4 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
H_1 \arrow[r] & H_2 \arrow[r] & H_3 \arrow[r] & H_4 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

(4) Пусть P и Q – предпорядки.
Описать Q^P и показать, что Q^P · предпорядок
Q^P – монотонные функторы. Пусть $S, T: P \to Q$ - функторы. Тогда естественное преобразование $\tau: S \overset{\bullet}{\to} T$ существует тогда и только тогда, когда $Sc \le Tc$ $\forall c \in Ob(P)$, так как квадраты там всегда коммутативны (в силу единственности стрелок). Стрелки в любой категории обладают условием рефлексивности и транзитивности, а т.к. м/у Sc и Tc может быть только одна стрелка, то для двух функторов может быть не больше одного преобразования $\Rightarrow$ Q^P - предпорядок.

5. Fin, G – конечная группа

Описать Fin^G (категория всех представлений группы G перестановками)

Функторы в Fin^G – действия группы G на конечных множествах. Действительно, функтор $S: G \to Fin$ выбирает некоторое множество $X \in Ob(Fin)$ и является гомоморфизмом

$S: G \to Bij(X) = S_{|X|}$

Стрелки в категории Fin^G – сплетающие операторы

$$S, T: G \to Fin; \quad \tau: S \overset{\bullet}{\to} T$$

$$G \circlearrowleft g \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "S_g"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & Y \arrow[d, "T_g"] \\ X \arrow[r, "\tau"'] & Y \end{tikzcd}$$

6. M – бесконечный циклический моноид $(1, m, m^2, \dots)$, т.е. $M \simeq N_0$

Категория $(Matr_K)^2$

В категории $(Matr_K)^2$ функторы это выборы двух чисел m и n и матрицы между ними $m \xrightarrow{A} n$

Пусть $S, T: 2 \to Matr_K$ изоморфны $\Rightarrow \exists\ \sigma: S \overset{\bullet}{\to} T$ - обратимый; это означает, что компоненты обратимы, то есть $S_0 = T_0$; $S_1 = T_1$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} n \arrow[r, "B"] \arrow[d, "A_S"'] & n \arrow[d, "A_T"] \\ m \arrow[r, "C"'] & m \end{tikzcd} \Rightarrow A_S = B A_T C^{-1} \Rightarrow A_S \sim A_T$$

Наоборот, эквивалентные матрицы определяют обратимое естественное преобразование $\tau: S \overset{\bullet}{\to} T$

Категория $(Matr_K)^{N_0}$ – это категория, объекты которой это выбор n и матрицы во всех N_0 степенях т.е пары $(n, A^{N_0}_{n \times n})$. Две такие пары (n, A^{N_0}) и (m, B^{N_0}) изоморфны если и только если матрицы A и B подобны.

$$N_0 \circlearrowleft \qquad \begin{tikzcd} n \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "A"'] & n \arrow[d, "B"] \\ n \arrow[r, "\tau"'] & n \end{tikzcd} \qquad A = \tau B \tau^{-1}$$

Это действительно так, ибо сопряжение пропускает степень.

7. B, C, B^2 – категории

$H: C \to B^2$ – функтор

Определю $\tilde{S}: B^2 \to B$

$b: 2 \to B \rightsquigarrow b(0)$

$\tau: b \overset{\bullet}{\to} b' \rightsquigarrow \tau(0)$ – компонента на нуле

$\tilde{T}: B^2 \to B$

$b: 2 \to B \rightsquigarrow b(1)$

$\tau: b \overset{\bullet}{\to} b' \rightsquigarrow \tau(1)$ – компонента на 1.

Легко проверить, что $\tilde{S}$ и $\tilde{T}$ – функторы

Определю $S = \tilde{S}H$; $T = \tilde{T}H$

Посмотрим как S, T устроены: $S: c \rightsquigarrow c: 2 \to B \rightsquigarrow c(0)$. Можно заметить, что м/у $c(0)$ и $c(1)$

$T: c \rightsquigarrow c: 2 \to B \rightsquigarrow c(1)$

есть естественная стрелка $c(0) \to c(1)$ – образ единственной стрелки $0 \to 1$.

Определим $\tau: S \overset{\bullet}{\to} T$ $\tau_c = c(0) \to c(1)$. Тогда τ – естественное преобразование, т.к. в следующем квадрате боковые стрелки – это компоненты естественного преобразования – образа f при H, а значит он коммутативен

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] \\ c' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c(0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & c(1) \arrow[d] \\ c'(0) \arrow[r] & c'(1) \end{tikzcd}$$

Также если задана тройка $\langle S, T, \tau \rangle$, то определю:

$H: C \to B^2$

$c \rightsquigarrow c: 2 \to B$

$0 \rightsquigarrow Sc, 1_{Sc}$

$1 \rightsquigarrow Tc, 1_{Tc}$

$0 \to 1 \rightsquigarrow Sc \xrightarrow{\tau_c} Tc$

$c \xrightarrow{f} c' \rightsquigarrow \tau: c \overset{\bullet}{\to} c'$; $\tau_0 = S_f$, $\tau_1 = T_f$

Тогда H действительно функтор, ибо

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "gf"'] & c' \arrow[d, "g"] \\ & c'' \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} c(0) \arrow[r, "S_f"] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, bend left, "S_{gf}"] \arrow[dr, phantom, "G"] & c'(0) \arrow[r, "S_g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & c''(0) \arrow[d] \\ c(1) \arrow[r, "T_f"'] \arrow[rr, dashed, bend right, "T_{gf}"'] & c'(1) \arrow[r, "T_g"'] & c''(1) \end{tikzcd}$$

Нетрудно проверить, что эти соответствия обратны друг к другу с обеих сторон $\Rightarrow$
$K \mapsto \langle S, T, \gamma \rangle$ - биекция.