Введение в метаматематику на троечку

Мат.клуб “Тифаретник” по С. Клини

8 января 2022 г.

> Формальные ограничители нужны человеку всегда,
> Они как огнетушители, а это, бля, не ерунда.
>
> Кровосток – Снайпер

Определение (§16, Формальные символы)**.**

- *Логические символы*: $\supset$(влечёт), &(и), $\vee$(или), $\neg$(не), $\forall$(для всех), $\exists$(существует)
- *Символы предикатов*: $=$(равняется)
- *Символы функций*: $+$(сложить с), $\cdot$(умножить на), $'$(следующий за)
- *Индивидуальные символы*: 0(нуль)
- *Переменные*: a, b, c, ...
- *Скобки*: (,)

Определение (§17)**.**

1. 0 есть *терм*
2. Каждая переменная есть *терм*
3. Если s и t — *термы*, то

   (a) $(s)+(t)$ — *терм* (b) $(s)\cdot(t)$ — *терм* (c) $(s)'$ — *терм*

4. Никаких других *термов*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

Определение (§17)**.**

1. Если s и t — *термы*, то $(s)=(t)$ — *формула*
2. Если A и B — *формулы*, то

   (a) $(A)\supset(B)$ — *формула*
   (b) $(A)\,\&\,(B)$ — *формула*
   (c) $(A)\vee(B)$ — *формула*
   (d) $\neg(A)$ — *формула*

3. Если x — переменная, а A — *формула*, то

   (a) $\forall x(A)$ — *формула* (b) $\exists x(A)$ — *формула*

4. Никаких других *формул*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

Определение (§18)**.** Вхождение x в формулу A называется *связанным* (или вхождением в качестве *связанной переменной*), если оно является вхождением в квантор $\forall x$ или $\exists x$ или в область действия квантора $\forall x$ или $\exists x$; в противном случае вхождение называется *свободным*.

Определение (§18)**.** *Подстановка терма t вместо* переменной x в терм или формулу A состоит в одновременной замене каждого *свободного вхождения* x в A на вхождение t.

Определение (§18)**.** Будем говорить, что терм t *свободен при свободных вхождениях* переменной x в формулу $A(x)$, если никакое свободное вхождение x в $A(x)$ не входит в область действия какого-нибудь квантора $\forall y$ или $\exists y$, где y — переменная из t (т.е. входящая в t).

Постулаты формальной системы (§19)

Dramatis personae

В постулатах 1–8 A, B и C — формулы. В 9–13 x — переменная, $A(x)$ — формула, C — формула, не содержащая свободно x, а t — терм, свободный для x в $A(x)$.

Группа A. Постулаты исчисления предикатов

Группа A1. Постулаты исчисления высказываний

(1a) $A \supset (B \supset A)$

(1b) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

(4a) $A \& B \supset A$

(4b) $A \& B \supset B$

(5a) $A \supset A \vee B$

(5b) $B \supset A \vee B$

(2) $\dfrac{A, A \supset B}{B}$

(3) $A \supset (B \supset A \& B)$

(6) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

(7) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

(8°) $\neg\neg A \supset A$

Группа A2. (Дополнительные) Постулаты исчисления предикатов

(9) $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$

(10) $\forall x A(x) \supset A(t)$

(11) $A(t) \supset \exists x A(x)$

(12) $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$

Группа B. (Дополнительные) Постулаты арифметики

(13) $A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$

(14) $a' = b' \supset a = b$

(15) $\neg a' = 0$

(16) $a = b \supset (a = c \supset b = c)$

(17) $a = b \supset a' = b'$

(18) $a + 0 = a$

(19) $a + b' = (a + b)'$

(20) $a \cdot 0 = 0$

(21) $a \cdot b' = a \cdot b + a$

Определение (§19). Формула является *аксиомой*, если она имеет форму одну из (1a), (1b), (3)–(8), (10), (11), (13) или она есть одна из (14)–(21).

Определение (§19). Формула является *непосредственным следствием* (из) одной или двух других формул, если она имеет форму, указанную под чертой, тогда как другая (не) имеет(ют) форму(ы), указанную (не) над чертой в (2), (9) или (12).

Определение (§19). Постулаты (2), (9) и (12) мы называем *правилами вывода*. Для любого (фиксированного) выбора A и B или x, $A(x)$ и C, подчинённого отмеченным выше условиям, формулы указанные над чертой, являются *посылкой* (*первой* и *второй посылкой* соответственно), а формула, указанная под чертой, является *заключением* применения правила вывода.

Формальный вывод

Определение (§20)**.** Если дан перечень $D_1, \dots, D_l (l \geq 0)$ формул, то непустая конечная последовательность формул называется *формальным выводом из исходных формул* $D_1, \dots, D_l$, если каждая формула этой последовательности является или одной из формул $D_1, \dots, D_l$, или аксиомой, или непосредственным следствием из предыдущих формул последовательности. Вывод называется выводом *своей последней* формулы E, и эта формула называется *выводимой из* исходных формул (обозначается $D_1, \dots, D_l \vdash E$), а также *заключением* (или *конечной формулой*) вывода.

Определение (§20, Общие свойства $\vdash$)**.**

- $\Gamma \vdash E$, если E входит в список Γ
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta, \Gamma \vdash E$ для любого перечня Δ (Любая доказуемая выводима из любых исходных)
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ путём перестановки формул Γ или опускания любых таких формул, которые тождественны с другими остающимися
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ опусканием любых формул Γ, которые являются доказуемыми или выводимыми из остающихся формул Γ.

Теорема 1 (§21, О дедукции)**.** Для исчисления высказываний, если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

Теорема 1 (§22, полная)**.** Для исчисления предикатов (или полной арифметической формальной системы), если $\Gamma, A \vdash B$, причём все свободные переменные остаются фиксированными для последней исходной формулы, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

Определение (§23)**.** Переменная “x” приписанная к символу “$\vdash$” в качестве верхнего индекса отличает применение правила 9 или 12 по отношению к x при построении результирующего вывода.

Теорема 2 (§23)**.** В следующих правилах A, B и C или x, $A(x)$, C и t подчинены тем же условиям, что и в соответствующих постулатах, а Γ или $\Gamma(x)$ есть любой список формул.

Для исчисления высказываний справедливы правила от “импликации” до “отрицания” включительно.

Для исчисления предикатов (или полной арифметической системы) справедливы все правила, при условии, что в каждом вспомогательном выводе связанные переменные остаются фиксированными для устраняемой формулы.

	Введение	Удаление
Импликация	Если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$	$A, A \supset B \vdash B$ (modus ponens)
Конъюнкция	$A, B \vdash A \& B$	$A \& B \vdash A$ $A \& B \vdash B$
Дизъюнкция	$A \vdash A \vee B$ $B \vdash A \vee B$	Если $\Gamma, A \vdash C$ и $\Gamma, B \vdash C$, то $\Gamma, A \vee B \vdash C$
Отрицание	Если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, A \vdash \neg B$, то $\Gamma \vdash \neg A$	$\neg\neg A \vdash A$
Общность	$A(x) \vdash^x \forall x A(x)$	$\forall x A(x) \vdash A(t)$
Существование	$A(t) \vdash \exists x A(x)$	Если $\Gamma(x), A(x) \vdash C$, то $\Gamma(x), \exists x A(x) \vdash^x C$

Формулы исчисления высказываний

Определение (§25)**.** Формальные символы нового рода: $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$ называемые пропозициональными буквами, (потенциально) бесконечный перечень которых мы считаем имеющимся в нашем распоряжении. Новое определение "формулы":

1. Пропозициональная буква есть *формула*
2. Если A и B — *формулы*, то

   (a) $(A) \supset (B)$ — *формула*
   (b) $(A) \,\&\, (B)$ — *формула*
   (c) $(A) \vee (B)$ — *формула*
   (d) $\neg(A)$ — *формула*

3. Никаких других *формул*, кроме определённых согласно 1 и 2, нет.

Определение (§25)**.** Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — перечень различных пропозициональных букв. (Здесь "P_1", ..., "P_m" — метаматематические буквы, которыми мы пользуемся как названиями для пропозициональных букв, когда не хотим ограничивать наше рассуждение употреблением конкретных пропозициональных букв.)

Пропозициональная формула A называется *формулой составленной* из $P_1, \ldots, P_m$, если никакая пропозициональная буква, отличная от $P_1, \ldots, P_m$ не входит в A.

Определение (§25)**.** *Подстановка* вместо пропозициональной буквы (или одновременно вместо нескольких различных пропозициональных пропозициональных букв) определяется как для переменной в §18, за исключением того, что подстановка применяется теперь ко всем вхождениям без исключений (так как нет связанных вхождений).

Теорема 3 (§25, Подстановка вместо пропозициональных букв)**.** Пусть Γ — перечень пропозициональных формул, а E — пропозициональная формула, составленная из различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — формулы. Пусть Γ^* и E^* получаются из Γ и E соответственно путём одновременной подстановки $A_1, \ldots, A_m$ вместо $P_1, \ldots, P_m$ соответственно.

Если $\Gamma \vdash E$, то $\Gamma^* \vdash E^*$ (Для случая пустой Γ: если $\vdash E$, то $\vdash E^*$)

Определение (§25)**.** Формула называется *элементарной (для исчисления высказываний)*, если она не имеет ни одного из видов $A \supset B$, $A \,\&\, B$, $A \vee B$, $\neg A$, где A и B — формулы.

Теорема 4 (§25, Обращение правила подстановки для проп. переменных)**.** При тех же условиях, что и в теореме 3. Если $A_1, \ldots, A_m$ — элементарные формулы, то из $\Gamma^* \vdash E^*$ следует $\Gamma \vdash E$.

Теорема 4 (§25, вторая форма)**.** Пусть Γ^* — формулы, а E^* — формула, имеющие различные элементарные компоненты $A_1, \ldots, A_m$. Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — пропозициональные буквы, не обязательно различные. Пусть Γ, E получаются из Γ^*, E^* соответственно заменой одновременно во всех вхождениях $A_1, \ldots, A_m$ на $P_1, \ldots, P_m$ соответственно. Тогда $\Gamma^* \vdash E^*$ влечёт $\Gamma \vdash E$.

За исключением того, что "формула" здесь понимается не в смысле пропозициональной формулы, теорема 4 содержится в теореме 3.

Определение (§26)**.** Пусть A и B — формулы. Введём запись "$A \sim B$" в качестве сокращения для записи $(A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$. Символ "$\sim$" можно читать "эквивалентна". Он употребляется в качестве формального оператора, который, будучи помещён между двумя формулами системы, даёт другую формулу этой системы. При опускании скобок ему приписывается ранг более высокий, чем другим формальным операторам (§17)

A эквивалентна B в исчислении высказываний или в другой формальной система, если в этой формальной системе $\vdash A \sim B$. Здесь слово "эквивалентна" употребляется в качестве метаматематического глагола, который, будучи помещён между 2 формулами системы, даёт высказывание об этих формулах

Теорема 5 (§26). Если A, B и C — формулы, то:

1. $\vdash A \supset A$ — принцип тождества
2. $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$ — цепное заключение
3. $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$ — перестановка посылок
4. $A \supset (B \supset C) \vdash A \& B \supset C$ — импортация
5. $A \& B \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$ — экспортация

Введение в импликацию

6. $A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$ — заключения
7. $A \supset B \vdash (C \supset A) \supset (C \supset B)$ — посылки

8a. $A \supset B \vdash A \& C \supset B \& C$ — конъюнктивного члена

8b. $A \supset B \vdash C \& A \supset C \& B$

9a. $A \supset B \vdash A \vee C \supset B \vee C$ — дизъюнктивного члена

9b. $A \supset B \vdash C \vee A \supset C \vee A$

Доказательство импликации путём

10a. $\neg A \vdash A \supset B$ — опровержения посылки

10b. $A \vdash \neg A \supset B$

11. $B \vdash A \supset B$ — доказательства заключения

Контрапозиция

12. $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$
13. $A \supset \neg B \vdash B \supset \neg A$

со снятием двойного отрицания

14°. $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$

15°. $\neg A \supset \neg B \vdash B \supset A$

По определению $\sim$ в терминах $\supset$ и $\&$

16. $A \supset B, B \supset A \vdash A \sim B$

17a. $A \sim B \vdash A \supset B$

17b. $A \sim B \vdash B \supset A$

18a. $A \sim B, A \vdash B$

18b. $A \sim B, B \vdash A$

19. $\vdash A \sim A$ — рефлексивность
20. $A \sim B \vdash B \sim A$ — симметричность
21. $A \sim B, B \sim C \vdash A \sim C$ — транзитивность

Дополнительные результаты, представляющие интерес в связи с интуиционистской системой

22. $A \supset (B \supset C), \neg\neg A, \neg\neg B \vdash \neg\neg C$
23. $\neg\neg(A \supset B) \vdash \neg\neg A \supset \neg\neg B$
24. $\neg\neg(A \supset B), \neg\neg(B \supset C) \vdash \neg\neg(A \supset C)$
25. $\vdash \neg\neg(A \& B) \sim \neg\neg A \& \neg\neg B$; в частности $\vdash \neg\neg(A \sim B) \sim \neg\neg(A \supset B) \& \neg\neg(B \supset A)$

Определение (§26)**.** Пусть A — формальное выражение. Рассмотрим другое формальное выражение C. Может случиться, что A входит в C как (связная) часть, причём это возможно более чем одним способом. Допустим, что это имеет место и что, если это осуществляется более чем одним способом, то выделено некоторое конкретное вхождение A в C. Обозначим теперь C вместе с выделенным конкретным вхождением A в C через "C_A". В обозначении сочленения C_A есть EAF, где E и F — части (возможно, пустые), предшествующая и следующая за этой выделенной частью A. Пусть теперь B — какое-то формальное выражение. Результатом *замены* этой выделенной части A выражения C на B есть выражение EBF. Обозначим через C_B.

Теорема 6 (§26, Теорема о замене)**.** Если A, B, C_A и C_B — пропозициональные формулы, связанные друг с другом, как в предыдущем определении замены, то

$$A \sim B \vdash C_A \sim C_B$$

Теорема 6 (§26, Леммы для замены)**.** Если A, B, C — формулы, то

26. $A \sim B \vdash A \supset C \sim B \supset C$
27. $A \sim B \vdash C \supset A \sim C \supset B$
28a. $A \sim B \vdash A \& C \sim B \& C$
28b. $A \sim B \vdash C \& A \sim C \& B$
29a. $A \sim B \vdash A \vee C \sim B \vee C$
29b. $A \sim B \vdash C \vee A \sim C \vee B$
30. $A \sim B \vdash \neg A \sim \neg B$

Теорема 6 (§26, вторая форма)**.** Если A и B — формулы, C_A — формула, построенная из некоторого конкретного вхождения A с помощью одних только операторов $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$, а C_B получается из C_A заменой этого вхождения A на B, то

$$A \sim B \vdash C_A \sim C_B$$

Теорема 6 (§26, Следствие: свойство замены для эквивалентности)**.** В условиях теоремы (в любой форме)

$$A \sim B, C_A \vdash C_B$$

Теорема 7 (§27)**.**

Теорема 8 (§27, используется постулат 8°)**.** Пусть D — пропозициональная формула, построенная из различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$ и их отрицаний $\neg P_1, \ldots, \neg P_m$ с помощью одних только операторов $\&$, $\vee$. Тогда формула $D^\dagger$, эквивалентная $\neg D$, получается в результате замены друг на друга в D символов $\&$ и $\vee$ и ещё каждой буквы и её отрицания.

Другими словами, если D — пропозициональная формула описанного рода, а $D^\dagger$ — результат описанной замены друг на друга в D, то

$$\vdash \neg D \sim D^\dagger$$

Теорема 8 (§27, Следствие: принцип двойственности)**.** Эквивалентность между двумя *формулами E и F описанного в теореме 8 типа* сохраняется при замене друг на друга в E и F символов $\&$ и $\vee$.

Другими словами, если E и F — две такие пропозициональные формулы, а E' и F' получаются в результате указанной замены друг на друга в E и F соответственно, то

$$\text{из} \vdash E \sim F \text{ следует} \vdash E' \sim F'$$

Теорема 8 (§27, Следствие: вторая часть, соотношение обратной двойственности)**.** При тех же условиях из $\vdash E \supset F$ следует $\vdash F' \supset E'$

Оценка, непротиворечивость

Определение (§28)**.** Исчисление высказываний (и вообще любая формальная система, имеющая символ $\neg$ для отрицания) называется *(просто) непротиворечивой* системой, если ни для какой формулы A и $\neg A$ не являются обе доказуемыми в этой системе, и *(просто) противоречивой* в противном случае, если для некоторой формулы A одновременно $\vdash A$ и $\vdash \neg A$.

Это строго метаматематическое определение. Оно опирается только на формальный символ $\neg$ и определения формулы и доказуемой формулы. Таким образом, доказательство непротиворечивости данной формальной системы становится точной математической проблемой, которую можно рассматривать в метаматематике.

Метаматематическое доказательство непротиворечивости формальной системы даёт гарантию против возникновения противоречия в соответствующей содержательной теории.

Для исчисления высказываний (и вообще любой формальной системы, которая содержит &-удаление и слабое $\neg$-удаление в качестве постулируемых или выводимых правил), предыдущее определение эквивалентно следующему

Определение (§28)**.** Система *(просто) непротиворечива*, если в ней имеется некоторая недоказуемая формула; *(просто) противоречива*, если любая формула доказуема.

Предположим, что мы нашли метаматематическое свойство формул, такое, что

(a) аксиомы обладают этим свойством

(b) при каждом применении правила вывода, если посылки обладают этим свойством, то и заключение тоже

(c) две формулы вида A и $\neg A$ не могут обе обладать этим свойством.

Тогда в силу (a) и (b) каждая доказуемая формула будет обладать этим свойством и в силу (c) система оказывается непротиворечивой.

Теперь построим некоторую арифметику для области только с двумя предметами и четырьмя функциями $\supset$, &, $\vee$, $\neg$. Поскольку для метаматематики $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ являются объектами, не имеющими смысла, более точное описание состоит в следующем.

Определение (§28)**.** Введём некоторый метаматематический вычислительный процесс (называемый *проведением оценки*), согласно которому с каждым из символов $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ будет связана некоторая функция из этой арифметики (или таблица для такой функции, называемая *таблицей истинности*).

Тем самым с каждой пропозициональной формулой будет связана некоторая такая функция. Затем мы изучим метаматематические свойства пропозициональных формул, определённые в терминах соответствующих функций (или таблиц).

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$
f	f	t
f	t	t
t	f	f
t	t	t

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \mathbin{\&} \mathscr{B}$
f	f	f
f	t	f
t	f	f
t	t	t

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
f	f	f
f	t	t
t	f	t
t	t	t

$\mathscr{A}$	$\neg\mathscr{A}$
f	t
t	f

Тогда каждая пропозициональная формула A, составленная из данного перечня различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$, представляется как функция от этих букв, рассмотренные как независимые переменные над областью $\{t, f\}$. Для каждой m-ки значений этих букв соответствующее значение функции может быть вычислено путём последовательного применения этих основных таблиц.

Определение (§28)**.** Пропозициональная формула E, составленная из различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$, называется *тождественно истинной*, если столбец значений её таблицы содержит одни только t, и *тождественно ложной*, если он содержит одни только f.

Две пропозициональные формулы E и F составленные из $P_1, \ldots, P_m$, называются *тождественно равными*, если их таблицы имеют один и тот же столбец значений.

Теорема 9 (§28)**.** Для того, чтобы пропозициональная формула E была доказуемой (или выводимой из тождественно истинных формул Γ) в исчислении высказываний, необходимо, чтобы она была тождественно истиной, т.е.

$$\text{если} \vdash E, \text{ то } E \text{ тождественно истинна.}$$

Теорема 9 (§28, Следствие 1)**.** Для того, чтобы две пропозициональные формулы E и F были эквивалентны, необходимо, чтобы они были тождественно равны:

$$\text{если} \vdash E \sim F, \text{ то } E \text{ и } F \text{ тождественно равны.}$$

Теорема 9 (§28, Следствие 2)**.** Исчисление высказываний (просто) непротиворечиво; другими словами, ни для какой формулы A не имеют место одновременно $\vdash A$ и $\vdash \neg A$.