Занятие 4

Упражнение 1

Пусть дан универсум $\mathcal{U}$, а также функция $f: I \to b$ с областью определения $I \in \mathcal{U}$, причём все её значения f_i $(i \in \mathcal{U})$ принадлежат $\mathcal{U}$. Докажите, что декартово произведение $\prod_i f_i$ является элементом из $\mathcal{U}$.

Решение:

- Используем принцип выделения для b: составим множество $\{f_i\}$, содержащее в точности элементы-образы отображения f. Тогда $f: I \twoheadrightarrow \{f_i\}$ – сюръекция и $\{f_i\} \subseteq \mathcal{U} \overset{(5)}{\Rightarrow} \{f_i\} \in \mathcal{U} \overset{(3)}{\Rightarrow} \bigcup \{f_i\} = \bigcup\limits_{i \in I} f_i \in \mathcal{U}$

- $\prod_i f_i \overset{def}{:=} \{\varphi: I \to \bigcup\limits_{i \in I} f_i \ : \ \varphi(i) \in f_i\}$ (если $f_i = \varnothing$ для некоторого i, то $\prod_i f_i = \varnothing \in \mathcal{U}$)

- $I \in \mathcal{U} \overset{(2)}{\Rightarrow} \{I\} \in \mathcal{U}$. Рассмотрим $\mathcal{P}\Big(\{I\} \times \big(\mathcal{P}(I \times \bigcup f_i)\big) \times \{\bigcup f_i\}\Big) \in \mathcal{U}$. Но $\varphi \in \{I\} \times \big(\mathcal{P}(I \times \bigcup f_i)\big) \times \{\bigcup f_i\}$
$\bigcup f_i \in \mathcal{U} \overset{(2)}{\Rightarrow} \{\bigcup f_i\} \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow \prod_i f_i \in \mathcal{U}$

Упражнение 2

(а) Для данного универсума $\mathcal{U}$ и функции $f: I \to b$ с областью определения $I \in U$ покажите, что объединение $\bigcup\limits_{i \in I} f_i$ является множеством из $\mathcal{U}$.

(б) Покажите, что в определении универсума $\mathcal{U}$ можно заменить условие (5) на свойство из (а) этого упражнения, а из условия $x \in \mathcal{U}$ вытекает, что $\bigcup x \in \mathcal{U}$.

Решение:

(а) Доказано в 1

(б) необходимость доказана, докажем достаточность

Пусть выполнено условие из (а) и дана сюръективная функция $f: a \to b$, $a \in \mathcal{U}$ и $b \subseteq \mathcal{U}$
Так как $b \subseteq \mathcal{U}$, то $x \in b \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} \{x\} \in \mathcal{U} \overset{(\text{выделение})}{\Rightarrow} \{\{x\}\}_{x \in b} \subset \mathcal{U}$. Образуем новую функцию $\hat{f}: a \to \{\{x\}\}_{x \in b}$. Заметим, что образы содержатся в $\mathcal{U}$ $\Rightarrow$ применимо (а): $\bigcup\limits_{x \in b} \{x\} = b \in \mathcal{U}$.

Пусть $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists\, f: \{x\} \to \{x\} \Rightarrow \bigcup\limits_{x \in \{x\}} x = \bigcup x \in \mathcal{U}$.