

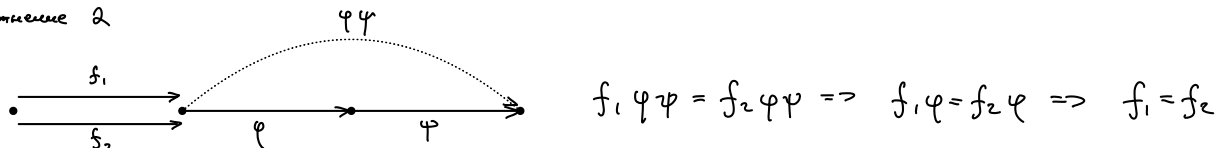
Занятие 3

Упражнение 1

Рассмотрим категорию в категории Топ полную подкатегорию метрических пространств с индуцированной топологией с непрерывными отображениями. Рассмотрим вложение $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Эта стрелка — мономорфизм, т.к. имеет обратную сшивку относительно образа. Также она эпиморфизм, т.к. если в цепи $\mathbb{Q} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \xrightarrow[f_1]{f_2} X$ $\varphi f_1 = \varphi f_2$, то f_1 и f_2 действуют одинаково на \mathbb{Q} , а в силу непрерывности $\mathbb{Q} \ni x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$. Но, очевидно, φ — не обратимо.

$$\mathbb{Q} \ni x_n \rightarrow x \Rightarrow g(x_n) \rightarrow g(x)$$

Упражнение 2



Упражнение 3

Рассмотрим точную последовательность абелевых групп. $0 \xrightarrow{\varphi_1} M \xrightarrow{\varphi_2} G \xrightarrow{\varphi_3} G/M \xrightarrow{\varphi_4} 0$. Очевидно $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — мономорфизмы, т.к. обратимы, но φ_3 — не мономорфизм.

Упражнение 4

Имеем: $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q} \xrightarrow[f_2]{f_1} \mathbb{R}$. Если $\varphi f_1 = \varphi f_2$, то f_1 и f_2 действуют одинаково на целых числах в \mathbb{Q} . Но тогда $f_1(\frac{a}{b}) = \frac{f_1(a)}{f_1(b)} = \frac{f_2(a)}{f_2(b)} = f_2(\frac{a}{b})$ (т.к. гомоморфизм сохр.), т.е. $f_1 = f_2$.

Упражнение 5

Пусть $G \xrightarrow{\varphi} M$ — эпиморфизм и $\varphi(G) = M$; $[G:M] = 2$. Тогда $M \xrightarrow{\pi} M/M$ — эпиморфизм = $\pi \circ \varphi$ — эпиморфизм, но $\# M/M = 2$. Рассмотрим $G \xrightarrow{\varphi} M$. Тогда $0 \cdot 0 = 0$ и $f \cdot 0 = 0$, но $f \neq 0$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ 0 & \xrightarrow{f} & M/M \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

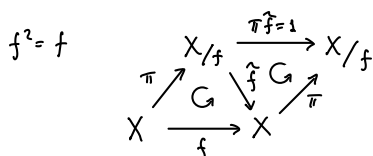
f — естествен.

Если $[G:M] > 2$, то рассмотрим группу $\text{Aut}(M)$ и три различных класса M, M_u, M_v .

Определим $\sigma \in \text{Aut}(M)$ $\sigma(xu) = xv$, $\sigma(xv) = xu$ при $x \in M$, иначе тождественно.

Подставим K на себе: $M \subset M$ левыми идеалами: $\varphi: M \rightarrow \text{Aut}(M)$, где φ_h — умножение слева на h , и $\varphi'_h = \sigma^{-1} \varphi_h \sigma$. Тогда $\varphi \varphi' = \varphi' \varphi$, но $\varphi \neq \varphi'$, т.к. $\mathbb{Z}(\text{Aut}(M)) = \{\text{Id}\}$ при $\# M > 2$, но $\sigma \neq \text{Id}$.

Упражнение 6



$$[x]_f \rightarrow f(n) \rightarrow [f(n)]_f, \text{ но } [x]_f = [f(n)]_f, \text{ т.к. } f^2 = f.$$

Упражнение 7

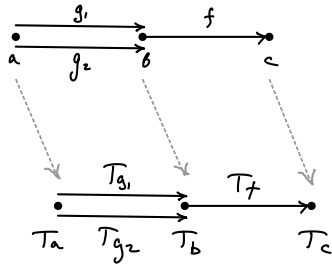
- Пусть f имеет левую или правую обратную g . Тогда либо $fg = 1_b$, либо $gf = 1_a$. Тогда $f_3 f = f$.
- Пусть $a \neq b \xrightarrow{f} b$. Тогда есть $\text{Im } f \xrightarrow{g} a$ — функция выбора для f . Тогда определим g на $b \setminus \text{Im } f$ тождественно. Таким образом, $fgf = f$.

Упражнение 8

Опечатака ???

Упражнение 9

Пусть функтор $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ унитарен и Tf - мономорфизм



$$fg_1 = fg_2 \Rightarrow T_{fg_1} = T_{fg_2} \Rightarrow T_f \circ T_{g_1} = T_f \circ T_{g_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{g_1} = T_{g_2} \Rightarrow g_1 = g_2.$$