Введение в метаматематику на троечку

Мат.клуб "Тифаретник" по С. Клини

31 октября 2021 г.

Определение. *Формальные символы*

- *Логические символы*: $\supset$(влечёт), &(и), $\vee$(или), $\neg$(не), $\forall$(для всех), $\exists$(существует)
- *Символы предикатов*: $=$(равняется)
- *Символы функций*: $+$(сложить с), $\cdot$(умножить на), $'$(следующий за)
- *Индивидуальные символы*: 0(нуль)
- *Переменные*: a, b, c, ...
- *Скобки*: (,)

Определение.

1. 0 есть *терм*
2. Каждая переменная есть *терм*
3. Если s и t — *термы*, то

   (a) $(s) + (t)$ — *терм* (b) $(s) \cdot (t)$ — *терм* (c) $(s)'$ — *терм*

4. Никаких других *термов*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

Определение.

1. Если s и t — *термы*, то $(s) = (t)$ — *формула*
2. Если A и B — *формулы*, то

   (a) $(A) \supset (B)$ — *формула*
   (b) $(A) \,\&\, (B)$ — *формула*
   (c) $(A) \vee (B)$ — *формула*
   (d) $\neg(A)$ — *формула*

3. Если x — переменная, а A — *формула*, то

   (a) $\forall x(A)$ — *формула* (b) $\exists x(A)$ — *формула*

4. Никаких других *формул*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

Определение. Вхождение x в формулу A называется *связанным* (или вхождением в качестве *связанной переменной*), если оно является вхождением в квантор $\forall x$ или $\exists x$ или в область действия квантора $\forall x$ или $\exists x$; в противном случае вхождение называется *свободным*.

Определение. *Подстановка терма t вместо* переменной x в терм или формулу A состоит в одновременной замене каждого *свободного вхождения* x в A на вхождение t.

Определение. Будем говорить, что терм t *свободен при свободных вхождениях* переменной x в формулу $A(x)$, если никакое свободное вхождение x в $A(x)$ не входит в область действия какого-нибудь квантора $\forall y$ или $\exists y$, где y — переменная из t (т.е. входящая в t).

Постулаты формальной системы

Dramatis personae

В постулатах 1–8 A, B и C — формулы. В 9–13 x — переменная, $A(x)$ — формула, C — формула, не содержащая свободно x, а t — терм, свободный для x в $A(x)$.

Группа A. Постулаты исчисления предикатов

Группа A1. Постулаты исчисления высказываний

(1a) $A \supset (B \supset A)$

(1b) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

(4a) $A \,\&\, B \supset A$

(4b) $A \,\&\, B \supset B$

(5a) $A \supset A \vee B$

(5b) $B \supset A \vee B$

(2) $\dfrac{A, A \supset B}{B}$

(3) $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$

(6) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

(7) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

(8°) $\neg\neg A \supset A$

Группа A2. (Дополнительные) Постулаты исчисления предикатов

(9) $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$

(10) $\forall x A(x) \supset A(t)$

(11) $A(t) \supset \exists x A(x)$

(12) $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$

Группа B. (Дополнительные) Постулаты арифметики

(13) $A(0) \,\&\, \forall x (A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$

(14) $a' = b' \supset a = b$

(15) $\neg a' = 0$

(16) $a = b \supset (a = c \supset b = c)$

(17) $a = b \supset a' = b'$

(18) $a + 0 = a$

(19) $a + b' = (a + b)'$

(20) $a \cdot 0 = 0$

(21) $a \cdot b' = a \cdot b + a$

Определение. Формула является *аксиомой*, если она имеет форму одну из (1a), (1b), (3)–(8), (10), (11), (13) или она есть одна из (14)–(21).

Определение. Формула является *непосредственным следствием* (из) одной или двух других формул, если она имеет форму, указанную под чертой, тогда как другая (не) имеет(ют) форму(ы), указанную (не) над чертой в (2), (9) или (12).

Определение. Постулаты (2), (9) и (12) мы называем *правилами вывода*. Для любого (фиксированного) выбора A и B или x, $A(x)$ и C, подчинённого отмеченным выше условиям, формулы указанные над чертой, являются *посылкой* (*первой* и *второй посылкой* соответственно), а формула, указанная под чертой, является *заключением* применения правила вывода.

Формальный вывод

Определение. Если дан перечень $D_1, \ldots, D_l (l \geq 0)$ формул, то непустая конечная последовательность формул называется *формальным выводом из исходных формул* $D_1, \ldots, D_l$, если каждая формула этой последовательности является или одной из формул $D_1, \ldots, D_l$, или аксиомой, или непосредственным следствием из предыдущих формул последовательности. Вывод называется выводом *своей последней* формулы E, и эта формула называется *выводимой из* исходных формул (обозначается $D_1, \ldots, D_l \vdash E$), а также *заключением* (или *конечной формулой*) вывода.

Определение. *Общие свойства* $\vdash$

- $\Gamma \vdash E$, если E входит в список Γ
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta, \Gamma \vdash E$ для любого перечня Δ (Любая доказуемая выводима из любых исходных)
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ путём перестановки формул Γ или опускания любых таких формул, которые тождественны с другими остающимися
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ опусканием любых формул Γ, которые являются доказуемыми или выводимыми из остающихся формул Γ.

Теорема 1. О дедукции.
Для исчисления высказываний, если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$.