Занятие 5

Упражнение 1

Покажите, что следующие известные понятия являются частными случаями произведения категорий: произведение моноидов, групп, множеств (как категорий)

Решение:

Очевидно, что моноиды, группы представляются как категории с одним объектом и стрелками, которые выполняют функцию элементов. Тогда универсальное свойство произведения моноидов и групп относительно гомоморфизмов это в точности универсальное свойство произведения категорий относительно функторов (функторы ~ гомоморфизмы).

Универсальное свойство произведения множеств относительно отображений это в точности универсальное свойство произведения дискретных категорий относительно функторов. (функторы ~ отображения)

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[dr] & \\ G & G \times H \arrow[l] \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

Упражнение 2

Покажите, что произведение двух предпорядков является предпорядком.

Решение:

Пусть U и V - два предпорядка. Стрелка в $U \times V$ м/у $\langle u, v \rangle$ и $\langle u', v' \rangle$ существует тогда и только тогда, когда $u \to u'$ и $v \to v'$. Рефлексивность и транзитивность очевидна.

Упражнение 3

Пусть $\{C_i \mid i \in I\}$ - семейство категорий, I - соответствующее множество индексов. Опишите произведение $C = \Pi_i C_i$, его проекции $P_i : C \to C_i$ и найдите универсальное свойство этих проекций.

Решение:

Построение обобщённого произведения чего-угодно по индексному множеству I это построение всевозможных функций из I на объединение множеств. Более подробно:

$$\mathrm{Ob}\Big(\overset{C}{\overset{\shortparallel}{\Pi_i C_i}}\Big) = \{ \text{функции } a : I \longrightarrow \cup_i C_i \mid a(i) \in C_i \}$$

$$\mathrm{Hom}_C(a, b) = \{ \text{стрелки } f : I \longrightarrow \cup_i \big(\mathrm{Hom}_{C_i}(a(i), b(i))\big) \mid f(i) \in \mathrm{Hom}_{C_i}(a(i), b(i)) \}$$

Перемножение стрелок в категории C происходит поиндексным перемножением соответствующих стрелок на данном индексе.

$P_i : C \longrightarrow C_i$ - функтор. $\quad P_i : a \longmapsto a(i)$

$$a \xrightarrow{f} b \longmapsto a(i) \xrightarrow{f(i)} b(i)$$

Тогда единственный функтор универсального свойства имеет вид:

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dll, bend right, "T_i"'] \arrow[ddl, bend right, "T_j"] \arrow[d, dashed, "\exists! T"] \\ C_i & & C \arrow[ll, "P_i"'] \arrow[dl, "P_j"] \arrow[d, dashed] \\ & C_j & \dots \end{tikzcd}$$

$$T : X \longrightarrow C$$

$$x \longmapsto T_x : I \longrightarrow \cup_i C_i \quad (T_x(i) = T_i x)$$

$$x \xrightarrow{f} x' \longmapsto T_x \xrightarrow{T_f} T_{x'} \ ; \ T_f : I \longrightarrow \cup_i \big(\mathrm{Hom}_{C_i}(a(i), b(i))\big) \quad (T_f(i) = T_i f)$$

Упражнение 4

Опишите категорию, двойственную к категории $Matr_K$

Решение:

$$t:\ Matr_K \longrightarrow Matr_K^{op}$$
$$n \longmapsto n$$
$$A \longmapsto A^t$$

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "A"] \arrow[dr, dashed, "AB"'] & m \arrow[d, "B"] \\ & k \end{tikzcd} \xrightarrow{\quad t \quad} \begin{tikzcd} n & m \arrow[l, "A^t"'] \\ & k \arrow[u, "B^t"'] \arrow[ul, dashed, "B^tA^t"] \end{tikzcd}$$

Упражнение 5

Покажите, что кольцо непрерывных вещественнозначных функций на топологическом пространстве является функцией объектов контравариантного функтора из Top в Rng

Решение:

Построю функтор $C:\ Top \longrightarrow Rng$

$(X, \tau) \longmapsto C(X)$ - кольцо всех непрерывных функций $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{R}$ $(+, \cdot)$

$$f \longmapsto C_f$$
$$X \longrightarrow Y \qquad C(Y) \longrightarrow C(X)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

Он, очевидно, контравариантный.