

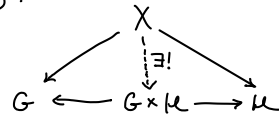
## Упражнение 1

Покажите, что следующие известные понятия являются частными случаями произведения категорий: произведения множеств, групп, множеств (как категорий)

Решение:

Очевидно, что моноиды, группы представляются как категории с одним объектом и терминами, которые выполняют функцию элемента. Тогда универсальное свойство произведения моноидов и групп относительно гомоморфизмов это в точности универсальное свойство произведения категорий относительно функторов (функторы ~ гомоморфизмы).

Универсальное свойство произведения множеств относительно отображений это в точности универсальное свойство произведения дисперсных категорий относительно функторов. (функторы ~ отображения)



## Упражнение 2

Покажите, что произведение двух предпорядков является предпорядком.

Решение:

Пусть  $U$  и  $V$  - два предпорядка. Стрелка в  $U \times V$  из  $\langle u, v \rangle$  и  $\langle u', v' \rangle$  существует тогда и только тогда, когда  $u \rightarrow u'$  и  $v \rightarrow v'$ . Рефлексивность и транзитивность очевидна.

## Упражнение 3

Пусть  $\{C_i \mid i \in I\}$  - семейство категорий,  $I$  - соответствующее множество индексов. Опишите произведение  $C = \prod_i C_i$ , его проекции  $P_i: C \rightarrow C_i$  и найдите универсальное свойство этих проекций.

Решение:

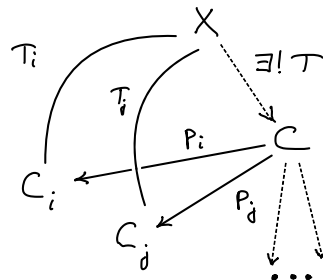
Построение обобщенного произведения чего-нибудь по индексному множеству  $I$  это построение всевозможных функций из  $I$  на объединенный множеств. Более подробно:

$$\text{Об } \prod_i C_i = \{ \text{функции } a: I \rightarrow \bigcup_i C_i \mid a(i) \in C_i \}$$

$$\text{Hom}_C(a, b) = \{ \text{стрелки } f: I \rightarrow \bigcup_i (\text{Hom}_{C_i}(a(i), b(i))) \mid f(i) \in \text{Hom}_{C_i}(a(i), b(i)) \}$$

Переименование стрелок в категории  $C$  происходит поиндексным переименованием соответствующих стрелок на данных индексах.

$$P_i: C \rightarrow C_i \text{ - функтор. } P_i: a \mapsto a(i) \\ a \xrightarrow{f} b \mapsto a(i) \xrightarrow{f(i)} b(i)$$



Тогда единственный функтор универсального свойства имеет вид:

$$T: X \rightarrow C \\ x \mapsto T_x: I \rightarrow \bigcup_i C_i \quad (T_x(i) = T_i x) \\ x \xrightarrow{f} x' \mapsto T_x \xrightarrow{T_f} T_{x'} ; T_f: I \rightarrow \bigcup_i (\text{Hom}_{C_i}(a(i), b(i))) \quad (T_f(i) = T_i f)$$

#### Упражнение 4

Опишите категорию, двойственную к категории  $\text{Matr}_K$

Решение:

$$\begin{aligned} t: \text{Matr}_K &\longrightarrow \text{Matr}_K^{\text{op}} \\ n &\longmapsto n \\ A &\longmapsto A^t \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} n & \xrightarrow{A} & m \\ & \searrow AB & \downarrow B \\ & & k \end{array} \xrightarrow{t} \begin{array}{ccc} n & \xleftarrow{A^t} & m \\ & \searrow B^t A^t & \uparrow B^t \\ & & k \end{array}$$

#### Упражнение 5

Покажите, что кольцо непрерывных вещественнозначных функций на топологическом пространстве является функцией объектов контравариантного функтора из  $\text{Top}$  в  $\text{Ring}$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{Построю функтор } C: \text{Top} &\longrightarrow \text{Ring} \\ (X, \tau) &\longmapsto C(X) - \text{кольцо всех непрерывных функций } \varphi: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ } (+, \cdot) \\ \uparrow &\longmapsto C_{\uparrow} \\ X \rightarrow Y &\longmapsto C(Y) \rightarrow C(X) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

Он, очевидно, контравариантный.