# Введение в метаматематику на троечку

Мат.клуб “Тифаретник” по С. Клини

1 ноября 2021 г.

**Определение.** *Формальные символы*

- *Логические символы*: $\supset$(влечёт), &(и), $\vee$(или), $\neg$(не), $\forall$(для всех), $\exists$(существует)
- *Символы предикатов*: $=$(равняется)
- *Символы функций*: $+$(сложить с), $\cdot$(умножить на), $'$(следующий за)
- *Индивидуальные символы*: 0(нуль)
- *Переменные*: $a$, $b$, $c$, ...
- *Скобки*: (, )

**Определение.**

1. 0 есть *терм*
2. Каждая переменная есть *терм*
3. Если $s$ и $t$ — *термы*, то

   (a) $(s) + (t)$ — *терм* (b) $(s) \cdot (t)$ — *терм* (c) $(s)'$ — *терм*

4. Никаких других *термов*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

**Определение.**

1. Если $s$ и $t$ — *термы*, то $(s) = (t)$ — *формула*
2. Если $A$ и $B$ — *формулы*, то

   (a) $(A) \supset (B)$ — *формула* (c) $(A) \vee (B)$ — *формула*
   (b) $(A) \,\&\, (B)$ — *формула* (d) $\neg(A)$ — *формула*

3. Если $x$ — переменная, а $A$ — *формула*, то

   (a) $\forall x(A)$ — *формула* (b) $\exists x(A)$ — *формула*

4. Никаких других *формул*, кроме определённых согласно 1–3, нет.

**Определение.** Вхождение $x$ в формулу $A$ называется *связанным* (или вхождением в качестве *связанной переменной*), если оно является вхождением в квантор $\forall x$ или $\exists x$ или в область действия квантора $\forall x$ или $\exists x$; в противном случае вхождение называется *свободным*.

**Определение.** *Подстановка терма $t$ вместо* переменной $x$ в терм или формулу $A$ состоит в одновременной замене каждого *свободного вхождения* $x$ в $A$ на вхождение $t$.

**Определение.** Будем говорить, что терм $t$ *свободен при свободных вхождениях* переменной $x$ в формулу $A(x)$, если никакое свободное вхождение $x$ в $A(x)$ не входит в область действия какого-нибудь квантора $\forall y$ или $\exists y$, где $y$ — переменная из $t$ (т.е. входящая в $t$).

# Постулаты формальной системы

**Dramatis personae**

В постулатах 1–8 $A, B$ и $C$ — формулы. В 9–13 $x$ — переменная, $A(x)$ — формула, $C$ — формула, не содержащая свободно $x$, а $t$ — терм, свободный для $x$ в $A(x)$.

## Группа A. Постулаты исчисления предикатов

### Группа A1. Постулаты исчисления высказываний

1a $A \supset (B \supset A)$

1b $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

4a $A \,\&\, B \supset A$

4b $A \,\&\, B \supset B$

5a $A \supset A \vee B$

5b $B \supset A \vee B$

2 $\dfrac{A, A \supset B}{B}$

3 $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$

6 $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

7 $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

8° $\neg\neg A \supset A$

### Группа A2. (Дополнительные) Постулаты исчисления предикатов

9 $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$

10 $\forall x A(x) \supset A(t)$

11 $A(t) \supset \exists x A(x)$

12 $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$

## Группа B. (Дополнительные) Постулаты арифметики

13 $A(0) \,\&\, \forall x (A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$

14 $a' = b' \supset a = b$

15 $\neg a' = 0$

16 $a = b \supset (a = c \supset b = c)$

17 $a = b \supset a' = b'$

18 $a + 0 = a$

19 $a + b' = (a + b)'$

20 $a \cdot 0 = 0$

21 $a \cdot b' = a \cdot b + a$

**Определение.** Формула является *аксиомой*, если она имеет форму одну из 1a, 1b, 3–8, 10, 11, 13 или она есть одна из 14–21.

**Определение.** Формула является *непосредственным следствием* (из) одной или двух других формул, если она имеет форму, указанную под чертой, тогда как другая (не) имеет(ют) форму(ы), указанную (не) над чертой в 2, 9 или 12.

**Определение.** Постулаты 2, 9 и 12 мы называем *правилами вывода*. Для любого (фиксированного) выбора $A$ и $B$ или $x$, $A(x)$ и $C$, подчинённого отмеченным выше условиям, формулы указанные над чертой, являются *посылкой* (*первой* и *второй посылкой* соответственно), а формула, указанная под чертой, является *заключением* применения правила вывода.

## Формальный вывод

**Определение.** Если дан перечень $D_1, \dots, D_l (l \geq 0)$ формул, то непустая конечная последовательность формул называется *формальным выводом из исходных формул* $D_1, \dots, D_l$, если каждая формула этой последовательности является или одной из формул $D_1, \dots, D_l$, или аксиомой, или непосредственным следствием из предыдущих формул последовательности. Вывод называется выводом *своей последней* формулы $E$, и эта формула называется *выводимой из* исходных формул (обозначается $D_1, \dots, D_l \vdash E$), а также *заключением* (или *конечной формулой*) вывода.

**Определение.** *Общие свойства* $\vdash$

- $\Gamma \vdash E$, если $E$ входит в список $\Gamma$
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta, \Gamma \vdash E$ для любого перечня $\Delta$ (Любая доказуемая выводима из любых исходных)
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где $\Delta$ получается из $\Gamma$ путём перестановки формул $\Gamma$ или опускания любых таких формул, которые тождественны с другими остающимися
- Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где $\Delta$ получается из $\Gamma$ опусканием любых формул $\Gamma$, которые являются доказуемыми или выводимыми из остающихся формул $\Gamma$.

**Теорема 1. О дедукции.** Для исчисления высказываний, если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

**Теорема 1. О дедукции.** Для исчисления предикатов (или полной арифметической формальной системы), если $\Gamma, A \vdash B$, причём все свободные переменные остаются фиксированными для последней исходной формулы, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

**Определение.** Переменная “$x$” приписанная к символу “$\vdash$” в качестве верхнего индекса отличает применение правила 9 или 12 по отношению к $x$ при построении результирующего вывода.

**Теорема 2.** В следующих правилах $A$, $B$ и $C$ или $x$, $A(x)$, $C$ и $t$ подчинены тем же условиям, что и в соответствующих постулатах, а $\Gamma$ или $\Gamma(x)$ есть любой список формул.

Для исчисления высказываний справедливы правила от “импликации” до “отрицания” включительно.

Для исчисления предикатов (или полной арифметической системы) справедливы все правила, при условии, что в каждом вспомогательном выводе связанные переменные остаются фиксированными для устраняемой формулы.

| | Введение | Удаление |
|---|---|---|
| Импликация | Если $\Gamma, A \vdash B$,<br>то $\Gamma \vdash A \supset B$ | $A, A \supset B \vdash B$<br>(modus ponens) |
| Конъюнкция | $A, B \vdash A \& B$ | $A \& B \vdash A$<br>$A \& B \vdash B$ |
| Дизъюнкция | $A \vdash A \vee B$<br>$B \vdash A \vee B$ | Если $\Gamma, A \vdash C$ и $\Gamma, B \vdash C$,<br>то $\Gamma, A \vee B \vdash C$ |
| Отрицание | Если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, A \vdash \neg B$,<br>то $\Gamma \vdash \neg A$ | $\neg\neg A \vdash A$ |
| Общность | $A(x) \vdash^x \forall x A(x)$ | $\forall x A(x) \vdash A(t)$ |
| Существование | $A(t) \vdash \exists x A(x)$ | Если $\Gamma(x), A(x) \vdash C$,<br>то $\Gamma(x), \exists x A(x) \vdash^x C$ |