Цель работы: изучение свойств дискретизации аналоговых сигналов; изучение методов Фурье-анализа аналоговых сигналов.

Порядок выполнения и результаты исследования

1. Выполнить аналитический расчет спектров для двух классов сигналов (периодических и непериодических). В отчете представить графики исходных сигналов и полученных спектров, а также описать их характерные особенности.

   1.1. Пилообразный сигнал:

Разложение функции $u(t)$ в ряд Фурье с произвольным периодом Tв общем виде:

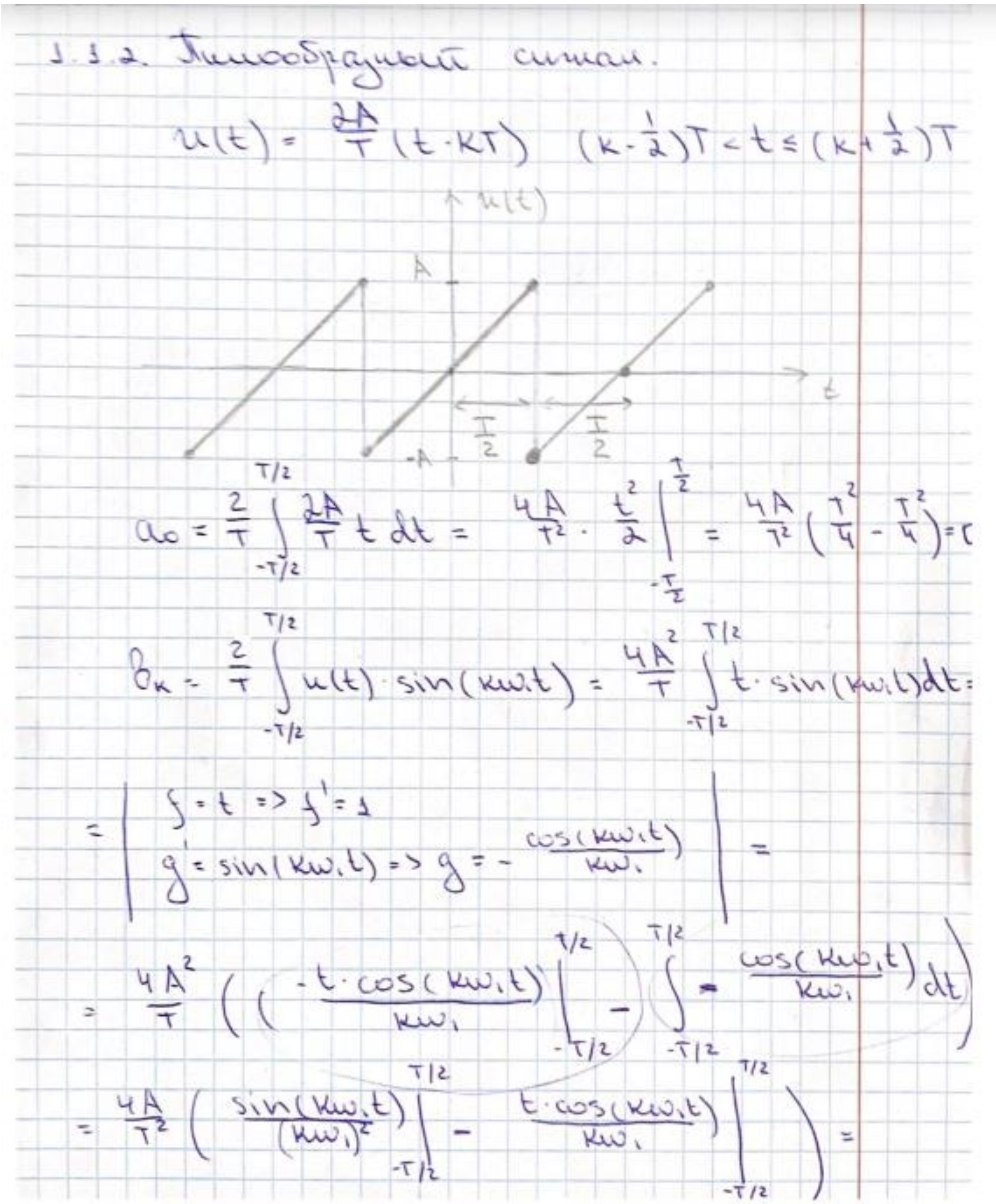
$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right))$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt$$

Амплитудный спектр будет вычисляться:

$$|\dot{C}_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}$$



1.1.2. Пилообразный сигнал.

$$u(t) = \frac{2A}{T}(t - kT) \quad (k-\tfrac{1}{2})T < t \le (k+\tfrac{1}{2})T$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T}\, t\, dt = \frac{4A}{T^2}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{4A}{T^2}\left(\frac{T^2}{4} - \frac{T^2}{4}\right) = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\sin(k\omega_1 t) = \frac{4A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t\cdot\sin(k\omega_1 t)\,dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} f = t \Rightarrow f' = 1 \\ g' = \sin(k\omega_1 t) \Rightarrow g = -\frac{\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{4A^2}{T}\left(\left(-\frac{t\cdot\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1}\right)\Big|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} -\frac{\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1}\,dt\right)$$

$$= \frac{4A}{T^2}\left(\frac{\sin(k\omega_1 t)}{(k\omega_1)^2}\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{t\cdot\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1}\Big|_{-T/2}^{T/2}\right) =$$

Рисунок 1 - Пилообразный сигнал

$$= \frac{8A}{T^2}\left(\frac{\sin\left(\frac{k\omega_1 T}{2}\right) + \sin\left(\frac{k\omega_1 T}{2}\right)}{(k\omega_1)^2}\right) - \frac{4A}{T^2}\cdot\left(\frac{T\cdot\cos\left(k\omega_1\cdot\frac{T}{2}\right) + T\cdot\cos\left(k\omega_1\cdot\frac{T}{2}\right)}{2k\omega_1}\right) =$$

$$= \frac{8A\overbrace{\sin(\pi k)}^{=0}}{T^2\cdot(k\omega_1)^2} - \frac{4A\cdot\cos(k\pi)}{T\cdot k\omega_1}$$

$$b_k = -\frac{4A\cdot\cos(k\pi)}{T\cdot k\omega_1} = -\frac{2A\cdot\cos(k\pi)}{\pi k}$$

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2A}{\pi}\cdot\cos(k\pi)\cdot\sin(k\omega_1 t) =$$

$$= -\frac{2A}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\cos(\pi k)\cdot\sin\left(\frac{k\cdot t\, 2\pi}{T}\right)$$

Рисунок 2 – Пилообразный сигнал

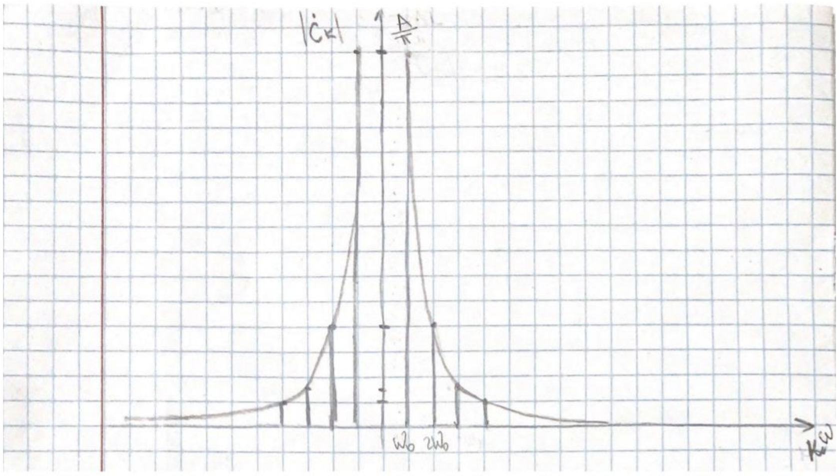


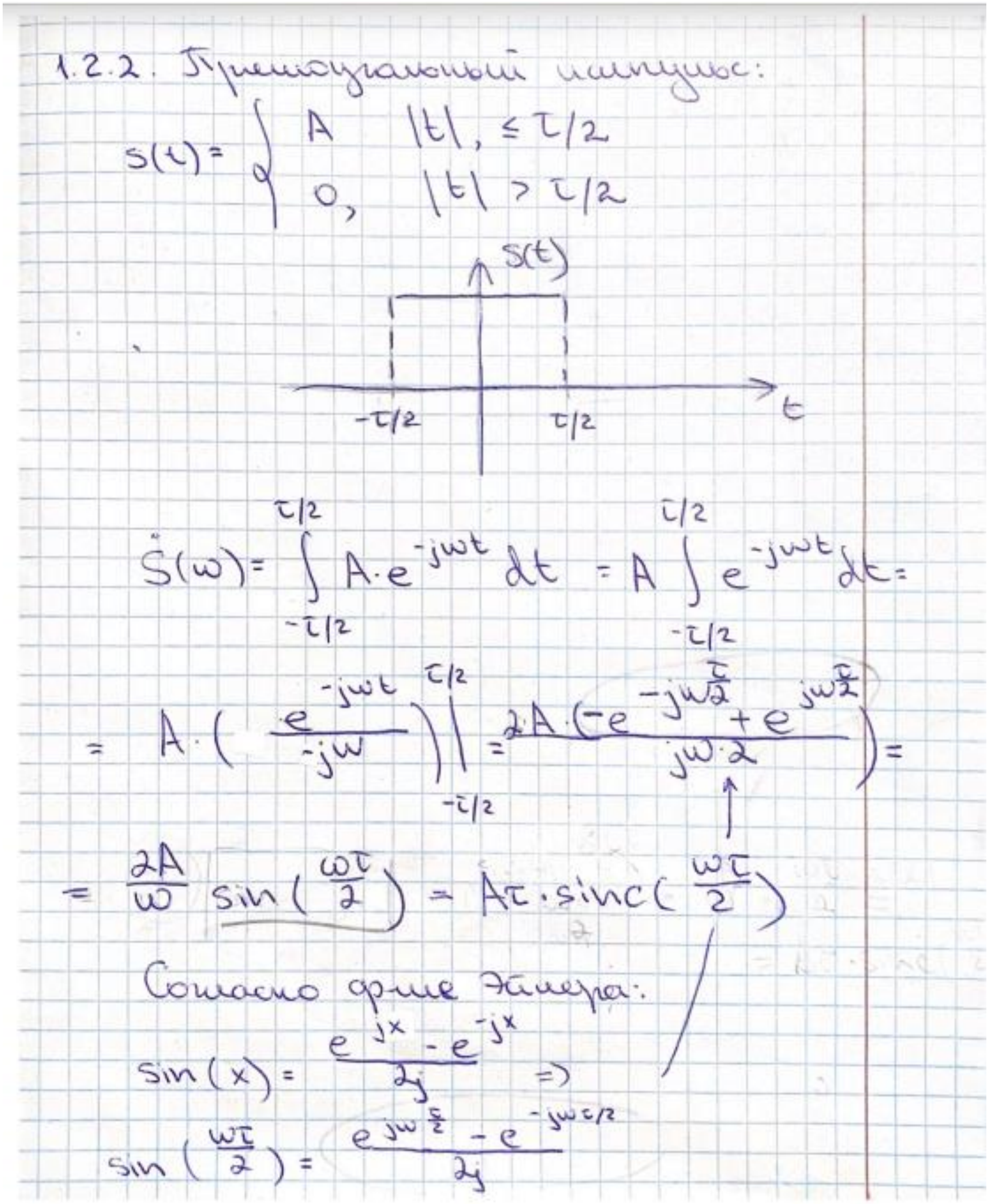
Рисунок 3 - Пилообразный сигнал

1.2. Прямоугольный импульс:

Преобразование Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-jwt}\, dt$$

Амплитудный спектр тогда будет равен $|\dot{S}(\omega)|$.



1.2.2. Прямоугольный импульс:

$$s(t) = \begin{cases} A & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot e^{-j\omega t}\, dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= A \cdot \left(\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right) \Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2A \cdot \left(-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{j\omega\frac{\tau}{2}}\right)}{j\omega \cdot 2} =$$

$$= \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Согласно формуле Эйлера:

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \Rightarrow$$

$$\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j}$$

Рисунок 4 - Прямоугольный импульс. Преобразование Фурье

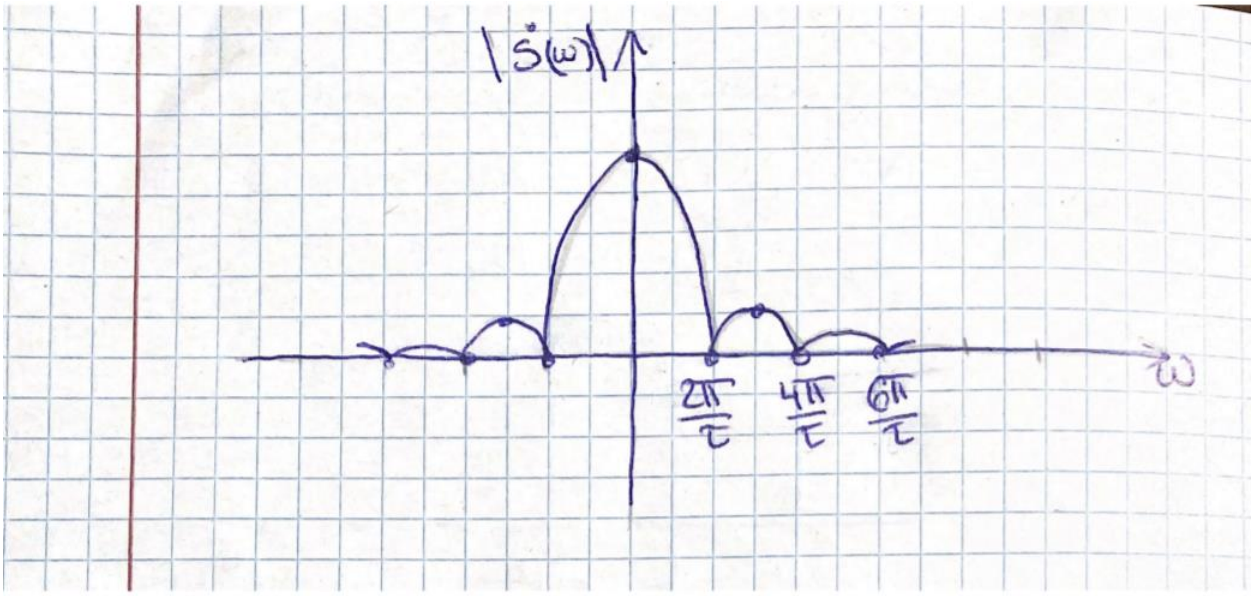


Рисунок 5 - Прямоугольный импульс. Амплитудный спектр

2. Проанализировать свойства двух функций $u_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ и $u_2(t) = \sin\,(2\pi f_2 t)$ на интервале $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$.
   2.1. Вычислить все значения функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на заданном интервале с шагом 10^{-3}.

Графики для функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с частотами $f_1 = 3$ и $f_2 = 2$ и периодом наблюдения $T = 1$ выглядят следующим образом:

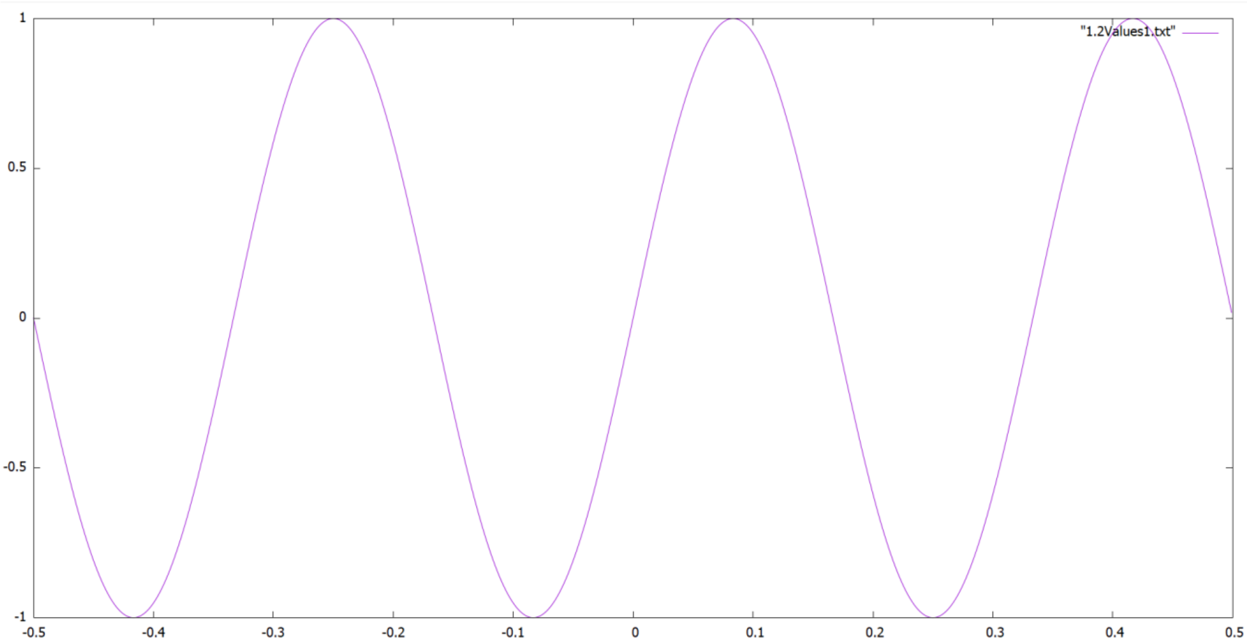


График 1 – $u_1(t)$

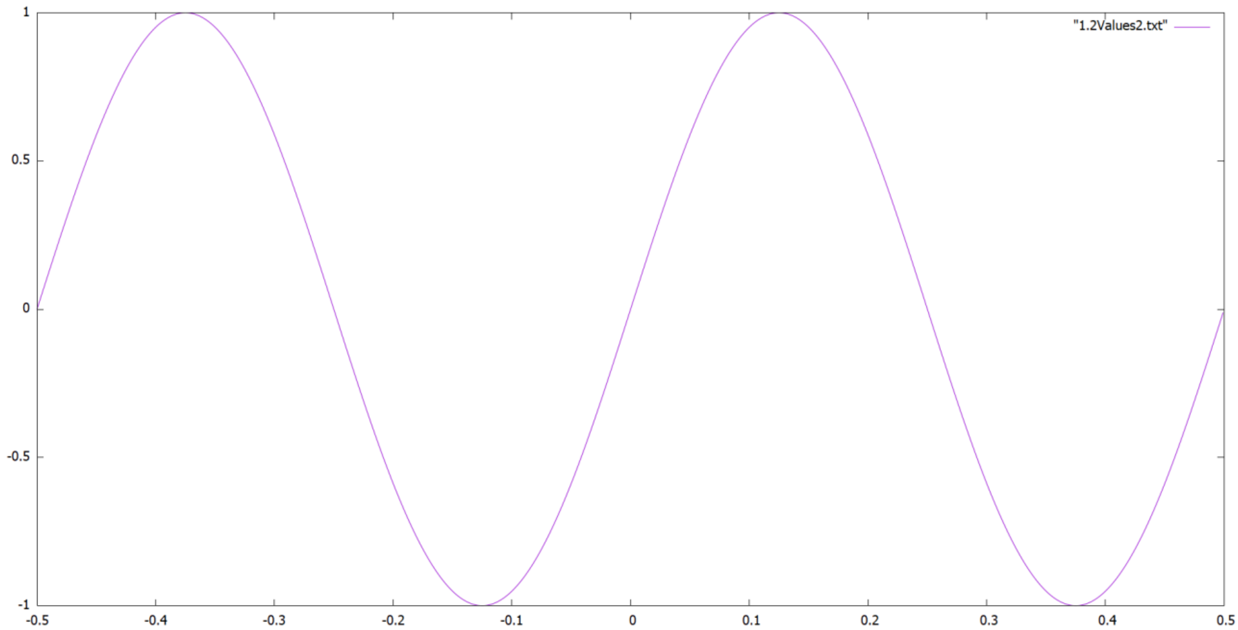


График 2 - $u_2(t)$

2.2. Вычислить приближенное значение скалярного произведения двух функций $u_1(t), u_2(t)$.

Скалярное произведение функций вычисляется по формуле:

$$(u_i, u_j) = \frac{1}{b-a}\int_a^b u_i(t)u_j(t)dt$$

Программная реализация осуществляет вычисление интеграла по методу прямоугольника. Пример вычисления приближенного значения скалярного произведения для функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с частотами $f_1 = 3$ и $f_2 = 2$ и периодом наблюдения $T = 1$ выглядит следующим образом:

```
Scalar = -1.63643e-16
```

Рисунок 6 - Скалярное произведение

2.3. Вычислить нормы обеих функций.

Норма функции вычисляется по формуле:

$$\|u\| = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b u^2(t)dt}$$

Программная реализация аналогично осуществляет вычисление интеграла по методу прямоугольника. Пример вычисления нормы для функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с частотами $f_1 = 3$ и $f_2 = 2$ и периодом наблюдения $T = 1$ выглядит следующим образом:

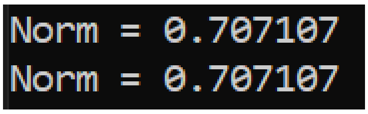


Рисунок 7 - Нормы

2.4. Определить, являются ли исходные функции ортогональными друг к другу.

Функции ортогональны в том случае, когда их скалярное произведение равно 0. Приближенное скалярное произведение заданных функций вычисляется программой и обрабатывается следующим образом: если полученное значение по абсолютной величине меньше 0.01, то функции считаются ортогональными, в противном случае нет. Пример вывода программы для функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с частотами $f_1 = 3$ и $f_2 = 2$ и периодом наблюдения $T = 1$ выглядит следующим образом:

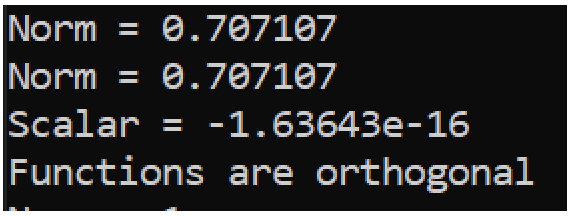


Рисунок 8 - Проверка на ортогональность

2.5. Как нужно изменить исходные функции, что они могли являться элементами ортонормированного базиса? Выполните данную модификацию и продемонстрируйте результат.

Функции образуют ортонормированный базис в том случае, если:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 0, \text{если } i \neq j \\ 1, \text{если } i = j \end{cases}$$

Для того, чтобы норма функции была равна 1 ее необходимо нормировать, то есть каждый отсчет разделить на норму функции. Пример работы программы для функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с частотами $f_1 = 3$ и $f_2 = 2$ с периодом наблюдения $T = 1$ представлен ниже:

```
Norm = 0.707107
Norm = 0.707107
Scalar = -1.63643e-16
Functions are orthogonal
Norm = 1
Norm = 1
Functions belong to an orthonormal basis
```

Рисунок 9 - Проверка на ортонормированность

2.6. Останутся ли исследуемые функции элементами ортонормированного базиса, если:

2.6.1. частоты f_1 и f_2 удвоятся;

2.6.2. интервал [−T/2; T/2] увеличится вдвое;

2.6.3. интервал [−T/2; T/2] уменьшится вдвое.

Важно отметить, что для того, чтобы выбранные функции образовывали ортонормированный базис необходимо выполнение следующего условия:

$$f_i T = l_i,$$

где l – любое целое число.

В таком случае, если $f_1 T = l_1$ и $f_2 T = l_2$, то при удвоении частот произведение так и останется целым числом. Выбранные функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с частотами $f_1 = 3$ и $f_2 = 2$ и периодом наблюдения $T = 1,$ как было установлено ранее, образуют ортонормированный базис. Убедимся в том, что функции останутся элементами ортонормированного базиса, при $f_1 = 6$ и $f_2 = 4$.

```
Norm = 0.707107
Norm = 0.707107
Scalar = -4.79715e-17
Functions are orthogonal
Norm = 1
Norm = 1
Functions belong to an orthonormal basis
```

Рисунок 10 - Проверка на ортонормированность

Аналогично и при увеличении интервала [−T/2; T/2] вдвое. Убедимся в том, что функции останутся элементами ортонормированного базиса, при $f_1 = 3$, $f_2 = 2$ и $T = 2$.

```
Norm = 0.707107
Norm = 0.707107
Scalar = 5.10767e-17
Functions are orthogonal
Norm = 1
Norm = 1
Functions belong to an orthonormal basis
```

Рисунок 11 - Проверка на ортонормированность

Однако в случае уменьшения интервала [−T/2; T/2] вдвое не всегда функции останутся элементами ортонормированного базиса, т.к. при уменьшении вдвое fT, l_i также уменьшится вдвое, а значит не всегда при этом останется целым числом. Легко убедиться в этом на примере $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с частотами $f_1 = 3$ и $f_2 = 2$ и периодом наблюдения $T = 0.5$.

```
Norm = 0.707107
Norm = 0.707107
Scalar = 0.254652
Functions are not orthogonal
```

Рисунок 12 - Проверка на ортонормированность

3. Исследовать процедуру дискретизации синусоидального сигнала $u(t)$с частотой F Гц. Длительность наблюдения сигнала $\frac{10}{F}$ секунд. Написать программу, которая позволит:
   3.1. Сформировать выборки отсчетов $u^{(i)}[n]$ (результаты дискретизации) исследуемого сигнала с частотами дискретизации $f_d^{(i)}$равными:
      3.1.1. $1.5F$ Гц,
      3.1.2. $1.75F$ Гц,
      3.1.3. $2F$ Гц,
      3.1.4. $3F$ Гц,
      3.1.5. $1000F$ Гц.

   3.2. Применить ряд Котельникова для восстановления исходного сигнала по его дискретным отсчетам с помощью формулы.

Теорема Котельникова звучит следующим образом: пусть аналоговый сигнал $u(t)$ имеет ограниченный частотой f_c спектр, т.е. $U(f) = 0$ при $|f| > f_c$. Тогда восстановление исходного аналогового сигнала возможно, если равномерная дискретизация выполняется с частотой f_d, минимум вдвое превышающую частоту f_s:

$$f_d > 2f_c$$

Для точного восстановления сигнала, описываемого непрерывной функцией $u(t)$, спектр которого ограничен частотой f_c, достаточно формировать дискретные отсчеты $u[n]$ с периодом $T_d < \frac{1}{f_c}$

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u(nT_d) sinc(\pi(\frac{t}{T_d} - n))$$

где $sinc(\pi(\frac{t}{T_d} - n))$ – ряд Котельникова.

3.3. Вывести графики исходного сигнала и восстановленных сигналов $u^{(i)}(t)$, где i — индекс частоты дискретизации. Сделать выводы о точности восстановления исследуемого сигнала $u(t)$ при использовании различных частот дискретизации.

В качестве исходного сигнала используется $u(t) = \sin(2\pi ft)$ с $f = 10$ и $T = 1$. Значения функции считаются на интервале $[0; T]$ с шагом $dt = 0{,}001$. Графики исходного и восстановленного сигналов представлены ниже.

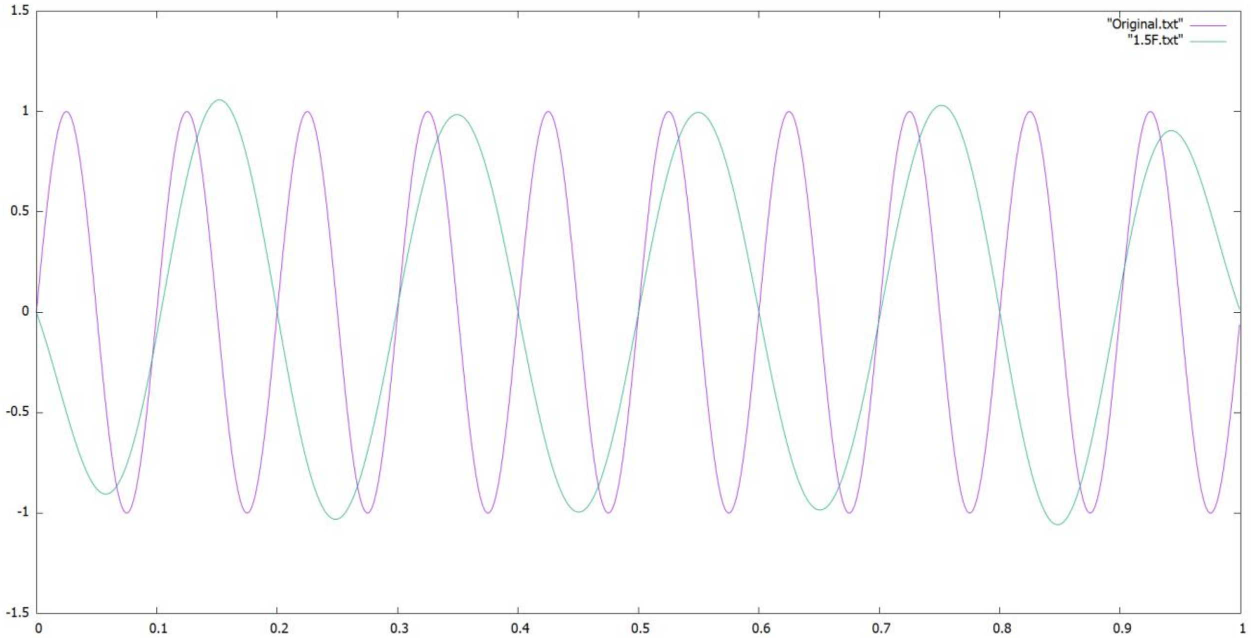


График 3 - Восстановление сигнала с частотой 1.5F

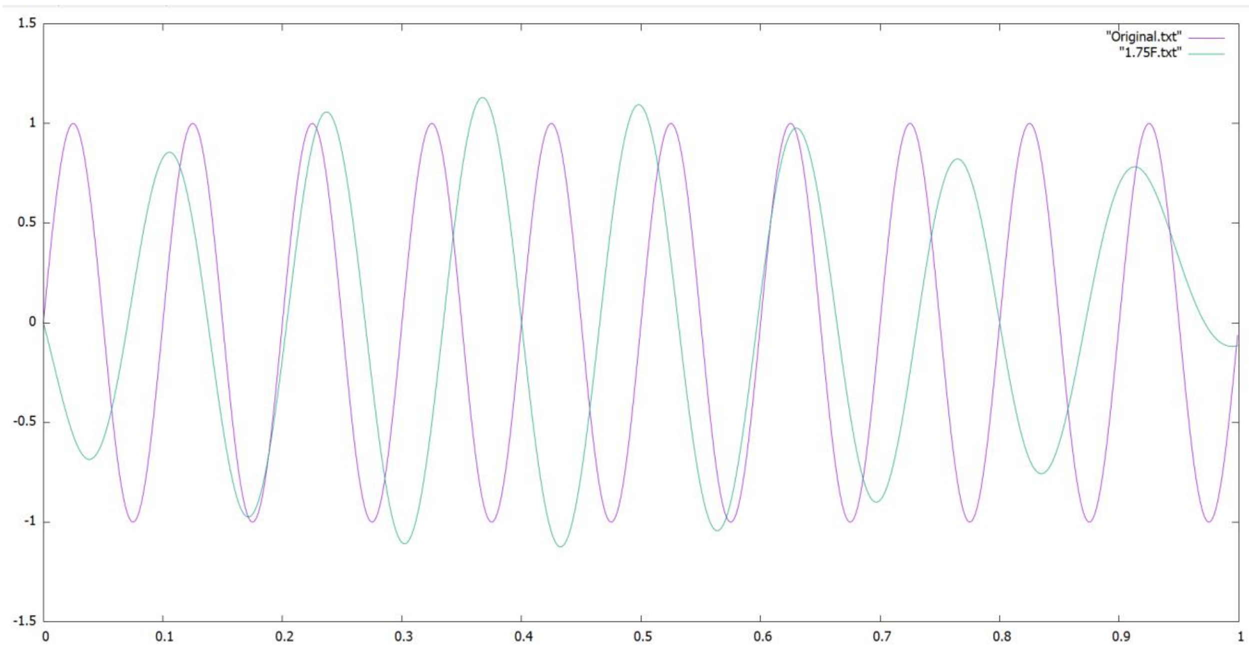


График 4 - Восстановление сигнала с частотой 1.75F

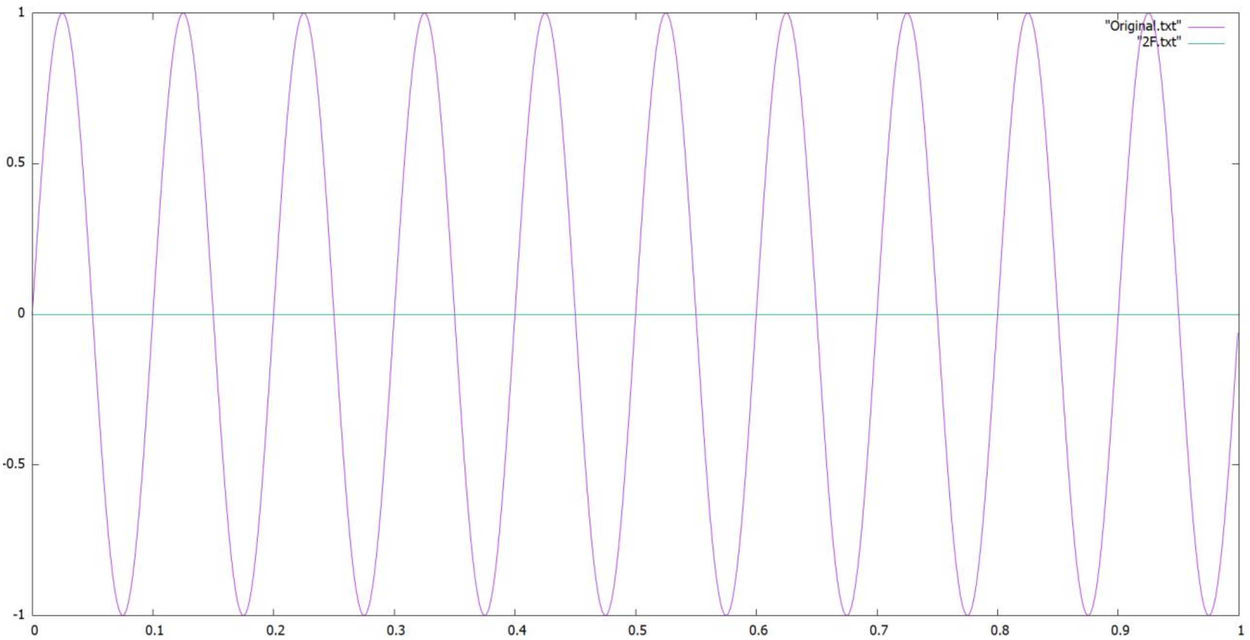


График 5 - Восстановление сигнала с частотой 2F

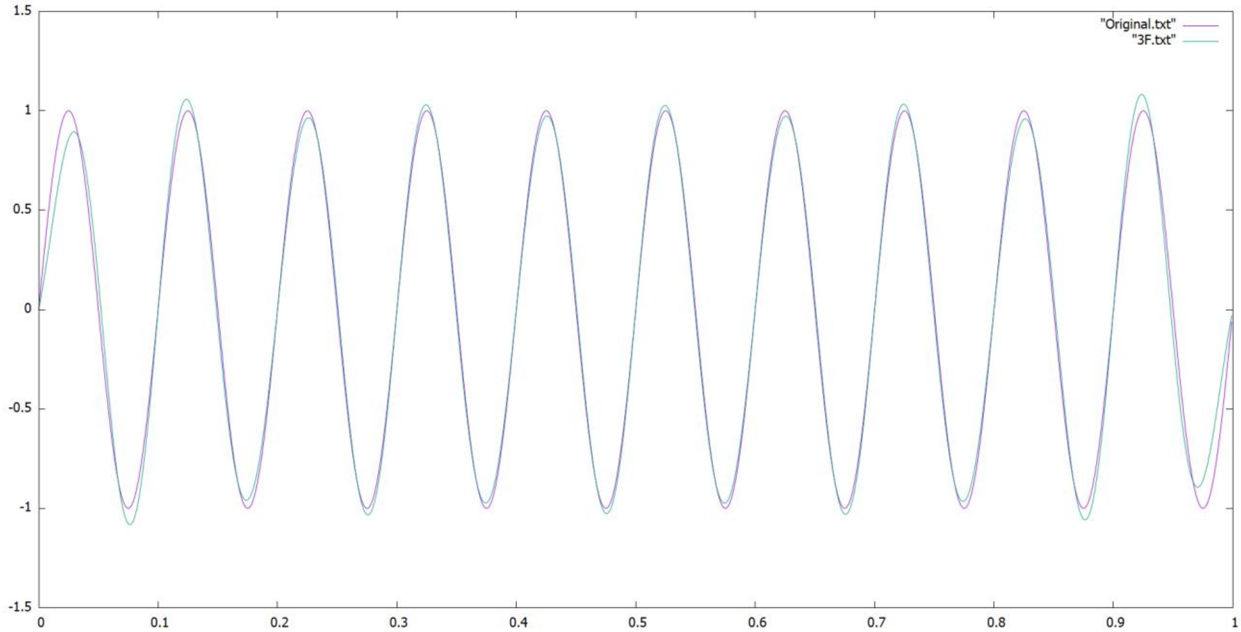


График 6 - Восстановление сигнала с частотой 3F

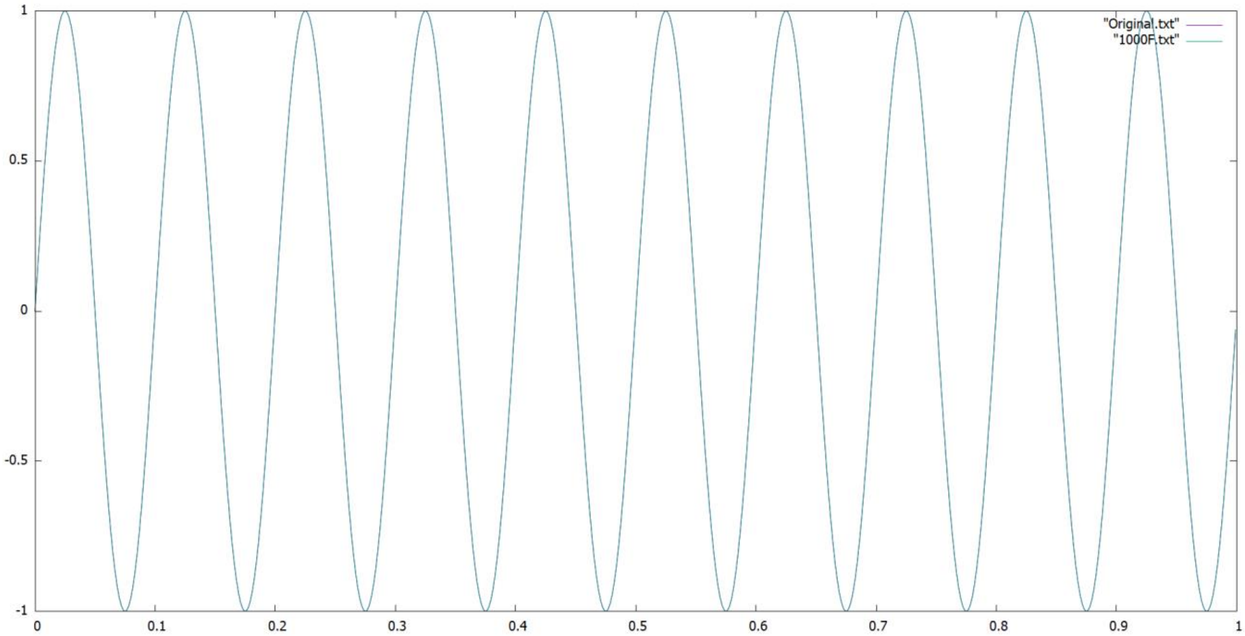


График 7 - Восстановление сигнала с частотой 1000F

На полученных графиках видно, что при частотах дискретизации $1.5F, 1.75\,F$ и $2F$, восстановленный сигнал не совпадает с исходным, объясняется это тем, что выбранные частоты меньше или равны $2F$, что нарушает условия выполнения теоремы Котельникова.

4. Реализовать процедуру передискретизации изображения с помощью интерполяционного ряда Котельникова. Формат исходного изображения — BMP24, разрешение исходного изображения $W \times H$ пикселей. Результатом передискретизации будет изображение размером $nW \times mH$. Выполните передискретизацию с различными комбинациями значений m и n:
   4.1. m > 1, n > 1
   4.2. m < 1, n > 1
   4.3. m > 1, n < 1
   4.4. m < 1, n < 1

Исходная картинка имеет вид:

Результат работы программы для различных значений m и n представлен

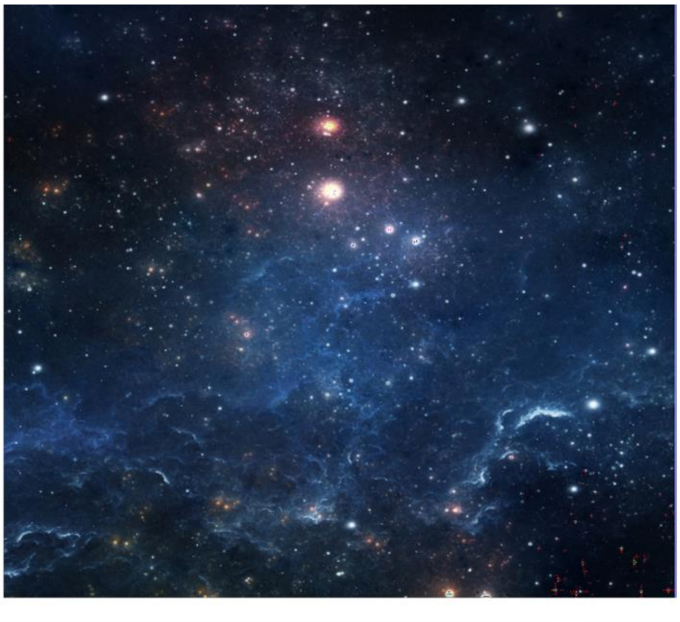


Рисунок 13 - $1.5W \times 1.7H$

Рисунок 14 - $0.7W \times 1.5H$

Рисунок 15 - $1.4W \times 0.6H$

Рисунок 16 - $0.17W \times 0.37H$

Изображения при передискретизации на краях получились с искажениями. Это объясняется тем, что интерполяционный ряд Котельникова представляет сигнал непрерывным и сумма должна быть бесконечной, но в реальности мы сделали ее конечной, поэтому это привело усечению и искажению на краях изображения.

Выводы: в результате исследования изучила свойства дискретизации аналоговых сигналов и методов Фурье-анализа аналоговых сигналов. В ходе выполнения работы выполнила аналитический расчет спектров для двух классов сигналов (периодических и непериодических), проанализировала свойства двух синусоид на выбранном интервале, исследовала процедуру дискретизации синусоидального сигнала и восстановления с использованием ряда Котельникова, реализовала процедуру передискретизации изображения в формате BMP с помощью интерполяционного ряда Котельникова.