1 Цель работы

Выполнить программную реализацию генератора непрерывной случайной величины с заданным законом распределения.

2 Построение распределений на основе БСВ

2.1 Экспоненциальное распределение

Генератор независимых значений экспоненциальной СВ

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(z)$$

где z — БСВ и $\lambda > 0$.

Теоретические значения математического ожидания и дисперсии соответственно равны

$$M[x] = \frac{1}{\lambda}, D[x] = \frac{1}{\lambda^2}$$

В ходе моделирования было получено 2048 значений, математическое ожидание и дисперсия которых равны

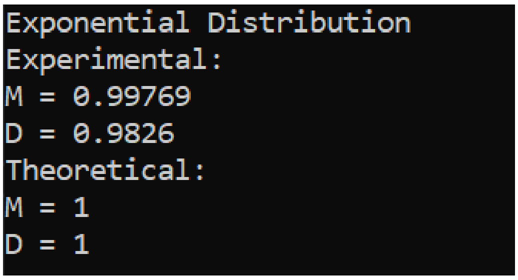


Рисунок 1 - Экспоненциальное распределение

Частотная гистограмма имеет вид

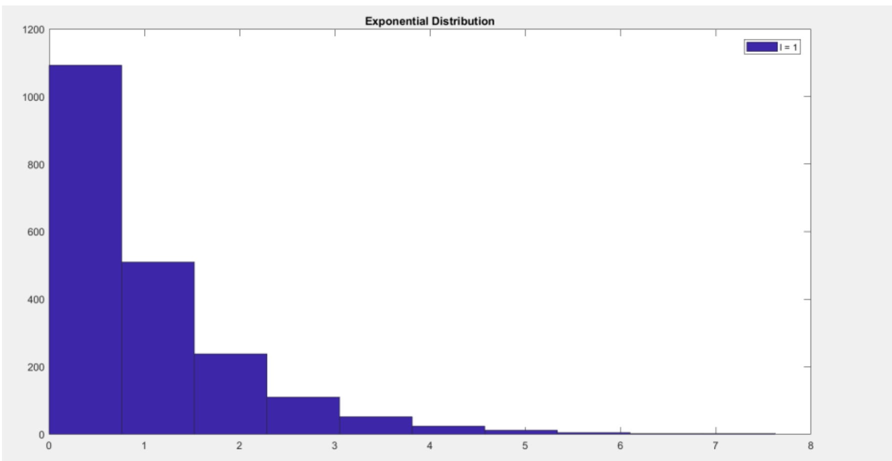


Рисунок 2 - Гистограмма экспоненциального распределения

2.2 Равномерное распределение

Генератор независимых значений равномерной СВ

$$x = A + (B - A)z$$

где z — БСВ и $A, B > 0$ и задают диапазон значений $[A; B]$.

Теоретические значения математического ожидания и дисперсии соответственно равны

$$M[x] = A + \frac{B - A}{2}, D[x] = \frac{(B - A)^2}{12}$$

В ходе моделирования было получено 2048 значений, математическое ожидание и дисперсия которых равны

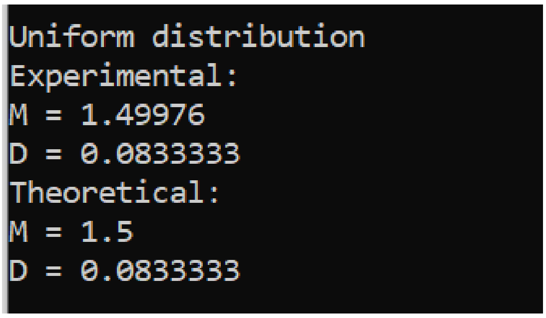


Рисунок 3 - Равномерное распределение

Частотная гистограмма имеет вид

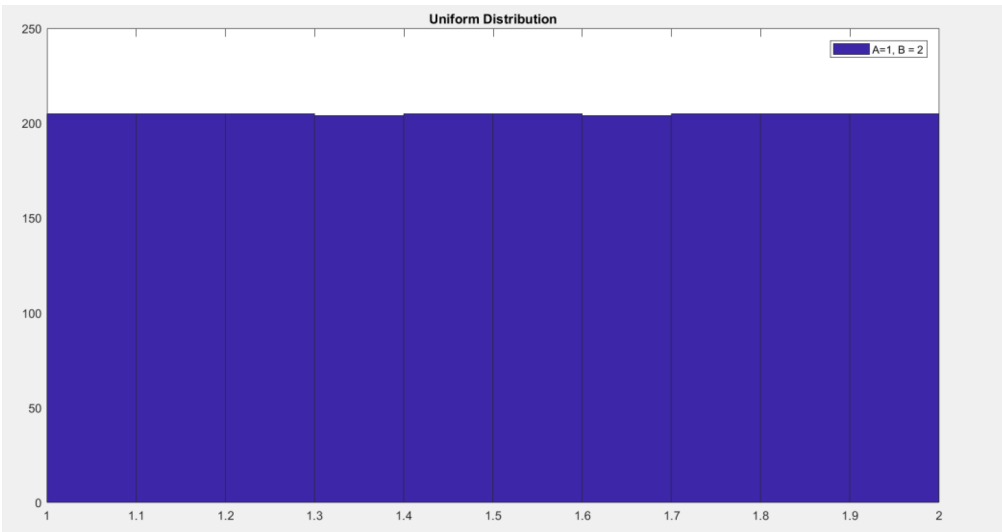


Рисунок 4 - Гистограмма равномерного распределения

2.3 Распределение Эрланга

Генератор независимых значений эрланговской СВ

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(z_1 \dots z_k)$$

где z – БСВ, порядок $k \geq 1, \lambda > 0$ и $z_i, i = [1; k]$ – независимые реализации БСВ.

Теоретические значения математического ожидания и дисперсии соответственно равны

$$M[x] = \frac{k}{\lambda}, D[x] = \frac{k}{\lambda^2}$$

В ходе моделирования было получено 2048 значений, математическое ожидание и дисперсия которых равны

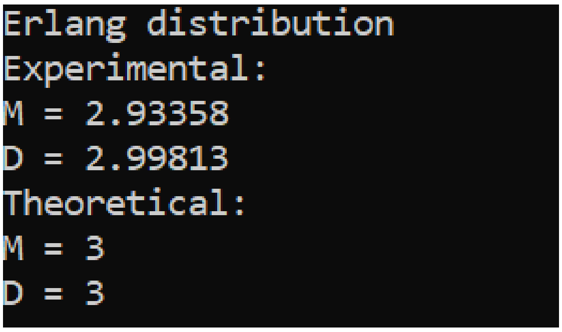


Рисунок 5 - Эрланговское распределение

Частотная гистограмма имеет вид

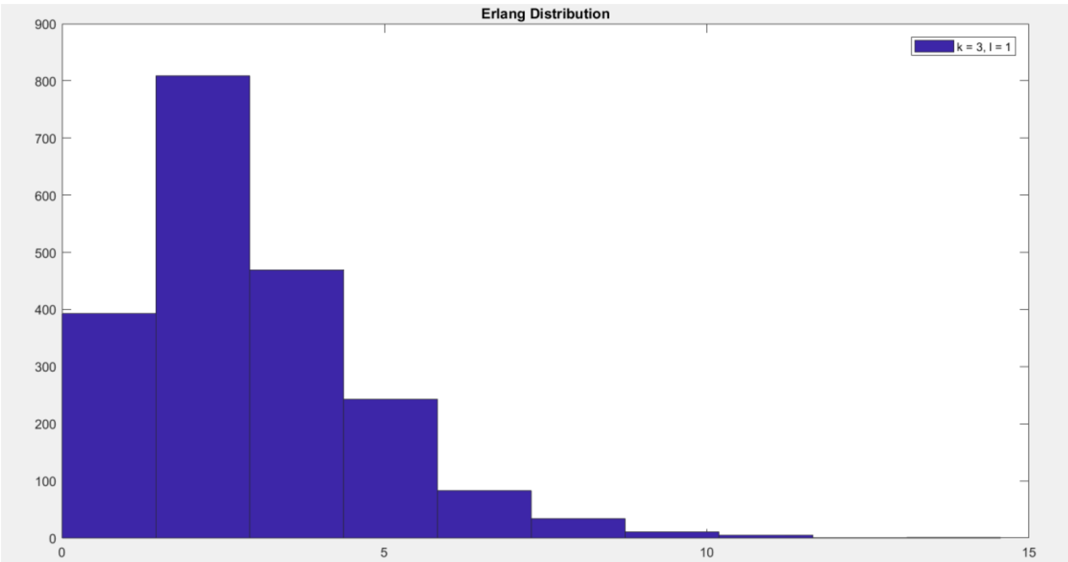


Рисунок 6 - Гистограмма эрланговского распределения

2.4 Нормальное распределение

Для моделирования непрерывной СВ с нормальным законом распределения воспользуемся методом Бокса и Мюллера, который позволяет получить два независимых значения x1 и x2 стандартной нормальной СВ из двух независимых значений z1 и z2 базовой случайной величины по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{-2\ln(z_1)}\ \sin(2\pi z_2) \\ x_2 = \sqrt{-2\ln(z_1)}\ \cos(2\pi z_2) \end{cases}$$

где z_1, z_2 — независимые БСВ.

Теоретические значения математического ожидания и дисперсии соответственно равны

$$M[x] = m,\ D[x] = \sigma^2$$

В ходе моделирования было получено 2048 значений, математическое ожидание и дисперсия которых равны

```
Normal distribution
Experimental:
M = 0.0246789
D = 0.983323
Theoretical:
M = 0
D = 1
```

Рисунок 7 – Нормальное распределение

Частотная гистограмма имеет вид

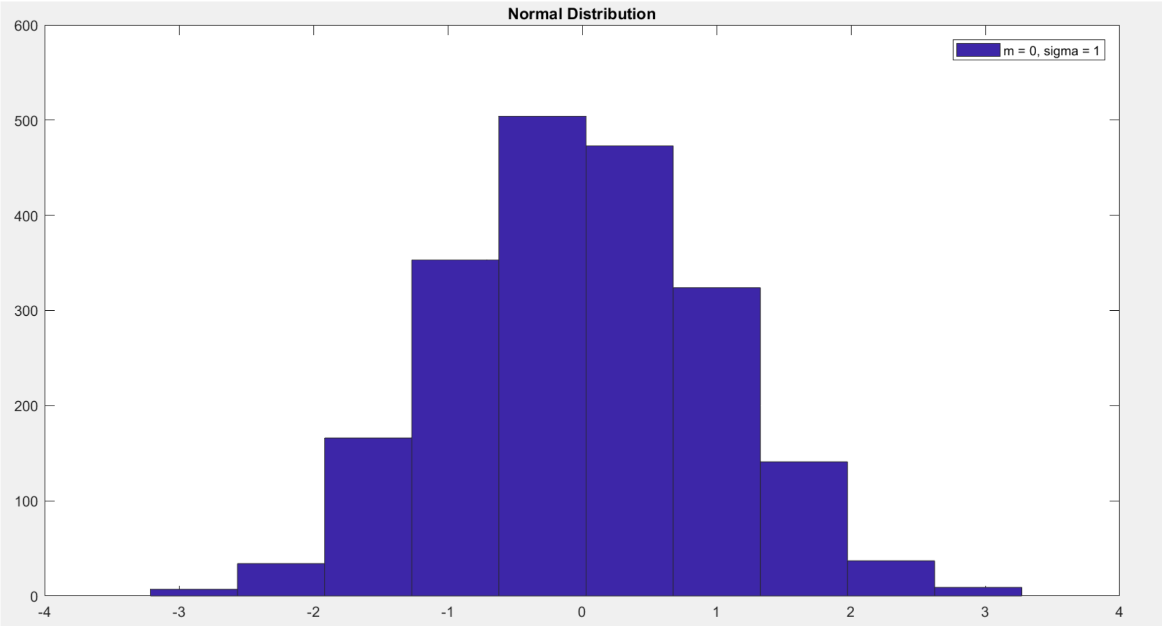


Рисунок 8 - Гистограмма нормального распределения

2.5 Бета-распределение

Генератор независимых значений СВ

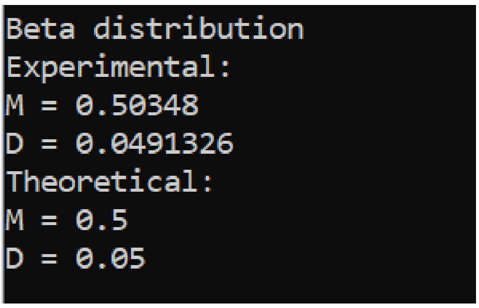
$$x = \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\ln(z_k)}{p+k-1}\right)$$

где z – БСВ, порядок p, m – целые и $z_k, k = [1; m]$ – независимые реализации БСВ.

Теоретические значения математического ожидания и дисперсии соответственно равны

$$M[x] = \frac{p}{p+m}, D[x] = \frac{pm}{(p+m)^2(p+m+1)}$$

В ходе моделирования было получено 2048 значений, математическое ожидание и дисперсия которых равны



```
Beta distribution
Experimental:
M = 0.50348
D = 0.0491326
Theoretical:
M = 0.5
D = 0.05
```

Рисунок 9 - Бета-распределение

Частотная гистограмма имеет вид

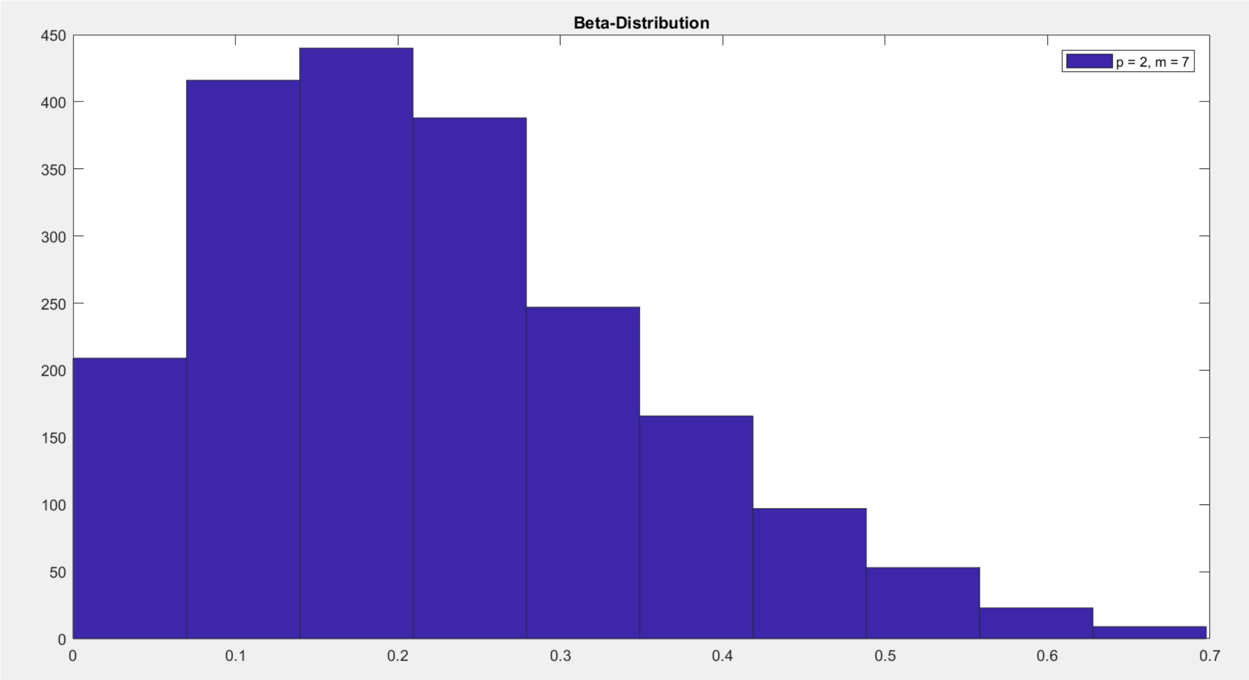


Рисунок 10 - Гистограмма бета-распределения

3 Выводы

В ходе выполнения работы теоретические и экспериментальные значения математического ожидания и дисперсии каждого из распределений очень близки, а гистограммы частот имеют вид согласно распределению, отсюда можно сделать вывод о корректной работе программы и генерируемых случайных величин.

Экспоненциальное распределение применяется в описании социальных явлений, в экономике, в теории массового обслуживания, в транспортной логистике — везде, где необходимо моделировать поток событий. Экспоненциальное распределение вместе с распределением Пуассона составляют математическую основу теории надёжности.

Равномерное распределение является наиболее простым и, следовательно, при его использовании заметно упрощаются многие задачи анализа. Известно также, что равномерным распределением достаточно хорошо описываются многие реальные физические процессы (случайные пилообразные колебания, фазовые флюктуации сигналов, погрешности аналого-цифровых преобразований). Кроме того, модели с равномерным распределением часто используются и в качестве простых априорных допущений о неизвестных распределениях исследуемых процессов или отдельных параметров.

Распределение Эрланга используется в теории очередей для записи распределения между, например прибытием заявок, а также в обеспечении качества для описания времени жизни. В центрах обработки вызовов это распределение используется для планирования развертывания персонала, чтобы определить необходимое количество агентов на основе ожидаемого объема вызовов во временном интервале, моделирование длительности интервалов между телефонными звонками.

Нормальное распределение – это наиболее распространенный тип распределения, используемый в техническом анализе фондового рынка и в других типах статистического анализа.

Бета-распределение применялось для моделирования поведения случайных величин, ограниченных интервалами конечной длины, в самых разных дисциплинах. Бета-распределение часто используется для описания процессов, обладающих естественными нижним и верхним пределами.