

Исходные данные

Вариант № 4.

Целевая функция: $z = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \rightarrow \max$

Ограничения:

$$2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16 \quad (1)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \quad (2)$$

$$-x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24 \quad (3)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad (4)$$

Решение симплекс методом

Начальная симплекс таблица:

Базис	z	x ₁	x ₂	x ₄	x ₅	x ₃	x ₆	Решение
z	1	-2	-3	1	0	0	0	0
x ₅	0	2	-1	-2	1	0	0	16
x ₃	0	3	2	-3	0	1	0	18
x ₆	0	-1	3	4	0	0	1	24

Вводим: x₂

Выводим: x₆

Базис	Коэффициент	Решение	Отношение (точка пересечения)
x ₅	-1	16	$\frac{16}{-1} = -16$ (не подходит)
x ₃	2	18	$\frac{18}{2} = 9$
x ₆	3	24	$\frac{24}{3} = 8$ (min)

Пересчитываем симплекс таблицу для нового базисного решения:

Базис	z	x ₁	x ₂	x ₄	x ₅	x ₃	x ₆	Решение
z	1	-3	0	13	0	0	1	24
x ₅	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	24
x ₃	0	$\frac{11}{3}$	0	$-\frac{17}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	2
x ₂	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	8

Вводим: x₁

Выводим: x_3

Базис	Коэффициент	Решение	Отношение (точка пересечения)
x_5	$\frac{5}{3}$	24	$\frac{24 * 3}{5}$
x_3	$\frac{11}{3}$	2	$\frac{2 * 3}{11} (min)$
x_2	$-\frac{1}{3}$	8	не подходит

Пересчитываем симплекс таблицу для нового базисного решения:

Базис	z	x_1	x_2	x_4	x_5	x_3	x_6	Решение
z	1	0	0	$\frac{92}{11}$	0	$\frac{9}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{282}{11} = 25,6363...$
x_5	0	0	0	$\frac{83}{33}$	1	$-\frac{15}{33}$	$\frac{21}{33}$	$\frac{762}{33}$
x_1	0	1	0	$-\frac{17}{11}$	0	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{6}{11}$
x_2	0	0	1	$\frac{27}{33}$	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{90}{11}$

Все коэффициенты в строке z положительные, значит решение оптимальное:

$$z = \frac{282}{11}, \quad x_1 = \frac{6}{11}, \quad x_2 = \frac{90}{11}$$

x_3, x_4, x_6 – не в базисе, значит они равны 0 и являются дефицитными ресурсами.

(1) – несвязное ограничение

Двойственная задача

Целевая функция: $z = 16y_1 + 18y_2 + 24y_3 \rightarrow min$

Ограничения:

$$2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 2 \quad (1)$$

$$-y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \quad (2)$$

$$-2y_1 - 3y_2 + 4y_3 \geq -1 \quad (3)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad (4)$$

Оптимальные значения двойственных переменных:

$$(y_1 \ y_2 \ y_3) = (0 \ 2 \ 3) * \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{11} & \frac{21}{33} \\ 0 & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix} = \left(0 \ \frac{9}{11} \ \frac{23}{11}\right)$$

Анализ чувствительности

Интервалы допустимых изменений для коэффициентов правых частей ограничений

– Для (1):

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{11} & \frac{21}{33} \\ 0 & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 16 + D_1 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$1 * (16 + D_1) - \frac{15}{11} * 18 + \frac{21}{33} * 24 \geq 0$$
$$D_1 \geq -\frac{222}{33} - \text{так как } C_1 = 16$$

$$C_1 \geq \frac{102}{11}$$

– Для (2):

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{11} & \frac{21}{33} \\ 0 & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 16 \\ 18 + D_2 \\ 24 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$0 * 16 + \frac{3}{11} * (18 + D_2) - \frac{2}{11} * 24 \geq 0$$
$$D_2 \geq -2, \text{ так как } C_2 = 18$$

$$C_2 \geq 16$$

– Для (3):

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{11} & \frac{21}{33} \\ 0 & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 24 + D_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$0 * 16 + \frac{3}{11} * (18 + D_3) - \frac{2}{11} * 24 \geq 0$$
$$-\frac{222}{21} \leq D_3 \leq 3, \text{ так как } C_3 = 24$$

$$\frac{282}{21} \leq C_3 \leq 27$$

Изменение коэффициентов целевой функции:

– Для x_5 :

$$(y_1 \quad y_2 \quad y_3) = (0 + d_5 \quad 2 \quad 3) * \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{11} & \frac{21}{33} \\ 0 & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix} = (d_5 \quad -15d_5 + 9 \quad 21d_5 + 69)$$

Коэффициенты в z-строке для небазисных переменных:

$$x_3: y_2 \geq 0; -15d_5 + 9 \geq 0; d_5 \leq \frac{3}{5}$$

$$x_6: y_3 \geq 0; 21d_5 + 69 \geq 0; d_5 \geq -\frac{23}{7}$$

$$x_6: -2y_1 - 3y_2 + 4y_3 \geq -1; d_5 \geq -\frac{249}{127}$$

$$-\frac{249}{127} \leq d_5 \leq \frac{3}{5}, \text{ т. к. } c_5 = 0 + d_5$$

$$-\frac{249}{127} \leq c_5 \leq \frac{3}{5}$$

– Для x_1 :

$$(y_1 \ y_2 \ y_3) = (0 \ 2 + d_1 \ 3) * \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{11} & \frac{21}{33} \\ 0 & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix} = (0 \ -15d_1 - 9 \ -2d_1 + 5)$$

Коэффициенты в z-строке для небазисных переменных:

$$x_3: y_2 \geq 0; -15d_1 - 9 \geq 0; d_1 \leq -\frac{3}{5}$$

$$x_6: y_3 \geq 0; -2d_1 + 5 \geq 0; d_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$x_6: -2y_1 - 3y_2 + 4y_3 \geq -1; d_1 \geq -\frac{47}{37}$$

$$-\frac{47}{37} \leq d_1 \leq -\frac{3}{5}, \text{ т. к. } c_1 = 2 + d_1$$

$$\frac{5}{37} \leq c_1 \leq \frac{7}{5}$$

– Для x_2 :

$$(y_1 \ y_2 \ y_3) = (0 \ 2 \ 3 + d_2) * \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{11} & \frac{21}{33} \\ 0 & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix} = (0 \ d_2 + 9 \ 9d_2 + 23)$$

Коэффициенты в z-строке для небазисных переменных:

$$x_3: y_2 \geq 0; d_2 + 9 \geq 0; d_2 \geq -9$$

$$x_6: y_3 \geq 0; 9d_2 + 23 \geq 0; d_2 \geq -\frac{23}{9}$$

$$x_6: -2y_1 - 3y_2 + 4y_3 \geq -1; d_2 \geq -\frac{65}{33}$$

$$-\frac{65}{33} \leq d_2, \text{ т. к. } c_2 = 3 + d_2$$

$$\frac{34}{33} \leq c_2$$

Решение в Excel

A	B	C	D	E	F	G	H	I
x1	x2	x3	x4	x5	x6			
0.545455	8.181818	0	0	23.09091	0			
2	-1	0	-2	1	0	16 =		16
3	2	1	-3	0	0	18 =		18
-1	3	0	4	0	1	24 =		24
Целевая функция								
2	3	0	-1	0	0	=	25.6364	

y1	y2	y3			
0	0.818182	0.454545			
2	3	-1	2	>=	2
-1	2	3	3	>=	3
0	1	0	0.818182	>=	0
-2	-3	4	-0.63636	>=	-1
1	0	0	0	>=	0
0	0	1	0.454545	>=	0
Целевая функция					
16	18	24	=	25.63636	

Рисунок 1 – Исходная таблица

Варианты решения

		Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
\$A\$2	x1	0.545454545	0	2	0.235294118	3
\$B\$2	x2	8.181818182	0	3	1E+30	0.444444444
\$C\$2	x3	0	-0.818181818	0	0.818181818	1E+30
\$D\$2	x4	0	-0.363636364	-1	0.363636364	1E+30
\$E\$2	x5	23.09090909	0	0	1.8	0.19047619
\$F\$2	x6	0	-0.454545455	0	0.454545455	1E+30

Ограничения

		Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
\$G\$3	s1	16	0	16	1E+30	23.09090909
\$G\$4	s2	18	0.818181818	18	50.8	2
\$G\$5	s3	24	0.454545455	24	3	30

Рисунок 2 - Отчет об устойчивости прямой задачи

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$A\$2	y1	0	0	16	1E+30	23.09090909
\$B\$2	y2	0.818181818	0	18	50.8	2
\$C\$2	y3	0.454545455	0	24	3	30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$G\$3	s1	2	0.545454545	2	0.235294118	3
\$G\$4	s2	3	8.181818182	3	1E+30	0.444444444
\$G\$5	s3	0.818181818	0	0	0.818181818	1E+30
\$G\$6	s4	-0.636363636	0	-1	0.363636364	1E+30
\$G\$7	s5	0	23.09090909	0	1.8	0
\$G\$8	s6	0.454545455	0	0	0.454545455	1E+30

Рисунок 3 – Отчет об устойчивости двойственной задачи

Вывод

Полученные результаты совпали с результатами, полученными в Excel.