1. **Цель работы:**

Исследование дискретных сигналов частотной области. Вычисление амплитудных спектры всех сигналов, построение графиков, определение ширины полосы частот, которую занимает каждый сигналом и множеством всех сигналов. Вычисление спектра последовательности сигналов (для нескольких различных последовательностей различной длины), построение графиков; сравнить полученные спектры со спектрами одиночных сигналов, объяснить различие. Определить ширину полосы частот, занимаемой различными последовательностями сигналов, сравнить эти значения между собой.

2. **Исходные данные:**

Вариант 3.6, Квадратурно амплитудная модуляция.

$f_0 = 1800$ Гц;

$V_{мод} = 1200$ Бод;

$V_{инф} = 4800$ бит/с;

f_0 – несущая частота, $V_{мод}$ – скорость модуляции, $V_{инф}$ – скорость информации.

3. **Выражения спектра отрезка гармоники:**

3.1 Формула:

$$S(f) = \frac{AT}{2}\Big(sinc\big((f - f_0)T\big) + sinc\big((f + f_0)T\big)\Big)\, e^{-j2\pi f t}$$

Пусть задан сигнал:

$$s(t) = \begin{cases} Acos(2\pi f_0 t), 0 < t < T \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Допустим $s(t) = g(t)c(t)$, где $g(t)$ = A - некоторая произвольная функция (огибающая,) $c(t) = \cos\,(2\pi f_0 t)$ – гармонический сигнал.

Расчёт спектральной функции:

$S(f) = G(f)C(f)e^{-j2\pi ft}$, где

$$C(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

тогда

$$S(f) = G(f)C(f)e^{-j2\pi ft} = G(f)\frac{1}{2}\Big(\big(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\big)\Big)e^{-j2\pi ft}$$
$$= \frac{1}{2}\big(G(f - f_0) + G(f + f_0)\big)e^{-j2\pi ft}$$

Теперь рассмотрим $g(t) = A$:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi fT}dt = A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi fT}dt = -\frac{A}{j2\pi f}e^{-j2\pi fT}\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$
$$= \frac{A}{j2\pi f}\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) = \frac{A}{\pi f}sin\pi ft = AT\frac{sin\pi fT}{\pi fT}$$
$$= ATsinc(fT)$$

Подставим G(f) в S(f):

$$S(f) = \frac{AT}{2}\Big(sinc\big((f - f_0)T\big) + sinc\big((f + f_0)T\big)\Big)e^{-j2\pi ft}$$

3.2 Выведем формулу:

$$S(f) = \frac{AT}{2j}\Big(sinc\big((f - f_0)T\big) + sinc\big((f + f_0)T\big)\Big)e^{-j2\pi ft}$$

Пусть задан сигнал:

$$s(t) = \begin{cases} Asin(2\pi f_0 t), 0 < t < T \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Допустим $s(t) = g(t)c(t)$, где $g(t)$ = A – некоторая произвольная функция (огибающая,) $c(t) = sin\,(2\pi f_0 t)$ – гармонический сигнал.

Расчёт спектральной функции:

$$S(f) = G(f)C(f)e^{-j2\pi ft},$$

где

$$C(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

тогда

$$S(f) = G(f)C(f)e^{-j2\pi ft} = G(f)\frac{1}{2j}\Big(\big(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\big)\Big)e^{-j2\pi ft}$$

$$= \frac{1}{2j}\big(G(f - f_0) + G(f + f_0)\big)e^{-j2\pi ft}$$

Теперь рассмотрим g(t) = A:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi fT}dt = A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi fT}dt = -\frac{A}{j2\pi f}e^{-j2\pi fT}\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{A}{j2\pi f}\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) = \frac{A}{\pi f}sin\pi ft = AT\frac{sin\pi fT}{\pi fT}$$

$$= ATsinc(fT)$$

Подставим G(f) в S(f):

$$S(f) = \frac{AT}{2j}\Big(sinc\big((f - f_0)T\big) + sinc\big((f + f_0)T\big)\Big)e^{-j2\pi ft}$$

4. **Графики амплитудных спектров сигнала**

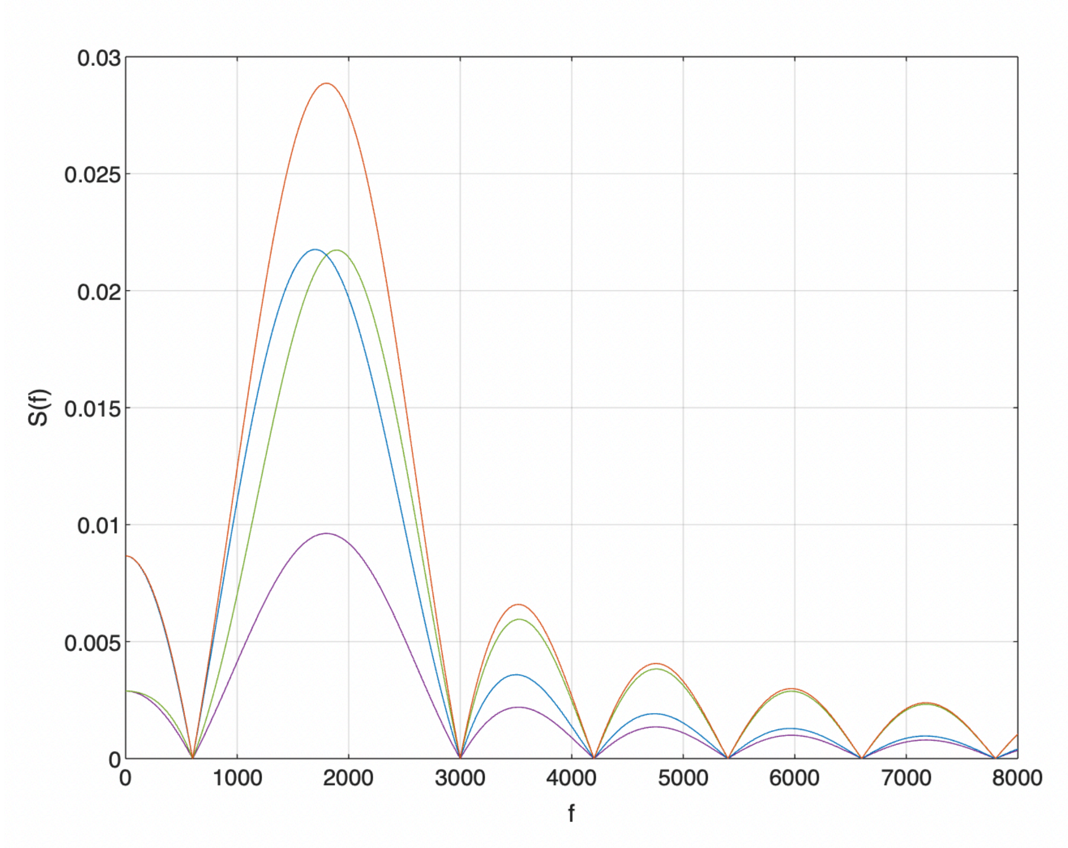

Рис.1 – Амплитудные спектры сигнала квадратурной амплитудной модуляции.

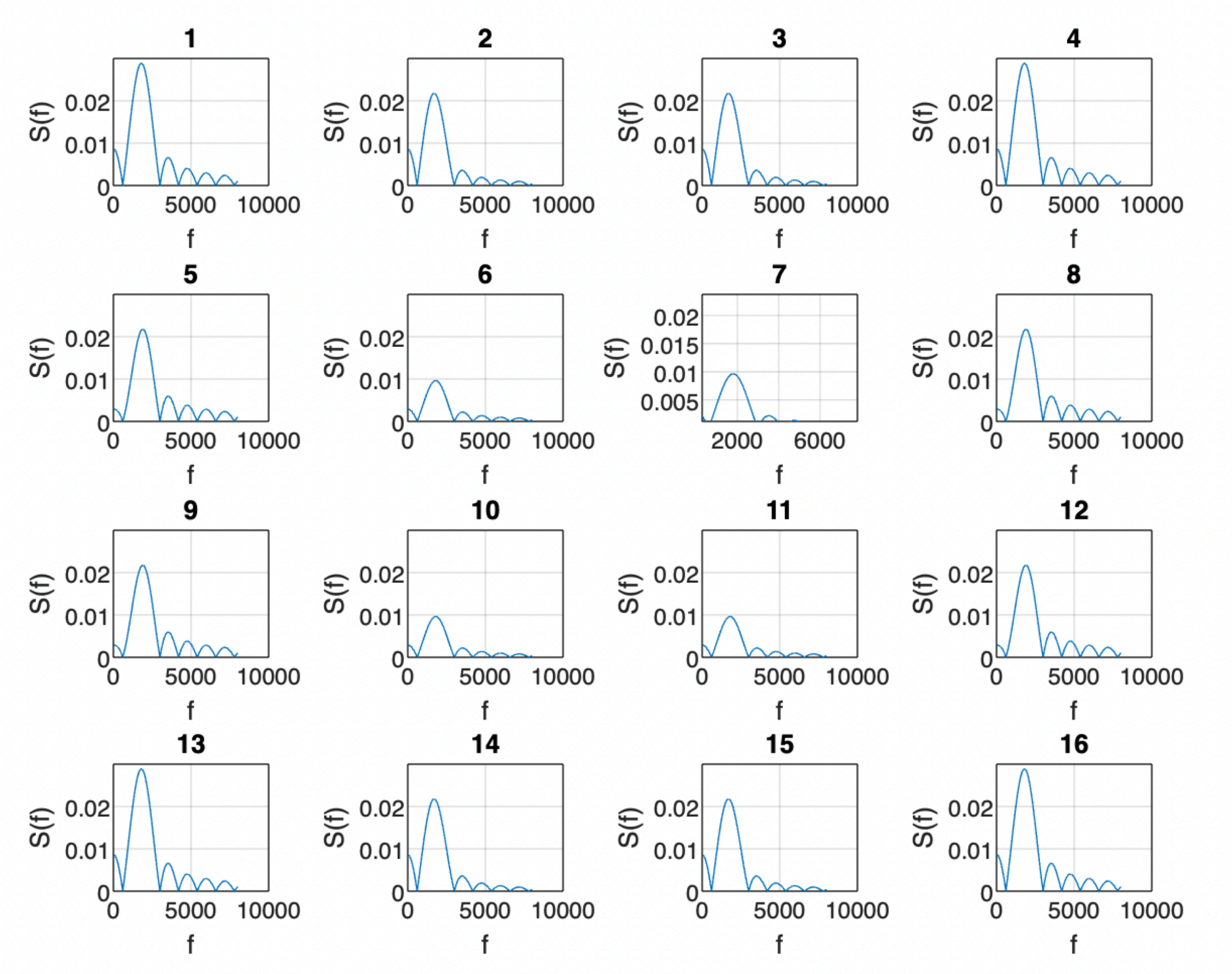

Рис.2 – Амплитудные спектры сигнала квадратурной амплитудной модуляции.

Для одиночного сигнала ширина полосы частот вычисляется по формуле: $W = \frac{2}{T} = 2 \cdot 1200 = 2400$.

Спектры сигналов одинаковы.

5. Спектр последовательности сигналов

Пусть $\{ s_i(t)\}$ – сигнальное множество, i = 0, 1, …, q–1. Определим последовательность индексов (мультииндекс) $i = (i_0, i_1, \dots, i_{N-1})$длины N, где $i_l \in \{0, 1, \dots,\ q-1\}, 0 \le l \le N-1$. Выразим также последовательность сигналов длины N, которая определяется последовательностью индексов i, $s_i(t) = \sum_{l=0}^{N-1} s_{i_l}(t - lT)$, где T – период следования сигналов.

Найдем спектр $S_i(f)$ последовательности $s_i(t)$. Пусть $S_i(f)$ – спектр i-го сигнала из сигнального множества, тогда используя свойство линейности и сдвига во временной области, имеем

$$S_i(f) = \sum_{l=0}^{N-1} S_{i_l}(f)\, e^{-j2\pi f l T}.$$

Из последней формулы следует, что спектр последовательности сигналов представляет собой линейную комбинацию спектров сигналов, образующих последовательность.

6. Графики спектров последовательности сигналов

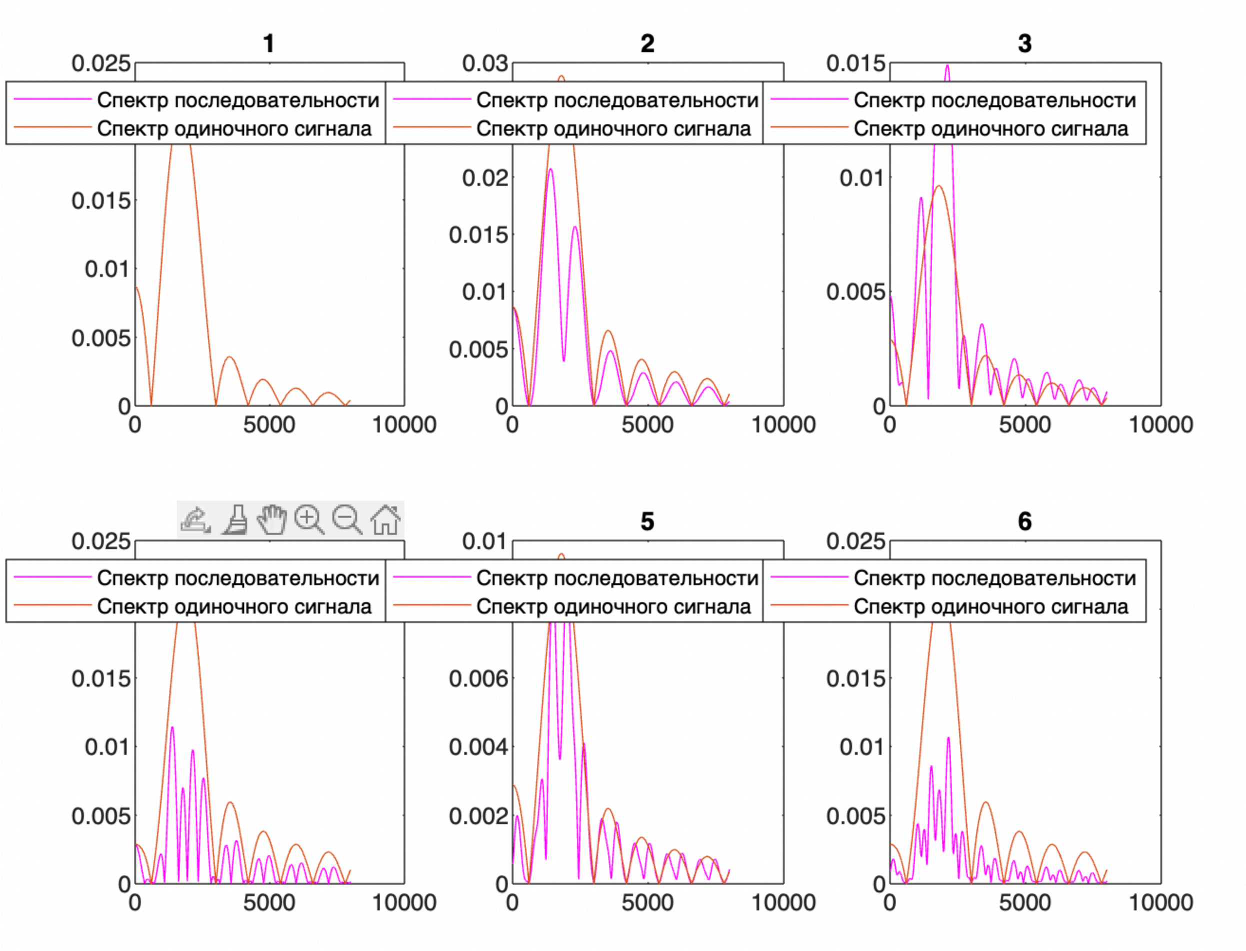

Рис.3 – Амплитудный спектр последовательности разной длины.

Для последовательности сигналов ширина полосы частот вычисляется по формуле: $W = \frac{2}{nT}$.

$$W_2 = \frac{2 \cdot 1200}{2} = 1200$$

$$W_3 = \frac{2 \cdot 1200}{3} = 800$$

$$W_4 = \frac{2 \cdot 1200}{4} = 600$$

$$W_5 = \frac{2 \cdot 1200}{5} = 480$$

$$W_6 = \frac{2 \cdot 1200}{6} = 400$$

7. Вывод

В ходе выполнения задания лабораторной работы исследованы дискретные сигналы квадратурной амплитудной модуляции в частотной области.

- Выведены формулы для спектров отрезка гармоник сигналов синуса и косинуса. Далее вычислены спектры сигналов по полученным формулам, построены графики.
- Вычислена ширина полосы частот для одиночного сигнала. А также ширина полосы частот, занимаемой различными последовательностями сигналов.
- Вычислены спектры последовательностей сигналов для нескольких различных последовательностей различной длины, построены графики спектров последовательностей сигналов.