

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

КАФЕДРА №12

ОЦЕНКА

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

доцент

Д.Л. Головцов

должность, уч. степень, звание

подпись, дата

инициалы, фамилия

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Симплекс-метод в задачах линейного программирования

по дисциплине: Системный анализ и методы оптимизации

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР.

1842

А.В. Герасимец

номер группы

подпись, дата

инициалы, фамилия

Санкт-Петербург, 2022

1. Цель работы

Решение ЗЛП симплекс-методом.

2. Исходные данные ЗЛП

Вариант №5

Целевая функция: $z = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \rightarrow \max$

Ограничения:

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12 \quad (1)$$

$$4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12 \quad (2)$$

$$5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25 \quad (3)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

3. Приведение ЗЛП к стандартной форме

$$z = 0x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 7x_4 + 0x_5 + x_6 \rightarrow \max$$

$$x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 3x_4 + 0x_5 - 2x_6 = 12 \quad (1)$$

$$0x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 + 0x_5 - 3x_6 = 12 \quad (2)$$

$$0x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25 \quad (3)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$z - 0x_1 - 8x_2 - 0x_3 - 7x_4 - 0x_5 - x_6 = 0$$

4. Построение задачи, двойственной к данной

Целевая функция: $w = 12y_1 + 12y_2 + 25y_3 \rightarrow \min$

Ограничения:

$$1y_1 + 0y_2 + 0y_3 \geq 0 \quad (1)$$

$$-2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq 8 \quad (2)$$

$$0y_1 + y_2 + 0y_3 \geq 0 \quad (3)$$

$$-3y_1 - 4y_2 + 5y_3 \geq 7 \quad (4)$$

$$0y_1 + 0y_2 + 1y_3 \geq 0 \quad (5)$$

$$-2y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 1 \quad (6)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad (7)$$

5. Нахождение решения задачи симплекс-методом

Таблица 1 – Начальная таблица

Базис	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	1	0	-8	0	-7	0	-1	0
x_1	0	1	-2	0	-3	0	-2	12
x_3	0	0	4	1	-4	0	-3	12
x_5	0	0	5	0	5	1	1	25

Таблица 2 – Определение исключаемой переменной

Базис	Коэффициенты при x_2	Решение	Отношение (точка пересечения)
x_1	-2	12	$x_2 = 12/-2 = -6$ (не допускается)
x_3	4	12	$x_2 = 12/4 = 3$ (min)
x_5	5	25	$x_2 = 25/5 = 5$

Таблица 3 – Выделение ведущей строки и столбца, а также ведущего элемента

Базис	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	1	0	-8	0	-7	0	-1	0
x_1	0	1	-2	-3	0	0	-2	12
x_3	0	0	4	1	-4	0	-3	12 (ведущая строка)
x_5	0	0	5 (Ведущий столбец)	0	5	1	1	25

Далее нам необходимо пересчитать таблицу, чтобы значения симплекс-таблицы соответствовали новым базисным переменным.

Для этого используем алгоритм Гаусса-Жордана.

Таблица 4 – Симплекс-таблица, соответствующая новому базисному решению

Базис	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	1	0	0	2	-15	0	-7	24
x_1	0	1	0	0,5	-5	0	-3,5	18
x_2	0	0	1	0,25	-1	0	-0,75	3
x_5	0	0	0	-1,25	10	1	4,75	10

Таблица 5 – Определение исключаемой переменной

Базис	Коэффициенты при x_4	Решение	Отношение (точка пересечения)
x_1	-5	18	$x_4 = 18/-5 = -3,6$ (не допустимо)
x_2	-1	3	$x_4 = 3/-1 = -3$ (не допустимо)
x_5	10	10	$x_4 = 10/10 = 1$ (min)

Таблица 6 - Выделение ведущей строки и столбца, а также ведущего элемента

Базис	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	1	0	0	2	-15	0	-7	24
x_1	0	1	0	0,5	-5	0	-3,5	18
x_2	0	0	1	0,25	-1	0	-0,75	3
x_5	0	0	0	-1,25	10	1	4,75	10

Таблица 7 - Симплекс-таблица, соответствующая новому базисному решению

Базис	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	1	0	0	0,125	0	1,5	0,125	39
x_1	0	1	0	-0,125	0	0,5	-1,125	23
x_2	0	0	1	0,125	0	0,1	-0,275	4
x_4	0	0	0	-0,125	1	0,1	0,475	1

Найдем оптимальное решение двойственной задачи, которое должно совпадать с оптимальным решением прямой задачи.

Для этого сначала определим оптимальные значения двойственных переменных y_1, y_2, y_3 :

$$(y_1, y_2, y_3) = (0; 8; 7) * \begin{pmatrix} 1 & -0,125 & 0,5 \\ 0 & 0,125 & 0,1 \\ 0 & -0,125 & 0,1 \end{pmatrix} = (0; 0,125; 1,5)$$

$$w = 12 \cdot 0 + 12 \cdot 0,125 + 25 \cdot 1,5 = 39.$$

$$w = z = 39$$

6. Анализ чувствительности оптимального решения задачи

а. Анализ для коэффициентов целевой функции

і. Для базисных переменных

$$z = 8x_2 + 7x_4 + x_6$$

$$(y_1, y_2, y_3) = (0 + d_1; 8; 7) * \begin{pmatrix} 1 & -0,125 & 0,5 \\ 0 & 0,125 & 0,1 \\ 0 & -0,125 & 0,1 \end{pmatrix} = (d_1; \frac{1-d_1}{8}; \frac{15+5d_1}{10})$$

x_3 :

$$y_2 \geq 0$$

$$\frac{1-d_1}{8} \geq 0$$

$$d_1 \leq 1$$

x_5 :

$$y_3 \geq 0$$

$$\frac{15+5d_1}{10} \geq 0$$

$$d_1 \geq -3$$

x_6 :

$$-2y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 1$$

$$-2d_1 - 3\left(\frac{1-d_1}{8}\right) + \frac{15+5d_1}{10} \geq 1$$

$$d_1 \leq \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} d_1 \leq 1 \\ d_1 \geq -3 \\ d_1 \leq \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$-3 \leq d_1 \leq \frac{1}{9}$$

$$(y_1, y_2, y_3) = (0; 8 + d_2; 7) * \begin{pmatrix} 1 & -0,125 & 0,5 \\ 0 & 0,125 & 0,1 \\ 0 & -0,125 & 0,1 \end{pmatrix} = (0; \frac{d_2+1}{8}; \frac{15+d_2}{10})$$

x_3 :

$$y_2 \geq 0$$

$$\frac{d_2+1}{8} \geq 0$$

$$d_2 \geq -1$$

x_5 :

$$y_3 \geq 0$$

$$\frac{15+d_2}{10} \geq 0$$

$$d_2 \geq -15$$

x_6 :

$$-2y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 1$$

$$-3\left(\frac{d_2 + 1}{8}\right) + \frac{15 + d_2}{10} \geq 1$$

$$d_2 \leq \frac{5}{11}$$

$$\begin{cases} d_2 \geq -1 \\ d_2 \geq -15 \\ d_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$-1 \leq d_2 \leq \frac{5}{11}$$

$$(y_1, y_2, y_3) = (0; 8; 7 + d_4) * \begin{pmatrix} 1 & -0,125 & 0,5 \\ 0 & 0,125 & 0,1 \\ 0 & -0,125 & 0,1 \end{pmatrix} = (0; \frac{1 - d_4}{8}; \frac{15 + d_4}{10})$$

x_3 :

$$y_2 \geq 0$$

$$\frac{1 - d_4}{8} \geq 0$$

$$d_4 \leq 1$$

x_5 :

$$y_3 \geq 0$$

$$\frac{15 - d_4}{10} \geq 0$$

$$d_4 \leq 15$$

x_6 :

$$2y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 1$$

$$-3\left(\frac{1 - d_4}{8}\right) + \frac{15 + d_4}{10} \geq 1$$

$$d_4 \leq \frac{5}{19}$$

$$\begin{cases} d_4 \leq 1 \\ d_4 \leq 15 \\ d_4 \leq \frac{5}{19} \end{cases}$$

$$1 \leq d_4 \leq \frac{5}{19}$$

ii. Для небазисных переменных

x_3 :

$$y_2 \geq 0 + d_3$$

$$d_3 \leq 0,125$$

x_5 :

$$y_3 \geq 0 + d_5$$

$$d_5 \leq 1,5$$

x_6 :

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 0,125 + 1,5 \geq 1 + d_6$$

$$d_6 \leq 0,125$$

b. Интервалы допустимых изменений для коэффициентов правых частей ограничений

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,125 & 0,5 \\ 0 & 0,125 & 0,1 \\ 0 & -0,125 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 + D_1 \\ 12 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 + D_1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 \geq -23$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,125 & 0,5 \\ 0 & 0,125 & 0,1 \\ 0 & -0,125 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 + D_2 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 - 0,125D_2 \\ 4 + 0,125D_2 \\ 1 - 0,125D_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} D_2 \leq 164 \\ D_2 \geq -32 \\ D_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$-32 \leq D_2 \leq 8$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,125 & 0,5 \\ 0 & 0,125 & 0,1 \\ 0 & -0,125 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 25 + D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 + 0,5D_3 \\ 4 + 0,1D_3 \\ 1 + 0,1D_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} D_3 \geq -46 \\ D_3 \geq -40 \\ D_3 \geq -10 \end{cases}$$

$$D_3 \geq -10$$

7. Построение модели задачи и нахождение решения в табличном процессоре «Microsoft Excel»

Целевая функция	0	8	0	7	0	1	39		
ограничение 1	1	-2	0	-3	0	-2	12 =		12
ограничение 2	0	4	1	-4	0	-3	12 =		12
ограничение 3	0	5	0	5	1	1	25 =		25
Переменные	x1	x2	x3	x4	x5	x6			
	23	4	0	1	0	0			

Рисунок 1 – Таблица с исходными данными и результатами расчетов

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$C\$8	x1	23	0	0	0,111111111	3
\$D\$8	x2	4	0	8	0,454545455	1
\$E\$8	x3	0	-0,125	0	0,125	1E+30
\$F\$8	x4	1	0	7	1	0,263157895
\$G\$8	x5	0	-1,5	0	1,5	1E+30
\$H\$8	x6	0	-0,125	1	0,125	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$I\$3	ограничение 1	12	0	12	1E+30	23
\$I\$4	ограничение 2	12	0,125	12	8	32
\$I\$5	ограничение 3	25	1,5	25	1E+30	10

Рисунок 2 – Отчет об устойчивости

8. Выводы

Результаты, полученные при решении задачи линейного программирования симплекс-методом, а также результаты анализа чувствительности совпали с решением задачи в «Microsoft Excel», что подтверждает правильность решения. Значения целевых функций прямой и двойственной задачи в оптимальной точке также совпали.