

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

---

КАФЕДРА №52

ОТЧЕТ ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ \_\_\_\_\_

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

ассистент

Н.А.Янковский

---

должность, уч. степень,  
звание

---

подпись, дата

---

инициалы,  
фамилия

**ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1**

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА. ФУРЬЕ-АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

по курсу: ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛА

СТУДЕНТ ГР. №

5912

И.К. Лобач

---

номер  
группы

---

подпись,  
дата

---

инициалы,  
фамилия

Санкт-Петербург 2021

Цель работы: изучение свойств дискретизации аналоговых сигналов; изучение методов Фурье-анализа аналоговых сигналов.

### Порядок выполнения и результаты исследования

1. Выполнить аналитический расчет спектров для двух классов сигналов (периодических и непериодических). В отчете представить графики исходных сигналов и полученных спектров, а также описать их характерные особенности.

#### 1.1. Пилообразный сигнал:

Разложение функции  $u(t)$  в ряд Фурье с произвольным периодом  $T$  в общем виде:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

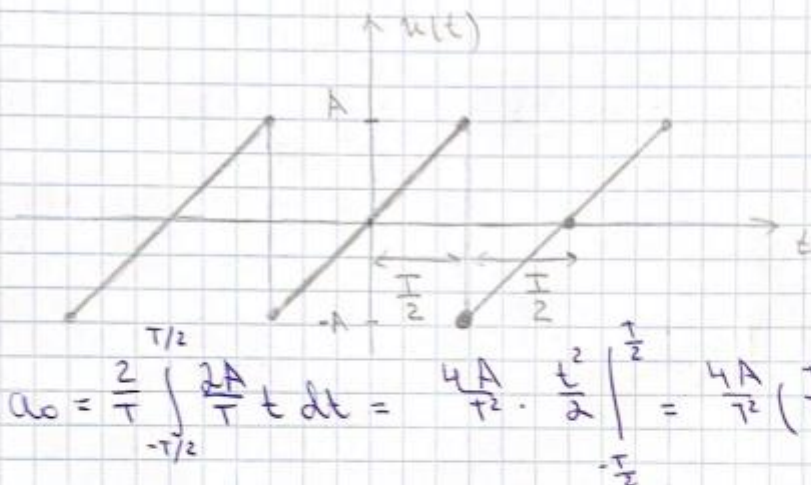
$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

Амплитудный спектр будет вычисляться:

$$|\dot{C}_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}$$

### 1.3.2. Пилообразный сигнал.

$$u(t) = \frac{2A}{T}(t - kT) \quad (k - \frac{1}{2})T < t \leq (k + \frac{1}{2})T$$



$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T} t dt = \frac{4A}{T^2} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{4A}{T^2} \left( \frac{T^2}{4} - \frac{T^2}{4} \right) = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt = \frac{4A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t \cdot \sin(k\omega_1 t) dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} f = t \Rightarrow f' = 1 \\ g' = \sin(k\omega_1 t) \Rightarrow g = -\frac{\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4A}{T} \left( \left( -\frac{t \cdot \cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1} \right) \Big|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1} dt \right)$$

$$= \frac{4A}{T^2} \left( \frac{\sin(k\omega_1 t)}{(k\omega_1)^2} \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{t \cdot \cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1} \Big|_{-T/2}^{T/2} \right) =$$

Рисунок 1 - Пилообразный сигнал

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8A}{T^2} \left( \frac{\sin\left(\frac{k\omega_1 T}{2}\right) + \sin\left(\frac{k\omega_1 T}{2}\right)}{(k\omega_1)^2} \right) - \frac{4A}{T^2} \cdot \left( \frac{T \cdot \cos\left(k\omega_1 \frac{T}{2}\right) + T \cdot \cos\left(k\omega_1 \frac{T}{2}\right)}{2k\omega_1} \right) = \\
 &= \frac{8A \cdot \sin(\pi k)}{T^2 \cdot (k\omega_1)^2} - \frac{4A \cdot \cos(k\pi)}{T \cdot k\omega_1} \\
 b_k &= - \frac{4A \cdot \cos(k\pi)}{T \cdot k\omega_1} = - \frac{2A \cdot \cos(k\pi)}{\pi k} \\
 s(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} - \frac{2A}{\pi} \cdot \frac{\cos(k\pi) \cdot \sin(k\omega_1 t)}{k} = \\
 &= - \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot t \cdot 2\pi}{T}\right)
 \end{aligned}$$

Рисунок 2 – Пилообразный сигнал

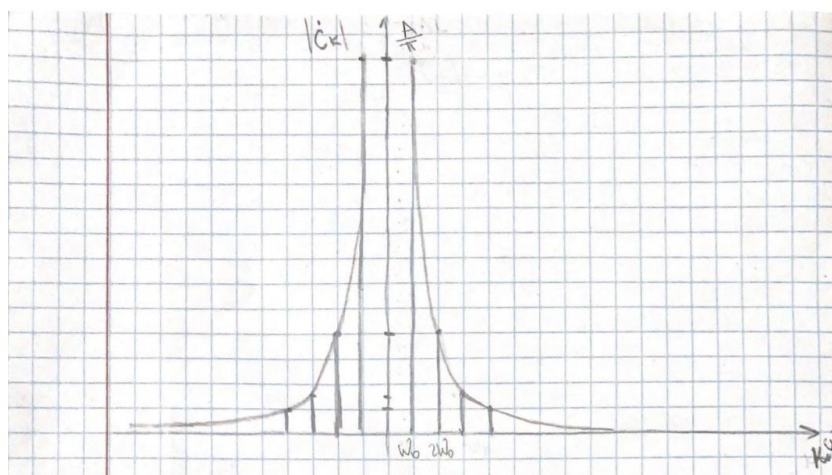


Рисунок 3 - Пилообразный сигнал

## 1.2. Прямоугольный импульс:

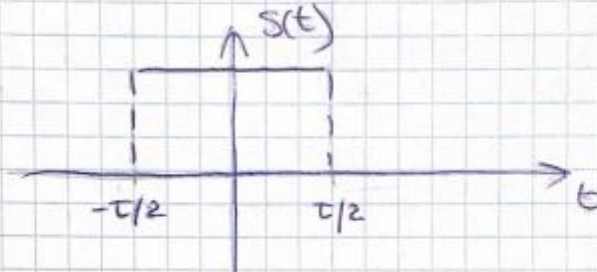
Преобразование Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Амплитудный спектр тогда будет равен  $|\dot{S}(\omega)|$ .

1.2.2. Прямоугольный импульс:

$$s(t) = \begin{cases} A & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= A \cdot \left( \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right) \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2A \cdot \left( -e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} + e^{j\omega \frac{\tau}{2}} \right)}{j\omega \cdot 2} =$$

$$= \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Согласно формуле Эйлера:

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \Rightarrow$$

$$\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}}{2j}$$

Рисунок 4 - Прямоугольный импульс. Преобразование Фурье



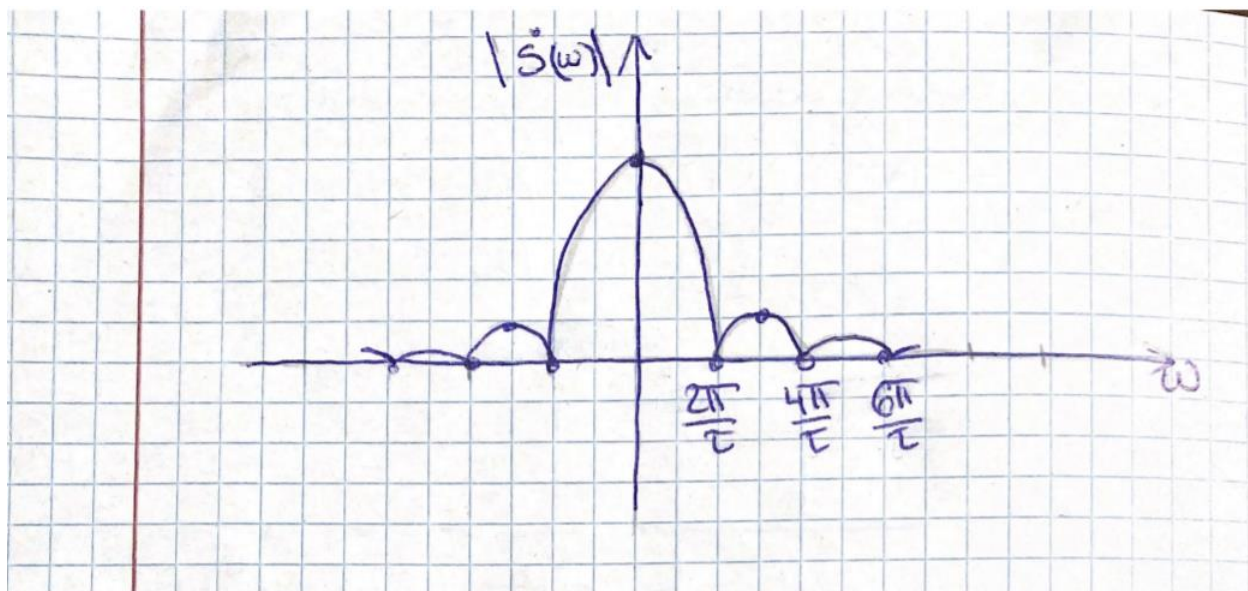


Рисунок 5 - Прямоугольный импульс. Амплитудный спектр

2. Проанализировать свойства двух функций  $u_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$  и  $u_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$  на интервале  $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ .

2.1. Вычислить все значения функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на заданном интервале с шагом  $10^{-3}$ .

Графики для функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  с частотами  $f_1 = 3$  и  $f_2 = 2$  и периодом наблюдения  $T = 1$  выглядят следующим образом:

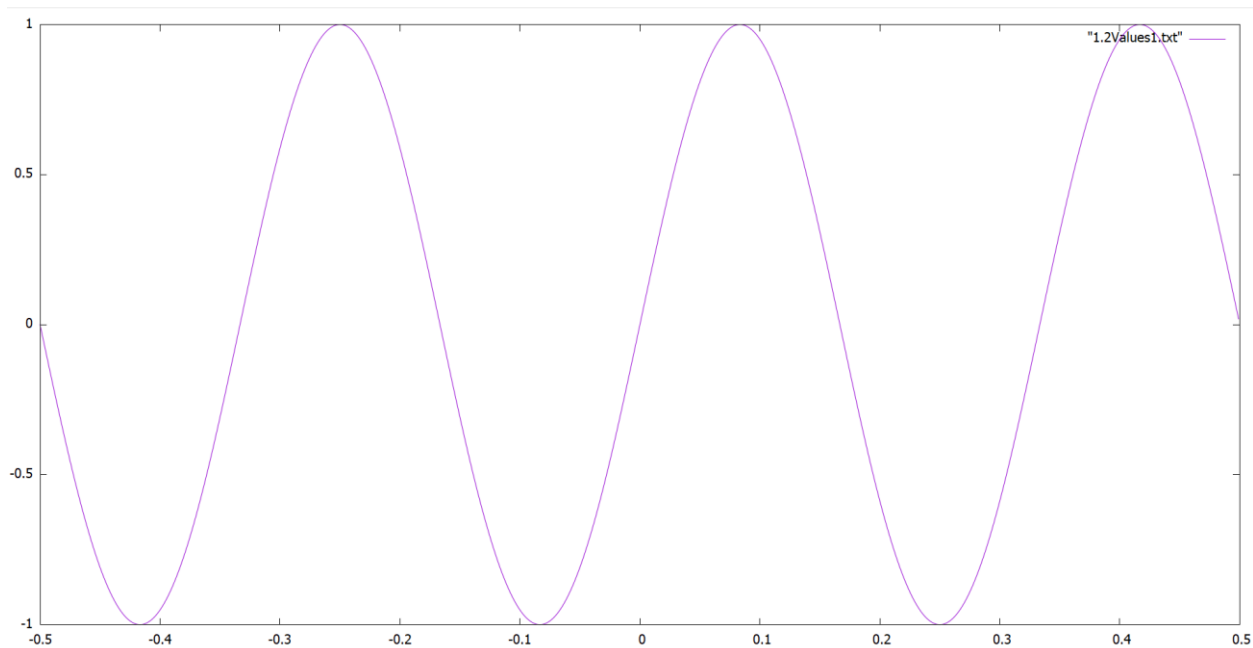


График 1 –  $u_1(t)$

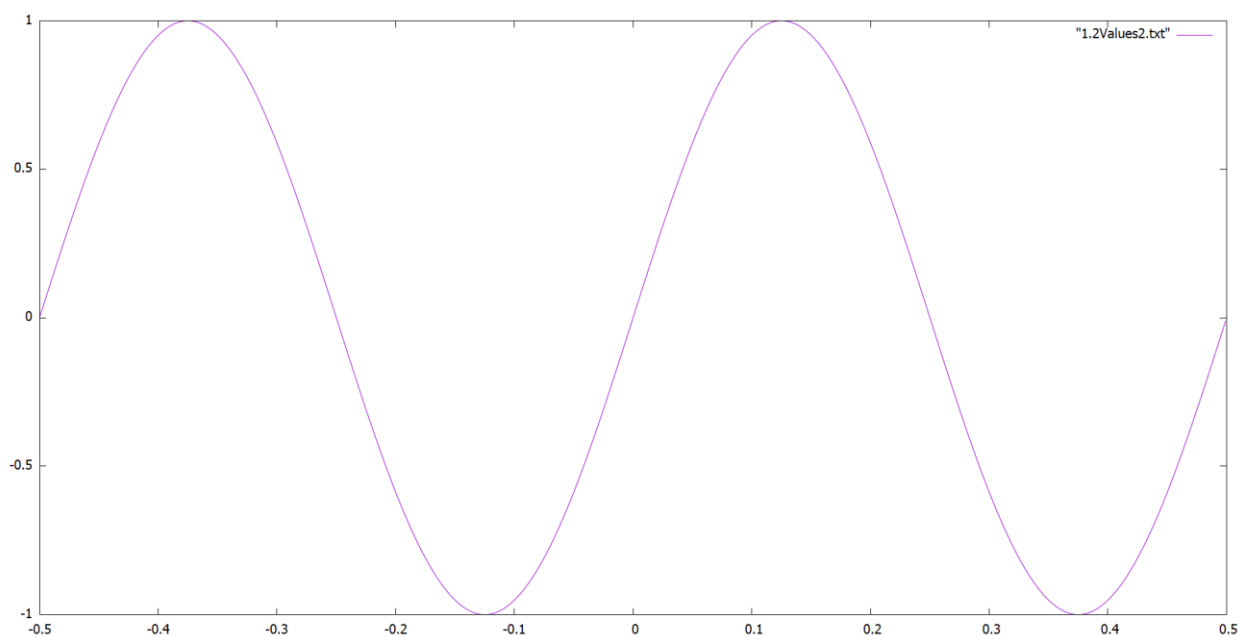


График 2 -  $u_2(t)$

2.2. Вычислить приближенное значение скалярного произведения двух функций  $u_1(t), u_2(t)$ .

Скалярное произведение функций вычисляется по формуле:

$$(u_i, u_j) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u_i(t) u_j(t) dt$$

Программная реализация осуществляет вычисление интеграла по методу прямоугольника. Пример вычисления приближенного значения скалярного произведения для функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  с частотами  $f_1 = 3$  и  $f_2 = 2$  и периодом наблюдения  $T = 1$  выглядит следующим образом:

**Scalar = -1.63643e-16**

Рисунок 6 - Скалярное произведение

2.3. Вычислить нормы обеих функций.

Норма функции вычисляется по формуле:

$$\|u\| = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b u^2(t) dt}$$

Программная реализация аналогично осуществляет вычисление интеграла по методу прямоугольника. Пример вычисления нормы для функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  с частотами  $f_1 = 3$  и  $f_2 = 2$  и периодом наблюдения  $T = 1$  выглядит следующим образом:

```
Norm = 0.707107
Norm = 0.707107
```

Рисунок 7 - Нормы

2.4. Определить, являются ли исходные функции ортогональными друг к другу.

Функции ортогональны в том случае, когда их скалярное произведение равно 0. Приближенное скалярное произведение заданных функций вычисляется программой и обрабатывается следующим образом: если полученное значение по абсолютной величине меньше 0.01, то функции считаются ортогональными, в противном случае нет. Пример вывода программы для функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  с частотами  $f_1 = 3$  и  $f_2 = 2$  и периодом наблюдения  $T = 1$  выглядит следующим образом:

```
Norm = 0.707107
Norm = 0.707107
Scalar = -1.63643e-16
Functions are orthogonal
```

Рисунок 8 - Проверка на ортогональность

2.5. Как нужно изменить исходные функции, что они могли являться элементами ортонормированного базиса? Выполните данную модификацию и продемонстрируйте результат.

Функции образуют ортонормированный базис в том случае, если:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}$$

Для того, чтобы норма функции была равна 1 ее необходимо нормировать, то есть каждый отсчет разделить на норму функции. Пример работы программы для функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  с частотами  $f_1 = 3$  и  $f_2 = 2$  с периодом наблюдения  $T = 1$  представлен ниже:



```

Norm = 0.707107
Norm = 0.707107
Scalar = -1.63643e-16
Functions are orthogonal
Norm = 1
Norm = 1
Functions belong to an orthonormal basis

```

Рисунок 9 - Проверка на ортонормированность

2.6. Останутся ли исследуемые функции элементами ортонормированного базиса, если:

- 2.6.1. частоты  $f_1$  и  $f_2$  удвоятся;
- 2.6.2. интервал  $[-T/2; T/2]$  увеличится вдвое;
- 2.6.3. интервал  $[-T/2; T/2]$  уменьшится вдвое.

Важно отметить, что для того, чтобы выбранные функции образовывали ортонормированный базис необходимо выполнение следующего условия:

$$f_i T = l_i,$$

где  $l$  – любое целое число.

В таком случае, если  $f_1 T = l_1$  и  $f_2 T = l_2$ , то при удвоении частот произведение так и останется целым числом. Выбранные функции  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  с частотами  $f_1 = 3$  и  $f_2 = 2$  и периодом наблюдения  $T = 1$ , как было установлено ранее, образуют ортонормированный базис. Убедимся в том, что функции останутся элементами ортонормированного базиса, при  $f_1 = 6$  и  $f_2 = 4$ .

```

Norm = 0.707107
Norm = 0.707107
Scalar = -4.79715e-17
Functions are orthogonal
Norm = 1
Norm = 1
Functions belong to an orthonormal basis

```

Рисунок 10 - Проверка на ортонормированность

Аналогично и при увеличении интервала  $[-T/2; T/2]$  вдвое. Убедимся в том, что функции останутся элементами ортонормированного базиса, при  $f_1 = 3$ ,  $f_2 = 2$  и  $T = 2$ .

```

Norm = 0.707107
Norm = 0.707107
Scalar = 5.10767e-17
Functions are orthogonal
Norm = 1
Norm = 1
Functions belong to an orthonormal basis

```

Рисунок 11 - Проверка на ортонормированность

Однако в случае уменьшения интервала  $[-T/2; T/2]$  вдвое не всегда функции останутся элементами ортонормированного базиса, т.к. при уменьшении вдвое  $fT$ ,  $l_i$  также уменьшится вдвое, а значит не всегда при этом останется целым числом. Легко убедиться в этом на примере  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  с частотами  $f_1 = 3$  и  $f_2 = 2$  и периодом наблюдения  $T = 0.5$ .

```

Norm = 0.707107
Norm = 0.707107
Scalar = 0.254652
Functions are not orthogonal

```

Рисунок 12 - Проверка на ортонормированность

3. Исследовать процедуру дискретизации синусоидального сигнала  $u(t)$  с частотой  $F$  Гц. Длительность наблюдения сигнала  $\frac{10}{F}$  секунд. Написать программу, которая позволит:
  - 3.1. Сформировать выборки отсчетов  $u^{(i)}[n]$  (результаты дискретизации) исследуемого сигнала с частотами дискретизации  $f_d^{(i)}$  равными:
    - 3.1.1.  $1.5F$  Гц,
    - 3.1.2.  $1.75F$  Гц,
    - 3.1.3.  $2F$  Гц,
    - 3.1.4.  $3F$  Гц,
    - 3.1.5.  $1000F$  Гц.
  - 3.2. Применить ряд Котельникова для восстановления исходного сигнала по его дискретным отсчетам с помощью формулы.

Теорема Котельникова звучит следующим образом: пусть аналоговый сигнал  $u(t)$  имеет ограниченный частотой  $f_c$  спектр, т.е.  $U(f) = 0$  при  $|f| > f_c$ . Тогда восстановление исходного аналогового сигнала возможно, если равномерная дискретизация выполняется с частотой  $f_d$ , минимум вдвое превышающую частоту  $f_s$ :

$$f_d > 2f_c$$

Для точного восстановления сигнала, описываемого непрерывной функцией  $u(t)$ , спектр которого ограничен частотой  $f_c$ , достаточно формировать дискретные отсчеты  $u[n]$  с периодом  $T_d < \frac{1}{f_c}$

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u(nT_d) \text{sinc}\left(\pi\left(\frac{t}{T_d} - n\right)\right)$$

где  $\text{sinc}\left(\pi\left(\frac{t}{T_d} - n\right)\right)$  – ряд Котельникова.

3.3. Вывести графики исходного сигнала и восстановленных сигналов  $u^{(i)}(t)$ , где  $i$  — индекс частоты дискретизации. Сделать выводы о точности восстановления исследуемого сигнала  $u(t)$  при использовании различных частот дискретизации.

В качестве исходного сигнала используется  $u(t) = \sin(2\pi ft)$  с  $f = 10$  и  $T = 1$ . Значения функции считаются на интервале  $[0; T]$  с шагом  $dt = 0,001$ . Графики исходного и восстановленного сигналов представлены ниже.

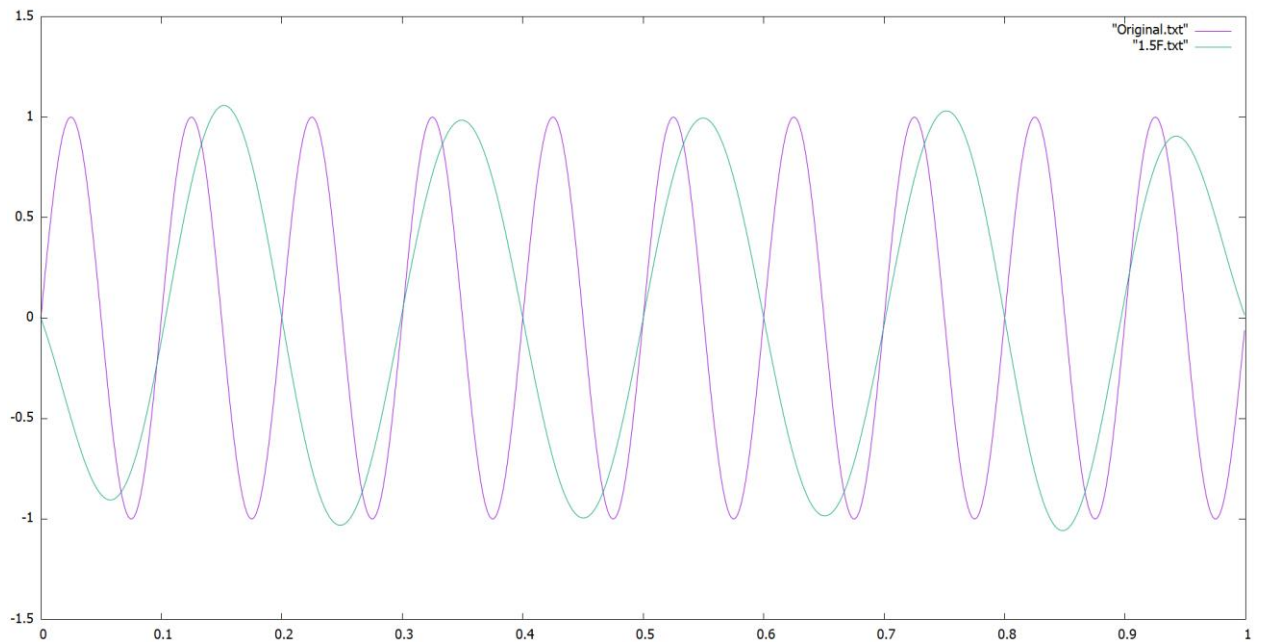


График 3 - Восстановление сигнала с частотой 1.5F

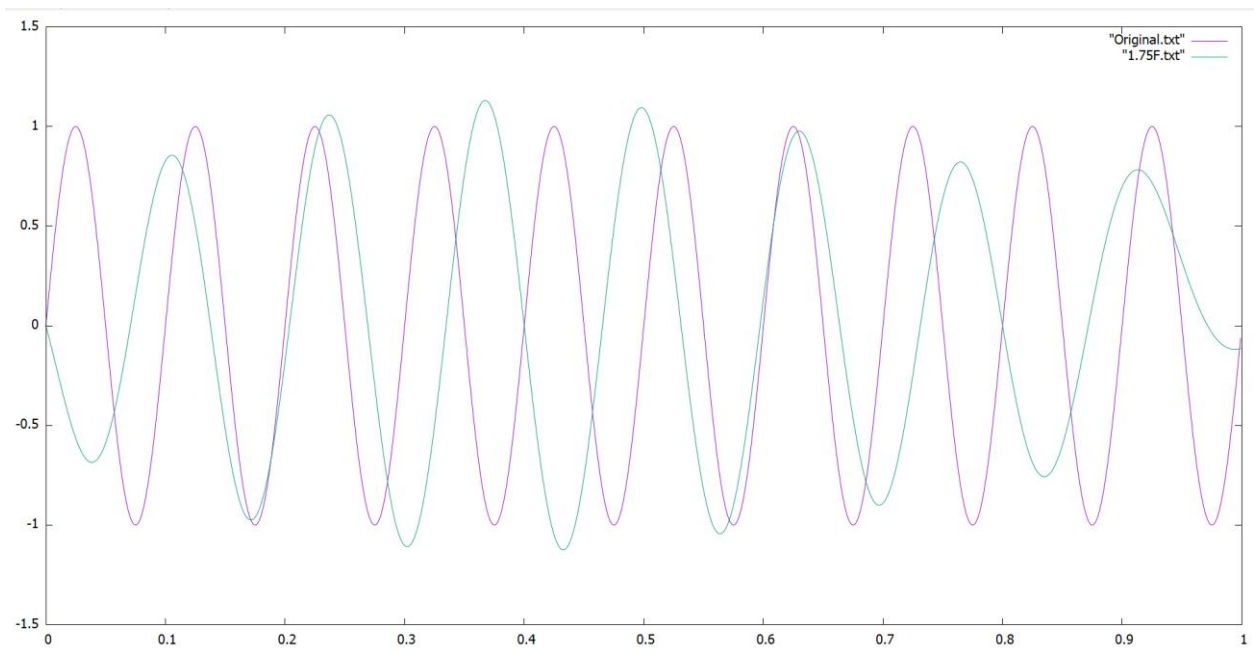


График 4 - Восстановление сигнала с частотой  $1.75F$

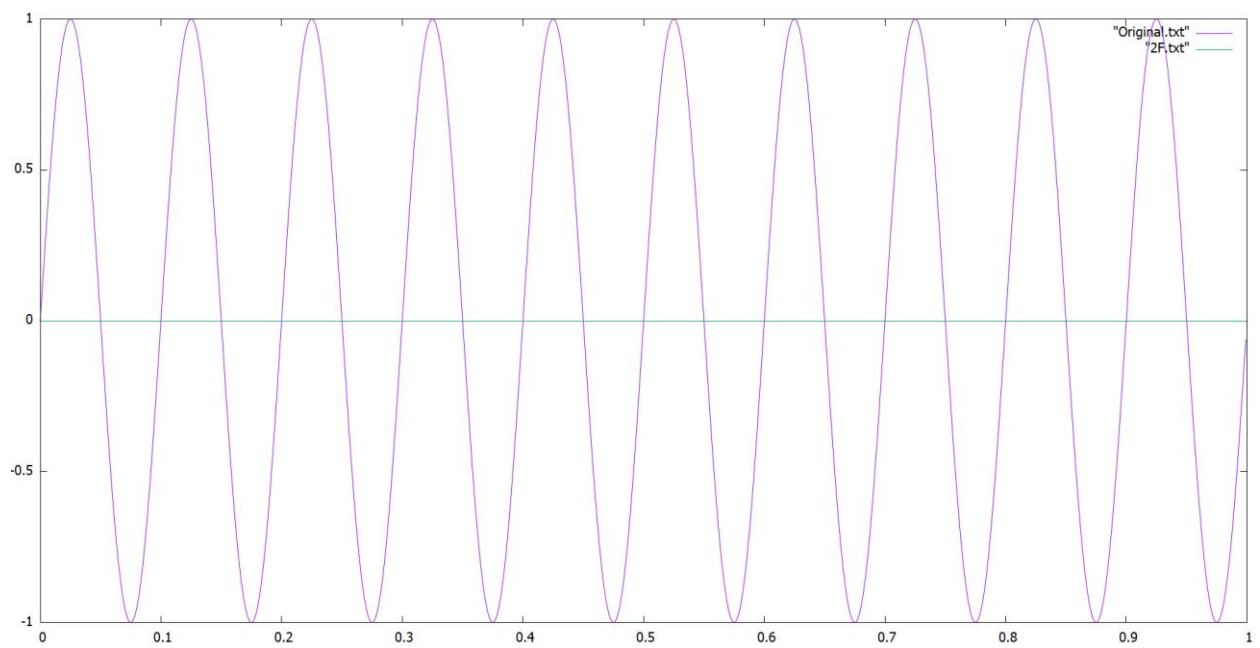


График 5 - Восстановление сигнала с частотой  $2F$

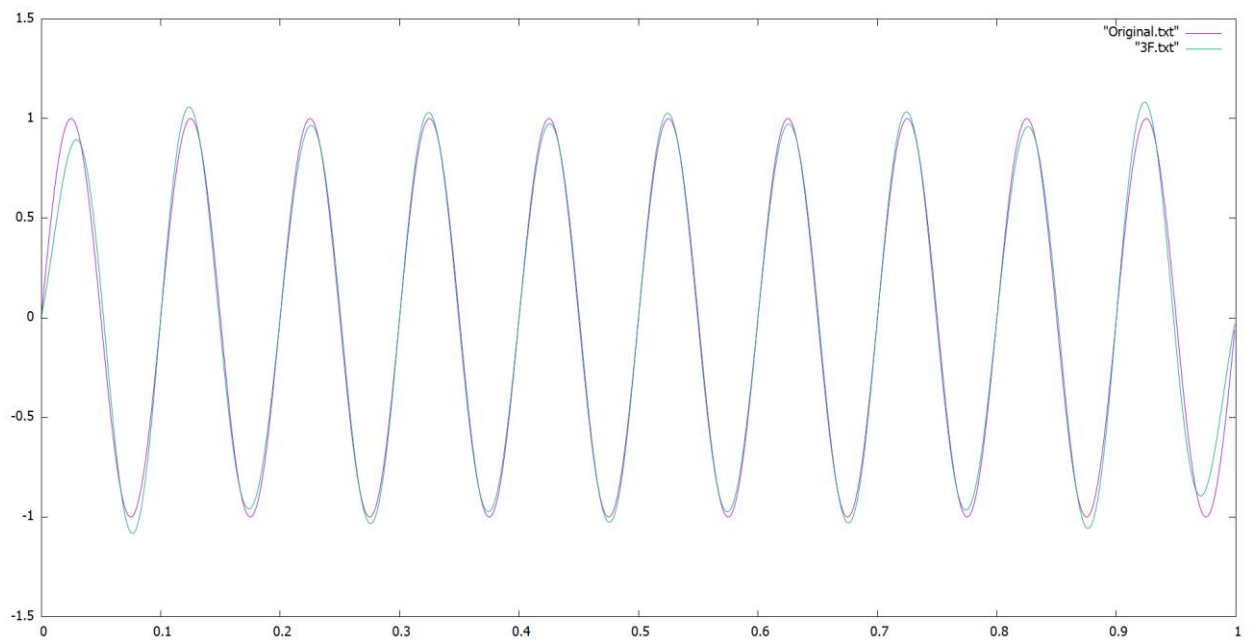


График 6 - Восстановление сигнала с частотой  $3F$

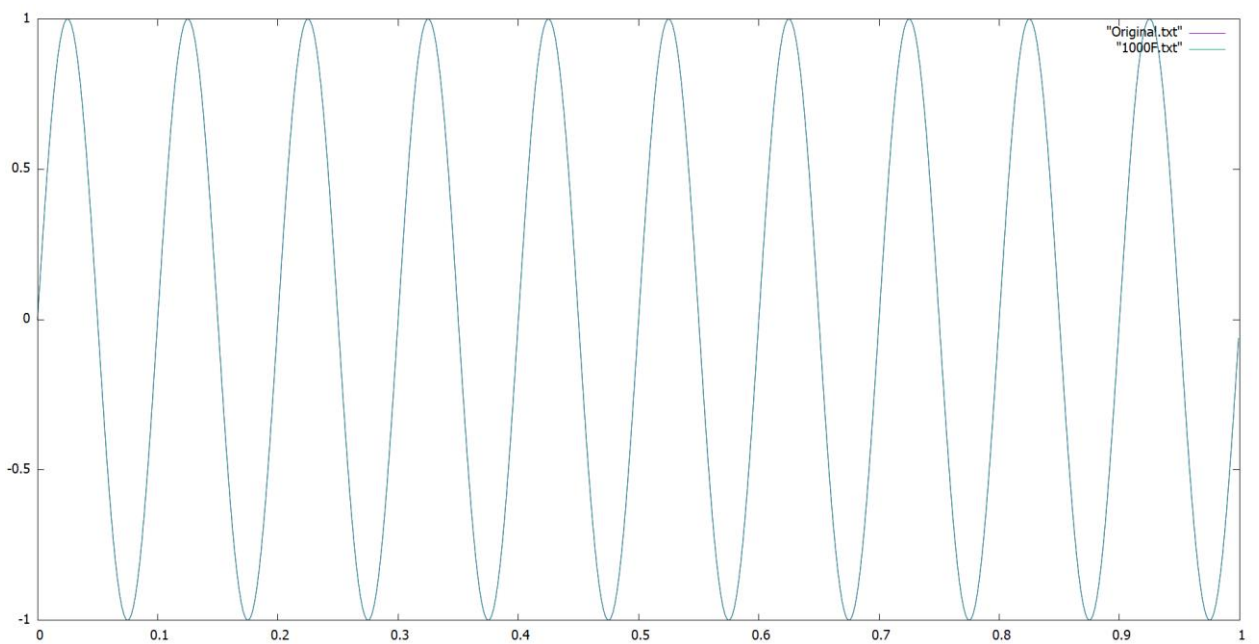


График 7 - Восстановление сигнала с частотой  $1000F$

На полученных графиках видно, что при частотах дискретизации  $1.5F$ ,  $1.75F$  и  $2F$ , восстановленный сигнал не совпадает с исходным, объясняется это тем, что выбранные частоты меньше или равны  $2F$ , что нарушает условия выполнения теоремы Котельникова.

4. Реализовать процедуру передискретизации изображения с помощью интерполяционного ряда Котельникова. Формат исходного изображения — BMP24, разрешение исходного изображения  $W \times H$  пикселей. Результатом передискретизации будет изображение размером  $nW \times mH$ . Выполните передискретизацию с различными комбинациями значений  $m$  и  $n$ :

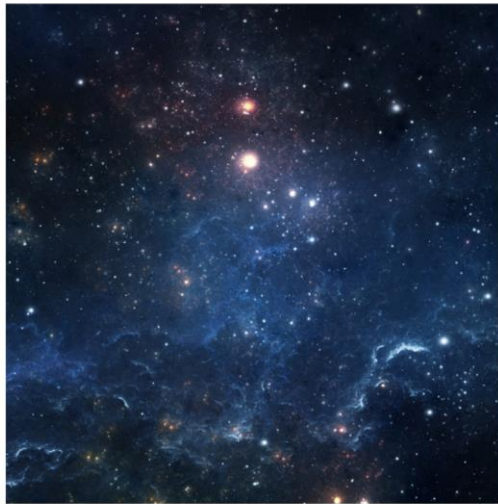
4.1.  $m > 1, n > 1$

4.2.  $m < 1, n > 1$

4.3.  $m > 1, n < 1$

4.4.  $m < 1, n < 1$

Исходная картинка имеет вид:



Результат работы программы для различных значений  $m$  и  $n$  представлен

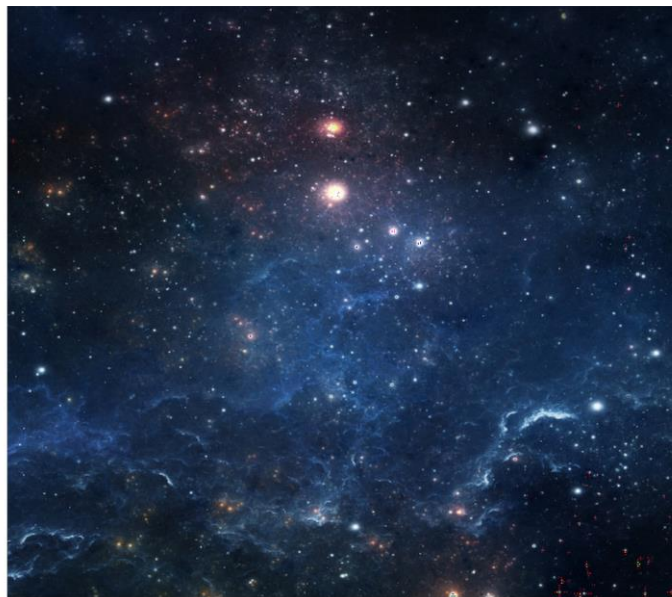


Рисунок 13 -  $1.5W \times 1.7H$





Рисунок 14 -  $0.7W \times 1.5H$



Рисунок 15 -  $1.4W \times 0.6H$



Рисунок 16 -  $0.17W \times 0.37H$

Изображения при передискретизации на краях получились с искажениями. Это объясняется тем, что интерполяционный ряд Котельникова представляет сигнал непрерывным и сумма должна быть бесконечной, но в реальности мы сделали ее конечной, поэтому это привело усечению и искажению на краях изображения.

**Выводы:** в результате исследования изучила свойства дискретизации аналоговых сигналов и методов Фурье-анализа аналоговых сигналов. В ходе выполнения работы выполнила аналитический расчет спектров для двух классов сигналов (периодических и непериодических), проанализировала свойства двух синусоид на выбранном интервале, исследовала процедуру дискретизации синусоидального сигнала и восстановления с использованием ряда Котельникова, реализовала процедуру передискретизации изображения в формате BMP с помощью интерполяционного ряда Котельникова.