Цель работы: исследовать дискретный сигнал в дискретной области.

Вариант I.2
Дано: f0 = 1650 Гц; f1 = 1950 Гц; $V_{mod} = 300$ Бод; $V_{inf} = 300$ бит/с; частотная модуляция

Определение периода сигнала: $V_{mod} = \frac{1}{T} => T = \frac{1}{300}$
Определение количества сигналов: $V_{inf} = \frac{\log_2 q}{T} => q = 2$

Вывод выражений спектра отрезка гармоник

Имеется сигнал:

$$S_c(t) = \begin{cases} A * \cos(2 * pi * f0 * t), \text{если } 0 < t < T \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Спектр данного сигнала будет рассчитываться следующим образом:
g(t) – некоторая произвольная функция (огибающая)
$c(t) = \cos\,(2 * pi * f0 * t + \Theta)$ – гармонический сигнал (несущая)

По теореме о свертке: $S_c(f) = G(f) * C(f)$, где $g(t) \leftrightarrow G(f), c(t) \leftrightarrow C(f)$, где $C(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f0) + \delta(f + f0))$
Получаем:
$S_c(f) = G(f) * \frac{1}{2}\left(\delta(f - f0) + \delta(f + f0)\right) = \frac{1}{2}\left(G(f - f0) + G(f + f0)\right)$ (1.1)
Рассмотрим функцию:

$$g(t) = \begin{cases} A, \text{если } 0 < t < T \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Подставим g(t) в формулу прямого преобразования Фурье:
$G(f) = \int_0^T g(t)e^{-j2pift}dt = A\int_0^T e^{-j2pift}\,dt = \frac{A}{-j2pif}\left(e^{-j2pifT} - 1\right) = A\frac{e^{-jpifT} - e^{jpifT}}{-j2pif}e^{-jpifT} = \frac{ATsin(pifT)}{pifT}e^{-jpifT} = ATsinc(fT)e^{-jpifT}$ (1.2)

Подставим в выражение (1.1) формулу (1.2):
$S_c(f) = \frac{AT}{2}(sinc\left((f - f0)T\right) + sinc((f + f0)T)e^{-jpifT}$ (1.3)

Рассмотрим сигнал:

$$S_s(t) = \begin{cases} A * \sin(2 * pi * f0 * t), \text{если } 0 < t < T \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

g(t) = $A \leftrightarrow G(f)$ – некоторая произвольная функция (огибающая)
$c(t) = \sin(2 * pi * f0 * t) \leftrightarrow C(f)$ – гармонический сигнал (несущая)

По теореме о свертке: $S_s(f) = G(f) * C(f)$, где $g(t) \leftrightarrow G(f), c(t) \leftrightarrow$

$C(f)$, где $C(f) = \frac{1}{j2}(\delta(f - f0) + \delta(f + f0))$

Получаем:

$S_c(f) = G(f) * \frac{1}{j2}\big(\delta(f - f0) + \delta(f + f0)\big) = \frac{1}{2}\big(G(f - f0) + G(f + f0)\big)$ (1.4)

$G(f) = ATsinc(fT)e^{-jpifT}$ (1.5)

Подставим выражение (1.5) в формулу (1.4):

$S_c(f) = \frac{AT}{j2}(sinc\big((f - f0)T\big) + sinc((f + f0)T)e^{-jpifT}$ (1.6)

Выражение для преобразования Фурье:

$$S_i(f) = \sqrt{\frac{ET}{2}}(sinc\big((f - fi)T\big) + sinc((f + fi)T)e^{-jpifT}$$

Выражение для амплитудного спектра:

$$|S_i(f)| = \sqrt{\frac{ET}{2}}\,\big|sinc\big((f - f0)T\big) + sinc((f + f0)T)\big|$$

Графики:

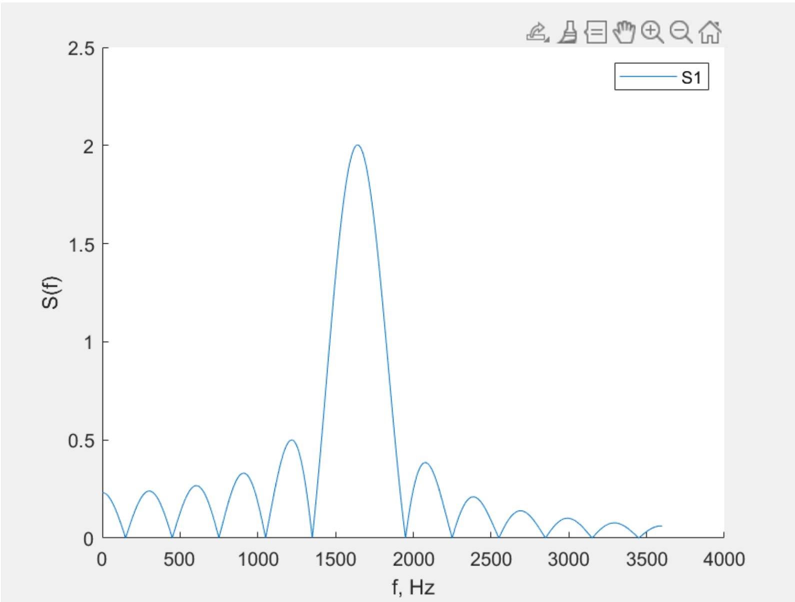

Рисунок 1: амплитудный спектр 1-го сигнала

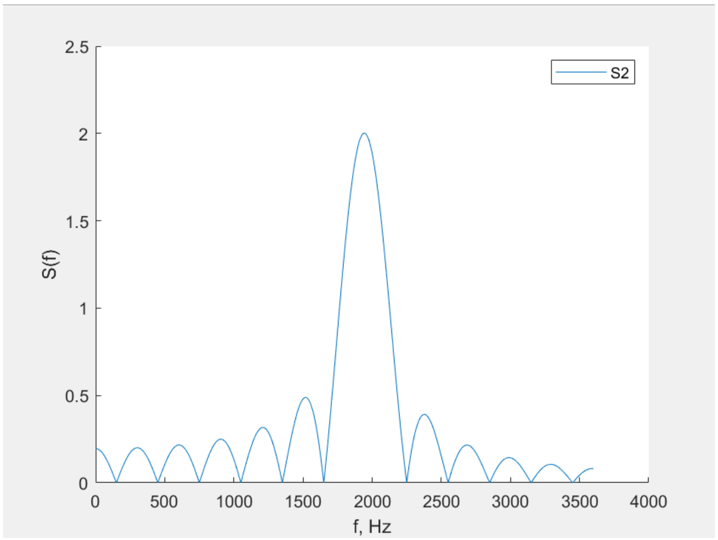

Рисунок 2: амплитудный спектр 2-го сигнала

Вычисление полосы частот:

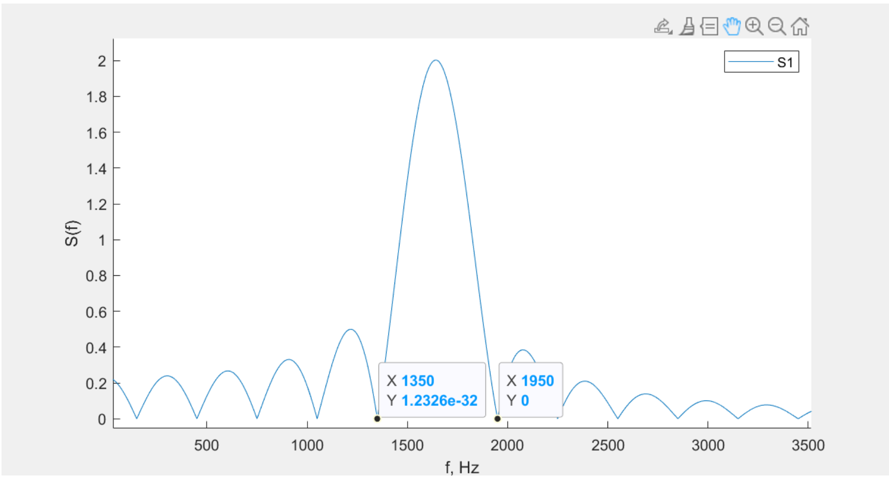

Рисунок 3: определение ширины полосы частот 1-го сигнала

W1 = x2 – x1 = 1950 – 1360 = 600 Hz

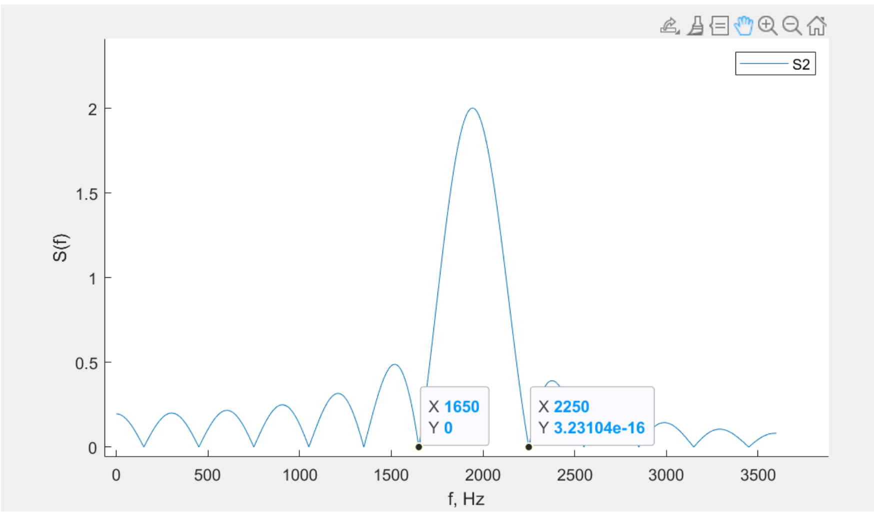

Рисунок 4: определение ширины полосы частот 2-го сигнала

W2 = x4 – x3 = 2250 – 1650 = 600 Hz

Ширина полосы частот сигнального множества:
W3 = x4 – x1 = 2250 – 1350 = 900 Hz

Вывод выражения спектра последовательности сигналов

Последовательность сигналов: $S_i(t) = \sum_{l=1}^{N-1} S_{i_l}(t - lT)$

Воспользуемся свойствами преобразования Фурье:

1) Задержка: $s(t - \tau) = S(f)e^{-j2pift}$
2) Линейность: $\begin{cases} g(t) \leftrightarrow G(f) \\ h(t) \leftrightarrow H(f) \end{cases} \Rightarrow a * g(t) + b * h(t) \leftrightarrow a * G(t) + b * H(t)$

Получаем:
$s_i(t) = S_{i_1}e^{-j2pif1t} + S_{i_2}e^{-j2pif2t} + \cdots + S_{i_{N-1}}e^{-j2pif(N-1)t}$
Получаем:
$$s_i(t) = \sum_{l=1}^{N-1} S_{i_l}(f)\, e^{-j2piflt}$$

Графики:

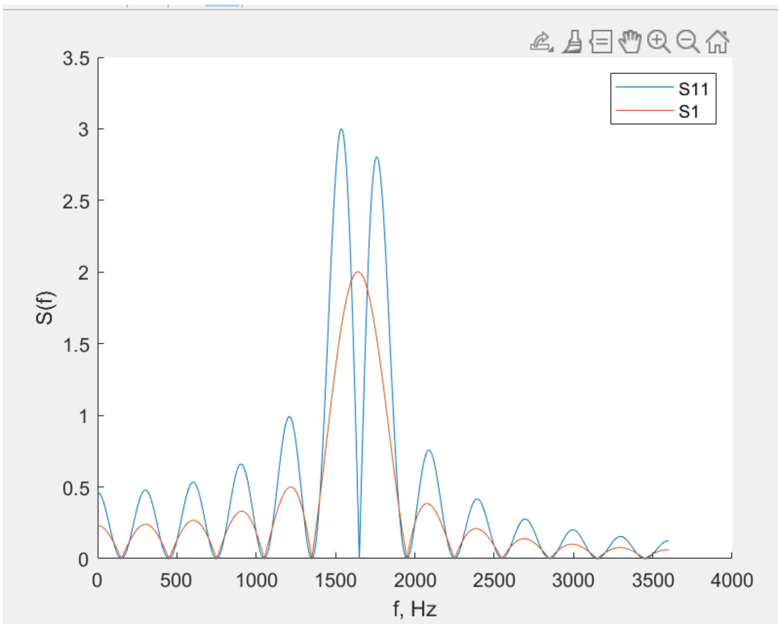

Рисунок 5: спектр последовательности длинной 2 1-го сигнала

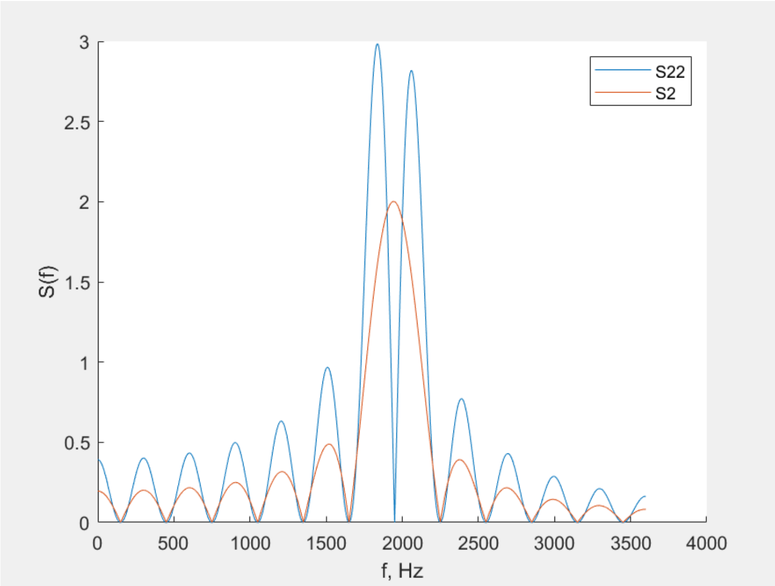

Рисунок 6: спектр последовательности длинной 2 2-го сигнала

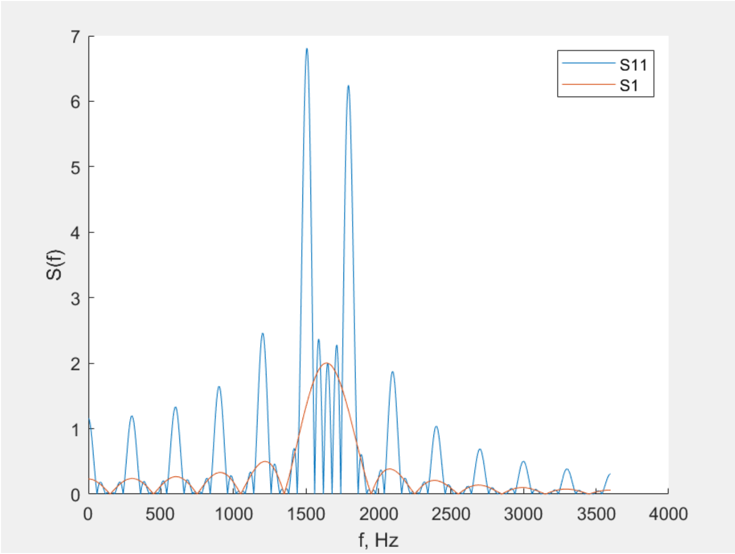

Рисунок 7: спектр последовательности длинной 5 1-го сигнала

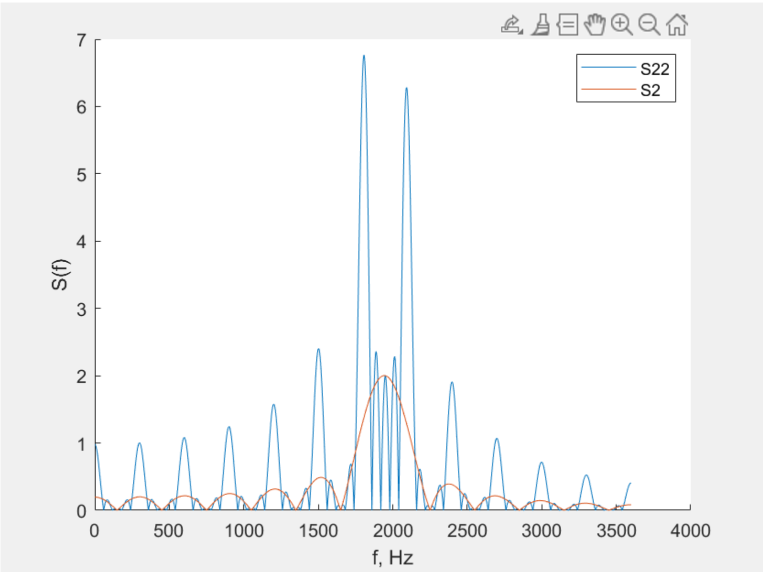

Рисунок 8: спектр последовательности длинной 5 2-го сигнала

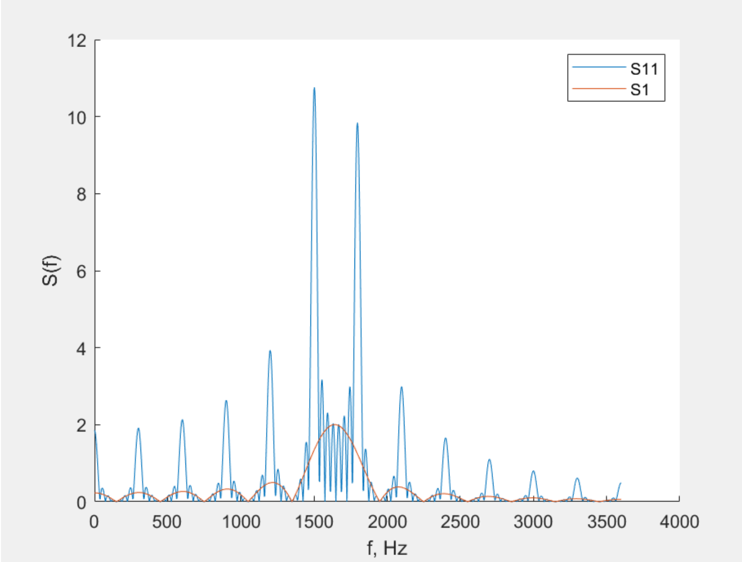

Рисунок 9: спектр последовательности длинной 8 1-го сигнала

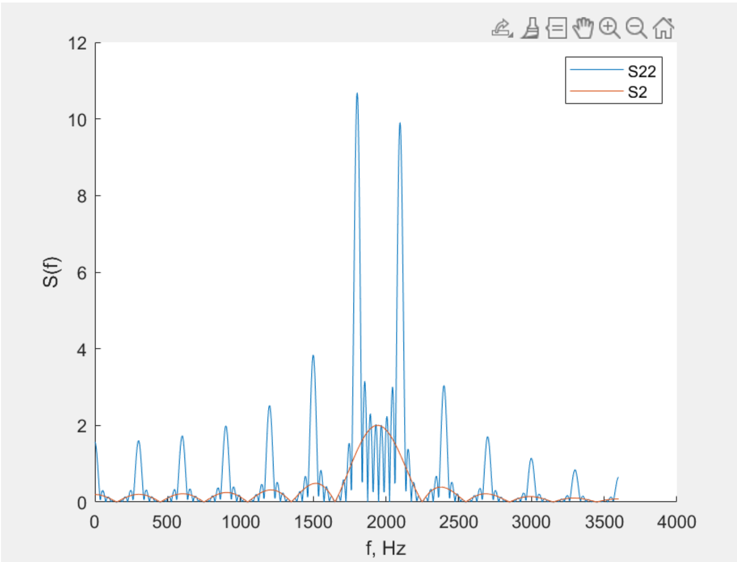

Рисунок 10: спектр последовательности длинной 8 2-го сигнала

Изменение ширины полосы частот при последовательностях разной длины:

N	Сигнал 1	Сигнал 2
2	1650-1350 = 300	1950-1650 = 300
4	1575-1425 = 150	1870-1725 = 150
6	1551-1449 = 102	1851-1749 = 102
8	1539-1461 = 78	1839-1761 = 78

Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что, задавая спектр последовательности длины N, его ширина полосы частот уменьшается в N раз, относительно ширины полосы частот спектра, заданного одним индексом.

Вывод: в ходе лабораторной работы были выведены формулы преобразования Фурье для отрезков гармоник сигналов косинуса (1.3) и синуса (1.6), была выведена формула выражения спектра последовательности сигнала. Было проведено преобразование Фурье для сигнала с частотной модуляцией, определены их амплитудные спектры и ширина полосы частот.