Цель работы:

Получение описания сигнального множества в частотной области;

Получение геометрического представления сигналов.

Исходные данные:

Вариант № 6. Квадратурная амплитудная модуляция (КАМ).

Параметры:

f_0 = 1800 Гц

V_{mod} = 1200 Бод

V_{inf} = 4800 бит/с.

1. Порядок выполнения работы

1.1 Вывод выражений спектра отрезка гармоник

Имеется сигнал:

$$S_c(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t), & \text{если } 0 < t < T \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Спектр данного сигнала будет рассчитываться следующим образом:

$g(t)$ – некоторая произвольная функция (огибающая)

$c(t) = \cos(2\pi f0t + \theta)$ – гармонический сигнал (несущая)

По теореме о свертке: $Sc\ (f) = G(f) * C(f)$, где $g(t) \leftrightarrow G(f)$, $c(t) \leftrightarrow C(f)$

где, $C(f) = 1/2\ (\delta(f - f0\ ) + \delta(f + f0\ ))$

Тогда получаем, что: $Sc\ (f) = G(f) * 1/2\ (\delta(f - f0\ ) + \delta(f + f0\ )) = 1/2\ (G(f - f0\ ) + G(f + f0\ ))$

Рассмотрим функцию:

$$g(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{1.1}$$

Подставим $g(t)$ в формулу прямого преобразования Фурье и у нас получится:

$$\begin{gathered} G(f) = \int_0^T g(t)e^{-j2\pi ft}dt = A\int_0^T e^{-j2\pi ft}dt = \frac{A}{-j2\pi f}\left(e^{-j2\pi fT} - 1\right) \\ = A\frac{\left(e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}\right)}{-j2\pi f}e^{-j\pi fT} = \frac{\mathrm{AT}\sin(\pi fT)}{\pi fT}e^{-j\pi fT} = \\ = AT sinc(fT)e^{-j\pi fT} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Подставим в выражение (1.1) получившуюся формулу (1.2) и получим итоговое выражение преобразования Фурье для отрезка функции косинуса:

$$S_c(f) = \frac{AT}{2}(sinc((f - f_0)T) + sinc((f + f_0)T))e^{-j\pi fT} \tag{1.3}$$

Теперь рассмотрим сигнал:

$$S_s(t) = \begin{cases} A\,sin(2\pi f_0 t), & \text{если } 0 < t < T \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$g(t) = A \leftrightarrow G(f)$ −некоторая произвольная функция (огибающая)

$c(t) = \sin(2\pi f0t) \leftrightarrow C(f)$ − гармонический сигнал (несущая)

По теореме о свертке: $Sc\,(f) = G(f) * C(f)$, где $g(t) \leftrightarrow G(f)$, $c(t) \leftrightarrow C(f)$

где, $C(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$

Аналогично выражениям (1.2) и (1.3) получаем:

$$S_s(f) = G(f) * \frac{1}{j2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right) = \frac{1}{2}\left(G(f - f_0) + G(f + f_0)\right) \qquad (1.4)$$

$$G(f) = ATsinc(fT)e^{-j\pi fT} \qquad (1.5)$$

Подставим значение спектра огибающего сигнала $G(f)$, определенное по формуле (1.5), в формулу (1.4) и получим итоговое выражение преобразования Фурье для отрезка функции синуса:

$$S_s(f) = \frac{AT}{2j}\left(sinc\left((f - f_0)T\right) - sinc((f + f_0)T)\right)e^{-j\pi fT} \qquad (1.6)$$

2. Преобразование Фурье для сигнального множества

Преобразование Фурье $Si\,(f)$ сигналов для квадратурной амплитудной модуляции (КАМ) выглядит следующим образом:

$$S_i(f) = s_{i1}\sqrt{\frac{T}{2}}\left(\mathrm{sinc}((f - f_0)T) + \mathrm{sinc}((f + f_0)T)\right) e^{-j\pi fT} + \\ +(s_{i2} / j)\sqrt{\frac{T}{2}}\left(\mathrm{sinc}((f - f_0)T) - \mathrm{sinc}((f + f_0)T)\right) e^{-j\pi fT}. \qquad (2.1)$$

Амплитудные спектры сигналов квадратурной амплитудной модуляции будут определятся как модули функций $Si\,(f)$.

Ширина полосы частот:

$$W = 2/T = 2 * V_{mod} = 2*1200 = 2400 \text{ гц} \qquad (2.2)$$

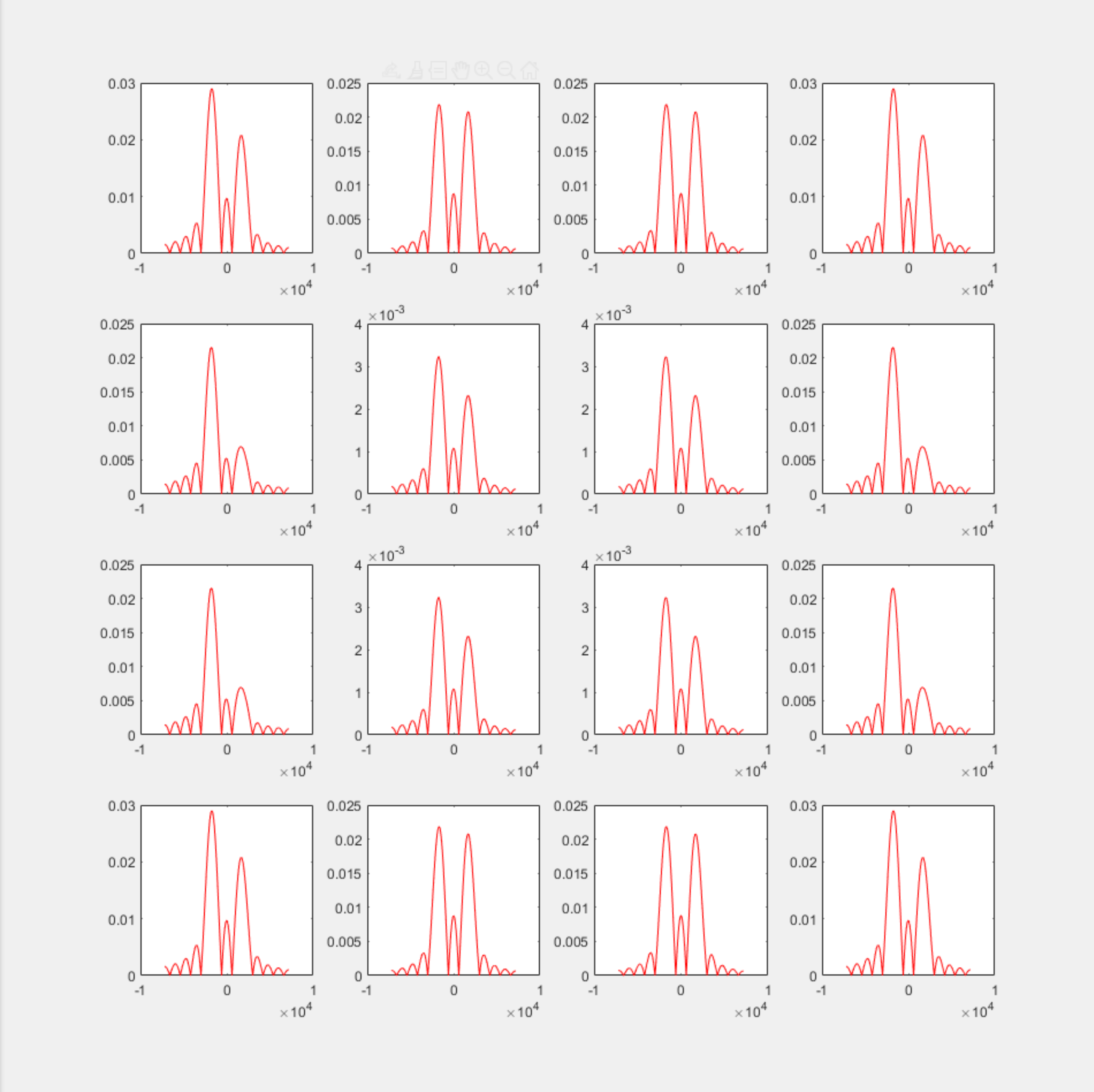

Рис. 1. Амплитудный спектр сигналов

3. Вывод выражения спектра последовательности сигналов

Последовательность сигналов можно задать следующим образом:

$$s_i(t) = \sum_{l=1}^{N-1} s_{i_l}(t - lT) \qquad (3.1)$$

Воспользуемся свойствами преобразования Фурье:

1) Задержка:

$$s(t-\tau) = S(f)\, e^{-j2\pi f\tau}$$

2) Линейность:

$$\begin{cases} g(t) \leftrightarrow G(f) \\ h(t) \leftrightarrow H(f) \end{cases} \Rightarrow a * g(t) + b * (h(t) \leftrightarrow a * G(f) + b * H(f)$$

Получаем, что:

$$s_i(t) = S_{i_1}(f)e^{-j2\pi f 1T} + S_{i_2}(f)e^{-j2\pi f 2T} + \ldots + S_{i_{N-1}}(f)\, e^{-j2\pi f(N-1)T}$$

Отсюда получаем, что действительно

$$s_i(t) = \sum_{l=1}^{N-1} S_{i_l}(f)e^{-j2\pi f lT} \qquad (3.2)$$

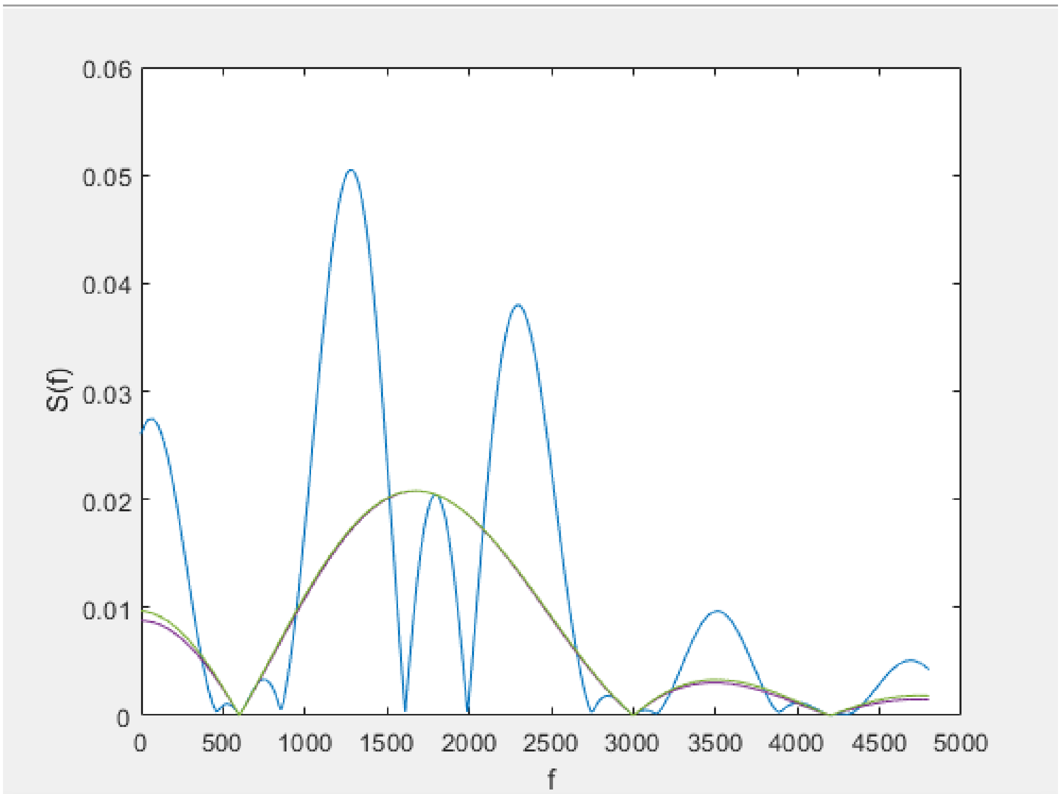

Рисунок 2. Спектр последовательности длиной 3, заданный случайными мульти индексами.

В данной последовательности сигналов были суммированы $S_4\, S_2\, S_1$

$$W = \frac{2400}{3} = 800\ Гц$$

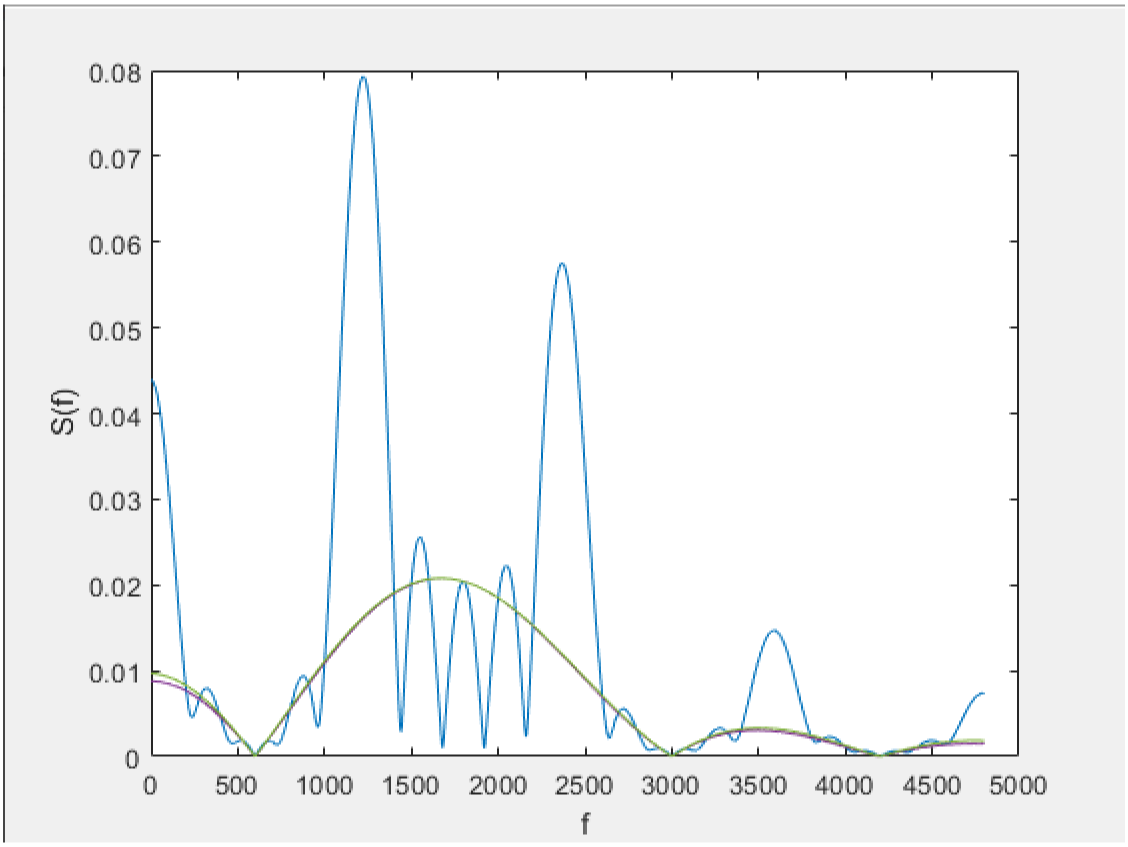

Рис 3. Спектр последовательности длиной 5, заданный случайными мульти индексами.

В данной последовательности сигналов были суммированы S_4 S_2 S_3 S_2 S_4

$$W = \frac{2400}{5} = 480\ Гц$$

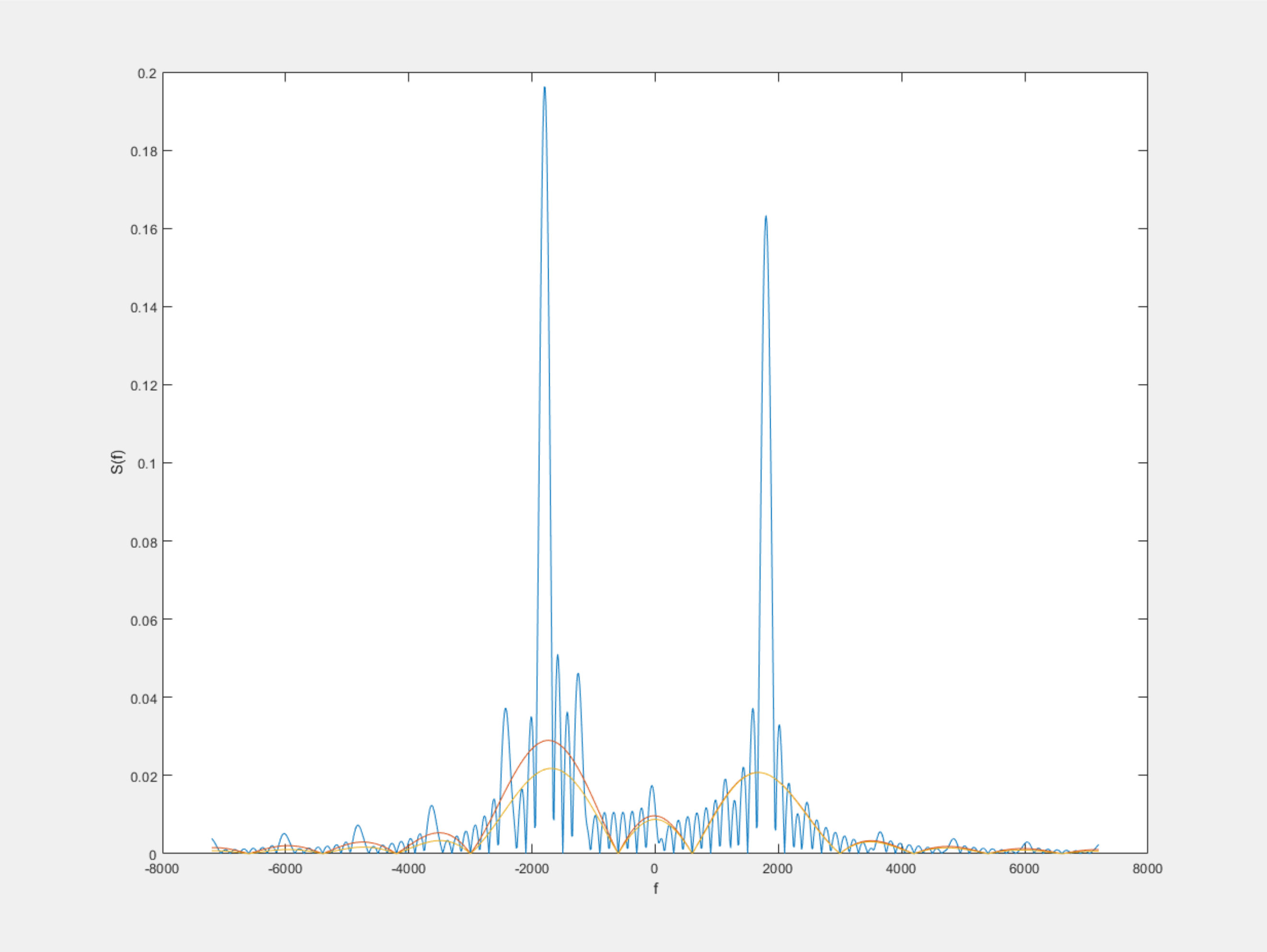

Рис 4. Спектр последовательности длиной 8, заданный мульти индексами.

В данной последовательности сигналов были суммированы S_1 S_{15}

$$W = \frac{2400}{8} = 300\ Гц$$

Исходя из полученных результатов можно увидеть, что ширина полосы частот последовательностей, заданных случайными индексами, совпадает с шириной полосы частот одиночных сигналов, определенной по формуле. В случае последовательности, заданной одним индексом, ширина полосы частот уменьшается относительно одиночного сигнала, а амплитуда увеличивается в N раз.

Ширина полосы частот КАМ для рассмотренных множеств сигналов:

$$W = \frac{2}{n*T}\ Гц.$$

Вывод

В ходе данной лабораторной работы были выведены формулы преобразования Фурье для отрезков гармоник сигналов косинуса и синуса. По формуле было проведено преобразование Фурье для сигналов множества с фазовой модуляцией, определены их амплитудные спектры и ширина полосы частот по формуле.

Так же была выведена формула преобразования Фурье для последовательностей сигналов, определен спектр для различных последовательностей, состоящих из сигналов множества, и построены соответствующий графики для нескольких различных последовательностей.

Приложение А

Листинг программы

```
clear;

f0 = 1800;
Vmod = 1200;
Vinf = 4800;

q = pow2(Vinf/Vmod);
T = (1/Vmod);
dots = 100;
f = -7200:(1/T)/dots:7200;
S = zeros(q, length(f));
num=1;

for i1 = 0:1:sqrt(q)-1
      for i2 = 0:1:sqrt(q)-1
            s1 = 1-2*i1/(sqrt(q)-1);
            s2 = 1-2*i2/(sqrt(q)-1);
            A = max(abs(s1), abs(s2));
            subplot(sqrt(q),sqrt(q),num)
            S(num,:) = ((A*s1)*sqrt(T/2)*(sinc((f-f0)*T)+sinc((f+f0)*T)).*exp(-
            1j*pi*f*T)) + ((A*s2/1j)*sqrt(T/2)*((sinc(f-f0)*T)-
            sinc((f+f0)*T)).*exp(-1j*pi*f*T));
            plot(f, abs(S(num,:)), 'r');
            num = num+1;
      end
end

%Спектр последовательных сигналов:
N = 8;
m1 = [1,15,1,15,1,15,1,15];
Si = zeros(q, length(f));
for l = 1:N
      Si = Si + S(m1(l)+1,:).*exp(-1j*2*pi*(l-1)*f*T);
end
figure();
plot(f, abs(Si(1, :)));
hold on;
plot(f, abs(S(1, :)));
plot(f, abs(S(2, :)));
xlabel("f");
ylabel("S(f)")
```