

Цель работы

Произвести исследование дискретных сигналов в частотной области, а именно: получить описание сигнального множества в частотной области, найти амплитудные спектры одиночных сигналов и сигнального множества, сравнить полученные результаты.

Исходные данные для 4 варианта КАМ

$$f_0 = 2400 \text{ Гц}$$

$$V_{mod} = 600 \text{ Бод}$$

$$V_{inf} = 2400 \text{ Б/с}$$

1. Вывод спектра гармонического сигнала

Пусть сигнала задан как

$$s(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 t), & 0 < t < T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим исходный сигнал $s(t)$ как произведение $s(t) = g(t)c(t)$, где $g(t)$ – некоторая произвольная функция (ограничивающая), а $c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Тогда, согласно теореме о свертке, спектр исходного сигнала определяется как $S(f) = G(f) * C(f)$.

Согласно формуле Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}.$$

Отсюда, $c(t) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$.

Спектр δ – функции $\delta(f) = 1$. Отсюда, можно соотнести $1 \leftrightarrow \delta(f)$. Согласно свойству сдвига по частоте, $f(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow F(f - f_0)$, иначе говоря, при сдвиге спектра, оригинал сдвигается на $e^{j2\pi f_0 t}$. Таким образом, с учетом свойства сдвига:

$$C(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

Тогда спектр исходного сигнала $S(f)$ будет равен:

$$S(f) = \frac{1}{2}G(f)(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

В качестве $g(t)$ рассмотрим:

$$g(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдем спектр $G(f)$:

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_0^T A e^{-j2\pi f t} dt = A \int_0^T e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_0^T = \\ &= -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j2\pi f T} - 1) = -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j\pi f T} e^{-j\pi f T} - e^{-j\pi f T} e^{j\pi f T}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{AT}{T\pi f} \sin(\pi f T) e^{-j\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(\pi f T) e^{-j\pi f T}$$

Тогда спектр $S(f)$ будет равен:

$$S(f) = \frac{1}{2} AT \operatorname{sinc}(\pi f T) (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) e^{-j\pi f T}$$

Используя свойство свертки:

$$S(f) = \frac{1}{2} AT (\operatorname{sinc}((f - f_0)T) + \operatorname{sinc}((f + f_0)T)) e^{-j\pi f T} \text{ ч.т.д}$$

Схожим образом найдем спектр сигнала

$$s(t) = \begin{cases} A \sin(2\pi f_0 t), & 0 < t < T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Представим сигнал как произведение $s(t) = g(t)c(t)$, где $g(t)$ – огибающая, а $c(t) = \sin(2\pi f_0 t)$. В таком случае по теореме о свертке спектр $S(f) = G(f)C(f)$.

Найдем спектр $C(f)$. Согласно формуле Эйлера, $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$. Тогда

$$c(t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}$$

По свойству сдвига по частоте, $f(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow F(f - f_0)$, иначе говоря, при сдвиге спектра, оригинал сдвигается на $e^{j2\pi f_0 t}$. Спектр δ – функции $\delta(f) = 1$. Отсюда, можно соотнести $1 \leftrightarrow \delta(f)$. Таким образом, с учетом свойства сдвига:

$$C(f) = \frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)$$

Тогда спектр $S(f)$ будет равен:

$$S(f) = \frac{1}{2j} G(f) (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

В качестве $g(t)$ рассмотрим:

$$g(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Спектр $G(f)$ равен

$$G(f) = AT \operatorname{sinc}(\pi f T) e^{-j\pi f T}$$

Тогда спектр $S(f)$ будет равен:

$$S(f) = \frac{1}{2j} AT \operatorname{sinc}(\pi f T) (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) e^{-j\pi f T}$$

Используя свойство свертки:

$$S(f) = \frac{1}{2j} AT(\text{sinc}((f - f_0)T) + \text{sinc}((f + f_0)T)e^{-j\pi fT}) \text{ ч.т.д.}$$

2. Исследование квадратурной амплитудной модуляции в частотной области.

Формула сигнала для квадратурной амплитудной модуляции выглядит следующим образом:

$$s_i(t) = \begin{cases} s_{i1} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t) + \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t), & \text{если } 0 < t < T \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используя выражения (6) и (8), получим преобразование Фурье для КАМ:

$$S_i(f) = s_{i1} \sqrt{\frac{T}{2}} (\text{sinc}((f - f_0)T) + \text{sinc}((f + f_0)T)e^{-j\pi fT}) + \frac{s_{i2}}{j} \sqrt{\frac{T}{2}} (\text{sinc}((f - f_0)T) - \text{sinc}((f + f_0)T)e^{-j\pi fT})$$

где $i = 0, 1, \dots, q - 1$.

Амплитудные спектры сигналов КАМ вычисляются как модули этих комплекснозначных функций $S_i(f)$, $i = 0, 1, \dots, q-1$.

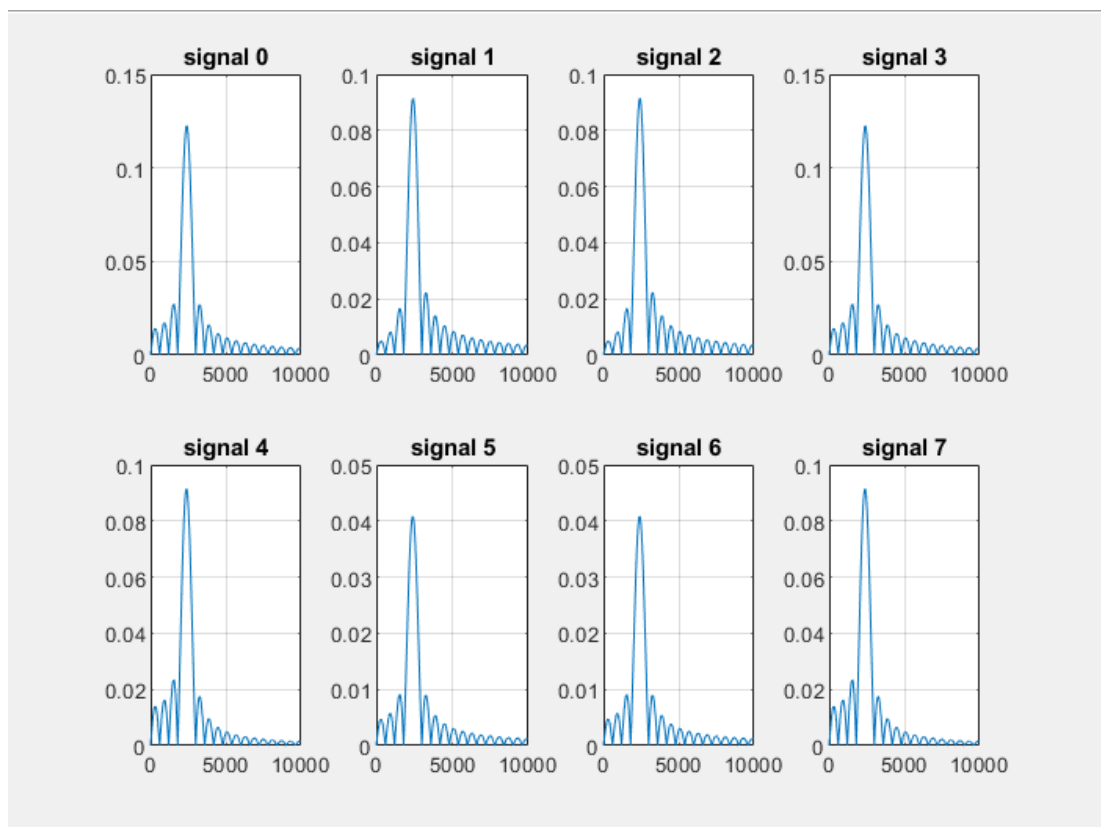


Рисунок 1. Графики амплитудных спектров сигналов 0-7

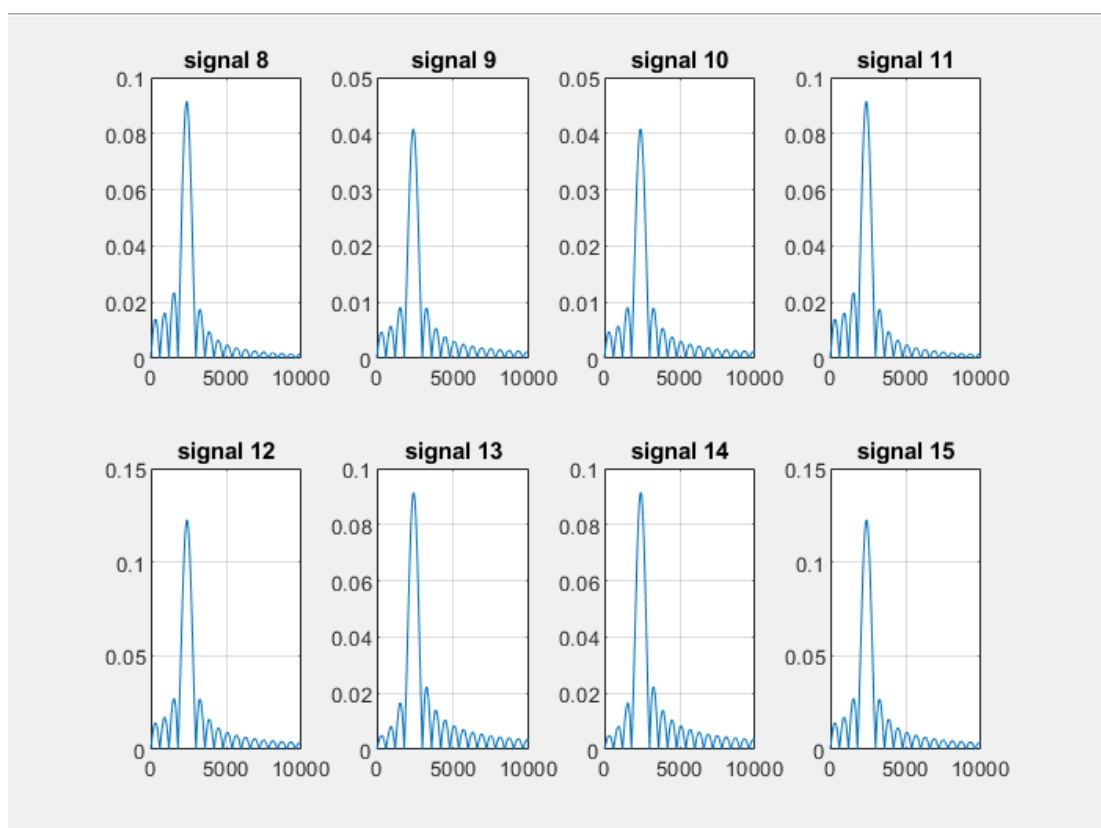


Рисунок 2. Графики амплитудных спектров сигналов 8-15

3. Спектр последовательности сигналов.

Пусть $\{s_i(t)\}$ – сигнальное множество, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Тогда

$$s_i(t) = \sum_{l=0}^{N-1} s_{il}(t - lT),$$

где N – длина последовательности индексов. Используя свойство линейности:

если $g(t) \leftrightarrow G(f)$ и $f(t) \leftrightarrow F(f)$, то $x * g(t) + y * f(t) \leftrightarrow x * G(f) + y * F(f)$

А также свойство задержки:

$$s(t - \tau) \leftrightarrow S(f)e^{-j2\pi f\tau}$$

Получаем, что

$$S_i(f) = \sum_{l=0}^{N-1} S_{il}(f)e^{-j2\pi flT}$$

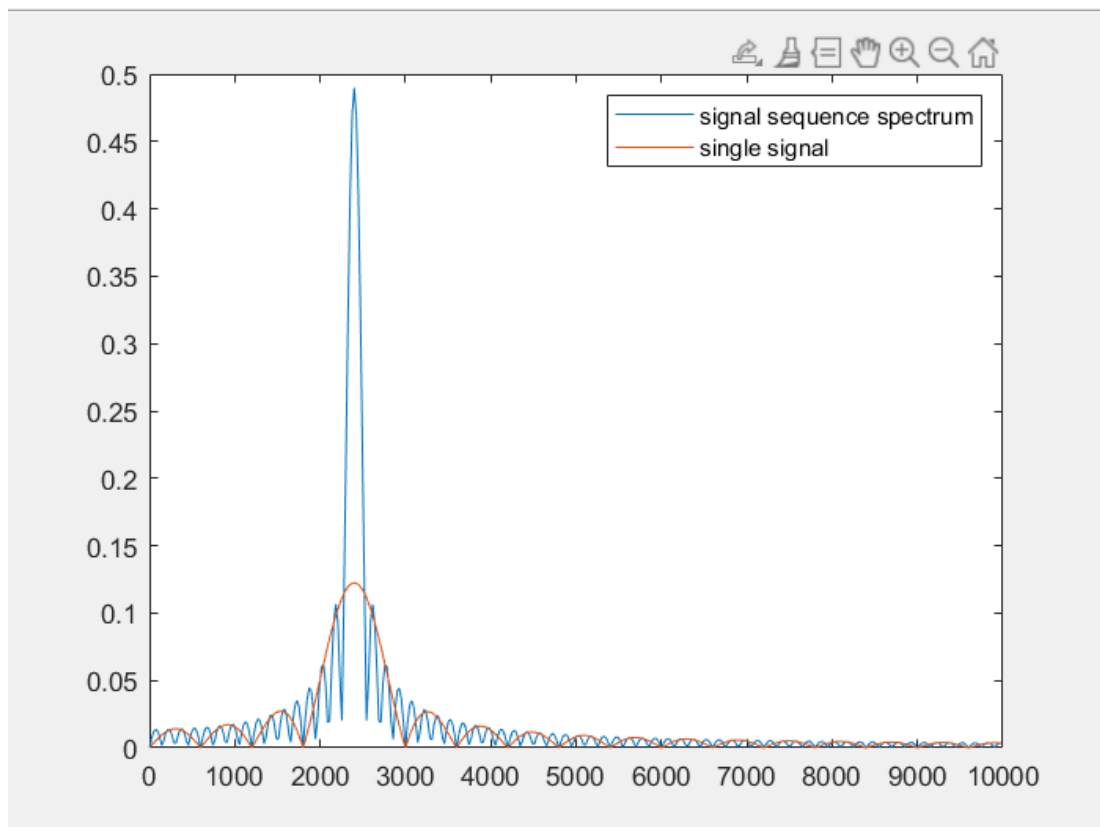


Рисунок 3. Спектр последовательности сигналов длиной 4, , ширина полосы = 312 Гц

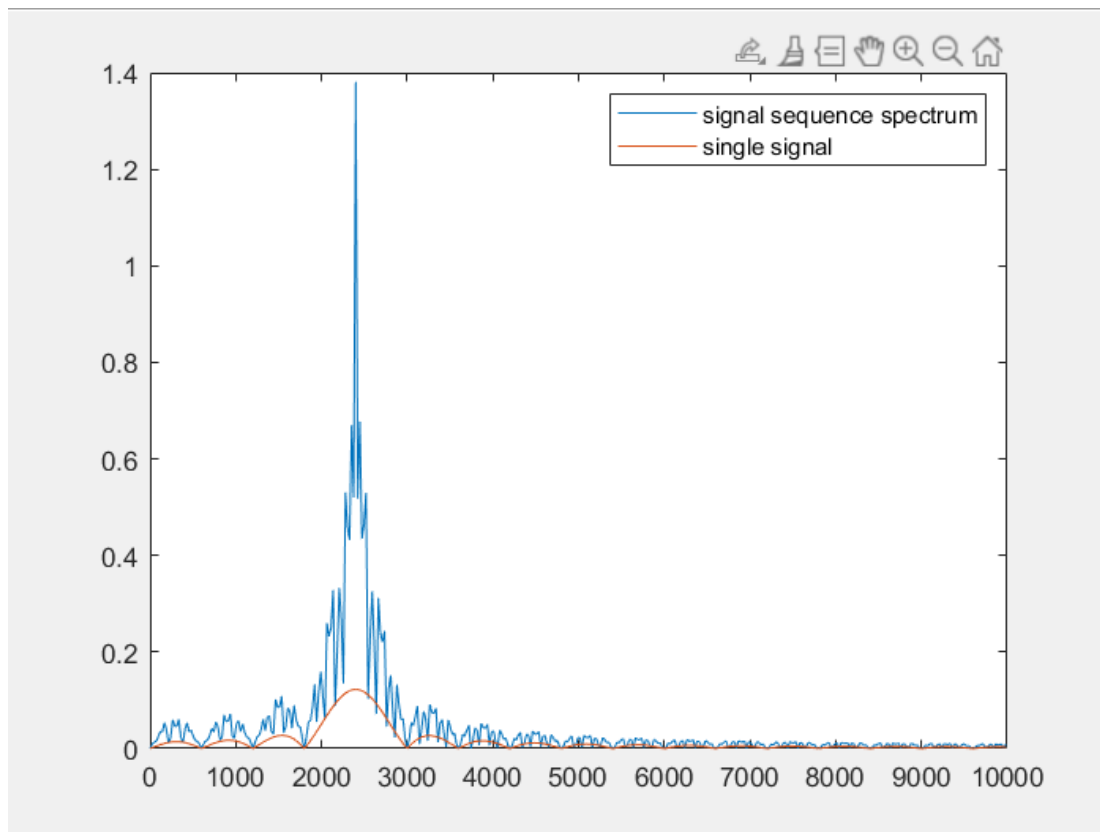


Рисунок 4. Спектр последовательности сигналов длиной 15, ширина полосы = 83 Гц

Сравнивая полученные графики, можно заметить, что максимальная амплитуда спектра ($2/(T*N)$) последовательности сигналов прямо пропорциональна длине сигналов.

Вывод

В ходе проведения лабораторной работы были выведены выражения спектров отрезков синусоидальной и косинусоидальной гармоник, вычислены преобразования Фурье для квадратурной амплитудной модуляции, а также амплитудные спектры каждого сигнала.

Для последовательности сигналов было выведено выражение её спектра, вычислены спектры для последовательностей сигналов различной длины.

Так же была рассчитана ширина полосы частот для последовательности спектров по формуле $\frac{2}{T*N}$. Для 4 сигналов она будет равна 312 Гц.

Спектр последовательности сигналов представляет собой сумму спектров сигналов из последовательности с разным периодом следования.

Листинг программы

```
clc
clear all
f0 = 2400;
Vmod = 600;
Vinf = 2400;
T = 1/Vmod;
m = Vinf/Vmod;
q = 2^m;

i1 = zeros(1, q); i2 = zeros(1, q);
s1 = zeros(1, q); s2 = zeros(1, q);
val = 0; A = 3;
indx = 0;

fmax = 10000;
step = f0 / 100;
f = 0:step:fmax;
signals = zeros(q, (fix(fmax/step) + 1));
for j=1:1:q
    i1(j) = val;
    indx = indx + 1;
    if(indx == A+1)
        indx = 0;
        val = val + 1;
    end
    i2(j) = mod(j-1,A+1);

    s1(j) = A * (1 - (2*i1(j))/(sqrt(q)-1));
    s2(j) = A * (1 - (2*i2(j))/(sqrt(q)-1));

    signals(j, :) = abs(s1(j) .* sqrt(T / 2) .* (sinc((f -
f0) .* T) + sinc((f + f0) .* T)) .* exp(-1j .* pi .* f .*
T) + (s2(j)/1i) .* sqrt(T/2) .* (sinc((f - f0) .* T) -
sinc((f + f0) .* T)) .* exp(-1j .* pi .* f .* T));
end

% графики амплитудного спектра
for k = 0:q-1
    figure(fix(k/8) + 1);
    subplot(2,4,mod(k,8) + 1);
    plot(f,signals(k+1,:));
    grid on;
    title("signal " + k);
end

N = 4;
```

```

%генерация мультииндексов
L = randi([1,q],1,N);
Si = zeros(1,fix(fmax/step) + 1);
for k = 1:N
    Si = Si + signals(L(k),:).*exp(-1i*2*pi*f*L(k)*T);
end
figure(3);
plot(f,abs(Si));
hold on;
plot(f,abs(signals(1,:)));
hold off;
legend("signal sequence spectrum", "single signal")

N = 15;
%генерация мультииндексов
L = randi([1,q],1,N);
Si = zeros(1,fix(fmax/step) + 1);
for k = 1:N
    Si = Si + signals(L(k),:).*exp(-1i*2*pi*f*L(k)*T);
end
figure(4);
plot(f,abs(Si));
hold on;
plot(f,abs(signals(1,:)));
hold off;
legend("signal sequence spectrum", "single signal")

```