Цель работы:

Изучение свойств дискретизации аналоговых сигналов. Изучение методов Фурье-анализа аналоговых сигналов.

1. Выполнить аналитический расчет спектров для двух классов сигналов.

Для аналитического расчета периодического сигнала выполним разложение в синусно-косинусный ряд Фурье по формуле:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \, cos \, cos \left(\frac{2\pi}{T} kt \right) + b_k \, sin \, sin \left(\frac{2\pi}{T} kt \right) \right) \quad (1.1)$$

Затем, используя коэффициенты a_k и b_k, определенных по формулам:

$$a_k = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left(\frac{2\pi}{T} kt \right) dt \quad (1.2)$$

$$b_k = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left(\frac{2\pi}{T} kt \right) dt \quad (1.3)$$

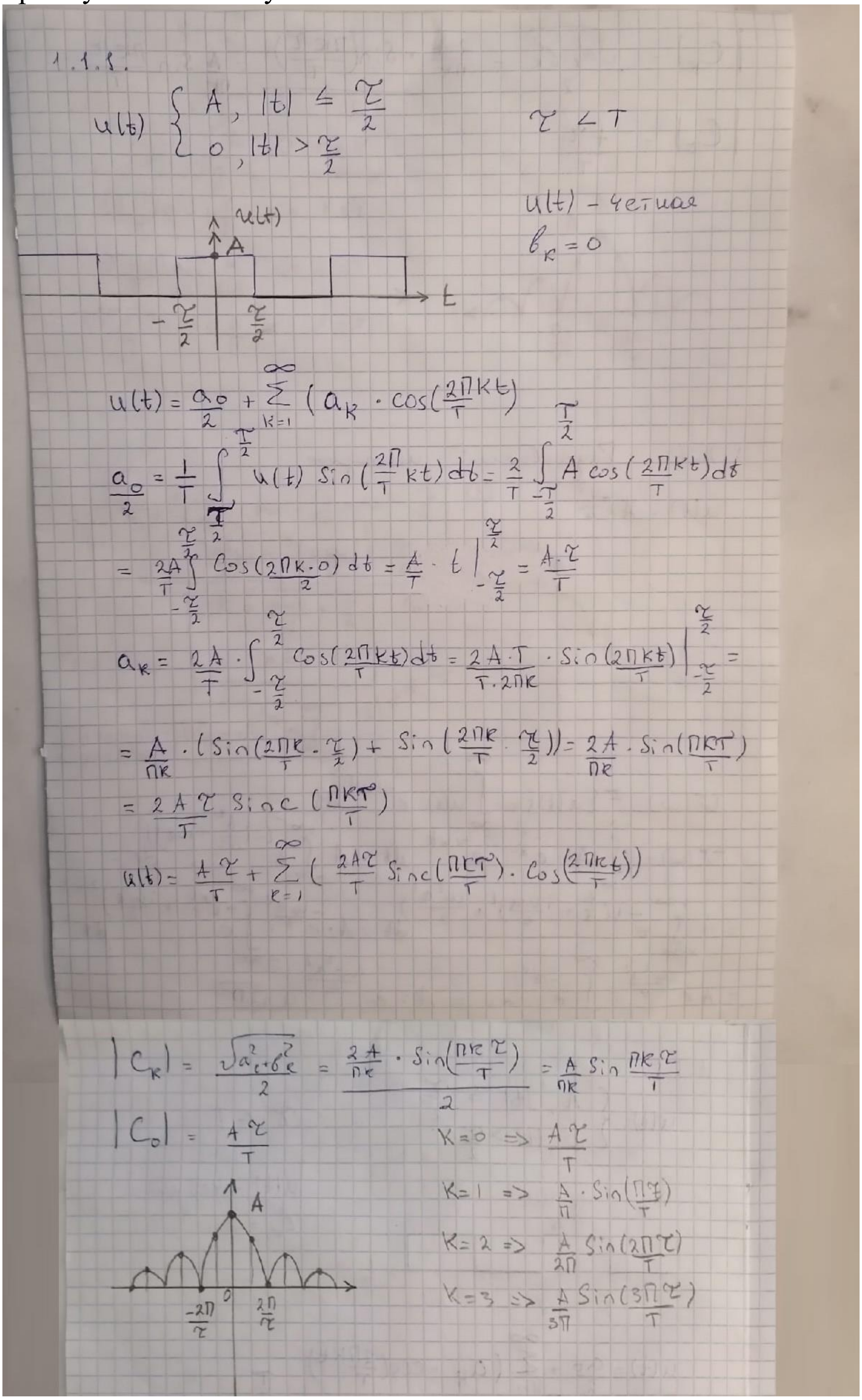
Вычисляем амплитудный спектр:

$$|\dot{C}| = \frac{\sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}}{2} \quad (1.4)$$

Анализ непериодического сигнала будет выполняться на основе комплексного коэффициента $\dot{C}_k$ вычисляемого по формуле:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-j\omega kt} dt \quad (1.5)$$

1.1. Периодические сигналы с периодом T: Последовательность прямоугольных импульсов.



1.1.1.

$$u(t)\begin{cases} A, & |t| \le \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \qquad \tau < T$$

$u(t)$ – четная

$b_k = 0$

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\right)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt$$

$$= \frac{2A}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{\cos(2\pi k \cdot 0)}{2}\,dt = \frac{A}{T}\cdot t\,\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{A\cdot\tau}{T}$$

$$a_k = \frac{2A}{T}\cdot\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt = \frac{2A\cdot T}{T\cdot 2\pi k}\cdot\sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} =$$

$$= \frac{A}{\pi k}\cdot\left(\sin\left(\frac{2\pi k}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi k}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)\right) = \frac{2A}{\pi k}\cdot\sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right)$$

$$= \frac{2A\tau}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right)$$

$$u(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2A\tau}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\right)$$

$$|C_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} = \frac{\frac{2A}{\pi k}\cdot\sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right)}{2} = \frac{A}{\pi k}\sin\frac{\pi k \tau}{T}$$

$$|C_0| = \frac{A\tau}{T}$$

$k=0 \Rightarrow \frac{A\tau}{T}$

$k=1 \Rightarrow \frac{A}{\pi}\cdot\sin\left(\frac{\pi\tau}{T}\right)$

$k=2 \Rightarrow \frac{A}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)$

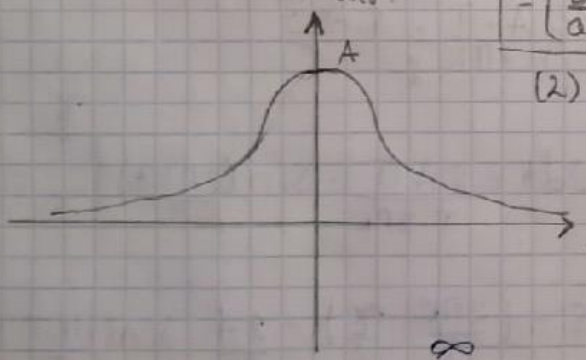
$k=3 \Rightarrow \frac{A}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi\tau}{T}\right)$

Рис. 1. Решение периодического сигнала.

1.2. Непериодические сигналы: Гауссовский импульс

1.2.6. Гауссовский импульс

$$u(t) = A e^{-\frac{t^2}{a^2}}$$



(1) $$\boxed{\frac{t^2}{a^2} + i\omega t = \frac{t^2}{a^2} + i\omega t + \left(\frac{i\omega a}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega a}{2}\right)^2 = \left(\frac{t}{a} + \frac{i\omega a}{2}\right)^2 + \frac{\omega^2 a^2}{4}}$$

(2) $$\boxed{\frac{t}{a} + \frac{i\omega a}{2} = x \qquad dt = a\,dx}$$

(3) $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$ – Гауссов интеграл

$$U(\omega) = F\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \qquad (1)$$

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-\frac{t^2}{a^2}} \cdot e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\left(\frac{t^2}{a^2} + j\omega t\right)\right)} dt =$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\left(\frac{t}{a} + \frac{i\omega a}{2}\right)^2 + \frac{\omega^2 a^2}{4}\right)} dt = A \cdot e^{-\frac{\omega^2 a^2}{4}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{a} + \frac{i\omega a}{2}\right)^2} dt \quad (2)$$

$$= A e^{-\frac{\omega^2 a^2}{4}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \underline{A \cdot e^{-\frac{\omega^2 a^2}{4}} \cdot a\sqrt{\pi}}$$

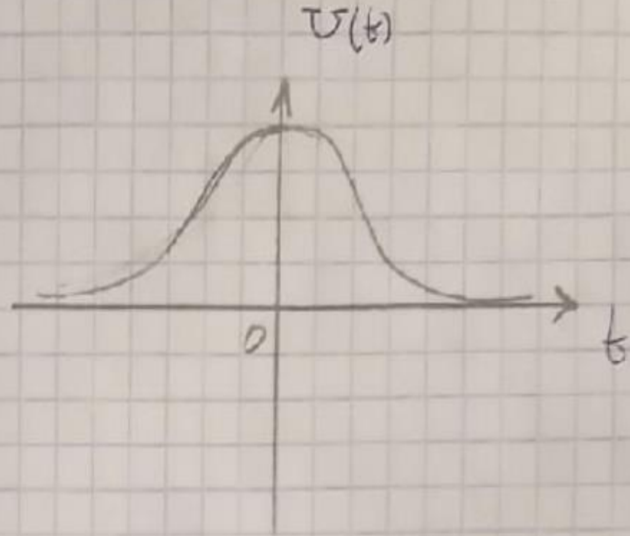


Рис. 2. Решение непериодического сигнала.

Вывод:

В ходе выполнения данного пункта был проведен анализ Фурье для периодического и непериодического сигналов. Также были посчитаны их амплитудные спектры, построены соответствующие графики.

Заметим, что ряд Фурье представляет собой разложение на гармоники, а также позволяет нам разложить более сложную функцию на сумму простых (см. формулу (1.1)). Амплитудный спектр сигнала является его представлением в частотной области, что в целом позволяет нам проводить дальнейшую работу с ним.

2. Анализ синусоидальных функций

Провести анализ функций $u_1(t) = sin\,(2\pi f_1 t)\,, u_2(t) = sin\,(2\pi f_2 t)$ интервале $\left[-\frac{T}{2}\,,\frac{T}{2}\right]$.

2.1 Все значения функций на интервале [-0.5; 0.5] представлены на следующем графике:

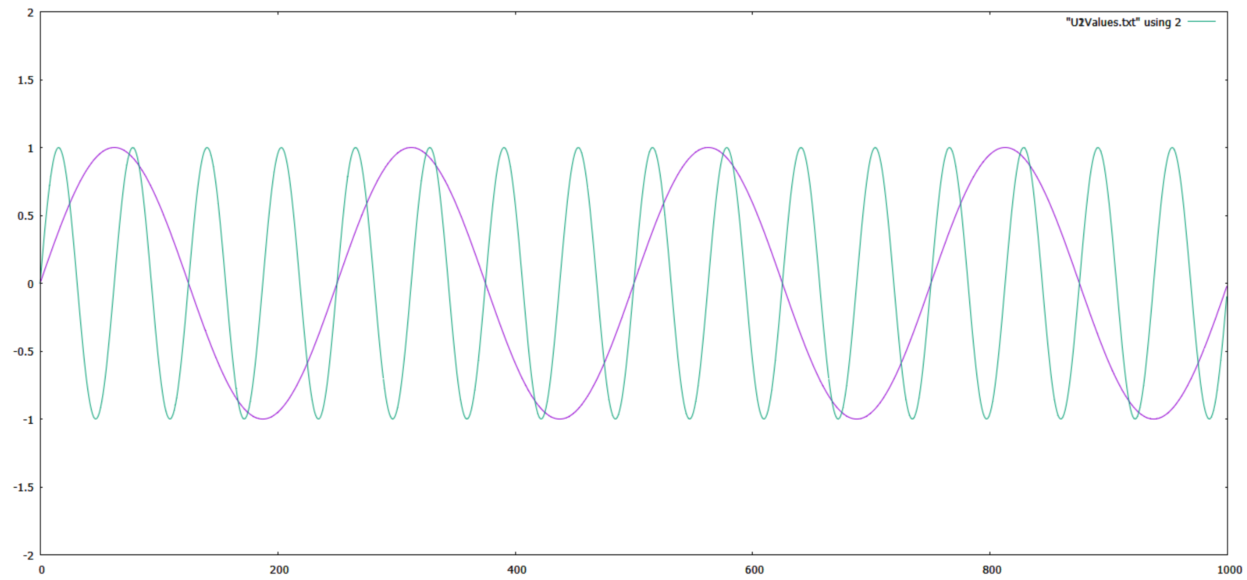


Рис. 3. Графики $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

*2.1.*Скалярное произведение двух функций рассчитывается по формуле:

$$\big(u_1(t), u_2(t)\big) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \quad u_1(t)u_2^*(t)dt \qquad (2.3)$$

В результате вычисления скалярного произведения по формуле 2.1:

$$\big(u_1(t), u_2(t)\big) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \quad u_1(t){u^*}_2\,(t)dt = 0$$

В результате вычисления скалярного произведения в программе:

$$\big(u_1(t), u_2(t)\big) = \ 3.87468e^{-13}$$

2.2. Вычисление нормы функции производится по формуле:

$$\big|\big|u(t)\big|\big| = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \quad u^2(t)dt} \qquad (2.2)$$

2.3 В результате вычисления нормы функции в программе:

$$\big|\big|u_{1,2}(t)\big|\big| = 0{,}7071$$

2.4. Если скалярное произведение двух функций равно нулю, то они являются ортогональными друг другу. В результате вычислений, произведенных в пункте 2.2, $\left(u_1(t), u_2(t)\right) \approx 0$, тогда функции ортогональны.
2.5. Для того чтобы представить функции элементами ортонормированного базиса их норма должна быть равна 1, то есть их необходимо поделить на норму функции, которую мы уже рассчитали в пункте *2.3*.
2.6. Исследуемые функции останутся элементами ортонормированного базиса при:

1) Удвоении частоты f_1 и f_2;
2) Увеличить интервал $[-\frac{T}{2};\ +\frac{T}{2}]$ вдвое;
3) Уменьшить интервал $[-\frac{T}{2};\ +\frac{T}{2}]$ вдвое.

Вывод:

Был проведен анализ двух функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, построены их графики. По формулам (2.1) и (2.2) были определены их скалярное произведение и нормы. Было выяснено, что после преобразования (2.3) данные функции могут являться членами ортонормированного базиса. А также при изменении параметров, описанных в пункте 2.6. функции останутся элементами ортонормированного базиса, но только в том случае, если количество периодов этих функций на заданном промежутке будет являться целым числом. Помимо этого, частоты должны выбирать следующим образом: $f_i = \frac{l_i}{T}$, где l_i $-$ любое целое число, T $-$ период.

3. Дискретизация синусоидального сигнала.

Исследовать процедуру дискретизация синусоидального сигнала $u(t)$ с частотой $F = 10$ Гц и длительностью $T = 1$ cекунды. Выборка отсчетов происходит с частотой $f_d = 1.5F, 1.75F, 2F, 3F, 1000F$. По дискретным отсчетам отсчетам нужно восстановить сигнал, применив формулу интерполяционного ряда Котельникова:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \quad u(nT_d) \cdot sinc\left(\pi\left(\frac{t}{T_d} - n\right)\right) \qquad (3.1)$$

Исходный сигнал разбивается на дискретные во времени отсчеты с частотой f_d. Затем, с помощью формулы (3.1), происходит восстановление сигнала $u(t)$ по получившимся отсчетам.

Построим графики сигналов.

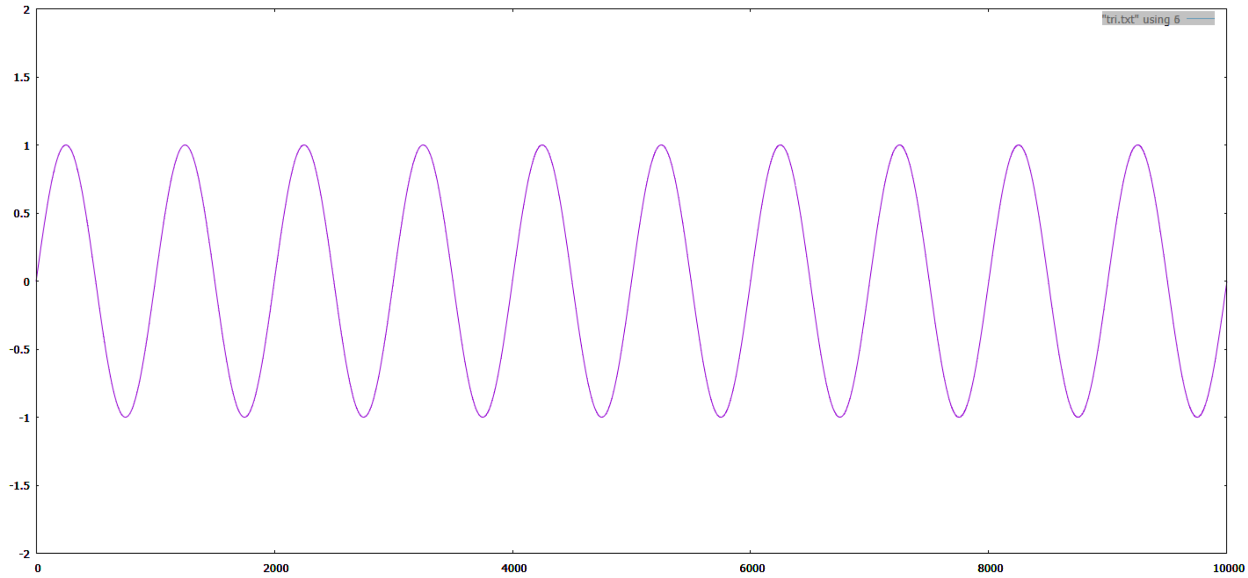


Рис. 4. Исходный график сигнала.

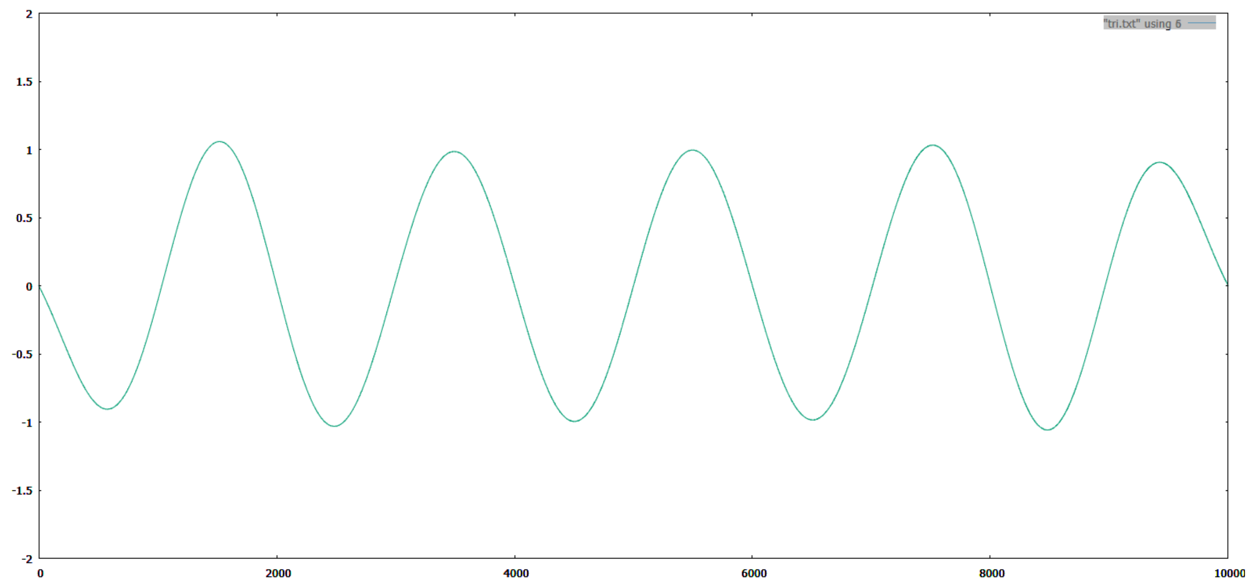


Рис. 5. График восстановленного сигнала при $f_d = 1.5F$.

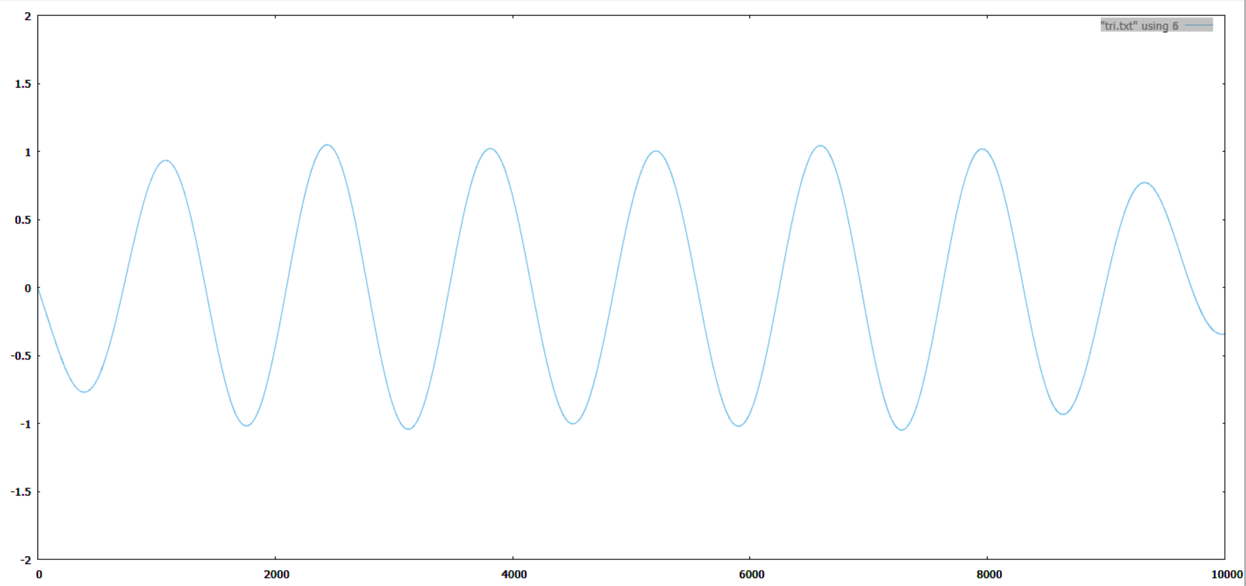


Рис. 6. График восстановленного сигнала при $f_d = 1.75F$.

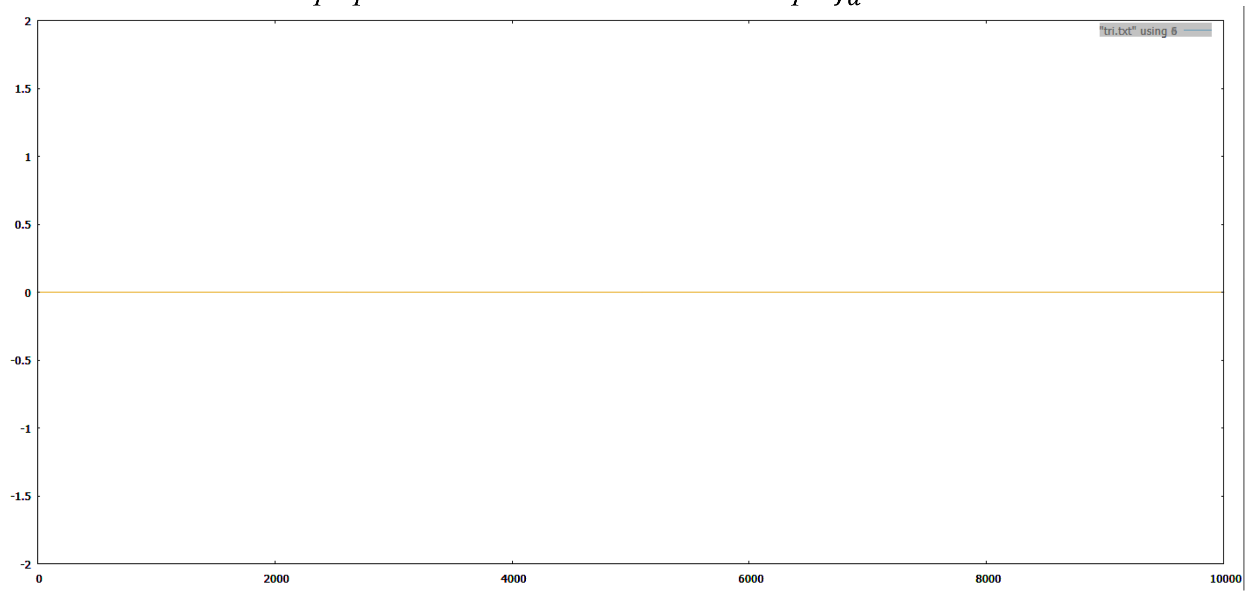


Рис. 7. График восстановленного сигнала при $f_d = 2F$.

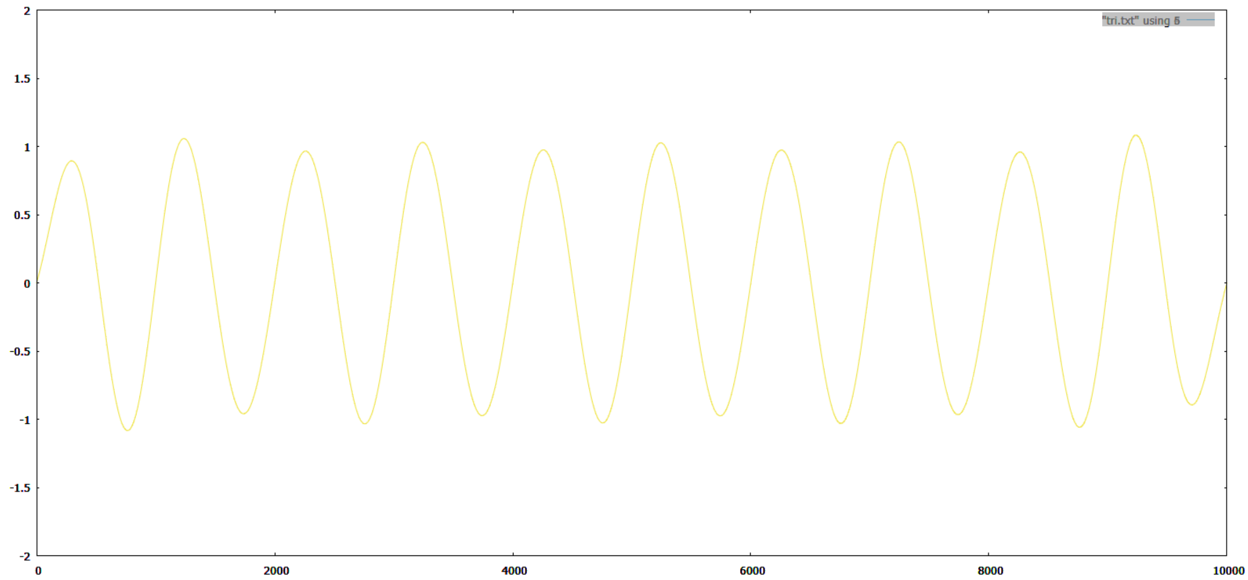


Рис. 8. График восстановленного сигнала при $f_d = 3F$.

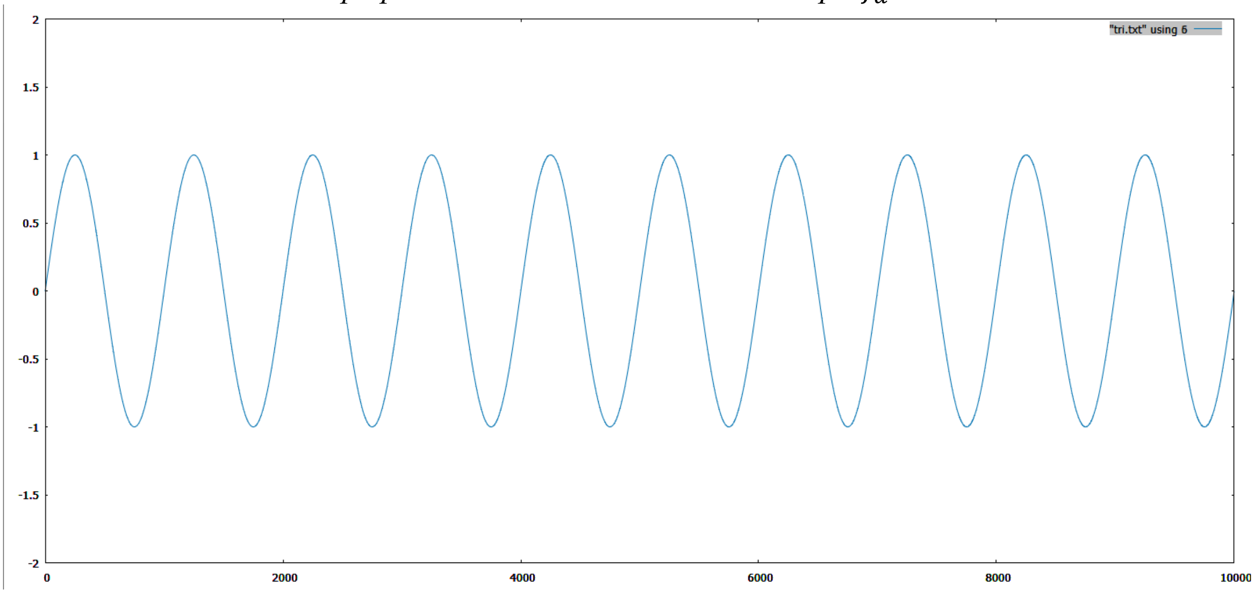


Рис. 9. График восстановленного сигнала при $f_d = 1000F$.

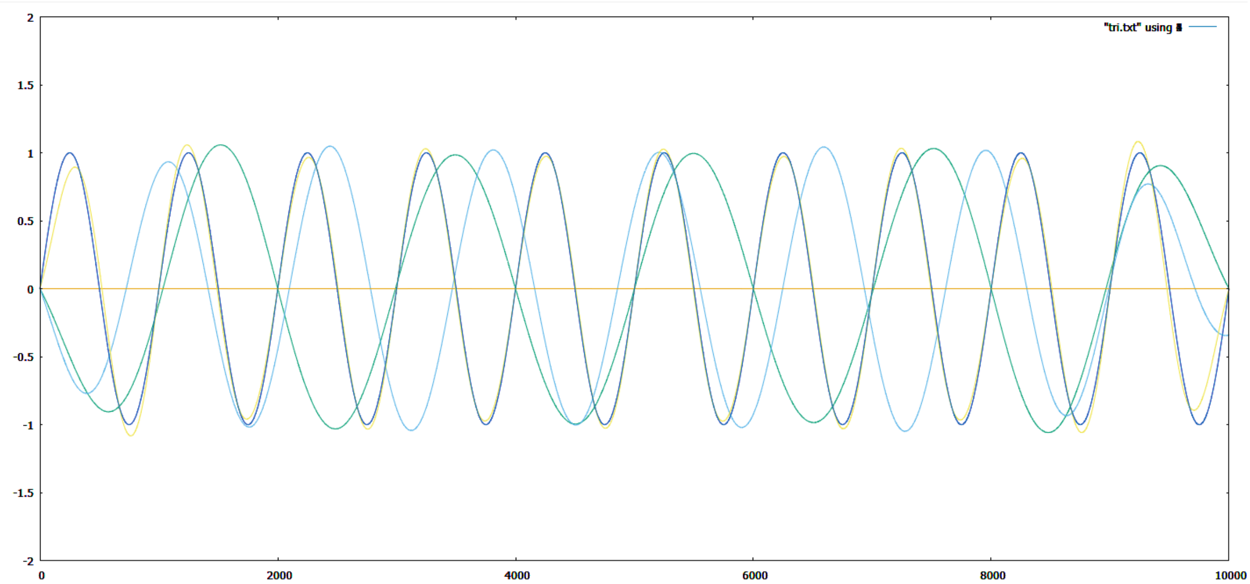


Рис. 10. Сравнение графиков восстановленного сигнала и восстановленных.

Вывод:

В данном задании мы смогли точно восстановить с помощью интерполяционного ряда Котельникова (3.1) исходный синусоидальный сигнал, дискретизированный с частотой 1000F (см. рисунок 16) и очень близкое к исходному 3F (см. рисунок 15). При частоте, равной 2F (см. рисунок 14) график получился равным нулю, поскольку мы берём 2 отчёта за период и постоянно попадаем в 0 (сигнал описывается синусом). Заметим, что по частотам меньше либо равных 2F не удалось восстановить, что объясняется условием в теореме Котельникова: восстановление исходного аналогового сигнала возможно, если равномерная дискретизация выполняется с частотой

f_d , минимум вдвое превышающую частоту f_c, где f_c - максимальная частота исходного сигнала :

$$f_d > 2f_c$$

Отметим, что при дискретизации с частотой 3F график не удалось восстановить до конца, хотя неравенство выполнялось. Это можно объяснить тем, что интерполяционный ряд Котельникова представляет сигнал непрерывным и сумма должна быть бесконечной, а мы сделали ее конечной, поэтому это привело усечению и искажению на краях графика восстановленного сигнала.

4. Передискретизация изображения.

Реализовать процедуру передискретизации изображения с помощью интерполяционного ряда Котельникова. Формат исходного изображения — BMP24, разрешение исходного изображения $W \times H$ пикселей. Результатом передискретизации будет изображение размером $nW \times mH$. Выполнить передискретизацию с различными комбинациями значений m и n:

1) m > 1, n > 1.
2) m < 1, n < 1.
3) m > 1, n < 1.
4) m < 1, n > 1.

Исходное изображение:

Рис. 11. Исходное изображение.

1) При m = 1.5, n = 1.5:

Рис. 12. Изображение при m = 1.5, n = 1.5.

2) При m = 0.5, n = 0.5:

Рис. 13. Изображение при m = 0.5, n = 0.5.

3) При m = 1.5, n = 0.5:

Рис. 14. Изображение при m = 1.5, n = 0.5.

4) При m = 0.5, n = 1.5:

Рис. 15. Изображение при m = 0.5, n = 1.5.

Вывод:

Была реализована процедура передискретизации изображения (см. рисунок 18) при разных m и n. Процедура передискретизации осуществлялась при помощи формулы интерполяционного ряда Котельникова (см. формулу 3.1). В данном случае мы работали с пикселями и их цветом (RGB). Изображения при передискретизации на краях получились с небольшими искажениями. Это объясняется тем, что интерполяционный ряд Котельникова представляет сигнал непрерывным и сумма должна быть бесконечной, но в реальности мы сделали ее конечной, поэтому это привело усечению и искажению на краях изображения.

Вывод:

В результате данной лабораторной работы, мы научились проводить анализ Фурье, вычислять спектры сигналов, анализировать синусоидальные функции по таким свойствам как ортогональность и норма. Помимо этого, мы изучили теорему Котельникова и разобрали её на наглядном примере - дискретизации сигналов с различными частотами, а потом перенесли все полученные знания на работу с изображением, то есть его передискретизацию. Таким образом, при выполнении данной лабораторной работы мы смогли получить набор определённых навыков работы с сигналами и научились их анализировать.