

Цель работы: изучение методов Фурье-анализа дискретных и цифровых сигналов.

Порядок выполнения и результаты исследования

1. Написать программу вычисления прямого и обратного дискретного преобразования Фурье в матричной форме.

Формула прямого дискретного преобразования Фурье:

$$\dot{U}_k = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} u_n e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Нормирующий коэффициент $\frac{1}{N}$, как правило, применяется при вычислении обратного ДПФ вместо прямого.

Поскольку прямое и обратное ДПФ можно интерпретировать в терминах операций над векторами, это преобразование удобно представлять в матричной форме соответственно:

$$\vec{U} = \vec{u} F^H$$

$$\vec{u} = \vec{U} F$$

где матрица F имеет вид:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} e^{j\frac{2\pi 0}{N} 0} & e^{j\frac{2\pi 1}{N} 0} & \dots & e^{j\frac{2\pi (N-1)}{N} 0} \\ e^{j\frac{2\pi 0}{N} 1} & e^{j\frac{2\pi 1}{N} 1} & \dots & e^{j\frac{2\pi (N-1)}{N} 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi 0}{N} (N-1)} & e^{j\frac{2\pi 1}{N} (N-1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi (N-1)}{N} (N-1)} \end{pmatrix},$$

а F^H — эрмитово сопряженная с F матрица.

Для программной реализации был выбран сигнал $u(t) = \sin(2\pi f t)$ с $f = 20$ Гц на интервале $[0; 1]$ и шагом $dt = 0,001$.

График исходного сигнала выглядит следующим образом:

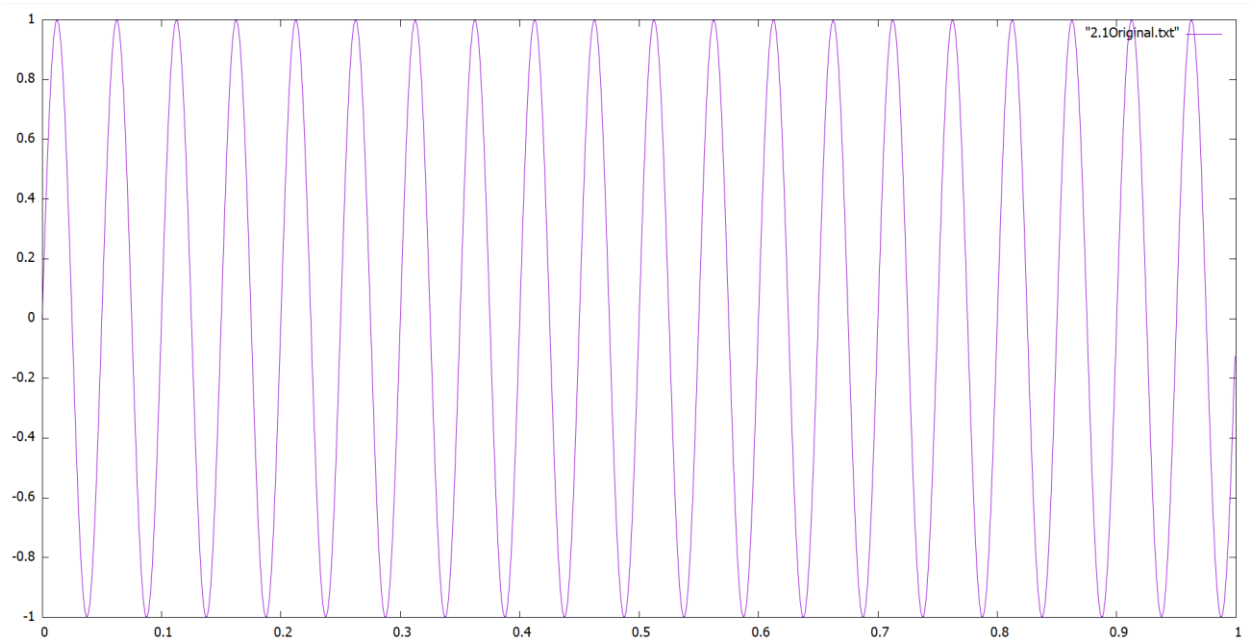


График 1 - Исходный сигнал

Прямое дискретное преобразование Фурье:

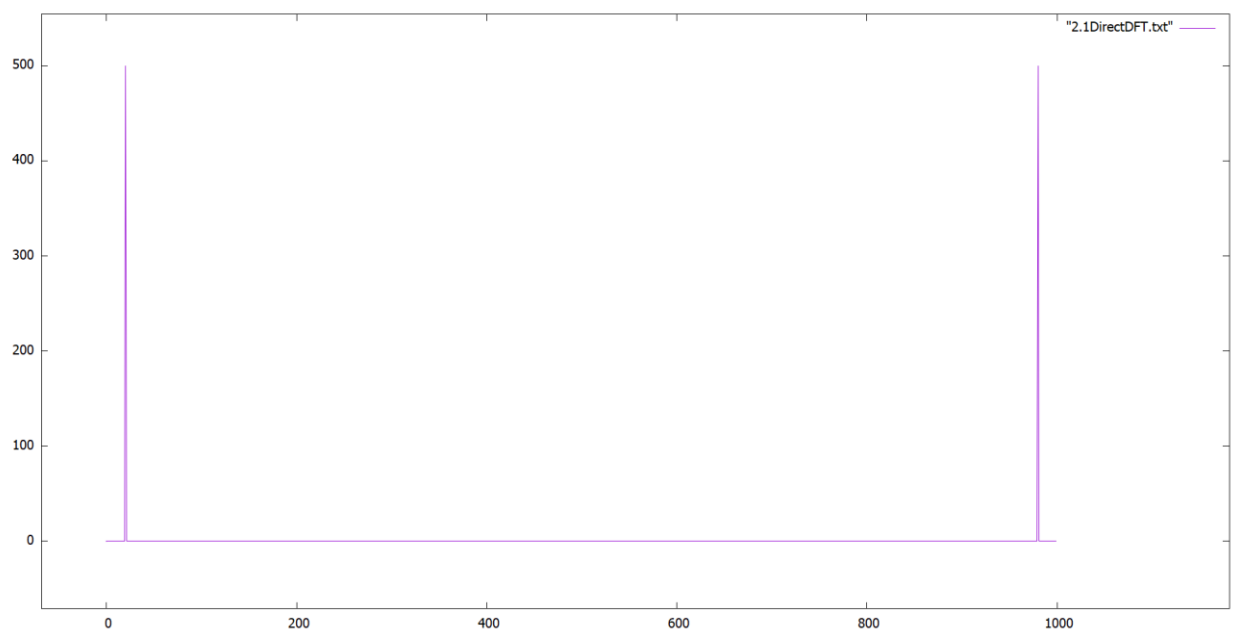


График 2 - Прямое ДПФ. Амплитудный спектр.

Обратное дискретное преобразование Фурье:

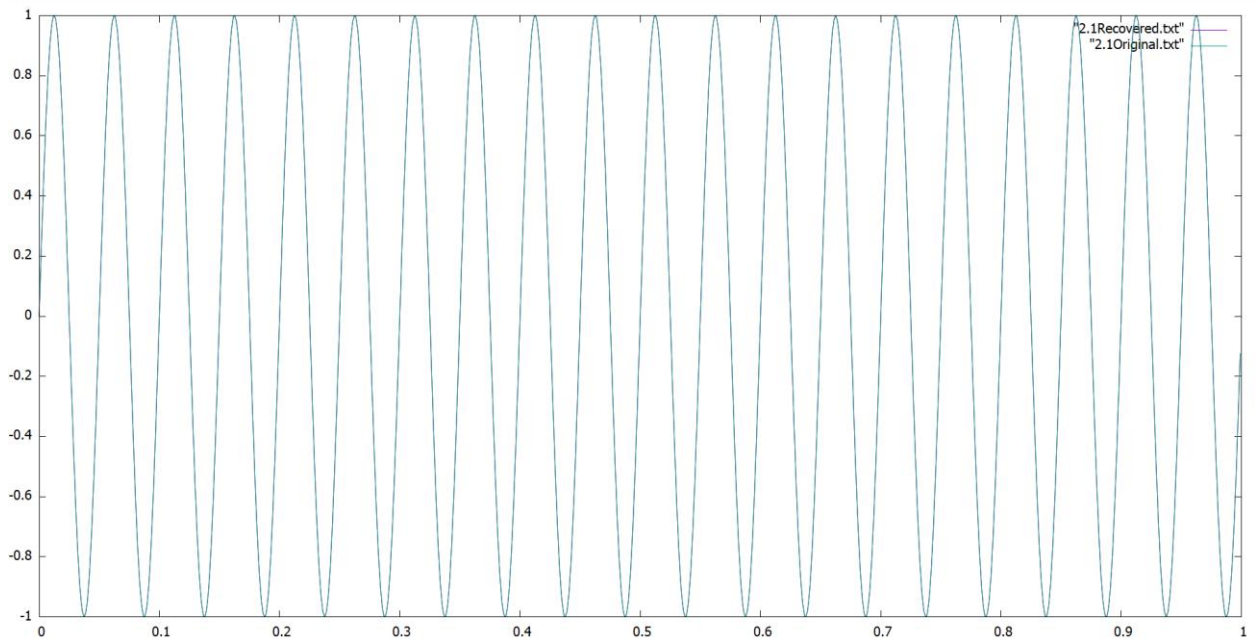


График 3 - Обратное ДПФ

По графику видно, что восстановленный сигнал полностью совпадает с исходным, что говорит о корректной работе программы.

2. Продемонстрировать с помощью написанной программы свойства линейности, сдвига сигнала во времени и равенство Парсеваля.

Все свойства будут демонстрироваться на сигнале $u(t) = \sin(2\pi ft)$ с $f = 20$ Гц на интервале $[0; 1]$ и шагом $dt = 0,001$.

2.1. Свойство линейности:

$$\alpha_1 u_k^{(1)} + \alpha_2 u_k^{(2)} \leftrightarrow \alpha_1 U_n^{(1)} + \alpha_2 U_n^{(2)}$$

Продемонстрируем это свойство, построив график суммы синусоид $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с частотами $f_1 = 20$ Гц и $f_2 = 30$ Гц и умноженных на $\alpha_1 = 13$ и $\alpha_2 = 5$ соответственно.

Полученный график имеет вид:

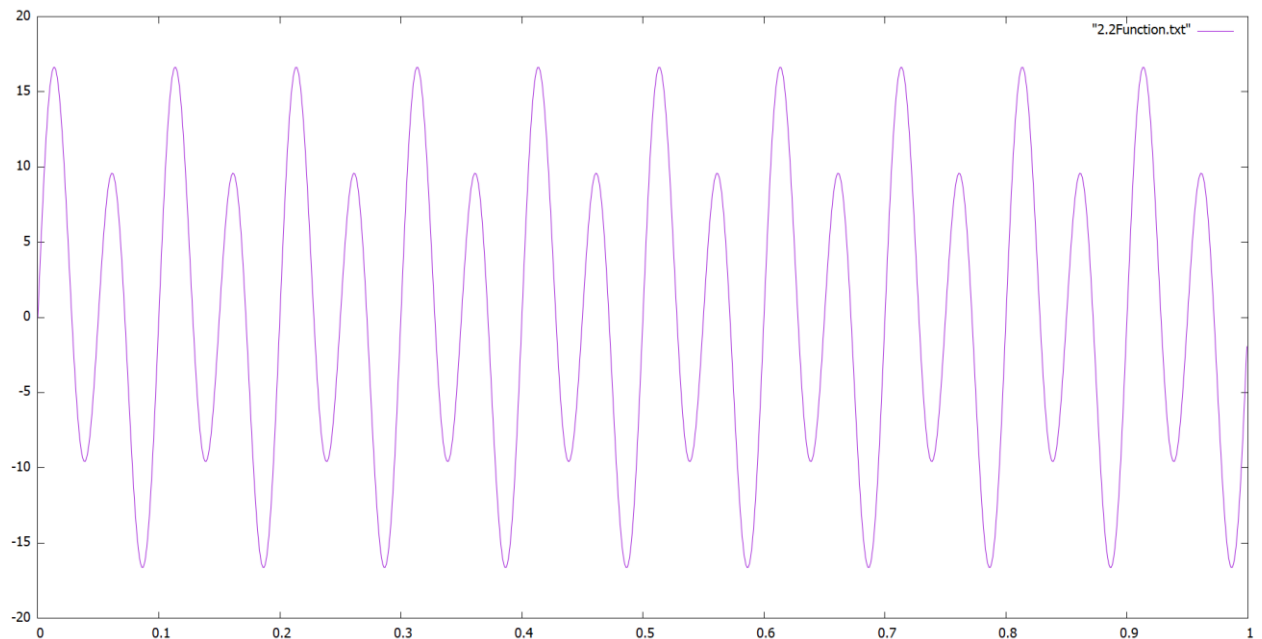


График 4 - График полученного сигнала

Вычислим прямое ДФТ каждой из функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, затем умножим на $\alpha_1 = 13$ и $\alpha_2 = 5$ и просуммируем.

Обратное ДФТ будет выглядеть следующим образом:

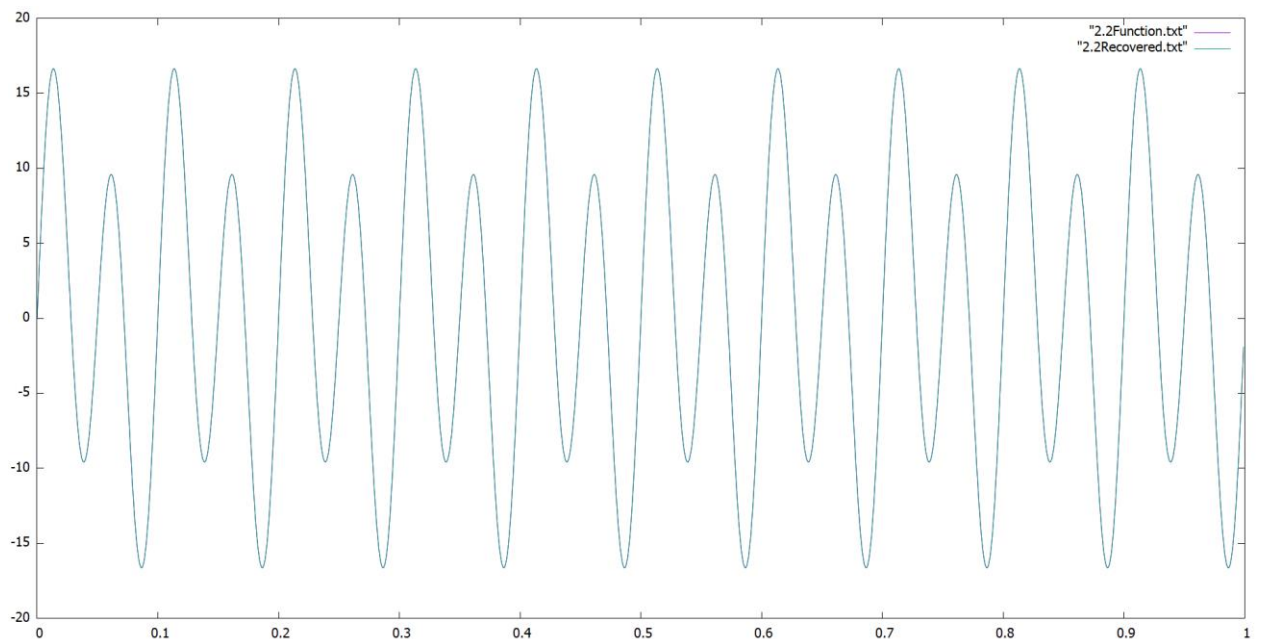


График 5 - Обратное ДПФ

Графики полностью совпали, что говорит о корректной работе программы.

2.2. Свойство сдвига:

$$u_{k-\tau} = \dot{U}_n e^{-\frac{j2\pi\tau n}{N}}$$

Из этого свойства следует, что при сдвиге во времени амплитудный спектр не меняется.

Покажем это, вычислив амплитудный спектр сигнала сдвинутого на $\tau = 0,01$ и несдвинутого сигнала:

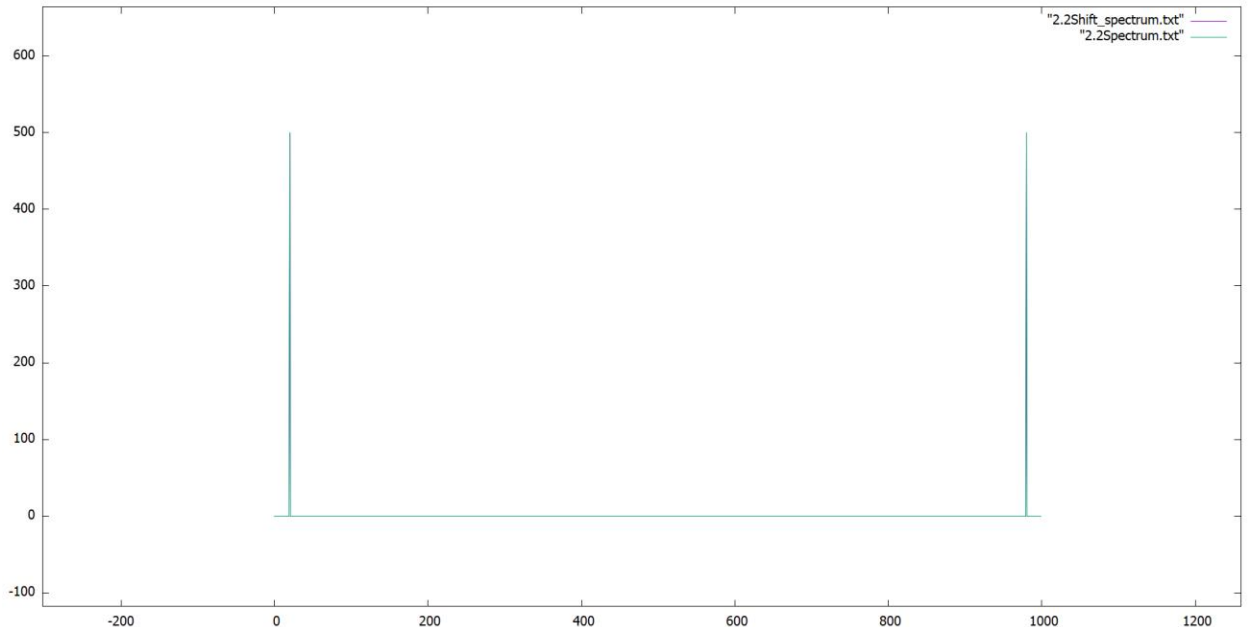


График 6 - Спектры двух функций

Графики полностью совпали, что доказывает корректность работы программы.

2.3. Равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\dot{U}_n|^2$$

Это свойство означает, что энергия сигнала может быть вычислена во временной и частотной области.

Вычислим энергию во временной и частотной области и покажем, что они совпадают:

0.5 0.5

Рисунок 1 - Равенство Парсеваля

Равенство доказывает корректность работы программы.

3. Произвести декодирование аудио-файла с записью тонального сигнала (Dual-Tone Multi-Frequency (DTMF)) сигнала в формате WAV PCM 16 bit, mono. Данный способ кодирования предполагает, что кодируемое значение представляется в виде пары

различных частот (f_1/f_2) в соответствии с приведенной таблицей. Затем, сигнал представляется в виде отсчетов суммы двух синусоид соответствующих частот. Для декодирования сигнала необходимо произвести прямое дискретное преобразование для имеющегося набора отсчетов и определить частоты используемых для кодирования синусоид по полученному амплитудному спектру.

Таблица 1 - Таблица частот для кодирования DTMF сигналов

$f_2 \backslash f_1$	1209 Гц	1336 Гц	1477 Гц	1633 Гц
697 Гц	1	2	3	A
770 Гц	4	5	6	B
852 Гц	7	8	9	C
941 Гц	*	0	#	D

При чтении файла получаем набор отсчетов. Для декодирования необходимо произвести прямое дискретное преобразование для имеющегося набора отсчетов. По графику амплитудного спектра находятся частоты f_1 и f_2 .

Для файла "15.wav" найденные частоты представлены ниже.

```

F1 = 790 F2 = 1480
F1 = 770 F2 = 1340
F1 = 960 F2 = 1340
F1 = 700 F2 = 1340
F1 = 770 F2 = 1340
F1 = 700 F2 = 1480
F1 = 960 F2 = 1340
F1 = 960 F2 = 1340
F1 = 960 F2 = 1340
F1 = 960 F2 = 1340

```

Рисунок 2 - Найденные частоты

При кодировании получаем:

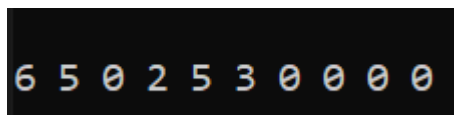


Рисунок 3 - Кодирование

4. Получить у преподавателя два файла с изображениями в формате BMP24. Выполнить оценку смещения между двумя изображениями путем анализа фазового спектра.

Даны два изображения:



Рисунок 4 - "track_first.bmp"



Рисунок 5 - "truck_second.bmp"

Используя метод фазовой корреляции, получаем координату смещения:

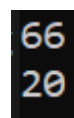


Рисунок 6 - Координаты смещения

Для наглядности отметим на первом изображении белую точку с полученными координатами:



Тогда при наложении левого нижнего угла второй картинке на данную точку, получим целостное изображение, что показывает корректность работы программы.

Выводы: в ходе исследования изучила методы Фурье-анализа дискретных и цифровых сигналов. В ходе выполнения работы были вычислены прямое и обратное дискретное преобразование Фурье в матричной форме, продемонстрированы свойства линейности, сдвига сигнала во времени и равенство Парсеваля, произведено декодирование аудио-файла и выполнена оценка смещения между двумя изображениями путем анализа фазового спектра.