Цель работы: исследование типового алгоритма формирования контрольной суммы с использованием циклических кодов.

1 Описание моделируемой системы

Необходимо моделировать работу системы передачи данных в режиме обнаружения ошибок с применением следующего подхода: к передаваемым данным добавляют контрольную сумму, которая вычисляется на основе этих же данных. По каналу передается сообщение, состоящее из данных и контрольной суммы. Использование контрольной суммы позволяет определить, по принятому сообщению, возникли ли ошибки при передаче данного сообщения по каналу. Структурная схема такой системы передачи представлена

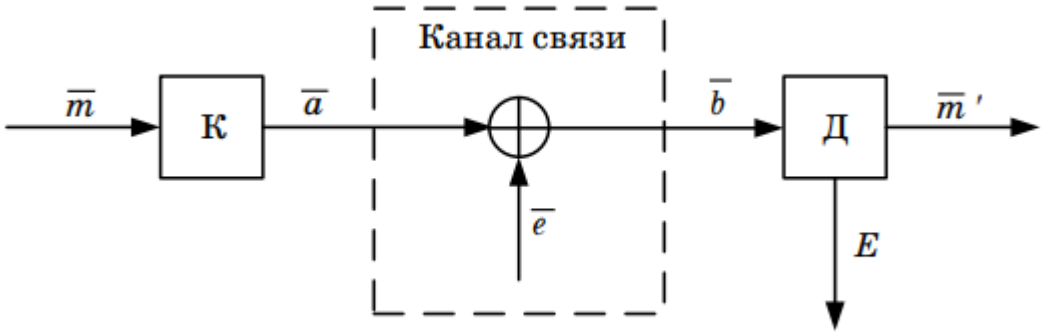


Схема 1 - Структурная схема системы передачи

На данной схеме $\overline{m}$ – информационное сообщение, K – кодер, $\overline{a}$ – закодированное сообщение, $\overline{e}$ – вектор ошибок, $\overline{b}$ – сообщение на выходе канала, Д – декодер, E – принятое решение (о наличии ошибок), $\overline{m}'$ – сообщение на выходе декодера.

На вход кодера поступает некоторое двоичное информационное сообщение $\overline{m}$. Кодер по некоторому алгоритму вычисляет контрольную сумму, дописывает ее к передаваемому сообщению и таким образом формирует закодированное двоичное сообщение $\overline{a}$. В канале могут произойти ошибки, в результате которых некоторые биты сообщения инвертируются, при этом канал может быть описан как операция XOR передаваемого сообщения и вектора ошибок. Декодер по некоторому алгоритму проверяет контрольную сумму в принятом сообщении и принимает одно из следующих решений:

$$E = \begin{cases} 0, \text{если принято решение, что ошибки были} \\ 1, \text{иначе} \end{cases}$$

2 Описание проводимого исследования и рассматриваемого алгоритма

Для описания рассматриваемого алгоритма будет рассмотрена работа кодера и декодера.

2.1 Кодер

Для описания работы с двоичными кодами используются многочлены с коэффициентами из $GF(2)$. Кодер хранит порождающий многочлен $g(x)$. Степень многочлена обозначается как $\deg\big(g(x)\big) = r$ и определяет количество бит контрольной суммы в кодовом слове. k – число информационных символов передаваемого сообщения $\overline{m}$. Передаваемое сообщение рассматривается как вектор длины k. Для каждого сообщения кодер выполняет следующие действия:

1) На основе последовательности $\overline{m}$ формируется многочлен $m(x)$, степень которого $\deg\big(m(x)\big) \leq k - 1$;
2) Вычисляется $c(x) = m(x)x^r \ mod \ g(x)$, степень которого $\deg\big(c(x)\big) \leq r - 1$;
3) Вычисляется $a(x) = m(x)x^r + c(x)$, степень которого $\deg\big(a(x)\big) \leq k + \ r - 1$;
4) На основе $a(x)$ формируется последовательность $\overline{a}$ длиной $n = k + r$.

2.2 Декодер

Декодер также хранит порождающий многочлен $g(x)$ и для каждого сообщения декодер выполняет следующие действия:

1) Принятое сообщение $\overline{b} = \overline{a} + \overline{e}$ преобразуется в многочлен $b(x)$;
2) Вычисляется синдром $s(x) = b(x) \ mod \ g(x)$;
3) Если $s(x) = 0$, то декодером принимается решение, что ошибок не было $E = 0$, в противном случае принимается решение $E = 1$.

Однако существует альтернативная реализация алгоритма декодера.

1) Принятое сообщение $\overline{b} = \overline{a} + \overline{e}$ состоит из информационной последовательности $\overline{m}_b$ длины k и контрольной суммы $\overline{c}_b$ длины r;
2) Последовательность $\overline{m}_b$ подается на вход кодеру, таким образом вычисляется контрольная сумма $\overline{c'}_b$;
4) Если $\overline{c'}_b = \ \overline{c}_b$, то декодером принимается решение, что ошибок не было $E = 0$, в противном случае принимается решение $E = 1$.

3 Описание моделирующей программы в виде псевдокода или блок-схемы

Моделирующую программу можно разделить на три части. Описание каждой из них будет представлено в виде блок-схем.

3.1 Ввод данных

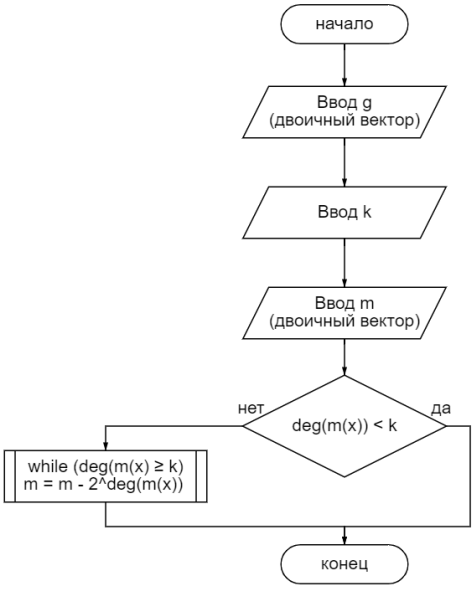


Схема 2 - Блок-схема ввода данных

3.2 Кодер

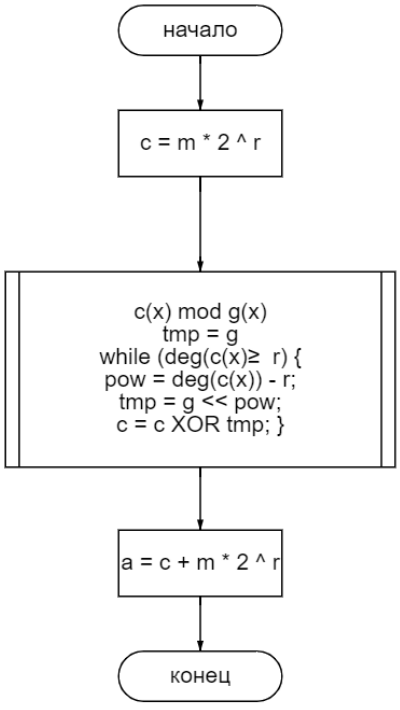
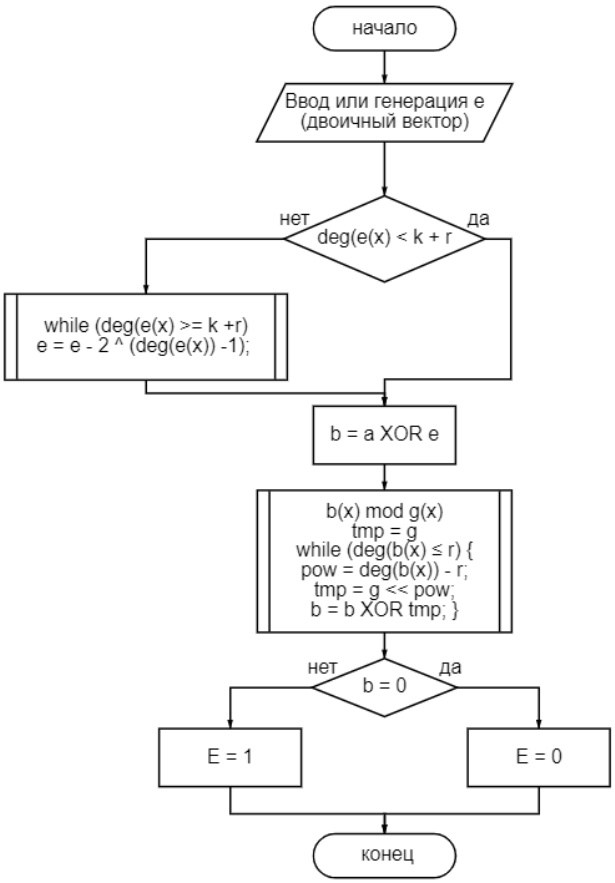
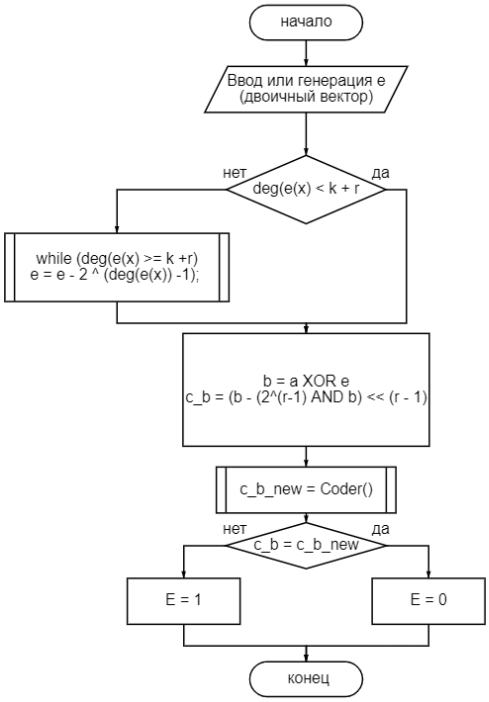


Схема 3 - Блок-схема кодера

3.3 Декодер



Альтернативный алгоритм декодирования:



4 Описание результатов проводимых исследований и зависимостей

Пример работы программы приведен на рисунках ниже:

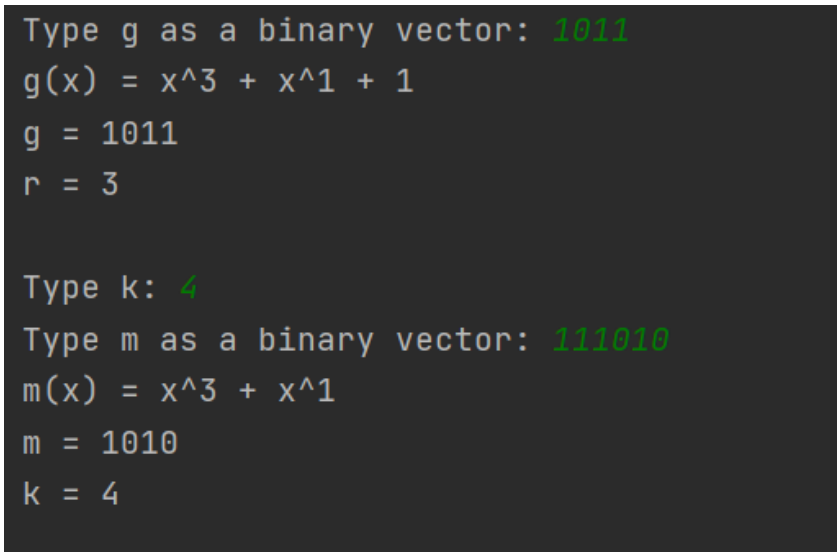


Рисунок 1 - Ввод данных

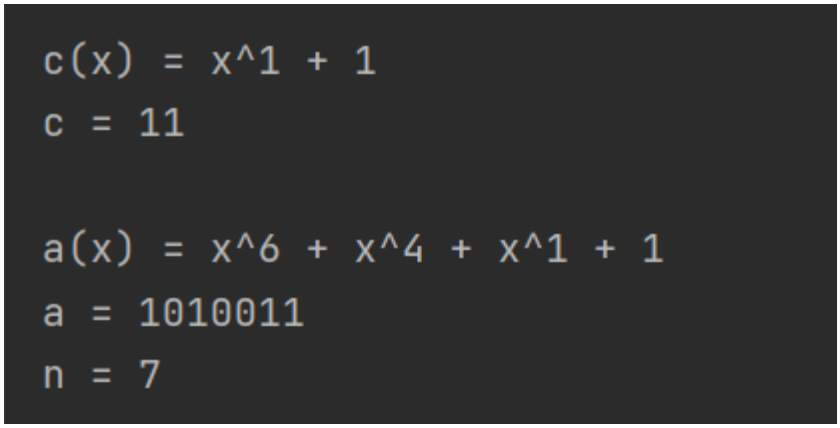


Рисунок 2 - Работа кодера

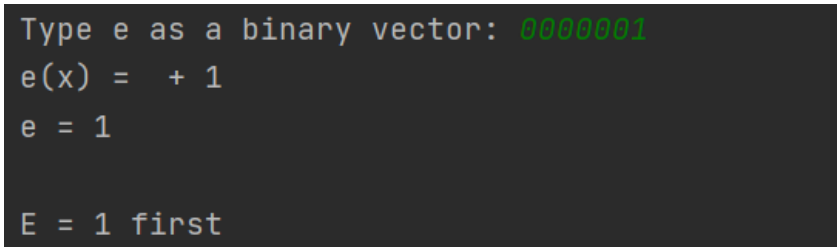


Рисунок 3 -Работа декодера

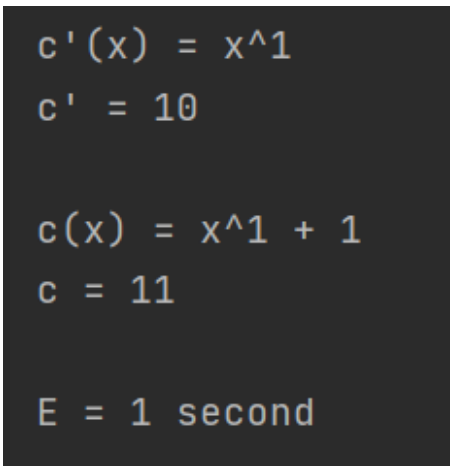


Рисунок 4 - Работа декодера (альтернативный алгоритм)

В результате проводимых исследований были получены решения E декодера, полученные двумя способами и которые показывали, была ли обнаружена ошибка. Также программа позволяла посмотреть все промежуточные этапы вычисления контрольной суммы и синдрома.

В результате моделирования было установлено, что при возникновении ошибки $e \in A$, ошибка не будет обнаружена ни одним из способов. Пример приведен ниже:

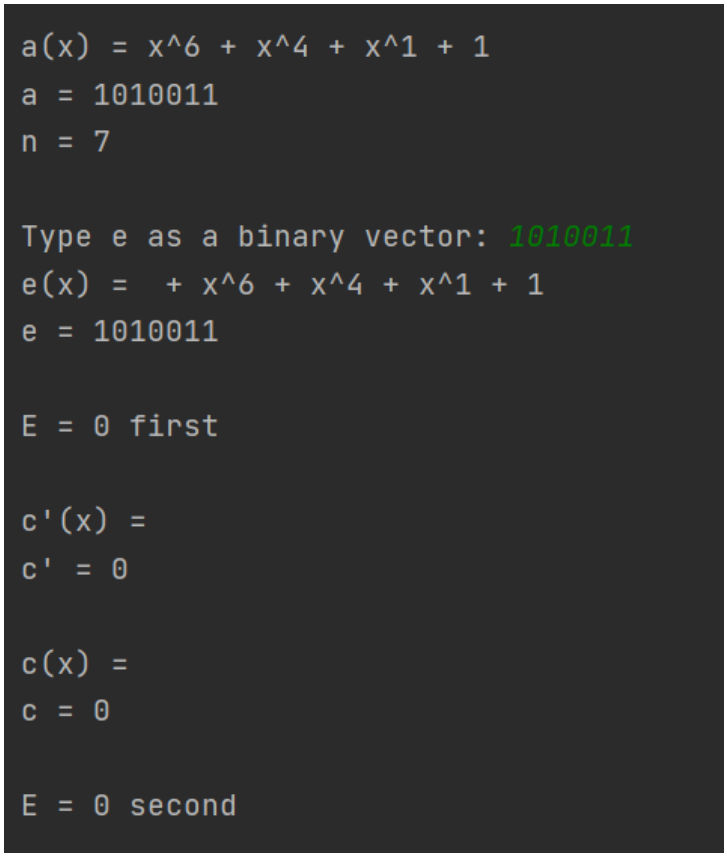


Рисунок 5 - Ошибка не обнаружена

Так же моделирующая программа показала, что результаты, полученные типовым алгоритмом декодирования и альтернативным всегда совпадают, т.е., если ошибка была обнаружены первым декодером, то и второй ее обнаружит, в противном случае оба декодера примут неверное решение.

На вход декодерам подается $\overline{b} = \overline{a} + \overline{e}$. Как видно, на результат декодирования влияет произошедшая в канале ошибка $\overline{e}$. Тогда, чтобы проверить результаты работы 2 декодеров зафиксируем кодовое слова $\overline{a}$ и переберем всевозможные векторы ошибки $\overline{e}$.

Пусть порождающий многочлен $g(x)$ и кодовое слово $\overline{a}$ имеют вид:

```
Type g as a binary vector: 1011
r = 3
g(x) = x^3 + x^1 + 1
g = 1011

Type k: 4
Type m as a binary vector: 1010
m(x) =  + x^3 + x^1
m = 1010

a(x) = x^6 + x^4 + x^1 + 1
a = 1010011
```

Рисунок 6 - Исходные данные

Моделирующая программа показала, что результаты работы, полученные типовым алгоритмом декодирования и альтернативным совпадают.

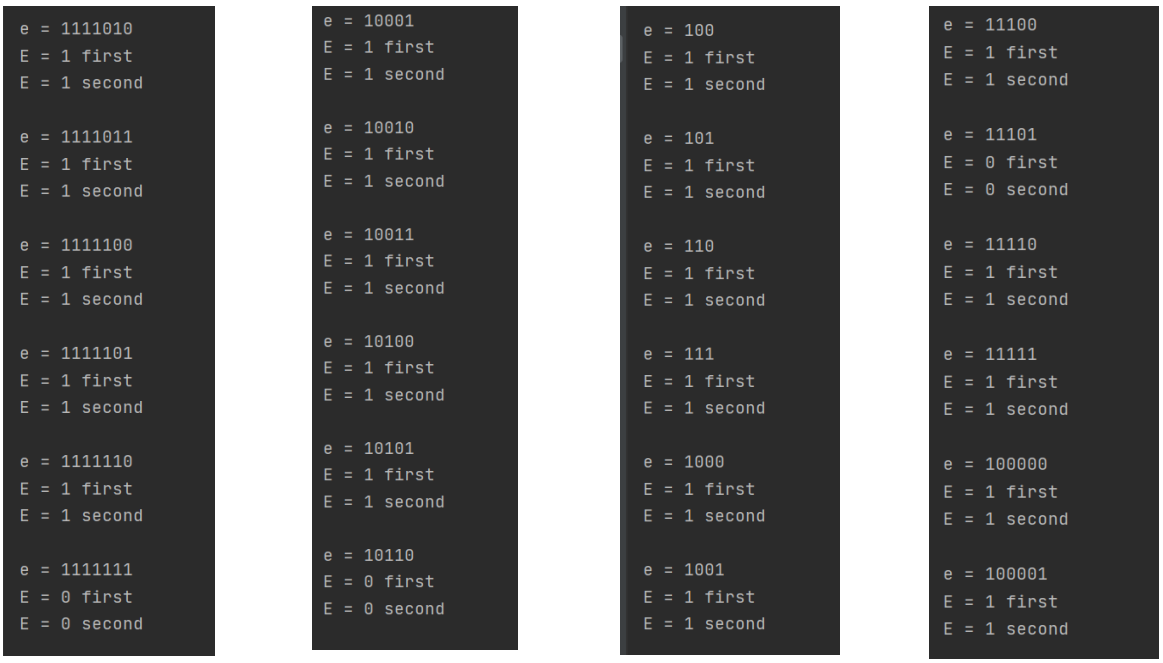


Рисунок 7 - Части работы моделирующей программы

Результаты работы 2 декодеров всегда совпадут. Это объясняется следующим образом. Пусть на вход декодерам подается один и тот же вектор $b(x)$, также оба декодера используют одинаковый порождающий многочлен $g(x)$. Докажем от противного, а именно, пусть декодеры примут разное решение: первый декодер не найдет ошибку, а второй найдет.

Пусть первый декодер примет решение, что ошибки не было, т.е. посчитанный им синдром $s(x)$ будет равен 0:

$$s(x) = 0 = b(x) = a(x) + e(x)\ mod\ g(x)$$

Известно, что, как и кодовое слово, $b(x)$ состоит из k бит информационной части и r бит, относящихся к КС. Обозначим пришедшую на вход декодеру информационную часть, как $m'(x)$, а КС как $c'(x)$. Тогда можно записать так:

$$a(x) + e(x) = m'(x)x^r + c'(x) = 0\ mod\ g(x)$$

Тогда:

$$m'(x)x^r = c'(x)\ mod\ g(x)$$

Вспомним, что альтернативных декодер принимает решение путем сравнения двух КС. За первую КС принимается та, которая приходит ему на вход, т.е. $c'(x)$, а с помощью кодера

формируется еще одна КС, которую обозначим как $c''(x)$. Альтернативный декодер по нашему предположению принимает решение, что КС $c'(x)$ и $c''(x)$ не совпадают, т.е.

$$c'(x) \neq c''(x)$$

Теперь подробнее рассмотрим КС $c''(x)$. Она формируется путем кодирования информационной части $m'(x)$. Тогда, ее можно записать, как:

$$c''(x) = m'(x)x^r mod\ g(x)$$

Теперь объединим все полученный выражения:

$$c'^{(x)} \neq c''(x) \Rightarrow m'(x)x^r \neq m'(x)x^r\ mod\ g(x)$$

Очевидно, что такая ситуация невозможна, а, значит, результаты декодеров всегда совпадут.

5 Выводы по проводимым исследованиям

В ходе выполнения лабораторной работы была разработана программа, демонстрирующая работу кодера и декодера для типового алгоритма формирования циклических кодов, а также работу альтернативного декодера.

В ходе работы моделирующей программы было установлено, что декодер принимает неверное решение для всех ошибок, принадлежащих множеству кодовых слов.

Так же моделирующая программа показала, что результаты, полученные типовым алгоритмом декодирования и альтернативным всегда совпадают, т.е., если ошибка была обнаружены первым декодером, то и второй ее обнаружит, в противном случае оба декодера примут неверное решение.

6 Листинг моделирующей программы

```
package com.suai;

import java.util.Scanner;

public class CyclicCodes {

  private int g;
  private int r;
  private int k;
  private int m;
  private int a;
  private int e;
  private double p = 0.5; // вероятность единицы
```

```
private class Pair {

  private int first;
  private int second;

  public Pair(int a, int b) {
    first = a;
    second = b;
  }
}

public CyclicCodes() throws Exception {
  Scanner in = new Scanner(System.in);

  System.out.print("Type g as a binary vector: ");
  if (in.hasNextInt()) {
    Pair pair = binaryStringToInt(in.nextLine());
    g = pair.first;
    r = pair.second;
  } else {
    throw new Exception("Incorrect g");
  }
  System.out.println("r = " + (r - 1));
  print("g", g, r);

  System.out.print("Type k: ");
  in = new Scanner(System.in);
  if (in.hasNextInt()) {
    k = in.nextInt();
    if (k <= 0) {
      throw new Exception("Incorrect k");
    }
  }

  System.out.print("Type m as a binary vector: ");
  in = new Scanner(System.in);
  if (in.hasNextInt()) {
    Pair pair = binaryStringToInt(in.nextLine());
    m = pair.first;
    int l = pair.second;
    if (l > k) {
      m = clipping(m, l, k);
    }

  } else {
```

```
    throw new Exception("Incorrect m");
  }
  print("m", m, k + r);
}

private void print(String v, int val, int size) {
  System.out.print(v + "(x) = ");
  binaryVectorToPolynomial(val, size);
  System.out.println(v + " = " + Integer.toBinaryString(val));
  System.out.println();
}

private void setE() throws Exception {
  System.out.print("Type e as a binary vector: ");
  Scanner in = new Scanner(System.in);
  if (in.hasNextInt()) {
    Pair pair = binaryStringToInt(in.nextLine());
    e = pair.first;
    if (pair.second > (k + r)) {
      e = clipping(e, pair.second, (k + r));
    }
  } else {
    throw new Exception("Incorrect e");
  }
}

private int clipping(int num, int size, int requiredSize) { // обрезать delta единиц слева
  while (size != requiredSize) {
    num -= Math.pow(2, size - 1);
    size--;
  }
  return num;
}

private Pair binaryStringToInt(String str) {
  int size = str.length();
  int result = 0;
  for (int i = 0; i < str.length(); i++) {
    char h = str.charAt(i);
    if ((str.charAt(i) - '0') == 0 && result == 0) { // убираем 0 слева
      size--;
    } else {
      result += Math.pow(2, str.length() - 1 - i) * (str.charAt(i) - '0');
    }
  }
```

```
  return new Pair(result, size);
}

private void binaryVectorToPolynomial(int num, int size) { // size - фактический размер
  if (num - Math.pow(2, size - 1) >= 0) {
    System.out.print("x^" + (size - 1));
    num -= Math.pow(2, size - 1);
  }
  for (int i = size - 2; i > 0; i--) {
    if (num - Math.pow(2, i) >= 0) {
      System.out.print(" + x^" + i);
      num -= Math.pow(2, i);
    }
  }
  if (num == 1) {
    System.out.print(" + 1");
  }
  System.out.println();
}

private int getSize(int num, int upperBound) {
  int i = upperBound;
  for (; i >= 0; i--) {
    if (num - Math.pow(2, i) >= 0) {
      break;
    }
  }
  return (i + 1);
}

private int division(int num, int size) { // num - делимое, size - фактический размер
  int tmp = g;
  while (size - r >= 0) {
    int pow = size - r;
    tmp = g << pow;
    num = num ^ tmp;
    size = getSize(num, size);
  }
  return num;
}

public void encoding() {
  int c = m * (int) Math.pow(2, r - 1);
  c = division(c, k + r);
  a = c + m * (int) Math.pow(2, r - 1);
```

```
}

private void generateE() {
  e = 0;
  for (int i = 0; i < (k + r - 1); i++) {
    double tmp = Math.random();
    if (tmp <= p) {
      e += Math.pow(2, i);
    }
  }
}

// генерация кодовых слов
private void E(int bin, int size, int cur, byte mArray[]) throws Exception {
  if (cur == size) {
    e = 0;
    for (int f = 0; f < size; f++) {
      e += Math.pow(2, f) * mArray[size - f - 1];
    }
    System.out.println("e = " + Integer.toBinaryString(e));
    decoding1();
    decoding2();
  } else {
    for (byte num = 0; num < bin; num++) {
      mArray[cur] = num;
      E(bin, size, cur + 1, mArray);
    }
  }
}


// прохожусь по всем ошибкам с фиксированным кодовым словом
private void testGenerateE() throws Exception {
  byte[] mArray = new byte[k + r - 1];
  E(2, k + r - 1, 0, mArray);
}

public void decoding1() throws Exception {
  int b = a ^ e;
  if (division(b, k + r) == 0) {
    System.out.println("E = 0 first");
  } else {
    System.out.println("E = 1 first");
  }
  //print("b", b, getSize(b,k+r));
```

```
  }

  public void decoding2() throws Exception {
    int b = a ^ e;
    int controlSum = 0;
    for (int i = 0; i < r - 1; i++) {
      controlSum += Math.pow(2, i);
    }
    controlSum = controlSum & b;
    m = (b - controlSum) >> (r - 1);
    //print("c", controlSum, getSize(controlSum, r));

    encoding();
    int newControlSum = 0;
    for (int i = 0; i < r - 1; i++) {
      newControlSum += Math.pow(2, i);
    }
    newControlSum = newControlSum & a;
    //print("c'", newControlSum, getSize(newControlSum, r));

    if (newControlSum == controlSum) {
      System.out.println("E = 0 second");
    } else {
      System.out.println("E = 1 second");
    }
    System.out.println();

  }

  public static void main(String[] arg) {
    try {
      CyclicCodes c = new CyclicCodes();
      c.encoding();
      c.print("a", c.a, c.getSize(c.a, c.k + c.r));

      c.testGenerateE();
      //c.setE();
//      c.decoding1();
//      c.decoding2();

    } catch (Exception e) {
      System.out.println(e.getMessage());
      e.printStackTrace();
    }
```

```
  }
}
```