Оглавление

Цель работы:

Разработать программный модуль, который строит случайный двоичный линейный блоковый код для заданных параметров (n,k). Для построенного кода оценить расстояние. Указать, на сколько полученные параметры далеки от границ существования(Хемминга, Варшамова-Гилберта, Синглтона).

Ход работы:

1. **Построение кода**

Линейные блоковые коды позволяют представить информационные и кодовые слова в виде двоичных векторов, что позволяет описать процессы кодирования и декодирования с помощью аппарата линейной алгебры, с учетомтого, что компонентами вводимых векторов и матриц являются символы «0» и «1».

Линейным двоичным (n, k) - кодом будем называть k-мерное подпространство n-мерного пространства двоичных последовательностей.

Один из способов задания кода основан на построении порождающей матрицы $G = [\ I \mid C\ ],$ где I – единичная матрица размера $k \times k$, а C – матрица дополнения размера $k \times (n-k)$. Матрица дополнения генерируется случайнымобразом.

Генерация кодовых слов производится путем умножения всех сообщений измножества M (множество возможных сообщений) на порождающую матрицу.

Расстояние Хэмминга $d_H(x, y)$ между двумя векторами x и y определяется как число позиций, в которых эти векторы различаются. Однако в общем случаекод содержит не два слова, а гораздо больше, и эти слова могут находиться на различном расстоянии друг от друга. За меру, характеризующую код в целом, принимают минимальное кодовое расстояние, вычисляемое по формуле: $d_0 = min d(x_i, x_j), i \neq j$

Код с минимальным расстоянием d_0 может исправить любую комбинациюиз t ошибок, где t – корректирующая способность кода, равная:

$$t = \left\lfloor d_0 - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

2. Вычисление границ

1) Граница Хэмминга

Верхняя граница N, или граница Хэмминга, строится следующим образом. Все пространство двоичных последовательностей длины n имеет размер 2^n . Для некоторого кода длины n с расстоянием d рассматриваются сферы радиуса $t = \left\lfloor d_0 - \frac{1}{2} \right\rfloor$, центрами которых являются кодовые слова. В теории кодирования граница Хэмминга определяет пределы возможных значений параметров произвольного блокового кода. А именно, не существует q-ичного блокового кода C мощности $|C|$ и длины n с минимальным расстоянием d Cдля которого не выполняется следующее неравенство:

$$|C| \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t} C_n^i (q-1)^k}$$

2) Граница Варшамова-Гилберта

Нижняя граница, или граница Варшамова-Гилберта, строится следующим образом. В отличие от границы Хэмминга, где мы пытались найти максимально возможное число слов в коде (при заданных ограничениях n и d), при этом получая границу несуществования, в данном случае указывается процедура построения кода с заданными n и d, при этом делается попытка максимизировать число N слов в этом коде, что соответствует границе существования — код с таким N точно существует.

В соответствии с границей Варшамова-Гилберта существует q-ичный блоковый код C мощности $|C|$ и длины n с минимальным расстоянием d для C которого выполняется следующее неравенство:

$$|C| \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t} C_n^i (q-1)^k}$$

Данное неравенство не отрицает существование кодов с мощностью меньшей, чем эта граница, таким образом граница Варшамова-Гилберта утверждает лишь факт существования кода с данной мощностью.

3) Граница Синглтона

Граница Синглтона устанавливает предел мощности кода C длины n и минимального расстояния Хэмминга d. $|C| \leq q^{n-d+1}$

3. Примеры работы программы

```
Введите n: 6
Введите k: 3
[[1 0 0 0 1 1]
 [0 1 0 0 1 0]
 [0 0 1 1 0 1]]
d =  2
t =  0
```

```
Кодовые слова:
[[0 0 0 0 0 0]
 [0 0 1 1 0 1]
 [0 1 0 0 1 0]
 [0 1 1 1 1 1]
 [1 0 0 0 1 1]
 [1 0 1 1 1 0]
 [1 1 0 0 0 1]
 [1 1 1 1 0 0]]
Количество слов в коде: 8
```

```
Границы:
Хэмминга:  64.0
Разница:  56.0

Варшамова-Гилберта:  9.142857142857142
Разница:  1.1428571428571423

Синглтона:  32
Разница:  24
```

Рисунок 1. Пример работы программы №1

```
Введите n: 7
Введите k: 4
[[1 0 0 0 0 1 0]
 [0 1 0 0 1 1 1]
 [0 0 1 0 1 0 1]
 [0 0 0 1 0 1 1]]
d =  2
t =  0
```

```
Кодовые слова:
[[0 0 0 0 0 0 0]
 [0 0 0 1 0 1 1]
 [0 0 1 0 1 0 1]
 [0 0 1 1 1 1 0]
 [0 1 0 0 1 1 1]
 [0 1 0 1 1 0 0]
 [0 1 1 0 0 1 0]
 [0 1 1 1 0 0 1]
 [1 0 0 0 0 1 0]
 [1 0 0 1 0 0 1]
 [1 0 1 0 1 1 1]
 [1 0 1 1 1 0 0]
 [1 1 0 0 1 0 1]
 [1 1 0 1 1 1 0]
 [1 1 1 0 0 0 0]
 [1 1 1 1 0 1 1]]
Количество слов в коде: 16
```

```
Границы:
Хэмминга:  128.0
Разница:  112.0

Варшамова-Гилберта:  16.0
Разница:  0.0

Синглтона:  64
Разница:  48
```

Рисунок 2. Пример работы программы №2

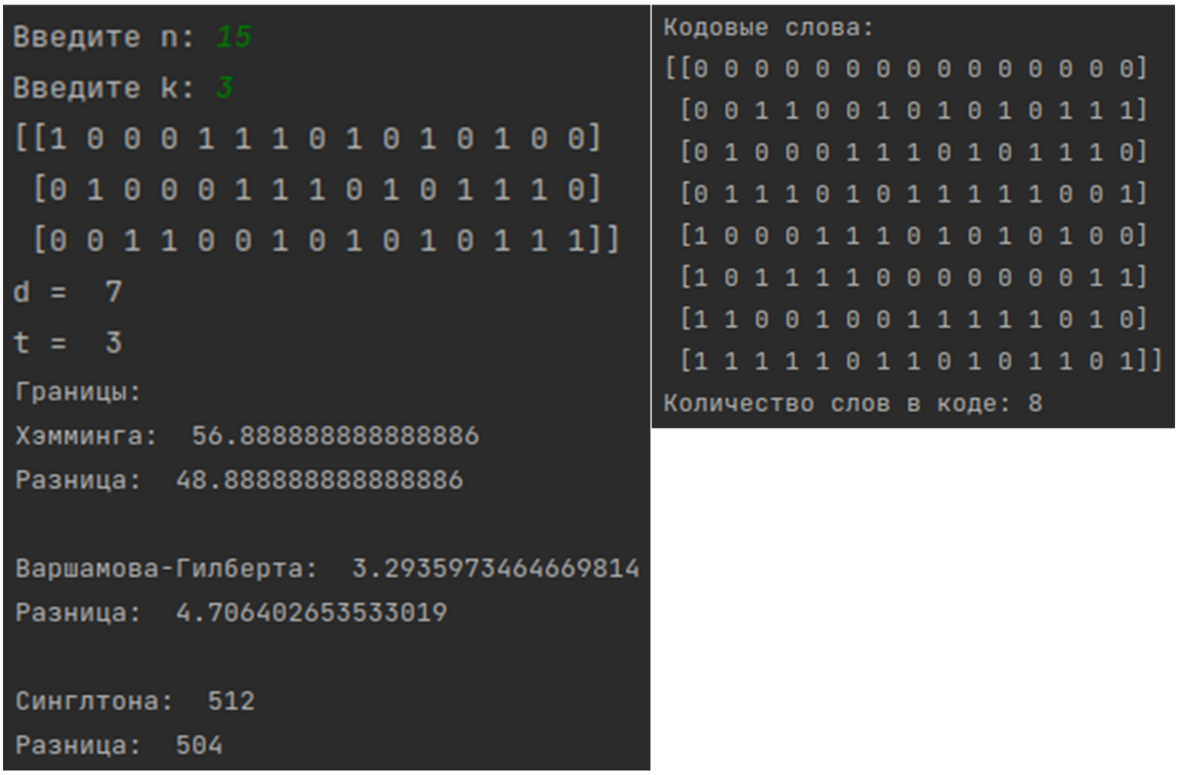

Рисунок 3. Пример работы программы №3

Данные прмеры работы программы демонстрируют, что все построенные коды соответствуют границам Хэмминга и Синглтона. Границе Варшамова-Гилберта соответствуют второй и третий коды, причём мощность второго кода равна данной границе, следовательно, можно сделать вывод, что из приведённых в примерах кодов, лучшим является третий, а худшим — второй. Также, третий код обладает наибольшей корректирующей способностью

Выводы

Таким образом, была разработана программа, позволяющая строить случайный двоичный линейный блоковый код для заданных параметров n и k.

Для построенного кода были определены: количество кодовых слов, минимальное расстояние и корректирующая способность.

Были изучены границы Хэмминга, Варшамова-Гилберта и Синглтона. Для каждой было подсчитано отклонение мощности кода. Опираясь на результаты работы программы, можно сделать вывод, что случайный линейный код находится внутри границ существования.