

Цель работы: привести вывод выражений спектра гармонического сигнала. Привести выражения для преобразования Фурье для сигналов из сигнального множества. Вычислить амплитудные спектры всех сигналов. построить графики, определить ширину полосы частот, занимаемой каждым сигналом и множеством всех сигналов. Привести вывод выражения спектра последовательности сигналов. Вычислить спектр последовательности сигналов (для нескольких различных последовательностей различной длины), построить графики.

1. Вывод спектра гармонического сигнала

Пусть сигнала задан как

$$s(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 t), & 0 < t < T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим исходный сигнал $s(t)$ как произведение $s(t) = g(t)c(t)$, где $g(t)$ – некоторая произвольная функция (ограничивающая), а $c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Тогда, согласно теореме о свертке, спектр исходного сигнала определяется как $S(f) = G(f) * C(f)$.

Согласно формуле Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}.$$

Отсюда, $c(t) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$.

Спектр δ – функции $\delta(f) = 1$. Отсюда, можно соотнести $1 \leftrightarrow \delta(f)$. Согласно свойству сдвига по частоте, $f(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow F(f - f_0)$, иначе говоря, при сдвиге спектра, оригинал сдвигается на $e^{j2\pi f_0 t}$. Таким образом, с учетом свойства сдвига:

$$C(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

Тогда спектр исходного сигнала $S(f)$ будет равен:

$$S(f) = \frac{1}{2}G(f)(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

В качестве $g(t)$ рассмотрим:

$$g(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдем спектр $G(f)$:

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_0^T A e^{-j2\pi f t} dt = A \int_0^T e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_0^T = \\ &= -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j2\pi f T} - 1) = -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j\pi f T} e^{-j\pi f T} - e^{-j\pi f T} e^{j\pi f T}) = \\ &= \frac{AT}{T\pi f} \sin(\pi f T) e^{-j\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(\pi f T) e^{-j\pi f T} \end{aligned}$$

Тогда спектр $S(f)$ будет равен:

$$S(f) = \frac{1}{2}AT(\text{sinc}((f - f_0)T) + \text{sinc}((f + f_0)T)e^{-j\pi fT}) \text{ ч.т.д}$$

Схожим образом найдем спектр сигнала

$$s(t) = \begin{cases} A\sin(2\pi f_0 t), & 0 < t < T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Представим сигнал как произведение $s(t) = g(t)c(t)$, где $g(t)$ – огибающая, а $c(t) = \sin(2\pi f_0 t)$. В таком случае по теореме о свертке спектр $S(f) = G(f)C(f)$.

Найдем спектр $C(f)$. Согласно формуле Эйлера, $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$. Тогда

$$c(t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}$$

По свойству сдвига по частоте, $f(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow F(f - f_0)$, иначе говоря, при сдвиге спектра, оригинал сдвигается на $e^{j2\pi f_0 t}$. Спектр δ – функции $\delta(f) = 1$. Отсюда, можно соотнести $1 \leftrightarrow \delta(f)$. Таким образом, с учетом свойства сдвига:

$$C(f) = \frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)$$

Тогда спектр $S(f)$ будет равен:

$$S(f) = \frac{1}{2j}G(f)(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

В качестве $g(t)$ рассмотрим:

$$g(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Спектр $G(f)$ равен

$$G(f) = AT\text{sinc}(\pi fT)e^{-j\pi fT}$$

Тогда спектр $S(f)$ будет равен:

$$S(f) = \frac{1}{2j}AT(\text{sinc}((f - f_0)T) + \text{sinc}((f + f_0)T)e^{-j\pi fT}) \text{ ч.т.д.}$$

2. Исходные данные для 8 варианта КАМ.

$$f_0 = 1800 \text{ Гц}$$

$$V_{mod} = 1200 \text{ Бод}$$

$$V_{inf} = 7200 \text{ б/с}$$

3. Преобразование Фурье для сигналов из сигнального множества

Для квадратурной амплитудной модуляции спектр сигнала из сигнального множества задается как:

$$S_i(f) = s_{i1} \sqrt{\frac{T}{2}} (\text{sinc}((f - f_0)T) + \text{sinc}((f + f_0)T)) e^{-j\pi f T} + \frac{s_{i2}}{j} \sqrt{\frac{T}{2}} (\text{sinc}((f - f_0)T) - \text{sinc}((f + f_0)T)) e^{-j\pi f T}$$

где $i = 0, 1 \dots q - 1$.

Амплитудные спектры сигналов КАМ вычисляются как модули этих комплекснозначных функций $S_i(f)$, $i = 0 \dots q - 1$.

4. Амплитудный спектр одиночных сигналов.

Амплитудный спектр каждого сигнала выглядит следующим образом:

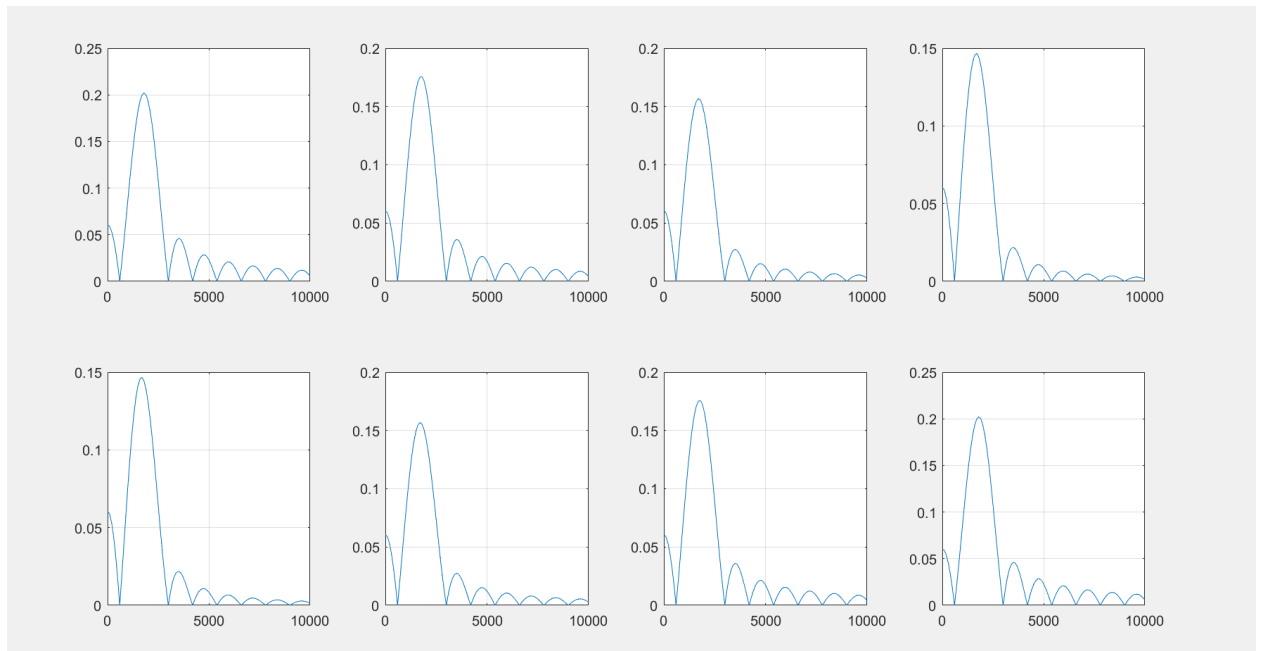


График 1 - Амплитудный спектр сигнала 1-8 (нумерация с верхнего левого угла)

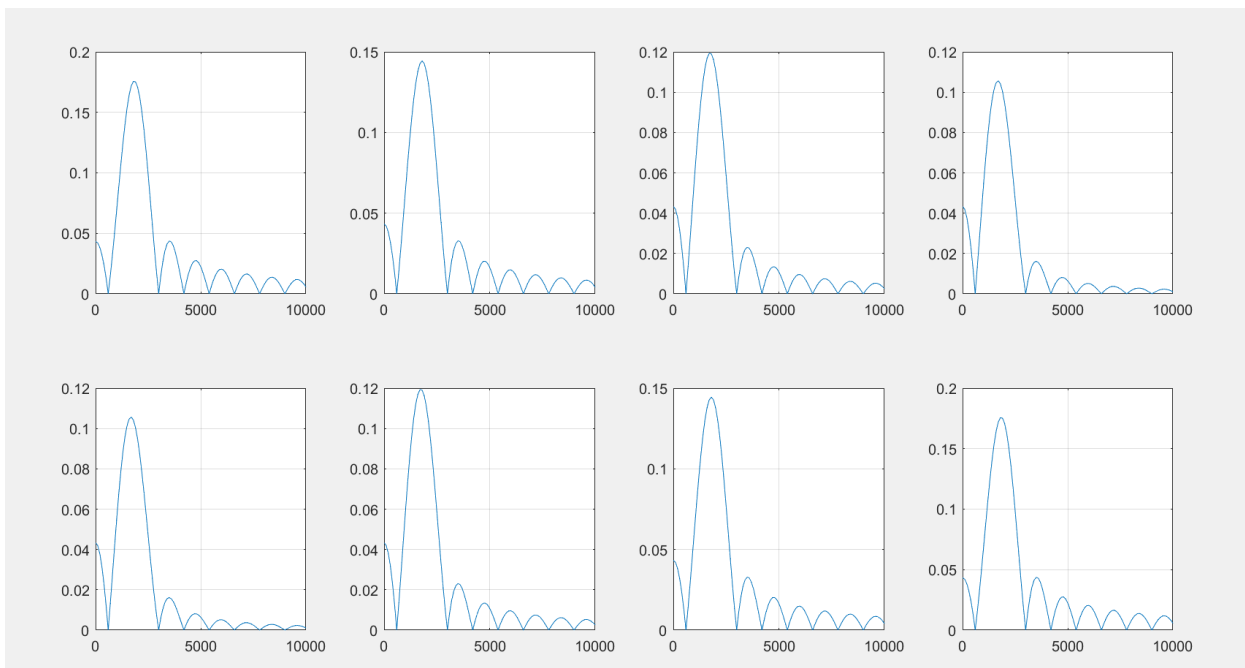


График 2 - Амплитудный спектр сигнала 9 -16 (нумерация с левого верхнего угла)

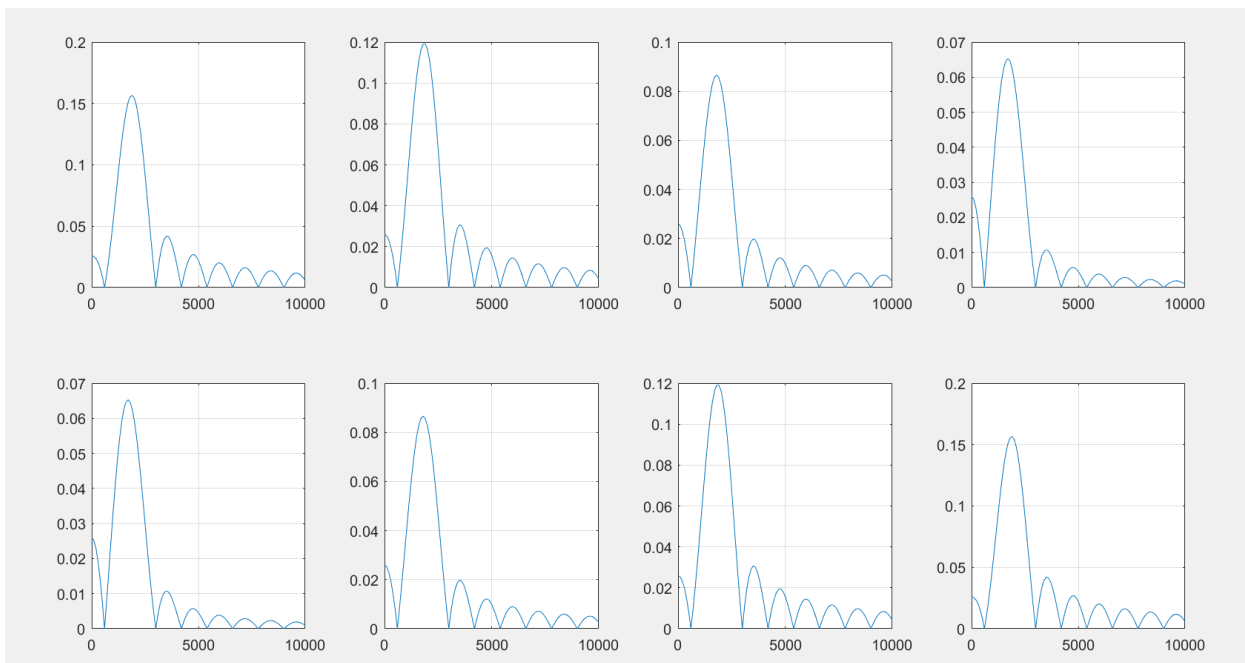


График 3 - Амплитудный спектр сигнала 17-24 (нумерация с верхнего левого угла)

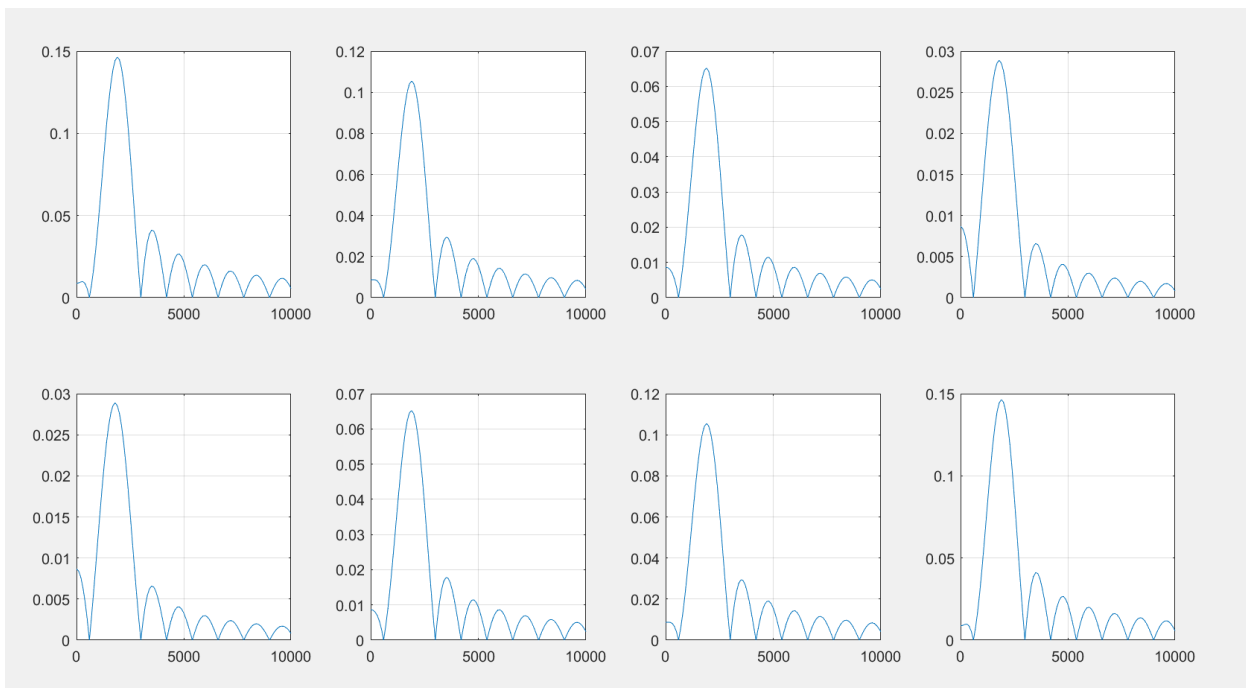


График 4 - Амплитудный спектр сигнала 25-32 (нумерация с верхнего левого угла)

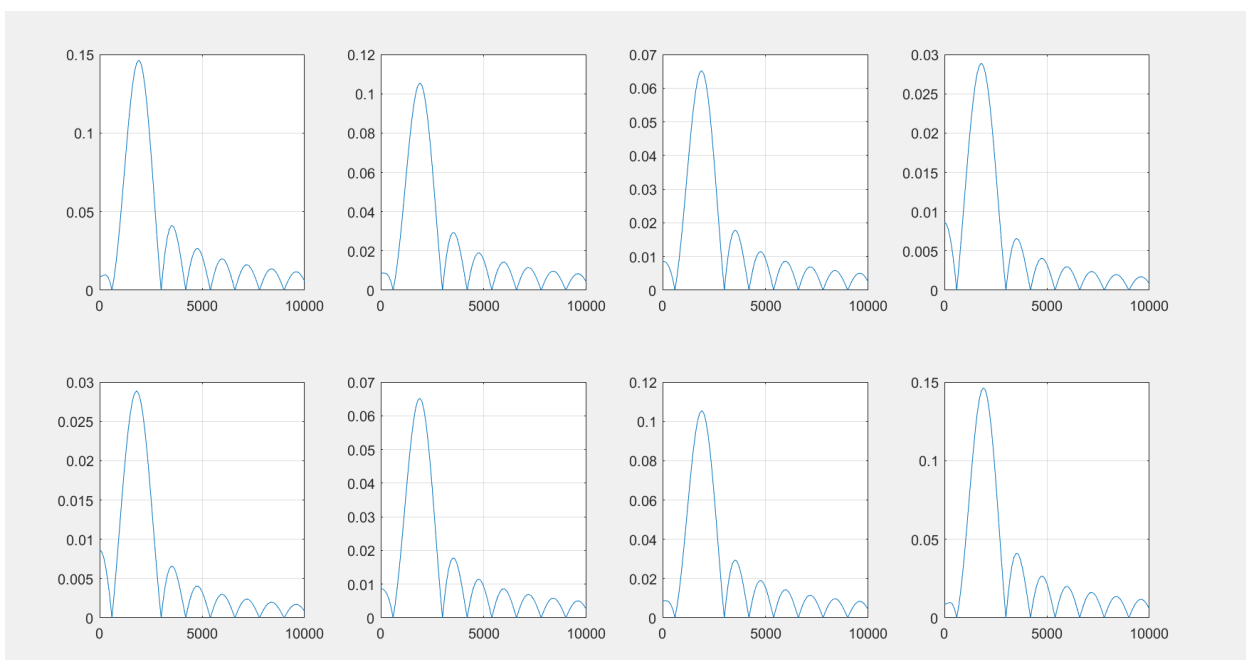


График 5 - Амплитудный спектр сигнала 33-40 (нумерация с верхнего левого угла)

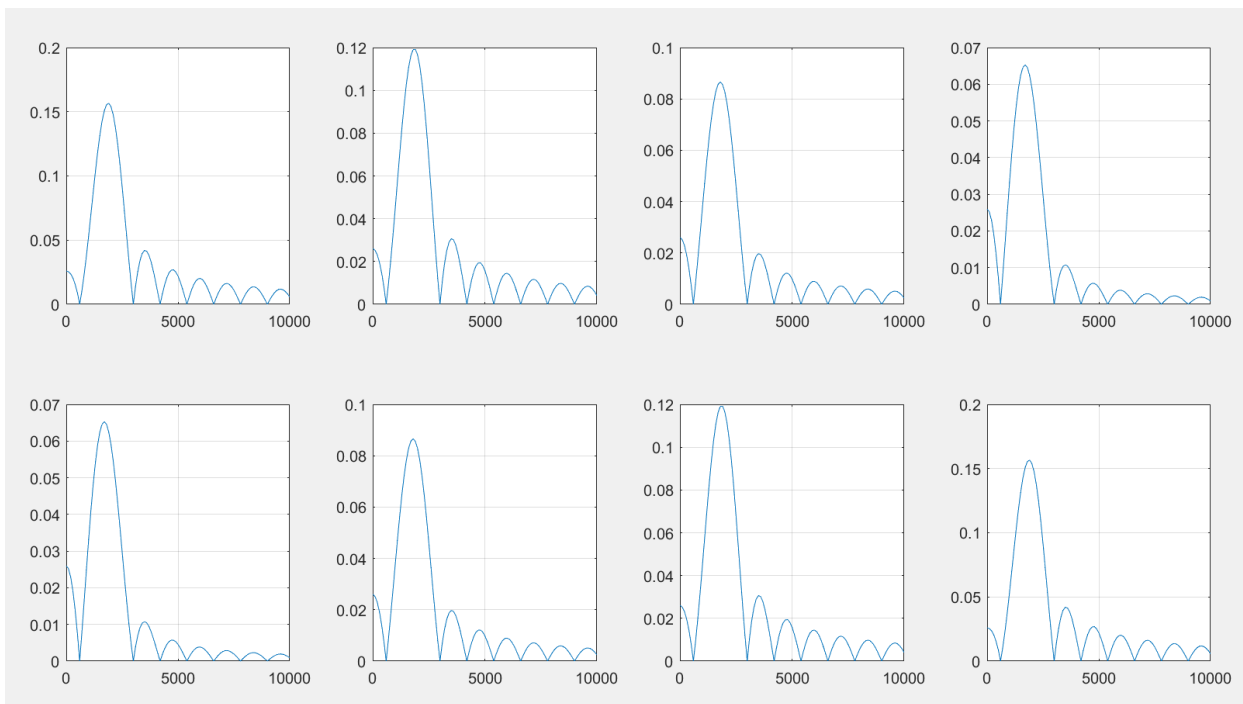


График 6 - Амплитудный спектр сигнала 41-48 (нумерация с верхнего левого угла)

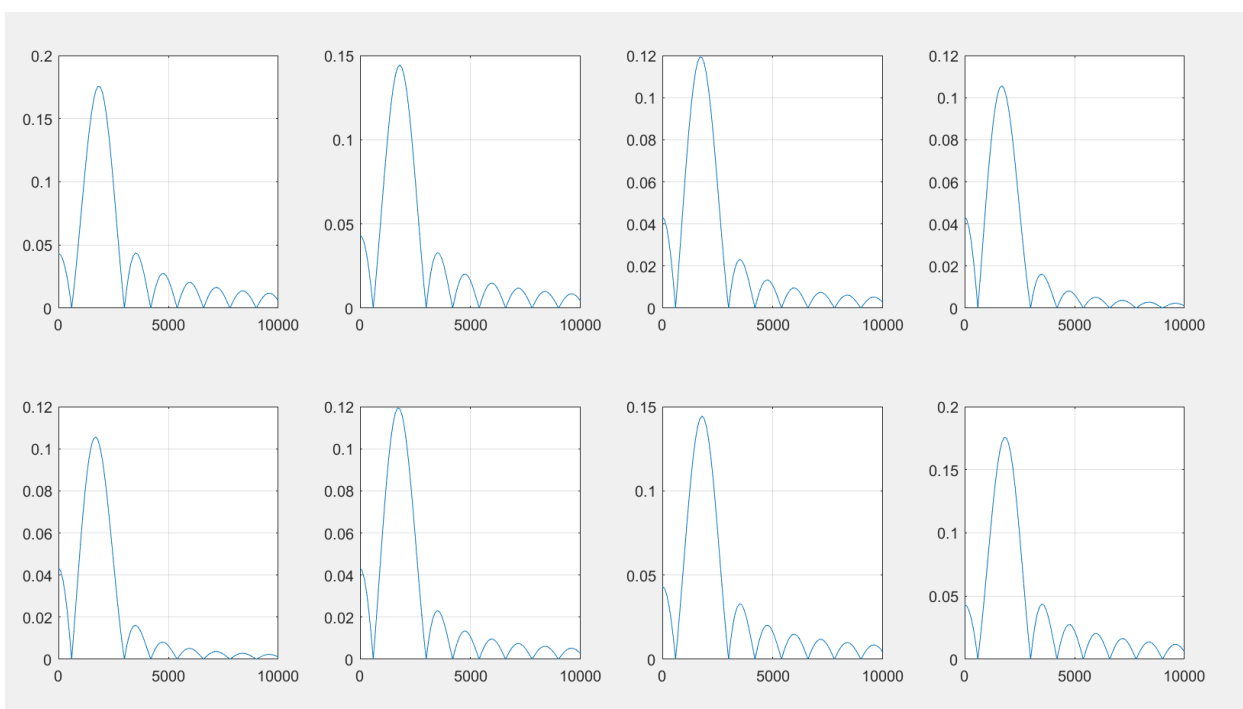


График 7 - Амплитудный спектр сигнала 49-56 (нумерация с верхнего левого угла)

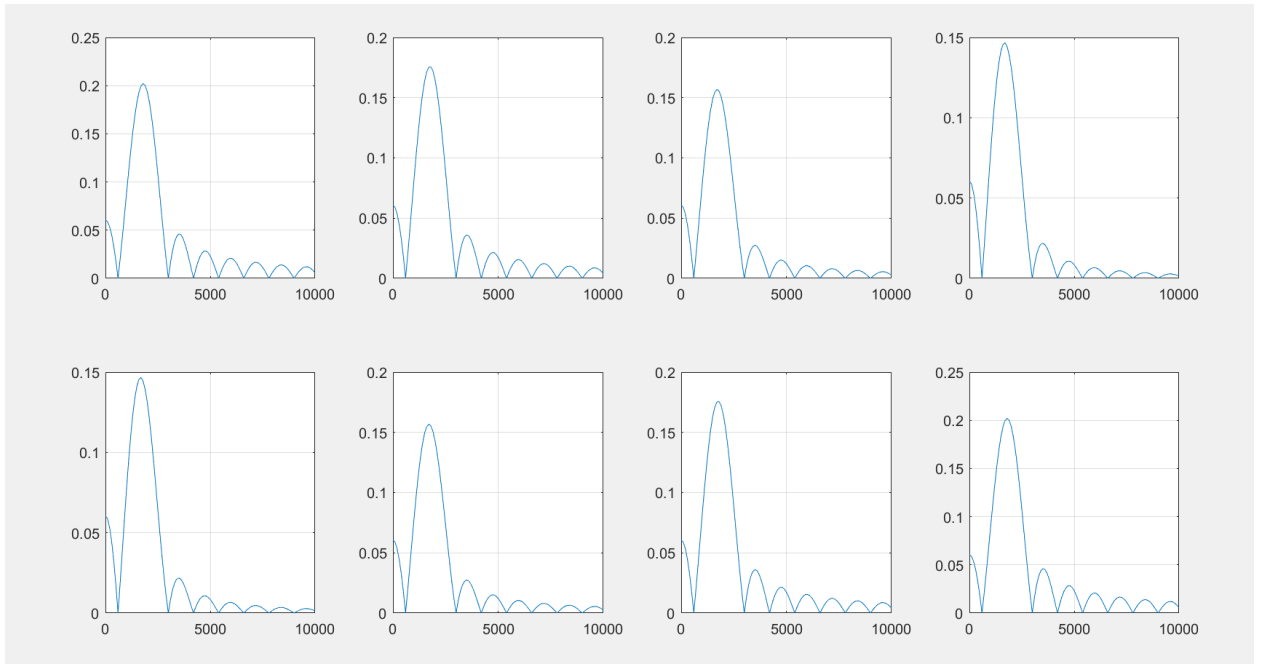


График 8 - Амплитудный спектр сигнала 57-64 (нумерация с верхнего левого угла)

Ширина полосы частот определяется как $W = \frac{2}{T} = 2 * V_{mod} = 2400$ Гц

5. Спектр последовательности сигналов.

Пусть $\{s_i(t)\}$ – сигнальное множество, $i = 0, 1 \dots q - 1$. Тогда

$$s_i(t) = \sum_{l=0}^{N-1} s_{il}(t - lT)$$

Или

$$s_i(t) = s_{i0}(t) + s_{i1}(t - 1T) + \dots + s_{i(N-1)}(t - (N - 1)T)$$

По свойству линейности, если $g(t) \leftrightarrow G(f)$, $h(t) \leftrightarrow H(f)$, то $ag(t) + bh(t) \leftrightarrow aG(f) + bH(f)$.

По свойству сдвига во временное области, если $g(t) \leftrightarrow G(f)$, тогда $g(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} G(f)$, иначе говоря, при сдвиге оригинала, спектр сдвинется на $e^{-j2\pi f t_0}$.

Используя эти два свойства, получим:

$$S_i(t) = S_{i0}(f)e^{-j2\pi 0f} + S_{i1}(f)e^{-j2\pi f 1T} + \dots + S_{i(N-1)}(f)e^{-j2\pi f(N-1)T}$$

Таким образом,

$$S_i(f) = \sum_{l=0}^{N-1} S_{il}(f)e^{-j2\pi f lT} \text{ ч.т.д}$$

6. Спектр последовательности сигналов.

Графики спектра последовательности сигналов различной длины приведены ниже:

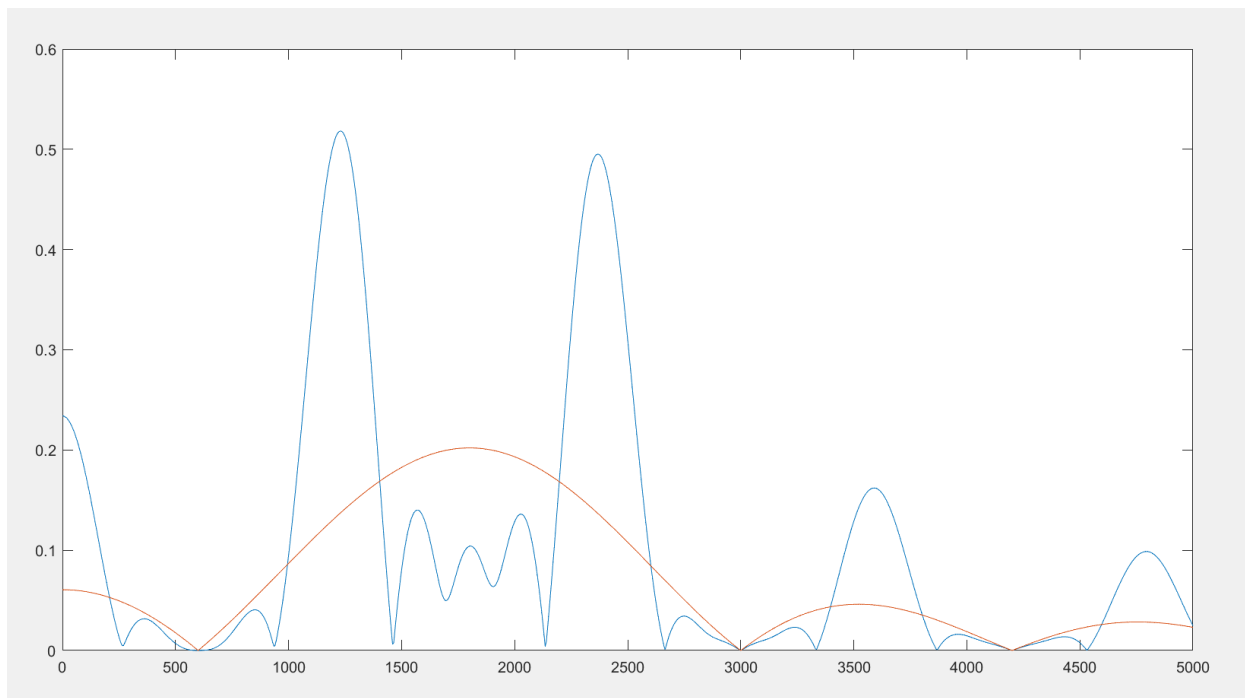


График 9 - Последовательность из 5 сигналов

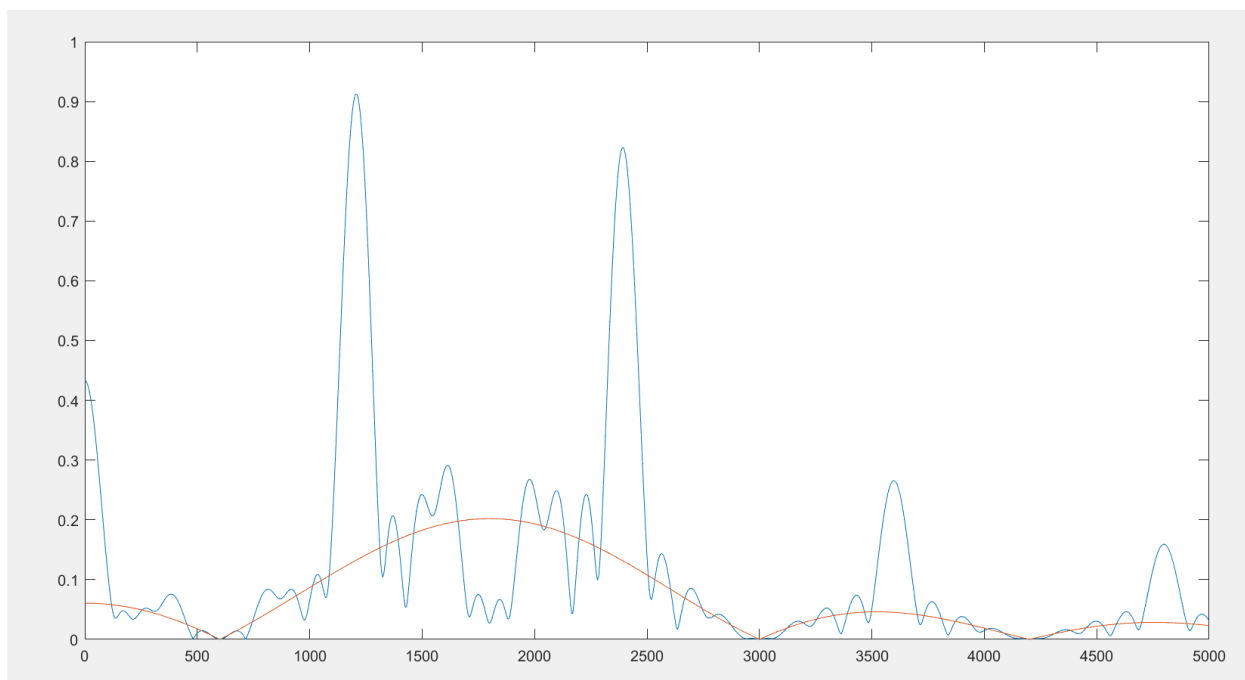


График 10 - Последовательность из 10 сигналов

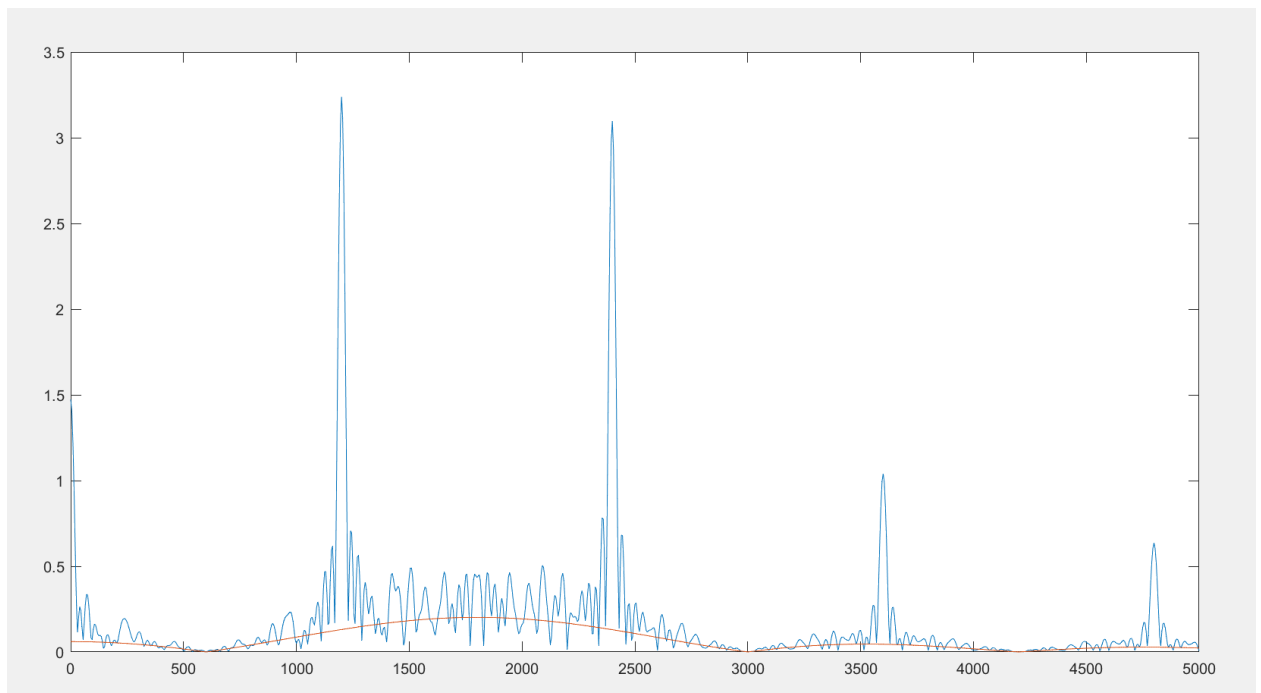


График 11 - Последовательность из 40 сигналов

Из полученных графиков можно заметить, что амплитуда спектра, полученного последовательностью сигналов, возрастает с увеличением числа сигналов, образующего последовательность.

Ширина полосы частот $W = \frac{2}{TN} = \frac{2V_{mod}}{N}$.

7. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы привела вывод выражений спектра гармонического сигнала. Вычислила амплитудные спектры всех сигналов и построила графики.

Привела вывод выражения спектра последовательности сигналов. Вычислила спектр последовательности сигналов для последовательностей длины 4, 10 и 40. Проанализировала полученные спектры и вычислила ширину полосы частот $W = \frac{2}{TN} = \frac{2V_{mod}}{N}$ для последовательности сигналов и $W = \frac{2}{T}$ для одиночного сигнала.

Листинг программы:

```
Vmod = 1200;
Vinf = 7200;
f0 = 1800;
T = 1/Vmod;
m = Vinf/Vmod;
q = pow2(m);
A = 7;
s = [7 5 3 1 -1 -3 -5 -7];
step = 100;
fmax = 10000;
f = 0:step:fmax;

S = @(n) s(fix(n/8)+1)*sqrt(T/2)*(sinc((f-f0)*T) +
sinc((f+f0)*T)).*exp(-1i*pi*f*T) +
(s(mod(n,8)+1)/1i)*sqrt(T/2)*(sinc((f-f0)*T) -
sinc((f+f0)*T)).*exp(-1i*pi*f*T);
signals = zeros(q, (fmax/step) + 1);

% вычисление амплитудного спектра
for k = 0:63
    signals(k+1,:) = abs(S(k));
end

% графики амплитудного спектра
for k = 0:q-1
    figure(fix(k/8) + 1);
    subplot(2,4,mod(k,8) + 1);
    plot(f,signals(k+1,:));
    grid on;
end

D = 5;
%генерация мультииндексов
L = randi([1,q],1,D);
Si = zeros(1, (fmax/step) + 1);
for k = 1:D
    Si = Si + signals(L(k),:).*exp(-1i*2*pi*f*(k-1)*T);
end
figure(9);
plot(f,abs(Si));
hold on;
plot(f,abs(signals(1,:)));
hold off;

B = 10;
%генерация мультииндексов
L = randi([1,q],1,B);
Si = zeros(1, (fmax/step) + 1);
for k = 1:B
    Si = Si + signals(L(k),:).*exp(-1i*2*pi*f*(k-1)*T);
```

```

end
figure(10);
plot(f,abs(Si));
hold on;
plot(f,abs(signals(1,:)));
hold off;

C = 40;
%генерация мультииндексов
L = randi([1,q],1,C);
Si = zeros(1,(fmax/step) + 1);
for k = 1:C
    Si = Si + signals(L(k),:).*exp(-1i*2*pi*f*(k-1)*T);
end
figure(11);
plot(f,abs(Si));
hold on;
plot(f,abs(signals(1,:)));
hold off;

```