

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

КАФЕДРА № 52

ОТЧЕТ  
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ  
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

канд. техн. наук

\_\_\_\_\_  
должность, уч. степень, звание

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Гильмутдинов М.Р.

\_\_\_\_\_  
инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА. ФУРЬЕ-АНАЛИЗ  
СИГНАЛОВ.

*по курсу: Цифровая обработка сигналов*

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. №

5912

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Калташов В.А.

\_\_\_\_\_  
инициалы, фамилия

Санкт-Петербург, 2021

### Цель работы:

Изучение свойств дискретизации аналоговых сигналов. Изучение методов Фурье-анализа аналоговых сигналов.

### 1. Выполнить аналитический расчет спектров для двух классов сигналов.

Для аналитического расчета периодического сигнала выполним разложение в синусно-косинусный ряд Фурье по формуле:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \cos \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) + b_k \sin \sin \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) \right) \quad (1.1)$$

Затем, используя коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ , определенных по формулам:

$$a_k = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) dt \quad (1.2)$$

$$b_k = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) dt \quad (1.3)$$

Вычисляем амплитудный спектр:

$$|\dot{C}| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} \quad (1.4)$$

Анализ непериодического сигнала будет выполняться на основе комплексного коэффициента  $\dot{C}_k$  вычисляемого по формуле:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A e^{-j\omega kt} dt \quad (1.5)$$

1.1. Периодические сигналы с периодом  $T$ : Последовательность прямоугольных импульсов.

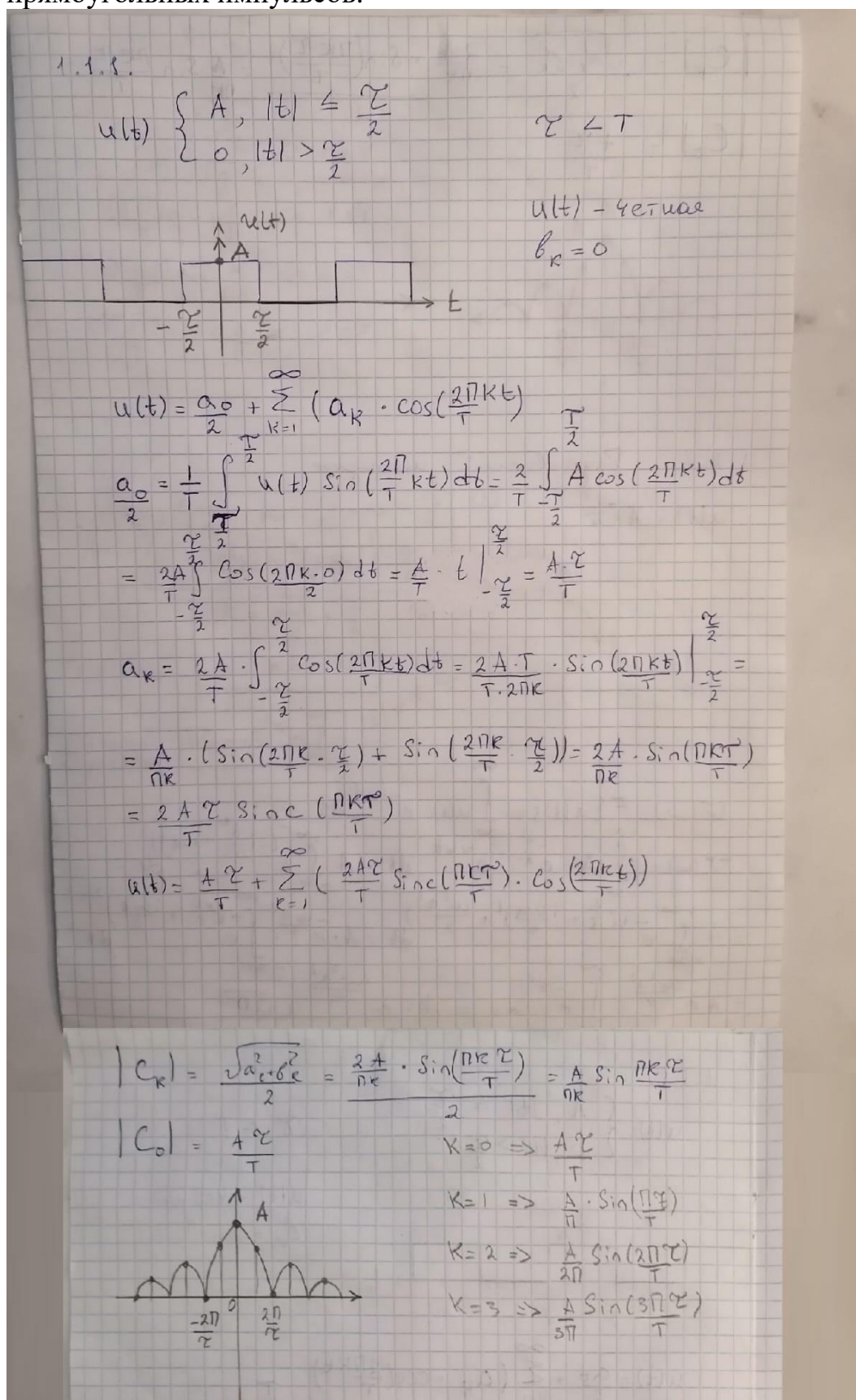


Рис. 1. Решение периодического сигнала.

## 1.2. Непериодические сигналы: Гауссовский импульс

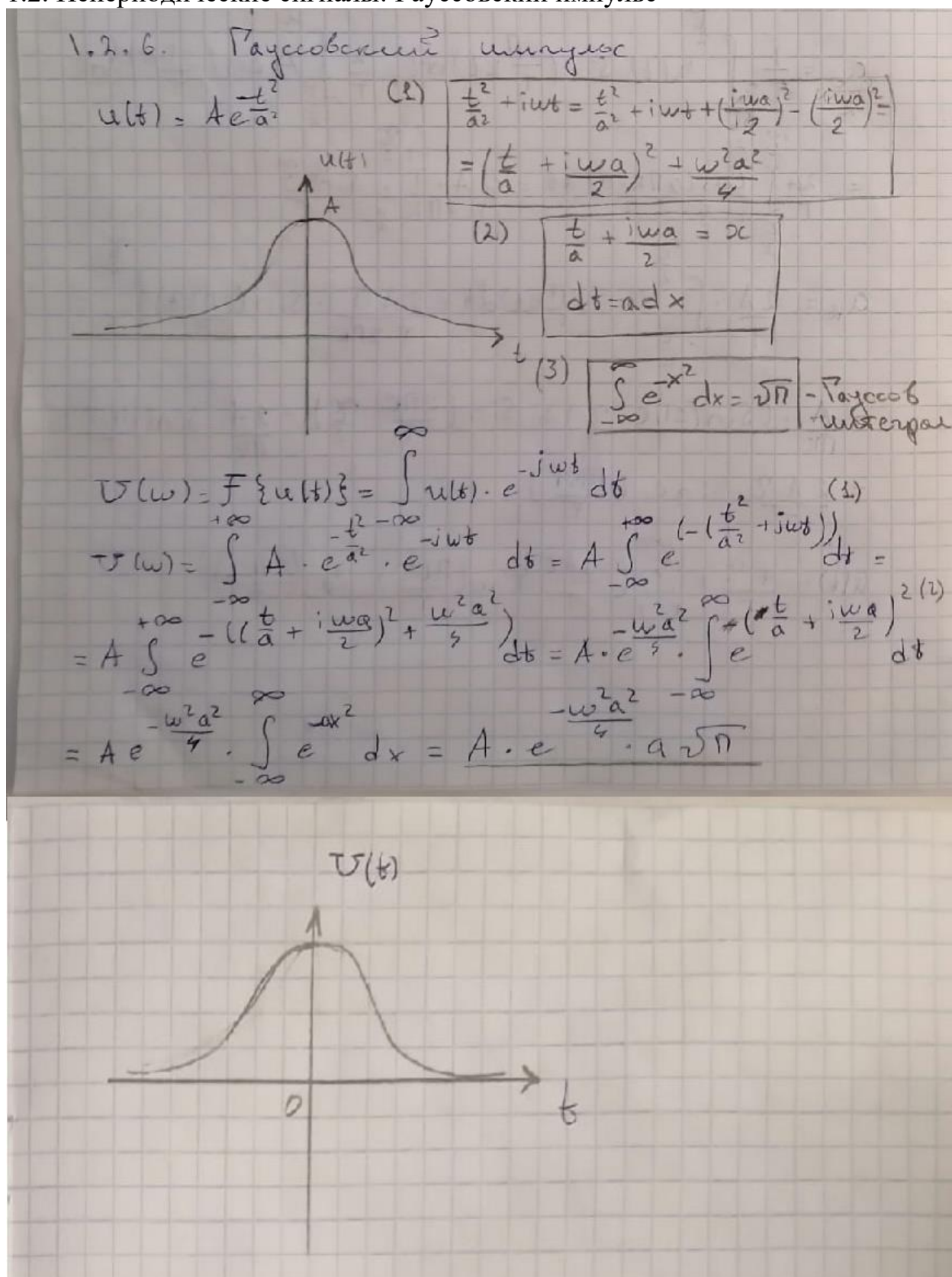


Рис. 2. Решение неперидического сигнала.

## Вывод:

В ходе выполнения данного пункта был проведен анализ Фурье для периодического и непериодического сигналов. Также были посчитаны их амплитудные спектры, построены соответствующие графики.

Заметим, что ряд Фурье представляет собой разложение на гармоники, а также позволяет нам разложить более сложную функцию на сумму простых (см. формулу (1.1)). Амплитудный спектр сигнала является его представлением в частотной области, что в целом позволяет нам проводить дальнейшую работу с ним.

## 2. Анализ синусоидальных функций

Провести анализ функций  $u_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ ,  $u_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$  интервале  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ .

2.1 Все значения функций на интервале  $[-0.5; 0.5]$  представлены на следующем графике:

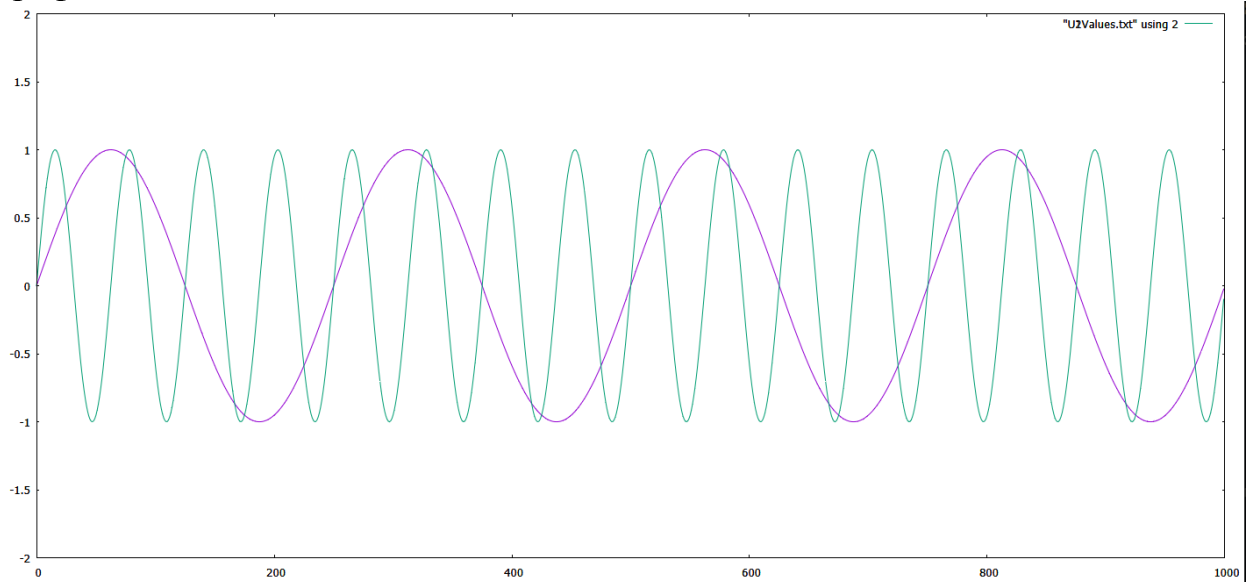


Рис. 3. Графики  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ .

2.1. Скалярное произведение двух функций рассчитывается по формуле:

$$(u_1(t), u_2(t)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u_1(t) u_2^*(t) dt \quad (2.3)$$

В результате вычисления скалярного произведения по формуле 2.1:

$$(u_1(t), u_2(t)) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_1(t) u_2^*(t) dt = 0$$

В результате вычисления скалярного произведения в программе:

$$(u_1(t), u_2(t)) = 3.87468e^{-13}$$

2.2. Вычисление нормы функции производится по формуле:

$$\|u(t)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b u^2(t) dt} \quad (2.2)$$

2.3 В результате вычисления нормы функции в программе:

$$\|u_{1,2}(t)\| = 0,7071$$

2.4. Если скалярное произведение двух функций равно нулю, то они являются ортогональными друг другу. В результате вычислений, произведенных в пункте 2.2,  $(u_1(t), u_2(t)) \approx 0$ , тогда функции ортогональны.

2.5. Для того чтобы представить функции элементами ортонормированного базиса их норма должна быть равна 1, то есть их необходимо поделить на норму функции, которую мы уже рассчитали в пункте 2.3.

2.6. Исследуемые функции останутся элементами ортонормированного базиса при:

- 1) Удвоении частоты  $f_1$  и  $f_2$ ;
- 2) Увеличить интервал  $[-\frac{T}{2}; +\frac{T}{2}]$  вдвое;
- 3) Уменьшить интервал  $[-\frac{T}{2}; +\frac{T}{2}]$  вдвое.

### **Вывод:**

Был проведен анализ двух функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , построены их графики. По формулам (2.1) и (2.2) были определены их скалярное произведение и нормы. Было выяснено, что после преобразования (2.3) данные функции могут являться членами ортонормированного базиса. А также при изменении параметров, описанных в пункте 2.6. функции останутся элементами ортонормированного базиса, но только в том случае, если количество периодов этих функций на заданном промежутке будет являться целым числом. Помимо этого, частоты должны выбирать следующим образом:  $f_i = \frac{l_i}{T}$ , где  $l_i$  – любое целое число,  $T$  – период.

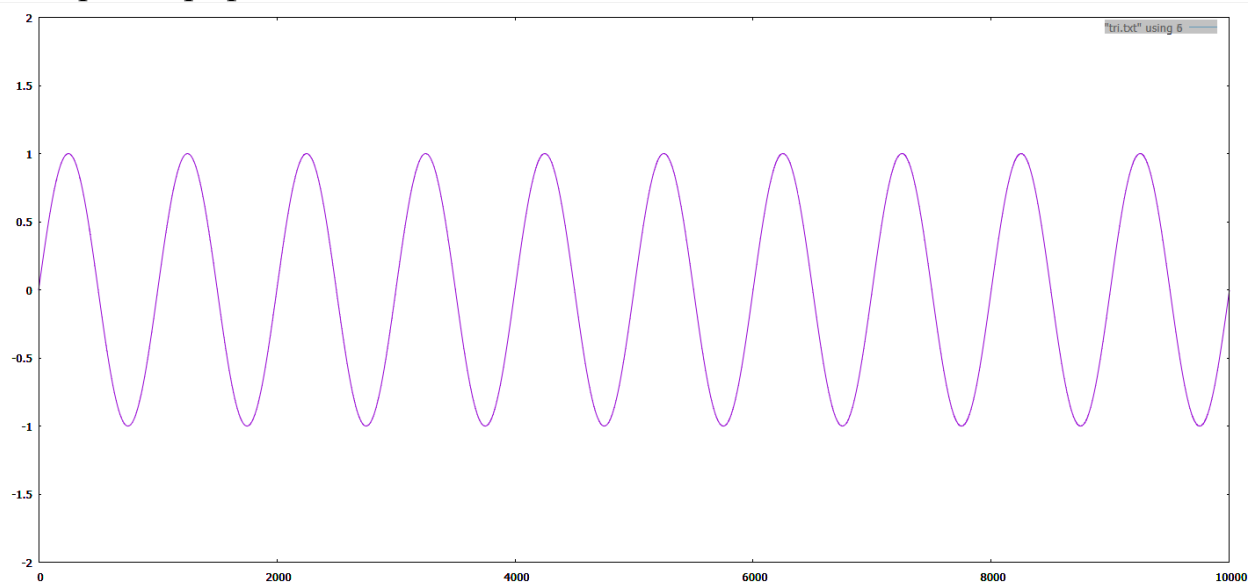
### **3. Дискретизация синусоидального сигнала.**

Исследовать процедуру дискретизация синусоидального сигнала  $u(t)$  с частотой  $F = 10$  Гц и длительностью  $T = 1$  секунды. Выборка отсчетов происходит с частотой  $f_d = 1.5F, 1.75F, 2F, 3F, 1000F$ . По дискретным отсчетам отсчетам нужно восстановить сигнал, применив формулу интерполяционного ряда Котельникова:

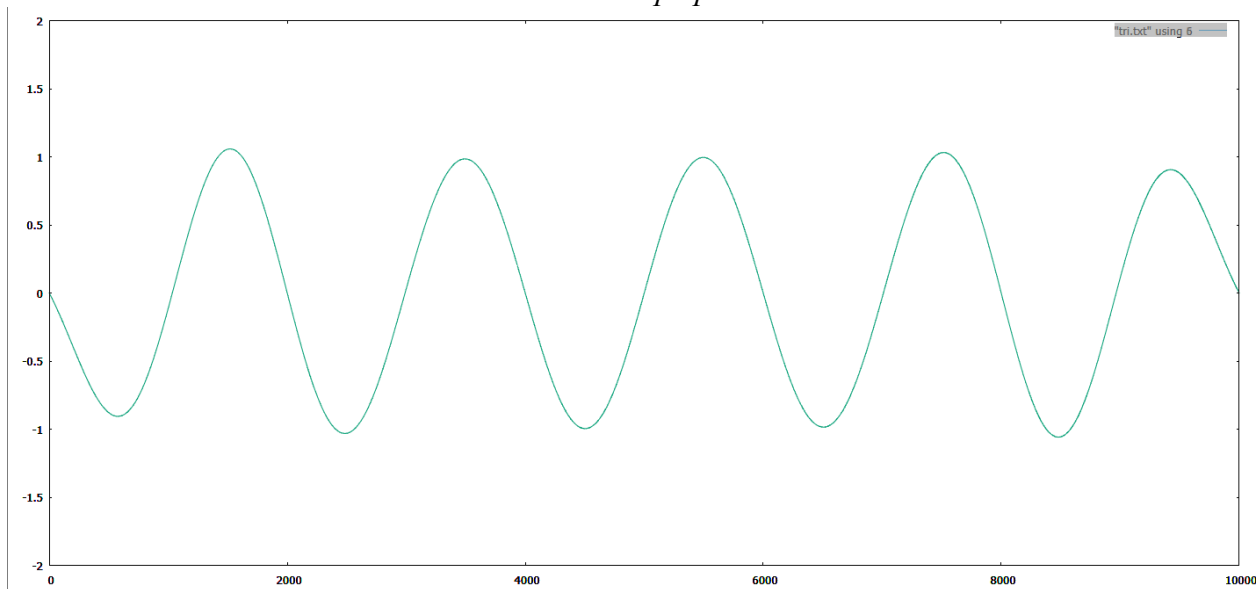
$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(nT_d) \cdot \text{sinc}\left(\pi\left(\frac{t}{T_d} - n\right)\right) \quad (3.1)$$

Исходный сигнал разбивается на дискретные во времени отсчеты с частотой  $f_d$ . Затем, с помощью формулы (3.1), происходит восстановление сигнала  $u(t)$  по получившимся отсчетам.

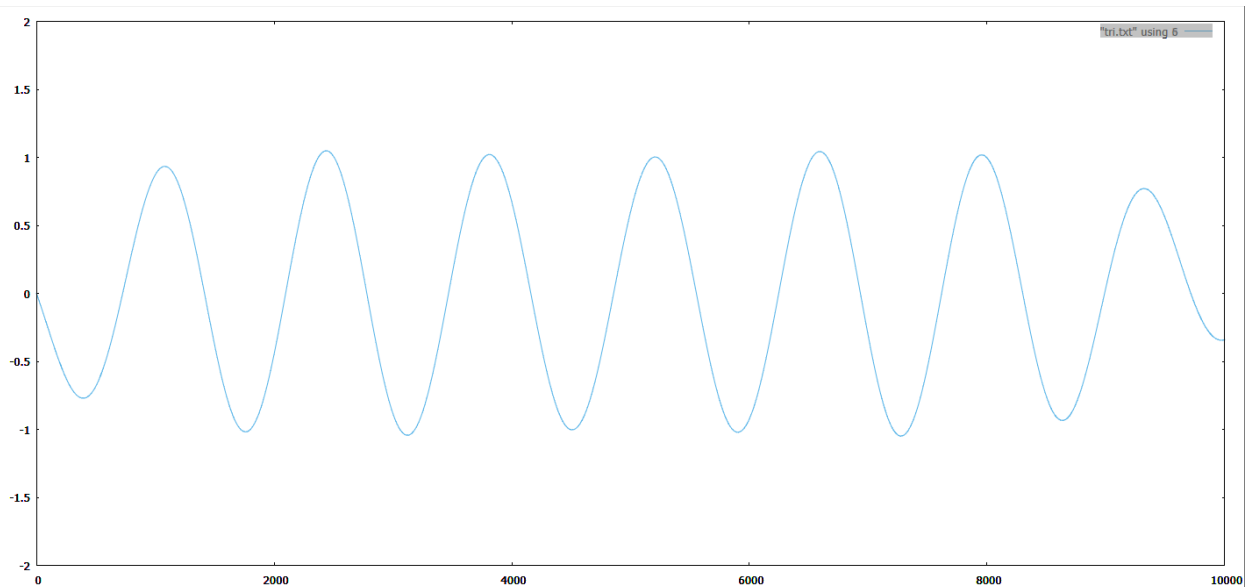
Построим графики сигналов.



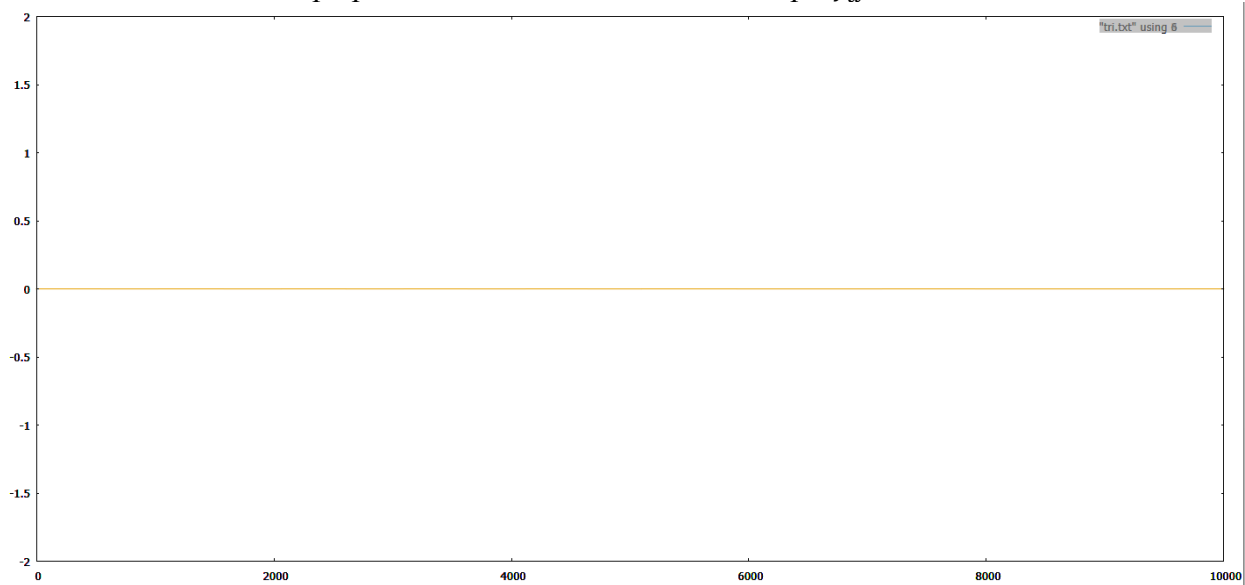
*Рис. 4. Исходный график сигнала.*



*Рис. 5. График восстановленного сигнала при  $f_d = 1.5F$ .*



*Рис. 6. График восстановленного сигнала при  $f_d = 1.75F$ .*



*Рис. 7. График восстановленного сигнала при  $f_d = 2F$ .*

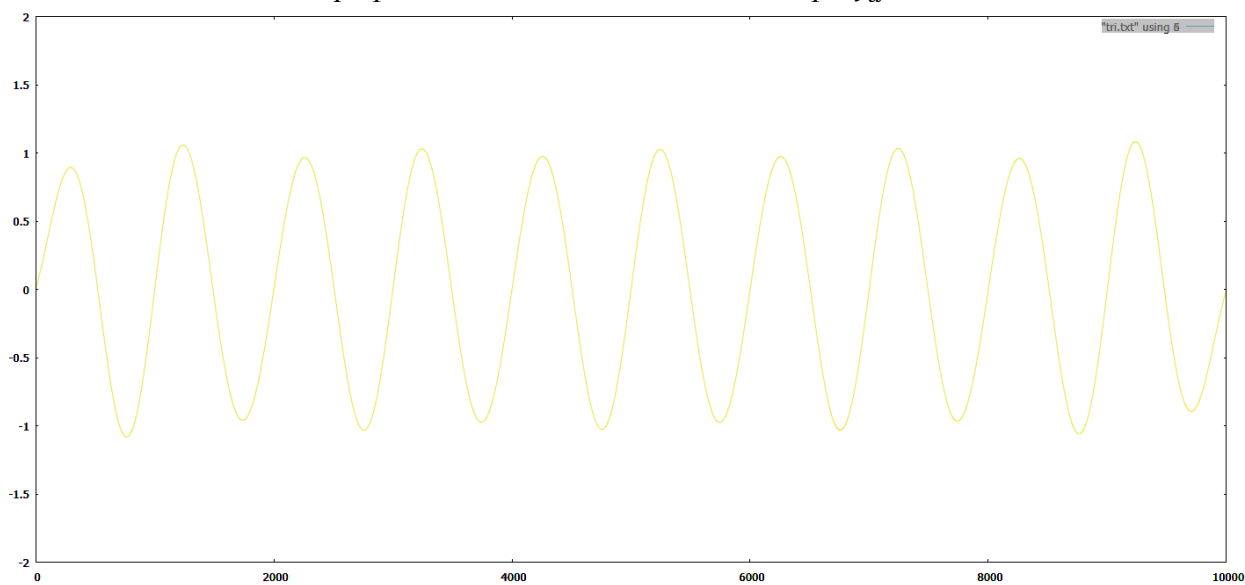




Рис. 8. График восстановленного сигнала при  $f_d = 3F$ .

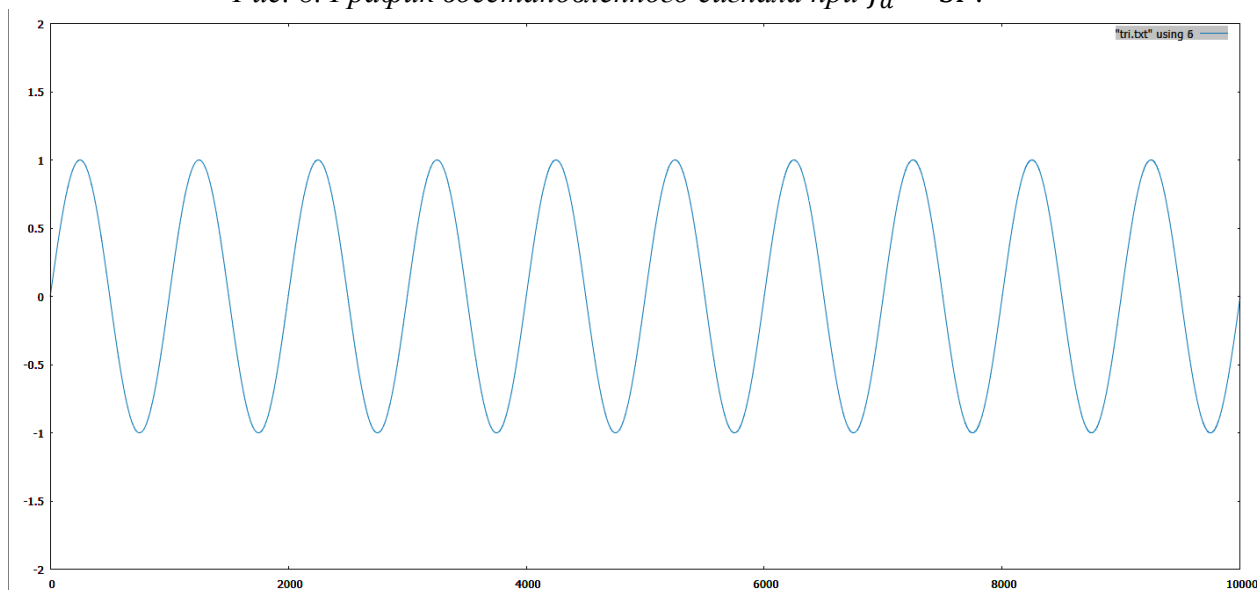


Рис. 9. График восстановленного сигнала при  $f_d = 1000F$ .

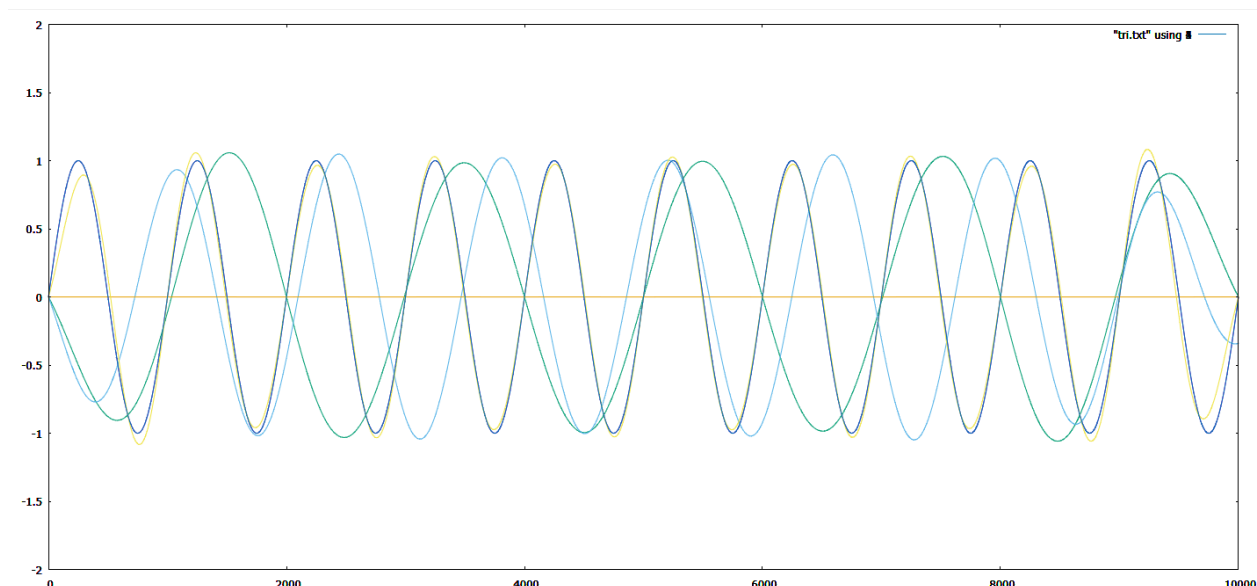


Рис. 10. Сравнение графиков восстановленного сигнала и восстановленных.

## Вывод:

В данном задании мы смогли точно восстановить с помощью интерполяционного ряда Котельникова (3.1) исходный синусоидальный сигнал, дискретизированный с частотой  $1000F$  (см. рисунок 16) и очень близкое к исходному  $3F$  (см. рисунок 15). При частоте, равной  $2F$  (см. рисунок 14) график получился равным нулю, поскольку мы берём 2 отчёта за период и постоянно попадаем в 0 (сигнал описывается синусом). Заметим, что по частотам меньше либо равных  $2F$  не удалось восстановить, что объясняется условием в теореме Котельникова: восстановление исходного аналогового сигнала возможно, если равномерная дискретизация выполняется с частотой

$f_d$ , минимум вдвое превышающую частоту  $f_c$ , где  $f_c$  - максимальная частота исходного сигнала :

$$f_d > 2f_c$$

Отметим, что при дискретизации с частотой  $3F$  график не удалось восстановить до конца, хотя неравенство выполнялось. Это можно объяснить тем, что интерполяционный ряд Котельникова представляет сигнал непрерывным и сумма должна быть бесконечной, а мы сделали ее конечной, поэтому это привело усечению и искажению на краях графика восстановленного сигнала.

#### 4. Передискретизация изображения.

Реализовать процедуру передискретизации изображения с помощью интерполяционного ряда Котельникова. Формат исходного изображения — BMP24, разрешение исходного изображения  $W \times H$  пикселей. Результатом передискретизации будет изображение размером  $nW \times mH$ . Выполнить передискретизацию с различными комбинациями значений  $m$  и  $n$ :

- 1)  $m > 1, n > 1$ .
- 2)  $m < 1, n < 1$ .
- 3)  $m > 1, n < 1$ .
- 4)  $m < 1, n > 1$ .

Исходное изображение:



Рис. 11. Исходное изображение.

1) При  $m = 1.5$ ,  $n = 1.5$ :



Рис. 12. Изображение при  $m = 1.5$ ,  $n = 1.5$ .

2) При  $m = 0.5$ ,  $n = 0.5$ :



Рис. 13. Изображение при  $m = 0.5$ ,  $n = 0.5$ .

3) При  $m = 1.5$ ,  $n = 0.5$ :



Рис. 14. Изображение при  $m = 1.5$ ,  $n = 0.5$ .



4) При  $m = 0.5$ ,  $n = 1.5$ :



Рис. 15. Изображение при  $m = 0.5$ ,  $n = 1.5$ .

### **Вывод:**

Была реализована процедура передискретизации изображения (см. рисунок 18) при разных  $m$  и  $n$ . Процедура передискретизации осуществлялась при помощи формулы интерполяционного ряда Котельникова (см. формулу 3.1). В данном случае мы работали с пикселями и их цветом (RGB). Изображения при передискретизации на краях получились с небольшими искажениями. Это объясняется тем, что интерполяционный ряд Котельникова представляет сигнал непрерывным и сумма должна быть бесконечной, но в реальности мы сделали ее конечной, поэтому это привело усечению и искажению на краях изображения.

**Вывод:**

В результате данной лабораторной работы, мы научились проводить анализ Фурье, вычислять спектры сигналов, анализировать синусоидальные функции по таким свойствам как ортогональность и норма. Помимо этого, мы изучили теорему Котельникова и разобрали её на наглядном примере - дискретизации сигналов с различными частотами, а потом перенесли все полученные знания на работу с изображением, то есть его передискретизацию. Таким образом, при выполнении данной лабораторной работы мы смогли получить набор определённых навыков работы с сигналами и научились их анализировать.