

## Цель работы

Вычислить вероятность  $P_{ij}(x_i, x_j) = p_{ij}$  существования пути между заданной парой вершин  $x_i, x_j$  в графе  $\tilde{G}$ .

Построить зависимость  $p_{ij}(p)$  вероятности существования пути в случайном графе от вероятности существования ребра.

## Теоретический материал

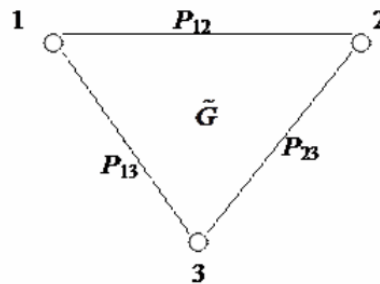


Рис.1 – пример случайного графа

Рассмотрим две ситуации. Для первой будем полагать, что ребро 2-3 всегда существует. Для второй ситуации будем полагать, что ребро 2-3 не существует. В этом случае можно перейти к рассмотрению двух новых случайных графов:  $\tilde{G}^1$ , появление которого возможно с вероятностью  $P(\tilde{G}^1) = P_{23}$ , и  $\tilde{G}^2$ , который может появиться с вероятностью  $P(\tilde{G}^2) = (1 - P_{23})$ .

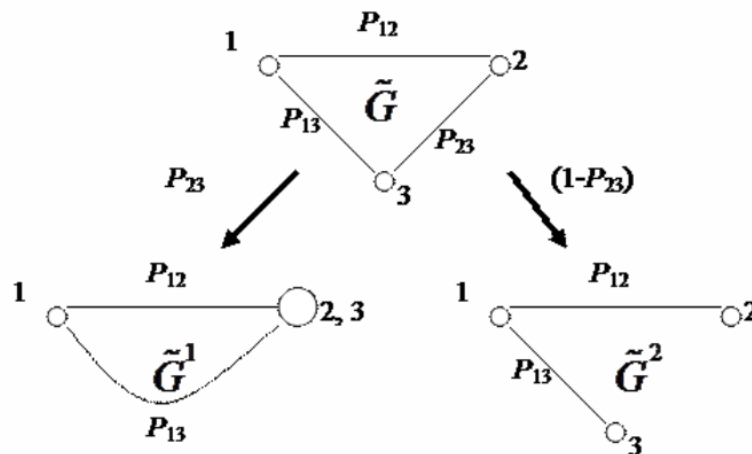


Рис.2 – декомпозиция случайного графа

Поскольку ребро 2-3 для случайного графа  $\tilde{G}^2$  существует всегда, то вершины 2 и 3 можно объединить в одну. Для  $G_2$  же ребро 2-3 просто отсутствует.

Такую процедуру получения более простых случайных графов на основе одного сложного будем называть *декомпозицией*.

Для полученных с помощью декомпозиции случайных графов определим вероятность связности вершин 1 и 2:

$$P_{cs}(1,2|\tilde{G}^1) = P_{12} + P_{13} - P_{12} * P_{13} \quad (2)$$

$$P_{cs}(1,2|\tilde{G}^2) = P_{12} \quad (3)$$

Теперь, чтобы получить вероятность связности для случайного графа  $\tilde{G}$  воспользуемся формулами (2) и (3):

$$P_{cs}(1,2) = P_{cs}(1,2|\tilde{G}^1) * P_{32} + P_{cs}(1,2|\tilde{G}^2) * (1 - P_{32}) \quad (4)$$

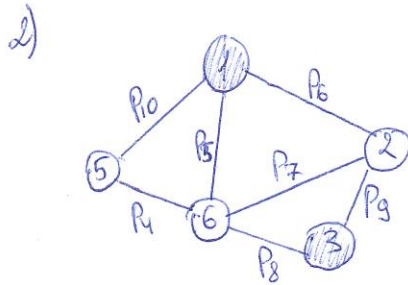
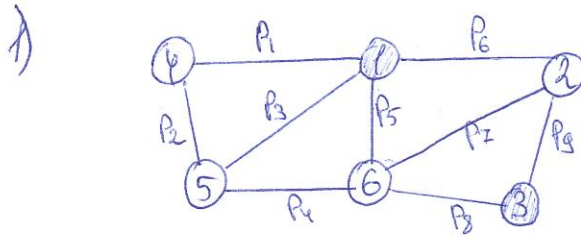
Декомпозицию для новых графов можно продолжать. При этом в узлы построенного таким образом «двоичного дерева» будут отображаться случайные графы. Существенно то, что случайные графы, находящиеся на нижних ярусах, будут иметь более простую топологию по сравнению с графами на вышестоящих ярусах.

Основная цель процедуры декомпозиции состоит в замене одного сложного графа на несколько простых, для которых проще произвести расчет вероятности связности.

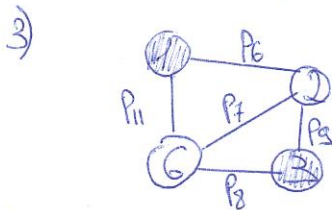
## Ход работы

1. Вывод формулы вероятности существования пути в случайном графе

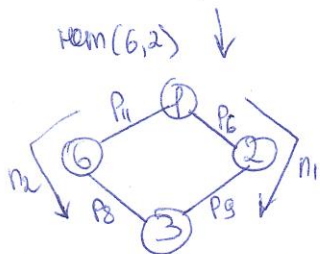
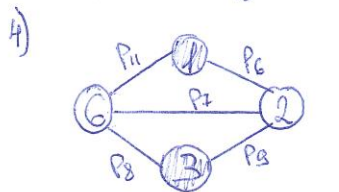
### Баpианм 3.



$$P_{10} = P_3 + P_1 P_2 - P_1 P_2 P_3 = P + P^2 - P^3$$

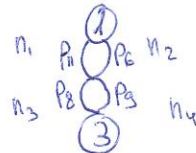


$$\begin{aligned} P_{11} &= P_5 + P_4 P_{10} - P_4 P_5 P_{10} = P + P(P + P^2 - P^3) - P^2(P + P^2 - P^3) \\ &= P + P^2 + P^3 - P^4 - P^3 - P^4 + P^5 = \\ &= P^5 - 2P^4 + P^2 + P \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P_n \{ \text{ngme } 1, 3 \} / \text{hem } 6, 2 \} &= \{ n_1, v, n_2 \} = \\ P_2 n_1 \} + P_2 \{ n_2 \} - P_n \{ \text{ngme } 1, 3 \} &= \\ P_{11} P_8 + P_6 P_9 - P_6 P_8 P_9 P_{11} \end{aligned}$$

ecme(6,2)



$$\begin{aligned} P_n \{ \text{ngme } 1, 3 \} / \text{ecme } 6, 2 \} &= P_n \{ n_1, v, n_2 \} \cdot P_n \{ n_3, v, n_4 \} = \\ &= (P_{11} + P_6 - P_6 P_{11})(P_8 + P_9 - P_8 P_9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n \{ \text{ngme } 1, 3 \} &= P_n \{ \text{ngme } 1, 3 \} / \text{hem } 6, 2 \} \cdot (1 - P_7) + P_n \{ \text{ngme } 1, 3 \} / \text{ecme } 6, 2 \} \cdot P_7 = \\ &= (P_{11} P_8 + P_6 P_9 - P_6 P_8 P_9 P_{11})(1 - P_7) + (P_{11} + P_6 - P_6 P_{11})(P_8 + P_9 - P_8 P_9) P_7 = \\ &= (P_{11} P + P^2 - P_{11} P^3)(1 - P^4) + (P_{11} + P - P_{11} P)(2P - P^2)P = \\ &= P_{11} P + P^2 - P_{11} P^3 - P_{11} P^2 - P^3 + P_{11} P^4 + 2P_{11} P^2 + 2P^3 - 2P_{11} P^3 - P_{11} P^3 - P^4 + P_{11} P^4 = \\ &= 2P_{11} P^4 - 4P_{11} P^3 + P_{11} P^2 + P_{11} P - P^4 + P^3 + P^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2p^4(p^5 - 2p^4 + p^2 + p) - 4p^3(p^5 - 2p^4 + p^2 + p) + p^2(p^5 - 2p^4 + p^2 + p) + p(p^5 - 2p^4 + p^2 + p) \\
&- p^4 + p^3 + p^2 = 2p^9 - 4p^8 + 2p^6 + 2p^5 - 4p^8 + 8p^7 - 4p^5 - 4p^4 \\
&+ p^7 - 2p^6 + \cancel{4p^4} + p^3 + p^6 - 2p^5 + p^3 + p^2 - \cancel{p^4} + p^3 + p^2 = \\
&2p^9 - 8p^8 + 9p^7 + p^6 - 4p^5 - 4p^4 + 3p^3 + 2p^2
\end{aligned}$$

## 1. Разработка программы вычисления вероятности существования пути в случайном графе

Результаты расчетов:

P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Pr(p)- полный перебор	0.022 5618	0.096 4797	0.221 092	0.382 763	0.558 594	0.722 945	0.854 681	0.942 719	0.987 856	1
Pr(p)- аналитич еская	0.022 5618	0.096 4797	0.221 092	0.382 763	0.558 594	0.722 945	0.854 681	0.942 719	0.987 856	1

Таблица 1 – результаты расчетов вероятностей

## 2. Графики полученных зависимостей

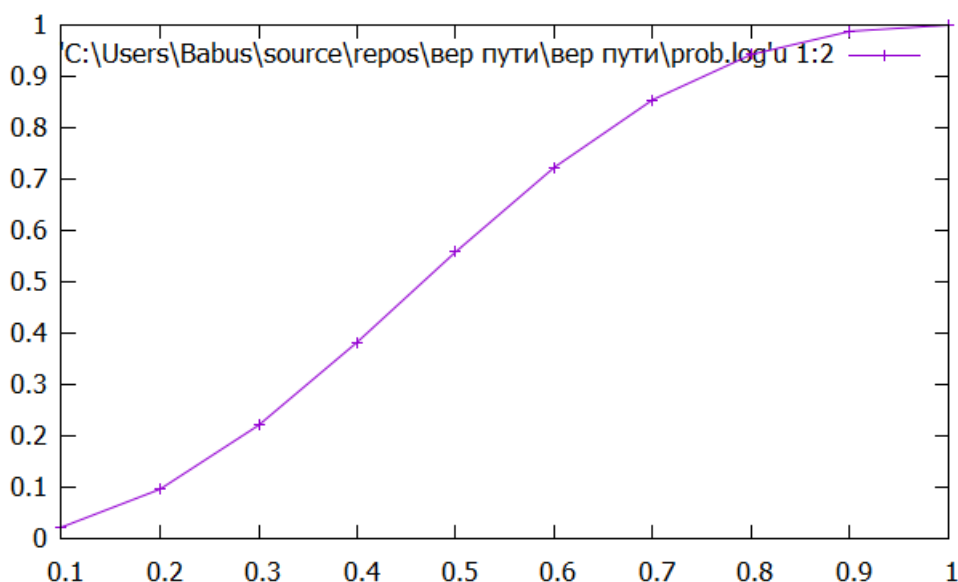


Рис.3 – график зависимости вероятности существования пути от вероятности существования ребра (p)

## 3. Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы были изучены основные способы получения точного значения вероятности существования пути между вершинами случайного графа.