ГУАП

КАФЕДРА № 52

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

доцент, канд.тех.наук		Марковская Н.В.
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 1

Определение точного значения вероятности существования пути между вершинами графа

по курсу: Надежность инфокоммуникационных систем

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР.	5911		Бенцлер А.А.
		подпись, дата	инициалы, фамилия

г. Санкт-Петербург
2022 г.

Цель работы

Вычислить вероятность $P_{ss}(x_i, x_j) = \rho_{ij}$ существования пути между заданной парой вершин x_i, x_j в графе $\tilde{G}$.

Построить зависимость $\rho_{ij}(p)$ вероятности существования пути в случайном графе от вероятности существования ребра.

Теоретический материал

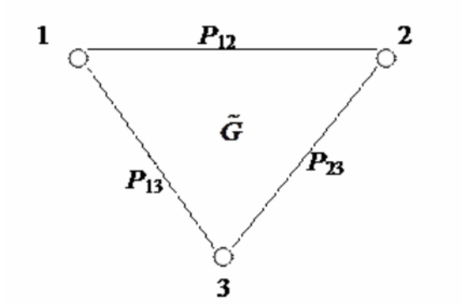


Рис.1 – пример случайного графа

Рассмотрим две ситуации. Для первой будем полагать, что ребро 2-3 всегда существует. Для второй ситуации будем полагать, что ребро 2-3 не существует. В этом случае можно перейти к рассмотрению двух новых случайных графов: $\tilde{G}^1$, появление которого возможно с вероятностью $P(\tilde{G}^1) = P_{32}$, и $\tilde{G}^2$, который может появиться с вероятностью $P(\tilde{G}^2) = (1 - P_{32})$.

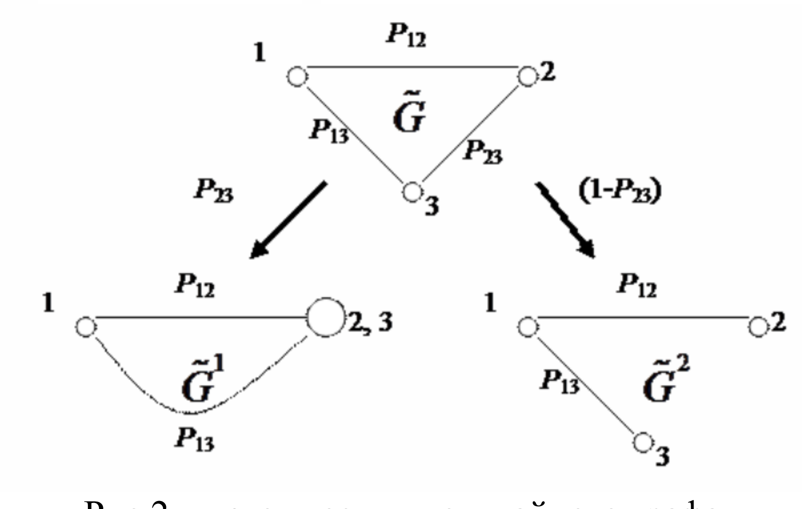


Рис.2 – декомпозиция случайного графа

Поскольку ребро 2-3 для случайного графа $\tilde{G}^2$ существует всегда, то вершины 2 и 3 можно объединить в одну. Для G2 же ребро 2-3 просто отсутствует.

Такую процедуру получения более простых случайных графов на основе одного сложного будем называть *декомпозицией*.

Для полученных с помощью декомпозиции случайных графов определим вероятность связности вершин 1 и 2:

$$P_{св}\left(1,2\middle|\tilde{G}^1\right) = P_{12}+P_{13} - P_{12}*P_{13} \quad (2)$$

$$P_{св}\left(1,2\middle|\tilde{G}^2\right) = P_{12} \quad (3)$$

Теперь, чтобы получить вероятность связности для случайного графа $\tilde{G}$ воспользуемся формулами (2) и (3):

$$P_{св}\left(1,2\right) = P_{св}\left(1,2\middle|\tilde{G}^1\right)*P_{32} + P_{св}\left(1,2\middle|\tilde{G}^2\right)*\left(1-P_{32}\right) \quad (4)$$

Декомпозицию для новых графов можно продолжать. При этом в узлы построенного таким образом «двоичного дерева» будут отображаться случайные графы. Существенно то, что случайные графы, находящиеся на нижних ярусах, будут иметь более простую топологию по сравнению с графами на вышестоящих ярусах.

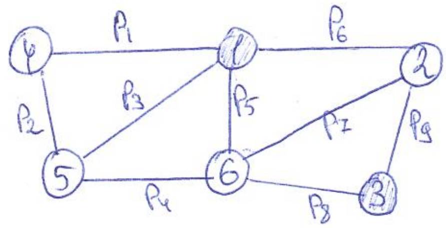
Основная цель процедуры декомпозиции состоит в замене одного сложного графа на несколько простых, для которых проще произвести расчет вероятности связности.

Ход работы

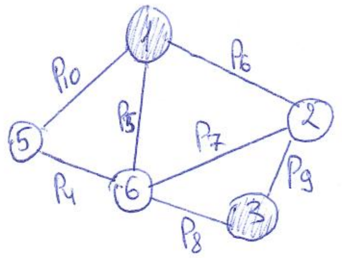
1. Вывод формулы вероятности существования пути в случайном графе

Вариант 3.

1)

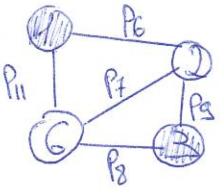


2)



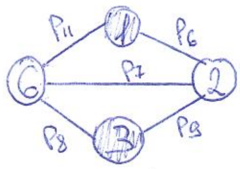
$$p_{10} = p_3 + p_1 p_2 - p_1 p_2 p_3 = p + p^2 - p^3$$

3)



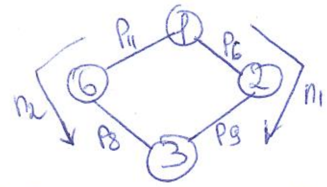
$$p_{11} = p_5 + p_4 p_{10} - p_4 p_5 p_{10} = p + p(p+p^2-p^3) - p^2(p+p^2-p^3)$$
$$= p + p^2 + p^3 - p^4 - p^3 - p^4 + p^5 =$$
$$= p^5 - 2p^4 + p^2 + p$$

4)

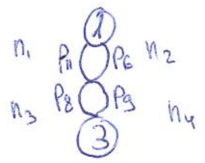


нет (6,2)

есть (6,2)



$Pr\{\text{путь } 1,3 \mid \text{нет } 6,2\} = \{n_1 \vee n_2\} =$
$Pr\{n_1\} + Pr\{n_2\} - Pr\{n_1 n_2\} =$
$p_{11} p_8 + p_6 p_9 - p_6 p_8 p_9 p_{11}$



$Pr\{\text{путь } 1,3 \mid \text{есть } 6,2\} = Pr\{n_1 \vee n_2\} \cdot Pr\{n_3 \vee n_4\} =$
$= (p_{11} + p_6 - p_6 p_{11})(p_8 + p_9 - p_8 p_9)$

$$Pr\{\text{путь } 1,3\} = Pr\{\text{путь } 1,3 \mid \text{нет } 6,2\} \cdot (1 - p_7) + Pr\{\text{путь } 1,3 \mid \text{есть } 6,2\} \cdot p_7 =$$
$$(p_{11} p_8 + p_6 p_9 - p_6 p_8 p_9 p_{11})(1 - p_7) + (p_{11} + p_6 - p_6 p_{11})(p_8 + p_9 - p_8 p_9) p_7 =$$
$$(p_{11} p + p^2 - p_{11} p^3)(1 - p) + (p_{11} + p - p_{11} p)(2p - p^2) p =$$
$$p_{11} p + p^2 - p_{11} p^3 - p_{11} p^2 - p^3 + p_{11} p^4 + 2p_{11} p^2 + 2p^3 - 2p_{11} p^3 - p_{11} p^3 - p^4 + p_{11} p^4 =$$
$$= 2p_{11} p^4 - 4p_{11} p^3 + p_{11} p^2 + p_{11} p - p^4 + p^3 + p^2$$

$$= 2p^4(p^5-2p^4+p^2+p) - 4p^3(p^5-2p^4+p^2+p) + p^2(p^5-2p^4+p^2+p) + p(p^5-2p^4+p^2+p)$$

$$-p^4+p^3+p^2 = 2p^9 - 4p^8 + 2p^6 \cancel{+2p^5} - 4p^8 + 8p^7 - 4p^5 - 4p^4$$

$$+p^7 \cancel{-2p^6} \cancel{+2p^4} + p^3 + p^6 \cancel{-2p^5} + p^3 + p^2 \cancel{-p^4} + p^3 + p^2 =$$

$$2p^9 - 8p^8 + 9p^7 + p^6 - 4p^5 - 4p^4 + 3p^3 + 2p^2$$

1. Разработка программы вычисления вероятности существования пути в случайном графе

Результаты расчетов:

P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Pr(p)-полный перебор	0.0225618	0.0964797	0.221092	0.382763	0.558594	0.722945	0.854681	0.942719	0.987856	1
Pr(p)-аналитическая	0.0225618	0.0964797	0.221092	0.382763	0.558594	0.722945	0.854681	0.942719	0.987856	1

Таблица 1 – результаты расчетов вероятностей

2. Графики полученных зависимостей

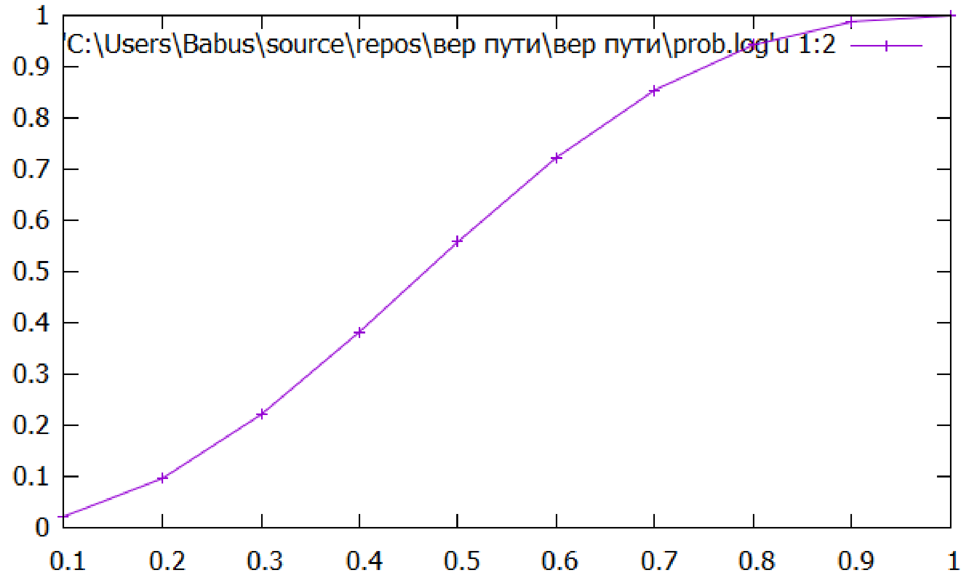


Рис.3 – график зависимости вероятности существования пути от вероятности существования ребра (p)

3. Вывод
В ходе выполнения данной лабораторной работы были изучены основные способы получения точного значения вероятности существования пути между вершинами случайного графа.