

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

---

КАФЕДРА №52

ОТЧЕТ ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ\_\_\_\_\_

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

ассистент

Н.А.Янковский

---

должность, уч. степень,  
звание

---

подпись, дата

---

инициалы,  
фамилия

**ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2**

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.

по курсу: ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛА

СТУДЕНТ ГР. №

5912

И.К. Лобач

---

номер  
группы

---

подпись,  
дата

---

инициалы,  
фамилия

Санкт-Петербург 2021

Цель работы: изучение методов Фурье-анализа дискретных и цифровых сигналов.

### Порядок выполнения и результаты исследования

1. Написать программу вычисления прямого и обратного дискретного преобразования Фурье в матричной форме.

Формула прямого дискретного преобразования Фурье:

$$\dot{U}_k = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} u_n e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Нормирующий коэффициент  $\frac{1}{N}$ , как правило, применяется при вычислении обратного ДПФ вместо прямого.

Поскольку прямое и обратное ДПФ можно интерпретировать в терминах операций над векторами, это преобразование удобно представлять в матричной форме соответственно:

$$\vec{U} = \vec{u} F^H$$

$$\vec{u} = \vec{U} F$$

где матрица  $F$  имеет вид:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} e^{j\frac{2\pi 0}{N} 0} & e^{j\frac{2\pi 1}{N} 0} & \dots & e^{j\frac{2\pi (N-1)}{N} 0} \\ e^{j\frac{2\pi 0}{N} 1} & e^{j\frac{2\pi 1}{N} 1} & \dots & e^{j\frac{2\pi (N-1)}{N} 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi 0}{N} (N-1)} & e^{j\frac{2\pi 1}{N} (N-1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi (N-1)}{N} (N-1)} \end{pmatrix},$$

а  $F^H$  — эрмитово сопряженная с  $F$  матрица.

Для программной реализации был выбран сигнал  $u(t) = \sin(2\pi f t)$  с  $f = 20$  Гц на интервале  $[0; 1]$  и шагом  $dt = 0,001$ .

График исходного сигнала выглядит следующим образом:

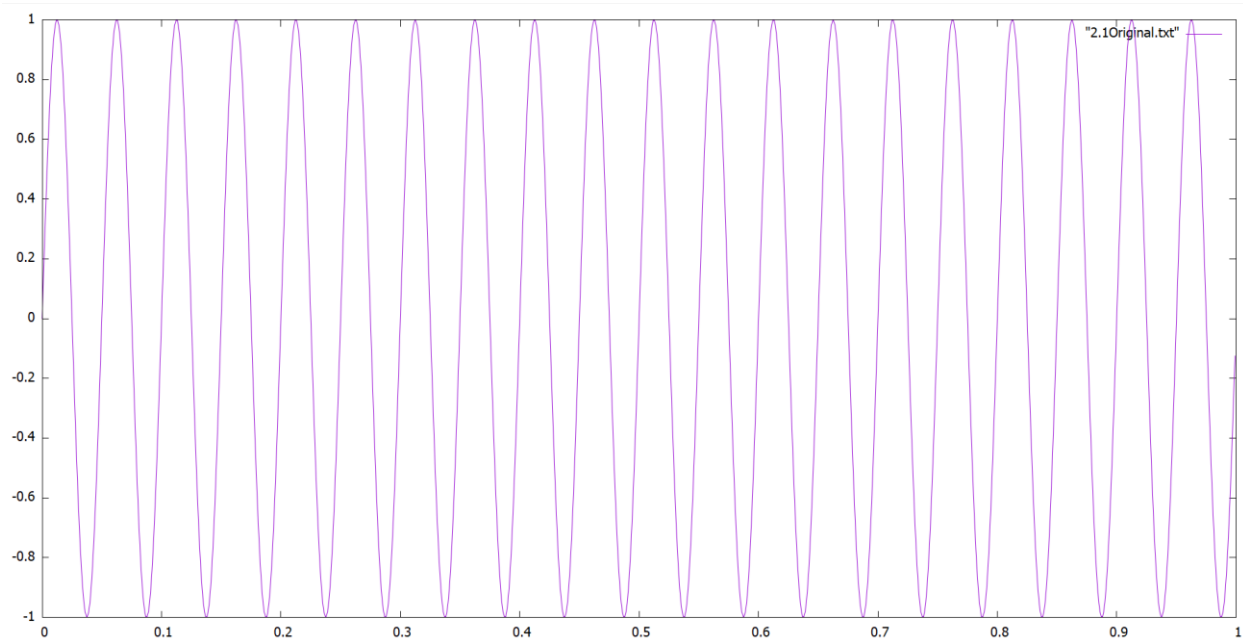


График 1 - Исходный сигнал

Прямое дискретное преобразование Фурье:

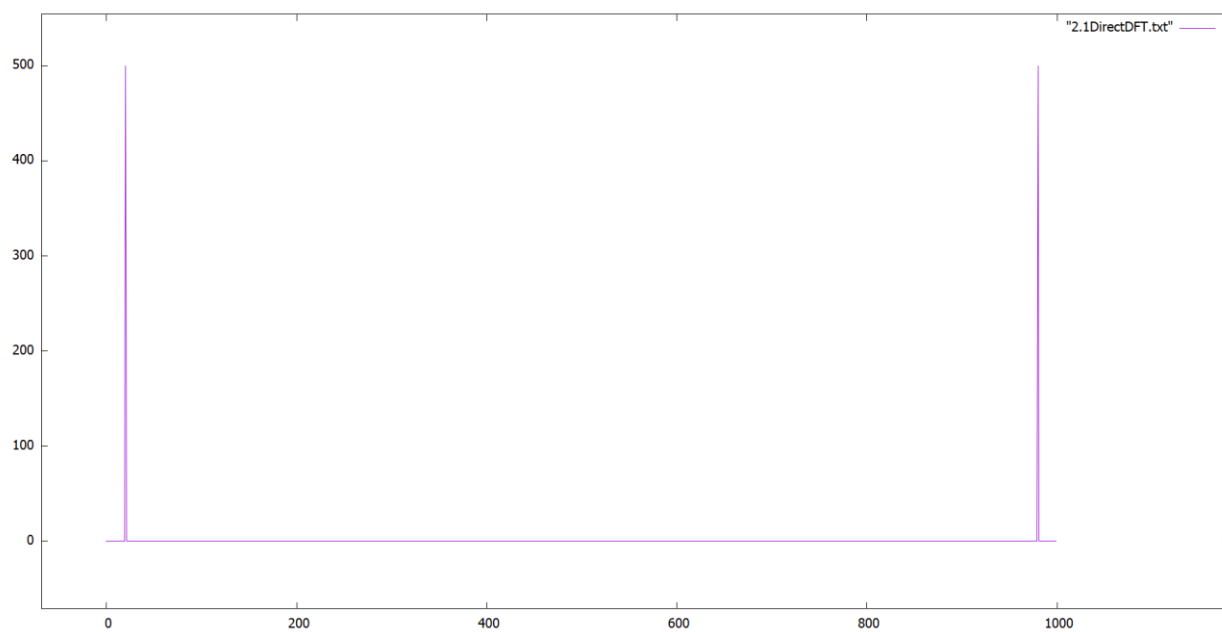


График 2 - Прямое ДПФ. Амплитудный спектр.

### Обратное дискретное преобразование Фурье:

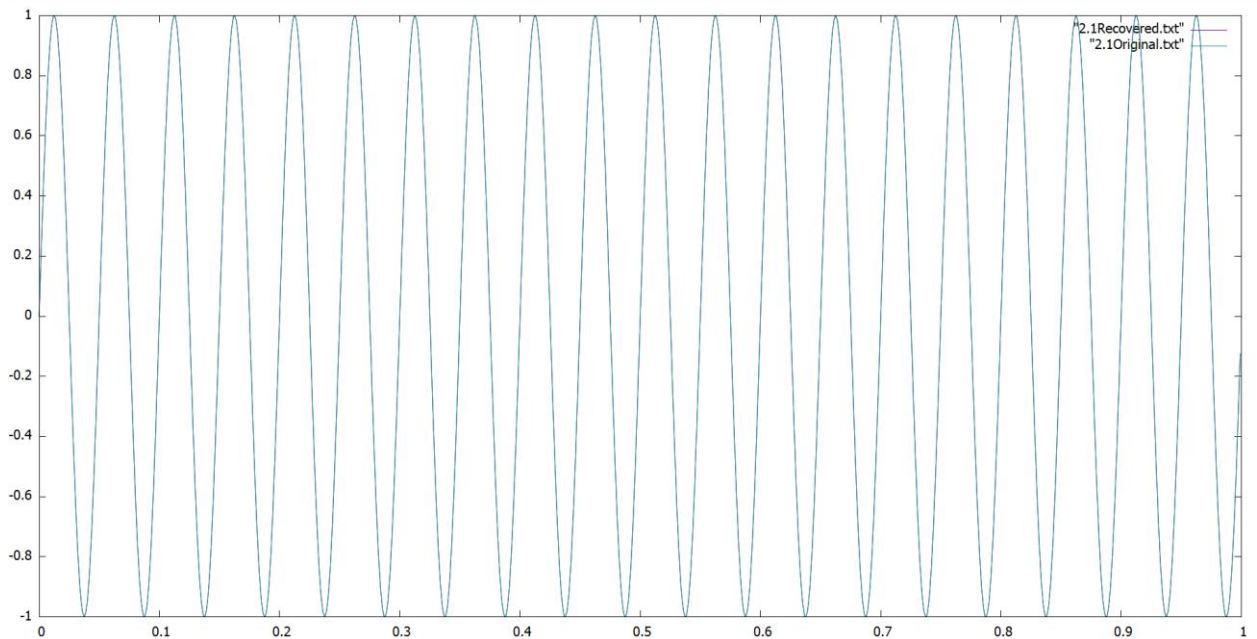


График 3 - Обратное ДПФ

По графику видно, что восстановленный сигнал полностью совпадает с исходным, что говорит о корректной работе программы.

2. Продемонстрировать с помощью написанной программы свойства линейности, сдвига сигнала во времени и равенство Парсеваля.

Все свойства будут демонстрироваться на сигнале  $u(t) = \sin(2\pi ft)$  с  $f = 20$  Гц на интервале  $[0; 1]$  и шагом  $dt = 0,001$ .

#### 2.1. Свойство линейности:

$$\alpha_1 u_k^{(1)} + \alpha_2 u_k^{(2)} \leftrightarrow \alpha_1 U_n^{(1)} + \alpha_2 U_n^{(2)}$$

Продемонстрируем это свойство, построив график суммы синусоид  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  с частотами  $f_1 = 20$  Гц и  $f_2 = 30$  Гц и умноженных на  $\alpha_1 = 13$  и  $\alpha_2 = 5$  соответственно.

Полученный график имеет вид:

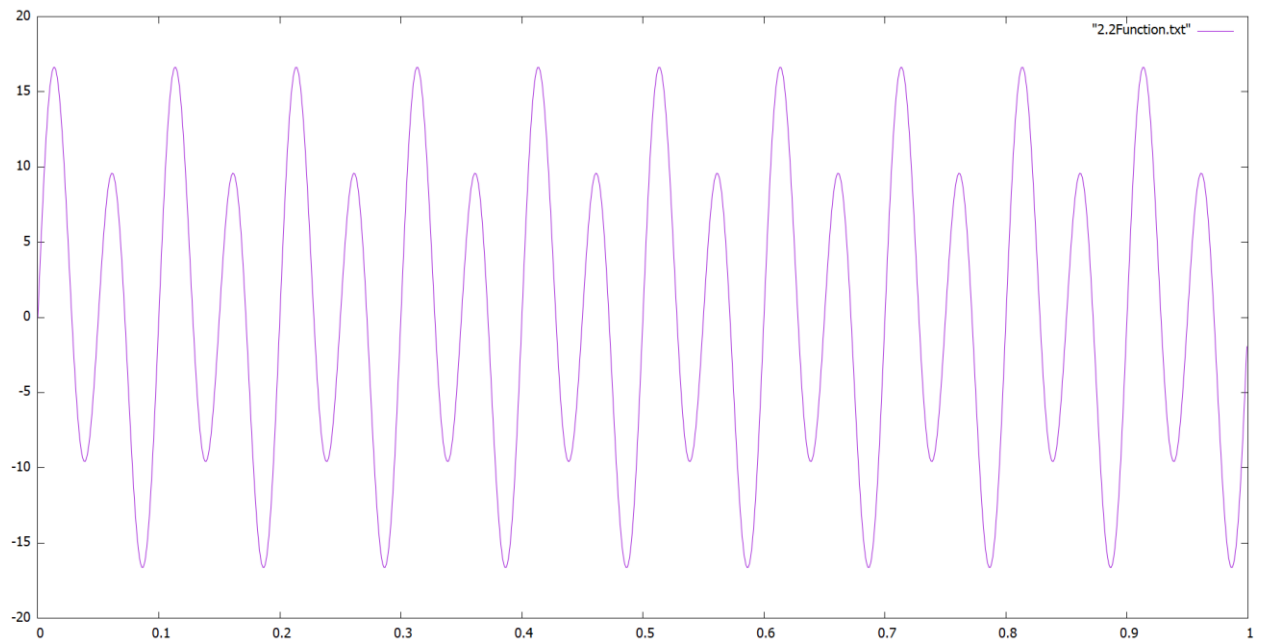


График 4 - График полученного сигнала

Вычислим прямое ДФТ каждой из функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , затем умножим на  $\alpha_1 = 13$  и  $\alpha_2 = 5$  и просуммируем.

Обратное ДФТ будет выглядеть следующим образом:

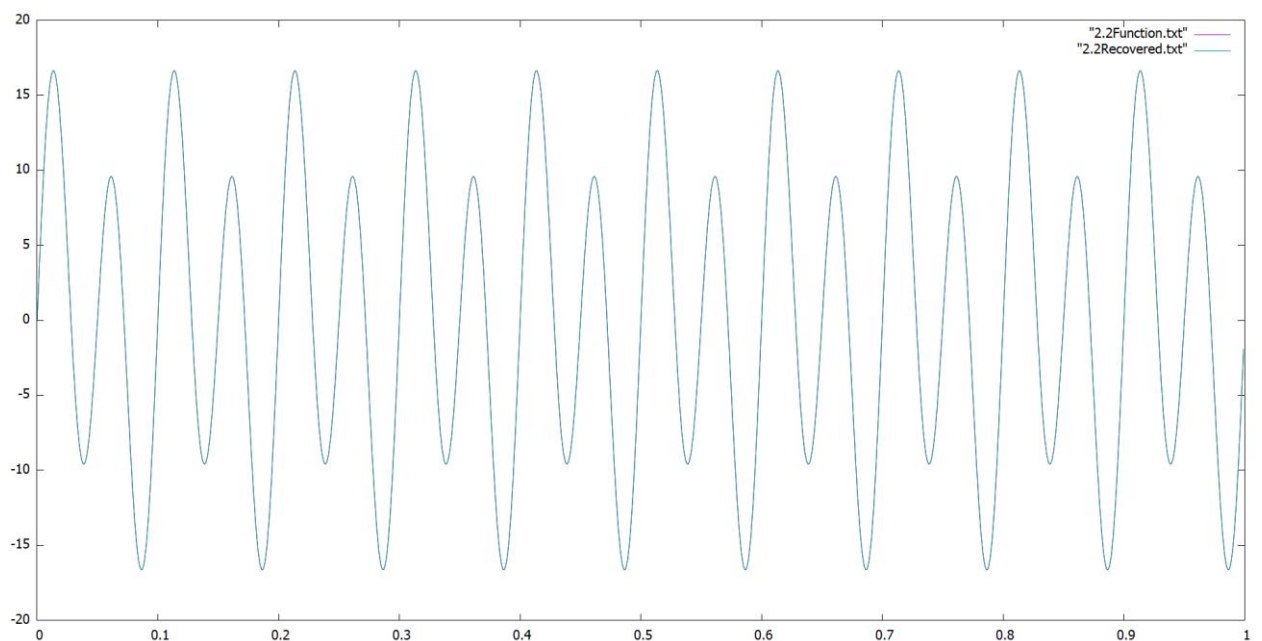


График 5 - Обратное ДПФ

Графики полностью совпали, что говорит о корректной работе программы.

2.2. Свойство сдвига:

$$u_{k-\tau} = \dot{U}_n e^{-\frac{j2\pi\tau n}{N}}$$

Из этого свойства следует, что при сдвиге во времени амплитудный спектр не меняется.

Покажем это, вычислив амплитудный спектр сигнала сдвинутого на  $\tau = 0,01$  и несдвинутого сигнала:

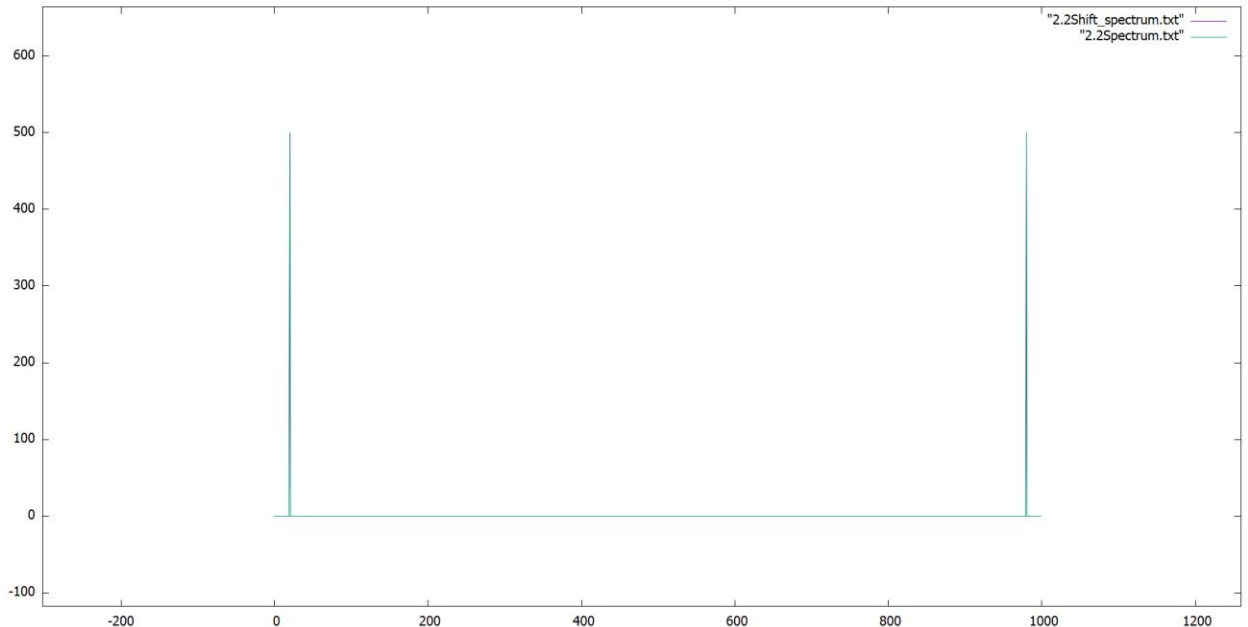


График 6 - Спектры двух функций

Графики полностью совпали, что доказывает корректность работы программы.

2.3. Равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\dot{U}_n|^2$$

Это свойство означает, что энергия сигнала может быть вычислена во временной и частотной области.

Вычислим энергию во временной и частотной области и покажем, что они совпадают:

0.5 0.5

Рисунок 1 - Равенство Парсеваля

Равенство доказывает корректность работы программы.

3. Произвести декодирование аудио-файла с записью тонального сигнала (Dual-Tone Multi-Frequency (DTMF)) сигнала в формате WAV PCM 16 bit, mono. Данный способ кодирования предполагает, что кодируемое значение представляется в виде пары

различных частот ( $f_1/f_2$ ) в соответствии с приведенной таблицей. Затем, сигнал представляется в виде отсчетов суммы двух синусоид соответствующих частот. Для декодирования сигнала необходимо произвести прямое дискретное преобразование для имеющегося набора отсчетов и определить частоты используемых для кодирования синусоид по полученному амплитудному спектру.

Таблица 1 - Таблица частот для кодирования DTMF сигналов

$f_2 \backslash f_1$	1209 Гц	1336 Гц	1477 Гц	1633 Гц
697 Гц	1	2	3	A
770 Гц	4	5	6	B
852 Гц	7	8	9	C
941 Гц	*	0	#	D

При чтении файла получаем набор отсчетов. Для декодирования необходимо произвести прямое дискретное преобразование для имеющегося набора отсчетов. По графику амплитудного спектра находятся частоты  $f_1$  и  $f_2$ .

Для файла "15.wav" найденные частоты представлены ниже.

```

F1 = 790 F2 = 1480
F1 = 770 F2 = 1340
F1 = 960 F2 = 1340
F1 = 700 F2 = 1340
F1 = 770 F2 = 1340
F1 = 700 F2 = 1480
F1 = 960 F2 = 1340
F1 = 960 F2 = 1340
F1 = 960 F2 = 1340
F1 = 960 F2 = 1340

```

Рисунок 2 - Найденные частоты

При кодировании получаем:



Рисунок 3 - Кодирование

4. Получить у преподавателя два файла с изображениями в формате BMP24. Выполнить оценку смещения между двумя изображениями путем анализа фазового спектра.

Даны два изображения:



Рисунок 4 - "track\_first.bmp"



Рисунок 5 - "truck\_second.bmp"

Используя метод фазовой корреляции, получаем координату смещения:

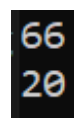


Рисунок 6 - Координаты смещения



Для наглядности отметим на первом изображении белую точку с полученными координатами:



Тогда при наложении левого нижнего угла второй картинке на данную точку, получим целостное изображение, что показывает корректность работы программы.

**Выводы:** в ходе исследования изучила методы Фурье-анализа дискретных и цифровых сигналов. В ходе выполнения работы были вычислены прямое и обратное дискретное преобразование Фурье в матричной форме, продемонстрированы свойства линейности, сдвига сигнала во времени и равенство Парсеваля, произведено декодирование аудио-файла и выполнена оценка смещения между двумя изображениями путем анализа фазового спектра.