

## Оглавление

<b>1. Выполнить аналитический расчет спектров для двух классов сигналов.</b>	2
1.1. Периодические сигналы с периодом $T$ :	3
1.2. Непериодические сигналы:	5
Вывод 1:	6
<b>2. Проанализировать свойства двух функций <math>u_1(t) = \sin 2\pi f_1 t</math>, <math>u_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)</math> на интервале <math>[-T/2; T/2]</math>.</b>	6
2.1. Вычисление значений функций на интервале $[-1.5; 1.5]$ , с шагом 0.01.	6
2.2. Приближенное значение скалярного произведения двух функций.	6
2.3. Вычисление норм обеих функций.	6
2.4. Определение ортогональности функций.	7
2.5. Изменение исходных функций, для получения ортонормированного базиса.	7
2.6. Останутся ли исследуемые функции элементами ортонормированного базиса, если:	7
2.6.1. Частоты $f_1$ и $f_2$ удвоятся.	7
2.6.2. Интервал $[-T/2; T/2]$ увеличится вдвое.	7
2.6.3. Интервал $[-T/2; T/2]$ уменьшится вдвое.	7
Вывод 2:	7
<b>3. Исследование процедуры дискретизации синусоидального сигнала <math>u(t)</math></b>	8
Вывод 3:	10
<b>4. Передискретизация изображения</b>	11
Вывод 4:	13
<b>Вывод по всей лабораторной работе:</b>	13

## Цель работы:

Изучение свойств дискретизации аналоговых сигналов; изучение методов Фурье-анализа аналоговых сигналов

### 1. Выполнить аналитический расчет спектров для двух классов сигналов.

Для аналитического расчета периодического сигнала выполним разложение в синусно-косинусный ряд Фурье по формуле:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_k \cos \cos \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) + b_k \sin \sin \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) \right) \quad (1.1)$$

После чего, используя коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ , определенных по формулам:

$$a_k = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) dt \quad (1.2)$$

$$b_k = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) dt \quad (1.3)$$

Вычислим амплитудный спектр:

$$|\dot{C}| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} \quad (1.4)$$

Анализ непериодического сигнала будет выполняться на основе комплексного коэффициента  $\dot{C}_k$  вычисляемого по формуле:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A e^{-j\omega kt} dt \quad (1.5)$$

## 1.1. Периодические сигналы с периодом T:

Задача 1.1.5

$$u(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \sin(2\pi f_0 t + \theta) \cos\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) dt =$$

$$= \frac{2A}{T} \left( -\frac{\cos\left(t\left(2\pi f_0 t + \frac{2\pi}{T} k\right) + \theta\right)}{4(\pi f_0 + \frac{\pi}{T} k)} - \frac{\cos\left(t\left(2\pi f_0 - \frac{2\pi}{T} k\right) + \theta\right)}{4(\pi f_0 - \frac{\pi}{T} k)} \right) \Bigg|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{2A}{T} \left( -\frac{\cos\left(\frac{T}{2}\left(2\pi f_0 + \frac{2\pi}{T} k\right) + \theta\right)}{4(\pi f_0 + \frac{\pi}{T} k)} - \frac{\cos\left(\frac{T}{2}\left(2\pi f_0 - \frac{2\pi}{T} k\right) + \theta\right)}{4(\pi f_0 - \frac{\pi}{T} k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\left(-\frac{T}{2}\left(2\pi f_0 + \frac{2\pi}{T} k\right) + \theta\right)}{4(\pi f_0 + \frac{\pi}{T} k)} + \frac{\cos\left(-\frac{T}{2}\left(2\pi f_0 - \frac{2\pi}{T} k\right) + \theta\right)}{4(\pi f_0 - \frac{\pi}{T} k)} \right) =$$

$$= \frac{2A}{T} \left( \frac{\sin \theta \cdot \sin(\pi f_0 T + \pi k)}{2(\pi f_0 T + \frac{\pi}{T} k)} + \frac{\sin \theta \cdot \sin(\pi f_0 T - \pi k)}{2(\pi f_0 T - \frac{\pi}{T} k)} \right) =$$

$$= A \cdot \left( \frac{\sin \theta \cdot \sin(\pi f_0 T + \pi k)}{\pi f_0 T + \pi k} + \frac{\sin \theta \cdot \sin(\pi f_0 T - \pi k)}{\pi f_0 T - \pi k} \right) =$$

$$= A \cdot \sin \theta (\operatorname{sinc}(\pi + \pi k) + \operatorname{sinc}(\pi - \pi k))$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \sin(2\pi f_0 t + \theta) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) dt =$$

$$= \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} -\frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t + \theta + \frac{2\pi}{T} k t) dt = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t + \theta + \frac{2\pi}{T} k t) dt =$$

$$= \frac{2A}{T} \left( -\frac{\sin\left(t\left(2\pi f_0 + \frac{2\pi}{T} k\right) + \theta\right)}{4(\pi f_0 + \frac{\pi}{T} k)} + \frac{\sin\left(t\left(2\pi f_0 - \frac{2\pi}{T} k\right) + \theta\right)}{4(\pi f_0 - \frac{\pi}{T} k)} \right) \Bigg|_{-T/2}^{T/2} =$$

Рисунок 1. Периодический сигнал: синус (1)

$$\begin{aligned}
&= \frac{2A}{T} \left( \frac{-\sin\left(\frac{T}{2} \cdot (2\pi f_0 + \frac{2\pi}{T}k) + \theta\right)}{4(\pi f_0 + \frac{\pi}{T}k)} + \frac{\sin\left(\frac{T}{2} \cdot (2\pi f_0 - \frac{2\pi}{T}k) + \theta\right)}{4(\pi f_0 - \frac{\pi}{T}k)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin\left(-\frac{T}{2} \cdot (2\pi f_0 + \frac{2\pi}{T}k) + \theta\right)}{4(\pi f_0 + \frac{\pi}{T}k)} - \frac{\sin\left(-\frac{T}{2} \cdot (2\pi f_0 - \frac{2\pi}{T}k) + \theta\right)}{4(\pi f_0 - \frac{\pi}{T}k)} \right) = \\
&= \frac{2A}{T} \left( \frac{\sin\left(-\frac{T}{2} \cdot (2\pi f_0 + \frac{2\pi}{T}k) + \theta\right)}{4(\pi f_0 + \frac{\pi}{T}k)} - \frac{\sin\left(\frac{T}{2} \cdot (2\pi f_0 + \frac{2\pi}{T}k) + \theta\right)}{4(\pi f_0 + \frac{\pi}{T}k)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin\left(\frac{T}{2} \cdot (2\pi f_0 - \frac{2\pi}{T}k) + \theta\right)}{4(\pi f_0 - \frac{\pi}{T}k)} - \frac{\sin\left(-\frac{T}{2} \cdot (2\pi f_0 - \frac{2\pi}{T}k) + \theta\right)}{4(\pi f_0 - \frac{\pi}{T}k)} \right) = \\
&= \frac{2A}{T} \left( \frac{2\sin\left(\frac{T}{2} \cdot (2\pi f_0 - \frac{2\pi}{T}k) + \theta\right)}{4(\pi f_0 - \frac{\pi}{T}k)} - \frac{2\sin\left(\frac{T}{2} \cdot (2\pi f_0 + \frac{2\pi}{T}k) + \theta\right)}{4(\pi f_0 + \frac{\pi}{T}k)} \right) = \\
&= \frac{2A}{T} \left( \frac{2\sin(\pi f_0 T - \pi k) \cos \theta}{4(\pi f_0 - \frac{\pi}{T}k)} - \frac{2\sin(\pi f_0 T + \pi k) \cos \theta}{4(\pi f_0 + \frac{\pi}{T}k)} \right) = \\
&= \frac{A}{T} \left( \frac{T \cdot \sin(\pi f_0 T - \pi k) \cos \theta}{\pi f_0 T - \pi k} - \frac{T \cdot \sin(\pi f_0 T + \pi k) \cos \theta}{\pi f_0 T + \pi k} \right) = \\
&= A \cdot \cos \theta \cdot (\text{sinc}(\pi f_0 T - \pi k) - \text{sinc}(\pi f_0 T + \pi k)) = \\
&= A \cdot \cos \theta \cdot (\text{sinc}(\pi - \pi k) - \text{sinc}(\pi + \pi k))
\end{aligned}$$

амплитуда спектра

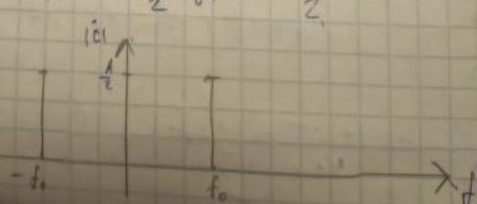
$$\begin{aligned}
|C| &= \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{2} = \frac{\sqrt{A^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta}}{2} = \\
&= \frac{A}{2} \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{A}{2} \cdot 1 = \frac{A}{2}
\end{aligned}$$


Рисунок 2. Периодический сигнал: синус (2)

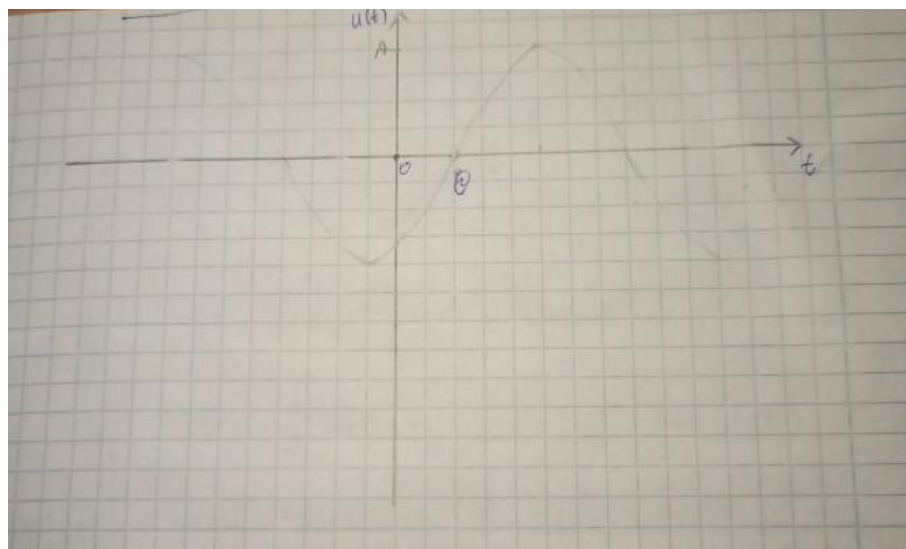


Рисунок 3. Периодический сигнал: синус (3)

## 1.2. Непериодические сигналы:

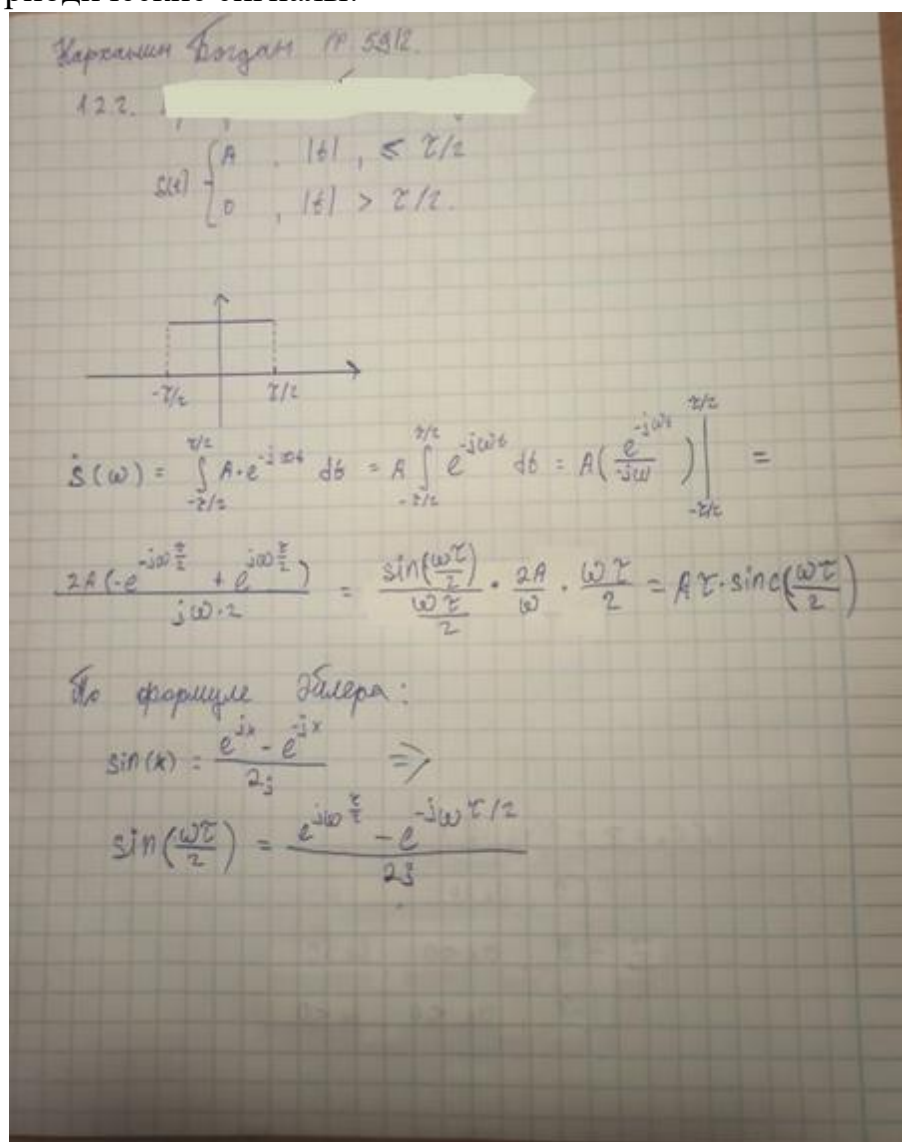


Рисунок 4. Непериодический сигнал: прямоугольный импульс (1)

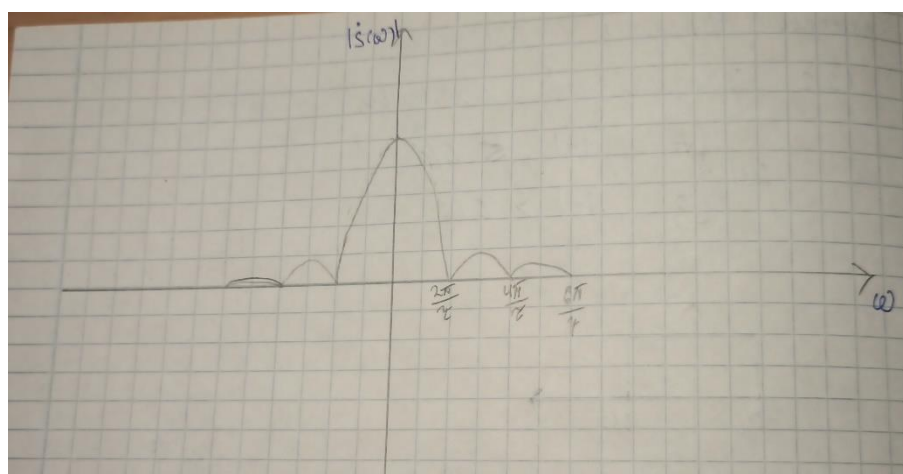


Рисунок 5. Непериодический сигнал: прямоугольный импульс (2)

### Вывод 1:

Таким образом, был проведен Фурье анализ для сигналов (периодического и непериодического), было выявлено следующее: ряд Фурье представляет собой разложение на гармоники, а также позволяет нам разложить более сложную функцию на сумму простых (формула (1.1)). Амплитудный спектр сигнала является его представлением в частотной области, что в целом позволяет нам проводить дальнейшую работу с ним.. Так же были посчитаны амплитудные спектры и построены их графики.

## 2. Проанализировать свойства двух функций $u_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ , $u_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$ на интервале $[-T/2; T/2]$ .

### 2.1. Вычисление значений функций на интервале $[-1.5; 1.5]$ , с шагом 0.01.

Вычисленные значения представлены на графике:

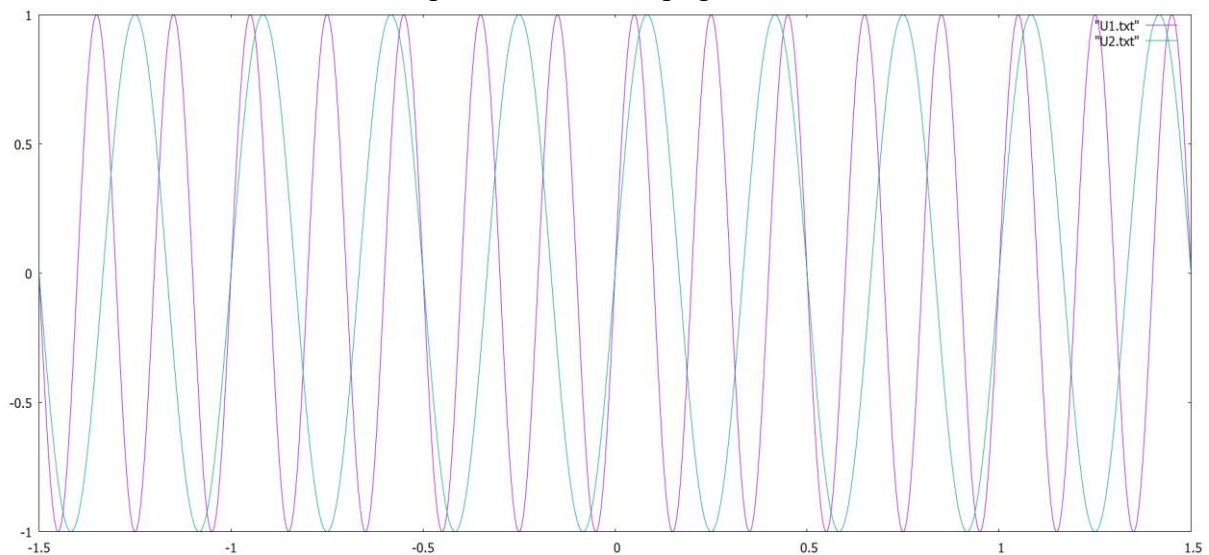


Рисунок 6. Графики  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$

### 2.2. Приближенное значение скалярного произведения двух функций.

Скалярное произведение двух функций рассчитывается по формуле:

$$(u_1(t), u_2(t)) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_1(t) u_2^*(t) dt \quad (2.1)$$

В результате вычисления скалярного произведения по формуле 2.1 получаем 0. Результат вычисления скалярного произведения в программе:

$$\text{Scalar} = 2.138234796041784\text{E-16}$$

### 2.3. Вычисление норм обеих функций.

Вычисление нормы функции производится по формуле:

$$\|u(t)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b u^2(t) dt} \quad (2.2)$$

Результат вычисления норм функций в программе:

Norm for U1 = 0.7071067811865476

Norm for U2 = 0.7071067811865478

#### 2.4. Определение ортогональности функций.

Функции ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. Скалярное произведение было вычислено в пункте 2.2, и оно приближенно равно нулю (Scalar = 2.138234796041784E-16), следовательно, функции ортогональны.

#### 2.5. Изменение исходных функций, для получения ортонормированного базиса.

Для того чтобы представить функции элементами ортонормированного базиса их норма должна быть равна 1, то есть их необходимо поделить на норму функции, которую мы уже рассчитали в пункте 2.3.

#### 2.6. Останутся ли исследуемые функции элементами ортонормированного базиса, если:

Чтобы функции были ортогональны, необходимо выполнение следующего условия: произведение периода на частоты должно быть целым числом.

##### 2.6.1. Частоты f1 и f2 удвоятся

Да, останутся. Результат работы программы:

These functions are orthogonal

##### 2.6.2. Интервал $[-T/2; T/2]$ увеличится вдвое

Да, останутся. Результат работы программы:

These functions are orthogonal

##### 2.6.3. Интервал $[-T/2; T/2]$ уменьшится вдвое

Нет, не останутся. Результат работы программы:

These functions are not orthogonal

#### Вывод 2:

Были проанализированы свойства двух функций, частности: посчитаны их дискретные значения на заданном интервале, построены их графики; посчитано скалярное произведение; вычислены нормы; проверка на ортогональность; проверка на принадлежность к ортонормированному базису; проверка изменения принадлежности к ортонормированному базису, при изменении частоты и периода.



### 3. Исследование процедуры дискретизации синусоидального сигнала $u(t)$

Исследовать процедуру дискретизации синусоидального сигнала  $u(t)$  с частотой  $F = 10$  Гц и длительностью  $T = 1$  секунды. Выборка отсчетов происходит с частотой  $f_d = 1.5F, 1.75F, 2F, 3F, 1000F$ . По дискретным отсчетам отсчетам нужно восстановить сигнал, применив формулу интерполяционного ряда Котельникова:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(nT_d) \cdot \text{sinc}\left(\pi\left(\frac{t}{T_d} - n\right)\right) \quad (3.1)$$

Исходный сигнал разбивается на дискретные во времени отсчеты с частотой  $f_d$ . Затем, с помощью формулы (3.1), происходит восстановление сигнала  $u(t)$  по получившимся отсчетам.

Соответствующие графики:

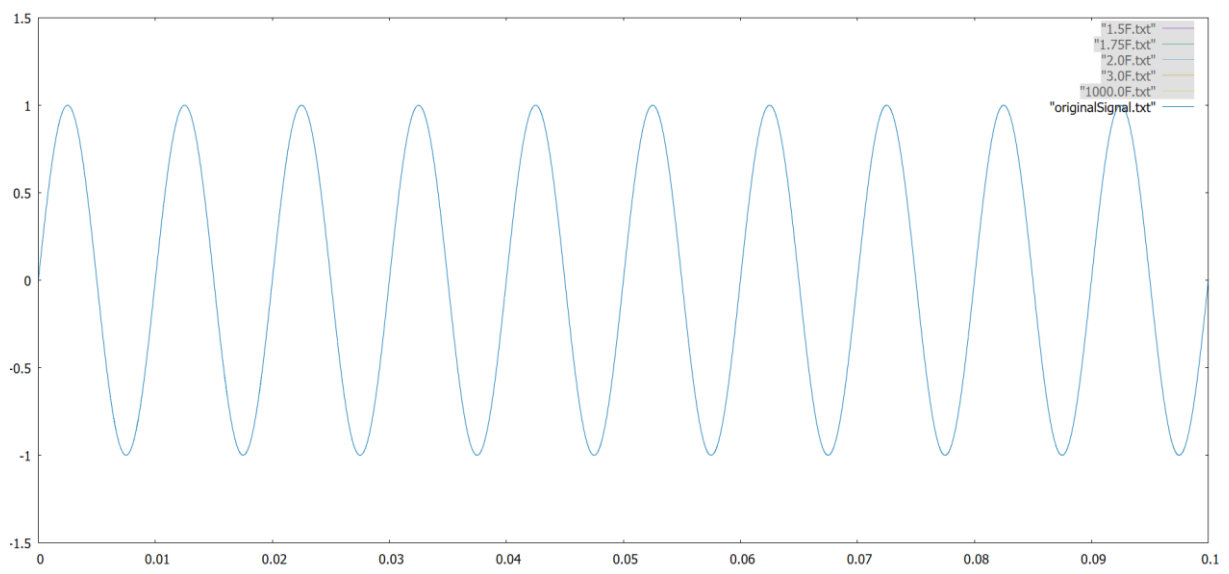


Рисунок 7. Исходный график сигнала

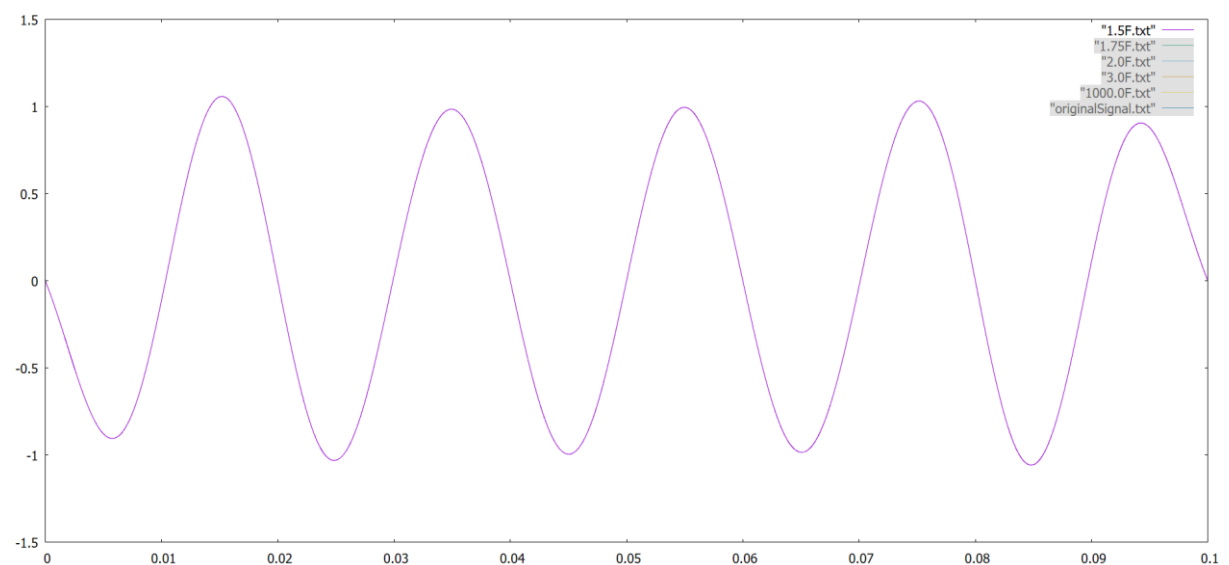


Рисунок 8. График восстановленного сигнала при  $f_d = 1.5F$



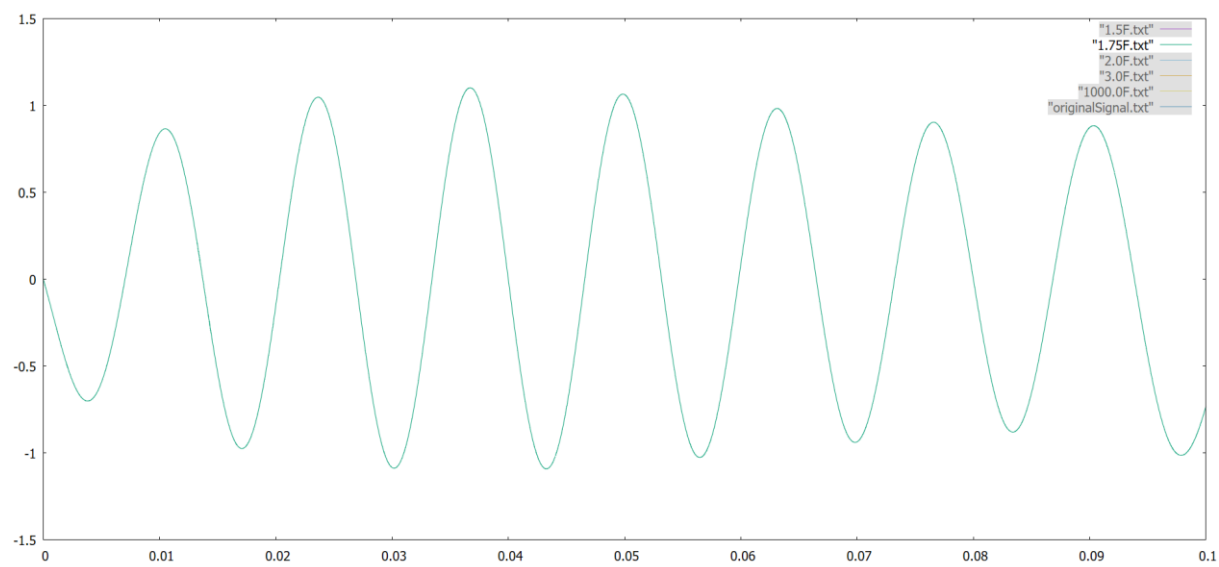


Рисунок 9. График восстановленного сигнала при  $fd = 1.75F$

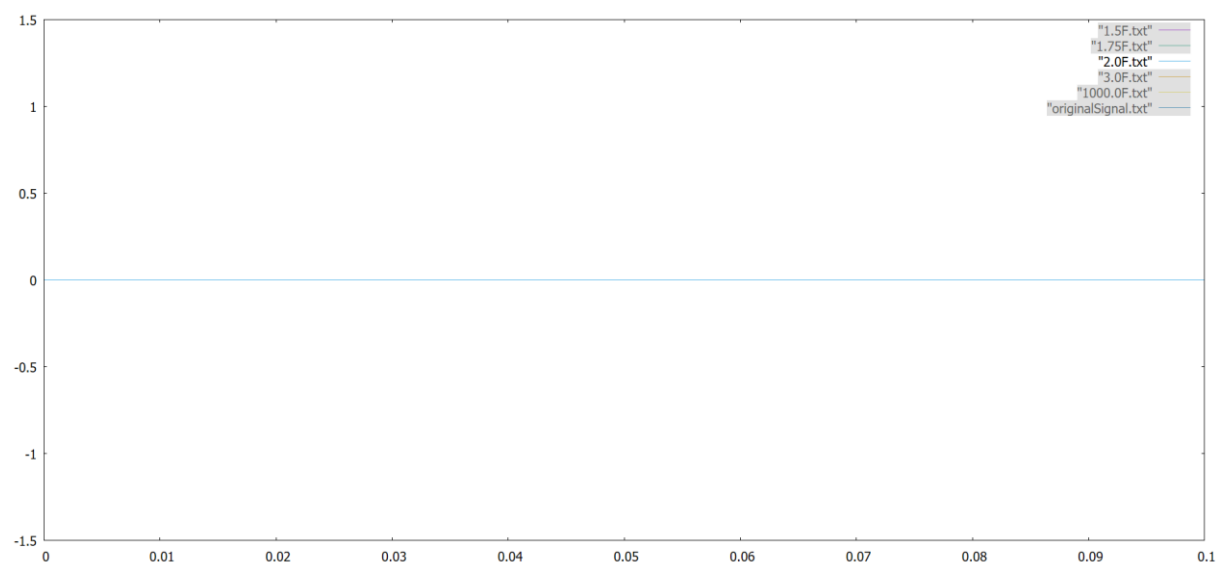


Рисунок 10. График восстановленного сигнала при  $fd = 2F$

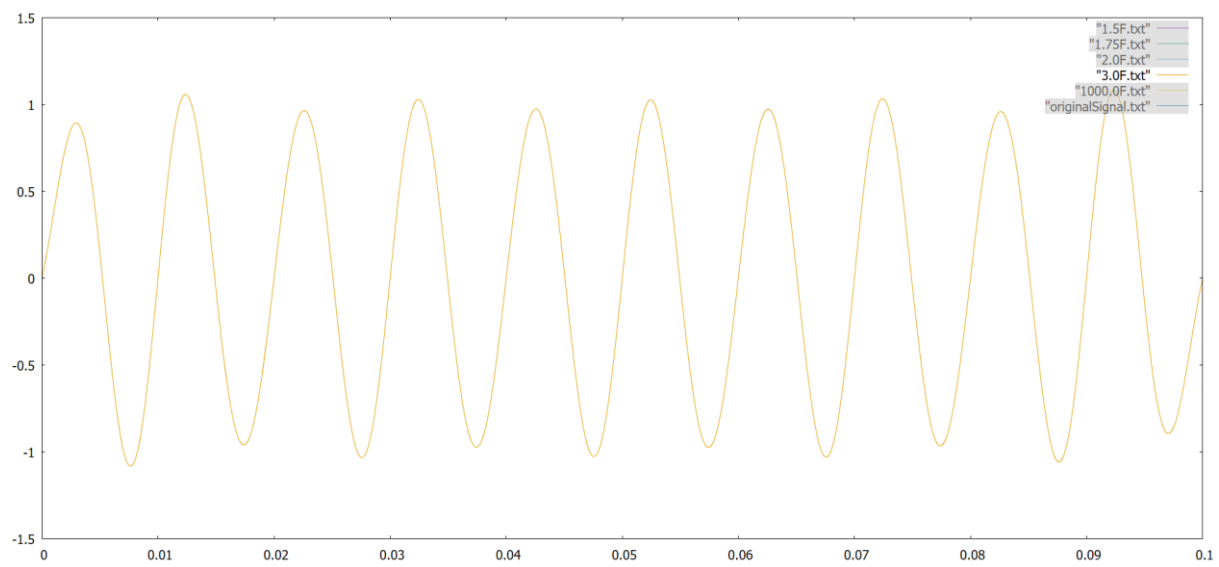


Рисунок 11. График восстановленного сигнала при  $fd = 3F$

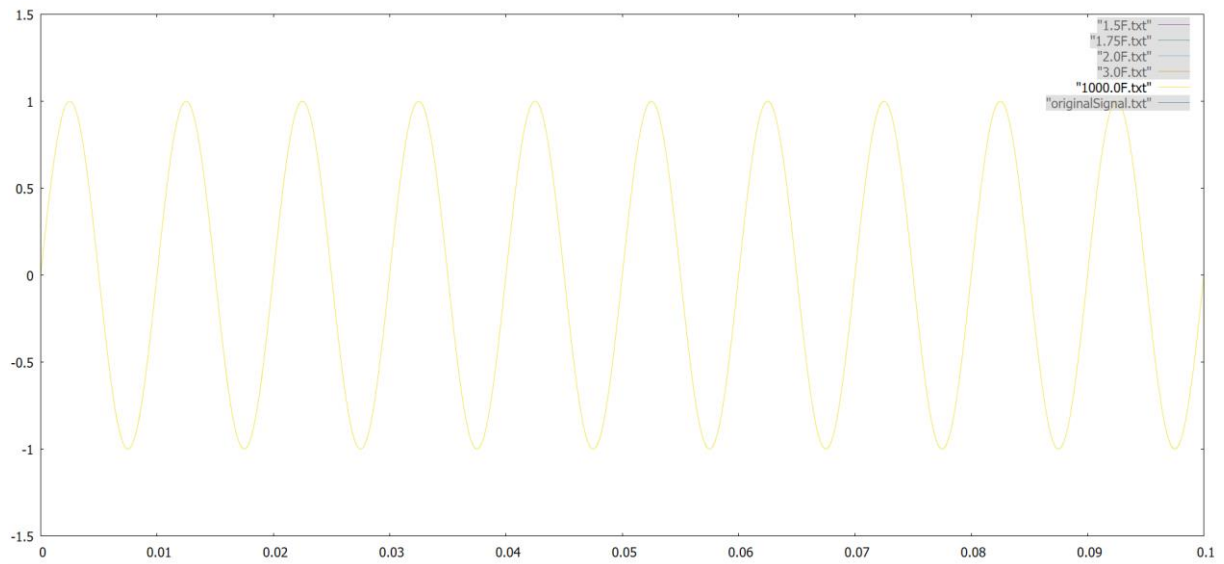


Рисунок 12. График восстановленного сигнала при  $f_d = 1000F$

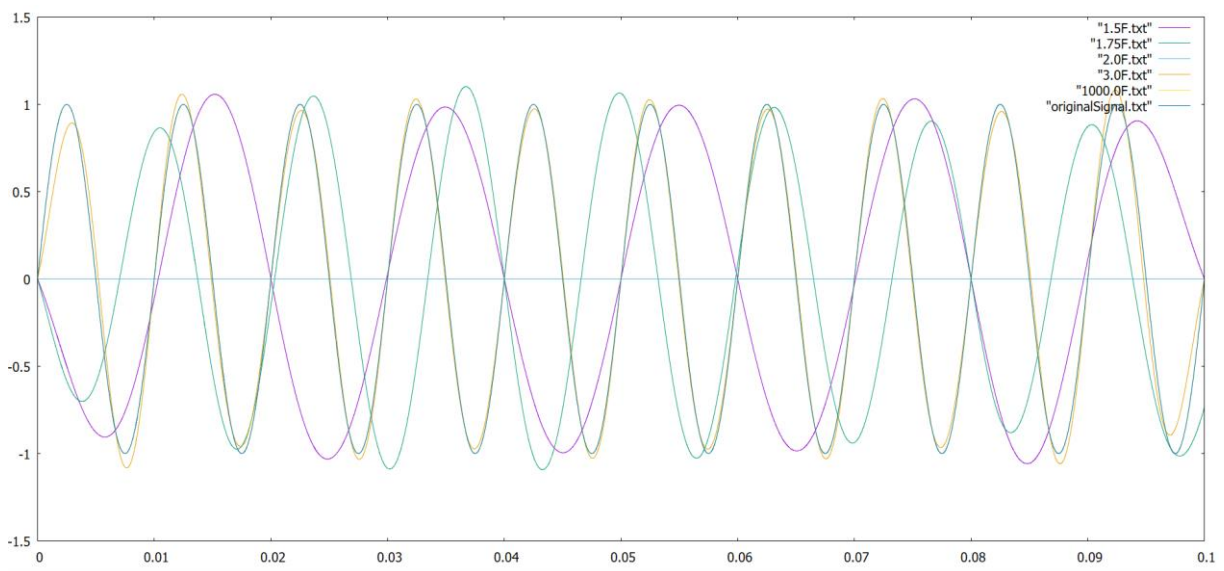


Рисунок 13. Сравнение графиков исходного сигнала и восстановленных сигналов

### Вывод 3:

Таким образом, в данном задании мы проверили и условие выполнения теоремы Котельникова, которая звучит следующим образом: восстановление исходного аналогового сигнала возможно, если равномерная дискретизация выполняется с частотой  $f_d$ , минимум вдвое превышающую частоту  $f_c$ , где  $f_c$  - максимальная частота исходного сигнала :  $f_d > 2f_c$ .

Сигналы, дискретизированные с частотой меньше, либо равной,  $2F$  не удалось восстановить. График сигнала с частотой дискретизации равной  $2F$  получился равным нулю, поскольку мы берём 2 отчёта за период и постоянно попадаем в 0 (сигнал описывается синусом). График сигнала, дискретизированного с частотой  $3F$ , близок к оригиналу, тем не менее, не до конца повторяет его: это можно объяснить тем, что интерполяционный ряд Котельникова представляет сигнал непрерывным и сумма должна быть бесконечной, а мы сделали ее конечной, поэтому это привело усечению и искажению на краях графика восстановленного сигнала. График сигнала,

дискретизированного с частотой равной  $1000F$ , повторяет график исходного сигнала: теорема Котельникова выполняется.

#### 4. Передискретизация изображения

Реализовать процедуру передискретизации изображения с помощью интерполяционного ряда Котельникова. Формат исходного изображения — BMP24, разрешение исходного изображения  $W \times H$  пикселей. Результатом передискретизации будет изображение размером  $nW \times mH$ . Выполнить передискретизацию с различными комбинациями значений  $m$  и  $n$ :

- 1)  $m > 1, n > 1$ .
- 2)  $m < 1, n < 1$ .
- 3)  $m > 1, n < 1$ .
- 4)  $m < 1, n > 1$ .

Исходное изображение:



*Рисунок 14. Исходное изображение*



Рисунок 15.  $n = 1.2 \text{ } m = 1.2$



Рисунок 16.  $n = 0.5 \text{ } m = 0.5$



Рисунок 17.  $n = 1.5 \text{ } m = 0.5$



Рисунок 18. .  $n = 0.5$   $m = 1.5$

#### Вывод 4:

Таким образом, была реализована процедура передискретизации изображения при разных  $m$  и  $n$ . Процедура передискретизации осуществлялась при помощи формулы интерполяционного ряда Котельникова ( $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(nT_d) \cdot \text{sinc}\left(\pi\left(\frac{t}{T_d} - n\right)\right)$ ). В данном случае мы работали с пикселями и их цветом (RGB). Изображения при передискретизации на краях получились с небольшими искажениями. Это объясняется тем, что интерполяционный ряд Котельникова представляет сигнал непрерывным и сумма должна быть бесконечной, но в реальности мы сделали ее конечной, поэтому это привело усечению и искажению на краях изображения.

#### Вывод по всей лабораторной работе:

В ходе выполнения данной лабораторной работы мы изучили: Фурье анализ и его свойства (вычислять спектр, норму, скалярное произведение, проверять на ортогональность проверять на принадлежность к ортонормированному базису); Теорему Котельника, применили ее при передискретизации изображения и дискретизации сигналов с различными частотами. Данные знания были применены на практике.