2019 秋季学期泛函分析笔记

颜硕俣　　　　孙忠豪

目录

1 拓扑空间与度量空间

1.1 基本概念

定义 1.1.1 (拓扑空间) 设 E 是一个集合, 称 E 的子集族 τ 是一个**拓扑**, 若 τ 满足:

(1) $E, \varnothing \in \tau$;

(2) τ 中任意多元素的并仍是 τ 中元素 (任意并);

(3) τ 中有限多元素的交仍是 τ 中的元素 (有限交) .

并称 (E, τ) 为一个**拓扑空间**, τ 中的元素称为**开集**.

注 1.1.2 对集合 E , 称 $\tau = \{E, \varnothing\}$ 为**平凡拓扑**, 称 $\tau = 2^E$ 为**离散拓扑** .

例 1.1.3 $E = \mathbb{R}$, 取 $\tau = \left\{ \bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} (x_j, x_{j+1}), (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \right\}$ 是一个拓扑, 这一拓扑称为 E 的**自然拓扑**.

定义 1.1.4 (度量空间) 设 E 是非空集合, $d : E \times E \to \mathbb{R}$ 满足 $\forall x, y \in E$

(1) 非负性: $d(x, y) \geqslant 0$;

(2) 正定性: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(3) 对称性: $d(x, y) = d(y, x)$;

(4) 三角不等式: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

则称 (E, d) 是一个**度量空间**, 并称 d 是 E 上的**度量**

注 1.1.5 度量并不唯一, 例如对 (E, d) 定义度量

$$r(x, y) = \min\{d(x, y), 1\},$$
$$d'(x, y) = rd(x, y), r \in \mathbb{R}_+,$$

就是两个不同的度量.

度量空间也是拓扑空间, 记 $B(x, r) = \{y : d(y, x) < r\}$ 可将 τ 中的元素定义为:

$$U \in E, U \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in U \exists r > 0 (B(x, r) \subset U)$$

该拓扑 τ 称为由度量 d **诱导**的拓扑.

例 1.1.6 在实 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上赋以度量

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(Euclid 距离)}$$

以 $C[a,b]$ 以在 $[a,b]$ 上的连续函数全体, 在其上赋以度量

$$d(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)| \qquad \text{(一致距离)}$$

定义 1.1.7 (闭集) 设 (E,d) 是一个拓扑空间, $A\subset E$, 若 A^c 是开集, 则称 A 是 E 上 (关于 τ) 的**闭集**.

例 1.1.8 设 (E,d) 是一个度量空间, 则闭球 $\bar{B}(x,r)=\{y:d(y,x)\leqslant r\}$ 是闭集.

命题 1.1.9 闭集具有以下性质:

(1) 全空间 E 和空集 $\varnothing$ 是闭集;

(2) 任意多个闭集的交仍是闭集 (任意交);

(3) 有限多个闭集的并仍是闭集 (有限并).