常微分方程笔记

Iydon

2018 年 7 月 31 日

目录

1 基本概念

1.1 微分方程及其解的定义

定义 1.1 (常微分方程) 凡是联系自变量 x，与这个自变量的未知函数 $y=y(x)$，和它的导数 $y'=y'(x)$ 以及直到 n 阶导数 $y^{(n)}=y^{(n)}(x)$ 在内的方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

叫做**常微分方程**，其中导数实际出现的最高阶数 n 叫做常微分方程(**??**)的**阶**。

在常微分方程(**??**)中如果右端函数 F 对未知函数 y 和它的各阶导数 $y',\cdots,y^{(n)}$ 的全体而言是一次的，则称它是**线性**常微分方程。否则称它为**非线性**常微分方程。

我们在定义**??**中给微分方程(**??**)冠以“常”字，指的是未知函数是一元函数。如果未知函数是多元函数，那么在微分方程中将出现偏导数，这种方程自然叫做**偏微分方程**。

定义 1.2 (常微分方程的解) 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上连续，且有直到 n 阶的导数。如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程(**??**)，得到关于 x 的恒等式，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.2}$$

对一切 $x\in J$ 都成立，则称 $y=\varphi(x)$ 为微分方程(**??**)在区间 J 上的一个**解**。

定义 1.3 (常微分方程的通解与特解) 设 n 阶微分方程(**??**)的解

$$y = \varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n) \tag{1.3}$$

包含 n 个**独立的**任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，则称它为**通解**，这里所说

n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是独立的，其含义是 *Jacobi* 行列式

$$\frac{D\left[\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}\right]}{D\left[C_1, C_2, \cdots, C_n\right]} \overset{d}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix}$$

不等于 *0*，其中

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ \varphi' = \varphi'(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \cdots, C_n). \end{cases}$$

如果微分方程(**??**)的解 $y = \varphi(x)$ 不包含任意常数，则称它为**特解**。显然，当任意常数一旦确定之后，通解也就变成了特解。

例 1.1

求双参数函数族

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \tag{1.4}$$

所满足的微分方程。

事实上，在公式(**??**)中对 x 先后求导两次，得出

$$y' = C_1 e^x (\cos x - \sin x) + C_2 e^x (\sin x + \cos x) \tag{1.5}$$

$$y'' = C_1 e^x (-2 \sin x) + C_2 e^x (2 \cos x) \tag{1.6}$$

从(**??**)和(**??**)两式可知 *Jacobi* 行列式

$$\frac{D\left[y, y'\right]}{D\left[C_1, C_2\right]} = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x (\cos x - \sin x) & e^x (\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

这说明(**??**)中南包含的两个任意常数 C_1 和 C_2 是独立的。据此，可从(**??**)和(**??**)两

式解出 C_1 和 C_2（作为 x, y 和 y' 的函数），即

$$\begin{cases} C_1 \;=\; e^{-x}[y(\sin x + \cos x) - y' \sin x], \\ C_2 \;=\; e^{-x}[y(\sin x - \cos x) + y' \cos x]. \end{cases}$$

然后把它们代入(??)式，就得到一个二阶微分方程

$$y'' - 2y' + 2y \;=\; 0, \tag{1.7}$$

它就是函数族(??)所满足的微分方程；而且(??)是微分方程(??)的通解。 □

1.2 微分方程及其解的几何解释

考虑一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; f(x, y), \tag{1.8}$$

其中 $f(x, y)$ 是平面区域 G 内的连续函数，假设

$$y \;=\; \varphi(x) \quad (x \in I) \tag{1.9}$$

是方程的解（其中 I 是解的存在区间）。则 $y = \varphi(x)$ 在 (x, y) 平面上的图形是一条光滑的曲线 Γ，称它为微分方程(??)的**积分曲线**。

在区域 G 内每一点 $P(x, y)$，我们可以作一个以 $f(P)$ 为斜率的（短小）直线段 $l(P)$，以标明积分曲线（如果存在的话）在该店的切线方向，称 $l(P)$ 为微分方程(??)在 P 点的**线素**；而称区域 G 联同上述全体线素为微分方程(??)的**线素场**或**方向场**。

在构造方程(??)的线素场时，通畅利用由关系式 $f(x, y) = k$ 确定的曲线 L_k，称它为线素场的**等斜线**。

一阶微分方程(??)在许多情况取如下形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{1.10}$$

其中 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 是区域 G 内的连续函数。我们可以写成下面（关于 x 和 y）的对称形式：

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \;=\; 0. \tag{1.11}$$

当 $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ 时，方程(??)在 (x_0, y_0) 点是不定式，因此线素场在 (x_0, y_0) 点没有意义。我们称这样的点 (x_0, y_0) 为相应微分方程的**奇异点**。

2　初等积分法

2.1　恰当方程

考虑对称形式的一阶微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \;=\; 0. \tag{2.1}$$

如果存在一个可微函数 $\varPhi(x,y)$，使得它的全微分为

$$\mathrm{d}\varPhi(x,y) \;=\; P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

亦即它的偏导数为

$$\frac{\partial \varPhi}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial \varPhi}{\partial y} = Q(x,y), \tag{2.2}$$

则称(**??**)为**恰当方程**或**全微分方程**。因此，当方程(**??**)为恰当方程时，可将它改写为全微分的形式

$$\mathrm{d}\varPhi(x,y) \;=\; P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \;=\; 0.$$

从而

$$\varPhi(x,y) \;=\; C$$

就是方程**??**的一个通积分。

定理 2.1 设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在区域

$$R: \qquad \alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \delta$$

上连续，且有连续的一阶偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$，则微分方程(**??**)是恰当方程的充要条件为恒等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \tag{2.3}$$

在 R 内成立，并且当(**??**)成立时，方程(**??**)的通积分为

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y \;=\; C,$$

或者

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y \;=\; C,$$

其中 (x_0, y_0) 是 R 中任意取定的一点。

证明 先证必要性。设方程(**??**)是恰当的，则存在函数 $\Phi(x,y)$，满足

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y). \tag{2.4}$$

然后，我们在上面的第一式和第二式中，分别对 y 和 x 求偏导数，就可得到

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \tag{2.5}$$

由 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 的连续性假设推知混合偏导数 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ 是连续的，从而 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$，因此由(**??**)式推得(**??**)式。

再证充分性。设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 满足条件(**??**)，我们来构造可微函数 $\Phi(x,y)$，使(**??**)式成立。为了使(**??**)的第一式成立，我们可取

$$\Phi(x,y) \;=\; \int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \psi(y), \tag{2.6}$$

其中函数 $\psi(y)$ 待定，以使函数 $\Phi(x,y)$ 适合(**??**)的第二式。因此，由(**??**)得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \psi'(y) \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)\mathrm{d}x + \psi'(y).$$

再利用条件(**??**)得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)\mathrm{d}x + \psi'(y) \;=\; Q(x,y) - Q(x_0,y) + \psi'(y).$$

由此可见，为了使(**??**)的第二式成立，只要令 $\psi'(y) = Q(x_0,y)$，亦即只要取

$$\psi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y$$

即可。这样，就得到了满足(**??**)的一个函数

$$\Phi(x,y) \;=\; \int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y.$$

如果在构造 $\Phi(x,y)$ 时，先考虑使(**??**)的第二式成立，则可用同样的方法，得到满足(**??**)的另一函数。因此，我们得到通积分如定理**??**。 □

2.2 变量分离的方程

如果微分方程(**??**)中的函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 均可分别表示为 x 的函数与 y 的函数的乘积，则称(**??**)为**变量分离的方程**。因此，只要令

$$P(x,y) = X(x)Y_1(y), \quad Q(x,y) = X_1(x)Y(y),$$

变量分离的方程可以写成如下的形式：

$$X(x)Y_1(y)\mathrm{d}x + X_1(x)Y(y)\mathrm{d}y \;=\; 0. \tag{2.7}$$

如果以因子 $X_1(x)Y_1(y)$ 去除(**??**)式的两侧，就得到

$$\frac{X(x)}{X_1}\mathrm{d}x + \frac{Y(y)}{Y_1(y)}\mathrm{d}y \;=\; 0.$$

此方程 x 与 y 互相分离，因此它的通积分为

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{y(y)}{Y_1(y)}\mathrm{d}y \;=\; C. \tag{2.8}$$

变量分离的方程(**??**)的通积分由(**??**)给出（要进行必要的不定积分运算）；还要补上如下形式的特解（如果它们不在上述通积分之内的话）：

$$\left\{\begin{array}{ll} x = a_i\,(i = 1, 2, \cdots) & \text{其中 } a_i \text{ 是 } X_1(x) = 0 \text{ 的根；} \\ y = b_j\,(j = 1, 2, \cdots) & \text{其中 } b_j \text{ 是 } Y_1(y) = 0 \text{ 的根。} \end{array}\right.$$