

# 常微分方程笔记

Iydon

2019 年 2 月 20 日

## 目录

<b>1</b>	<b>基本概念</b>	<b>3</b>
1.1	微分方程及其解的定义 . . . . .	3
1.2	微分方程及其解的几何解释 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>初等积分法</b>	<b>6</b>
2.1	恰当方程 . . . . .	6
2.2	变量分离的方程 . . . . .	8
2.3	一阶线性方程 . . . . .	8
2.4	初等变换法 . . . . .	9
2.4.1	齐次方程 . . . . .	9
2.4.2	伯努利方程 . . . . .	11
2.4.3	里卡蒂方程 . . . . .	11
2.5	积分因子法 . . . . .	12
2.6	应用举例 . . . . .	14
<b>3</b>	<b>存在和唯一性定理</b>	<b>15</b>
3.1	皮卡存在和唯一性定理 . . . . .	15
3.2	佩亚诺存在定理 . . . . .	18
3.2.1	欧拉折线 . . . . .	18
3.2.2	Ascoli 引理 . . . . .	18
3.2.3	培亚诺存在定理 . . . . .	18
3.3	解的延伸 . . . . .	18
3.4	比较定理及其应用 . . . . .	18

# 1 基本概念

## 1.1 微分方程及其解的定义

**定义 1.1 (常微分方程)** 凡是联系自变量  $x$ , 与这个自变量的未知函数  $y = y(x)$ , 和它的导数  $y' = y'(x)$  以及直到  $n$  阶导数  $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$  在内的方程

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

叫做常微分方程, 其中导数实际出现的最高阶数  $n$  叫做常微分方程(1.1)的阶。

在常微分方程(1.1)中如果右端函数  $F$  对未知函数  $y$  和它的各阶导数  $y', \dots, y^{(n)}$  的全体而言是一次的, 则称它是线性常微分方程。否则称它为非线性常微分方程。

我们在定义 1.1 中给微分方程(1.1)冠以“常”字, 指的是未知函数是一元函数。如果未知函数是多元函数, 那么在微分方程中将出现偏导数, 这种方程自然叫做偏微分方程。

**定义 1.2 (常微分方程的解)** 设函数  $y = \varphi(x)$  在区间  $J$  上连续, 且有直到  $n$  阶的导数。如果把  $y = \varphi(x)$  及其相应的各阶导数代入方程(1.1), 得到关于  $x$  的恒等式, 即

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad (1.2)$$

对一切  $x \in J$  都成立, 则称  $y = \varphi(x)$  为微分方程(1.1)在区间  $J$  上的一个解。

**定义 1.3 (常微分方程的通解与特解)** 设  $n$  阶微分方程(1.1)的解

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (1.3)$$

包含  $n$  个独立的任意常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , 则称它为通解, 这里所说  $n$

个任意常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$  是独立的, 其含义是 *Jacobi* 行列式

$$\frac{D[\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}]}{D[C_1, C_2, \dots, C_n]} \stackrel{d}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial 1} & \frac{\partial \varphi}{\partial 2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial 1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial 2} & \cdots & \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial 1} & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial 2} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial n} \end{vmatrix}$$

不等于 0, 其中

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \varphi' = \varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases}$$

如果微分方程(1.1)的解  $y = \varphi(x)$  不包含任意常数, 则称它为特解。显然, 当任意常数一旦确定之后, 通解也就变成了特解。

### 例 1.1

求双参数函数族

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \quad (1.4) \quad \pi$$

所满足的微分方程。

事实上, 在公式(1.4)中对  $x$  先后求导两次, 得出

$$y' = C_1 e^x (\cos x - \sin x) + C_2 e^x (\sin x + \cos x) \quad (1.5)$$

$$y'' = C_1 e^x (-2 \sin x) + C_2 e^x (2 \cos x) \quad (1.6)$$

从(1.5)和(1.6)两式可知 *Jacobi* 行列式

$$\frac{D[y, y']}{D[C_1, C_2]} = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x (\cos x - \sin x) & e^x (\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

这说明(1.4)中包含的两个任意常数  $C_1$  和  $C_2$  是独立的。据此, 可从(1.4)和(1.5)两

式解出  $C_1$  和  $C_2$  (作为  $x, y$  和  $y'$  的函数), 即

$$\begin{cases} C_1 = e^{-x}[y(\sin x + \cos x) - y' \sin x], \\ C_2 = e^{-x}[y(\sin x - \cos x) + y' \cos x]. \end{cases}$$

然后把它们代入(1.6)式, 就得到一个二阶微分方程

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \quad (1.7)$$

它就是函数族(1.4)所满足的微分方程; 而且(1.4)是微分方程(1.7)的通解。

## 1.2 微分方程及其解的几何解释

考虑一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.8)$$

其中  $f(x, y)$  是平面区域  $G$  内的连续函数, 假设

$$y = \varphi(x) \quad (x \in I) \quad (1.9)$$

是方程的解 (其中  $I$  是解的存在区间)。则  $y = \varphi(x)$  在  $(x, y)$  平面上的图形是一条光滑的曲线  $\Gamma$ , 称它为微分方程(1.8)的**积分曲线**。

在区域  $G$  内每一点  $P(x, y)$ , 我们可以作一个以  $f(P)$  为斜率的 (短小) 直线段  $l(P)$ , 以标明积分曲线 (如果存在的话) 在该点的切线方向, 称  $l(P)$  为微分方程(1.8)在  $P$  点的**线素**; 而称区域  $G$  连同上述全体线素为微分方程(1.8)的**线素场**或**方向场**。

在构造方程(1.8)的线素场时, 通常利用由关系式  $f(x, y) = k$  确定的曲线  $L_k$ , 称它为线素场的**等斜线**。

一阶微分方程(1.8)在许多情况取如下形式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (1.10)$$

其中  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  是区域  $G$  内的连续函数。我们可以写成下面 (关于  $x$  和  $y$ ) 的对称形式:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (1.11)$$

当  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$  时, 方程(1.10)在  $(x_0, y_0)$  点是不定式, 因此线素场在  $(x_0, y_0)$  点没有意义。我们称这样的点  $(x_0, y_0)$  为相应微分方程的**奇异点**。

## 2 初等积分法

### 2.1 恰当方程

考虑对称形式的一阶微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (2.1)$$

如果存在一个可微函数  $\Phi(x, y)$ , 使得它的全微分为

$$d\Phi(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

亦即它的偏导数为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y), \quad (2.2)$$

则称(2.1)为恰当方程或全微分方程。因此, 当方程(2.1)为恰当方程时, 可将它改写为全微分的形式

$$d\Phi(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

从而

$$\Phi(x, y) = C$$

就是方程 2.1 的一个通积分。

**定理 2.1** 设函数  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  在区域

$$R: \quad \alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \delta$$

上连续, 且有连续的一阶偏导数  $\frac{\partial P}{\partial y}$  与  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , 则微分方程(2.1)是恰当方程的充要条件为恒等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad (2.3)$$

在  $R$  内成立, 并且当(2.3)成立时, 方程(2.1)的通积分为

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C,$$

或者

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C,$$

其中  $(x_0, y_0)$  是  $R$  中任意取定的一点。

**【证明】** 先证必要性。设方程(2.1)是恰当的, 则存在函数  $\Phi(x, y)$ , 满足

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y). \quad (2.4)$$

然后, 我们在上面的第一式和第二式中, 分别对  $y$  和  $x$  求偏导数, 就可得到

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (2.5)$$

由  $\frac{\partial P}{\partial y}$  和  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  的连续性假设推知混合偏导数  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$  和  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$  是连续的, 从而  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ , 因此由(2.5)式推得(2.3)式。

再证充分性。设  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  满足条件(2.3), 我们来构造可微函数  $\Phi(x, y)$ , 使(2.4)式成立。为了使(2.4)的第一式成立, 我们可取

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \psi(y), \quad (2.6)$$

其中函数  $\psi(y)$  待定, 以使函数  $\Phi(x, y)$  适合(2.4)的第二式。因此, 由(2.6)得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \psi'(y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx + \psi'(y).$$

再利用条件(2.3)得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dx + \psi'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \psi'(y).$$

由此可见, 为了使(2.4)的第二式成立, 只要令  $\psi'(y) = Q(x_0, y)$ , 亦即只要取

$$\psi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

即可。这样, 就得到了满足(2.4)的一个函数

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy.$$

如果在构造  $\Phi(x, y)$  时, 先考虑使(2.4)的第二式成立, 则可用同样的方法, 得到满足(2.4)的另一函数。因此, 我们得到通积分如定理 2.1。  $\square$

## 2.2 变量分离的方程

如果微分方程(2.1)中的函数  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  均可分别表示为  $x$  的函数与  $y$  的函数的乘积, 则称(2.1)为**变量分离的方程**。因此, 只要令

$$P(x, y) = X(x)Y_1(y), \quad Q(x, y) = X_1(x)Y(y),$$

变量分离的方程可以写成如下的形式:

$$X(x)Y_1(y) dx + X_1(x)Y(y) dy = 0. \quad (2.7)$$

如果以因子  $X_1(x)Y_1(y)$  去除(2.7)式的两侧, 就得到

$$\frac{X(x)}{X_1(x)} dx + \frac{Y(y)}{Y_1(y)} dy = 0.$$

此方程  $x$  与  $y$  互相分离, 因此它的通积分为

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)} dx + \int \frac{y(y)}{Y_1(y)} dy = C. \quad (2.8)$$

变量分离的方程(2.7)的通积分由(2.8)给出 (要进行必要的不定积分运算); 还要补上如下形式的特解 (如果它们不在上述通积分之内的话):

$$\begin{cases} x = a_i & (i = 1, 2, \dots) \text{ 其中 } a_i \text{ 是 } X_1(x) = 0 \text{ 的根;} \\ y = b_j & (j = 1, 2, \dots) \text{ 其中 } b_j \text{ 是 } Y_1(y) = 0 \text{ 的根.} \end{cases}$$

## 2.3 一阶线性方程

本节讨论**一阶线性方程**

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \quad (2.9)$$

其中函数  $p(x)$  和  $q(x)$  在区间  $I = (a, b)$  上连续。当  $q(x) \equiv 0$  时方程(2.9)成为

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \quad (2.10)$$

当  $q(x)$  不恒等于零时, 称方程(2.9)为**非齐次线性方程**; 而称方程(2.10)为 (相应的) **齐次线性方程**。

我们得到方程(2.10)的解

$$y = Ce^{-\int p(x) dx}. \quad (2.11)$$



现在要求解非齐次线性方程(2.9)。我们可把它改写为如下的对称形式:

$$dy + p(x)y dx = q(x) dx. \quad (2.12)$$

一般而言, (2.12)不是恰当方程, 但以因子  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$  乘(2.12)两侧 (注意  $\mu(x) \neq 0$ ), 得到方程

$$e^{\int p(x) dx} dy + e^{\int p(x) dx} p(x)y dx = e^{\int p(x) dx} q(x) dx,$$

它是全微分的形式

$$d(e^{\int p(x) dx} y) = d \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx.$$

由此可直接积分, 得到通积分

$$e^{\int p(x) dx} y = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C.$$

这样, 就求出了方程(2.12)的通解

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left( C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right), \quad (2.13)$$

上述方法叫做**积分因子法**, 这是因为我们用因子  $\mu(x)$  乘微分方程(2.12)的两侧后, 它就转化为一个全微分方程, 从而获得它的积分。利用这种形式, 容易得到初值问题

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.14)$$

的解为

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_s^x p(t) dt} ds, \quad (2.15)$$

其中  $p(x)$  和  $q(x)$  在区间  $I$  上连续。

## 2.4 初等变换法

### 2.4.1 齐次方程

如果微分方程(2.1)中的函数  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  都是  $x$  和  $y$  的同次 (例如  $m$  次) 齐次函数, 即:

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^m Q(x, y), \quad (2.16)$$

则称方程(2.1)为**齐次方程**（注意这与上节定义的齐次线性方程不是一回事）。对于齐次方程(2.1)，标准的变量替换是  $y = ux$ ，其中  $u$  为新的未知函数， $x$  仍为自变量。从关系(2.16)易知

$$\begin{cases} P(x, y) = P(x, xu) = x^m P(1, u), \\ Q(x, y) = Q(x, xu) = x^m Q(1, u), \end{cases}$$

因此，把变换代入方程(2.1)，就得

$$x^m [P(1, u) + uQ(1, u)] dx + x^{m+1} Q(1, u) du = 0,$$

这是一个变量分离的方程。

**【附注】** 易知方程(2.1)为齐次方程的一个等价定义是，它可以化为如下的形式：

$$\frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

### 例 2.1

讨论形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + l}\right)$$

的方程的求解法。这里设  $a, b, c, m, n, l$  为常数。

π

注意，当  $c = l = 0$  时，它是齐次方程，因此可用变化  $u = y/x$  求解。当  $c$  和  $l$  不全为零时，可分如下两种情形讨论：

$$(1) \quad \Delta = an - bm \neq 0.$$

此时可选常数  $\alpha$  和  $\beta$ ，使得

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ m\alpha + n\beta + l = 0. \end{cases}$$

然后取自变量和未知函数的（平移）变换

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta,$$

则原方程就化为  $\xi$  与  $\eta$  的方程

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{m\xi + n\eta}\right),$$

这已是齐次方程。因此，只要令  $u = \eta/\xi$ ，即可把它化成变量分离的方程。

$$(2) \quad \Delta = an - bm = 0.$$

此时有  $m/a = n/b = \lambda$ 。因此，原方程化为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + l}\right).$$

再令  $v = ax + by$  为新的未知函数， $x$  仍为自变量，则上述方程可化为

$$\frac{dv}{dx} = a + bf\left(\frac{v + c}{\lambda v + l}\right),$$

它是一个变量分离的方程。

#### 2.4.2 伯努利方程

**定义 2.1** 形如

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad (2.17)$$

的方程称为伯努利方程，其中  $n$  为常数，而且  $n \neq 0$  和  $1$ 。

以  $(1-n)y^{-n}$  乘方程(2.17)两边，即得

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)y^{1-n}p(x) = (1-n)q(x).$$

然后令  $z = y^{1-n}$ ，就有

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x),$$

这是关于未知函数  $z$  的一阶线性方程。

#### 2.4.3 里卡蒂方程

**定义 2.2** 假如一阶微分方程(1.8)的右端函数  $f(x, y)$  是一个关于  $y$  的二次多项式，则称此方程为二次方程；它可写成如下形式：

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad (2.18)$$

其中函数  $p(x), q(x), r(x)$  在区间  $I$  上连续，而且  $p(x)$  不恒为零。方

程(2.18)通畅又叫做里卡蒂 (Riccati, 1676-1754) 方程。

**定理 2.2** 设已知里卡蒂方程(2.18)的一个特解  $y = \varphi_1(x)$ , 则可用积分法求得它的通解。

**【证明】** 对方程(2.18)作变换  $y = u + \varphi_1(x)$ , 其中  $u$  是新的未知函数, 代入方程(2.18), 得到

$$\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dx} = p(x) [u^2 + 2\varphi_1(x)u + \varphi_1^2(x)] + q(x) [u + \varphi_1(x)] + r(x),$$

由于  $y = \varphi_1(x)$  是(2.18)的解, 从上式消去相关的项以后, 就有

$$\frac{du}{dx} = [2p(x)\varphi_1(x) + q(x)]u + p(x)u^2,$$

这是一个伯努利方程。因此, 由前面对方程(2.17)的讨论可知, 此方程可以用积分法求出通解。  $\square$

## 2.5 积分因子法

对于一般的方程(2.1), 设法寻找一个可微的非零函数  $\mu = \mu(x, y)$ , 舍得用它乘方程(2.1)后, 所得方程

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad (2.19)$$

成为恰当方程, 亦即

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \quad (2.20)$$

这时, 函数  $\mu = \mu(x, y)$  叫做方程(2.1)的一个积分因子。

事实上, 寻求积分因子  $\mu = \mu(x, y)$ , 就是求解偏微分方程(2.20), 或等价地, 求解一阶偏微分方程

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mu, \quad (2.21)$$

对某些特殊情形, 利用(2.21)去寻求(2.1)的积分因子是可行的。例如, 假设方程(2.1)有一个只与  $x$  有关的积分因子  $\mu = \mu(x)$ , 则由充要条件(2.21)推出

$$Q \frac{d\mu}{dx} = \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mu,$$

或者

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{Q(x, y)} \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right). \quad (2.22)$$

由于上式左端只与  $x$  有关, 所以右端亦然。因此, 微分方程(2.1)有一个只依赖于  $x$  的积分因子的必要条件是: 表达式

$$\frac{1}{Q(x, y)} \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right). \quad (2.23)$$

只依赖于  $x$ , 而与  $y$  无关。

反之, 设表达式(2.23)只依赖于  $x$ , 记为  $G(x)$ 。考虑到(2.22)式, 我们令

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu(x)}{dx} = G(x),$$

由此得到

$$\mu(x) = e^{\int G(x) dx}, \quad (2.24)$$

容易验证它就是(2.1)的一个积分因子。

**定理 2.3** 微分方程(2.1)有一个只依赖于  $x$  的积分因子的充要条件是: 表达式(2.23)只依赖于  $x$ , 而与  $y$  无关; 而且若把表达式(2.23)记为  $G(x)$ , 则由(2.24)所示的函数  $\mu(x)$  是方程(2.1)的一个积分因子。

**定理 2.4** 若  $\mu = \mu(x, y)$  是方程(2.1)的一个积分因子, 使得

$$\mu P(x, y) dx + \mu Q(x, y) dy = d\Phi(x, y),$$

则  $\mu(x, y)g(\Phi(x, y))$  也是(2.1)的一个积分因子, 其中  $g(\cdot)$  是任意可微的 (非零) 函数。

## 2.6 应用举例

## 例 2.2

求已知曲线族的等角轨线。

假设在  $(x, y)$  平面上由方程

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (2.25)$$

给出一个以  $C$  为参数的曲线族。我们设法求出另一个曲线族

$$\Psi(x, y, K) = 0, \quad (2.26)$$

其中  $K$  为参数, 使得族(2.26)中的任一条曲线与族(2.25)中的每一条曲线相交成定角  $\alpha$  ( $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , 以逆时针方向为正)。称这样的曲线族(2.26)为已知曲线族(2.25)的等角轨线族。特别, 当  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  时, 称曲线族(2.26)为(2.25)的正交轨线族。

假设  $\Phi'_C \neq 0$ , 则可由联立方程

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_x(x, y, C) dx + \Phi'_y(x, y, C) dy = 0 \quad (2.27)$$

消去  $C$ , 得到曲线族(2.25)所满足的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y), \quad (2.28)$$

其中

$$H(x, y) = -\frac{\Phi'_x(x, y, C(x, y))}{\Phi'_y(x, y, C(x, y))},$$

这里  $C = C(x, y)$  是由  $\Phi(x, y, C) = 0$  决定的函数。

如果我们把方程(2.28)在点  $(x, y)$  的线素斜率记为  $y'_1$ , 而把与它相交成  $\alpha$  角的线素斜率记为  $y'$ 。则当  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  时, 有

$$\tan \alpha = \frac{y' - y'_1}{1 + y'y'_1},$$

即

$$y'_1 = \frac{y' - \tan \alpha}{y' \tan \alpha + 1};$$

因为  $y'_1 = H(x, y)$ , 所以等角轨线的微分方程为

$$\frac{y' - \tan \alpha}{y' \tan \alpha + 1} = H(x, y),$$

亦即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H(x, y) + \tan \alpha}{1 - H(x, y) \tan \alpha} \quad (2.29)$$

而当  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  时, 就有

$$y' = -\frac{1}{y'_1},$$

亦即所求正交轨线的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{H(x, y)}. \quad (2.30)$$

求解微分方程(2.29) (或(2.30)), 就可以得到(2.25)的等角轨线族 (或正交轨线族) (2.26)。

### 3 存在和唯一性定理

#### 3.1 皮卡存在和唯一性定理

**定义 3.1** 设函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  内满足不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|,$$

其中常数  $L > 0$ 。则称函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  内对  $y$  满足李卜西兹条件 (或简称李氏条件)。

易知, 若函数  $f(x, y)$  在凸形区域  $D$  内对  $y$  有连续的偏微商, 并且  $D$  是有界闭区域, 则  $f(x, y)$  在  $D$  内对  $y$  满足李氏条件; 反之, 结论不一定正确。例如,  $f(x, y) = |y|$  (对  $y$ ) 满足李氏条件, 但当  $y = 0$  时它对  $y$  没有微商。

**定理 3.1** 设初值问题

$$(E): \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中  $f(x, y)$  在矩形区域

$$R: \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

内连续, 而且对  $y$  满足李氏条件。则  $(E)$  在区间  $I = [x_0 - h, x_0 + h]$  上有切只有一个解, 其中常数

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M > \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|.$$

### 【证明】

- (1) 初值问题  $(E)$  等价于积分方程(3.1)。
- (2) 用逐次迭代法构造皮卡序列。
- (3) 皮卡序列在区间  $I$  上一致收敛到积分方程的解。
- (4) 证明唯一性。

步骤(1)积分方程为

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (3.1)$$

步骤(2)使用逐次迭代法构造皮卡序列

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx \quad (x \in I) \quad (3.2)$$

其中  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $y_0(x) = y_0$ 。由归纳法不难证明: 由(3.2)给出的皮卡序列  $y = y_n(x)$  在  $I$  上是连续的, 而且满足不等式

$$|y_n(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_n(x))| dx \right| \leq M|x - x_0| \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

步骤(3)皮卡序列  $y_n(x)$  的收敛性等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)]$$

的收敛性, 利用李氏条件和归纳法假设可以得到<sup>1</sup>。 □

---

<sup>1</sup> 开学时自行补上步骤(3)与步骤(4)。



**定理 3.2** 设函数  $f(x, y)$  在区域  $G$  内连续按, 而且满足不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|),$$

其中  $F(r) > 0$  是  $r > 0$  的连续函数, 而且瑕积分

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = \infty$$

( $r_1 > 0$  为常数)。则称  $f(x, y)$  在  $G$  内对  $y$  满足 *Osgood* 条件。

此时微分方程  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  在  $G$  内经过每一点的解都是唯一的。

**【证明】** 假设不然。则在  $G$  内可以找到一点  $(x_0, y_0)$  使得微分方程有两个解  $y = y_1(x)$  和

$$y = y_2(x)$$

都经过  $(x_0, y_0)$ , 而且至少存在一个值  $x_1 \neq x_0$ , 使得  $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$ 。不妨设  $x_1 > x_0$ , 且  $y_1(x_1) > y_2(x_1)$ 。令

$$\bar{x} = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{x : y_1(x) = y_2(x)\},$$

则显然有  $x_0 \leq \bar{x} < x_1$ , 而且

$$r(x) \stackrel{d}{=} y_1(x) - y_2(x) > 0, \quad \bar{x} < x \leq x_1$$

和  $r(\bar{x}) = 0$ 。因此, 我们有

$$r'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \quad (3.3)$$

$$\leq F(|y_1(x) - y_2(x)|) = F(r(x)), \quad (3.4)$$

亦即

$$\frac{dr(x)}{F(r(x))} \leq dx \quad (\bar{x} < x \leq x_1).$$

从  $\bar{x}$  到  $x_1$  积分上式, 得到

$$\int_0^{r_1} \frac{dr(x)}{F(r(x))} \leq x_1 - \bar{x},$$

其中  $r_1 = r(x_1) > 0$ 。但这不等式的左端是  $\infty$ , 而右端是一个有限的数。因此, 这是一个矛盾, 它证明了定理 3.2。□

## 3.2 佩亚诺存在定理

### 3.2.1 欧拉折线

TODO

### 3.2.2 Ascoli 引理

TODO

### 3.2.3 培亚诺存在定理

TODO

## 3.3 解的延伸

TODO

## 3.4 比较定理及其应用

TODO