常微分方程笔记

Iydon

2019 年 2 月 18 日

目录

1 基本概念

1.1 微分方程及其解的定义

定义 1.1 (常微分方程) 凡是联系自变量 x，与这个自变量的未知函数 $y = y(x)$，和它的导数 $y' = y'(x)$ 以及直到 n 阶导数 $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ 在内的方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

叫做**常微分方程**，其中导数实际出现的最高阶数 n 叫做常微分方程(1.1)的**阶**。

在常微分方程(1.1)中如果右端函数 F 对未知函数 y 和它的各阶导数 $y', \cdots, y^{(n)}$ 的全体而言是一次的，则称它是**线性**常微分方程。否则称它为**非线性**常微分方程。

我们在定义 1.1中给微分方程(1.1)冠以“常”字，指的是未知函数是一元函数。如果未知函数是多元函数，那么在微分方程中将出现偏导数，这种方程自然叫做**偏微分方程**。

定义 1.2 (常微分方程的解) 设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 J 上连续，且有直到 n 阶的导数。如果把 $y = \varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程(1.1)，得到关于 x 的恒等式，即

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.2}$$

对一切 $x \in J$ 都成立，则称 $y = \varphi(x)$ 为微分方程(1.1)在区间 J 上的一个**解**。

定义 1.3 (常微分方程的通解与特解) 设 n 阶微分方程(1.1)的解

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \tag{1.3}$$

包含 n 个**独立的**任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，则称它为**通解**，这里所说

n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是独立的，其含义是 *Jacobi* 行列式

$$\frac{D\left[\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}\right]}{D\left[C_1, C_2, \cdots, C_n\right]} \stackrel{d}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix}$$

不等于 0，其中

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ \varphi' = \varphi'(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \cdots, C_n). \end{cases}$$

如果微分方程(1.1)的解 $y = \varphi(x)$ 不包含任意常数，则称它为**特解**。显然，当任意常数一旦确定之后，通解也就变成了特解。

例 1.1

求双参数函数族

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \tag{1.4}$$

所满足的微分方程。

事实上，在公式(1.4)中对 x 先后求导两次，得出

$$y' = C_1 e^x(\cos x - \sin x) + C_2 e^x(\sin x + \cos x) \tag{1.5}$$

$$y'' = C_1 e^x(-2\sin x) + C_2 e^x(2\cos x) \tag{1.6}$$

从(1.5)和(1.6)两式可知 *Jacobi* 行列式

$$\frac{D\left[y, y'\right]}{D\left[C_1, C_2\right]} = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

这说明(1.4)中南包含的两个任意常数 C_1 和 C_2 是独立的。据此，可从(1.4)和(1.5)两

式解出 C_1 和 C_2（作为 x, y 和 y' 的函数），即

$$\begin{cases} C_1 = e^{-x}[y(\sin x + \cos x) - y' \sin x], \\ C_2 = e^{-x}[y(\sin x - \cos x) + y' \cos x]. \end{cases}$$

然后把它们代入(1.6)式，就得到一个二阶微分方程

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \tag{1.7}$$

它就是函数族(1.4)所满足的微分方程；而且(1.4)是微分方程(1.7)的通解。□

1.2　微分方程及其解的几何解释

考虑一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \tag{1.8}$$

其中 $f(x, y)$ 是平面区域 G 内的连续函数，假设

$$y = \varphi(x) \quad (x \in I) \tag{1.9}$$

是方程的解（其中 I 是解的存在区间）。则 $y = \varphi(x)$ 在 (x, y) 平面上的图形是一条光滑的曲线 Γ，称它为微分方程(1.8)的**积分曲线**。

在区域 G 内每一点 $P(x, y)$，我们可以作一个以 $f(P)$ 为斜率的（短小）直线段 $l(P)$，以标明积分曲线（如果存在的话）在该店的切线方向，称 $l(P)$ 为微分方程(1.8)在 P 点的**线素**；而称区域 G 联同上述全体线素为微分方程(1.8)的**线素场**或**方向场**。

在构造方程(1.8)的线素场时，通畅利用由关系式 $f(x, y) = k$ 确定的曲线 L_k，称它为线素场的**等斜线**。

一阶微分方程(1.8)在许多情况取如下形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{1.10}$$

其中 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 是区域 G 内的连续函数。我们可以写成下面（关于 x 和 y）的对称形式：

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.11}$$

当 $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ 时，方程(1.10)在 (x_0, y_0) 点是不定式，因此线素场在 (x_0, y_0) 点没有意义。我们称这样的点 (x_0, y_0) 为相应微分方程的**奇异点**。

2 初等积分法

2.1 恰当方程

考虑对称形式的一阶微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0. \tag{2.1}$$

如果存在一个可微函数 $\Phi(x,y)$，使得它的全微分为

$$\mathrm{d}\Phi(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

亦即它的偏导数为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y), \tag{2.2}$$

则称(2.1)为**恰当方程**或**全微分方程**。因此，当方程(2.1)为恰当方程时，可将它改写为全微分的形式

$$\mathrm{d}\Phi(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

从而

$$\Phi(x,y) = C$$

就是方程 2.1的一个通积分。

定理 2.1 设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在区域

$$R: \quad \alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \delta$$

上连续，且有连续的一阶偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$，则微分方程(2.1)是恰当方程的充要条件为恒等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \tag{2.3}$$

在 R 内成立，并且当(2.3)成立时，方程(2.1)的通积分为

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y = C,$$

或者

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y = C,$$

其中 (x_0, y_0) 是 R 中任意取定的一点。

【证明】 先证必要性。设方程(2.1)是恰当的，则存在函数 $\Phi(x,y)$，满足

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y). \tag{2.4}$$

然后，我们在上面的第一式和第二式中，分别对 y 和 x 求偏导数，就可得到

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \tag{2.5}$$

由 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 的连续性假设推知混合偏导数 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ 是连续的，从而 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$，因此由(2.5)式推得(2.3)式。

再证充分性。设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 满足条件(2.3)，我们来构造可微函数 $\Phi(x,y)$，使(2.4)式成立。为了使(2.4)的第一式成立，我们可取

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \psi(y), \tag{2.6}$$

其中函数 $\psi(y)$ 待定，以使函数 $\Phi(x,y)$ 适合(2.4)的第二式。因此，由(2.6)得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \psi'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} P(x,y)\mathrm{d}x + \psi'(y).$$

再利用条件(2.3)得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)\mathrm{d}x + \psi'(y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \psi'(y).$$

由此可见，为了使(2.4)的第二式成立，只要令 $\psi'(y) = Q(x_0, y)$，亦即只要取

$$\psi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y$$

即可。这样，就得到了满足(2.4)的一个函数

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y.$$

如果在构造 $\Phi(x,y)$ 时，先考虑使(2.4)的第二式成立，则可用同样的方法，得到满足(2.4)的另一函数。因此，我们得到通积分如定理 2.1。 □

2.2 变量分离的方程

如果微分方程(2.1)中的函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 均可分别表示为 x 的函数与 y 的函数的乘积，则称(2.1)为**变量分离的方程**。因此，只要令

$$P(x,y)=X(x)Y_1(y),\quad Q(x,y)=X_1(x)Y(y),$$

变量分离的方程可以写成如下的形式：

$$X(x)Y_1(y)\mathrm{d}x+X_1(x)Y(y)\mathrm{d}y\,=\,0. \tag{2.7}$$

如果以因子 $X_1(x)Y_1(y)$ 去除(2.7)式的两侧，就得到

$$\frac{X(x)}{X_1}\mathrm{d}x+\frac{Y(y)}{Y_1(y)}\mathrm{d}y\,=\,0.$$

此方程 x 与 y 互相分离，因此它的通积分为

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{y(y)}{Y_1(y)}\mathrm{d}y\,=\,C. \tag{2.8}$$

变量分离的方程(2.7)的通积分由(2.8)给出（要进行必要的不定积分运算）；还要补上如下形式的特解（如果它们不在上述通积分之内的话）：

$$\begin{cases} x=a_i\,(i=1,2,\cdots) & \text{其中 } a_i \text{ 是 } X_1(x)=0 \text{ 的根；}\\ y=b_j\,(j=1,2,\cdots) & \text{其中 } b_j \text{ 是 } Y_1(y)=0 \text{ 的根。}\end{cases}$$

2.3 一阶线性方程

本节讨论**一阶线性**方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y\,=\,q(x). \tag{2.9}$$

其中函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $I=(a,b)$ 上连续。当 $q(x)\equiv 0$ 时方程(2.9)成为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y\,=\,0. \tag{2.10}$$

当 $q(x)$ 不恒等于零时，称方程(2.9)为**非齐次**线性方程；而称方程(2.10)为（相应的）**齐次**线性方程。

我们得到方程(2.10)的解

$$y\,=\,Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.11}$$

现在要求解非齐次线性方程(2.9)。我们可把它改写为如下的对称形式：

$$\mathrm{d}y + p(x)y\mathrm{d}x \;=\; q(x)\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

一般而言，(2.12)不是恰当方程，但以因子 $\mu(x) = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ 乘(2.12)两侧（注意 $\mu(x) \neq 0$），得到方程

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y + e^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)y\mathrm{d}y \;=\; e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x,$$

它是全微分的形式

$$\mathrm{d}(e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y) \;=\; \mathrm{d}\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

由此可直接积分，得到通积分

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y \;=\; \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C.$$

这样，就求出了方程(2.12)的通解

$$y \;=\; e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right), \tag{2.13}$$

上述方法叫做**积分因子法**,这是因为我们用因子 $\mu(x)$ 乘微分方程(2.12)的两侧后，它就转化为一个全微分方程，从而获得它的积分。利用这种形式，容易得到初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.14}$$

的解为

$$y \;=\; y_0e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{s}^{x} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s, \tag{2.15}$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 I 上连续。

2.4 初等变换法

2.4.1 齐次方程

如果微分方程(2.1)中的函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 都是 x 和 y 的同次（例如 m 次）齐次函数，即：

$$P(tx,ty) = t^mP(x,y), \quad Q(tx,ty) = t^mQ(x,y), \tag{2.16}$$

则称方程(2.1)为**齐次方程**（注意这与上节定义的齐次线性方程不是一回事）。对于齐次方程(2.1)，标准的变量替换是 $y = ux$，其中 u 为新的未知函数，x 认仍为自变量。从关系(2.16)易知

$$\begin{cases} P(x,y) = P(x,xu) = x^m P(1,u), \\ Q(x,y) = Q(x,xu) = x^m Q(1,u), \end{cases}$$

因此，把变换代入方程(2.1)，就得

$$x^m \left[P(1,u) + uQ(1,u)\right] \mathrm{d}x + x^{m+1} Q(1,u) \mathrm{d}u = 0,$$

这是一个变量分离的方程。

【附注】 易知方程(2.1)为齐次方程的一个等价定义是，它可以化为如下的形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varPhi(\frac{y}{x}).$$

例 2.1

讨论形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l}\right)$$

的方程的求解法。这里设 a,b,c,m,n,l 为常数。

注意，当 $c = l = 0$ 时，它是齐次方程，因此可用变化 $u = {}^{y}\!/_{x}$ 求解。当 c 和 l 不全为零时，可分如下两种情形讨论：

(1)　$\Delta = an - bm \neq 0.$

此时可选常数 α 和 β，使得

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ m\alpha + n\beta + l = 0. \end{cases}$$

然后取自变量和未知函数的（平移）变换

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta,$$

则原方程就化为 ξ 与 η 的方程

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{m\xi + n\eta}\right),$$

这已是齐次方程。因此，只要令 $u = \eta/\xi$，即可把它化成变量分离的方程。

(2) $\Delta = an - bm = 0.$

此时有 $m/a = n/b = \lambda$。因此，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+l}\right).$$

再令 $v = ax + by$ 为新的未知函数，x 仍为自变量，则上述方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + bf\left(\frac{v+c}{\lambda v+l}\right),$$

它是一个变量分离的方程。

2.4.2 伯努利方程

定义 2.1 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n \tag{2.17}$$

的方程称为伯努利方程，其中 n 为常数，而且 $n \neq 0$ 和 1。

以 $(1-n)y^{-n}$ 乘方程(2.17)两边，即得

$$(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1-n)y^{1-n}p(x) = (1-n)q(x).$$

然后令 $z = y^{1-n}$，就有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x),$$

这是关于未知函数 z 的一阶线性方程。

2.4.3 里卡蒂方程

定义 2.2 假如一阶微分方程(1.8)的右端函数 $f(x,y)$ 是一个关于 y 的二次多项式，则称此方程为二次方程；它可写成如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{2.18}$$

其中函数 $p(x), q(x), r(x)$ 在区间 I 上连续，而且 $p(x)$ 不恒为零。方

程(2.18)通畅又叫做里卡蒂（*Riccati, 1676-1754*）方程。

定理 2.2 设已知里卡蒂方程(2.18)的一个特解 $y=\varphi_1(x)$，则可用积分法求得它的通解。

【证明】 对方程(2.18)作变换 $y=u+\varphi_1(x)$，其中 u 是新的未知函数，代入方程(2.18)，得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}x} \;=\; p(x)\left[u^2+2\varphi_1(x)u+\varphi_1^2(x)\right]+q(x)\left[u+\varphi_1(x)\right]+r(x),$$

由于 $y=\varphi_1(x)$ 是(2.18)的解，从上式消去相关的项以后，就有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \;=\; \left[2p(x)\varphi_1(x)+q(x)\right]u+p(x)u^2,$$

这是一个伯努利方程。因此，由前面对方程(2.17)的讨论可知，此方程可以用积分法求出通解。 □

2.5 积分因子法

对于一般的方程(2.1)，设法寻找一个可微的非零函数 $\mu=\mu(x,y)$，舍得用它乘方程(2.1)后，所得方程

$$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y \;=\; 0 \tag{2.19}$$

成为恰当方程，亦即

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} \;=\; \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \tag{2.20}$$

这时，函数 $\mu=\mu(x,y)$ 叫做方程(2.1)的一个**积分因子**。

事实上，寻求积分因子 $\mu=\mu(x,y)$，就是求解偏微分方程(2.20)，或等价地，求解一阶偏微分方程

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x} \;=\; \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu, \tag{2.21}$$

对某些特殊情形，利用(2.21)去寻求(2.1)的积分因子是可行的。例如，假设方程(2.1)有一个只与 x 有关的积分因子 $\mu=\mu(x)$，则由充要条件(2.21)推出

$$Q\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} \;=\; \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu,$$

或者

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right). \tag{2.22}$$

由于上式左端只与 x 有关，所以右端亦然。因此，微分方程(2.1)有一个只依赖于 x 的积分因子的必要条件是：表达式

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right). \tag{2.23}$$

只依赖于 x，而与 y 无关。

反之，设表达式(2.23)只依赖于 x，记为 $G(x)$。考虑到(2.22)式，我们令

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x} = G(x),$$

由此得到

$$\mu(x) = e^{\int G(x)\mathrm{d}x}, \tag{2.24}$$

容易验证它就是(2.1)的一个积分因子。

定理 2.3 微分方程(2.1)有一个只依赖于 x 的积分因子的充要条件是：表达式(2.23)只依赖于 x，而与 y 无关；而且若把表达式(2.23)记为 $G(x)$，则由(2.24)所示的函数 $\mu(x)$ 是方程(2.1)的一个积分因子。

定理 2.4 若 $\mu = \mu(x,y)$ 是方程(2.1)的一个积分因子，使得

$$\mu P(x,y)\mathrm{d}x + \mu Q(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Phi(x,y),$$

则 $\mu(x,y)g(\Phi(x,y))$ 也是(2.1)的一个积分因子，其中 $g(\cdot)$ 是任意可微的（非零）函数。

2.6 应用举例

例 2.2

求已知曲线族的等角轨线。
假设在 (x, y) 平面上由方程

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2.25}$$

给出一个以 C 为参数的曲线族。我们设法求出另一个曲线族

$$\Psi(x, y, K) = 0, \tag{2.26}$$

其中 K 为参数，使得族(2.26)中的任一条曲线与族(2.25)中的每一条曲线相交成定角 α（$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$，以逆时针方向为正）。称这样的曲线族(2.26)为已知曲线族(2.25)的等角轨线族。特别，当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，称曲线族(2.26)为(2.25)的正交轨线族。

π

假设 $\Phi'_C \neq 0$，则可由联立方程

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_x(x, y, C)\mathrm{d}x + \Phi'_y(x, y, C)\mathrm{d}y = 0 \tag{2.27}$$

消去 C，得到曲线族(2.25)所满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = H(x, y), \tag{2.28}$$

其中

$$H(x, y) = -\frac{\Phi'_x(x, y, C(x, y))}{\Phi'_y(x, y, C(x, y))},$$

这里 $C = C(x, y)$ 是由 $\Phi(x, y, C) = 0$ 决定的函数。

如果我们把方程(2.28)在点 (x, y) 的线素斜率记为 y'_1，而把与它相交成 α 角的线素斜率记为 y'。则当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\tan\alpha = \frac{y' - y'_1}{1 + y'y'_1},$$

即

$$y'_1 = \frac{y' - \tan\alpha}{y'\tan\alpha + 1};$$

因为 $y_1' = H(x,y)$，所以等角轨线的微分方程为

$$\frac{y' - \tan\alpha}{y'\tan\alpha + 1} = H(x,y),$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{H(x,y) + \tan\alpha}{1 - H(x,y)\tan\alpha} \tag{2.29}$$

而当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，就有

$$y' = -\frac{1}{y_1'},$$

亦即所求正交轨线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{H(x,y)}. \tag{2.30}$$

求解微分方程(2.29)（或(2.30)），就可以得到(2.25)的等角轨线族（或正交轨线族）(2.26)。

3 存在和唯一性定理

3.1 皮卡存在和唯一性定理

定义 3.1 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内满足不等式

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|\,,$$

其中常数 $L > 0$。则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内对 y 满足**李卜西兹条件**（或简称**李氏条件**）。

易知，若函数 $f(x,y)$ 在凸形区域 D 内对 y 有连续的偏微商，并且 D 是有界闭区域，则 $f(x,y)$ 在 D 内对 y 满足李氏条件；反之，结论不一定正确。例如，$f(x,y) = |y|$（对 y）满足李氏条件，但当 $y = 0$ 时它对 y 没有微商。

定理 3.1 设初值问题

$$(E): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R: \qquad |x-x_0| \le a, \quad |y-y_0| \le b$$

内连续，而且对 y 满足李氏条件。则 (E) 在区间 $I=[x_0-h,x_0+h]$ 上有切只有一个解，其中常数

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}, \quad M > \max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|.$$

【证明】

(1) 初值问题 (E) 等价于积分方程方程(3.1)。

(2) 用逐次迭代法构造皮卡序列。

(3) 皮卡序列在区间 I 上一致收敛到积分方程的解。

(4) 证明唯一性。

步骤(1)积分方程为

$$y \;=\; y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

步骤(2)使用逐次迭代法构造皮卡序列

$$y_{n+1}(x) \;=\; y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))\mathrm{d}x \quad (x\in I) \tag{3.2}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$，$y_0(x)=y_0$。由归纳法不难证明：由(3.2)给出的皮卡序列 $y=y_n(x)$ 在 I 上是连续的，而且满足不等式

$$|y_n(x)-y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x}|f(x,y_n(x))|\mathrm{d}x\right| \le M|x-x_0| \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

步骤(3)皮卡序列 $y_n(x)$ 的收敛性等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[y_{n+1}(x)-y_n(x)]$$

的收敛性，利用李氏条件和归纳法假设可以得到[1]。 □

[1] 开学时自行补上步骤(3)与步骤(4)。

定理 3.2 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续按，而且满足不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le F(|y_1-y_2|),$$

其中 $F(r)>0$ 是 $r>0$ 的连续函数，而且瑕积分

$$\int_0^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{F(r)} = \infty$$

（$r_1>0$ 为常数）。则称 $f(x,y)$ 在 G 内对 y 满足 *Osgood* **条件**。

此时微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 在 G 内经过每一点的解都是唯一的。

【证明】 假设不然。则在 G 内可以找到一点 (x_0,y_0) 使得微分方程有两个解 $y=y_1(x)$ 和

$$y=y_2(x)$$

都经过 (x_0,y_0)，而且至少存在一个值 $x_1\neq x_0$，使得 $y_1(x_1)\neq y_2(x_1)$。不妨设 $x_1>x_0$，且 $y_z(x_1)>y_2(x_1)$。令

$$\overline{x} = \sup_{x\in[x_0,x_1]} \{x : y_1(x)=y_2(x)\},$$

则显然有 $x_0\le \overline{x}<x_1$，而且

$$r(x) \stackrel{d}{=} y_1(x)-y_2(x)>0, \quad \overline{x}<x\le x_1$$

和 $r(\overline{x})=0$。因此，我们有

$$\begin{aligned} r'(x) = y_1'(x)-y_2'(x) &= f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x)) \quad (3.3)\\ &\le F(|y_1(x)-y_2(x)|) = F(r(x)), \quad (3.4)\end{aligned}$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}r(x)}{F(r(x))} \le \mathrm{d}x \quad (\overline{x}<x\le x_1).$$

从 $\overline{x}$ 到 x_1 积分上式，得到

$$\int_0^{r_1} \frac{\mathrm{d}r(x)}{F(r(x))} \le x_1-\overline{x},$$

其中 $r_1=r(x_1)>0$。但这不等式的左端是 ∞，而右端是一个有限的数。因此，这是一个矛盾，它证明了定理 3.2。 □

3.2 佩亚诺存在定理

3.2.1 欧拉折线

TODO

3.2.2 Ascoli 引理

TODO

3.2.3 培亚诺存在定理

TODO

3.3 解的延伸

TODO

3.4 比较定理及其应用

TODO