

1 线性偏微分方程

1. Laplace 方程

$$\Delta u = 0;$$

2. 特征值方程¹

$$\Delta u + \lambda u = 0;$$

3. 热方程²

$$u_t - a^2 \Delta u = 0;$$

4. Schrödinger 方程

$$u_t - i \Delta u = 0;$$

5. Kolmogorov 方程³

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} = 0;$$

6. Fokker-Planck 方程⁴

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u)_{x_i} = 0;$$

7. 输运方程⁵

$$u_t + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} = 0;$$

8. 波动方程⁶

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0;$$

9. 电报方程⁷

$$u_{tt} - a^2 \Delta u + b u_t = 0;$$

10. 横梁方程

$$u_t + u_{xxxx} = 0;$$

¹ λ 为常数

² $a > 0$ 为常数

³ 其中 $a_{ij}, b_i (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 为常数

⁴ 其中 $a_{ij}, b_i (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 为常数

⁵ 其中 $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为常数

⁶ $a > 0$ 为常数

⁷ 其中 a 为正常数, b 为常数

2 非线性偏微分方程

1. 非线性 Poisson 方程

$$\Delta u = u^3 - u;$$

2. 极小曲面方程

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} \right) = 0;$$

3. Monge-Ampère 方程

$$\det(D^2u) = f(x);$$

4. Hamilton-Jacobi 方程¹

$$u_t + H(Du) = 0;$$

5. Burgers 方程

$$u_t + uu_x = 0;$$

6. 守恒律方程

$$u_t + \operatorname{div} \mathbf{F}(u) = 0;$$

7. 多孔介质方程²

$$u_t - \Delta u^\gamma = 0;$$

8. Korteweg-deVries (KdV) 方程

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0;$$

9. p -Laplace 方程³

$$\operatorname{div} (|Du|^{p-2} Du) = 0;$$

10. 非线性波动方程⁴

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(u);$$

11. Boltzmann 方程⁵

$$f_t + \mathbf{v} \cdot D_x f = Q(f, f);$$

¹其中 $H: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ 为已知函数

² $\gamma > 1$ 为常数

³ $p > 1$ 为常数

⁴ $a > 0$ 为常数

⁵其中 $f = f(x, \mathbf{v}, t)$, $Q(f, f) = Q(f(x, \mathbf{v}, t), f(x, \mathbf{v}, t))$ 为碰撞项

3 偏微分方程组

1.