Tarea 3

Matemáticas para la Ciencia de Datos

Docente: **Briceyda B. Delgado**

Alumno: **Luis Fernando Izquierdo Berdugo**

Fecha: **12 de Septiembre de 2024**

Instrucciones

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$F' = (2 - S)F$, $F(0) = F_0$

$S' = (F - 1)S$, $S(0) = S_0$

1. (20 puntos) Dar una solución analítica del sistema, en términos de las condiciones iniciales.
2. (10 puntos) Verifique que el sistema (1) admite el esquema numérico

$$F_{n+1} = F_n + \Delta t(2 - S_n)F_n$$

$$S_{n+1} = S_n + \Delta t(F_n - 1)S_n$$

Explique el procedimiento para llegar a la expresión anterior.

3. Realice un programa que implemente el esquema anterior y que realice las siguientes funciones:
   - (10 puntos) Acepte como entradas S_0, F_0 y Δt
   - (10 puntos) Calcule la solución numérica para t variando de 0 a 10. Indique la solución numérica cuando $S_0 = 0.1$, $F_0 = 1.9$ y $\Delta t = 0.001$
4. (20 puntos) Encuentre un segundo esquema numérico, usando Crank-Nicholson que represente al sistema de ecuaciones diferenciales.
5. (20 puntos) Grafique la solución numérica como una función de t y en el espacio de estados en el sistema coordenado F-S.
6. (10 puntos) Explique alguna aplicación o fenómeno modelado a través de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Inciso 1

Si se tiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$F' = (2 - S)F$, $F(0) = F_0$

$S' = (F - 1)S$, $S(0) = S_0$

Efectuando el cociente de ambas ecuaciones, podemos escribir

$\frac{ds}{df} = \frac{S(F-1)}{F(2-S)}$

Resolviendo por variables separables:

$F(2 - S)ds = S(F - 1)df$

$\frac{(2-S)}{S}ds = \frac{(F-1)}{F}df$

Se integran ambos lados

$2lnS - S = F - lnF + C$

Sustituyendo las condiciones iniciales y despejando C

$2lnS_0 - S_0 + lnF_0 - F_0 = C$

Obteniendo finalmente

$2lnS - S = F - lnF + 2lnS_0 - S_0 + lnF_0 - F_0$

Inciso 2

Se introduce el paso de tiempo $\Delta t > 0$ y se define $t_n = n\Delta t$

F_n y S_n serán las aproximaciones de $F(t_n)$ y $S(t_n)$ respectivamente, ya que:

$\frac{F(t_{n+1})-F(t_n)}{\Delta t} \approx F'(t_n)$

$\frac{S(t_{n+1})-S(t_n)}{\Delta t} \approx S'(t_n)$

Entonces

$\frac{F_{n+1}-F_n}{\Delta t} = (2 - S_n)F_n$

$\frac{S_{n+1}-S_n}{\Delta t} = (F_n - 1)S_n$

Despejando se obtiene el esquema deseado:

$F_{n+1} = F_n + \Delta t(2 - S_n)F_n$

$$S_{n+1} = S_n + \Delta t(F_n - 1)S_n$$

Inciso 3

In [1]:
```
import numpy as np

def sistEq(s0, f0, dt):
    t = np.arange(0, 10, dt)
    S = np.zeros_like(t)
    F = np.zeros_like(t)
    S[0] = s0
    F[0] = f0

    for i in range(1, len(t)):
        F[i] = F[i-1] + (dt*(2-S[i-1])*F[i-1])
        S[i] = S[i-1] + (dt*(F[i-1]-1)*S[i-1])

    return F, S, t
```

In [2]:
```
F,S,t = sistEq(0.1, 1.9, 0.001)
print(f"F: {F}")
print(f"S: {S}")
#print(f"t: {t}")
```

```
F: [1.9        1.90361    1.90722669 ... 0.00438735 0.0043865  0.00438565]
S: [0.1        0.10009    0.10018044 ... 2.19487384 2.19268859 2.19050552]
```

Iniciso 4

Considerando el sistema simplificado:

$$F'(t) = 2 - S(t), F(0) = F_0$$

$$S'(t) = F(t) - 1, S(0) = S_0$$

La forma básica de Crank-Nicholson es:

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(f(u_{n+1}) + f(u_n))$$

Si se aplica a ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{F_{n+1}-F_n}{\Delta t} = \frac{1}{2}[(2 - S_n) + (2 - S_{n+1})]$$

$$\frac{S_{n+1}-S_n}{\Delta t} = \frac{1}{2}[(F_n - 1) + (F_{n+1} - 1)]$$

Lo cual se puede reescribir como

$$2F_{n+1} + \Delta t S_{n+1} = 2F_n - \Delta t S_n + 4\Delta t$$

$$-\Delta t F_{n+1} + 2S_{n+1} = 2S_n + \Delta t F_n - 2\Delta t$$

Con esto se puede obtener la matriz A:

```
math
 A = \begin{bmatrix}
2 & \Delta t \\
-\Delta t & 2
\end{bmatrix}
```

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \Delta t \\ -\Delta t & 2 \end{bmatrix}$$

y el vector b_n:

```
math
b_n = \begin{pmatrix}
2F_n - \Delta tS_n + 4\Delta t \\
2S_n + \Delta tF_n - 2\Delta t
\end{pmatrix}
```

$$b_n = \begin{pmatrix} 2F_n - \Delta tS_n + 4\Delta t \\ 2S_n + \Delta tF_n - 2\Delta t \end{pmatrix}$$

usando el vector x_{n+1}:

```
math
x_{n+1} = \begin{pmatrix}
F_{n+1} \\
S_{n+1}
\end{pmatrix}
```

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ S_{n+1} \end{pmatrix}$$

La ecuación se denota por $Ax_{n+1} = b_n$

Se saca el determinante de A:

```
math
A^{-1} = \frac{1}{4-\Delta t^2} \begin{pmatrix}
2 & -\Delta t \\
\Delta t & 2
\end{pmatrix}
```

$$A^{-1} = \frac{1}{4-\Delta t^2} \begin{pmatrix} 2 & -\Delta t \\ \Delta t & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene

```
math
\begin{pmatrix}
F_{n+1} \\
S_{n+1}
\end{pmatrix}  = \frac{1}{4-\Delta t^2} \begin{pmatrix}
2 & -\Delta t \\
\Delta t & 2
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
2F_n - \Delta tS_n + 4\Delta t \\
2S_n + \Delta tF_n - 2\Delta t
\end{pmatrix}
```

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ S_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4-\Delta t^2} \begin{pmatrix} 2 & -\Delta t \\ \Delta t & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2F_n - \Delta tS_n + 4\Delta t \\ 2S_n + \Delta tF_n - 2\Delta t \end{pmatrix}$$

Multiplicando la matriz por el vector tenemos la solución para el tiempo $n+1$:

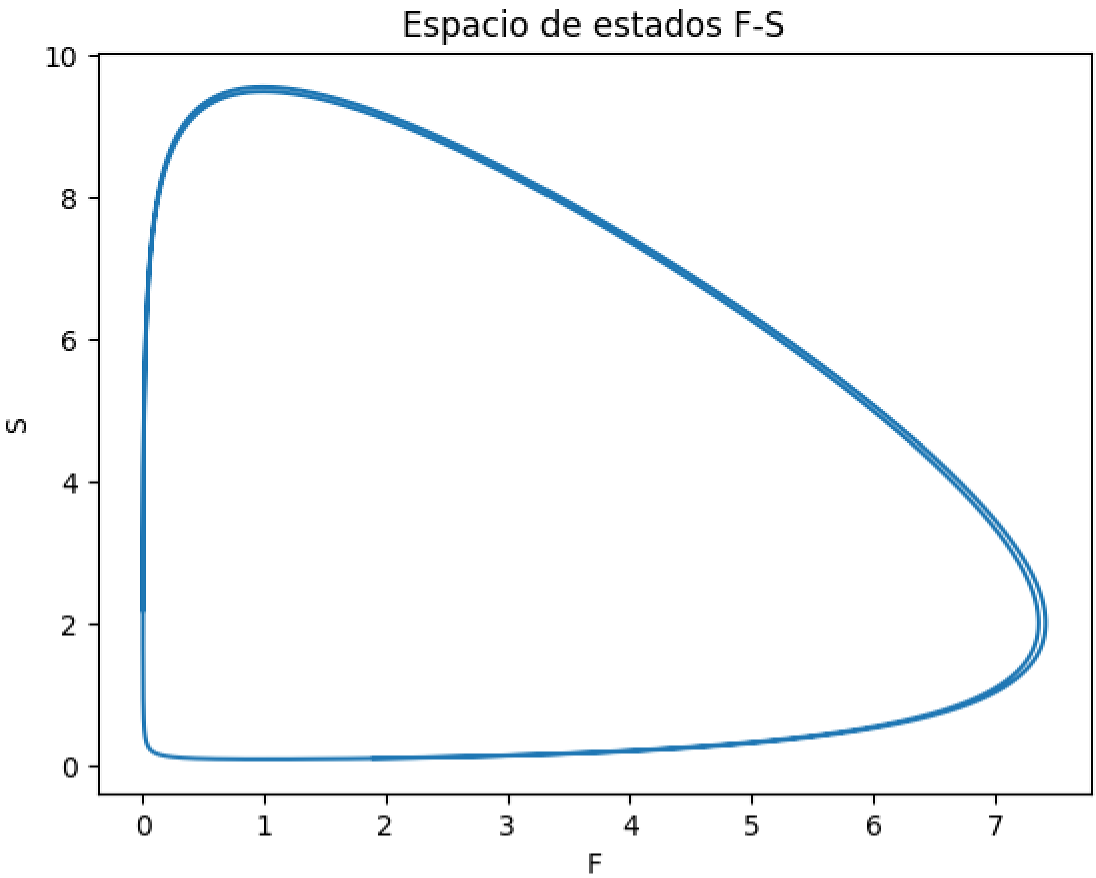
$$F_{n+1} = \frac{1}{4-\Delta t^2}[(4-\Delta t^2)F_n - 4\Delta tS_n + 8\Delta t + 2\Delta t^2]$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{4-\Delta t^2}[(4-\Delta t^2)S_n + \Delta tF_n - 4\Delta t + 4\Delta t^2]$$

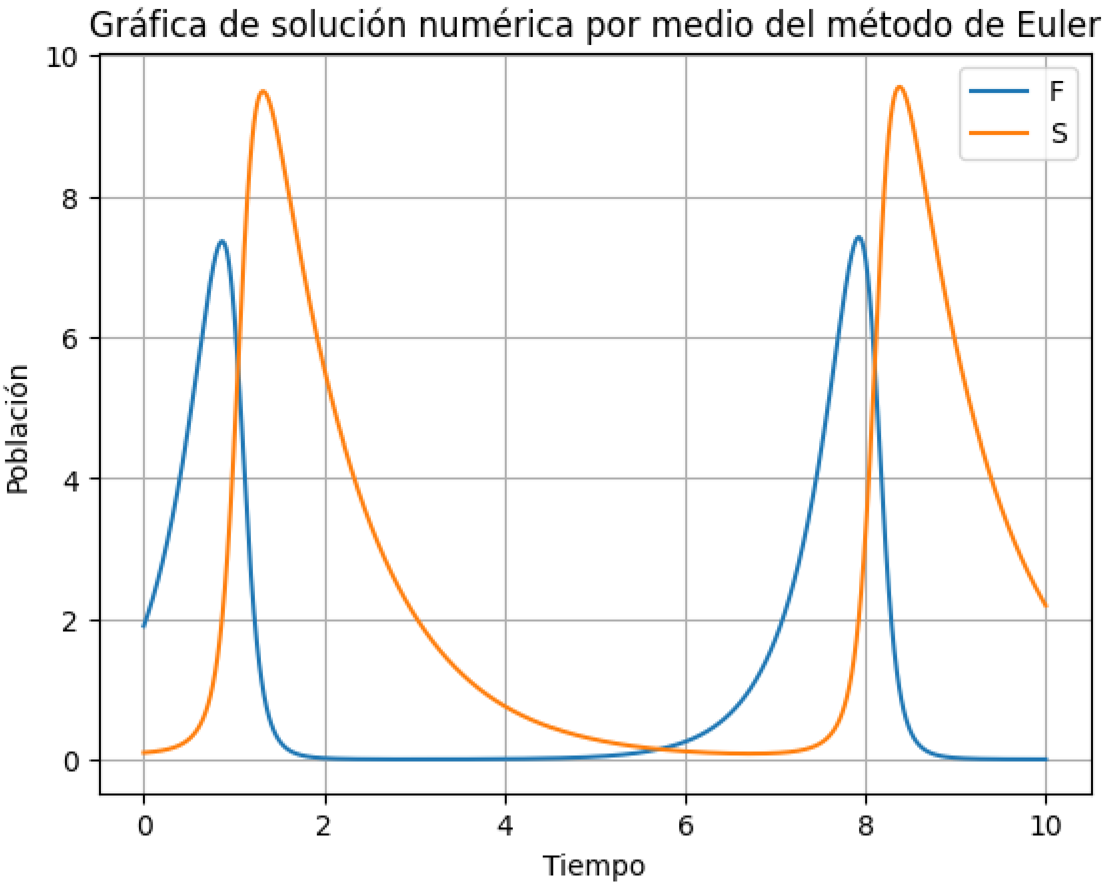
Inciso 5

In [3]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(F, S)
plt.xlabel('F')
plt.ylabel('S')
plt.title('Espacio de estados F-S')
plt.show()
```



In [4]:
```
# Graficamos las soluciones
plt.plot(t, F, label='F')
plt.plot(t, S, label='S')
plt.legend()
plt.xlabel("Tiempo")
plt.ylabel("Población")
plt.title('Gráfica de solución numérica por medio del método de Euler')
plt.grid(True)
plt.show()
```



Inciso 6

Las ecuaciones diferenciales pueden modelar distintos fenomenos cotidianos, como es el **enfriamiento del café**. Si te sirves una taza de café hirviendo, esta se irá enfriando hasta alcanzar la temperatura ambiente, lo cual puede modelarse utilizando una ecuación diferencial.

La tasa a la que el café se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el café y el ambiente. Lo cual quiere decir que cuanto más caliente esté el café en comparación con la habitación, más rápido se enfriará. Siendo su ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{ambiente})$$

donde:

- $\frac{dT}{dt}$ es la tasa de cambio entre la temperatura de café en relación con el tiempo
- k es una constante que depende del tamaño del material de la taza, el líquido que contiene, etc
- T es la temperatura del café
- $T_{ambiente}$ es la temperatura ambiente