Karolina Rączkowska 272447
Iza Paniczek 272410

Sprawozdanie

Problem optymalizacji w wieżach Hanoi

1. Wstęp

Wieże Hanoi to klasyczny problem matematyczny, który polega na przenoszeniu dysków (krążków) między trzema kołkami zgodnie z określonymi zasadami:

1. Można przenosić tylko jeden dysk naraz.
2. Każdy ruch polega na zdjęciu górnego dysku z jednego kołka i umieszczeniu go na innym kołku.
3. Żaden krążek nie może być umieszczony na krążku mniejszym od siebie.

Celem projektu było znalezienie optymalnego rozwiązania problemu Wież Hanoi za pomocą programu CPLEX oraz porównanie jego wydajności z metaheurystyką.

2. Obliczenia

2.1 Zmienne

P – liczba patyków,
K – liczba krążków,
MD – maksymalna liczba decyzji (2^K),
PU – początkowe ułożenie krążków (patyk 1),
KU – końcowe ułożenie krążków (patyk 3).

2.2 Ograniczenia

K1: Wszystkie krążki muszą być gdzieś umieszczone w każdej decyzji.

∀i ∈ {1, ..., K}, j ∈ {1, ..., MD} ∑_{z ∈ 1..P} decyzja[i, j, z] = 1

K2: Wszystkie krążki muszą być na końcu na wskazanym patyku.

∀i ∈ {1, ..., K} decyzja[i, MD, KU] = 1

K3: Wszystkie krążki muszą być na początku na wskazanym patyku.

∀i ∈ {1, ..., K} decyzja[i, 1, PU] = 1

K4: Odpowiednie ruchy - jeden na rundę.

∀d ∈ {2, ..., MD} ∑_{k ∈ 1..K, p ∈ 1..P} |decyzja[k, d, p] - decyzja[k, d-1, p]| = 2

K5: Nie można kłaść większego krążka na mniejszym.

∀i ∈ {2, ..., K}, j ∈ {2, ..., MD}, z ∈ {1, ..., P} (∑_{l ∈ 1..i-1} decyzja[l, j-1, z] + (|decyzja[i, j, z] - decyzja[i, j-1, z]| - 1) * 10) ≤ 0

2.3 Funkcja celu

Celem jest zminimalizowanie liczby ruchów, co wyraża się równaniem:

minimize ∑_{i ∈ 1..K, j ∈ 1..MD, z ∈ 1..P} decyzja[i, j, z]-

3. Rozwiązanie

3.1 Wyniki Cplexa

a) Macierz decyzji dla 2 krążków:

```
[[1 0 0]   [1 0 0]
 [0 1 0]   [1 0 0]
 [0 1 0]   [0 0 1]
 [0 0 1]]  [0 0 1]]
```

b) Macierz decyzji dla 3 krążków:

```
[[1 0 0]   [1 0 0]   [1 0 0]
 [0 0 1]   [1 0 0]   [1 0 0]
 [0 0 1]   [0 1 0]   [1 0 0]
 [0 1 0]   [0 1 0]   [1 0 0]
 [0 1 0]   [0 1 0]   [0 0 1]
 [1 0 0]   [0 1 0]   [0 0 1]
 [1 0 0]   [0 0 1]   [0 0 1]
 [0 0 1]]  [0 0 1]]  [0 0 1]]
```

c) Macierz decyzji dla 4 krążków:

```
[[1 0 0]   [1 0 0]   [1 0 0]   [1 0 0]
 [0 1 0]   [1 0 0]   [1 0 0]   [1 0 0]
 [0 1 0]   [0 0 1]   [1 0 0]   [1 0 0]
 [0 0 1]   [0 0 1]   [1 0 0]   [1 0 0]
 [0 0 1]   [0 0 1]   [0 1 0]   [1 0 0]
 [1 0 0]   [0 0 1]   [0 1 0]   [1 0 0]
 [1 0 0]   [0 1 0]   [0 1 0]   [1 0 0]
 [0 1 0]   [0 1 0]   [0 1 0]   [1 0 0]
 [0 1 0]   [0 1 0]   [0 1 0]   [0 0 1]
 [0 0 1]   [1 0 0]   [0 1 0]   [0 0 1]
 [0 0 1]   [1 0 0]   [0 1 0]   [0 0 1]
 [1 0 0]   [1 0 0]   [0 1 0]   [0 0 1]
 [1 0 0]   [1 0 0]   [0 1 0]   [0 0 1]
 [0 1 0]   [1 0 0]   [0 0 1]   [0 0 1]
 [0 1 0]   [0 0 1]   [0 0 1]   [0 0 1]
 [0 0 1]]  [0 0 1]]  [0 0 1]]  [0 0 1]]
```

3.2 Wyniki metaheurstyki otrzymane za pomocą metody wyżarzania dla 20 odrębnych iteracji:

	liczba pomyłek		
nr iteracji	**dla 2 krążków**	**dla 3 krążków**	**dla 4 krążków**
1	4	15	46
2	4	16	42
3	3	9	38
4	4	13	33
5	4	17	38
6	5	14	40
7	5	15	43
8	5	12	43
9	5	16	43
10	3	12	48
11	5	15	43
12	4	18	45
13	2	15	39
14	3	12	46
15	3	10	43
16	4	12	46
17	4	14	42
18	2	11	40
19	3	15	47
20	5	12	40
średnia liczba pomyłek	3	13	42

4. Wnioski

Program CPLEX wykazał się skutecznością w znajdowaniu optymalnych rozwiązań problemu Wież Hanoi dla różnej liczby krążków. Wyniki pokazują, że nawet dla większej liczby krążków algorytm jest w stanie efektywnie obliczyć minimalną liczbę ruchów potrzebną do rozwiązania zagadnienia.

Metaheurystyka, mimo iż dawała przybliżone rozwiązania, wyraźnie odstawała pod względem precyzji od wyników uzyskanych za pomocą CPLEX. Można zauważyć, że liczba błędów zwiększała się wraz ze wzrostem liczby krążków, co sugeruje, że metaheurystyka może nie być najlepszym wyborem dla problemów o wyższym stopniu skomplikowania.