# Otimização II

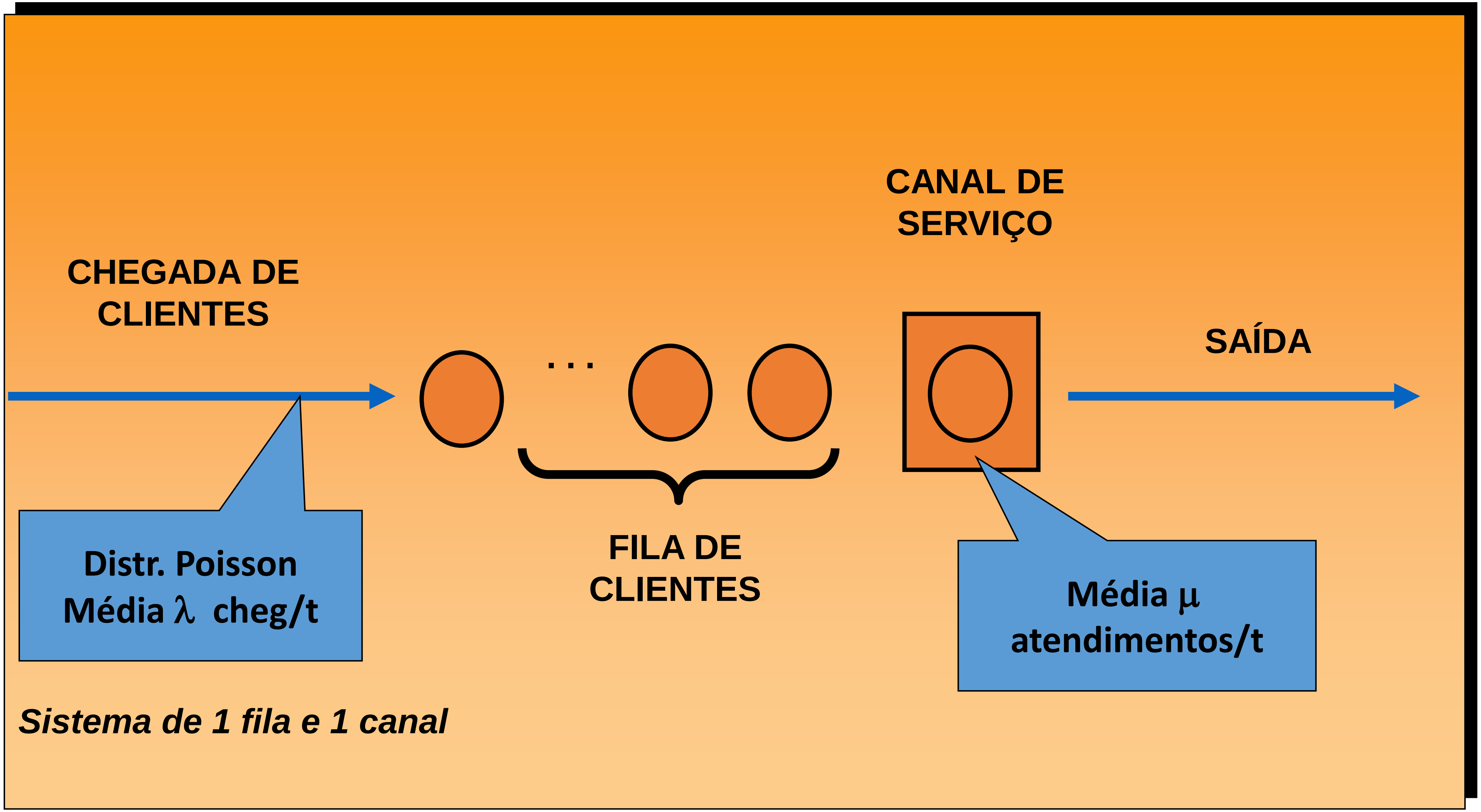
**Prof. Dr. Paulo Roberto Maia**
Paulo.maia@inatel.br

P108 – Otimização II

# Agenda

- ❑ Modelo M/M/1
- ❑ Modelo M/M/s>1
- ❑ Modelo M/M/1/K
- ❑ Modelo M/M/s>1/K
- ❑ Modelo M/M/1/N
- ❑ Modelo M/M/s>1/N
- ❑ Modelo M/G/1
- ❑ Modelo com prioridades

# Modelo M/G/1


CANAL DE SERVIÇO
CHEGADA DE CLIENTES
SAÍDA
Distr. Poisson
Média λ cheg/t
FILA DE CLIENTES
Média μ atendimentos/t
Sistema de 1 fila e 1 canal

# Modelo M/G/1

## Características gerais

- ✓ Chegadas: ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com média λ chegadas/tempo.
- ✓ Tempos de atendimento: não é imposta nenhuma restrição de como deve ser essa distribuição de tempos de atendimento. É necessário apenas conhecer a média 1/μ e a variância $\sigma^2$.
- ✓ A hipótese dos tempos entre atendimentos exponenciais implica que as chegadas ocorrem aleatoriamente (um processo de entrada de Poisson), que é uma aproximação razoável em muitas situações, mas não para o caso em que as chegadas são cuidadosamente programadas ou reguladas.
- ✓ Não é imposta nenhuma restrição de como deve ser essa distribuição de tempos de atendimento. Na realidade, é necessário apenas conhecer (ou estimar) a média $1/\mu$ e a variância $\sigma^2$ dessa distribuição.

# Modelo M/G/1

## Medidas de efetividade

Probabilidade de haver 0 cliente no sistema: $P_0 = 1 - \rho$

Número médio de clientes na fila: $L_q = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$

Tempo médio de espera na fila: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$

Número médio de clientes no sistema: $L = \rho + L_q$

Tempo médio de espera no sistema: $W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

Essa fórmula é um dos resultados mais importantes na teoria das filas em razão de sua facilidade de uso e o predomínio de sistemas de filas $M/G/1$ na prática. Essa equação para $Lq$ (ou seu $Wq$) é equivalente para comumente chamada **fórmula de Pollaczek-Khintchine**, em homenagem aos dois pioneiros no desenvolvimento da teoria das filas que obtiveram a fórmula no início dos anos 30.

# Modelo M/G/1

## Exemplo 1

O lava-rápido automático é uma instalação com apenas uma vaga. Os carros chegam de acordo com uma distribuição de Poisson com uma média de 4 carros por hora e podem esperar no estacionamento da instalação ou na rua adjacente à instalação, se a vaga estiver ocupada. O tempo para lavar e limpar um carro é exponencial, com uma média de 10 minutos. Isso significa que, para todos os efeitos práticos, não há limite para o tamanho do sistema. O gerente da instalação deseja determinar o tamanho do estacionamento. Para esta situação, temos $\lambda = 4$ carros por hora e $\mu = 60/10 = 6$ carros por hora. Como $\rho = \lambda/\mu < 1$, o sistema pode operar em condições de estado estacionário.

a) Determine L, Lq, W e Wq.

b) Suponha que um novo sistema seja instalado de modo que o tempo de atendimento para todos os carros seja constante e igual a 10 minutos, determine L, Lq, W e Wq.

c) Qual a razão entre Lq dos modelos M/G/1 e M/M/1?

# Modelo M/G/1

## Exemplo 2

Marsha opera uma banquinha de café expresso. Os clientes chegam de acordo com um processo de Poisson a uma taxa média de 25 por hora. O tempo necessário para Marsha servir um cliente tem uma distribuição exponencial com média de 90 segundos.

a) Encontre L, Lq, W e Wq. (Lq=1,042; L=1,667; Wq=0,042; W=0,067)

b) Suponha que Marsha seja substituída por uma máquina automática de café expresso que precise exatamente de 90 segundos para cada cliente operar. Encontre L, Lq, W e Wq. (Lq=0,521; L=1,146; Wq=0,021; W=0,046)

c) Qual é a razão entre Lq no item (b) e Lq no item (a)? (0,5)

d) Use o método de tentativa e erro com o gabarito para o modelo M/G/1 para verificar aproximadamente quanto Marsha precisaria reduzir o tempo de atendimento esperado para alcançar o mesmo Lq obtido com a máquina automática. (73)

# Modelo com prioridades

## Características gerais

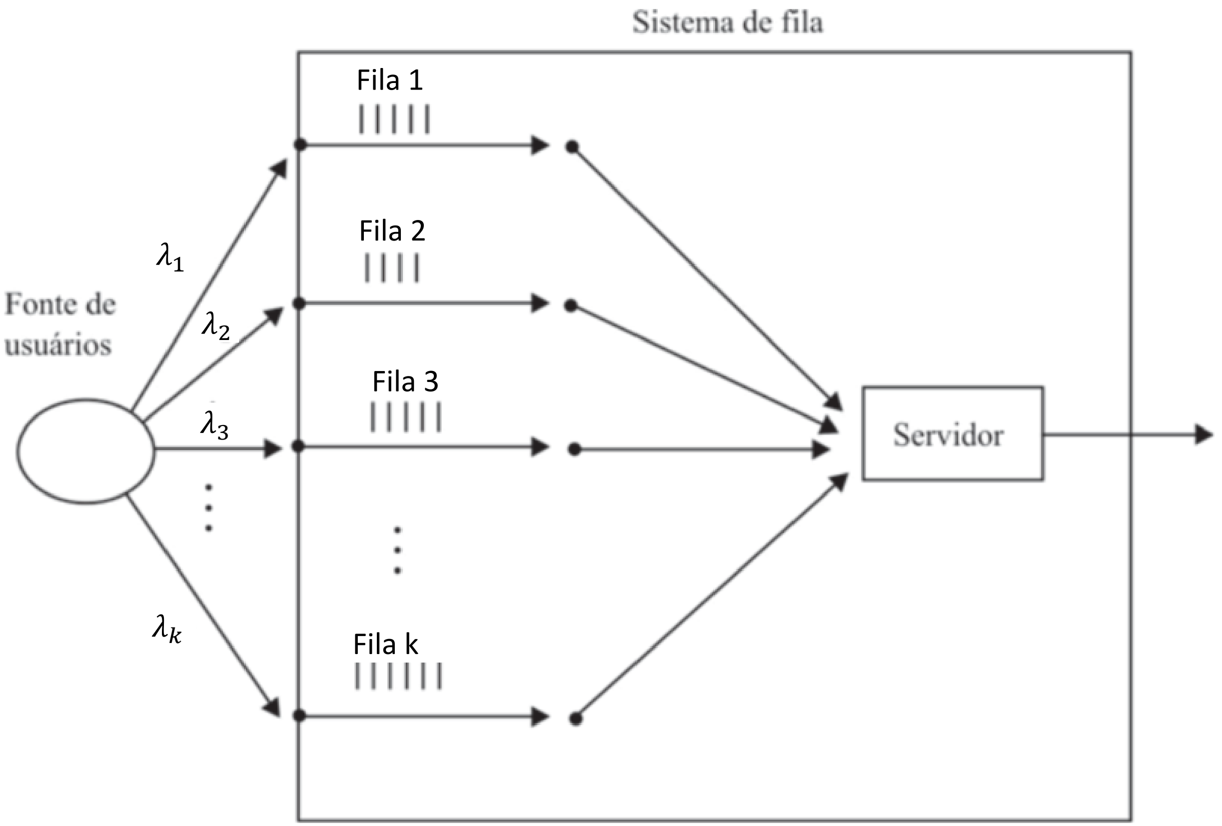
Parte-se do pressuposto da existência de um processo de entrada de Poisson e tempos de atendimento exponenciais para cada classe de prioridades.

**Prioridades sem interrupção**, um cliente que está sendo atendido não pode ser colocado de volta para a fila (preterido) se um cliente com prioridade maior entrar no sistema de filas.

**Prioridades com interrupção**, o cliente de menor prioridade que está sendo atendido é preterido (colocado de volta para a fila) toda vez que um cliente com prioridade maior entrar no sistema de filas.

# Modelo com prioridades

## Características gerais



# Modelo com prioridades

## Medidas de efetividade com interrupção

Tempo médio de espera no sistema:

$$W = (1/\mu)/\left[\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i}{s\mu}\right) \times \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{s\mu}\right)\right]$$

Número médio de clientes na fila: $L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$

Tempo médio de espera na fila: $W_q = W - \frac{1}{\mu}$

Número médio de clientes no sistema: $L = \lambda W$

# Modelo com prioridades

## Medidas de efetividade sem interrupção

Tempo médio de espera no sistema:

$$W = 1 \Big/ \left[ \left( s! \frac{s\mu - \lambda}{r^s} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{r^j}{j!} + s\mu \right) \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i}{s\mu} \right) \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{s\mu} \right) \right] + \frac{1}{\mu} \qquad com\ r = \frac{\lambda}{\mu}$$

Número médio de clientes na fila: $L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$

Tempo médio de espera na fila: $W_q = W - \frac{1}{\mu}$

Número médio de clientes no sistema: $L = \lambda W$

# Modelo com prioridades

## Exemplo 1

Na sala de emergências de um Hospital Municipal, o administrador percebeu que os pacientes não são tratados segundo a regra dos primeiros que chegam serão os primeiros a ser atendidos. Em vez disso, a enfermeira que recepciona os pacientes que chegam os divide, basicamente, em três categorias: (1) casos críticos, nos quais o pronto atendimento é vital para a sobrevivência do paciente; (2) casos graves, cujo tratamento prévio é importante para impedir maior agravamento; e (3) casos estáveis, em que o tratamento pode ser retardado sem consequências médicas adversas. Os pacientes são então tratados nessa ordem de prioridade, em que aqueles na mesma categoria são normalmente admitidos de acordo com a regra dos primeiros que chegam serão os primeiros a ser atendidos. Um médico interromperá o tratamento de um paciente caso surja um novo caso em uma categoria de maior prioridade. Aproximadamente 10% dos pacientes recaem na primeira categoria, 30% na segunda e 60% na terceira. Como os casos mais graves serão enviados ao hospital para cuidados posteriores após receber tratamento de emergência, o tempo de tratamento médio gasto por um médico na sala de emergências na verdade não difere muito entre essas categorias. O administrador decidiu usar um modelo de filas de disciplina de prioridades como uma representação razoável desse sistema de filas, em que as três categorias de pacientes constituem as três classes de prioridades no modelo. Como o tratamento é interrompido pela chegada de um caso de prioridade mais alta, o modelo de prioridades com interrupção é o indicado. Tendo em vista os dados previamente disponíveis ($\mu$=3 e $\lambda$=2), as porcentagens anteriores resultam em $\lambda_1$=0,2, $\lambda_2$=0,6 e $\lambda_3$=1,2. Calcule L, Lq, W e Wq.

# Modelo com prioridades

## Exemplo 1 Com interrupção

**Para S=1 tem-se:**

$$W_1 = (1/\mu)/\left[\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i}{s\mu}\right)\times\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{s\mu}\right)\right] = \frac{1}{\mu-\lambda_1} = \frac{1}{3-0{,}2} = 0{,}3571$$

$$W_{q_1} = W_1 - \frac{1}{\mu} = 0{,}0238 \qquad L_1 = \lambda_1 W_1 = 0{,}07142 \qquad L_{q_1} = L_1 - \frac{\lambda_1}{\mu} = 0{,}004753$$

$$W_2 = (1/\mu)/\left[\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i}{s\mu}\right)\times\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{s\mu}\right)\right] = \frac{\mu}{(\mu-\lambda_1)[\mu-(\lambda_1+\lambda_2)]} = \frac{3}{(3-0{,}2)[3-(0{,}2+0{,}6)]} = 0{,}4870$$

$$W_{q_2} = W_2 - \frac{1}{\mu} = 0{,}1537 \qquad L_2 = (\lambda_1+\lambda_2)W_2 = 0{,}3896 \qquad L_{q_2} = L_2 - \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}1229$$

$$W_3 = (1/\mu)/\left[\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i}{s\mu}\right)\times\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{s\mu}\right)\right] = \frac{\mu}{[\mu-(\lambda_1+\lambda_2)][\mu-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)]} = 1{,}3636$$

$$W_{q_3} = W_3 - \frac{1}{\mu} = 1{,}0303 \qquad L_3 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)W_3 = 2{,}7272 \qquad L_{q_3} = L_3 - \frac{\lambda}{\mu} = 2{,}0605$$

# Modelo com prioridades

## Exemplo 1 Com interrupção

**Para S=2 tem-se:**

$$P_0 = 1 \Big/ \left[ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\left({}^{\lambda}/_{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left({}^{\lambda}/_{\mu}\right)^S}{s!} \times \frac{1}{1-\lambda/(s\mu)} \right] = 0{,}9355$$

$$L_{q_1} = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} = 7{,}4156E-05 \quad L_1 = L_{q_1} + \frac{\lambda_1}{\mu} = 0{,}06674 \quad W_1 = \frac{L_1}{\lambda_1} = 0{,}33370 \quad W_{q_1} = W_1 - \frac{1}{\mu} = 0{,}000367$$

$$\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) = 1/4 \qquad \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2) = 3/4 \qquad \overline{W}_{1-2} = \frac{1}{4}W_1 + \frac{3}{4}W_2$$

Além disso, como o tempo de espera previsto é o mesmo para qualquer disciplina da fila, $\overline{W}_{1-2}$ também deve ser igual a W para o modelo M/M/s, com s=2, que resulta em $\mu = 3, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0{,}8$

$$E(W) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}E(W_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}E(W_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{1}{\mu-\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\mu}{(\mu-\lambda_1)[\mu-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$E(W) = \frac{\lambda_1}{\lambda(\mu-\lambda_1)} + \frac{\lambda_2\mu}{\lambda(\mu-\lambda_1)(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda_1(\mu-\lambda)+\lambda_2\mu}{\lambda(\mu-\lambda_1)(\mu-\lambda)} = \frac{\dfrac{\lambda_1(\mu-\lambda)+\lambda_2\mu}{\lambda(\mu-\lambda_1)}}{(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

# Modelo com prioridades

## Exemplo 1 Com interrupção

com s=2, que resulta em $\mu = 3, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0{,}8$

$$\bar{W}_{1-2} = 0{,}33937 \qquad W_2 = \left[\frac{4}{3}0{,}33937 - \frac{1}{4}(0{,}33370)\right] = 0{,}34126 \qquad W_{q_2} = W_2 - \frac{1}{\mu} = 0{,}00793$$

$$L_2 = \lambda W_2 = 0{,}8 \times 0{,}34126 = 0{,}27300 \qquad L_{q_2} = L_2 - \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}27300 - \frac{0{,}8}{3} = 0{,}00634$$

com s=2, que resulta em $\mu = 3, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$

$$\bar{W}_{1-3} = 0{,}1W_1 + 0{,}3W_2 + 0{,}6W_3 = 0{,}375 \qquad W_3 = \frac{1}{0{,}6}[0{,}375 - 0{,}1(0{,}33370) - 0{,}3(0{,}34126)] = 0{,}39875$$

$$W_{q_3} = W_3 - \frac{1}{\mu} = 0{,}06542 \qquad L_3 = \lambda W_3 = 2 \times 0{,}39875 = 0{,}79751 \qquad L_{q_3} = L - \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}79751 - \frac{2}{3} = 0{,}13084$$

# Modelo com prioridades

## Exemplo 1 Sem interrupção

**Para S=1, $\boldsymbol{\lambda_1 = 0,2}$, tem-se:**

$$W_1 = 1 \Big/ \left[ \left( s!\,\frac{s\mu - \lambda}{r^s} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{r^j}{j!} + s\mu \right) \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i}{s\mu} \right) \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{s\mu} \right) \right] + \frac{1}{\mu} = 0{,}5714$$

$$W_{q_1} = W_1 - \frac{1}{\mu} = 0,23809 \qquad L_{q_1} = L_1 - \frac{\lambda_1}{\mu} = 0{,}047619 \qquad L_1 = \lambda_1 W_1 = 0{,}11428$$

**Para S=1, $\boldsymbol{\lambda_1 = 0,6}$, tem-se:**

$$W_2 = 0{,}65800 \qquad W_{q_2} = W_2 - \frac{1}{\mu} = 0{,}32467 \qquad L_2 = \lambda_2 W_2 = 0{,}39480 \qquad L_{q_2} = L_2 - \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}19480$$

**Para S=1, $\boldsymbol{\lambda_1 = 1,2}$, tem-se:**

$$W_3 = 1{,}24242 \qquad W_{q_3} = W_3 - \frac{1}{\mu} = 0{,}90909 \qquad L_3 = \lambda_3 W_3 = 1{,}4909 \qquad L_{q_3} = L_3 - \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}0909$$

# Modelo com prioridades

## Exemplo 1 Sem interrupção

**Para S=2, $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{0,2}$, tem-se:**

$$W_1 = 1 \Big/ \left[ \left( s! \frac{s\mu - \lambda}{r^s} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{r^j}{j!} + s\mu \right) \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i}{s\mu} \right) \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{s\mu} \right) \right] + \frac{1}{\mu} = 0{,}36207$$

$$W_{q_1} = W_1 - \frac{1}{\mu} = 0{,}02874 \qquad L_{q_1} = L_1 - \frac{\lambda_1}{\mu} = 0{,}00574 \qquad L_1 = \lambda_1 W_1 = 0{,}07241$$

**Para S=2, $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{0,6}$, tem-se:**

$$W_2 = 0{,}36649 \qquad W_{q_2} = W_2 - \frac{1}{\mu} = 0{,}03316 \qquad L_2 = \lambda_2 W_2 = 0{,}21989 \qquad L_{q_2} = L_2 - \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}01989$$

**Para S=2, $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{1,2}$, tem-se:**

$$W_3 = 0{,}38141 \qquad W_{q_3} = W_3 - \frac{1}{\mu} = 0{,}04808 \qquad L_3 = \lambda_3 W_3 = 0{,}45769 \qquad L_{q_3} = L_3 - \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}05769$$

## Exemplo 2

Uma máquina processa dois tipos de produtos 1 e 2. Para processar uma unidade do produto 1, a máquina consome em média 3 minutos (isto é, 1/20 hora por produto), com variância de 2 minutos² (isto é, 1/1.800 hora²), e para processar uma unidade do produto 2, ela leva em média 4 minutos (1/15 hora por produto), também com variância de 2 minutos² (1/1.800 hora²). Se os processos de chegada dos produtos 1 e 2 têm distribuição de Poisson, com taxas de dez unidades do produto 1 por hora e cinco unidades do produto 2 por hora, respectivamente, e a disciplina de fila for SPT (Menor Tempo de Processamento), determine o tempo médio de permanência de cada produto no sistema.

Note que $\lambda_1 = 10$ unidades por hora, $\lambda_2 = 5$ unidades por hora, $\mu_1 = 20$ unidades por hora $\left(E(S_1) = \frac{1}{20}\,hora\right)$, $\mu_2 = 15$ unidades por hora $\left(E(S_2) = \frac{1}{15}\,hora\right)$, $V(S_1) = V(S_2) = 1/1.800\ hora^2$. Logo, $\rho_1 = 10/20 = 0{,}5\ e\ \rho_2 = 5/15 \approx 0{,}33$. Como a disciplina de fila é SPT, o produto 1 tem prioridade de processamento sobre o produto 2.

Dado que $\rho_1 + \rho_2 < 1$, o sistema atinge um equilíbrio com ambos os produtos. Segue-se que o tempo médio de espera em fila de cada produto é:

# Modelo com prioridades

## Exemplo 2

$$E(W_{q_1}) = \frac{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i (V(S_i) + E(S_i)^2)}{2(1 - \sum_{1=1}^{1-1} \rho_1)(1 - \sum_{i=1}^{1} \rho_1)} = \frac{10\left(\frac{1}{1800} + \frac{1}{20^2}\right) + \left(\frac{1}{1800} + \frac{1}{15^2}\right)}{2(1-0)(1-0{,}5)} \approx 0{,}06\ hora$$

$$E(W_{q_2}) = \frac{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i (V(S_i) + E(S_i)^2)}{2(1 - \sum_{1=1}^{2-1} \rho_1)(1 - \sum_{i=1}^{2} \rho_1} = \frac{10\left(\frac{1}{1800} + \frac{1}{20^2}\right) + \left(\frac{1}{1800} + \frac{1}{15^2}\right)}{2(1-0{,}5)(1-0{,}88)} \approx 0{,}33\ hora$$

Logo:

$$E(W_1) = E(S_1) + E(W_{q_1}) = \frac{1}{20} + 0{,}06 \approx 0{,}11 \text{ hora} \qquad L_1 = 10 \times 0{,}11 \approx 1{,}1 \qquad L_{q_1} = 1{,}1 - \frac{10}{20} \approx 1{,}10$$

$$E(W_2) = E(S_2) + E(W_{q_2}) = \frac{1}{15} + 0{,}33 \approx 0{,}40 \text{ hora} \qquad L_2 = 5 \times 0{,}4 \approx 2 \qquad L_{q_2} = 2 - \frac{5}{15} \approx 1{,}67$$

# Modelo com prioridades

## Exemplo 3

Uma delegacia policial classifica as chamadas em dois tipos: emergenciais (tipo 1) e não emergenciais (tipo 2). As chamadas do tipo 1 têm prioridade (sem interrupção) sobre as chamadas do tipo 2. Os intervalos de tempo entre chegadas das chamadas de cada tipo são exponenciais, com taxas $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 20$ chamadas por hora, respectivamente. A delegacia tem S = 5 viaturas para atender as chamadas e os tempos de serviço de cada viatura (tempo de viagem e tempo de atendimento no local da chamada) também são exponenciais, com taxas μ = 7,5 chamadas por hora. Determine os tempos médios de espera em fila das chamadas de cada tipo. ( $W_{q_1} = 0{,}0201\ hora\ e\ W_{q_2} = 0{,}1007\ hora$)

# Referencial Bibliográfico


- Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman; Introdução à Pesquisa Operacional; 9ª Edição, Editora Mc Graw Hill; 2013.

- Marcos Arenales, Vinícius Armentano, Reinaldo Morabito, HoracioYanasse; Pesquisa Operacional; 6ª Edição, Editora Campus, 2007.

- Eduardo L. de Andrade, Introdução a Pesquisa Operacional; 4ª Edição; Editora LTC; 2009.

- Wagner, H.M., Pesquisa Operacional, 2a edição. Prentice-Hall do Brasil, 1986.

- Taha, H. A., Pesquisa Operacional, 8a edição. Pearson (Prentice-Hall), 2008

# Sobre a disciplina

**Dúvidas?**

Obrigado!