Otimização II

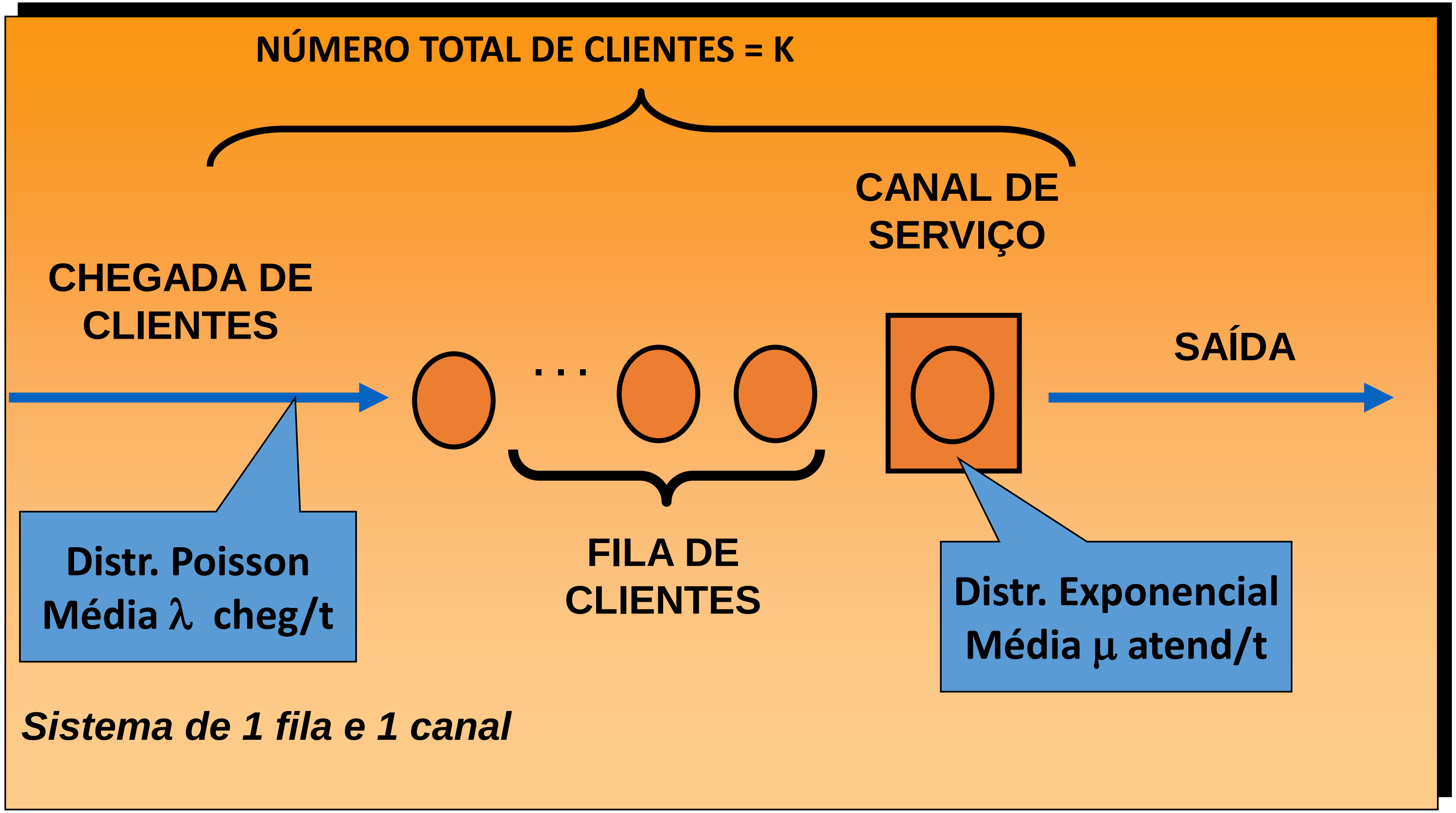
Prof. Dr. Paulo Roberto Maia
Paulo.maia@inatel.br

P108 – Otimização II

Agenda

- Modelo M/M/1
- Modelo M/M/s>1
- Modelo M/M/1/K
- Modelo M/M/s>1/K
- Modelo M/M/1/N
- Modelo M/M/s>1/N

Modelo M/M/1/K


NÚMERO TOTAL DE CLIENTES = K
CANAL DE SERVIÇO
CHEGADA DE CLIENTES
SAÍDA
. . .
Distr. Poisson
Média λ cheg/t
FILA DE CLIENTES
Distr. Exponencial
Média μ atend/t
Sistema de 1 fila e 1 canal

Modelo M/M/1/K

Características gerais

- ✓ Chegadas: ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com média λ chegadas/tempo.
- ✓ Tempos de atendimento: seguem a distribuição exponencial com média $1/\mu$.
- ✓ Número de atendimentos: segue a distribuição de Poisson com média μ;
- ✓ O atendimento à fila é feito pela ordem de chegada.
- ✓ Número finito de clientes igual a K.

Modelo M/M/1/K

Equações básicas do modelo

Probabilidade de haver 0 cliente no sistema

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \qquad \rho = {}^{\lambda}/_{\mu}$$

Probabilidade de haver n clientes no sistema

$$P_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n, \qquad para\, n = 1, 2, \dots, K$$

Modelo M/M/1/K

Medidas de efetividade

Número médio de clientes na fila: $L_q = L - (1 - P_0)$

Tempo médio de espera na fila: $W_q = \dfrac{L_q}{\bar{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_k)$

Número médio de clientes no sistema: $L = \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$

Tempo médio gasto no sistema: $W = \dfrac{L}{\bar{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_k)$

Modelo M/M/1/K

Exemplo 1

Clientes chegam a uma pequena agência bancária segunda um processo de Poisson com taxa de λ= 0,3 clientes por minuto. O atendimento é prestado por um único servidor, na ordem de chegada, em um tempo com média igual a 2 minutos, o sistema tem uma capacidade K = 2. Determine:

a) A probabilidade de o sistema estar vazio.
b) O número médio de clientes no sistema.
c) O número médio de clientes na fila.
d) A probabilidade de existir dois clientes no sistema.
e) O tempo médio de espera na fila.
f) O tempo médio de permanência no sistema.

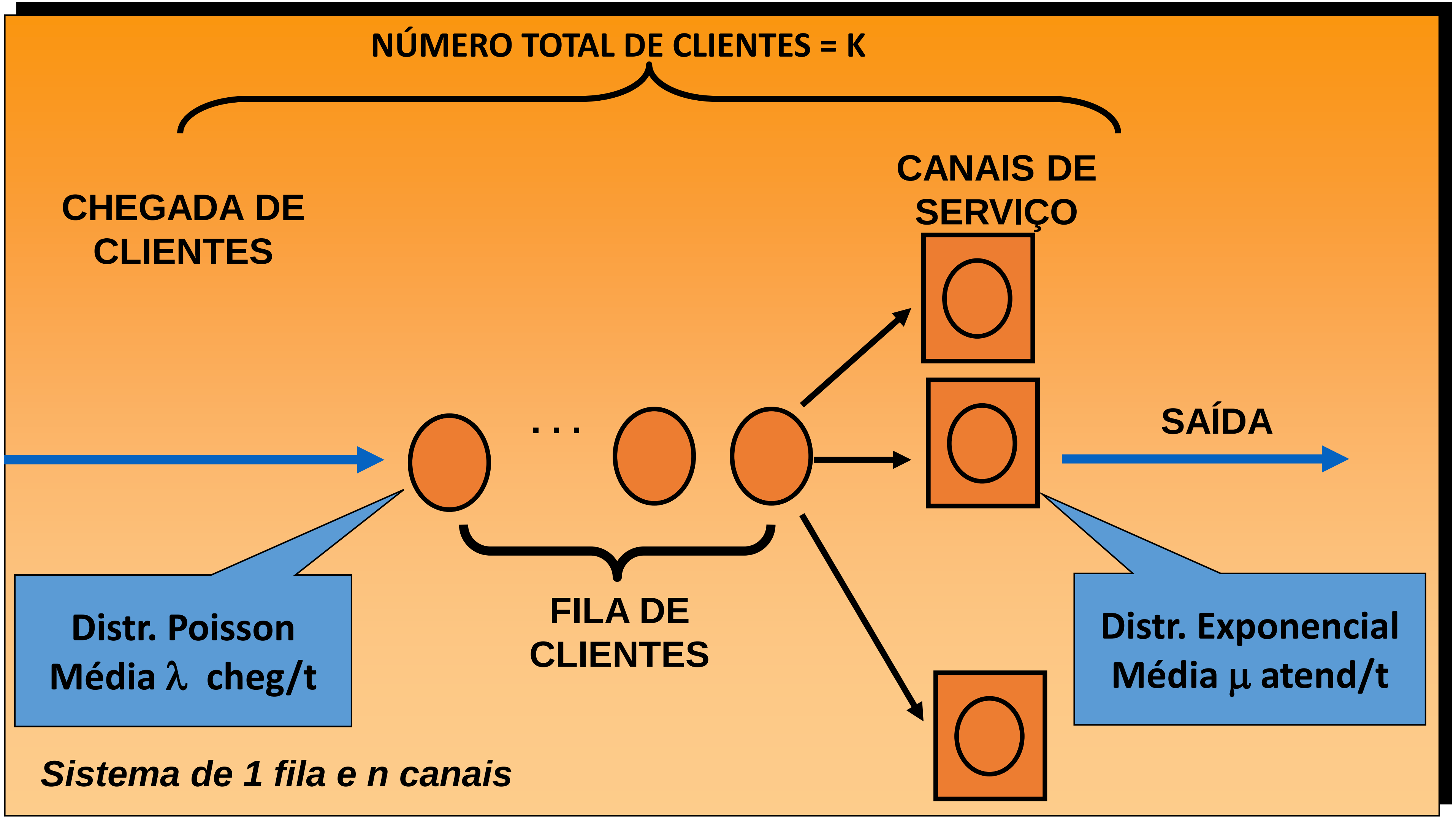
Modelo M/M/1/K

Exemplo 2

Clientes chegam a uma pequena agência bancária segunda um processo de Poisson com taxa de λ= 3 clientes por minuto. O atendimento é prestado por um único servidor, na ordem de chegada, em um tempo com média igual a 0,25 minutos. O sistema acima tem uma capacidade k = 5. Determine:

a) A probabilidade de o sistema estar vazio. (0,3041)
b) O número médio de clientes no sistema. (1,7009)
c) O número médio de clientes na fila. (1,005)
d) A probabilidade de existir 4 clientes no sistema. (0,09623)
e) O tempo médio de permanência no sistema.(0,6111)
f) O tempo médio de espera na fila. (0,3611)

Modelo M/M/s>1/K



Modelo M/M/s>1/K

Características gerais

- ✓ Chegadas: ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com média λ chegadas/tempo.
- ✓ Tempos de atendimento: seguem a distribuição exponencial com média $1/\mu$.
- ✓ Número de atendimentos: segue a distribuição de Poisson com média μ;
- ✓ O atendimento à fila é feito pela ordem de chegada.
- ✓ Número de canais de serviço: S
- ✓ Número finito de cientes igual a K.

Modelo M/M/s>1/K

Equações básicas do modelo

Probabilidade de haver 0 cliente no sistema

$$P_0 = 1\Bigg/\left[\sum_{n=0}^{s}\frac{\left(\lambda/_{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\lambda/_{\mu}\right)^s}{s!} \times \sum_{n=s+1}^{K}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\right] \qquad \rho = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)$$

Probabilidade de haver n clientes no sistema:

$n \leq S$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \times P_0$$

$s \leq n \leq K$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!\, s^{n-s}} \times P_0$$

$n > K$

$$P_n = 0$$

Modelo M/M/s>1/K

Medidas de efetividade

Número médio de clientes na fila: $L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{K-s}-(K-s)\rho^{K-s}(1-\rho)\right]$

Tempo médio de espera na fila: $W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1-P_k)$

Número médio de clientes no sistema: $L = \sum_{n=0}^{s-1} nPn + L_q + s\left(1-\sum_{n=0}^{s-1} Pn\right)$

Tempo médio gasto no sistema: $W = \frac{L}{\bar{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1-P_k)$

Modelo M/M/s>1/K

Exemplo 1

Suponha que o serviço de atendimento ao cliente (SAC) de uma empresa atualmente é realizado por 1 atendente. As chamadas dos clientes ocorrem aleatoriamente a uma taxa de 5 por hora, de acordo com uma distribuição de Poisson. O atendente pode atender às chamadas a uma taxa média de 7 por hora, segundo uma distribuição exponencial. O SAC pode manter no máximo de 4 ligações em espera em qualquer momento. Assim, se uma nova chamada for efetuada quando o sistema de atendimento já está com 5 ligações em espera, a nova chamada recebe um sinal de ocupado.

Uma maneira de reduzir o número de chamadas que recebem o sinal de ocupado é aumentar o número de chamadas que podem ser colocadas em espera. Contudo, se uma chamada for atendida apenas para aguardar longamente por atendimento, a pessoa que chamou pode achar essa situação pior do que receber o sinal de ocupado. Em função desse cenário, o presidente da empresa deseja investigar qual o efeito da adição de um segundo atendente no número de chamadas que recebem o sinal de ocupado e no tempo médio que os clientes devem esperar para serem atendidos. Calcule W, Wq, L, Lq e P_5, para 1 e 2 atendentes.

Modelo M/M/s>1/K

Exemplo 2

Considere uma estação de inspeção de emissão de gases poluentes de automóveis com três boxes de inspeção, onde cada boxe tem capacidade para apenas um carro. É razoável assumir que carros esperam de tal maneira que quando um boxe se torna livre, o carro no início da fila entra no boxe. A estação pode acomodar quatro carros esperando (sete na estação) a cada tempo. O padrão é Poisson com uma média de um carro a cada minuto durante os períodos de pico. O tempo de serviço é exponencial com média de 6 minutos. I. M. Fussy, o inspetor chefe, deseja saber:

a) A probabilidade de o sistema estar vazio. (0,00088)

b) O número médio de carros no sistema. (6,0631)

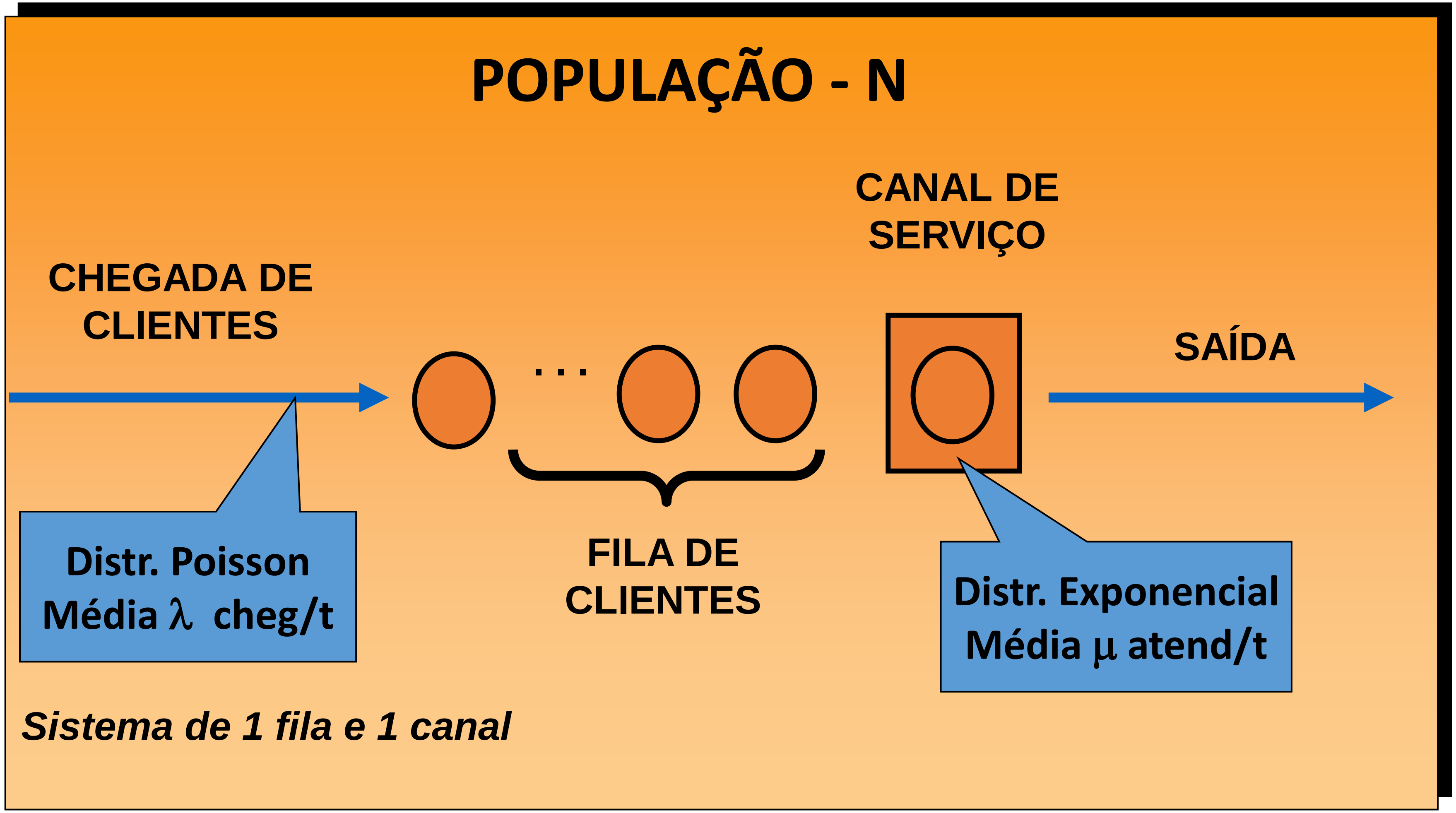
c) O número médio de carros na fila. (3,0920)

d) O tempo médio de permanência no sistema.(12,2442)

e) O tempo médio de espera na fila. (6,2439)

f) O número esperado de carros por hora que não podem entrar na estação devido a lotação máxima ser atingida. (30,29)

Modelo M/M/1 com população finita



Modelo M/M/1 com população finita

Equações básicas do modelo

Probabilidade de haver 0 cliente no sistema

$$P_0 = 1 \Bigg/ \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] \qquad \rho = \left(\frac{N\lambda}{\mu} \right)$$

Probabilidade de haver n clientes no sistema

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \times P_0 \quad se\ n = 1, 2, \ldots, N$$

Modelo M/M/1 com população finita

Medidas de efetividade

Número médio de clientes na fila: $L_q = N - \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)(1 - P_0)$

Tempo médio de espera na fila: $W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \bar{\lambda} = \lambda(\mathrm{N} - L)$

Número médio de clientes no sistema: $L = N - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0)$

Tempo médio gasto no sistema: $W = \frac{L}{\bar{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \bar{\lambda} = \lambda(\mathrm{N} - L)$

Modelo M/M/1 com população finita

Exemplo 1

Uma empresa fabricante de tecidos, possui 10 máquinas idênticas que são utilizadas na fabricação de fios coloridos. A quebra dessas máquinas ocorrem segundo uma distribuição de Poisson, com média de 0,01 quebra por hora de operação. A empresa perde $100 para cada hora que uma máquina está inoperante.

Existe um técnico responsável pelo conserto das máquinas. O tempo de conserto das máquinas é exponencialmente distribuído com uma média de 8 horas por conserto. Dessa forma, consertos são realizados a uma taxa de 1/8 máquina por hora.

Considerando que cada técnico custa $20 por hora, a alta gerência da empresa quer analisar o impacto da adição de outro técnico, no tempo médio necessário para consertar uma máquina.

Calcule as características operacionais, L, Lq, W e Wq para um técnico.

Modelo M/M/1 com população finita

Exemplo 2

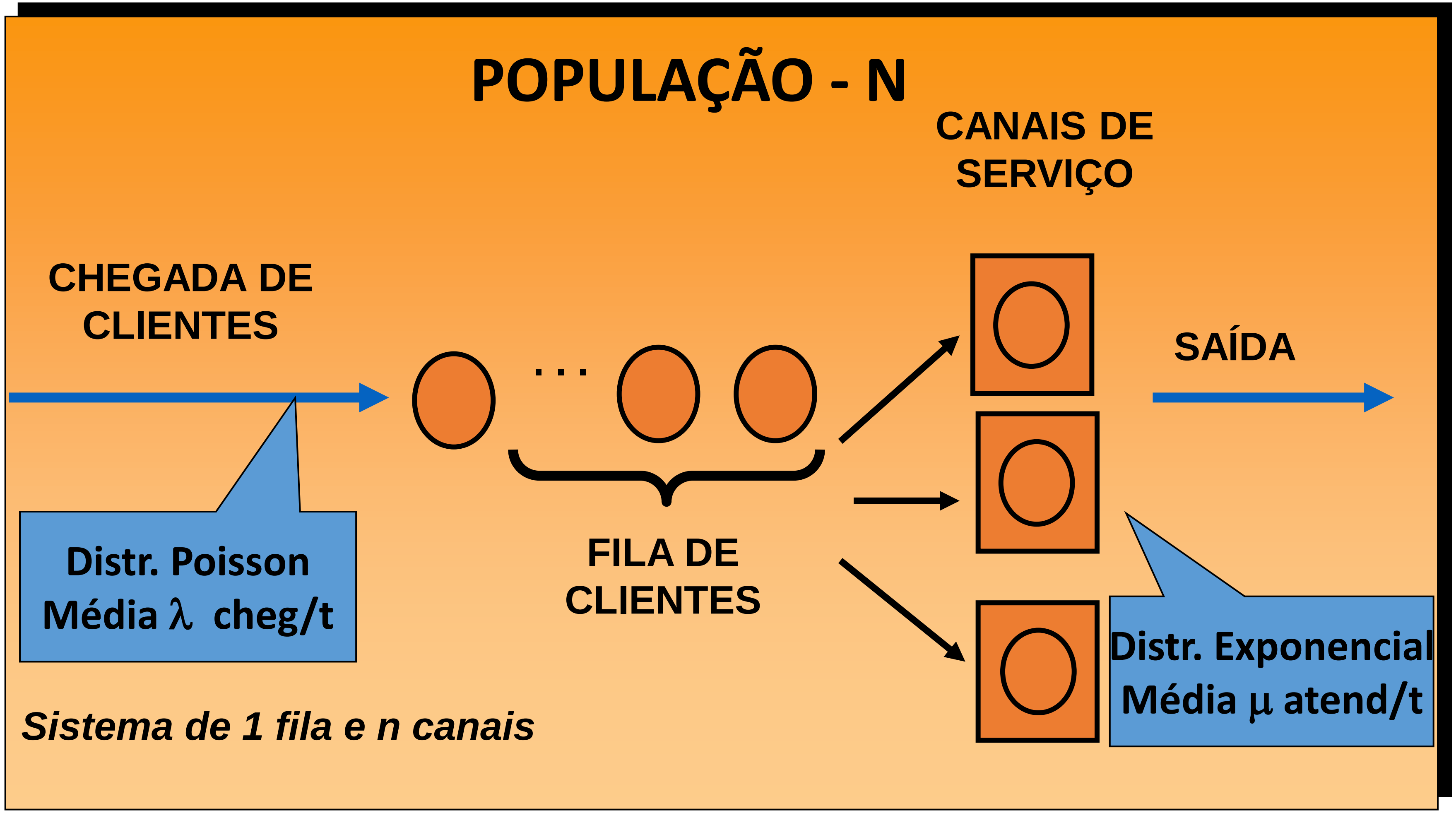
Uma fábrica de semicondutores utiliza cinco robôs na fabricação de placas de circuito. Os robôs quebram periodicamente, e a companhia possui um técnico para consertá-los. Quando um é consertado, o tempo até a próxima quebra é pensado ser exponencialmente distribuído com uma média de 30h. A fábrica tem um backlog de encomendas, garantindo que todos os robôs em condições operacionais estarão trabalhando. O tempo de reparo para cada serviço é exponencialmente distribuído com uma média de 3h. O gerente da fábrica deseja saber:

a) o número de robôs operacionais a qualquer hora. (4,360 robôs)

b) o tempo parado de cada robô que necessita de reparo. (4,400 h)

c) a porcentagem de tempo ocioso de cada técnico. (0,5640)

Modelo M/M/s>1 com população finita



Modelo M/M/s>1 com população finita

Equações básicas do modelo

Probabilidade de haver 0 cliente no sistema

$$P_0 = 1 \Big/ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{N!}{(N-n)!\,n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,s!\,s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] \qquad \rho = \left(\frac{N\lambda}{s\mu}\right)$$

Probabilidade de haver n clientes no sistema

$n \leq S$

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!\,n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times P_0$$

$s \leq n \leq N$

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!\,s!\,s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times P_0$$

$n > N$

$$P_n = 0$$

Modelo M/M/s>1 com população finita

Medidas de efetividade

Número médio de clientes na fila: $L_q = L - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(N - L)$

Tempo médio de espera na fila: $W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \bar{\lambda} = \lambda(\mathrm{N} - L)$

Número médio de clientes no sistema: $L = \sum_{n=1}^{N} nP_n$

Tempo médio gasto no sistema: $W = \frac{L}{\bar{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \bar{\lambda} = \lambda(\mathrm{N} - L)$

Modelo M/M/s>1 com população finita

Exemplo 1

Uma empresa fabricante de tecidos, possui 10 máquinas idênticas que são utilizadas na fabricação de fios coloridos. A quebra dessas máquinas ocorrem segundo uma distribuição de Poisson, com média de 0,01 quebra por hora de operação. A empresa perde $100 para cada hora que uma máquina está inoperante.

Existe um técnico responsável pelo conserto das máquinas. O tempo de conserto das máquinas é exponencialmente distribuído com uma média de 8 horas por conserto. Dessa forma, consertos são realizados a uma taxa de 1/8 máquina por hora.

Considerando que cada técnico custa $20 por hora, a alta gerência da empresa quer analisar o impacto da adição de outro técnico, no tempo médio necessário para consertar uma máquina.

Calcule as características operacionais, L, Lq, W e Wq para 2 técnicos.

Modelo M/M/s>1 com população finita

Exemplo 2

Uma fábrica de semicondutores utiliza cinco robôs na fabricação de placas de circuito. Os robôs quebram periodicamente, e a companhia possui dois técnicos para consertá-los. Quando um é consertad, o tempo até a próxima quebra é pensado ser exponencialmente distribuído com uma média de 30h. A fábrica tem um backlog de encomendas, garantindo que todos os robôs em condições operacionais estarão trabalhando. O tempo de reparo para cada serviço é exponencialmente distribuído com uma média de 3h. O gerente da fábrica deseja saber:

a) o número de robôs operacionais a qualquer hora. (4,535 robôs)

b) o tempo parado de cada robô que necessita de reparo. (3,075 h)

c) a porcentagem de tempo ocioso de cada técnico. (0,9279)

Referencial Bibliográfico

- Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman; Introdução à Pesquisa Operacional; 9ª Edição, Editora Mc Graw Hill; 2013.

- Marcos Arenales, Vinícius Armentano, Reinaldo Morabito, HoracioYanasse; Pesquisa Operacional; 6ª Edição, Editora Campus, 2007.

- Eduardo L. de Andrade, Introdução a Pesquisa Operacional; 4ª Edição; Editora LTC; 2009.

- Wagner, H.M., Pesquisa Operacional, 2a edição. Prentice-Hall do Brasil, 1986.

- Taha, H. A., Pesquisa Operacional, 8a edição. Pearson (Prentice-Hall), 2008

Sobre a disciplina

Dúvidas?

Obrigado!