Ecuación de Fredmann

Optional Subtitle

B. I. Tapia Benavides[1]

[1]Facultad de Ciencias
Astrofísica Extragalactica y Cosmología

Cosmología, 2016

Outline

1. Métrica FRWL
   - Obtener la métrica.
2. Ecuaciones de campo de Einstein
   - Forma de la ecuación
3. Aplicar la métrica FRWL a las ecuaciones de campo
   - Obtener los simbolos de Cristoffel
   - Obtener el tensor de Ricci y el escalar de Ricci
   - Tensor de energía momento
4. Ecuaciones de Friedmann
   - Parte temporal
   - Parte espacial
   - Las ecuaciones

Outline

1. Métrica FRWL
   - Obtener la métrica.
2. Ecuaciones de campo de Einstein
   - Forma de la ecuación
3. Aplicar la métrica FRWL a las ecuaciones de campo
   - Obtener los simbolos de Cristoffel
   - Obtener el tensor de Ricci y el escalar de Ricci
   - Tensor de energía momento
4. Ecuaciones de Friedmann
   - Parte temporal
   - Parte espacial
   - Las ecuaciones

- El elemento de línea tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\right) \qquad (1)$$

Donde $a(t)$ es el factor de escala, κ es una constante $\kappa = -1, 0, 1$, r es tal que $0 \leq r \leq 1$, r, θ, ϕ coordenadas comoviles espaciales, y t el tiempo

- La métrica tiene la forma siguiente:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Es decir $g_{00} = 1$, $g_{rr} = \frac{-a^2}{1-\kappa r^2}$, $g_{\theta\theta} = -a^2 r^2$, $g_{\phi\phi} = -a^2 r^2 sin^2\theta$, $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$

- Considerando un universo isotrópico y homogéneo, y tomando el elemento de línea como $ds^2 = dt^2 + dl^2$, con la parte espacial tal que $dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$.
- Tenemos que dl^2 en coordenadas cartesianas y polares para un circulo, tiene la forma: $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$

Outline

Las ecuaciones de campo de Enstein

- Las ecuaciones de campo de Einstein tienen la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3}$$

  Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energa momento
- Se trata de 10 ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas. Donde la parte derecha representa la materia y la izquierda la geometría.

- El tensor de Ricci esta dado por

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\kappa\nu} \tag{4}$$

Donde $R_{\lambda\mu\kappa\nu}$ es el tensor de Riemann, dado por:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} \tag{5}$$

El símbolo de Cristoffel $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ esta dado por la conección afin

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \tag{6}$$

- El escalar de Ricci esta dado por la métrica y el tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \tag{7}$$

Outline

Símbolos de Cristoffel

- A partir de la métrica FRWL se calculan los símbolos de Cristoffel

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \tag{8}$$

- Hacemos $\lambda = 0$, luego $\alpha = 0$

$$\Gamma^{0}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{0\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) = \frac{1}{2} g^{00}(g_{0\mu,\nu} + g_{0\nu,\mu} - g_{\mu\nu,0}) \tag{9}$$

$$\Gamma^{0}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu,0} \tag{10}$$

$\mu = 0$ entonces

$$\Gamma^{0}_{0\nu} = \Gamma^{0}_{\nu 0} = -\frac{1}{2} g_{0\nu,0} = 0 \tag{11}$$

$\mu = i$ entonces $\Gamma^{0}_{i\nu} = -\frac{1}{2} g_{i\nu,0}$, hacemos $\nu = 0$ y $\nu = j$

$$\Gamma^{0}_{i0} = 0 \tag{12}$$

$$\Gamma^{0}_{ij} = -\frac{1}{2} g_{ij,0} = -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \tag{13}$$

Símbolos de Cristoffel

- Hacemos $\lambda = i$, luego $\alpha = i$

$$\Gamma^{i}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{i\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) = \frac{1}{2} g^{ii}(g_{i\mu,\nu} + g_{i\nu,\mu} - g_{\mu\nu,i}) \quad (14)$$

- Con $\mu = 0$

$$\Gamma^{i}_{0\nu} = \frac{1}{2} g^{ii}(g_{i0,\nu} + g_{i\nu,0} - g_{0\nu,i}) \quad (15)$$

$$\Gamma^{i}_{0\nu} = \frac{1}{2} g^{ii} g_{i\nu,0} \quad (16)$$

Si $\nu = 0$ entonces

$$\Gamma^{i}_{00} = 0 \quad (17)$$

Si $\nu = j$ entonces

$$\Gamma^{i}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^{i}_{j} \quad (18)$$

Finalmente los símbolos de Cristoffel son:

$$\Gamma^0_{0\nu} = \Gamma^0_{\nu 0} = 0 \tag{19}$$

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = 0 \tag{20}$$

$$\Gamma^i_{00} = 0 \tag{21}$$

$$\Gamma^0_{ij} = -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \tag{22}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j \tag{23}$$

Outline

Escalar de Ricci y tensores de Riemann y Ricci

- Calculamos el tensor de Ricci $R_\nu\beta = R^{\mu}_{\nu\mu\beta}$, con $\nu = \beta = 0$, tenemos

$$R_{00} = \Gamma^{\mu}_{00,\mu} - \Gamma^{\mu}_{0\mu,o} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{00} - \Gamma^{\mu}_{\sigma 0}\Gamma^{\sigma}_{\mu 0} \tag{24}$$

obtenemos

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{25}$$

- Calculamos el tensor de Ricci $R_{\nu\beta} = R^{\mu}_{\nu\mu\beta}$, con $\nu = i$ y $\beta = j$, tenemos

$$R_{ij} = \Gamma^{\mu}_{ij,\mu} - \Gamma^{\mu}_{i\mu,j} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{ij} - \Gamma^{\mu}_{\sigma j}\Gamma^{\sigma}_{\mu i} \tag{26}$$

obtenemos

$$R_{ij} = -3(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2})g_{ij} \tag{27}$$

- Calculamos el escalar de Ricci $R = R_{\nu\beta}g^{\nu\beta}$, tenemos

$$R = R_{\nu\beta}g^{\nu\beta} = R_{00}g^{00} + R_{ij}g^{ij} \tag{28}$$

obtenemos

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2}\right) \tag{29}$$

Outline

- El tensor de energía-Momento esta dado por

$$T^{\mu}_{\nu} = diag(\rho, -P, -P, -P) \tag{30}$$

Donde ρ es la densidad de energía y P la presión. Con $T^0_0 = \rho$ y $T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -P$

Outline

Parte temporal en las ecuaciones de campo
Optional Subtitle

- Sustitumos los valores obtenidos del tensor de Ricci y el escalar de Ricci para la parte temporal, 00, en las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 8\pi G T_{00} \tag{31}$$

$$-3\frac{\dot{a}}{a} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2}\right) = 8\pi G \rho \tag{32}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{33}$$

Outline

Parte espacial en las ecuaciones de campo

Optional Subtitle

- Sustitumos los valores obtenidos del tensor de Ricci y el escalar de Ricci para la parte espacial, ij, en las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 8\pi G T_{ij} \tag{34}$$

Obtenemos

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} = -8\pi G P \tag{35}$$

Outline

La forma final de las ecuaciones de Friedmann

Optional Subtitle

- Las ecuaciones de Firedmann son:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} \tag{36}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} = -8\pi GP \tag{37}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \tag{38}$$

$$\rho = -3H(\rho + P) \tag{39}$$