COMPUTACIÓN II — CURSO 2019

PRÁCTICA 13: Integración, cálculo del periodo de oscilación de un péndulo físico.

El periodo de oscilación de un péndulo físico viene dado por la siguiente expresión:

$$T = \frac{2T'}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{\left(1-k^2 sen^2(\phi)\right)}} \qquad \text{donde } 0 < k = sen\left(\frac{\theta_m}{2}\right) < 1 \text{, y } T' = \frac{2\pi}{\omega}.$$

- Realizar un programa que calcule *T/T´* en función de θ_m, variando θ_m entre 0 y 150º con saltos de 5º, utilizando:

(a) la cuadratura gaussiana de 5 puntos

Fórmula de cinco puntos

$n = 4$

0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
±0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
±0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189

(b) la regla trapezoidal y de Simpson con 4 intervalos.

(c) la regla trapezoidal y de Simpson con 50 intervalos.

- Grabar los resultados en un fichero para comparar resultados.
- Representar gráficamente los resultados: *T/T´* frente a θ_m.
- Discutir los resultados.

Anexo analítico: La ecuación del movimiento de un péndulo físico es, $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 sen(\theta) = 0$, en donde $\omega^2 = \frac{mgd}{I}$, *d* es la distancia entre el eje fijo alrededor del cual oscila el péndulo y el centro de masas, e *I* es el momento de inercia alrededor del eje de oscilación. Podemos calcular el periodo *T* a partir del principio de conservación de la energía sin necesidad de calcular los detalles del movimiento. Si consideramos que el potencial gravitatorio es cero en la altura del punto de suspensión, tendremos

$$K + U = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgd\cos(\theta) = E_0 = -mgd\cos(\theta_m)$$

en donde $E_0 = \frac{1}{2} I\omega_0^2 - mgd\cos(\theta_0)$ es una constante determinada por las condiciones iniciales y θ_m es el desplazamiento angular máximo. Reordenando la ecuación anterior podemos obtener:

$$dt = \pm\sqrt{\frac{I}{2mgd}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_m)}} \Rightarrow t = \int_0^t dt = \pm\sqrt{\frac{I}{2mgd}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_m)}}$$

Para obtener T necesitaríamos considerar únicamente el tiempo de un cuarto de oscilación, empezando la misma en θ_0=0 e integrando hasta $\theta = \theta_m$.

De esta forma la expresión integral para T es $T = 4\sqrt{\frac{I}{2mgd}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_m)}}$, suponiendo $\theta_m < \pi$.

Esta integral es impropia, pero se puede transformar en una integral no impropia utilizando las identidades trigonométricas de los ángulos mitad:

$$sen(\phi) = \frac{sen(\theta/2)}{sen(\theta_m/2)} \cos(\phi) = \sqrt{\frac{\cos(\theta) - \cos(\theta_m)}{2sen^2(\theta_m/2)}}$$

para obtener: $\boxed{T = \frac{2T'}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - k^2 sen^2(\phi))}} \text{, en donde } 0 < k = sen\left(\frac{\theta_m}{2}\right) < 1 \text{, y } T' = \frac{2\pi}{\omega}.}$

Esta integral es una ***integral elíptica de primera clase*** y se encuentra tabulada en libros de tablas.