EJEMPLO 3 Muestra que las proposiciones $p \rightarrow q$ y $\neg p \vee q$ son lógicamente equivalentes.

Solución: Construimos las tablas de verdad para estas fórmulas en la Tabla 3. Como los valores de verdad de las proposiciones $\neg p \vee q$ y $p \rightarrow q$ concuerdan, estas proposiciones son lógicamente equivalentes. ◀

EJEMPLO 4 Muestra que las proposiciones $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ son lógicamente equivalentes. Es la *ley distributiva* de la disyunción sobre la conjunción.

Solución: Construimos las tablas de verdad para estas fórmulas en la Tabla 4. Como los valores de verdad de las proposiciones $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ concuerdan, estas fórmulas son lógicamente equivalentes. ◀

Observación: Una tabla de verdad para una fórmula dependiente de tres proposiciones diferentes requiere ocho filas, una para cada posible combinación de los valores de verdad de las tres proposiciones. En general, se requieren 2^n filas si una fórmula depende de n proposiciones.

La Tabla 5 contiene algunas equivalencias importantes*. En estas equivalencias, **V** denota cualquier proposición que es siempre verdadera y **F** denota cualquier proposición que es siempre falsa. Mostramos también algunas equivalencias útiles para fórmulas que involucran implicaciones y dobles implicaciones en las Tablas 6 y 7, respectivamente. En los problemas al final de la sección se pide al lector que verifique las equivalencias de las Tablas 5-7.

La ley asociativa para la disyunción muestra que la expresión $p \vee q \vee r$ está bien definida en el sentido de que no importa si tomamos primero la disyunción de p y q y luego la disyunción de $p \vee q$ con r, o si primero tomamos la disyunción de q y r y luego la disyunción de p y $q \vee r$. De forma similar, la expresión $p \wedge q \wedge r$ está bien definida. Extendiendo este razonamiento, se sigue que $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n$ y $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ están bien definidas siempre que $p_1, p_2, ..., p_n$ sean proposiciones. Además, ten en cuenta que las leyes de De Morgan se generalizan a

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge ... \wedge \neg p_n)$$

y

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee ... \vee \neg p_n).$$

(Los métodos para demostrar estas identidades se verán en la Sección 3.3).

Las equivalencias lógicas de la Tabla 5, así como cualquier otra que se haya establecido (como las mostradas en las Tablas 6 y 7), se pueden usar para construir equivalencias lógicas adicionales. Ello se debe a que una proposición en una fórmula se puede sustituir por otra que sea lógicamente equivalente sin alterar el valor de verdad de la fórmula. Esta técnica se ilustra en los Ejemplos 5 y 6, donde también se utiliza el hecho de que si p y q son lógicamente equivalentes y q y r también, entonces p y r son lógicamente equivalentes (véase el Problema 50).

Ejemplos adicionales

Tabla 4. Una demostración de que $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ son lógicamente equivalentes.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

* Estas identidades son un caso especial de las identidades que se dan en cualquier álgebra de Boole. Compáralas con el conjunto de identidades de la Tabla 1 de la Sección 1.7 y con las identidades booleanas de la Tabla 5 de la Sección 10.1.