EJEMPLO 15 ¿Cuáles son las negaciones de los enunciados «Hay un político honesto» y «Todos los estadounidenses comen hamburguesas»?

Solución: Denotemos como $H(x)$ a «x es honesto». La sentencia «Hay un político honesto» se representa por $\exists x\, H(x)$, donde el dominio consiste en todos los políticos. La negación de la sentencia es $\neg\exists x\, H(x)$, lo que equivale a $\forall x\, \neg H(x)$. Esta negación se puede expresar como «Todo político es deshonesto». (*Nota:* En lenguaje natural, la frase «Los políticos son deshonestos» puede ser ambigua. A veces, esta frase se utiliza para expresar que «No todos los políticos son honestos». Por eso no utilizamos esta frase para expresar la negación).

Ejemplos adicionales

Sea $C(x)$ el enunciado «x como hamburguesas». Entonces, «Todos los estadounidenses comen hamburguesas» se representa por $\forall x\, C(x)$, donde el dominio consiste en todos los estadounidenses. La negación de esta sentencia es $\neg\forall x\, C(x)$, que es equivalente a $\exists x\, \neg C(x)$. Esta negación se puede expresar de muchas maneras, entre las que se incluyen «Algunos estadounidenses no comen hamburguesas» y «Hay algún estadounidense que no come hamburguesas». ◀

EJEMPLO 16 ¿Cuáles son las negaciones de las sentencias $\forall x\, (x^2 > x)$ y $\exists x\, (x^2 = 2)$?

Solución: La negación de $\forall x\, (x^2 > x)$ es la sentencia $\neg\forall x\, (x^2 > x)$, que es equivalente a $\exists x\, \neg(x^2 > x)$. Esto se puede reescribir de la forma $\exists x\, (x^2 \leq x)$. La negación de $\exists x\, (x^2 = 2)$ es $\neg\exists x\, (x^2 = 2)$, equivalente a $\forall x\, \neg(x^2 = 2)$. La expresión anterior se puede reescribir como $\forall x\, (x^2 \neq 2)$. Los valores de verdad de estas sentencias dependen del dominio. ◀

TRADUCCIÓN DE ORACIONES EN LENGUAJE NATURAL A LENGUAJE FORMAL

Traducir frases del lenguaje natural a expresiones lógicas es una tarea crucial en matemáticas, programación lógica, inteligencia artificial, ingeniería del *software* y muchas otras disciplinas. Comenzamos estudiando esta cuestión en la Sección 1.1, donde utilizamos fórmulas para expresar afirmaciones en expresiones lógicas. En aquella discusión evitamos a propósito afirmaciones cuya traducción requiriese predicados y cuantificadores. Formalizar expresiones del lenguaje natural en expresiones lógicas se hace más complejo cuando se necesitan cuantificadores. Además, puede haber diferentes formas de traducir una frase particular. (En consecuencia, no hay un «libro de recetas» que se pueda seguir paso a paso). Utilizaremos algunos ejemplos para ilustrar cómo se formalizan afirmaciones del lenguaje natural en lógica de predicados. El objetivo es producir expresiones lógicas simples y útiles. En esta sección nos limitamos a frases que pueden ser traducidas a fórmulas usando un solo cuantificador. En la siguiente sección veremos frases más complicadas que requieren múltiples cuantificadores.

EJEMPLO 17 Expresa la frase «Todo estudiante de esta clase ha estudiado cálculo» utilizando predicados y cuantificadores.

Ejemplos adicionales

Solución: Primero, reescribimos la sentencia, de tal forma que podamos identificar con claridad los cuantificadores que debemos emplear. Haciéndolo, obtenemos:

«Para todo estudiante de esta clase, ese estudiante ha estudiado cálculo».

Luego introducimos la variable x, de tal forma que nuestra sentencia se convierte en

«Para todo estudiante x de esta clase, x ha estudiado cálculo».

Continuando, introducimos el predicado $C(x)$, que es el enunciado «x ha estudiado cálculo». Por consiguiente, si el dominio de x consiste en los estudiantes de la clase, podemos traducir nuestra frase como $\forall x\, C(x)$.

No obstante, hay otras opciones correctas; se pueden considerar diferentes dominios o diferentes predicados. La opción que seleccionemos dependerá del razonamiento que queramos realizar a continuación. Por ejemplo, podemos estar interesados en un grupo de personas más amplio