Solución: Ten en cuenta que $x^2 \geq x$ si, y sólo si, $x^2 - x = x\,(x - 1) \geq 0$. Consecuentemente, $x^2 \geq x$ si, y sólo si, $x \leq 0$ o $x \geq 1$). Se sigue que $\forall x\,(x^2 \geq x)$ es falsa si el dominio consiste en todos los números reales (ya que la desigualdad es falsa para los números reales x tales que $0 < x < 1$). Sin embargo, si el dominio consiste en los enteros $\forall x\,(x^2 \geq x)$ es verdadera por no haber enteros x tales que $0 < x < 1$. ◀

Para mostrar que una sentencia de la forma $\forall x\, P(x)$ es falsa, donde $P(x)$ es una función proposicional, sólo necesitamos encontrar un valor de x del dominio para el cual $P(x)$ sea falsa. Este valor de x se llama **contraejemplo** de la sentencia $\forall x\, P(x)$.

EJEMPLO 10 Supón que $P(x)$ es «$x^2 > 0$». Para mostrar que la sentencia $\forall x\, P(x)$ es falsa cuando el dominio sea todos los enteros, daremos un contraejemplo. Vemos que $x = 0$ es un contraejemplo, ya que $x^2 = 0$ cuando $x = 0$, por lo que no es mayor que 0 cuando $x = 0$. ◀

Buscar contraejemplos de sentencias que contienen al cuantificador universal es una actividad importante en el estudio de las matemáticas, como veremos en las secciones siguientes.

EL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL Muchas sentencias matemáticas afirman que hay un elemento con una cierta propiedad. Tales sentencias se expresan mediante cuantificadores existenciales. Con un cuantificador existencial formamos una proposición que es verdadera si y sólo si $P(x)$ es verdadera para al menos un valor de x en el dominio.

DEFINICIÓN 2 La *cuantificación existencial* de $P(x)$ es la proposición

«Existe un elemento x en el dominio tal que $P(x)$ es verdadera».

Usamos la notación

$$\exists x\, P(x)$$

para la cuantificación existencial de $P(x)$. El símbolo $\exists$ se denomina **cuantificador existencial**. La cuantificación existencial $\exists x\, P(x)$ se lee como

«Hay un x tal que $P(x)$»,
«Hay al menos un x tal que $P(x)$»

o

«Para algún x $P(x)$».

Ilustramos el uso del cuantificador existencial en los Ejemplos 11-13.

EJEMPLO 11 Sea $P(x)$ el enunciado «$x > 3$». ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x\, P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Ejemplos adicionales

Solución: Como «$x > 3$» es verdadero, por ejemplo, para $x = 4$, la cuantificación existencial de $P(x)$, es decir, $\exists x\, P(x)$, es verdadera. ◀

EJEMPLO 12 Sea $Q(x)$ el enunciado «$x = x + 1$». ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x\, Q(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Solución: Como $Q(x)$ es falsa para todo número real x, la cuantificación existencial de $Q(x)$, que es $\exists x\, Q(x)$, es falsa. ◀

Cuando todos los elementos del dominio se pueden enumerar, escribiéndolos, por ejemplo, como $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la cuantificación existencial $\exists x\, P(x)$ es lo mismo que la disyunción

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n),$$

puesto que esta disyunción es verdadera si, y sólo si, al menos uno de $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ es verdadera.