EJEMPLO 25 Muestra que estas sentencias son equivalentes:

p_1: n es un entero par
p_2: $n - 1$ es un entero impar
p_3: n^2 es un entero par

Solución: Mostraremos que estas tres sentencias son equivalentes viendo que las implicaciones que $p_1 \to p_2$, $p_2 \to p_3$ y $p_3 \to p_1$ son verdaderas.

Hacemos una demostración directa para $p_1 \to p_2$. Supongamos que n es par. Entonces, $n = 2k$ para algún entero k. Por tanto, $n - 1 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$. Esto significa que $n - 1$ es impar, pues se puede poner de la forma $2m + 1$, donde m es el entero $k - 1$.

Daremos también una prueba directa de que $p_2 \to p_3$. Supongamos ahora que $n - 1$ es impar. Entonces, $n - 1 = 2k + 1$ para algún entero k. Por tanto, $n = 2k + 2$, por lo que $n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$. Esto significa que n^2 es el doble del entero $2k^2 + 4k + 2$, y por tanto, par.

Para demostrar $p_3 \to p_1$ utilizamos una demostración indirecta. Esto es, demostramos que si n no es par, entonces n^2 no es par. Esto es lo mismo que demostrar que si n es impar, n^2 es impar, lo cual se ha hecho ya en el Ejemplo 14. Esto completa la demostración. ◀

TEOREMAS Y CUANTIFICADORES

Muchos teoremas se enuncian haciendo uso de proposiciones y cuantificadores. Se pueden utilizar varios métodos para demostrar teoremas que son cuantificaciones. Aquí describimos algunos de los más importantes.

DEMOSTRACIONES DE EXISTENCIA Muchos teoremas afirman la existencia de un tipo particular de objetos. Un teorema de este tipo es una proposición de la forma $\exists x\, P(x)$, donde P es un predicado. Una demostración de una proposición de la forma $\exists x\, P(x)$ se llama **demostración de existencia.** Hay varias formas de demostrar un teorema de este tipo. A veces puede darse una demostración del tipo $\exists x\, P(x)$ encontrando un elemento a tal que $P(a)$ sea verdadera. Tal demostración de existencia se llama **constructiva.** También es posible dar una demostración de existencia que sea **no constructiva.** Esto es, no encontramos el elemento a tal que $P(a)$ es verdadera, sino que demostramos que $\exists x\, P(x)$ es verdadera de alguna otra forma. Un método común para dar una demostración no constructiva de existencia es utilizar una demostración por reducción al absurdo y mostrar que la negación de la cuantificación existencial implica una contradicción. El concepto de demostración constructiva se ilustra en el Ejemplo 26.

Ejemplos adicionales

EJEMPLO 26 **Una demostración constructiva de existencia.** Demuestra que hay un entero positivo que se puede poner de dos formas diferentes como suma de cubos de enteros positivos.

Solución: Tras considerables cálculos (haciendo uso, por ejemplo, de un programa de ordenador), encontramos que

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3.$$

Como hemos encontrado un entero positivo que puede escribirse como la suma de cubos de dos formas diferentes, la demostración está conseguida ◀

EJEMPLO 27 **Una demostración no constructiva de existencia.** Muestra que existen dos números irracionales x e y tales que x^y es racional.

Solución: Por el Ejemplo 21 sabemos que $\sqrt{2}$ es irracional. Considera el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Si es racional, hemos encontrado dos números x e y con x^y racional: $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$. Por otra parte, si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional, entonces podemos hacer $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$, de tal forma que $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^{2} = 2.$