EJEMPLO 30 ¿Es verdad que todo entero positivo es la suma de 18 potencias cuartas de enteros? En otras palabras, ¿es un teorema la sentencia $\forall n\ P(n)$, donde $P(n)$ es la sentencia «n se puede escribir como la suma de 18 potencias cuartas de enteros» y el dominio consiste en todos los enteros positivos?

Solución: Para determinar si n se puede escribir como la suma de 18 potencias cuartas de enteros, deberíamos empezar examinando si n es la suma de 18 potencias cuartas de enteros para los enteros positivos más pequeños. Como las potencias cuartas de enteros son 0, 1, 16, 81, ..., si podemos seleccionar 18 términos de estos números que sumen n, entonces n es una suma de 18 potencias cuartas. Podemos mostrar que todos los enteros positivos hasta 78 se puede escribir como la suma de 18 potencias cuartas. (Los detalles se dejan al cuidado del lector). Sin embargo, si decidiéramos que esto es suficiente, habríamos llegado a una conclusión errónea. La sentencia inicial no es correcta porque 79 no es suma de 18 potencias cuartas (como el lector podría verificar). ◀

ERRORES EN DEMOSTRACIONES

Hay mucho fallos comunes en la construcción de demostraciones. Describiremos brevemente algunos de ellos aquí. Entre los fallos más generalizados están las equivocaciones en aritmética y álgebra básica. Incluso matemáticos profesionales cometen tales errores, especialmente cuando trabajan con fórmulas complejas. Siempre que utilices cálculos complejos, deberías revisarlos tan cuidadosamente como sea posible. (Sería interesante que repasases algunos aspectos problemáticos del álgebra básica, especialmente antes de estudiar la Sección 3.3).

Cada paso de una demostración matemática debe ser correcto y la conclusión debe deducirse lógicamente de los pasos que la preceden. Muchas equivocaciones resultan de introducir pasos que no se han deducido lógicamente de los anteriores. Esto se ilustra en los Ejemplos 31-33.

EJEMPLO 31 ¿Dónde está el error en la famosa «demostración» supuesta de que 1 = 2?

«Demostración»: Consideramos los siguientes pasos, donde a y b son dos enteros positivos iguales.

Paso	**Razonamiento**
1. $a = b$	Dado
2. $a^2 = ab$	Multiplicando ambos lados de (1) por a
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	Restando b^2 a ambos lados de (2)
4. $(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Factorizando ambos lados de (3)
5. $a + b = b$	Dividiendo ambos lados de (4) por $a - b$
6. $2b = b$	Reemplazando a por b en (5), porque $a = b$, y simplificando
7. $2 = 1$	Dividiendo ambos lados de (6) por b

Solución: Todos los pasos son válidos excepto uno, el paso 5, donde dividimos ambos lados por $a - b$. El error está en que $a - b$ es igual a cero. La división de ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad es válida siempre que esta cantidad no sea cero. ◀

EJEMPLO 32 ¿Dónde está el error en esta «demostración»?

«Teorema»: Si n^2 es positivo, entonces n es positivo.

«Demostración»: Supongamos que n^2 es positivo. Como la implicación «Si n es positivo, entonces n^2 es positivo» es verdadera, concluimos que n es positivo.

Solución: Sea $P(n)$ «n es positivo» y $Q(n)$ «n^2 es positivo». Entonces nuestra hipótesis es $Q(n)$. La sentencia «Si n es positivo, entonces n^2 es positivo» es la sentencia $\forall n\ (P(n) \rightarrow Q(n))$. De la hipótesis $Q(n)$ y la sentencia $\forall n\ (P(n) \rightarrow Q(n))$ no podemos concluir $P(n)$, porque no estamos empleando una regla de inferencia válida. De hecho, éste es un ejemplo de la falacia de la afirmación