36. Expresa las negaciones de estas proposiciones utilizando cuantificadores y en lenguaje natural.

a) A todos los estudiantes de la clase les gustan las matemáticas.
b) Hay un estudiante en esta clase que nunca ha visto un ordenador.
c) Hay un estudiante en esta clase que ha cursado todas las asignaturas de matemáticas de la licenciatura.
d) Hay un estudiante en esta clase que ha estado en al menos una habitación de cada edificio del campus.

37. Encuentra un contraejemplo, si es posible, de estas sentencias universalmente cuantificadas, donde el dominio de todas las variables consiste en todos los enteros.

a) $\forall x \forall y\ (x^2 = y^2 \rightarrow x = y)$
b) $\forall x \exists y\ (y^2 = x)$ **c)** $\forall x \forall y\ (xy \geq x)$

38. Encuentra un contraejemplo, si es posible, de estas sentencias universalmente cuantificadas, donde el dominio de todas las variables consiste en todos los enteros.

a) $\forall x \exists y\ (x = 1/y)$ **b)** $\forall x \exists y\ (y^2 - x < 100)$
c) $\forall x \forall y\ (x^2 \neq y^3)$

39. Utiliza cuantificadores para expresar la propiedad asociativa para el producto de números reales.

40. Utiliza cuantificadores para expresar la ley distributiva del producto con respecto a la suma de números reales.

41. Determina el valor de verdad de la sentencia $\forall x \exists y\ (xy = 1)$ si el dominio es

a) los reales no nulos,
b) los enteros no nulos,
c) los reales positivos.

42. Determina el valor de verdad de la sentencia $\exists x \forall y\ (x \leq y^2)$ si el dominio es

a) los reales positivos,
b) los enteros,
c) los reales no nulos.

43. Muestra que las dos sentencias $\neg\exists x \forall y\ P(x, y)$ y $\forall x \exists y\ \neg P(x, y)$ tienen el mismo valor de verdad.

***44.** Muestra que $\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$ y $\forall x \forall y\ (P(x) \vee Q(y))$ son lógicamente equivalentes. (La nueva variable y se emplea para combinar los cuantificadores correctamente).

***45.** **a)** Muestra que $\forall x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$ es equivalente a $\forall x \exists y\ (P(x) \wedge Q(y))$.
b) Muestra que $\forall x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$ es equivalente a $\forall x \exists y\ (P(x) \vee Q(y))$.

Una sentencia está en **forma normal *prenex* (PNF)** si, y sólo si, es de la forma

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_k x_k P(x_1, x_2, ..., x_k),$$

donde cada Q_i, $i = 1, 2, ..., k$, es bien el cuantificador existencial o el cuantificador universal, y $P(x_1, ..., x_k)$ es un predicado que no involucra ningún cuantificador. Por ejemplo, $\exists x \forall y\ (P(x, y) \wedge Q(y))$ está en forma *prenex* normal, mientras que $\exists x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$ no (ya que no todos los cuantificadores se presentan al principio).

Toda sentencia formada con variables proposicionales, predicados y los valores **V** y **F**, utilizando conectivos lógicos y cuantificadores, es equivalente a una sentencia en forma normal *prenex*. El problema 47 pide demostrar este hecho.

***46.** Pon estas sentencias en forma normal *prenex*. (*Indicación*: Usa las equivalencias lógicas de las Tablas 5 y 6 de la Sección 1.2, la Tabla 2 de la Sección 1.3, los Problemas 42-45 de la Sección 1.3 y los Problemas 44 y 45 de esta sección).

a) $\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \vee A$, donde A es una proposición que involucra cuantificadores
b) $\neg(\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x))$
c) $\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$

****47.** Muestra cómo se puede transformar una sentencia arbitraria en una sentencia en forma normal *prenex* que sea equivalente a la sentencia dada.

48. Un número real x es **cota superior** de un conjunto S de números reales si x es mayor o igual que todo número de S. El número real x se dice que es el **supremo** de un conjunto S de números reales si x es una cota superior y x es menor o igual que toda cota superior de S. Si este valor existe, es único.

a) Utilizando cuantificadores, expresa el hecho de que x es una cota superior de S.
b) Utilizando cuantificadores, expresa el hecho de que x es el supremo de S.

***49.** Expresa la cuantificación $\exists! x\ P(x)$ usando cuantificaciones universales, existenciales y operadores lógicos. La sentencia $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = L$ significa que para todo número real positivo ε hay un entero positivo N tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > N$.

50. (Se requiere Cálculo). Utiliza cuantificadores para expresar la sentencia $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = L$.

51. (Se requiere Cálculo). Utiliza cuantificadores para expresar la sentencia $\text{lím}_{n\to\infty} a_n$ no existe.

52. (Se requiere Cálculo). Utiliza cuantificadores para expresar la siguiente definición: una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para todo número real $\varepsilon > 0$ hay un entero positivo N tal que $|a_m - a_n| < \varepsilon$ para cada par de enteros positivos n y m, $m > N$, $n > N$.

53. (Se requiere Cálculo). Utiliza cuantificadores y conectivos lógicos para expresar esta definición: un número L es el **límite superior** de una sucesión $\{a_n\}$ si para todo número real $\varepsilon > 0$, $a_n > L - \varepsilon$ para infinitos valores de n y $a_n > L + \varepsilon$ sólo para un número finito de valores de n.