27. Demuestra que $\neg(p \leftrightarrow q)$ y $p \leftrightarrow \neg q$ son lógicamente equivalentes.

28. Demuestra que $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$ es una tautología.

29. Demuestra que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ es una tautología.

La proposición **dual** de una fórmula que contiene sólo los operadores lógicos $\vee$, $\wedge$ y $\neg$ es la proposición que se obtiene al sustituir cada $\vee$ por $\wedge$, cada $\wedge$ por $\vee$, cada **V** por **F** y cada **F** por **V**. La dual de la proposición s se denota como s^*.

30. Halla la proposición dual de cada una de estas proposiciones.
a) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ **b)** $(p \wedge q \wedge r) \vee s$
c) $(p \vee \mathbf{F}) \wedge (q \vee \mathbf{V})$

31. Demuestra que $(s^*)^* = s$

32. Demuestra que las equivalencias lógicas de la Tabla 5, excepto la ley de la doble negación, se pueden agrupar en pares de proposiciones duales.

****33.** ¿Por qué las duales de dos fórmulas equivalentes que contienen sólo los operadores $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ son también equivalentes?

34. Encuentra una fórmula en función de las proposiciones p, q y r que sea verdadera cuando p y q sean verdaderas y r sea falsa, pero que sea falsa en cualquier otro caso. (*Indicación:* Usa la conjunción de cada proposición o su negación).

35. Encuentra una fórmula en función de las proposiciones p, q y r que sea verdadera cuando exactamente dos de las proposiciones p, q y r sean verdaderas y falsas en cualquier otro caso. (*Indicación:* Forma una disyunción de conjunciones. Incluye una conjunción para cada combinación de valores para los cuales la proposición sea verdadera. Cada conjunción debería incluir cada una de las tres proposiciones o sus negaciones).

36. Supón que se especifica una tabla de verdad de n variables. Demuestra que una fórmula con esta tabla de verdad se puede formar haciendo la disyunción de las conjunciones de las variables o sus negaciones, incluyendo una conjunción por cada combinación de valores para los que la fórmula sea verdadera. La fórmula resultante se dice que está en **forma normal disyuntiva**.

Una colección de conectivos lógicos se llama **funcionalmente completa** si cada una de las fórmulas es lógicamente equivalente a una fórmula que es función sólo de estos conectivos lógicos.

37. Demuestra que $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ forman una colección funcionalmente completa de conectivos lógicos. (*Indicación:* Usa el hecho de que toda proposición es lógicamente equivalente a una en forma normal disyuntiva, como se muestra en el Problema 36).

***38.** Demuestra que $\neg$ y $\vee$ forman una colección funcionalmente completa de conectivos lógicos. [*Indicación:* Usa primero las leyes de De Morgan para mostrar que $p \vee q$ es equivalente a $\neg(\neg p \wedge \neg q)$].

***39.** Demuestra que $\neg$ y $\vee$ forman una colección funcionalmente completa de conectivos lógicos.

Los problemas siguientes están relacionados con los operadores lógicos *NAND* y *NOR*. La proposición p *NAND* q es verdadera cuando p o q, o ambas, son falsas, y es falsa cuando tanto p como q son verdaderas. La proposición p *NOR* q es verdadera cuando tanto p como q son falsas, y es falsa en cualquier otro caso. Las proposiciones p *NAND* q y p *NOR* q se denotan por $p \mid q$ y $p \downarrow q$, respectivamente. (Los operadores $\mid$ y $\downarrow$ se llaman **barra de Sheffer** y **flecha de Peirce** por H. M. Sheffer y C. S. Peirce, respectivamente).

40. Construye una tabla de verdad para el operador lógico *NAND*.

41. Demuestra que $p \mid q$ es lógicamente equivalente a $\neg(p \wedge q)$.

42. Construye la tabla de verdad del operador lógico *NOR*.

43. Demuestra que $p \downarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg(p \vee q)$.

44. En este problema mostraremos que $\{\downarrow\}$ es una colección funcionalmente completa de operadores lógicos.
a) Demuestra que $p \downarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg p$.
b) Demuestra que $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ es lógicamente equivalente a $p \vee q$.
c) Concluye de las partes (a) y (b) y el Problema 39 que $\{\downarrow\}$ es una colección funcionalmente completa de operadores lógicos.

***45.** Encuentra una proposición equivalente a $p \rightarrow q$ usando sólo el operador lógico $\downarrow$.

46. Demuestra que $\{\mid\}$ es una colección funcionalmente completa de operadores lógicos.

47. Demuestra que $p \mid q$ y $q \mid p$ son equivalentes.

48. Demuestra que $p \mid (q \mid r)$ y $(p \mid q) \mid r$ no son equivalentes, por lo que el operador lógico $\mid$ no es asociativo.

***49.** ¿Cuántas tablas de verdad diferentes de fórmulas que relacionen las proposiciones p y q existen?

50. Demuestra que si p, q y r son fórmulas tales que p y q son lógicamente equivalentes y que q y r son lógicamente equivalentes, entonces p y r son lógicamente equivalentes.

51. La siguiente frase se ha tomado de una especificación de un sistema de telefonía: «Si la base de datos del directorio está abierta, el monitor se pone en estado cerrado si el sistema no está en estado inicial». La especificación es complicada de entender, pues involucra dos implicaciones. Encuentra una especificación equivalente, más fácil de entender, que incluya disyunciones o negaciones, pero no implicaciones.

52. ¿De cuántas formas las disyunciones $p \vee \neg q$, $\neg p \vee q$, $q \vee r$, $q \vee \neg r$, $\neg q \vee \neg r$ se pueden hacer verdaderas simultáneamente mediante la asignación de valores de verdad a p, q y r?

53. ¿De cuántas formas las disyunciones $p \vee \neg q \vee s$, $\neg p \vee \neg r \vee s$, $\neg p \vee \neg r \vee \neg s$, $\neg p \vee q \vee \neg s$, $q \vee r \vee \neg s$, $q \vee \neg r \vee \neg s$, $\neg p \vee \neg q \vee \neg s$, $p \vee r \vee s$, $p \vee r \vee \neg s$ se pueden hacer verdaderas simultáneamente mediante la asignación de valores de verdad a p, q, r y s?