Esta demostración es un ejemplo de demostración no constructiva de existencia, porque no hemos encontrado dos números x e y tales que x^y es racional. Más bien hemos demostrado que bien el par $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ o bien $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$ uno de ellos tiene las propiedades deseadas, pero ¡no sabemos cuál de estos dos pares es el que buscamos! ◀

DEMOSTRACIONES DE UNICIDAD Algunos teoremas afirman la existencia de un único elemento con una propiedad particular. En otras palabras, estos teoremas afirman que hay exactamente un elemento con esta propiedad. Para demostrar una sentencia de este tipo, necesitamos mostrar que existe un elemento con esta propiedad y que ningún otro elemento cumple esta propiedad. Las dos partes de una demostración unicidad son:

Existencia: Mostramos que existe un elemento x con la propiedad deseada.
Unicidad: Mostramos que si $y \neq x$, entonces y no tiene la propiedad deseada.

Observación: Mostrar que existe un único elemento x tal que $P(x)$ es lo mismo que demostrar la sentencia $\exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, (y \neq x \rightarrow \neg P(y)))$.

EJEMPLO 28 Muestra que todo entero tiene un único inverso respecto la suma. Esto es, muestra que si p es un entero, entonces existe un único entero q tal que $p + q = 0$.

Ejemplos adicionales

Solución: Si p es un entero, encontramos que $p + q = 0$ cuando $q = -p$. Como q es también entero, por consiguiente, existe un entero q tal que $p + q = 0$.

Para mostrar que dado el entero p, el entero q tal que $p + q = 0$ es único, supongamos que r es un entero tal que $r \neq q$ y $p + r = 0$. Así, $p + q = p + r$. Sustrayendo p de ambos lados de la ecuación, se sigue que $q = r$, lo que contradice la suposición de que $q \neq r$. Por tanto, hay un único entero q tal que $p + q = 0$. ◀

CONTRAEJEMPLOS En la Sección 1.3 mencionamos que se podía ver que una sentencia de la forma $\forall x\, P(x)$ es falsa si podemos encontrar un contraejemplo, esto es, un ejemplo x para el cual $P(x)$ es falsa. Cuando nos encontramos una sentencia de la forma $\forall x\, P(x)$ y bien creemos que es falsa o bien se nos resisten todos los intentos para encontrar una demostración, buscamos un contraejemplo. Ilustramos la caza de un contraejemplo en el Ejemplo 29.

Ejemplos adicionales

EJEMPLO 29 Muestra que la sentencia «Todo entero positivo es la suma de los cuadrados de tres enteros» es falsa.

Solución: Podemos mostrar que esta sentencia es falsa si encontramos un contraejemplo. Esto es, la sentencia es falsa si podemos mostrar que hay un entero particular que no es la suma de los cuadrados de tres enteros. Para buscar un contraejemplo, intentamos escribir los sucesivos enteros positivos como suma de tres cuadrados. Encontramos que $1 = 0^2 + 0^2 + 1^2$, $2 = 0^2 + 1^2 + 1^2$, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, $4 = 0^2 + 0^2 + 2^2$, $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$, $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$, pero no podemos encontrar una forma para escribir 7 como la suma de tres cuadrados. Para demostrar que no hay tres cuadrados que sumen 7, ten en cuenta que podemos utilizar sólo aquellos cuadrados que no exceden de 7, a saber, 0, 1 y 4. Como no hay tres términos escogidos entre 0, 1 o 4 cuyos cuadrados sumen 7, se sigue que 7 es un contraejemplo. Concluimos que la sentencia «Todo entero positivo es la suma de los cuadrados de tres enteros» es falsa. ◀

Enlaces

Un error común consiste en asumir que uno o más ejemplos establecen la verdad de una sentencia. No importa los ejemplos que se encuentren que hagan $P(x)$ verdadera, la cuantificación universal $\forall x\, P(x)$ puede ser falsa. Considera el Ejemplo 30.

NOTA HISTÓRICA Cuando el matemático inglés G. H. Hardy visitó al prodigio hindú Ramanujan en el hospital donde estaba convaleciente, Hardy señaló que el 1729, el número del taxi que había tomado, era bastante insulso. Ramanujan le replicó: «No, es un número muy interesante; es el número más pequeño que se puede expresar como la suma de cubos de dos formas diferentes». (Véanse los Problemas suplementarios del Capítulo 3 para las biografías de Hardy y Ramanujan).