1.5 Métodos de demostración

INTRODUCCIÓN

Dos importantes cuestiones que aparecen en el estudio de las matemáticas son: (1) ¿cuándo es correcto un argumento matemático?, y (2) ¿qué métodos se pueden utilizar para construir argumentos matemáticos? Esta sección ayudará a resolver estas dos preguntas describiendo varios tipos de argumentos matemáticos, correctos e incorrectos.

Un **teorema** es una sentencia que se puede verificar que es verdadera. (A veces a los teoremas se les llama *proposiciones, hechos* o *resultados*). Demostramos que un teorema es verdadero mediante una secuencia de sentencias que constituyen un argumento llamado **demostración.** Para construir demostraciones se necesitan métodos para derivar sentencias nuevas a partir de las conocidas. Las sentencias que se utilizan en una demostración pueden incluir **axiomas** o **postulados,** que son suposiciones que subyacen a las estructuras matemáticas, hipótesis del teorema o teoremas demostrados previamente. Las **reglas de inferencia,** que son los medios usados para deducir conclusiones a partir de otras afirmaciones, enlazan los pasos de una demostración.

Enlaces

En esta sección hablaremos sobre las reglas de inferencia, lo que ayudará a clarificar cómo construir una demostración correcta. Describiremos también algunas formas frecuentes de razonamiento incorrecto, que llamaremos **falacias.** Presentaremos varios métodos que se utilizan comúnmente para demostrar teoremas.

El término *lema* o *corolario* se emplea para cierto tipo de teoremas. Un **lema** es un teorema sencillo utilizado en la demostración de otros teoremas. Demostraciones complicadas son a veces más fáciles de entender haciendo uso de lemas, los cuales se demuestran por separado. Un **corolario** es una proposición que se puede establecer directamente a partir de un teorema que ya ha sido demostrado. Una **conjetura** es una sentencia cuyo valor de verdad es desconocido. Cuando se encuentra una demostración para una conjetura, ésta se convierte en teorema. Muchas veces las conjeturas resultan ser falsas, por lo que no llegan a ser teoremas

Los métodos de demostración que se describen en este capítulo son importantes no sólo porque se usan para demostrar teoremas matemáticos, sino por sus muchas aplicaciones en ciencias de la computación. Entre ellas, podemos citar la verificación de que un programa de ordenador es correcto, establecer si un sistema operativo es seguro, hacer inferencias en el área de la inteligencia artificial o mostrar que las especificaciones de un sistema son consistentes. Por consiguiente, entender las técnicas que se utilizan en las demostraciones es esencial tanto en las matemáticas como en las ciencias de la computación.

REGLAS DE INFERENCIA

Vamos a introducir en este apartado las reglas de inferencia para lógica proposicional. Estas reglas justifican los pasos dados para demostrar que a partir de una serie de hipótesis se llega de forma lógica a una conclusión. La tautología $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ es la base de la regla de inferencia llamada **modus ponens.** Esta tautología se escribe de la forma siguiente

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \rightarrow q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Usando esta notación, las hipótesis se escriben en una columna y la conclusión debajo de una barra horizontal. (El símbolo $\therefore$ denota «por tanto» o «luego»). El *modus ponens* declara que si tanto una implicación como sus hipótesis son verdaderas, entonces la conclusión de esta implicación es verdadera.

Ejemplos adicionales

EJEMPLO 1 Supongamos que la implicación «si nieva hoy, iremos a esquiar» y la hipótesis «está nevando hoy» son verdaderas. Entonces, por el *modus ponens,* se sigue que la conclusión «iremos a esquiar» es verdadera. ◀