43. Demuestra que estas tres sentencias son equivalentes: (*i*) $3x + 2$ es un número par; (*ii*) $x + 5$ es un entero impar, y (*iii*) x^2 es un entero par.

44. Demuestra que estas tres sentencias son equivalentes: (*i*) x es racional; (*ii*) $x/2$ es racional, y (*iii*) $3x - 1$ es racional.

45. Demuestra que estas tres sentencias son equivalentes: (*i*) x es irracional; (*ii*) $3x + 2$ es irracional, y (*iii*) $x/2$ es irracional.

46. ¿Es correcto este razonamiento para encontrar las soluciones de la ecuación $\sqrt{2x^2 - 1} = x$? (*1*). Se da $\sqrt{2x^2 - 1} = x$; (*2*) $2x^2 - 1 = x^2$, elevando al cuadrado ambos términos de (*1*); (*3*) $x^2 - 1 = 0$, restando x^2 a ambos lados de (*2*); (*4*) $(x - 1)(x + 1) = 0$, factorizando la parte izquierda de (*3*); (*5*) $x = 1$ o $x = -1$, ya que si $ab = 0$ implica que bien $a = 0$ o bien $b = 0$.

47. ¿Son correctos estos pasos dados para encontrar las soluciones de la ecuación $\sqrt{x+3} = 3 - x$? (*1*) Se parte de $\sqrt{x+3} = 3 - x$; (*2*) $x + 3 = x^2 - 6x + 9$, elevando al cuadrado ambos lados de (*1*); (*3*) $0 = x^2 - 7x + 6$, restando $x + 3$ a ambos términos de (*2*); (*4*) $0 = (x - 1)(x - 6)$, factorizando la parte derecha de (*3*); (*5*) $x = 1$ o $x = 6$, ya que si $ab = 0$ implica que bien $a = 0$ o bien $b = 0$.

48. Demuestra que hay un entero positivo que es igual a la suma de los enteros positivos menores o iguales que él. ¿Es tu demostración constructiva o no constructiva?

49. Demuestra que hay cien enteros consecutivos que no son cuadrados perfectos. ¿Es tu demostración constructiva o no constructiva?

50. Demuestra que bien $2 \cdot 10^{500} + 15$ o bien $2 \cdot 10^{500} + 16$ no es cuadrado perfecto. ¿Es tu demostración constructiva o no constructiva?

51. Demuestra que hay un par de enteros positivos consecutivos tales que uno es un cuadrado perfecto y el otro un cubo perfecto.

52. Demuestra que el producto de dos de los números $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$, $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$ y $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$ no es negativo. ¿Es tu demostración constructiva o no constructiva? (*Indicación:* ¡No intentes evaluar estos números!).

53. Demuestra que cada una de las siguientes sentencias se pueden utilizar para expresar el hecho de que hay un único elemento x tal que $P(x)$ es verdadera. [Ten en cuenta que, por el Problema 48 de la Sección 1.3, ésta es la sentencia $\exists!\, P(x)$].

a) $\exists x \forall y\, (P(y) \leftrightarrow x = y)$
b) $\exists x\, P(x) \wedge \forall x \forall y\, (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$
c) $\exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, (P(y) \rightarrow x = y))$

54. Demuestra que si a, b y c son números reales y $a \neq 0$, entonces existe una solución única para la ecuación $ax + b = c$.

55. Supongamos que a y b son enteros impares, $a \neq b$. Muestra que existe un único entero c tal que $|a - c| = |b - c|$.

56. Muestra que si r es un número irracional, hay un único entero n tal que la distancia entre r y n es menor que $^1/_2$.

57. Muestra que si n es un entero impar, entonces existe un único entero k tal que n es la suma de $k - 2$ y $k + 3$.

58. Demuestra que dado un número real x existen dos únicos números n y ε tal que $x = n + \varepsilon$, n es un entero y $0 \leq \varepsilon < 1$.

59. Demuestra que dado un número real x existen dos únicos números n y ε tal que $x = n - \varepsilon$, n es un entero y $0 \leq \varepsilon < 1$.

60. Usa la regla de resolución para mostrar que las hipótesis «Allen es un mal chico o Hillary es una buena chica» y «Allen es un buen chico o David está contento» implican la conclusión «Hillary es una buena chica o David está contento».

61. Utiliza la regla de resolución para mostrar que las hipótesis «No llueve o Yvette tiene un paraguas», «Yvette no tiene un paraguas o ella no se moja» y «Llueve o Yvette no se moja» implican la conclusión «Yvette no se moja».

62. Muestra que las equivalencias $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$ se pueden derivar utilizando la regla de resolución junto con el hecho de que una implicación con hipótesis falsa es correcta. (*Indicación:* Sea $q = r = \mathbf{F}$ cuando se use la regla de resolución).

63. Usa la regla de resolución para demostrar que la fórmula $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ no se cumple.

64. Demuestra que se cumple, o que no, que si a y b son números racionales, entonces a^b también lo es.

65. Demuestra que se cumple, o que no, que hay un número racional x y un irracional y tales que x^y es irracional.

66. Muestra que puede verse que las proposiciones p_1, p_2, p_3 y p_4 son equivalentes demostrando que $p_1 \leftrightarrow p_4$, $p_2 \leftrightarrow p_3$ y $p_1 \leftrightarrow p_3$ son verdaderas.

67. Muestra que puede verse que las proposiciones p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 son equivalentes demostrando que $p_1 \rightarrow p_4$, $p_3 \rightarrow p_1$, $p_4 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_5$ y $p_5 \rightarrow p_3$ son verdaderas.

68. Demuestra que un tablero de ajedrez de 8×8 casillas se puede cubrir completamente empleando fichas de dominó (piezas de 1×2 casillas).

***69.** Demuestra que es imposible cubrir un tablero de ajedrez de 8×8 casillas con dos casillas quitadas en dos esquinas opuestas utilizando fichas de dominó.

***70.** El Problema de Lógica, tomado de *WFF'N PROOF: The Game of Modern Logic*, usa estas dos suposiciones:

1. «La lógica es difícil o a pocos estudiantes les gusta la lógica».