Tabla 1. Cuantificadores.		
Sentencia	*¿Cuándo es verdadera?*	*¿Cuándo es falsa?*
$\forall x\, P(x)$	$P(x)$ es verdadera para todo x	Hay un x para el que $P(x)$ es falsa
$\exists x\, P(x)$	Hay un x para el que $P(x)$ es verdadera	$P(x)$ es falsa para todo x

EJEMPLO 13 ¿Cuál es el valor de verdad de $\exists x\, P(x)$, donde $P(x)$ es el enunciado «$x^2 > 10$» y el dominio consiste en los enteros positivos menores o iguales que 4?

Solución: Como el dominio es {1, 2, 3, 4}, la proposición $\exists x\, P(x)$ es lo mismo que la disyunción

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4).$$

Como $P(4)$, que es el enunciado «$4^2 > 10$» es verdadera, se sigue que $\exists x\, P(x)$ es verdadera. ◀

En la Tabla 1 se resume el significado de los cuantificadores universales y existenciales.

Cuando se quiere determinar el valor de verdad de una cuantificación, a veces es útil realizar una búsqueda sobre todos los posibles valores del dominio. Supongamos que hay n objetos en el dominio de la variable x. Para determinar si $\forall x\, P(x)$ es verdadera, podemos barrer los n valores de x y ver si $P(x)$ es verdadera para todos ellos. Si encontramos un valor de x para el cual $P(x)$ es falsa, habremos demostrado que $\forall x\, P(x)$ es falsa. En caso contrario, $\forall x\, P(x)$ es verdadera. Para ver si $\exists x\, P(x)$ es verdadera, barremos los n posibles de x buscando algún valor para el cual $P(x)$ sea verdadera. Si encontramos uno, entonces $\exists x\, P(x)$ es verdadera. Si no encontramos tal valor de x, habremos determinado que $\exists x\, P(x)$ es falsa. (Observa que este procedimiento de búsqueda no puede ser aplicado si el dominio se compone de infinitos elementos. Aun así, sigue siendo una forma útil de trabajar con cuantificadores).

VARIABLES LIGADAS

Cuando un cuantificador se usa sobre la variable x o cuando asignamos un valor a esta variable, decimos que la variable aparece **ligada.** Una variable que no aparece ligada por un cuantificador o fijada a un valor particular, se dice que es **libre.** Todas las variables que aparecen en una función proposicional deben ser ligadas para convertirla en proposición. Esto se puede hacer utilizando una combinación de cuantificadores universales, cuantificadores existenciales y asignación de valores.

La parte de una expresión lógica a la cual se aplica el cuantificador se llama **ámbito** de este cuantificador. Consecuentemente, una variable es libre si está fuera del ámbito de todos los cuantificadores en la fórmula.

EJEMPLO 14 En la sentencia $\exists x\, Q(x, y)$, la variable x está ligada por el cuantificador existencial $\exists x$, pero la variable y es libre porque no está ligada a un cuantificador y no se le asigna valor alguno a esta variable.

En la sentencia $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x\, R(x)$ todas las variables están ligadas. El ámbito del primer cuantificador, $\exists x$, es la expresión $P(x) \wedge Q(x)$ porque $\exists x$ se aplica sólo a $P(x) \wedge Q(x)$ y no al resto de la sentencia. De forma similar, el ámbito del segundo cuantificador, $\forall x$, es la expresión $R(x)$. Es decir, el cuantificador existencial liga la variable x en $P(x) \wedge Q(x)$ y el cuantificador universal $\forall x$ liga la variable x en $R(x)$. Observa que podíamos haber escrito nuestra sentencia usando dos variables diferentes x e y como $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall y\, R(y)$, porque los ámbitos de los dos cuantificadores no se solapan. El lector debería prestar atención cuando se utilice la misma letra para representar variables ligadas por diferentes cuantificadores con ámbitos que no se solapan. ◀