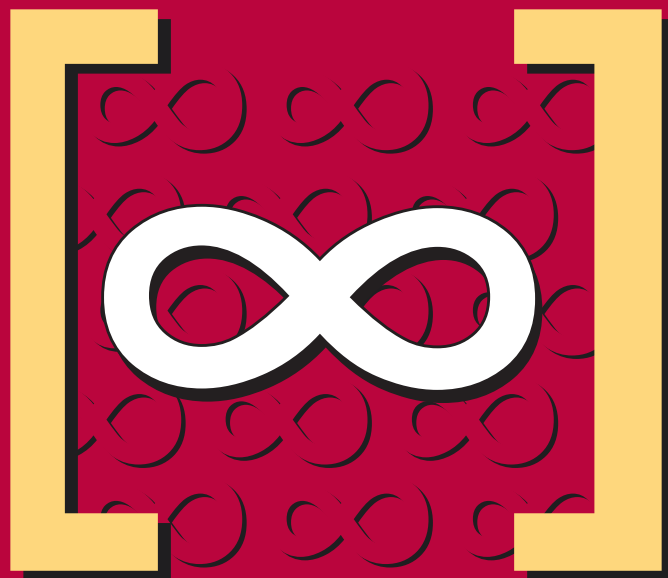


quinta  
edición

# MATEMÁTICA discreta y sus aplicaciones



10205571910241225

Kenneth H. Rosen

# Sobre el autor

**K**ENNETH H. ROSEN es un miembro distinguido del personal técnico de los Laboratorios AT&T en Middletown, Nueva Jersey, Estados Unidos.

El doctor Rosen se graduó en Matemáticas en la Universidad de Michigan, Ann Arbor (1972) y se doctoró en el M.I.T. (Boston) en 1976, donde escribió su tesis en el área de teoría de números bajo la dirección de Harold Stark. Antes de ingresar en los Laboratorios Bell en 1982, fue *associate professor* de matemáticas en la Universidad de Colorado, Boulder; la Universidad del Estado de Ohio, Columbus, y en la Universidad de Maine, Orono. Mientras trabajaba en los Laboratorios AT&T, Ken fue profesor en la Universidad de Monmouth, donde enseñó matemática discreta, teoría de codificación y seguridad en datos.

El doctor Rosen ha publicado numerosos artículos en revistas profesionales de las áreas de teoría de números y modelado matemático. Es autor de los libros de texto *Elementary Number Theory and Its Applications*, actualmente en su cuarta edición, publicado por Addison-Wesley, y *Matemática discreta y sus aplicaciones*, en su quinta edición, publicado por McGraw-Hill. Ambos libros se han usado ampliamente en centenares de universidades. Es coautor de *UNIX: The Complete Reference*, *UNIX System V Release 4: An Introduction* y *Best UNIX Tips Ever*, publicados por Osborne McGraw-Hill. Estos libros han vendido más de cien mil copias, con traducciones al chino, alemán, español e italiano. Ken es también editor del *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*, publicado en 2000 por CRC Press, y es supervisor de edición de la serie CRC de libros sobre matemática discreta. Ken también está interesado en la integración del *software* matemático en entornos profesionales y didácticos y ha trabajado en proyectos con el programa MAPLE de la empresa Waterloo en estas áreas.

En los Laboratorios Bell, y actualmente en AT&T, el doctor Rosen ha colaborado en un amplio abanico de proyectos, entre los que se incluyen estudios sobre investigación operativa y planificación de líneas de producción para ordenadores y equipos para comunicación de datos. Ha ayudado en la planificación de los futuros productos y servicios de AT&T en el área de multimedia, como comunicación de vídeo o reconocimiento y sintetizado de voz, así como en distribución de imágenes. Ha evaluado nuevas tecnologías para su aplicación en AT&T. Ha inventado numerosos servicios nuevos y ha registrado o tiene en proceso más de sesenta y cinco patentes. Uno de sus proyectos más interesantes está relacionado con la evaluación de tecnología para AT&T en el Centro EPCOT.

**EJEMPLO 13** Sea  $A$  el conjunto de todos los estudiantes de una universidad, y sea  $B$  el conjunto de todas las asignaturas ofertadas en la universidad. ¿Cuál es el producto cartesiano  $A \times B$ ?

*Solución:* El producto cartesiano  $A \times B$  consiste en todos los pares ordenados de la forma  $(a, b)$ , donde  $a$  es un estudiante de la universidad y  $b$  es una asignatura ofertada en la universidad. El conjunto  $A \times B$  se puede utilizar para representar todas las posibles matriculaciones de estudiantes en asignaturas en la universidad. ◀

**EJEMPLO 14** ¿Cuál es el producto cartesiano de  $A = \{1, 2\}$  y  $B = \{a, b, c\}$ ?

*Solución:* El producto cartesiano  $A \times B$  es

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Una **relación** del conjunto  $A$  en el conjunto  $B$  es un subconjunto  $R$  del producto cartesiano  $A \times B$ . Los elementos de  $R$  son pares ordenados, donde el primer elemento pertenece a  $A$  y el segundo a  $B$ . Por ejemplo,  $R = \{(a, 0), (a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 0), (c, 3)\}$  es una relación del conjunto  $\{a, b, c\}$  en el conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Estudiaremos en profundidad las relaciones en el Capítulo 7.

Los productos cartesianos  $A \times B$  y  $B \times A$  no son iguales, a no ser que  $A = \emptyset$  o  $B = \emptyset$  (de tal forma que  $A \times B = \emptyset$ ) o a no ser que  $A = B$  (véase el Problema 26, al final de esta sección). Ilustramos esto en el Ejemplo 15.

**EJEMPLO 15** Demuestra que el producto cartesiano  $B \times A$  no es igual al producto cartesiano  $A \times B$ , donde  $A$  y  $B$  son los conjuntos del Ejemplo 14.

*Solución:* El producto cartesiano  $B \times A$  es

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\},$$

que no es igual al conjunto  $A \times B$  hallado en el Ejemplo 14. ◀

Podemos también definir el producto cartesiano de más de dos conjuntos.

## DEFINICIÓN 10

El *producto cartesiano* de los conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , denotado por  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , es el conjunto de  $n$ -tuplas  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , donde  $a_i$  pertenece a  $A_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . En otras palabras,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}.$$



**RENÉ DESCARTES (1596-1650)** René Descartes nació en el seno de una familia noble cerca de Tours, Francia, a más de 300 km al suroeste de París. Fue el tercer hijo de la primera mujer de su padre; su madre falleció pocos días después de su nacimiento. Debido a la débil salud de René, su padre, juez de provincias, perdonó las clases formales de su hijo, hasta que a la edad de ocho años entró en el colegio jesuita de La Flèche. El director del colegio se encariñó con él y le permitía estar en cama hasta tarde debido a su débil salud. Desde entonces, Descartes pasó las mañanas en la cama. Él consideraba esos momentos como sus horas más productivas para pensar.

Descartes abandonó el colegio en 1612, trasladándose a París, donde estuvo dos años estudiando matemáticas. Consiguió graduarse en leyes en 1616 por la Universidad de Poitiers. A los dieciocho años, Descartes se desencantó de los estudios y decidió ver mundo. Se trasladó a París, donde se hizo un jugador de éxito. Sin embargo, al crecer, se cansó de esa vida y se mudó al barrio de Saint-Germain, donde se dedicó al estudio de las matemáticas. Cuando sus amigos jugadores le encontraron, decidió abandonar Francia y hacer carrera militar. Sin embargo, nunca entró en combate. Un día, mientras se resguardaba del frío en una habitación sobrecalentada de un campamento militar, tuvo varios sueños febriles que le revelaron su carrera futura como matemático y filósofo.

Tras acabar su carrera militar, viajó por Europa. Más tarde, permaneció varios años en París, donde estudió matemáticas y filosofía y construyó instrumentos ópticos. Descartes decidió trasladarse a Holanda, donde estuvo veinte años moviéndose por el país, llevando a cabo su trabajo más importante. Durante este tiempo escribió varios libros, incluyendo el *Discurso*, su obra más famosa, que contiene sus contribuciones a la geometría analítica. Hizo también contribuciones fundamentales a la filosofía.

En 1649, Descartes fue invitado por la reina Cristina a visitarla a su corte de Suecia para ser su tutor en el estudio de la filosofía. Aunque era reacio a vivir en lo que él llamó la «tierra de osos entre rocas y hielo», finalmente aceptó la invitación y se trasladó a Suecia. Lamentablemente, el invierno de 1649-1650 fue extremadamente duro. Descartes enfermó de neumonía y murió a mitad de febrero.

10205571910241225

# Prólogo

**A**l escribir este libro me he guiado por mi amplia experiencia e interés en la enseñanza de la matemática discreta. Para el estudiante, mi propósito era presentar el material de forma precisa y legible, con los conceptos y técnicas en matemática discreta presentados y demostrados con claridad. Mi meta era mostrar la relevancia y utilidad de esta disciplina a los estudiantes, los cuales a menudo se muestran escépticos. Quería dar a los estudiantes de ciencias de la computación toda la base matemática que necesiten en sus estudios. A los estudiantes de matemáticas quería ofrecerles una forma de entender los conceptos matemáticos importantes junto con una idea de por qué estos conceptos son importantes en las aplicaciones. Y quería llevar a cabo estas metas sin rebajar el material.

Para el profesor, mi propósito era diseñar una herramienta didáctica flexible y de amplio espectro empleando técnicas pedagógicas contrastadas en matemáticas. Quería proporcionar a los profesores un volumen de material que pudieran utilizar para enseñar matemática discreta efectiva y eficientemente de la forma más apropiada para sus alumnos. Espero haber alcanzado estas metas.

El tremendo éxito de este libro de texto ha sido extremadamente gratificante para mí. Las muchas mejoras de esta quinta edición han sido posibles gracias a las sugerencias de un gran número de profesores y alumnos de más de quinientas instituciones donde el libro ha sido usado con éxito. Hay bastantes mejoras en esta edición. El material auxiliar ha sido enriquecido. La página web de apoyo proporciona un material útil, haciendo más fácil a estudiantes y profesores cumplir sus objetivos.

Este texto está diseñado como curso de introducción de uno o dos semestres para estudiantes de un amplio número de licenciaturas e ingenierías, entre las que se incluyen matemáticas, ingeniería informática y ciencias de la computación. El único prerrequisito que se exige explícitamente es el conocimiento de álgebra de bachillerato.

## Objetivos de un curso de matemática discreta

Un curso de matemática discreta tiene más de un propósito. Los estudiantes deberían aprender un conjunto particular de realidades matemáticas y cómo aplicarlas; y más importante, este curso debería enseñar a los estudiantes cómo pensar desde un punto de vista matemático. Para alcanzar este objetivo, el texto enfatiza el razonamiento matemático y las diferentes formas en que se resuelven los problemas. Cinco temas importantes se entrelazan en este libro: el razonamiento matemático, el análisis combinatorio, las estructuras discretas, el pensamiento algorítmico y las aplicaciones y el modelado. Un curso acertado de matemática discreta debería mantener un cuidadoso equilibrio entre estos cinco temas.

1. *Razonamiento matemático:* Los estudiantes deben entender el razonamiento matemático para leer, comprender y construir argumentos matemáticos. Este texto comienza con una discusión sobre lógica matemática, que sirve como sustrato para posteriores discusiones sobre métodos de demostración. La técnica de inducción matemática se muestra a través de variados y diferentes tipos de ejemplos y de una cuidadosa explicación de por qué la inducción matemática es una técnica de demostración válida.
2. *Análisis combinatorio:* Una técnica importante para resolver problemas es la capacidad de contar o enumerar objetos. La discusión sobre enumeración en este libro comienza con las técnicas básicas de recuento. Se enfatiza el desarrollo del análisis combinatorio para resolver problemas de enumeración en lugar de la aplicación de fórmulas.
3. *Estructuras discretas:* Un curso de matemática discreta debería enseñar a los estudiantes cómo trabajar con estructuras discretas, que son las estructuras abstractas matemáticas usadas para representar objetos discretos y relaciones entre ellos. Estas estructuras discretas engloban conjuntos, permutaciones, relaciones, grafos, árboles y máquinas de estados finitos.

4. *Pensamiento algorítmico:* Cierta clase de problemas se resuelve especificando un algoritmo. Una vez descrito el algoritmo, se puede implementar mediante un programa de ordenador. Las partes matemáticas de esta actividad, que incluyen la especificación del algoritmo, la verificación de que funciona adecuadamente, así como el análisis de la memoria y tiempo requeridos en su ejecución, se cubren en este texto. Los algoritmos se describen usando tanto lenguaje natural como una forma de pseudocódigo fácil de entender.
5. *Aplicaciones y modelado:* La matemática discreta se puede aplicar en casi cualquier área concebible de estudio. En este texto hay muchas aplicaciones a ciencias de la computación y comunicación de datos, así como aplicaciones a campos tan diversos como la química, la botánica, la zoología, la lingüística, la geografía, las ciencias empresariales e Internet. Estas aplicaciones son usos naturales e importantes de la matemática discreta, en ningún caso forzados. El modelado con matemática discreta es una herramienta de extrema importancia para la resolución de problemas que los estudiantes tienen la posibilidad de desarrollar construyendo sus propios modelos en algunos de los problemas.

## Cambios en la quinta edición

La cuarta edición de este libro se ha utilizado con éxito en más de quinientas facultades y escuelas de Estados Unidos, docenas de universidades en Canadá y en universidades de Europa, Asia y Oceanía. Aunque la cuarta edición ha sido un libro de texto muy eficaz, muchos profesores (incluyendo entre ellos a usuarios con amplia experiencia) han requerido algunos cambios destinados a hacer este libro más eficiente. He dedicado una cantidad significativa de tiempo y energía para satisfacer este propósito.

El resultado es una quinta edición que ofrece mucho más que la cuarta tanto a profesores como a estudiantes. Es especialmente significativo que en la quinta edición se ha mejorado la presentación de los conceptos, haciendo el libro más didáctico. Se ofrecen mejoras sustanciales en lógica, métodos de demostración y estrategias de demostración para ayudar al estudiante a dominar el razonamiento matemático. Se han añadido ejemplos y explicaciones adicionales para clarificar aquellas áreas en las que el estudiante suele encontrar problemas. Nuevos problemas, tanto rutinarios como más exigentes, se han añadido a los bloques de problemas. También se han añadido aplicaciones relevantes, incluyendo muchas relacionadas con Internet y ciencias de la computación. La página web de apoyo se ha ampliado y ahora proporciona herramientas que el estudiante puede utilizar para dominar conceptos fundamentales y explorar el mundo de la matemática discreta.

### Mejora de la organización

- El tratamiento del razonamiento matemático se concentra en el Capítulo 1, desarrollándose desde la lógica proposicional y de predicados hasta las reglas de inferencia y las técnicas básicas de demostración.
- La notación  $O$  y otras relacionadas se discuten inmediatamente antes de la complejidad de algoritmos.
- Las sucesiones y los sumatorios se tratan inmediatamente antes de la sección sobre inducción matemática.
- Los coeficientes binomiales se tratan en una sección separada.
- La teoría de probabilidades tiene un capítulo propio.
- Los algoritmos de ordenación se introducen en el Capítulo 2, haciendo referencia a más algoritmos.

### Lógica

- Se profundiza en las implicaciones, con un tratamiento adicional de la inversa, recíproca y contrarrecíproca de una implicación.
- Se ha añadido una subsección sobre juegos de lógica.
- Los cuantificadores se tratan ahora en dos secciones.
- Se ofrecen más explicaciones sobre cómo traducir lenguaje natural y enunciados matemáticos a expresiones lógicas, y viceversa.
- La negación de cuantificadores se estudia con mayor profundidad.

- Se tratan la resolución y el uso de la lógica de predicados en Prolog.
- Se describe la aplicación de la lógica a especificaciones de sistemas, un tema de interés para ingenieros de sistemas, tanto de *hardware* como de *software*.

### Construir y entender demostraciones

- Los métodos de demostración se incluyen ahora en el Capítulo 1, lo que permite usar explícitamente este material en capítulos posteriores.
- Se presentan explícitamente demostraciones de unicidad.
- La Sección 3.1 explora con más profundidad las estrategias de demostración. Su tratamiento inicial se amplía a lo largo del Capítulo 1.
- El tratamiento de la inducción matemática se ha reforzado con explicaciones adicionales y nuevos ejemplos.
- Se cubre explícitamente la inducción estructural.
- En esta edición se estudia el problema de demostrar que un algoritmo recursivo está correctamente construido.

### Algoritmos

- Los algoritmos voraces se presentan en el Capítulo 2.
- El tratamiento de algoritmos recursivos se ha extendido.
- Se ha ampliado el tratamiento de las búsquedas en profundidad y en anchura.
- Se analiza o discute la complejidad de un número mayor de algoritmos.
- Se ha ampliado el tratamiento de los algoritmos «divide y vencerás» y de las relaciones de recurrencia que se emplean para estudiar su complejidad.
- Se han añadido los algoritmos de exponenciación modular rápida, la solución del problema del par más cercano, la codificación de Huffman y el algoritmo voraz para dar cambio.

### Aplicaciones

- Se han añadido nuevos ejemplos de grafos, entre los que están el de la red de Internet, el de las llamadas telefónicas, el de Hollywood y los de relación y de colaboración.
- Se describen las técnicas que usan los buscadores en Internet.
- Se tratan los códigos de Gray usados en K-mapas.
- Se ha incrementado el tratamiento de la forma de Backus-Naur.
- Se ha ampliado el tratamiento de las relaciones  $n$ -arias y de las bases de datos relacionales.

### Teoría de números, combinatoria y teoría de probabilidades

- La teoría de números relevante para criptografía en clave pública, incluyendo pseudoprimos, números de Carmichael y tests probabilísticos de primalidad, se cubre con mayor profundidad.
- Se ha ampliado el material sobre la conversión entre expresiones en bases diferentes.

### Grafos y árboles

- Se ha añadido una explicación sobre cómo construir inductivamente cubos  $n$ -dimensionales.
- Se tratan con mayor detalle las condiciones suficientes para la existencia de circuitos de Hamilton.
- Se discuten árboles de juego y estrategias de minimax.
- Se presenta la codificación de Huffman.
- Las búsquedas en profundidad y en anchura reciben ahora un tratamiento más amplio.

### Colecciones de problemas

- Se han añadido más de seiscientos problemas, desde rutinarios a muy exigentes, con un énfasis especial en nuevos problemas relacionados con la lógica y las demostraciones, incluyendo inducción.
- Se han añadido problemas para equilibrar los problemas pares (sin resolver) y los impares (resueltos al final del libro).

### Biografías y notas históricas adicionales

- Se han incluido las biografías de Aristóteles, Sheffer, Smullyan, Rivest, Shamir, Adleman, Carmichael, McCarthy y Huffman.
- Se incorporan imágenes de todas las personas descritas en las biografías, excepto en algunos pocos casos.
- Muchas de las biografías que aparecían en la versión anterior se han ampliado.
- Se han añadido nuevas notas históricas.

### La página web ([www.mhhe.com/rosen](http://www.mhhe.com/rosen))

- Se han incluido enlaces a cientos de páginas en Internet.
- Se incluyen ejemplos adicionales en áreas clave.
- Se proporcionan explicaciones y demostraciones más detalladas para ciertos ejemplos.
- Se ofrecen métodos de autoevaluación en temas clave, entre los que se incluyen implicaciones, cuantificado-
- res, métodos de demostración, funciones, notación con la función  $O$ , inducción y problemas de recuento.
- Se han incluido en el libro iconos que indican el tipo de contenido asociado en Internet.
- Se han desarrollado demos interactivas de algoritmos fundamentales para uso integrado con el texto.

## Características especiales

**ACCESIBILIDAD** Este texto ha demostrado ser fácil de leer y entender para principiantes. No es obligatorio ningún prerrequisito matemático más allá del álgebra de bachillerato para la casi totalidad del texto. Los pocos lugares del libro en que se hace referencia al cálculo diferencial o integral se señalan explícitamente. La mayoría de los estudiantes debería entender el pseudo-código usado en el texto para desarrollar los algoritmos sin necesidad de haber estudiado formalmente lenguajes de programación. No se requieren conocimientos de ciencias de la computación.

**FLEXIBILIDAD** El texto ha sido cuidadosamente diseñado para que su uso sea flexible. La dependencia de los capítulos en relación con el material previo se ha minimizado. Cada capítulo se divide en secciones de longitud aproximadamente similar y cada sección se divide en subsecciones que forman bloques naturales de material didáctico. Los profesores pueden organizar fácilmente sus clases utilizando estos bloques.

**ESTILO** El estilo con que se ha escrito este libro es directo y pragmático. El lenguaje matemático se usa sin excesivo formalismo ni abstracción. Se ha tenido cuidado en ponderar la combinación entre notación y texto en los enunciados matemáticos.

**AMPLIO USO EN EL AULA** Este libro se ha empleado en más de quinientas facultades y escuelas universitarias, y en más de cuatrocientas se ha utilizado más de una vez. La interacción con profesores y alumnos de muchas de esas instituciones ha ayudado a que esta quinta edición sea una herramienta más acertada aún para la enseñanza.

**PRECISIÓN Y RIGOR MATEMÁTICOS** Todas las definiciones y teoremas se han enunciado de forma extremadamente cuidadosa, de tal forma que los estudiantes podrán apreciar la precisión en el lenguaje y el rigor necesarios en matemáticas. Las demostraciones se desarrollan despacio; los pasos se justifican detalladamente. Las definiciones recursivas se explican y usan con mucha frecuencia.

**EJEMPLOS TRABAJADOS** Se presentan más de setecientos ejemplos para ilustrar conceptos, relacionar diferentes materias y exponer posibles aplicaciones. En la mayoría de los ejemplos se plantea primero una pregunta; luego se presenta la solución con suficiente grado de detalle.

**APLICACIONES** Las aplicaciones que se incluyen en el texto demuestran la utilidad de la matemática discreta para solucionar problemas del mundo real. El texto incluye aplicaciones a una amplia variedad de áreas, entre las que se incluyen ciencias de la computación, comunicación de datos, psicología, química, ingeniería, lingüística, biología, empresariales e Internet.




**ALGORITMOS** En matemática discreta, los resultados se expresan a menudo con algoritmos. Por tanto, en cada capítulo del libro se presentan algunos algoritmos importantes. Estos algoritmos se formulan haciendo uso de palabras y de una forma de pseudocódigo estructurado sencillo, que se describe y especifica en el Apéndice A.2. También se analiza a un nivel elemental la complejidad computacional de los algoritmos del texto.

**INFORMACIÓN HISTÓRICA** En este texto se describe de forma sucinta el sustrato de muchos temas. Se incluyen como pie de página breves biografías de más de sesenta matemáticos y científicos, junto con sus fotos (o imágenes). Estas biografías incluyen información sobre las vidas, carreras y logros de estas personas que han contribuido al desarrollo de la matemática discreta. Además, se han insertado numerosos pies de página con reseñas históricas a fin de complementar la información histórica del cuerpo principal del texto.

**TÉRMINOS CLAVE Y RESULTADOS** A cada capítulo le sigue una lista de los términos fundamentales. Los términos clave incluyen sólo aquellos más importantes que el estudiante debería aprender, no todos los definidos en el capítulo.

**PROBLEMAS** Hay más de tres mil quinientos problemas en el libro. Se plantean muchos tipos de preguntas diferentes. Hay un amplio suministro de problemas directos que desarrollan técnicas básicas, bastantes problemas de nivel intermedio, y muchos problemas pensados para desafiar al estudiante. Se enuncian claramente y sin ambigüedades, y todos ellos están graduados en función de su dificultad. Los bloques de problemas contienen discusiones particulares, con problemas que desarrollan conceptos nuevos, no cubiertos en el texto, que permiten a los estudiantes descubrir nuevas ideas a través de su propio esfuerzo.

Los problemas que son más difíciles que el promedio se marcan con un asterisco simple. Aquellos que son mucho más difíciles se marcan con dos asteriscos. Los que requieren nociones de cálculo infinitesimal se marcan explícitamente. Los que desarrollan resultados usados en el texto se identifican con el símbolo . Al final del texto se incluyen respuestas a todos los problemas con numeración impar. Las respuestas incluyen demostraciones en las que se detalla con claridad la mayoría de los pasos.

**CUESTIONES DE REPASO** Al final de cada capítulo se proporciona un conjunto de cuestiones de repaso. Se han preparado para ayudar al alumno a concentrar su estudio en los conceptos y técnicas importantes del capítulo. Para responder a estas cuestiones, los estudiantes deben desarrollar respuestas largas, no dar simplemente algunos cálculos o respuestas cortas.

**PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS** Cada capítulo se acompaña de un rico y variado surtido de problemas complementarios. Estos problemas son genéricamente más difíciles que los que se exponen al final de cada sección. Los problemas complementarios refuerzan los conceptos aprendidos en el capítulo e integran materias diferentes de un modo más eficaz.

**EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN** Cada capítulo se acompaña con un conjunto de ejercicios para desarrollar con el ordenador. Los aproximadamente ciento cincuenta ejercicios para ordenador enlazan lo que los estudiantes han podido aprender en matemática discreta y computación. Los más difíciles de lo normal, bien desde el punto de vista matemático o desde el de programación, se marcan con un asterisco. Los de dificultad extrema se marcan con dos asteriscos.

**CÁLCULO Y EXPERIMENTACIÓN** Al final de cada capítulo se ofrece una colección de problemas pensados tanto para calcular como para experimentar. Estos problemas (aproximadamente unos cien en total) se han diseñado como complemento a las herramientas de *software* existentes, tales como programas escritos por estudiantes o profesores o paquetes de cálculo como MAPLE o Mathematica. Muchos de estos problemas dan al estudiante la oportunidad de descubrir nuevas realidades e ideas a través de la informática. (Algunos de estos problemas se discuten en el libro *Exploring Discrete Mathematics with MAPLE*).

**REDACCIÓN DE PROYECTOS** A cada capítulo le sigue un paquete de proyectos propuestos al alumno. Para completarlos, los estudiantes necesitan consultar bibliografía matemática. Algunos de estos proyectos son de naturaleza histórica y pueden involucrar búsquedas en la documentación original. Otros se han confeccionado para servir de punto de partida a otras áreas e

ideas. Todos ellos se han concebido para ofrecer al estudiante ideas no tratadas con profundidad en el texto. Estos proyectos enlazan conceptos matemáticos con el proceso de redacción, mostrando al estudiante posibles áreas de estudio futuro. (Pueden encontrarse referencias sugeridas para estos proyectos en la *Student Solutions Guide*).

**APÉNDICES** Hay dos apéndices en el texto. El primero cubre las funciones exponenciales y logarítmicas, repasando material básico usado con frecuencia a lo largo del curso. El segundo especifica el pseudocódigo utilizado en los algoritmos del texto.

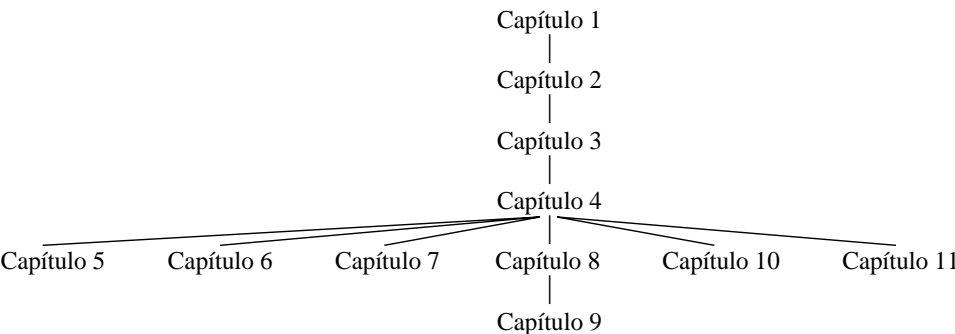
**LECTURAS SUGERIDAS** Al final del texto se proporciona una lista de lecturas recomendadas. Incluye libros de un nivel similar, o inferior, al de este libro, libros más difíciles, artículos de divulgación y artículos en los que se publicaron originalmente descubrimientos en matemática discreta.

## Cómo usar este libro

Este texto se ha organizado y escrito cuidadosamente como soporte de cursos de matemática discreta a varios niveles y con objetivos diferenciados. La tabla siguiente identifica las secciones centrales y opcionales del texto. Un curso de introducción a la matemática discreta de un semestre en primer curso universitario se puede basar en las secciones centrales del libro, cubriéndose las opcionales a discreción del profesor. Un curso de introducción de dos semestres podría incluir todas las secciones opcionales junto con las centrales. Un curso con fuerte enfoque informático puede impartirse cubriendo todas o parte de las secciones sobre ciencias de la computación.

Capítulo	Secciones centrales	Secciones optativas para ciencias de la computación	Secciones optativas para matemáticas
1	1.1-1.8 (opcional)		
2	2.1-2.4, 2.7 (opcional)	2.5	2.6
3	3.1-3.4	3.5, 3.6	
4	4.1-4.3	4.6	4.4, 4.5
5	5.1	5.3	5.2
6	6.1, 6.5	6.3	6.2, 6.4, 6.6
7	7.1, 7.3, 7.5	7.2	7.4, 7.6
8	8.1-8.5		8.6-8.8
9	9.1	9.2, 9.3	9.4, 9.5
10		10.1-10.4	
11		11.1-11.5	

Los profesores que utilicen este libro pueden ajustar el nivel de dificultad de su curso eligiendo dar u omitir los ejemplos más complicados del final de las secciones, al igual que los problemas. La dependencia de cada capítulo con capítulos anteriores se muestra en el siguiente gráfico.



## Material auxiliar

**APLICACIONES DE LA MATEMÁTICA DISCRETA** El material auxiliar, disponible en formato impreso y en la página web, se puede usar junto con el texto o independientemente. Contiene más de 20 capítulos (cada uno de ellos con su propia colección de problemas) escrito por profesores que han utilizado el libro. Siguiendo un formato similar al del texto, los capítulos de este libro se pueden emplear como texto para un curso, para un seminario o para que el estudiante desarrolle su estudio independiente.

## Agradecimientos

Querría dar las gracias a los muchos profesores y alumnos universitarios que han utilizado este libro y me han proporcionado interesantes sugerencias. Sus ideas han hecho este libro mucho mejor de lo que hubiese sido sin su contribución. Quiero dar las gracias especialmente a Jerrold Grossman y John Michaels por la revisiones técnicas de la quinta edición y por su «vista de águila», que ha ayudado a mantener el rigor de este libro. También aprecio la ayuda que me han proporcionado aquellos que me han enviado sus comentarios a través de Internet.

Doy las gracias a los revisores de esta quinta edición y las cuatro anteriores. Me han proporcionado críticas muy útiles y ánimos. Espero que esta quinta edición esté a la altura de sus expectativas.

### Revisores de la quinta edición

Kendall Atkinson,  
*University of Iowa, Iowa City*

Zhaojun Bai,  
*University of California, Davis*

Klaus Bichteler,  
*University of Texas, Austin*

Scott Buffett,  
*University of New Brunswick*

E. Rodney Canfield,  
*University of Georgia*

George J. Davis,  
*Georgia State University*

Bruce S. Elenbogen,  
*University of Michigan,  
Dearborn*

Jonathan Goldstine,  
*Pennsylvania State University*

Brian Gray,  
*Howard Community College*

Jonathan Gross,  
*Columbia University*

Jerrold Grossman,  
*Oakland University*

David F. Hayes,  
*San José State University*

Akihiro Kanamori,  
*Boston University*

Takashi Kimura,  
*Boston University*

Shui F. Lam,  
*California State University,  
Long Beach*

Harbir Lamba,  
*George Mason University*

Sheau Dong Lang,  
*University of Central Florida*

Cary Lee,  
*Grossmont Community College*

Stephen C. Locke,  
*Florida Atlantic University*

George F. Luger,  
*University of New Mexico*

John G. Michaels,  
*SUNY Brockport*

Thomas D. Morley,  
*Georgia Tech*

Timothy S. Norfolk, Sr.,  
*University of Akron*

Truc T. Nguyen,  
*Bowling Green State University*

George Novacky,  
*University of Pittsburgh*

Jaroslav Opatrny,  
*Concordia University*

Jonathan Pakianathan,  
*University of Rochester*

Halina Przymusińska,  
*California State Polytechnic  
University, Pomona*

Don Reichman,  
*Mercer County Community  
College*

Robert Rodman,  
*North Carolina State University*

Matthew J. Saltzman,  
*Clemson University*

Michael J. Schlosser,  
*The Ohio State University*

Alistair Sinclair,  
*University of California, Berkeley*

Carl H. Smith,  
*University of Maryland*

Patrick Tantalo,  
*University of California,  
Santa Cruz*

### Revisiones de ediciones anteriores

Eric Allender,  
*Rutgers University*

Stephen Andrilli,  
*La Salle University*

Jack R. Barone,  
*Baruch College*

Alfred E. Borm,  
*Southwest Texas State University*

Ken W. Bosworth,  
*University of Maryland*

Lois Brady,  
*California Polytechnic State  
University, San Luis Obispo*

Russell Campbell,  
*University of Northern Iowa*

Kevin Carolan,  
*Marist College*

Tim Carroll,  
*Bloomsburg University*

Kit C. Chan,  
*Bowling Green State University*

Allan C. Cochran,  
*University of Arkansas*

Peter Collinge,  
*Monroe Community College*

Ron Davis,  
*Millersville University*

Nachum Dershowitz,  
*University of Illinois,  
Urbana-Champaign*

Thomas Dowling,  
*The Ohio State University*

Patrick C. Fischer,  
*Vanderbilt University*

Jane Fritz,  
*University of New Brunswick*

Ladnor Geissinger,  
*University of North Carolina*

Paul Gormley,  
*Villanova University*

Laxmi N. Gupta,  
*Rochester Institute of Technology*

Daniel Gusfield,  
*University of California at Davis*

Xin He,  
*SUNY at Buffalo*

Arthur M. Hobbs,  
*Texas A&M University*

Donald Hutchison,  
*Clackamas Community College*

Kenneth Johnson,  
*North Dakota State University*

David Jonah,  
*Wayne State University*

W. Thomas Kiley,  
*George Mason University*

Nancy Kinnersley,  
*University of Kansas*

Gary Klatt,  
*University of Wisconsin*

Nicholas Krier,  
*Colorado State University*

Lawrence S. Kroll,  
*San Francisco State University*

Robert Lavelle,  
*Iona College*

Yi-Hsin Liu,  
*University of Nebraska at Omaha*

George Luger,  
*University of New Mexico*

David S. McAllister,  
*North Carolina State University*

Robert McGuigan,  
*Westfield State College*

Michael Maller,  
*Queens College*

Ernie Manes,  
*University of Massachusetts*

Francis Masat,  
*Glassboro State College*

J. M. Metzger,  
*University of North Dakota*

D. R. Morrison,  
*University of New Mexico*

Ho Kuen Ng,  
*San José State University*

Jeffrey Nunemacher,  
*Ohio Wesleyan University*

Charles Parry,  
*Virginia Polytechnic Institute and  
State University*

Thomas W. Parsons,  
*Hofstra University*

Mary K. Prisco,  
*University of Wisconsin-Green Bay*

Harold Reiter,  
*University of North Carolina*

Adrian Riskin,  
*Northern Arizona State University*

Amy L. Rocha,  
*San José State University*

Janet Roll,  
*University of Findlay*

Alyssa Sankey,  
*Slippery Rock University*

Dinesh Sarvate,  
*College of Charleston*

Steven R. Seidel,  
*Michigan Technological University*

Douglas Shier,  
*Clemson University*

Hunter S. Snevily,  
*University of Idaho*

Daniel Somerville,  
*University of Massachusetts,  
Boston*

Bharti Temkin,  
*Texas Tech University*

Wallace Terwilligen,  
*Bowling Green State University*

Philip D. Tiu,  
*Oglethorpe University*

Lisa Townsley-Kulich,  
*Illinois Benedictine College*

George Trapp,  
*West Virginia University*

David S. Tucker,  
*Midwestern State University*

Thomas Upson,  
*Rochester Institute of Technology*

Roman Voronka,  
*New Jersey Institute of Technology*

James Walker,  
*University of South Carolina*

Anthony S. Wojcik,  
*Michigan State University*

Querría agradecer al personal de McGraw-Hill el gran apoyo recibido a este proyecto. En particular, agradezco a Bill Barter, editor, su respaldo; a Robert Ross, editor ejecutivo, su apoyo y entusiasmo, y a Michelle Munn, editora de desarrollo, su dedicación y atención. Quiero también dar las gracias al editor de mesa, Wayne Yuhasz, cuya visión y capacidad ayudaron a asegurar el éxito del libro, así como a Maggie Rogers, editora espónsor de esta edición, que me ayudó a planificar e iniciar el trabajo de esta edición y con la que he trabajado muchos años.

Quisiera ofrecer mi agradecimiento al personal encargado de la producción de esta quinta edición: Joyce Berendes, responsable de proyecto; K. Wayne Harms, diseñador; Jeff Huettman, diseñador de la página web; Laura Fuller, coordinadora de los suplementos, y Mary Kittell, responsable de *marketing*. También doy las gracias a Georgia Kamvosoulis Mederer por depurar el texto completo; a Mary Ellen Oliver, correctora técnica, y a Paul Lorzak, que comprobaron que el manual de soluciones fuese correcto, al igual que las secciones de soluciones del libro.

Como siempre, agradezco el apoyo recibido por mis superiores en los Laboratorios AT&T. Me han proporcionado un entorno que me ha permitido desarrollarme profesionalmente y me han provisto generosamente de los recursos necesarios para que este libro fuese un éxito

*Kenneth H. Rosen*

# **Matemática Discreta y sus Aplicaciones**

**5.ª edición**

# La página web de ayuda

Se ha habilitado una extensa página web que se mantendrá y mejorará de forma continuada. Se puede hacer uso de ella de varias formas como complemento en el estudio de la matemática discreta. La dirección de esta página es: [www.mhhe.com/rosen](http://www.mhhe.com/rosen), que está disponible en inglés.

Desde esta página principal encontrarás enlaces a:

- El Centro de Información.
- El Centro para el Estudiante.
- El Centro para el Profesor.

**EL CENTRO DE INFORMACIÓN** El Centro de Información contiene información básica sobre el libro y el material auxiliar disponible. Siguiendo los enlaces accesibles desde el Centro de Información se puede obtener una visión general de la página web de este libro.

**EL CENTRO PARA EL ESTUDIANTE** El Centro para el Estudiante contiene un conjunto de recursos disponibles para uso del estudiante, incluyendo los que a continuación se presentan. Para hacer referencia a ellos en el texto se hace uso de un icono especial, indicado en el margen.



- **La guía de recursos de Internet** Esta guía proporciona enlaces a cientos de páginas externas de Internet que contiene material relevante. Puedes pinchar directamente en esos enlaces o acceder a ellos mediante el número de la página del texto o por palabras clave. Estos enlaces te llevarán a páginas de contenido histórico y material bibliográfico, cuestiones y problemas, discusiones, *applets*, programas y otros tipos de recursos.



- **Ejemplos adicionales** Puedes encontrar un gran número de ejemplos adicionales en la página web. Estos ejemplos se concentran en áreas donde el estudiante a menudo reclama material adicional. Aunque la mayoría de los ejemplos recalcan conceptos básicos, se pueden encontrar también algunos más exigentes.



- **Pasos adicionales** Se proporcionan explicaciones más profundas para ayudar a entender algunos puntos problemáticos del texto, en especial en determinadas demostraciones y ejemplos



- **Evaluaciones** Puedes evaluar tu conocimiento de siete conceptos fundamentales. Cada evaluación proporciona una colección de preguntas, cada una con un breve tutorial, seguido de cuestiones de elección múltiple. Si seleccionas una respuesta incorrecta, te proporciona ayuda para entender tu error. Usando estas evaluaciones, deberías ser capaz de diagnosticar tus carencias y centrarte en los métodos de solución disponibles.



- **Demostraciones interactivas** Hemos desarrollado ocho demostraciones interactivas que puedes usar para explorar el funcionamiento de algoritmos importantes. Estas demostraciones se relacionan con material del texto.

Desde el Centro para el Estudiante puedes acceder a *Net Tutor*<sup>TM</sup>, que proporciona un tutorial interactivo. Puedes hacer preguntas relacionadas con el texto y recibir las respuestas en tiempo real en el horario regular establecido o recibir las respuestas con posterioridad.

El Centro para el Estudiante también mantiene un *Tablón (Bulletin Board)* en el que puedes pinchar mensajes. Se pueden enviar preguntas y responder mensajes de otros estudiantes que hayan usado este recurso.

Otros recursos adicionales del Centro para el Estudiante incluyen:

- Una guía para desarrollar demostraciones.
- Errores comunes en matemática discreta.
- Recomendaciones sobre redacción de proyectos.
- *Software* MAPLE.

**EL CENTRO PARA EL PROFESOR** Esta parte de la página web proporciona enlaces a los recursos del Centro para el Estudiante y el Centro de Información, así como:

- Muestras de planes de estudios.
- Sugerencias docentes.
- Muestras de transparencias.
- Varios capítulos del libro *Applications of Discrete Mathematics*.

# Al estudiante

*¿Qué es la matemática discreta?* La matemática discreta es la parte de la matemática que se dedica al estudio de los objetos discretos. (Aquí *discreto* significa constituido por elementos distintos o inconexos). Los tipos de preguntas que se resuelven haciendo uso de la matemática discreta incluyen:

- ¿De cuántas formas se puede elegir una clave de acceso a un equipo informático?
- ¿Cuál es la probabilidad de que te toque la lotería?
- ¿Hay algún enlace entre dos ordenadores en una red?
- ¿Cuál es el camino más corto entre dos ciudades usando un sistema de transporte?
- ¿Cómo se puede ordenar una lista de enteros para que se dispongan en orden creciente?
- ¿Cómo se puede demostrar que un algoritmo ordena correctamente una lista?
- ¿Cómo se puede diseñar un circuito para sumar dos enteros?
- ¿Cuántas direcciones válidas de Internet existen?

Aprenderás las estructuras discretas y las técnicas necesarias para responder a preguntas como éstas.

Más genéricamente, la matemática discreta se usa siempre que se cuentan objetos, cuando se estudian relaciones entre conjuntos finitos (o numerables) y cuando se analizan procesos con un número finito de pasos. Una razón fundamental para el crecimiento de la importancia de la matemática discreta es que en equipos informáticos la información se almacena y manipula de forma discreta.

**¿POR QUÉ ESTUDIAR MATEMÁTICA DISCRETA?** Hay varias razones importantes para estudiar matemática discreta. Primero, a través de este curso puedes desarrollar tu madurez en matemáticas, es decir, tu habilidad para entender y crear argumentos matemáticos. No llegarás muy lejos en matemáticas sin estas técnicas.

Segundo, la matemática discreta es la puerta a cursos más avanzados en todas las partes de la matemática. Proporciona la base matemática a muchos cursos de ciencias de la computación, incluyendo estructura de datos, algoritmos, teoría de base de datos, teoría de autómatas, lenguajes formales, teoría de compiladores, seguridad informática y sistemas operativos. Los estudiantes encuentran estos cursos mucho más difíciles cuando no tienen la base apropiada de matemática discreta. ¡Una estudiante me envió un correo electrónico diciéndome que usaba el índice de este libro en todos cursos de ciencias de la computación que daba!

Los cursos de matemáticas que se basan en el material que se estudia en matemática discreta incluyen lógica, teoría de conjuntos, teoría de números, álgebra lineal, álgebra abstracta, combinatoria, teoría de grafos y teoría de probabilidades (la parte discreta de las probabilidades).

Por otra parte, la matemática discreta contiene el sustrato matemático necesario para resolver problemas en investigación operativa (incluyendo muchas técnicas discretas de optimización), química, ingeniería, biología... En este texto estudiaremos aplicaciones a algunas de estas áreas.


Muchos estudiantes encuentran un curso de introducción a la matemática discreta mucho más difícil que otras asignaturas que ya han cursado. Una razón para esto es que uno de los objetivos primarios de este curso es enseñar razonamiento matemático y resolución de problemas más que un conjunto discreto de técnicas. Los problemas de este libro se han preparado para reflejar este objetivo. Aunque en este texto hay una gran cantidad de problemas similares a los que se exponen en los ejemplos, un gran porcentaje de ellos requiere deducciones originales. Esto es intencionado. El material tratado en el texto proporciona las herramientas necesarias para resolver estos problemas, pero tu trabajo consiste en aplicar estas herramientas usando tu creatividad. Uno de los objetivos primeros de este libro es aprender cómo atacar problemas que pueden ser, en alguna medida, diferentes a los que se han visto con anterioridad. Lamentablemente, aprender a resolver sólo unos tipos particulares de problemas no es suficiente para tener éxito en el desarrollo de las técnicas de resolución de problemas que se necesitan en cursos superiores y en la carrera profesional.



Este texto afronta muchos temas diferentes, pero la matemática discreta es un área de estudio extremadamente diversa y amplia. Una de mis metas como autor es ayudarte a desarrollar las habilidades que necesitas para dominar el material adicional que necesitarás en tu profesión futura.

**PROBLEMAS** Me gustaría ofrecer algunos consejos sobre cómo aprender mejor matemática discreta (y otras áreas de ciencias de la computación y matemáticas). Aprenderás más trabajando activamente los problemas. Te sugiero que resuelvas tantos problemas como puedas. Una vez trabajados los problemas indicados por tu profesor, te animo a que resuelvas otros adicionales como los que se presentan al final de cada sección del texto y en las colecciones de problemas complementarios al final de cada capítulo. (Ten en cuenta las claves asociadas a los símbolos que preceden al problema).

### Claves asociadas a los problemas

Sin marca	Un problema rutinario.
*	Un problema difícil.
**	Un problema muy difícil.
	Un problema que contiene un resultado usado en el texto.
(Se requiere Cálculo)	Un problema cuya solución requiere el uso de límites o conceptos de cálculo diferencial o integral.

Lo mejor es intentar los problemas por ti mismo antes de consultar la sección de soluciones al final del libro o completar las soluciones que te proporciona la *Student Solutions Guide* [disponible sólo en inglés]. Las *soluciones* a los problemas con numeración impar se proporcionan al final del texto. Ten en cuenta que sólo son soluciones, no la resolución completa. En particular, se omite el razonamiento requerido para obtener estas respuestas. La *Student Solutions Guide* proporciona las soluciones completas a los problemas impares. Cuando llegues a un punto muerto intentando resolver un problema con número impar, te sugiero que consultes la *Student Solutions Guide* y busques alguna pista. Cuanto más trabajo realices por ti mismo, en vez de leer o copiar las soluciones pasivamente, más aprenderás. El no dar las respuestas y soluciones a los problemas pares es intencionado; pregunta a tu profesor si tienes algún problema en alguno de ellos.

**RECURSOS EN INTERNET** Te animo abiertamente a que saques partido de los recursos adicionales disponibles en Internet, especialmente en la página de este libro: [www.mhhe.com/rosen](http://www.mhhe.com/rosen). Encontrarás ejemplos adicionales, pasos adicionales pensados para clarificar aquellas cuestiones donde los estudiantes suelen encontrar mayores dificultades, evaluaciones para medir cómo has entendido algunos conceptos fundamentales, algoritmos animados para explorar algunos algoritmos básicos y un popurrí de enlaces a otras páginas a las que puedes acceder para explorar el mundo de la matemática discreta. Puedes también encontrar un tablón para discusiones con otros estudiantes. Puedes usar este tablón para pedir ayuda a otros estudiantes o para ofrecer ideas para resolver algún problema. Aquellos estudiantes que contribuyan a resolver cuestiones se darán cuenta de que este trabajo les ayudará a ellos mismos a dominar la materia. Tendrás incluso acceso a un servicio tutorial interactivo que puedes utilizar para recibir ayuda de tutores en tiempo real o a través de mensajes. (Por favor, sigue las indicaciones del tutor en relación al uso del trabajo hecho por otros). Para más detalles sobre la página web, mira las páginas xvii y xviii.

**EL VALOR DE ESTE LIBRO** Finalmente, comprendo que este libro es costoso. Mi intención es hacer de tu compra una excelente inversión. El desarrollo y depuración del libro, el material auxiliar y la página web de apoyo han llevado muchos años de esfuerzos. Confío en que a la mayoría de vosotros os ayude a dominar la matemática discreta. Incluso aunque posiblemente no cubras todos los capítulos durante este curso, puedes encontrarlo útil, como anteriormente otros estudiantes, cuando consultes secciones relevantes del libro en cursos superiores. La mayoría de vosotros volverá a usar este libro en estudios futuros, especialmente aquellos que continuéis estudiando o trabajando en ciencias de la computación, matemática o ingeniería.

Kenneth H. Rosen

# Los fundamentos: lógica y demostración, conjuntos y funciones

En este capítulo se repasan los fundamentos de la matemática discreta. Se cubren tres importantes temas: lógica, conjuntos y funciones. Las reglas de la lógica especifican el significado de los enunciados matemáticos. Por ejemplo, estas reglas nos ayudan a entender y razonar enunciados como «Existe un entero que no es la suma de dos cuadrados» o «Para todo entero positivo  $n$ , la suma de enteros positivos que no sobrepasan  $n$  es  $n(n+1)/2$ ». La lógica es la base de todo razonamiento matemático, y tiene aplicaciones prácticas en el diseño de equipos informáticos, la especificación de sistemas, la inteligencia artificial, la programación computacional, los lenguajes de programación y en otras áreas de ciencias de la computación, así como en otros muchos campos de estudio.

Para entender las matemáticas debemos entender qué es lo que constituye un argumento matemático correcto, es decir, una demostración. Además, para aprender matemáticas, una persona necesita construir activamente argumentos matemáticos, no limitarse a leer una exposición. En este capítulo explicamos cómo completar un argumento matemático correcto y presentamos herramientas para construir estos argumentos. Las demostraciones no son importantes sólo en matemáticas, sino en muchas partes de las ciencias de la computación, entre las que se incluyen verificación de programas, análisis de resultados de algoritmos y sistemas de seguridad. Se han construido sistemas de razonamiento automatizado que permiten a los ordenadores construir sus propias demostraciones.

Gran parte de la matemática discreta está dedicada al estudio de estructuras discretas, las cuales se usan para representar objetos discretos. Muchas estructuras discretas importantes se construyen utilizando conjuntos, que son colecciones de objetos. Entre las estructuras discretas construidas mediante conjuntos están las combinaciones, o colecciones desordenadas de objetos que se usan mucho en recuento; relaciones, o conjuntos de pares ordenados que representan dependencias entre objetos; grafos, que consisten en conjuntos de vértices y aristas que conectan vértices, y máquinas de estado finito, que se usan para modelar sistemas informáticos.

El concepto de función es extremadamente importante en matemática discreta. Una función asigna a cada elemento de un conjunto exactamente un elemento de otro conjunto. Estructuras útiles tales como sucesiones y cadenas son tipos especiales de funciones. Se usan para representar la complejidad computacional de los algoritmos, para estudiar el tamaño de los conjuntos, contar objetos de diferentes tipos y en una infinidad de casos más.

## 1.1 Lógica

### INTRODUCCIÓN

Las reglas de la lógica le dan un significado preciso a los enunciados matemáticos o sentencias matemáticas. Estas reglas se usan para distinguir entre argumentos válidos y no válidos. Considerando que uno de los principales objetivos de este libro es enseñar al lector cómo entender y construir argumentos matemáticos correctos, empezamos nuestro estudio de la matemática discreta con una introducción a la lógica.

Además de su importancia en el razonamiento matemático, la lógica tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación. Las reglas de la lógica se usan en el diseño de circuitos de ordenador, la construcción de programas informáticos, la verificación de que un programa está bien construido y en muchas otras aplicaciones. Discutiremos cada una de ellas en los capítulos siguientes.

## PROPOSICIONES

Nuestra discusión comienza con una introducción a la construcción de los bloques básicos de la lógica: las proposiciones. Una **proposición** es una oración declarativa que es correcta o falsa, pero no ambas cosas a la vez.

**EJEMPLO 1** Todas las siguientes oraciones declarativas son proposiciones:

1. Bruselas es la capital de la Unión Europea.
2. Toronto es la capital de Canadá.
3.  $1 + 1 = 2$ .
4.  $2 + 2 = 3$ .

Las proposiciones 1 y 3 son correctas, mientras que la 2 y 4 son falsas. ◀

En el siguiente ejemplo damos algunas oraciones que no son proposiciones.

**EJEMPLO 2** Considera las siguientes oraciones:

1. ¿Qué hora es?
2. Lee esto con atención.
3.  $x + 1 = 2$ .
4.  $x + y = z$ .

Las frases 1 y 2 no son proposiciones porque no son declarativas. Las frases 3 y 4 no son proposiciones porque no son ni verdaderas ni falsas, ya que no se les han asignado valores a las variables. En la Sección 1.3 se verán varias formas de crear proposiciones a partir de frases de este tipo. ◀

Para denotar proposiciones usamos letras, al igual que usamos letras para denotar variables. Por convenio, las letras que se utilizan para denotar proposiciones son  $p, q, r, s, \dots$ . El **valor de verdad** de una proposición es verdadero, y se denota por **V**, si es una proposición verdadera, o falso, denotado por **F**, si es una proposición falsa.

El área de la lógica que trata de proposiciones se llama **cálculo proposicional** o **lógica proposicional**. Fue desarrollada sistemáticamente por primera vez por el filósofo griego Aristóteles hace más de dos mil trescientos años.

Prestamos ahora nuestra atención a los métodos para producir proposiciones nuevas a partir de las ya existentes. Estos métodos fueron estudiados por el matemático inglés George Boole en 1854 en su libro *Las leyes del pensamiento*. Muchos enunciados matemáticos se construyen combinando una o más proposiciones. Las nuevas proposiciones, llamadas **fórmulas** o **proposiciones compuestas**, se forman a partir de las existentes usando operadores lógicos.



**ARISTÓTELES (384 a.C.-322 a.C.)** Aristóteles nació en Estagira, Macedonia, al norte de Grecia. Su padre fue médico personal del rey de Macedonia. Debido a que su padre murió siendo Aristóteles aún joven, no pudo seguir la costumbre de mantener la profesión de su padre. Quedó huérfano al morir su madre. Su cuidador le enseñó poesía, retórica y griego. A la edad de diecisiete años le envió a Atenas a continuar sus estudios. Aristóteles ingresó en la Academia, donde recibió lecciones de Platón durante veinte años. Más tarde fue él mismo profesor de retórica. Cuando Platón murió en el 347 a.C., Aristóteles no fue elegido para sucederle debido a que sus puntos de vista diferían demasiado de los de Platón. Así, Aristóteles ingresó en la corte del rey Hermías, donde permaneció durante tres años y se casó con la sobrina del rey. Cuando los persas destruyeron a Hermías, Aristóteles se mudó a Mitilene, y por invitación del rey Filipo de Macedonia, fue tutor de Alejandro, hijo de Filipo, que llegó a ser conocido como Alejandro Magno. Aristóteles educó a Alejandro durante cinco años, y tras la muerte del rey Filipo, volvió a Atenas y estableció su propia escuela, llamada el Liceo.

Los seguidores de Aristóteles fueron llamados los peripatéticos, que significa «los que pasean», debido a que Aristóteles solía pasear mientras discutía cuestiones filosóficas. Aristóteles enseñó en el Liceo durante trece años, donde daba clases a sus estudiantes avanzados por la mañana y conferencias populares a una amplia audiencia por la tarde. Cuando Alejandro Magno murió en el 323 a.C., una reacción contra todo lo relacionado con él condujo a imputar a Aristóteles cargos por impío. Aristóteles huyó a Calcis para evitar ser procesado. Vivió en Calcis sólo un año, muriendo de una enfermedad estomacal en el 322 a.C.

Aristóteles escribió tres tipos de trabajos: escritos dirigidos a públicos populares, compilaciones de resultados científicos y tratados sistemáticos. Estos últimos incluyeron tratados de lógica, filosofía, psicología, física e historia natural. Uno de los alumnos de Aristóteles preservó sus escritos escondiéndolos en una cripta, donde un adinerado coleccionista de libros los descubrió doscientos años más tarde. Se llevaron a Roma, donde fueron estudiados por eruditos y reeditados, preservándolos para la posteridad.

Enlaces

Enlaces

**DEFINICIÓN 1**

Sea  $p$  una proposición. El enunciado

«No se cumple  $p$ »

es otra proposición, llamada la *negación* de  $p$ . La negación de  $p$  se denota mediante  $\neg p$ . La proposición  $\neg p$  se lee «no  $p$ ».

**EJEMPLO 3** Obtén la negación del enunciado

«Hoy es viernes»

y exprésala del modo más simple posible.



*Solución:* La negación es

«No se cumple que hoy es viernes».

Esta negación se puede expresar más simplemente por

«Hoy no es viernes»

o

«No es viernes hoy».

**Tabla 1.** La tabla de verdad para la negación de una proposición.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

**Observación:** Hablando estrictamente, las oraciones relacionadas con tiempos variables como las del Ejemplo 3 no son proposiciones, a no ser que se asuma un tiempo fijo. Esto mismo es válido para lugares variables, a no ser que se fije un lugar determinado, y para pronombres, a no ser que se asuma una persona en particular.

Una **tabla de verdad** muestra las relaciones entre los valores de verdad de proposiciones. Las tablas de verdad son especialmente valiosas a la hora de determinar los valores de verdad de proposiciones construidas a partir de proposiciones más simples. La Tabla 1 muestra los dos posibles valores de verdad de una proposición  $p$  y los correspondientes valores de verdad de su negación  $\neg p$ .

La negación de una proposición se puede considerar como el resultado de aplicar el **operador negación** sobre una proposición. El operador negación construye una nueva proposición a partir de la proposición individual existente. Ahora introduciremos los operadores lógicos que se usan para formar nuevas proposiciones a partir de dos o más proposiciones ya creadas. Esos operadores lógicos se llaman también **conectivos lógicos**.

**DEFINICIÓN 2**

Sean  $p$  y  $q$  proposiciones. La proposición « $p$  y  $q$ », denotada por  $p \wedge q$ , es la proposición que es verdadera cuando tanto  $p$  como  $q$  son verdaderas y falsa en cualquier otro caso. La proposición  $p \wedge q$  se llama *conjunción* de  $p$  y  $q$ .

La tabla de verdad para  $p \wedge q$  se muestra en la Tabla 2. Observa que hay cuatro filas en esta tabla de verdad, una fila por cada posible combinación de valores de verdad para las proposiciones  $p$  y  $q$ .

**EJEMPLO 4** Obtén la conjunción de las proposiciones  $p$  y  $q$  en el caso en que  $p$  es el enunciado «Hoy es viernes» y  $q$  es «Hoy llueve».

*Solución:* La conjunción de estas proposiciones,  $p \wedge q$ , es el enunciado «Hoy es viernes y hoy llueve». La proposición es verdadera los viernes con lluvia y es falsa cualquier día que no sea viernes y los viernes que no llueve.

**Tabla 2.** Tabla de verdad de la conjunción de dos proposiciones.

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

**Tabla 3.** Tabla de verdad de la disyunción de dos proposiciones.

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

### DEFINICIÓN 3

Sean  $p$  y  $q$  proposiciones. La proposición « $p$  o  $q$ », denotada por  $p \vee q$ , es la proposición que es falsa cuando tanto  $p$  como  $q$  son falsas y verdadera en cualquier otro caso. La proposición  $p \vee q$  se llama *disyunción* de  $p$  y  $q$ .

La tabla de verdad para  $p \vee q$  se muestra en la Tabla 3.

El uso del conectivo lógico  $\vee$  en una disyunción se asocia al significado en sentido inclusivo de la palabra  $\vee$ . Una disyunción es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones es verdadera. Por ejemplo, el  $\vee$  en sentido inclusivo se emplea en el enunciado:

«Los estudiantes que hayan cursado cálculo o ciencias de la computación pueden matricularse en esta clase.»

Con esta frase se quiere decir que los estudiantes que han cursado bien cálculo o bien ciencias de la computación pueden matricularse en la clase, así como los estudiantes que han cursado ambas asignaturas. Por otra parte, estamos usando el  $\vee$  exclusivo cuando decimos:

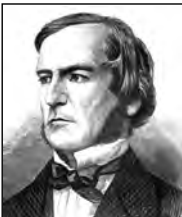
«Los estudiantes que hayan cursado cálculo o ciencias de la computación, pero no ambos, pueden matricularse en esta clase.»

Ahora se quiere expresar que aquellos que hayan cursado tanto cálculo como ciencias de la computación no pueden matricularse. Sólo pueden hacerlo aquellos que hayan cursado exactamente una de las dos asignaturas.

De forma similar, cuando en un menú de restaurante vemos «Se sirve sopa o ensalada como entrante», casi siempre se quiere decir que los clientes pueden tomar bien sopa o bien ensalada, pero no ambos. Por tanto, éste es un uso exclusivo no inclusivo de la disyunción  $\vee$ .

### EJEMPLO 5

¿Cuál es la disyunción de las proposiciones  $p$  y  $q$  en el caso en que  $p$  y  $q$  sean las proposiciones del Ejemplo 4?



**GEORGE BOOLE (1815-1864)** George Boole, hijo de un zapatero, nació en Lincoln, Inglaterra, en noviembre de 1815. Debido a la difícil situación financiera de su familia, Boole tuvo que sacrificarse educándose a sí mismo al mismo tiempo que mantenía a su familia. No obstante, llegó a ser uno de los más importantes matemáticos de su época. Aunque consideró hacer carrera como sacerdote, decidió dedicarse a la enseñanza y pronto montó su propia escuela. En su preparación para dar clases de matemáticas, Boole —insatisfecho con los libros de texto del momento— decidió leer los trabajos de los grandes matemáticos. Mientras leía los artículos del gran matemático francés Lagrange, Boole realizó descubrimientos en el cálculo de variaciones, la rama del análisis que trata de la búsqueda de curvas y superficies que optimizan ciertos parámetros.

En 1848 publicó *The Mathematical Analysis of Logic*, la primera de sus contribuciones a la lógica simbólica. En 1849 fue nombrado profesor de matemáticas en el Queen's College de Cork, Irlanda. En 1854 publicó *The Laws of Thought*, su trabajo más famoso. En este libro Boole presenta lo que actualmente se conoce como *Álgebra de Boole* en su honor. Boole escribió textos sobre ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias que se usaron en Gran Bretaña hasta finales del siglo XIX. Boole se casó en 1855; su mujer era la sobrina del profesor de griego en el Queen's College. En 1864, Boole murió de neumonía, que contrajo como resultado de mantener el compromiso de dar una conferencia incluso a pesar de que estaba completamente empapado a causa de una tormenta.

\* NOTA DEL TRADUCTOR. La conjunción  $\wedge$  puede también usarse con los significados «es decir», «esto es» u «o más bien». Estos sentidos se descartan en el texto.

**Solución:** La disyunción de  $p$  y  $q$ ,  $p \vee q$ , es el enunciado

«Hoy es viernes u hoy llueve».

Esta proposición es verdadera cualquier día que sea viernes o llueva (incluidos los viernes que llueve). Es sólo falsa los días que ni son viernes ni llueve. ◀

Como se señaló previamente, el uso del conectivo lógico  $\vee$  en una disyunción corresponde a uno de los dos sentidos de la palabra  $\vee$ , a saber, el modo inclusivo. Por tanto, una disyunción es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones en ella es verdadera. A veces usamos el  $\vee$  en sentido exclusivo. Cuando se usa el  $\vee$  en sentido exclusivo para conectar dos proposiciones  $p$  y  $q$ , obtenemos la proposición « $p$  o  $q$  (pero no ambos)». Esta proposición es verdadera cuando  $p$  es verdadera y  $q$  falsa y cuando  $p$  es falsa y  $q$  verdadera. Es falsa cuando tanto  $p$  como  $q$  son falsas y cuando ambas son verdaderas.

Ejemplos  
adicionales

#### DEFINICIÓN 4

Sean  $p$  y  $q$  proposiciones. El conectivo lógico  $\vee$  *exclusivo* de  $p$  y  $q$ , denotada por  $p \oplus q$ , es la proposición que es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones  $p$  y  $q$  es verdadera y es falsa en cualquier otro caso.

La tabla de verdad para el  $\vee$  exclusivo de dos proposiciones se muestra en la Tabla 4.

**Tabla 4.** Tabla de verdad para el  $\vee$  exclusivo de dos proposiciones.

$p$	$q$	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

**Tabla 5.** Tabla de verdad de la implicación  $p \rightarrow q$ .

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

## IMPLICACIONES

Vamos a discutir otras formas importantes de combinar las proposiciones.

#### DEFINICIÓN 5

Sean  $p$  y  $q$  proposiciones. La *implicación*  $p \rightarrow q$  es la proposición que es falsa cuando  $p$  es verdadera y  $q$  es falsa y verdadera en cualquier otro caso. En esta implicación  $p$  se llama *hipótesis* (o *antecedente* o *premisa*) y  $q$  se llama *tesis* o *conclusión* (o *consecuencia*).

Evaluación

La tabla de verdad para la implicación  $p \rightarrow q$  se muestra en la Tabla 5. La implicación a veces se denomina **declaración condicional**.

Debido a que las implicaciones desempeñan un papel esencial en el razonamiento matemático, existen muchas formas de expresar  $p \rightarrow q$ . Encontrarás muchas de ellas, si no todas, entre las siguientes expresiones:

«si  $p$ , entonces  $q$ »

«si  $p$ ,  $q$ »

« $p$  es suficiente para  $q$ »

« $q$  si  $p$ »

« $q$  cuando  $p$ »

«una condición necesaria para  $p$  es  $q$ »

« $p$  implica  $q$ »

« $p$  sólo si  $q$ »

«una condición suficiente para  $q$  es  $p$ »

« $q$  siempre que  $p$ »

« $q$  es necesario para  $p$ »

« $q$  se deduce de  $p$ »

Ejemplos  
adicionales

La implicación  $p \rightarrow q$  es falsa sólo en el caso de que  $p$  sea verdadera y  $q$  sea falsa. Es verdadera cuando tanto  $p$  como  $q$  son verdaderas y cuando  $p$  es falsa (no importa el valor de verdad de  $q$ ).

Una forma útil de entender el valor de verdad de una implicación es pensar en una obligación o en un contrato. Por ejemplo, la promesa que muchos políticos hacen para ser votados es:

«Si soy elegido, bajaré los impuestos».

Si el político es elegido, los votantes esperarían del político que bajase los impuestos. Pero si el político no es elegido, entonces los votantes no esperarían que esa persona baje los impuestos, aunque pueda influir lo suficiente para conseguir que los que ostentan el cargo correspondiente bajen los impuestos. Sólo cuando el político es elegido y no baja los impuestos, pueden sus votantes decir que el político ha roto su promesa electoral. El último escenario corresponde al caso en que  $p$  es verdadera, pero  $q$  es falsa; por tanto,  $p \rightarrow q$  es falsa.

De forma parecida, considera una afirmación en la que un profesor dice:

«Si consigues el ciento por ciento de la puntuación en el examen final, sacarás un sobresaliente».

Si consigues completar correctamente el ciento por ciento de las preguntas, entonces podrías esperar sacar un 10. Si no consigues el ciento por ciento, puedes o no sacar un sobresaliente dependiendo de otros factores. En cualquier caso, si completas el ciento por ciento, pero el profesor no te pone un sobresaliente, te sentirás engañado.

Mucha gente encuentra confuso el hecho de que « $p$  sólo si  $q$ » exprese lo mismo que «si  $p$  entonces  $q$ ». Para recordar esto, ten en cuenta que « $p$  sólo si  $q$ » dice que  $p$  no puede ser verdadera cuando  $q$  no es verdadera. Esto es, el enunciado es falso si  $p$  es verdadera, pero  $q$  es falsa. Cuando  $p$  es falsa,  $q$  puede ser bien verdadera o bien falsa, porque la afirmación no dice nada acerca del valor de verdad de  $q$ . Un error común de la gente es pensar que « $q$  sólo si  $p$ » es una forma de expresar  $p \rightarrow q$ . En cualquier caso, estos enunciados tienen valores de verdad distintos cuando  $p$  y  $q$  toman diferentes valores de verdad.

La forma en la que hemos definido la implicación es más general que el significado de la implicación en el lenguaje corriente. Por ejemplo, la implicación

«Si hoy hace sol, entonces iremos a la playa»

es una implicación usada comúnmente, ya que hay una relación entre la hipótesis y la conclusión. Además, esta implicación se considera válida, a no ser que precisamente hoy haga sol, pero que no vayamos a la playa. Por otra parte, la implicación

«Si hoy es viernes, entonces  $2 + 3 = 5$ »

es verdadera por la definición de implicación, ya que la conclusión es verdadera. (El valor de verdad de la hipótesis no importa pues). La implicación

«Si hoy es viernes, entonces  $2 + 3 = 6$ »

es verdadera para todos los días excepto los viernes, incluso aunque  $2 + 3 = 6$  sea falsa.

No utilizamos estas dos últimas implicaciones en lenguaje natural (excepto quizá en algún sarcasmo), ya que no hay relación entre la hipótesis y la conclusión en ninguna de ellas. En los razonamientos matemáticos consideramos la implicación de una forma más general que en lenguaje natural. El concepto matemático de implicación es independiente de la relación causa-efecto entre hipótesis y conclusión. Nuestra definición de implicación especifica los valores de verdad; no se basa en el uso del lenguaje.

La construcción si-entonces se usa en muchos lenguajes de programación de forma diferente que en lógica. La mayoría de los lenguajes de programación contienen sentencias como **if**  $p$  **then**  $S$ , donde  $p$  es una proposición y  $S$  un segmento de programa (una o más sentencias sintácticamente bien construidas que deben ser ejecutadas). Cuando la ejecución del programa encuentra tal sentencia, se ejecuta  $S$  si  $p$  es verdadera, pero  $S$  no se ejecuta si  $p$  es falsa, como se ilustra en el Ejemplo 6.

10205571910241225



**EJEMPLO 6** ¿Cuál es el valor de la variable  $x$  tras la sentencia

**if**  $2 + 2 = 4$  **then**  $x := x + 1$

si  $x = 0$  antes de llegar a la sentencia? (El símbolo  $:=$  corresponde a la asignación. La sentencia  $x := x + 1$  significa que a  $x$  se le asigna el valor  $x + 1$ ).

*Solución:* Como  $2 + 2 = 4$  es verdadera, se ejecuta la sentencia de asignación  $x := x + 1$ . Por tanto,  $x$  toma el valor  $0 + 1 = 1$  tras la sentencia. ◀

**RECÍPROCA, CONTRARRECÍPROCA E INVERSA** Hay algunas implicaciones relacionadas con  $p \rightarrow q$  que pueden formarse a partir de ella. La proposición  $q \rightarrow p$  se llama **recíproca** de  $p \rightarrow q$ . La **contrarrecíproca** de  $p \rightarrow q$  es  $\neg q \rightarrow \neg p$ . La proposición  $\neg p \rightarrow \neg q$  es la **inversa** de  $p \rightarrow q$ .

La contrarrecíproca  $\neg q \rightarrow \neg p$  de una implicación  $p \rightarrow q$  tiene la misma tabla de verdad que  $p \rightarrow q$ . Para verlo, ten en cuenta que la contrarrecíproca es falsa sólo cuando  $\neg p$  es falsa y  $\neg q$  es verdadera, esto es, sólo cuando  $p$  es verdadera y  $q$  falsa. Por otra parte, ni la recíproca,  $q \rightarrow p$ , ni la inversa,  $\neg p \rightarrow \neg q$ , tienen los mismos valores de verdad que  $p \rightarrow q$  para todos los posibles valores de  $p$  y  $q$ . Para ver esto, observa que cuando  $p$  es verdadera y  $q$  falsa, la implicación original (directa) es falsa, pero la recíproca y la inversa son ambas verdaderas. Cuando dos fórmulas tienen siempre los mismos valores de verdad las llamamos **equivalentes**, de tal forma que una implicación y su contrarrecíproca son equivalentes. La recíproca y la inversa de una implicación también son equivalentes, como el lector podrá verificar. (Estudiaremos las proposiciones equivalentes en la Sección 1.2). Uno de los errores más comunes en lógica es suponer que la recíproca o la inversa son equivalentes a la implicación directa.

Ilustraremos el uso de las implicaciones en el Ejemplo 7.

**EJEMPLO 7** ¿Cuáles son las contrarrecíproca, recíproca e inversa de la implicación

«El equipo local gana siempre que llueve»?

*Solución:* Como « $q$  siempre que  $p$ » es una forma de expresar la implicación  $p \rightarrow q$ , la afirmación original se puede reescribir como

«Si llueve, entonces el equipo local gana».

Consecuentemente, la contrarrecíproca de esta implicación es

«Si el equipo local no gana, no llueve».

La recíproca es

«Si el equipo local gana, entonces llueve».

La inversa es

«Si no llueve, entonces el equipo local no gana».

Sólo el contrarrecíproco es equivalente a la afirmación original. ◀

Ahora presentamos otra forma de combinar proposiciones.

## DEFINICIÓN 6

Sean  $p$  y  $q$  proposiciones. La *bicondicional*, o *doble implicación*,  $p \leftrightarrow q$  es la proposición que es verdadera cuando  $p$  y  $q$  tienen los mismos valores de verdad y falsa en los otros casos.

**Tabla 6.** Tabla de verdad de la bicondicional  $p \leftrightarrow q$ .

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La tabla de verdad para  $p \leftrightarrow q$  se muestra en la Tabla 6. Observa que la doble implicación es verdadera precisamente cuando las implicaciones  $p \rightarrow q$  y  $q \rightarrow p$  son verdaderas. Debido a esto, la terminología

« $p$  si, y sólo si,  $q$ »

se usa para esta bicondicional y simbólicamente se escribe combinando los símbolos  $\rightarrow$  y  $\leftarrow$ . Hay otras formas en las que comúnmente se expresa  $p \leftrightarrow q$ :

« $p$  es necesario y suficiente para  $q$ »

«si  $p$ , entonces  $q$ , y recíprocamente»

« $p$  sii  $q$ ».

La última forma de expresar la doble implicación usa la abreviatura «sii» para «si, y sólo si». Observa que  $p \leftrightarrow q$  tiene exactamente los mismos valores de verdad que  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ .

**EJEMPLO 8** Sea  $p$  la afirmación «Puedes tomar el vuelo» y sea  $q$  la afirmación «Compras un billete». Entonces,  $p \leftrightarrow q$  es el enunciado

«Puedes tomar el vuelo si, y sólo si, compras el billete».

Esta afirmación es verdadera si  $p$  y  $q$  son ambas verdaderas o ambas falsas, esto es, si compras un billete y puedes tomar el vuelo o si no compras el billete y no puedes tomar el vuelo. Es falsa cuando  $p$  y  $q$  tienen valores de verdad opuestos, es decir, cuando no compras el billete, pero puedes tomar el vuelo (consigues un vuelo gratis, por ejemplo), y cuando compras el billete y no puedes tomar el vuelo (la línea aérea te deja en tierra). ◀

La construcción «si, y sólo si» empleada en las dobles implicaciones raramente se usa en lenguaje natural. De hecho, las bicondicionales se expresan a menudo usando las construcciones «si, entonces» o «sólo si». La otra parte del «si, y sólo si» es implícita. Por ejemplo, consideremos la afirmación en el lenguaje natural «Si acabas tu comida, puedes tomar postre». Lo que realmente quiere decir es «Puedes tomar postre si, y sólo si, acabas tu comida». Esta última afirmación es equivalente desde el punto de vista lógico a las dos afirmaciones «Si acabas tu comida, entonces puedes tomar postre» y «Puedes tomar postre sólo si acabas tu comida». Debido a la imprecisión del lenguaje natural, necesitamos hacer una suposición si en una sentencia condicional en lenguaje cotidiano deseamos incluir implícitamente su recíproco. Como la precisión es esencial en las matemáticas y la lógica, siempre distinguiremos entre la sentencia condicional  $p \rightarrow q$  y la sentencia bicondicional  $p \leftrightarrow q$ .

## PRECEDENCIA DE OPERADORES LÓGICOS

Podemos construir fórmulas usando el operador negación y los operadores lógicos definidos hasta el momento. Generalmente, utilizaremos paréntesis para especificar el orden en el que deben aplicarse los operadores lógicos en una fórmula. Por ejemplo,  $(p \vee q) \wedge (\neg r)$  es la conjunción de  $p \vee q$  y  $\neg r$ . Sin embargo, para reducir el número de paréntesis, especificamos que el operador negación se aplica antes que los operadores lógicos. Esto significa que el operador negación  $\neg p \wedge q$  es la conjunción de  $\neg p$  y  $q$ , es decir,  $(\neg p) \wedge q$ , no la negación de la conjunción de  $p$  y  $q$ , es decir,  $\neg (p \wedge q)$ .

Ejemplos  
adicionales

**Tabla 7.** Precedencia de los operadores lógicos.

Operador	Precedencia
$\neg$	1
$\wedge$ $\vee$	2 3
$\rightarrow$ $\leftrightarrow$	4 5

Otra regla general de precedencia es que el operador conjunción precede siempre al operador disyunción, de tal forma que  $p \wedge q \vee r$  significa  $(p \wedge q) \vee r$  y no  $p \wedge (q \vee r)$ . Debido a que esta regla es difícil de recordar, en el texto continuaremos usando paréntesis para que quede claro el orden utilizado en los operadores conjunción y disyunción.

Finalmente, es una regla aceptada que los operadores condicional  $\rightarrow$  y bicondicional  $\leftrightarrow$  tienen precedencia inferior que los operadores conjunción y disyunción,  $\wedge$  y  $\vee$ . Consecuentemente,  $p \vee q \rightarrow r$  es lo mismo que  $(p \vee q) \rightarrow r$ . Usaremos paréntesis cuando el orden de los operadores condicional y bicondicional se deba tener en cuenta, aunque el operador condicional tiene precedencia sobre el bicondicional. La Tabla 7 muestra los niveles de precedencia de los operadores lógicos  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  y  $\leftrightarrow$ .

## TRADUCCIÓN DE FRASES DEL LENGUAJE NATURAL

Hay muchas razones para traducir frases del lenguaje natural a expresiones con variables proposicionales y conectivos lógicos. Todos los lenguajes del ser humano son a menudo ambiguos. Trasladar frases a expresiones lógicas trae consigo evitar estas ambigüedades. Ten en cuenta que puede que esto conlleve hacer un conjunto de suposiciones razonables basadas en el sentido que se le dé a la frase. Por otra parte, una vez que hemos traducido frases del lenguaje natural a expresiones lógicas, podemos analizar estas expresiones lógicas para determinar sus valores de verdad, las podemos manipular y podemos usar las reglas de inferencia (que se discutirán en la Sección 1.5) para razonar sobre ellas. El paso del lenguaje natural al lenguaje formal se conoce como **formalización**.

Para ilustrar el proceso de formalizar, consideraremos los Ejemplos 9 y 10.

### EJEMPLO 9 ¿Cuál es la formalización de la siguiente frase?:

«Puedes acceder a Internet desde el campus sólo si estudias ciencias de la computación o no eres alumno de primero».

**Solución:** Hay muchas formas de formalizar esta frase. Aunque es posible representar la frase mediante una variable proposicional simple, como  $p$ , no sería útil para analizar su significado o razonar con ella. Así, utilizaremos variables proposicionales para representar cada parte de la oración y determinar los conectivos lógicos apropiados entre ellas. En particular, representaremos las frases «Puedes acceder a Internet desde el campus», «Estudias ciencias de la computación» y «Eres alumno de primero» por  $a$ ,  $c$  y  $f$ , respectivamente. Considerando que «sólo si» es una forma de expresar una implicación, la frase se puede representar como

$$a \rightarrow (c \vee \neg f).$$

### EJEMPLO 10 ¿Cómo se puede formalizar la siguiente frase?:

«No puedes montar en la montaña rusa si mides menos de 1,20 metros, a no ser que seas mayor de dieciséis años».

**Solución:** De nuevo, hay muchas formas de formalizar esta frase. La más simple, pero menos útil, es representarla mediante una variable proposicional simple, como  $p$ . Aunque no es incorrecto, no sería eficiente para tratar de analizarla o razonar con ella. Lo más apropiado es usar variables proposicionales para representar partes de esa frase y decidir los conectivos lógicos entre ellas. En particular, si representamos por  $q$ ,  $r$  y  $s$ , respectivamente, las frases «Puedes montar en la montaña rusa», «Mides menos de 1,20 metros» y «Eres mayor de dieciséis años», respectivamente, la frase se puede formalizar como

$$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q.$$

Por supuesto, hay otras formas de representar la frase inicial mediante expresiones lógicas, pero la que hemos usado se ajusta a nuestras necesidades.

Ejemplos  
adicionales

## ESPECIFICACIONES DE SISTEMA

Traducir oraciones del lenguaje natural, como el español, a expresiones lógicas es una parte esencial de la especificación tanto de sistemas *hardware* como *software*. Los ingenieros de *software* y de sistemas reciben los requerimientos en lenguaje natural y producen especificaciones precisas y sin ambigüedades que pueden usarse como base para desarrollo de sistemas. El Ejemplo 11 muestra cómo se pueden utilizar las variables proposicionales en este proceso.

**EJEMPLO 11** Expresa la especificación «La respuesta automatizada no se puede enviar cuando el sistema de archivos está lleno»

Ejemplos  
adicionales

*Solución:* Una forma posible de traducir esto es denotar como  $p$  a «La respuesta automatizada se puede enviar» y como  $q$  a «El sistema de archivos está lleno». Entonces,  $\neg p$  representa a «No se cumple que la respuesta automatizada se pueda enviar», lo que se puede expresar como «La respuesta automatizada no se puede enviar». Consecuentemente, nuestra especificación se puede representar mediante la implicación  $q \rightarrow \neg p$ . ◀

Las especificaciones de sistema no deberían contener requerimientos que puedan entrar en conflicto. Si así fuese, no habría forma de desarrollar un sistema que cumpliera todas las especificaciones. Consecuentemente, las expresiones proposicionales que representan esas especificaciones necesitan ser **consistentes**. Esto es, debe haber una asignación de valores de verdad a las variables de las expresiones que haga a todas las expresiones verdaderas.

**EJEMPLO 12** Determina si estas especificaciones de sistemas son consistentes:

- «El mensaje de diagnóstico se almacena en un *buffer* o se vuelve a transmitir».
- «El mensaje de diagnóstico no se almacena en el *buffer*».
- «Si el mensaje de diagnóstico se almacena en el *buffer*, entonces se vuelve a transmitir».

*Solución:* Para determinar si estas expresiones son consistentes, primero las expresamos usando variables proposicionales. Denotemos a «El mensaje de diagnóstico se almacena en un *buffer*» como  $p$  y «El mensaje se vuelve a transmitir» como  $q$ . Las especificaciones se pueden escribir entonces como  $p \vee q$ ,  $\neg p$  y  $p \rightarrow q$ . Una asignación de valores de verdad que haga a las tres especificaciones verdaderas debe hacer  $p$  falsa para hacer  $\neg p$  verdadera. Como queremos que  $p \vee q$  sea verdadera, pero  $p$  debe ser falsa,  $q$  debe ser verdadera. Como  $p \rightarrow q$  es verdadera cuando  $p$  es falsa y  $q$  verdadera, concluimos que estas especificaciones son consistentes, ya que las tres son verdaderas cuando  $p$  es falsa y  $q$  verdadera. Podríamos haber llegado a la misma conclusión usando una tabla de verdad para examinar las cuatro posibles asignaciones de valores de verdad a  $p$  y  $q$ . ◀

**EJEMPLO 13** ¿Siguen siendo consistentes las especificaciones de sistema del Ejemplo 12 si se añade la especificación «El mensaje de diagnóstico no se vuelve a transmitir»?

*Solución:* Por los razonamientos del Ejemplo 12, las tres especificaciones de ese ejemplo son verdaderas sólo en el caso de que  $p$  sea falsa y  $q$  verdadera. Sin embargo, esta nueva especificación es  $\neg q$ , que es falsa cuando  $q$  es verdadera. Consecuentemente, estas cuatro especificaciones son inconsistentes. ◀

## BÚSQUEDAS BOOLEANAS

Enlaces

Los conectivos lógicos tienen un amplio campo de aplicación en las búsquedas en grandes colecciones de información como, por ejemplo, los índices de páginas web. Como estas búsquedas emplean técnicas de lógica proposicional, se denominan **búsquedas booleanas**.

En las búsquedas booleanas se usa la conexión *AND* para emparejar datos almacenados que contengan los dos términos de búsqueda, la conexión *OR* se usa para emparejar uno o ambos términos de la búsqueda y la conexión *NOT* (a veces escrita *AND NOT*) se usa para excluir un término

Ejemplos  
adicionales

particular de búsqueda. Cuando se utilizan búsquedas booleanas para localizar información de potencial interés, se requiere con frecuencia una planificación detallada de cómo emplear los conectivos. El Ejemplo 14 ilustra cómo llevar a cabo búsquedas booleanas.

**EJEMPLO 14 Búsquedas en páginas web.** La mayoría de los programas de búsqueda en la web emplean técnicas de búsqueda booleana, las cuales nos pueden ayudar a encontrar páginas web sobre temas particulares. Por ejemplo, usando una búsqueda booleana para encontrar páginas web sobre una universidad en Nueva York, podemos buscar páginas que concuerden con **NUEVA AND YORK AND UNIVERSIDAD**. El resultado de esta búsqueda incluirá aquellas páginas que contengan las tres palabras NUEVA, YORK y UNIVERSIDAD. Incluirá todas las páginas de interés junto con otras acerca de alguna nueva universidad en York (Inglaterra). Posteriormente, para encontrar páginas que traten de una universidad en Nueva York o Boston, podemos buscar páginas que concuerden con **(NUEVA AND YORK OR BOSTON) AND UNIVERSIDAD**. (Nota: Aquí el operador **AND** tiene precedencia sobre el operador **OR**). El resultado de esta búsqueda incluirá todas las páginas que contengan la palabra UNIVERSIDAD y bien las palabras NUEVA y YORK o la palabra BOSTON. De nuevo, aparecerán páginas no deseadas. Finalmente, para encontrar páginas web que traten de una universidad en York (y no en Nueva York), debemos mirar las páginas que concuerden con **YORK AND UNIVERSIDAD**, pero como el resultado incluirá páginas acerca de alguna universidad en Nueva York, así como en York, se debería buscar aquellas páginas que concuerden con **(YORK AND UNIVERSIDAD) NOT NUEVA**. El resultado de esta búsqueda incluye páginas que contienen tanto la palabra YORK como UNIVERSIDAD, pero no contienen la palabra NUEVA. ◀

## JUEGOS DE LÓGICA

## Enlaces

Aquellos juegos que se pueden resolver usando el razonamiento lógico se conocen como juegos lógicos. Resolver juegos lógicos es una excelente forma de practicar con las reglas de la lógica. Hay programas de ordenador diseñados para desarrollar razonamiento lógico que a menudo utilizan juegos de lógica para ilustrar sus capacidades. Mucha gente se divierte resolviendo juegos de lógica que se publican en libros y revistas como actividad recreativa.

Discutiremos en este apartado dos juegos de lógica. Empezamos con uno que fue planteado inicialmente por Raymond Smullyan, un maestro de los juegos de lógica, que ha publicado más de una docena de libros con interesantes juegos relacionados con el razonamiento lógico.

**EJEMPLO 15** En [Sm78] Smullyan planteó muchos juegos lógicos acerca de una isla con dos clases de habitantes: caballeros, que siempre dicen la verdad, y sus opuestos, villanos, que siempre mienten. Te encuentras a dos personas,  $A$  y  $B$ . ¿Qué son  $A$  y  $B$  si  $A$  dice « $B$  es un caballero» y  $B$  dice «Los dos somos de clases opuestas»?

Ejemplos  
adicionales

**Solución:** Sean  $p$  y  $q$  las afirmaciones de que  $A$  es un caballero y  $B$  es un caballero, respectivamente, de tal forma que  $\neg p$  y  $\neg q$  son las afirmaciones de que  $A$  es un villano y  $B$  es un villano, respectivamente.

Consideramos primero la posibilidad de que  $A$  es un caballero; ésta es la afirmación de que  $p$  es verdadera. Si  $A$  es un caballero, entonces dice la verdad cuando dice que  $B$  es un caballero; por tanto,  $q$  es verdadera, y  $A$  y  $B$  son de la misma clase. Sin embargo, si  $B$  es un caballero, entonces la afirmación de  $B$  de que  $A$  y  $B$  son de clases opuestas, la afirmación  $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$  tendría que ser verdadera, lo que no se cumple, porque  $A$  y  $B$  son ambos caballeros. Consecuentemente, podemos concluir que  $A$  no es un caballero, es decir,  $p$  es falsa.

Si  $A$  es un villano, como todo lo que dice es falso, la afirmación de  $A$  de que  $B$  es un caballero, es decir, que  $q$  es verdadera, es una mentira, lo que significa que  $q$  es falsa y  $B$  es también un villano. Además, si  $B$  es un villano, la afirmación de  $B$  de que  $A$  y  $B$  son de clases opuestas es una mentira, lo que es consistente con que tanto  $A$  como  $B$  sean villanos. Concluimos, por tanto, que  $A$  y  $B$  son villanos. ◀

**Tabla 8.** Tabla de verdad para los operadores de bit *OR*, *AND* y *XOR*.

$x$	$y$	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

Planteamos más juegos de lógica de Smullyan sobre caballeros y villanos en los Problemas 51-55 al final de la sección. A continuación, planteamos un juego de lógica conocido como el **juego de los chicos con barro** para el caso de dos chicos.

**EJEMPLO 16** Un padre le dice a sus dos hijos, un chico y una chica, que jueguen en el jardín sin ensuciarse. Sin embargo, jugando, los dos se manchan la frente de barro. Cuando los chicos acaban de jugar, su padre dice «Al menos uno de vosotros se ha manchado la frente de barro» y entonces le pide a los chicos que respondan «Sí» o «No» a la pregunta: «¿Sabes si tienes la frente manchada de barro?». El padre hace la pregunta dos veces. ¿Qué responderán los chicos cada vez que el padre hace la pregunta suponiendo que un chico puede ver si su hermano o hermana se ha manchado la frente, pero no puede verse la suya? Suponemos que los chicos son honestos y que responden simultáneamente a cada pregunta.

*Solución:* Sea  $s$  la afirmación de que el hijo se ha manchado la frente y sea  $d$  la afirmación de que la hija se ha manchado la frente. Cuando el padre dice que al menos uno de los dos chicos se ha manchado la frente está afirmando que la disyunción  $s \vee d$  es verdadera. Ambos chicos responderán «No» la primera vez que se les hace la pregunta porque cada uno sólo ve barro en la frente del otro. Esto es, el hijo sabe que  $d$  es verdadera, pero no sabe si  $s$  es verdadera, y la hija sabe que  $s$  es verdadera, pero no sabe si  $d$  es verdadera.

Una vez que el hijo ha respondido «No» a la primera pregunta, la hija puede determinar que  $d$  debe ser verdadera. Esto es así porque cuando se hace la primera pregunta, el hijo sabe que  $s \vee d$  es verdadera, pero no puede determinar si  $s$  es verdadera. Usando esta información, la hija puede concluir que  $d$  debe ser verdadera, ya que si  $d$  fuese falsa, el hijo podría haber razonado que debido a que  $s \vee d$  es verdadera, entonces  $s$  debe ser verdadera, y él habría respondido «Sí» a la primera pregunta. El hijo puede razonar de la misma forma para determinar que  $s$  debe ser verdadera. De aquí se sigue que la respuesta de ambos chicos es «Sí» a la segunda pregunta. ◀



**RAYMOND SMULLYAN (nacido en 1919)** Raymond Smullyan abandonó sus estudios de bachillerato. Quería estudiar lo que realmente le interesaba y no el programa oficial de estudios de bachillerato. Tras intentarlo en varias universidades, consiguió una plaza en la Universidad de Chicago en 1955. Pagó sus estudios haciendo trucos de magia en fiestas y clubes. Se doctoró en Lógica en 1959 en Princeton, siendo estudiante de Alonzo Church. Tras graduarse en Princeton, enseñó matemáticas en el Dartmouth College, la Universidad de Princeton, la Universidad Yeshiva y la City University de Nueva York. Ingresó en el departamento de filosofía de la Universidad de Indiana en 1981, donde es ahora profesor emérito.

Smullyan ha escrito muchos libros de lógica recreativa y matemáticas, incluyendo *Satán, Cantor y el Infinito*; *¿Cómo se titula este libro?*; *¿La dama o el tigre?*; *Alicia en el país de los juegos de lógica*; *Burlarse del pájaro burlón*; *Indeciso para siempre*, y *El acertijo de Sherezade: Juegos lógicos apasionantes, antiguos y modernos*. Debido a lo apasionante de sus juegos de lógica, lo entretenido y lo mucho que invitan a pensar, es considerado como el Lewis Carroll actual. Smullyan ha escrito también varios libros acerca de la aplicación de la lógica deductiva al ajedrez, tres colecciones de ensayos filosóficos y aforismos y varios libros avanzados sobre lógica matemática y teoría de conjuntos. Está particularmente interesado en la autorreferencia y ha trabajado en extender algunos de los resultados de Gödel que muestran que es imposible escribir un programa de ordenador que pueda resolver todos los problemas de las matemáticas. Está también particularmente interesado en explicar ideas de lógica matemática al público general.

Smullyan es un músico con talento y a menudo toca el piano con su mujer, concertista de piano. Una de sus aficiones es hacer telescopios. También se interesa en óptica y estéreo fotografía. Afirma que «nunca he tenido conflictos entre la enseñanza y la investigación como algunas personas, porque yo, mientras enseño, hago investigación».

Enlaces

## LÓGICA Y OPERACIONES CON BITS

Valor verdad	Bit
V	1
F	0



Los ordenadores representan la información usando bits. Un **bit** tiene dos valores posibles: 0 (cero) y 1 (uno). El significado de la palabra bit viene de la expresión inglesa *binary digit*, ya que ceros y unos son los dígitos usados en las representaciones binarias de los números. El famoso estadístico John Tukey introdujo esta terminología en 1946. Un bit se puede utilizar para representar un valor de verdad, ya que dos son los valores de verdad: verdadero y falso. Como se suele hacer, usaremos el bit 1 para representar el valor verdadero y 0 para el falso; esto es, 1 representa V (verdadero) y 0 representa F (falso). Una variable se llama **variable booleana** si su valor es verdadero o falso. Por consiguiente, una variable booleana se puede representar usando un bit.

Las **operaciones con bits** en el ordenador se corresponden con los conectivos lógicos. Reemplazando el valor verdadero por 1 y el valor falso por 0 en las tablas de verdad de los operadores  $\wedge$ ,  $\vee$  y  $\oplus$ , se obtienen las tablas presentadas en la Tabla 8 para las correspondientes operaciones con bits. Utilizaremos las expresiones *OR*, *AND* y *XOR* para los operadores  $\wedge$ ,  $\vee$  y  $\oplus$ , respectivamente, como se hace en varios lenguajes de programación.

A menudo se representa información usando cadenas de bits, que son sucesiones de ceros y unos. En este caso, se pueden utilizar operaciones sobre cadenas de bits para manipular esta información.

### DEFINICIÓN 7

Una *cadena de bits* es una sucesión de cero o más bits. La longitud de esta cadena es el número de bits de la cadena.

**EJEMPLO 17** 101010011 es una cadena de bits de longitud nueve.

Podemos extender las operaciones con bits a cadenas de bits. Definimos las **operaciones bit** *OR*, *AND* y *XOR* de dos cadenas de la misma longitud como aquellas operaciones cuyo resultado es una nueva cadena cuyos bits son el resultado de aplicar las operaciones *OR*, *AND* y *XOR* a los correspondientes bits de cada una de las dos cadenas. Usamos los símbolos  $\vee$ ,  $\wedge$  y  $\oplus$  para representar las operaciones bits correspondientes. Ilustramos el uso de estas operaciones con cadenas de bits en el Ejemplo 18.

**EJEMPLO 18** Aplica las operaciones bits *OR*, *AND* y *XOR* a las cadenas 01 1011 0110 y 11 0001 1101. (Aquí, y a lo largo de todo el texto, las cadenas de bits se dividirán en grupos de cuatro bits para facilitar su lectura).



**JOHN WILDER TUKEY (1915-2000)** Tukey, nacido en New Bedford, Massachusetts, Estados Unidos, fue hijo único. Sus padres, ambos profesores, decidieron que una educación en casa desarrollaría mejor su potencial. Su educación formal empezó en la Universidad de Brown, donde estudió matemática y química. Se graduó en química en la Universidad de Brown y continuó sus estudios en la Universidad de Princeton, cambiando de la química a las matemáticas. Hizo la tesis doctoral en esta Universidad en 1939 con un trabajo en topología, tras lo que fue nombrado profesor de matemáticas en Princeton. Cuando estalló la Segunda Guerra Mundial, se enroló en la Oficina para Investigación en el Control de Incendios, donde empezó a trabajar en estadística. Tukey se interesó por la investigación en estadística e impresionó a varios estadísticos importantes con su capacidad. En 1945, al concluir la guerra, volvió a Princeton como profesor de estadística, y también consiguió un puesto en los Laboratorios AT&T Bell. Fundó el Departamento de Estadística en Princeton en 1966, siendo su primer responsable. Hizo muchas contribuciones importantes en el área de la estadística, incluyendo análisis de varianza, estimación de espectros de series temporales, inferencia sobre los valores de un conjunto de parámetros en un experimento único y filosofía de la estadística. Sin embargo, por lo que es más conocido es por su invención, junto con J. W. Cooley, de la transformada rápida de Fourier.

Tukey contribuyó con su perspicacia y experiencia al Comité Asesor Presidencial para la Ciencia de Estados Unidos. Fue presidente de varios comités importantes para medio ambiente, educación y salud y productos químicos. También participó en comités de trabajo en desarme nuclear. Recibió muchos premios, entre ellos la Medalla Nacional de la Ciencia.

**RESEÑA HISTÓRICA** Se sugirieron otras palabras para denominar al dígito binario, incluyendo *binit* y *bigit*, que no llegaron a aceptarse universalmente. La adopción de la palabra *bit* puede deberse a que tiene significado por sí misma como palabra en inglés. Para conocer cómo se acuñó la palabra *bit*, véase el número de abril de 1984 de la revista *Annals of the History of Computing*.

*Solución:* Los resultados de las operaciones bit *OR*, *AND* y *XOR* se obtienen aplicando los operadores *OR*, *AND* y *XOR* a los correspondientes bit. Esto nos da

01 1011 0110	
11 0001 1101	
<hr/>	
11 1011 1111	operación <i>OR</i>
01 0001 0100	operación <i>AND</i>
10 1010 1011	operación <i>XOR</i>

## Problemas

- ¿Cuáles de estas frases son proposiciones? ¿Cuál es el valor de verdad de aquellas que son proposiciones?
  - Boston es la capital de Massachusetts.
  - Buenos Aires es la capital de Argentina.
  - $2 + 3 = 5$ .
  - $5 + 7 = 10$ .
  - $x + 2 = 11$ .
  - Responde a esta pregunta.
  - $x + y = y + x$  para todo par de números reales  $x$  e  $y$ .
- ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones? ¿Cuál es el valor de verdad de aquellas que son proposiciones?
  - No pasar.
  - ¿Qué hora es?
  - No hay moscas en Maine.
  - $4 + x = 5$ .
  - $x + 1 = 5$  si  $x = 1$ .
  - $x + y = y + z$  si  $x = z$ .
- ¿Cuál es la negación de cada uno de estos enunciados?
  - Hoy es jueves.
  - No hay polución en Nueva Jersey.
  - $2 + 1 = 3$ .
  - El verano de Veracruz es cálido y soleado.
- Sean  $p$  y  $q$  los enunciados  
 $p$ : Compré un billete de lotería esta semana.  
 $q$ : Gané el bote de un millón de euros del viernes.  
 Expresa cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural.
  - $\neg p$
  - $p \vee q$
  - $p \rightarrow q$
  - $p \wedge q$
  - $p \leftrightarrow q$
  - $\neg p \rightarrow \neg q$
  - $\neg p \wedge \neg q$
  - $\neg p \vee (p \wedge q)$
- Sean  $p$  y  $q$  los enunciados «Está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey» y «Se han divisado tiburones cerca de la costa», respectivamente. Expresa cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural.
  - $\neg q$
  - $p \wedge q$
  - $\neg p \vee q$
  - $p \rightarrow \neg q$
  - $\neg q \rightarrow p$
  - $\neg p \rightarrow \neg q$
  - $p \leftrightarrow \neg q$
  - $\neg p \wedge (p \vee q)$
- Sean  $p$  y  $q$  los enunciados «La elección se decide» y «Se han contado los votos», respectivamente. Expresa cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural.
  - $\neg p$
  - $p \vee q$
  - $\neg p \wedge q$
  - $q \rightarrow p$
  - $\neg q \rightarrow \neg p$
  - $\neg p \rightarrow \neg q$
  - $p \leftrightarrow q$
  - $\neg q \vee (\neg p \wedge q)$
- Sean  $p$  y  $q$  los enunciados  
 $p$ : Estamos bajo cero.  
 $q$ : Nieva.  
 Escribe los enunciados siguientes usando  $p$ ,  $q$  y conectivos lógicos:
  - Estamos bajo cero y nieva.
  - Estamos bajo cero, pero no nieva.
  - No estamos bajo cero y no nieva.
  - Bien estamos bajo cero o bien nieva (o ambas cosas).
  - Si estamos bajo cero, entonces también nieva.
  - Estamos bajo cero o nieva, pero no nieva si estamos bajo cero.
  - Que estemos bajo cero es necesario y suficiente para que nieve.
- Sean  $p$ ,  $q$  y  $r$  los enunciados  
 $p$ : Tienes fiebre.  
 $q$ : Suspendes el examen final.  
 $r$ : Apruebas el curso.  
 Expresa cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural.
  - $p \rightarrow q$
  - $\neg q \leftrightarrow r$
  - $q \rightarrow \neg r$
  - $p \vee q \vee r$
  - $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$
  - $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$
- Sean  $p$  y  $q$  los enunciados  
 $p$ : Conduces a más de 100 km por hora.  
 $q$ : Te multan por exceso de velocidad.  
 Escribe los enunciados siguientes usando  $p$ ,  $q$  y conectivos lógicos.
  - No conduces a más de 100 km por hora.
  - Conduces a más de 100 km por hora, pero no te multan por exceso de velocidad.



- c) Te multarán por exceso de velocidad si conduces a más de 100 km por hora.
- d) Si no conduces a más de 100 km por hora no te multarán por exceso de velocidad.
- e) Conducir a más de 100 km por hora es suficiente para que te multen por exceso de velocidad.
- f) Te multan por exceso de velocidad, pero no conduces a más de 100 km por hora.
- g) Siempre que te multan por exceso de velocidad conduces a más de 100 km por hora.

10. Sean  $p$ ,  $q$  y  $r$  los enunciados

$p$ : Tienes un 10 en el examen final.

$q$ : Haces todos los problemas del libro.

$r$ : Tienes un 10 en esta asignatura.

Expresa estos enunciados usando  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y conectivos lógicos.

- a) Tienes un 10 en el examen final, pero no haces todos los problemas del libro.
- b) Tienes un 10 en el examen final, haces todos los problemas del libro y tienes un 10 en esta asignatura.
- c) Para tener un 10 en esta asignatura es necesario tener un 10 en el examen final.
- d) Tienes un 10 en el examen final, pero no haces todos los problemas del libro; no obstante, tienes un 10 en esta asignatura.
- e) Tener un 10 en el examen final y hacer todos los problemas del libro es suficiente para tener un 10 en esta asignatura.
- f) Tendrás un 10 en esta asignatura si, y sólo si, tienes un 10 en el examen final o haces todos los problemas del libro.

11. Sean  $p$ ,  $q$  y  $r$  los enunciados

$p$ : Se han visto osos pardos por la zona.

$q$ : Es seguro caminar por el sendero.

$r$ : Las bayas del sendero están maduras.

Expresa estos enunciados usando  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y conectivos lógicos.

- a) Las bayas del sendero están maduras, pero no se han visto osos pardos por la zona.
- b) No se han visto osos pardos por la zona y es seguro caminar por el sendero, pero las bayas del sendero están maduras.
- c) Si las bayas del sendero están maduras, es seguro caminar por el sendero si, y sólo si, no se han visto osos pardos por la zona.
- d) No es seguro caminar por el sendero, pero no se han visto osos pardos por la zona y las bayas del sendero están maduras.
- e) Para que sea seguro caminar por el sendero, es necesario, pero no suficiente, que las bayas del sendero no estén maduras y que no se hayan visto osos pardos por la zona.
- f) No es seguro caminar por el sendero cuando se han visto osos pardos por la zona y las bayas del sendero están maduras.

12. Determina si estas bicondicionales son verdaderas o falsas.

- a)  $2 + 2 = 4$  si, y sólo si,  $1 + 1 = 2$ .
- b)  $1 + 1 = 2$  si, y sólo si,  $2 + 3 = 4$ .
- c) Es invierno si, y sólo si, no es primavera, verano u otoño.
- d)  $1 + 1 = 3$  si, y sólo si, los cerdos vuelan.
- e)  $0 > 1$  si, y sólo si,  $2 > 1$ .

13. Determina si estas implicaciones son verdaderas o falsas.

- a) Si  $1 + 1 = 2$ , entonces  $2 + 2 = 5$ .
- b) Si  $1 + 1 = 3$ , entonces  $2 + 2 = 4$ .
- c) Si  $1 + 1 = 3$ , entonces  $2 + 2 = 5$ .
- d) Si los cerdos vuelan, entonces  $1 + 1 = 3$ .
- e) Si  $1 + 1 = 3$ , entonces Dios existe.
- f) Si  $1 + 1 = 3$ , entonces los cerdos vuelan.
- g) Si  $1 + 1 = 2$ , entonces los cerdos vuelan.
- h) Si  $2 + 2 = 4$ , entonces  $1 + 2 = 3$ .

14. Determina en cada una de estas frases si el  $\circ$  es inclusivo o exclusivo. Razona tu respuesta.

- a) Se requiere experiencia con Java o C++.
- b) La comida incluye ensalada o sopa.
- c) Para entrar en este país necesitas pasaporte o tarjeta de votante.
- e) Publica o perece.

15. Di qué significan cada una de estas frases en los casos en que el  $\circ$  es inclusivo (es decir, una disyunción) o bien exclusivo. ¿Cuál crees que es el significado que se quiere expresar realmente en cada caso?

- a) Para matricularte en matemática discreta debes haber cursado una asignatura de cálculo o alguna asignatura de informática.
- b) Cuando te compras un vehículo de marca Acme, te devuelven 2 000 \$ en efectivo o el 2% del préstamo solicitado.
- c) La cena para dos incluye dos platos de la columna A o tres de la columna B.
- d) El colegio se cierra si caen más de 50 cm de nieve o si el viento helado baja de  $-20^\circ\text{C}$ .

16. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma «si  $p$ , entonces  $q$ ». (Indicación: Bázate en la lista de formas comunes de expresar una implicación proporcionada en esta sección).

- a) Es necesario lavar el coche del jefe para ascender.
- b) Viento del sur implica deshielo en primavera.
- c) Una condición suficiente para que la garantía sea válida es que hayas comprado el ordenador hace menos de un año.
- d) A Guillermo siempre se le pilla cuando hace trampas.
- e) Puedes acceder a la página web si pagas una cuota de suscripción.
- f) Ser elegido es consecuencia de conocer a la gente adecuada.
- g) Carol se mareará siempre que monta en una barca.

17. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma «si  $p$ , entonces  $q$ ». (Indicación: Bázate en la lista de formas comunes de expresar una implicación proporcionada en esta sección).
- Nieva siempre que el viento sopla del noreste.
  - El manzano florecerá si el tiempo se mantiene cálido durante una semana.
  - Que los Pistons ganen el campeonato implica que vencieron a los Lakers.
  - Es necesario andar 12 km para llegar a la cima del pico.
  - Para ser profesor fijo es suficiente con ser mundialmente famoso.
  - Si conduces más de 600 km seguidos, necesitarás repostar gasolina.
  - Tu garantía es válida sólo si compraste el reproductor de CD hace menos de 90 días.
18. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma «si  $p$ , entonces  $q$ ». (Indicación: Bázate en la lista de formas comunes de expresar una implicación proporcionada en esta sección).
- Recordaré enviarte la dirección sólo si me mandas un correo electrónico.
  - Para ser ciudadano de un país es necesario haber nacido en él.
  - Si conservas este texto, te será muy útil en los cursos siguientes.
  - Los Red Wings ganarán la copa de hockey sobre hielo si el portero juega bien.
  - Que consigas el trabajo implica que tienes las mejores credenciales.
  - La playa se erosiona siempre que azota una tormenta.
  - Es necesario tener una clave válida para acceder al servidor.
19. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma « $p$  si, y sólo si,  $q$ ».
- Si hace calor fuera, te compras un cucurucho de helado, y si te compras un cucurucho de helado, hace calor fuera.
  - Para ganar el concurso es necesario y suficiente tener el número ganador.
  - Ascenderás sólo si tienes contactos, y tienes contactos sólo si asciendes.
  - Si ves televisión, tu mente se empobrecerá, y recíprocamente.
  - El tren llega con retraso exactamente aquellos días que tengo que tomarlo.
20. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma « $p$  si, y sólo si,  $q$ ».
- Para sacar un 10 en este curso es necesario y suficiente que aprendas a resolver problemas de matemática discreta.
  - Si lees el periódico a diario, estarás informado, y recíprocamente.
  - Llueve si es fin de semana, y es fin de semana si llueve.
  - Sólo puedes ver al mago si no está, y el mago no está sólo si puedes verlo.
21. Enuncia la recíproca, contrarrecíproca e inversa de cada una de estas implicaciones.
- Si nieva hoy, esquiaré mañana.
  - Voy a clase siempre que vaya a haber un control.
  - Un entero positivo es primo si, y sólo si, no tiene otros divisores más que 1 y él mismo.
22. Enuncia la recíproca, contrarrecíproca e inversa de cada una de estas implicaciones.
- Si llueve esta noche, me quedaré en casa.
  - Voy a la playa siempre que el día amanezca soleado.
  - Cuando me acuesto tarde, es necesario que duerma hasta mediodía.
23. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.
- $p \wedge \neg p$
  - $p \vee \neg p$
  - $(p \vee \neg q) \rightarrow q$
  - $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
  - $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
  - $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
24. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.
- $p \rightarrow \neg p$
  - $p \leftrightarrow \neg p$
  - $p \oplus (p \vee q)$
  - $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
  - $(q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
  - $(p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \neg q)$
25. Construye las tablas de verdad de cada una de estas fórmulas.
- $(p \vee q) \rightarrow (p \oplus q)$
  - $(p \oplus q) \rightarrow (p \wedge q)$
  - $(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$
  - $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow q)$
  - $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg r)$
  - $(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus \neg q)$
26. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.
- $p \oplus p$
  - $p \oplus \neg p$
  - $p \oplus \neg q$
  - $\neg p \oplus \neg q$
  - $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$
  - $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$
27. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.
- $p \rightarrow \neg q$
  - $\neg p \leftrightarrow q$
  - $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q)$
  - $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$
  - $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$
  - $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
28. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.
- $(p \vee q) \vee r$
  - $(p \vee q) \wedge r$
  - $(p \wedge q) \vee r$
  - $(p \wedge q) \wedge r$
  - $(p \vee q) \wedge \neg r$
  - $(p \wedge q) \vee \neg r$

# Matemática Discreta y sus Aplicaciones

5.ª edición

**Kenneth H. Rosen**

*Laboratorios AT&T*

## **Traducción:**

José Manuel Pérez Morales

Investigador titular del CIEMAT

Profesor asociado

Universidad Carlos III de Madrid

Julio Moro Carreño

Titular de Universidad

Departamento de Matemáticas

Universidad Carlos III de Madrid

Ana Isabel Lías Quintero

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad Politécnica de Madrid

Pedro Antonio Ramos Alonc

Departamento de Matemáticas

Universidad de Alcalá



MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO  
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO  
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS  
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • SAN LUIS • TOKIO • TORONTO

29. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.
- $p \rightarrow (\neg q \vee r)$
  - $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$
  - $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$
  - $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$
  - $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$
  - $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
30. Construye la tabla de verdad de la fórmula  $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$ .
31. Construye la tabla de verdad de la fórmula  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$ .
32. ¿Cuál es el valor de  $x$  tras ejecutar las siguientes sentencias en ordenador si  $x = 1$  antes de que se llegase a ella?
- if  $1 + 2 = 3$  then  $x := x + 1$
  - if  $(1 + 1 = 3)$  OR  $(2 + 2 = 3)$  then  $x := x + 1$
  - if  $(2 + 3 = 5)$  AND  $(3 + 4 = 7)$  then  $x := x + 1$
  - if  $(1 + 1 = 2)$  XOR  $(1 + 2 = 3)$  then  $x := x + 1$
  - if  $x < 2$  then  $x := x + 1$
33. Determina el resultado de ejecutar las operaciones bits OR, AND y XOR con cada uno de los siguientes pares de cadenas de bits:
- 101 1110, 010 0001
  - 1111 0000, 1010 1010
  - 00 0111 0001, 10 0100 1000
  - 11 1111 1111, 00 0000 0000
34. Evalúa las siguientes expresiones:
- $1\ 1000 \wedge (0\ 1011 \vee 1\ 1011)$
  - $(0\ 1111 \wedge 1\ 0101) \vee 0\ 1000$
  - $(0\ 1010 \oplus 1\ 1011) \oplus 0\ 1000$
  - $(1\ 1011 \vee 0\ 1010) \wedge (1\ 0001 \vee 1\ 1011)$
- La **lógica difusa** o **borrosa** se usa en inteligencia artificial. En lógica difusa, una proposición tiene un valor de verdad que es un número comprendido entre 0 y 1, ambos incluidos. Una proposición con un valor de verdad 0 es falsa y con un valor 1 es verdadera. Los valores entre 0 y 1 indican grados de verdad. Por ejemplo, el valor de verdad 0,8 se puede asignar a la sentencia «Alfredo está feliz», ya que Alfredo está feliz la mayor parte del tiempo, y el valor de verdad 0,4 se asignará a la sentencia «Juan está feliz» cuando Juan esté feliz un poco menos de la mitad del tiempo.
35. El valor de verdad de la negación de una proposición en lógica difusa es 1 menos el valor de verdad de la proposición. ¿Cuáles son los valores de verdad de las afirmaciones «Alfredo no está feliz» y «Juan no está feliz»?
36. El valor de verdad en lógica difusa de la conjunción de dos proposiciones es el mínimo de los valores de verdad de las dos. ¿Cuál el valor de verdad de las frases «Alfredo y Juan están felices» y «Ni Alfredo ni Juan están felices»?
37. El valor de verdad de la disyunción de dos proposiciones en lógica difusa es el máximo de los valores de verdad de las dos proposiciones. ¿Cuál el valor de verdad de las frases «Alfredo está feliz o Juan está feliz» y «Alfredo no está feliz o Juan no está feliz»?
- \*38. ¿Es la sentencia «Esta afirmación es falsa» una proposición?
- \*39. La sentencia  $n$ -ésima de una lista de 100 sentencias es «Exactamente  $n$  de las sentencias de esta lista son falsas».
- ¿Qué conclusiones se pueden derivar de estas sentencias?
  - Responde el apartado (a) si la sentencia  $n$ -ésima es «Al menos  $n$  de las sentencias de la lista son falsas».
  - Responde el apartado (b) suponiendo que la lista contiene 99 sentencias.
40. Una antigua leyenda siciliana dice que el barbero de una remota ciudad, a la que sólo se puede llegar a través de un peligroso camino de montaña, afeita a aquellas personas, y sólo a aquellas personas, que no se afeitan a sí mismas. ¿Puede existir tal barbero?
41. Cada uno de los habitantes de una aldea remota dice siempre la verdad o siempre miente. Un aldeano siempre dará un «Sí» o «No» por respuesta a las preguntas de los turistas. Supón que eres un turista que visita la zona y encuentras una bifurcación en el camino. Una dirección conduce a las ruinas que quieres visitar. La otra dirección conduce a la jungla profunda. Un aldeano se encuentra en la bifurcación del camino. ¿Qué pregunta debes hacerle al aldeano para averiguar la dirección correcta?
42. Un explorador es capturado por un grupo de caníbales. Hay dos clases de caníbales: aquellos que siempre dicen la verdad y aquellos que siempre mienten. Los caníbales se cenarán al explorador a menos que éste pueda determinar si un caníbal en particular dice siempre la verdad o siempre miente. Al explorador le permiten que haga exactamente una pregunta a uno de los caníbales.
- Explica por qué la pregunta «¿Eres un mentiroso?» no va a funcionar.
  - Encuentra una pregunta que el explorador pueda usar para determinar si el caníbal dice siempre la verdad o siempre miente.
43. Expresa las siguientes especificaciones de sistema utilizando las proposiciones  $p$ , «El mensaje es revisado para buscar algún virus», y  $q$ , «El mensaje fue enviado desde un sistema desconocido», junto con conectivos lógicos.
- «El mensaje se revisa para buscar algún virus siempre que haya sido enviado desde un sistema desconocido».
  - «El mensaje fue enviado desde un sistema desconocido, pero no se revisó para buscar ningún virus».
  - «Es necesario revisar el mensaje para buscar algún virus siempre que haya sido enviado desde un sistema desconocido».

- d) «Cuando el mensaje no sea enviado desde un sistema desconocido no se revisa para buscar ningún virus».
44. Expresa las siguientes especificaciones de sistema usando las proposiciones  $p$ , «El usuario introduce una clave válida»;  $q$ , «Se permite el acceso», y  $r$ , «El usuario ha pagado la cuota de acceso», junto con conectivos lógicos.
- «El usuario ha pagado la cuota de acceso, pero no introduce una clave válida».
  - «Se permite el acceso siempre que el usuario haya pagado la cuota de acceso e introduzca una clave válida».
  - «Se niega el acceso si el usuario no ha pagado la cuota de acceso».
  - «Si el usuario no ha introducido una clave válida, pero ha pagado la cuota de acceso, entonces se permite el acceso».
45. ¿Son consistentes las siguientes especificaciones de sistema? «El sistema está en estado multiusuario si, y sólo si, está operando normalmente. Si el sistema está operando normalmente, el *kernel* está funcionando. El *kernel* no está funcionando o el sistema está en modo de interrupción. Si el sistema no está en estado multiusuario, entonces está en modo de interrupción. El sistema no está en modo de interrupción».
46. ¿Son consistentes las siguientes especificaciones de sistema? «Cuando el *software* del sistema se actualiza, los usuarios no pueden acceder al sistema de archivos. Si los usuarios pueden acceder al sistema de archivos, pueden grabar ficheros nuevos. Si los usuarios no pueden grabar ficheros nuevos, el *software* del sistema no se está actualizando».
47. ¿Son consistentes las siguientes especificaciones de sistema? «El *router* puede enviar paquetes al sistema remoto sólo si soporta el nuevo espacio de direcciones. Para que el *router* soporte el nuevo espacio de direcciones es necesario que se haya instalado la última actualización del *software*. El *router* puede enviar paquetes al sistema más remoto si se ha instalado la última actualización del *software*. El *router* no soporta el nuevo espacio de direcciones».
48. ¿Son consistentes las siguientes especificaciones de sistema? «Si el sistema de archivos no está bloqueado, entonces se pondrán en cola los mensajes nuevos. Si el sistema de archivos no está bloqueado, entonces el sistema funciona correctamente, y recíprocamente. Si los mensajes nuevos no se ponen en cola, entonces se enviarán al *buffer* de mensajes. Si el sistema de archivos no se bloquea, entonces se enviarán mensajes nuevos al *buffer* de mensajes. No se enviarán mensajes nuevos al *buffer* de mensajes».
49. ¿Qué búsqueda booleana habría que usar para buscar páginas web sobre alguna playa en Nueva Jersey? ¿Y cuál para encontrar alguna playa en la isla de Jersey en el canal de la Mancha?

50. ¿Qué búsqueda booleana habría que usar para buscar páginas web sobre senderismo en Virginia del Norte? ¿Y cuál si buscas páginas web sobre senderismo en Virginia, pero no en Virginia del Norte?

Los problemas 51-55 están relacionados con la isla de los caballeros y villanos inventada por Smullyan, donde los caballeros siempre dicen la verdad y los villanos siempre mienten. Te encuentras a dos personas,  $A$  y  $B$ . Determina, si es posible, qué son  $A$  y  $B$  en cada problema. Si no puedes determinar qué son estas personas, ¿puedes deducir alguna conclusión?

51.  $A$  dice «Al menos uno de nosotros es un villano» y  $B$  no dice nada.
52.  $A$  dice «Los dos somos caballeros» y  $B$  dice « $A$  es un villano».
53.  $A$  dice «Yo soy un villano o  $B$  es un caballero» y  $B$  no dice nada.
54. Tanto  $A$  como  $B$  dicen «Yo soy un caballero».
55.  $A$  dice «Ambos somos villanos» y  $B$  no dice nada.

Los problemas 56-61 son juegos de lógica que se pueden resolver formalizando previamente y razonando a partir de ellos usando las tablas de verdad.

56. La policía tiene tres sospechosos del asesinato del señor Cooper: el señor Smith, el señor Jones y el señor Williams. Cada uno de ellos declara que no mató a Cooper. Smith declara además que Cooper era amigo de Jones y que Williams no lo apreciaba. Jones también declara que él no conocía a Cooper y que estaba fuera de la ciudad cuando Cooper fue asesinado. Williams declara también que vio a Smith y Jones con Cooper el día del asesinato y que Smith o Jones debió matar a Cooper. ¿Puedes determinar quién lo mató si
- uno de los tres hombres es culpable, los dos inocentes dicen la verdad, pero las declaraciones del culpable pueden ser o no verdad?;
  - los inocentes no mienten?
57. A Steve le gustaría determinar quién cobra más entre tres de sus colegas haciendo uso de dos hechos. Primero, sabe que si Fred no es el mejor pagado de los tres, entonces lo es Janice. Segundo, sabe que si Janice no es la peor pagada, entonces Maggie es la que más cobra. ¿Es posible determinar el orden de los salarios de Fred, Janice y Maggie a partir de lo que sabe Steve? Si es así, ¿quién es el/la que cobra más y el/la que cobra menos? Explica tu respuesta.

58. Cinco amigos tienen acceso a una sala de *chat*. ¿Es posible determinar quién está chateando si se conoce la siguiente información? Bien Kevin o Heather, o ambos, están chateando. Bien Randy o Vijay, pero no ambos, están chateando. Si Abby está chateando, también lo está Randy.

Vijay y Kevin están chateando, o bien ambos, o bien ninguno. Si Heather está chateando, entonces también lo están Abby y Kevin. Explica tu razonamiento.

59. Un detective ha tomado declaración a cuatro testigos de un crimen. De las declaraciones concluye que si el mayordomo dice la verdad, también lo hace el cocinero; el cocinero y el jardinero no pueden ambos decir la verdad; el jardinero y el empleado de mantenimiento no están mintiendo ambos, y si el empleado de mantenimiento dice la verdad, entonces el cocinero miente. Para cada uno de los testigos, ¿puede el detective determinar si miente o dice la verdad? Explica tu razonamiento.

60. Cuatro amigos han sido identificados como sospechosos de acceso no autorizado a un sistema informático. Por ello han declarado a las autoridades que investigan el hecho. Alicia dijo que «Lo hizo Carlos». Juan dijo «Yo no lo hice». Carlos dijo que «Diana lo hizo». Diana dijo que «Carlos mintió cuando dijo que yo lo hice».

- Si las autoridades saben además que exactamente uno solo de ellos decía la verdad, ¿quién lo hizo? Explica tu razonamiento.
- Si las autoridades saben también que exactamente uno solo de ellos mentía, ¿quién lo hizo? Explica tu razonamiento.

- \*61. Resuelve este famoso juego de lógica atribuido a Albert Einstein y conocido como el **juego de la cebra**. Cinco hombres de diferentes nacionalidades y con trabajos distintos viven en casas consecutivas de una misma calle. Las casas están pintadas de colores diferentes. Los hombres tienen animales de compañía distintos y también son diferentes sus bebidas favoritas. Determina quién es el dueño de la cebra y quién es aquel cuya bebida favorita es el agua mineral (una de las bebidas favoritas) dadas las siguientes pistas: el inglés vive en la casa roja; el español tiene un perro; el japonés es pintor; el italiano bebe té; el noruego vive en la primera casa a la izquierda; la casa verde está a la derecha de la blanca; el fotógrafo cría caracoles; el diplomático vive en la casa amarilla; el de la casa del medio toma leche; el dueño de la casa verde toma café; la casa del noruego está pegada a la azul; el violinista toma zumo de naranja; el zorro está en una casa contigua a la del médico; el caballo está en una casa contigua a la del diplomático. (*Indicación:* Haz una tabla donde las filas representen hombres y las columnas el color de sus casas, sus trabajos, sus animales y sus bebidas favoritas. Usa razonamientos lógicos para determinar las entradas correctas en la tabla).

## 1.2 Equivalencias proposicionales

### INTRODUCCIÓN

Un tipo importante de paso utilizado en argumentos matemáticos es la sustitución de una sentencia por otra de igual valor de verdad. Así, en la construcción de argumentos matemáticos se emplean con frecuencia métodos que producen proposiciones con el mismo valor de verdad que una fórmula dada.

Comenzaremos nuestra discusión con una clasificación de las fórmulas según sus posibles valores de verdad.

#### DEFINICIÓN 1

Una fórmula que es siempre verdadera, no importa los valores de verdad de las proposiciones que la componen, se denomina *tautología*. Una fórmula que es siempre falsa se denomina *contradicción*. Finalmente, una proposición que no es ni una tautología ni una contradicción se denomina *contingencia*.

Las tautologías y las contradicciones son importantes en el razonamiento matemático. El siguiente ejemplo ilustra estos tipos de proposiciones.

- EJEMPLO 1** Podemos construir ejemplos de tautologías y contradicciones usando sólo una proposición. Considera las tablas de verdad de  $p \vee \neg p$  y  $p \wedge \neg p$  mostradas en la Tabla 1. Como  $p \vee \neg p$  es siempre verdadera, es una tautología. Como  $p \wedge \neg p$  es siempre falsa, es una contradicción. ◀

## EQUIVALENCIAS LÓGICAS



Las fórmulas que tienen los mismos valores de verdad en todos los casos posibles se llaman **lógicamente equivalentes**. Podemos también definir esta noción como sigue.

### DEFINICIÓN 2

Se dice que las proposiciones  $p$  y  $q$  son *lógicamente equivalentes* si  $p \leftrightarrow q$  es una tautología. La notación  $p \equiv q$  denota que  $p$  y  $q$  son lógicamente equivalentes.

**Nota:** El símbolo  $\equiv$  no es un conectivo lógico, puesto que  $p \equiv q$  no es una fórmula, sino la afirmación de que  $p \leftrightarrow q$  es una tautología. El símbolo  $\leftrightarrow$  se usa en ocasiones en lugar de  $\equiv$  para denotar una equivalencia lógica.



Una forma de determinar si dos proposiciones son equivalentes es utilizar una tabla de verdad. En particular, las proposiciones  $p$  y  $q$  son equivalentes si, y sólo si, las columnas que dan sus valores de verdad coinciden. Los siguientes ejemplos ilustran este método.

### EJEMPLO 2

Muestra que  $\neg(p \vee q)$  y  $\neg p \wedge \neg q$  son lógicamente equivalentes. Esta equivalencia es una de las *leyes de De Morgan* para proposiciones, llamadas así por el matemático inglés Augustus de Morgan, de mediados del siglo XIX.

**Solución:** Las tablas de verdad para estas proposiciones se muestran en la Tabla 2. Como los valores de verdad de las proposiciones  $\neg(p \vee q)$  y  $\neg p \wedge \neg q$  concuerdan para todas las combinaciones posibles de valores de verdad para  $p$  y  $q$ , se sigue que  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$  es una tautología y estas proposiciones son lógicamente equivalentes. ◀

**Tabla 1.** Ejemplos de una tautología y una contradicción.

$p$	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

**Tabla 2.** Tablas de verdad para  $\neg(p \vee q)$  y  $\neg p \wedge \neg q$ .

$p$	$q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

**Tabla 3.** Tablas de verdad para  $\neg p \vee q$  y  $p \rightarrow q$ .

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

**EJEMPLO 3** Muestra que las proposiciones  $p \rightarrow q$  y  $\neg p \vee q$  son lógicamente equivalentes.

*Solución:* Construimos las tablas de verdad para estas fórmulas en la Tabla 3. Como los valores de verdad de las proposiciones  $\neg p \vee q$  y  $p \rightarrow q$  concuerdan, estas proposiciones son lógicamente equivalentes. ◀

**EJEMPLO 4** Muestra que las proposiciones  $p \vee (q \wedge r)$  y  $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$  son lógicamente equivalentes. Es la *ley distributiva* de la disyunción sobre la conjunción.

*Solución:* Construimos las tablas de verdad para estas fórmulas en la Tabla 4. Como los valores de verdad de las proposiciones  $p \vee (q \wedge r)$  y  $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$  concuerdan, estas fórmulas son lógicamente equivalentes. ◀

**Observación:** Una tabla de verdad para una fórmula dependiente de tres proposiciones diferentes requiere ocho filas, una para cada posible combinación de los valores de verdad de las tres proposiciones. En general, se requieren  $2^n$  filas si una fórmula depende de  $n$  proposiciones.

La Tabla 5 contiene algunas equivalencias importantes\*. En estas equivalencias, **V** denota cualquier proposición que es siempre verdadera y **F** denota cualquier proposición que es siempre falsa. Mostramos también algunas equivalencias útiles para fórmulas que involucran implicaciones y dobles implicaciones en las Tablas 6 y 7, respectivamente. En los problemas al final de la sección se pide al lector que verifique las equivalencias de las Tablas 5-7.

La ley asociativa para la disyunción muestra que la expresión  $p \vee q \vee r$  está bien definida en el sentido de que no importa si tomamos primero la disyunción de  $p$  y  $q$  y luego la disyunción de  $p \vee q$  con  $r$ , o si primero tomamos la disyunción de  $q$  y  $r$  y luego la disyunción de  $p$  y  $q \vee r$ . De forma similar, la expresión  $p \wedge q \wedge r$  está bien definida. Extendiendo este razonamiento, se sigue que  $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$  y  $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$  están bien definidas siempre que  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sean proposiciones. Además, ten en cuenta que las leyes de De Morgan se generalizan a

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_n)$$

y

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n).$$

(Los métodos para demostrar estas identidades se verán en la Sección 3.3).

Las equivalencias lógicas de la Tabla 5, así como cualquier otra que se haya establecido (como las mostradas en las Tablas 6 y 7), se pueden usar para construir equivalencias lógicas adicionales. Ello se debe a que una proposición en una fórmula se puede sustituir por otra que sea lógicamente equivalente sin alterar el valor de verdad de la fórmula. Esta técnica se ilustra en los Ejemplos 5 y 6, donde también se utiliza el hecho de que si  $p$  y  $q$  son lógicamente equivalentes y  $q$  y  $r$  también, entonces  $p$  y  $r$  son lógicamente equivalentes (véase el Problema 50).



<b>Tabla 4.</b> Una demostración de que $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ son lógicamente equivalentes.							
$p$	$q$	$r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

\* Estas identidades son un caso especial de las identidades que se dan en cualquier álgebra de Boole. Compáralas con el conjunto de identidades de la Tabla 1 de la Sección 1.7 y con las identidades booleanas de la Tabla 5 de la Sección 10.1.



Tabla 5. Equivalencias lógicas.

Equivalencia	Nombre
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Leyes de dominación
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leyes idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Ley de la doble negación
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leyes conmutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leyes asociativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leyes distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leyes de De Morgan
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Leyes de absorción
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Leyes de negación

Tabla 6. Equivalencias lógicas relacionadas con implicaciones.

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$   
 $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$   
 $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$   
 $p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$   
 $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$   
 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$   
 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$   
 $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$   
 $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

Tabla 7. Equivalencias lógicas relacionadas con implicaciones.

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$   
 $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$   
 $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$   
 $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$



Enlaces

**AUGUSTUS DE MORGAN (1806-1871)** Augustus de Morgan nació en la India, donde su padre fue coronel del ejército. La familia De Morgan se mudó a Inglaterra cuando Augustus tenía siete meses. Asistió a colegios privados, donde desarrolló un gran interés por las matemáticas en su primera adolescencia. De Morgan estudió en el Trinity College, en Cambridge, graduándose en 1827. Aunque consideró matricularse en medicina o derecho, decidió hacer su carrera en matemáticas. Consiguió una plaza en el University College de Londres en 1828, pero abandonó cuando el College rechazó a un profesor amigo suyo sin argumentar razón alguna. No obstante, retomó este puesto en 1836 cuando su sucesor murió, permaneciendo hasta 1866.

Fue un notable profesor que anteponía principios sobre técnicas. Entre sus estudiantes se cuentan muchos matemáticos famosos, entre ellos Ada Augusta, condesa de Lovelace, que fue colaboradora de Charles Babbage en su trabajo sobre máquinas de calcular (en la página 23 encontrarás notas bibliográficas sobre Ada Augusta). De Morgan advirtió a la condesa de Lovelace contra su dedicación excesiva a las matemáticas, ¡ya que podría interferir con su capacidad de engendrar!

De Morgan fue un escritor extremadamente prolijo. Escribió más de mil artículos en más de quince revistas. De Morgan también escribió libros de texto sobre muchos temas, entre los que se incluyen lógica, probabilidad, cálculo y álgebra. En 1838 presentó lo que quizá sea la primera explicación clara de una importante técnica de demostración conocida como *inducción matemática* (descrita en la Sección 3.3 de este libro), un término que él acuñó. Inventó notaciones que le ayudaron a demostrar equivalencias proposicionales, como las leyes que se nombraron en su honor. En 1842 presentó lo que quizá fue hasta la fecha la definición más precisa de límite y desarrolló algunos criterios para la convergencia de series infinitas. También se interesó por la historia de las matemáticas y escribió las biografías de Newton y Halley.

En 1837 se casó con Sophia Frend, quien escribió su biografía en 1882. La investigación, la escritura y la docencia le dejaron poco tiempo para su familia o vida social. En cualquier caso, sobresalió por su amabilidad, humor y amplios conocimientos.

**EJEMPLO 5** Justifica que las proposiciones  $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$  y  $\neg p \wedge \neg q$  son lógicamente equivalentes.

*Solución:* Podríamos utilizar una tabla de verdad para mostrar que estas fórmulas son equivalentes. En vez de ello, estableceremos la equivalencia desarrollando una serie de equivalencias lógicas intermedias usando una de las equivalencias de la Tabla 5 cada vez, comenzando con  $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$  y finalizando con  $\neg p \wedge \neg q$ . Tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
 \neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{por la segunda ley de De Morgan} \\
 &\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q] && \text{por la primera ley de De Morgan} \\
 &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{por la ley de la doble negación} \\
 &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{por la segunda ley distributiva} \\
 &\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{puesto que } \neg p \wedge p \equiv \mathbf{F} \\
 &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F} && \text{por la ley conmutativa para la disyunción} \\
 &\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{por la ley de identidad para } \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

Consecuentemente,  $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$  y  $\neg p \wedge \neg q$  son lógicamente equivalentes. ◀

**EJEMPLO 6** Muestra que  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$  es una tautología.

*Solución:* Para mostrar que esta sentencia es una tautología, usaremos equivalencias lógicas para demostrar que es lógicamente equivalente a **V**. (Nota: Se podría haber hecho también mediante una tabla de verdad).

$$\begin{aligned}
 (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{por el Ejemplo 3} \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) && \text{por la primera ley de De Morgan} \\
 &\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) && \text{por las leyes asociativa y conmutativa para la disyunción} \\
 &\equiv \mathbf{V} \vee \mathbf{V} && \text{por el Ejemplo 1 y la ley conmutativa para la disyunción} \\
 &\equiv \mathbf{V} && \text{por la ley de dominación}
 \end{aligned}$$

Se puede usar una tabla de verdad para determinar si una fórmula es una tautología. Esta tabla se puede construir a mano para una proposición con un número reducido de variables, pero cuando el número de variables crece, el método manual se vuelve impracticable. Por ejemplo, hay más de  $2^{20} = 1\,048\,576$  filas en la tabla de verdad de una proposición de veinte variables. Claramente, se necesita la ayuda de un ordenador si queremos determinar de esta forma si la fórmula de 20 variables es una tautología. Pero cuando hay mil variables, ¿puede un ordenador determinar en un plazo de tiempo razonable si una fórmula es una tautología? Revisar cada una de las  $2^{1000}$  (un número con más de trescientas cifras) combinaciones de valores de verdad no puede hacerse en un ordenador ni en billones de años. Además, no se conoce ningún otro procedimiento que pueda seguir un ordenador para determinar en un plazo razonable de tiempo si una fórmula con un número tan grande de variables es una tautología. Contestaremos a preguntas como éstas en el Capítulo 2, cuando estudiemos la complejidad de algoritmos.



**ADA AUGUSTA, CONDESA DE LOVELACE (1815-1852)** Ada Augusta fue la única hija del matrimonio del famoso poeta Lord Byron y Annabella Millbanke, los cuales se separaron cuando Ada tenía un mes. La crió su madre, que potenció su talento intelectual. Fue educada por los matemáticos William Frend y Augustus de Morgan. En 1838 se casó con Lord King, más tarde nombrado conde de Lovelace.

Ada Augusta continuó sus estudios de matemáticas tras su matrimonio, ayudando a Charles Babbage en su trabajo sobre una de las primeras máquinas calculadoras, llamada la máquina analítica. En sus escritos se encuentra la más completa descripción de esta máquina. Tras 1845, ella y Babbage trabajaron juntos en el desarrollo de un sistema para predecir carreras de caballos. Lamentablemente, su sistema no funcionó bien, dejando a Ada importantes deudas hasta su muerte. El lenguaje de programación Ada se nombró así en honor a la condesa de Lovelace.

## Problemas

- Utiliza tablas de verdad para verificar las siguientes equivalencias.
  - $p \wedge \mathbf{V} \equiv p$
  - $p \vee \mathbf{F} \equiv p$
  - $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
  - $p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
  - $p \vee p \equiv p$
  - $p \wedge p \equiv p$
- Demuestra que  $\neg(\neg p)$  y  $p$  son lógicamente equivalentes.
- Usa tablas de verdad para verificar las leyes conmutativas.
  - $p \vee q \equiv q \vee p$
  - $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- Utiliza tablas de verdad para verificar las leyes asociativas.
  - $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
  - $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- Usa una tabla de verdad para verificar la ley distributiva.  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Usa una tabla de verdad para verificar la equivalencia.  $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- Demuestra, empleando tablas de verdad, que cada una de estas implicaciones es una tautología.
  - $(p \wedge q) \rightarrow p$
  - $p \rightarrow (p \vee q)$
  - $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
  - $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
  - $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$
  - $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$
- Demuestra, empleando tablas de verdad, que cada una de estas implicaciones es una tautología.
  - $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
  - $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
  - $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
  - $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$
- Demuestra, sin utilizar tablas de verdad, que cada una de las implicaciones del Problema 7 es una tautología.
- Demuestra, sin utilizar tablas de verdad, que cada una de las implicaciones del Problema 8 es una tautología.
- Usa las tablas de verdad para verificar las leyes de absorción.
  - $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
  - $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- Determina si  $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$  es o no una tautología.
- Determina si  $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$  es o no una tautología.
- Demuestra que  $p \leftrightarrow q$  y  $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$  son equivalentes.
- Demuestra que  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$  y  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  no son equivalentes.
- Demuestra que  $p \rightarrow q$  y  $\neg q \rightarrow \neg p$  son lógicamente equivalentes.
- Demuestra que  $\neg p \leftrightarrow q$  y  $p \leftrightarrow \neg q$  son lógicamente equivalentes.
- Demuestra que  $\neg(p \oplus q)$  y  $p \leftrightarrow q$  son lógicamente equivalentes.
- Demuestra que  $\neg(p \leftrightarrow q)$  y  $p \leftrightarrow \neg q$  son lógicamente equivalentes.
- Demuestra que  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$  y  $p \rightarrow (q \wedge r)$  son lógicamente equivalentes.
- Demuestra que  $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$  y  $(p \vee q) \rightarrow r$  son lógicamente equivalentes.
- Demuestra que  $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$  y  $p \rightarrow (q \vee r)$  son lógicamente equivalentes.
- Demuestra que  $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$  y  $(p \wedge q) \rightarrow r$  son lógicamente equivalentes.
- Demuestra que  $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$  y  $q \rightarrow (p \vee r)$  son lógicamente equivalentes.
- Demuestra que  $p \leftrightarrow q$  y  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  son lógicamente equivalentes.
- Demuestra que  $p \leftrightarrow q$  y  $\neg p \leftrightarrow \neg q$  son lógicamente equivalentes.



### Enlaces

**HENRY MAURICE SHEFFER (1883-1964)** Henry Maurice Sheffer, nacido al oeste de Ucrania de padres judíos, emigró a Estados Unidos en 1892 con sus padres y hermanos. Estudió en la Boston Latin School antes de entrar en Harvard, donde completó su licenciatura en 1905, su tesis de maestría en 1907 y su doctorado en filosofía en 1908. Tras mantener un puesto postdoctoral en Harvard, Henry viajó a Europa con una beca. Al volver a Estados Unidos, se convirtió en un nómada académico, estando un año en cada una de estas Universidades: Washington, Cornell, Minnesota, Missouri y el City College de Nueva York. En 1916 volvió a Harvard como profesor titular del departamento de filosofía. Permaneció en Harvard hasta que se retiró en 1952.

En 1913 introdujo lo que se conoce como la «barra de Sheffer» (en inglés, *the Sheffer stroke*), que se dio a conocer en la edición de 1925 de los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. En esta misma edición, Russell escribió que Sheffer había inventado un potente método que podría ser usado para simplificar los *Principia*. Debido a este comentario, Sheffer se convirtió en un misterio para los lógicos, especialmente porque Sheffer, que publicó poco a lo largo de su carrera, nunca publicó los detalles de su método. Sólo lo describió en notas de reducido alcance y en un breve resumen que publicó.

Sheffer fue un profesor con una gran dedicación a la docencia de la lógica matemática. Le gustaban las clases pequeñas y detestaba a los alumnos oyentes. Cuando aparecían extraños en su clase, ordenaba que se marchasen, aunque fuesen colegas o visitantes distinguidos de Harvard. Sheffer casi no llegaba al metro cincuenta de altura; se hacía notar por su ingenio y vigor, así como por su nerviosismo e irritabilidad. Aunque muy querido, era bastante solitario. Se hizo famoso por una ocurrencia que dijo cuando se retiró: «Los viejos profesores nunca mueren, simplemente se vuelven eméritos». Sheffer acuñó el término de «álgebra de Boole» (tema del Capítulo 10 de este texto). Estuvo casado durante un corto espacio de tiempo y vivió durante la mayor parte de su último período en pequeñas habitaciones de un hotel llenas de sus libros de lógica y un vasto archivo de trocitos de papel que usaba para escribir sus ideas. Lamentablemente, Sheffer sufrió depresión severa durante las dos últimas décadas de su vida.

27. Demuestra que  $\neg(p \leftrightarrow q)$  y  $p \leftrightarrow \neg q$  son lógicamente equivalentes.
28. Demuestra que  $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$  es una tautología.
29. Demuestra que  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$  es una tautología.

La proposición **dual** de una fórmula que contiene sólo los operadores lógicos  $\vee$ ,  $\wedge$  y  $\neg$  es la proposición que se obtiene al sustituir cada  $\vee$  por  $\wedge$ , cada  $\wedge$  por  $\vee$ , cada **V** por **F** y cada **F** por **V**. La dual de la proposición  $s$  se denota como  $s^*$ .

30. Halla la proposición dual de cada una de estas proposiciones.
  - a)  $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
  - b)  $(p \wedge q \wedge r) \vee s$
  - c)  $(p \vee \mathbf{F}) \wedge (q \vee \mathbf{V})$
31. Demuestra que  $(s^*)^* = s$
32. Demuestra que las equivalencias lógicas de la Tabla 5, excepto la ley de la doble negación, se pueden agrupar en pares de proposiciones duales.
- \*\*33. ¿Por qué las duales de dos fórmulas equivalentes que contienen sólo los operadores  $\wedge$ ,  $\vee$  y  $\neg$  son también equivalentes?
34. Encuentra una fórmula en función de las proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$  que sea verdadera cuando  $p$  y  $q$  sean verdaderas y  $r$  sea falsa, pero que sea falsa en cualquier otro caso. (*Indicación:* Usa la conjunción de cada proposición o su negación).
35. Encuentra una fórmula en función de las proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$  que sea verdadera cuando exactamente dos de las proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$  sean verdaderas y falsas en cualquier otro caso. (*Indicación:* Forma una disyunción de conjunciones. Incluye una conjunción para cada combinación de valores para los cuales la proposición sea verdadera. Cada conjunción debería incluir cada una de las tres proposiciones o sus negaciones).
36. Supón que se especifica una tabla de verdad de  $n$  variables. Demuestra que una fórmula con esta tabla de verdad se puede formar haciendo la disyunción de las conjunciones de las variables o sus negaciones, incluyendo una conjunción por cada combinación de valores para los que la fórmula sea verdadera. La fórmula resultante se dice que está en **forma normal disyuntiva**.

Una colección de conectivos lógicos se llama **funcionalmente completa** si cada una de las fórmulas es lógicamente equivalente a una fórmula que es función sólo de estos conectivos lógicos.

37. Demuestra que  $\neg$ ,  $\wedge$  y  $\vee$  forman una colección funcionalmente completa de conectivos lógicos. (*Indicación:* Usa el hecho de que toda proposición es lógicamente equivalente a una en forma normal disyuntiva, como se muestra en el Problema 36).
- \*38. Demuestra que  $\neg$  y  $\vee$  forman una colección funcionalmente completa de conectivos lógicos. [*Indicación:* Usa primero las leyes de De Morgan para mostrar que  $p \vee q$  es equivalente a  $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ ].

- \*39. Demuestra que  $\neg$  y  $\vee$  forman una colección funcionalmente completa de conectivos lógicos.

Los problemas siguientes están relacionados con los operadores lógicos **NAND** y **NOR**. La proposición  $p$  **NAND**  $q$  es verdadera cuando  $p$  o  $q$ , o ambas, son falsas, y es falsa cuando tanto  $p$  como  $q$  son verdaderas. La proposición  $p$  **NOR**  $q$  es verdadera cuando tanto  $p$  como  $q$  son falsas, y es falsa en cualquier otro caso. Las proposiciones  $p$  **NAND**  $q$  y  $p$  **NOR**  $q$  se denotan por  $p \mid q$  y  $p \downarrow q$ , respectivamente. (Los operadores  $\mid$  y  $\downarrow$  se llaman **barra de Sheffer** y **flecha de Peirce** por H. M. Sheffer y C. S. Peirce, respectivamente).

40. Construye una tabla de verdad para el operador lógico **NAND**.
41. Demuestra que  $p \mid q$  es lógicamente equivalente a  $\neg(p \wedge q)$ .
42. Construye la tabla de verdad del operador lógico **NOR**.
43. Demuestra que  $p \downarrow q$  es lógicamente equivalente a  $\neg(p \vee q)$ .
44. En este problema mostraremos que  $\{\downarrow\}$  es una colección funcionalmente completa de operadores lógicos.
  - a) Demuestra que  $p \downarrow q$  es lógicamente equivalente a  $\neg p$ .
  - b) Demuestra que  $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$  es lógicamente equivalente a  $p \vee q$ .
  - c) Concluye de las partes (a) y (b) y el Problema 39 que  $\{\downarrow\}$  es una colección funcionalmente completa de operadores lógicos.
- \*45. Encuentra una proposición equivalente a  $p \rightarrow q$  usando sólo el operador lógico  $\downarrow$ .
46. Demuestra que  $\{\mid\}$  es una colección funcionalmente completa de operadores lógicos.
47. Demuestra que  $p \mid q$  y  $q \mid p$  son equivalentes.
48. Demuestra que  $p \mid (q \mid r)$  y  $(p \mid q) \mid r$  no son equivalentes, por lo que el operador lógico  $\mid$  no es asociativo.
- \*49. ¿Cuántas tablas de verdad diferentes de fórmulas que relacionen las proposiciones  $p$  y  $q$  existen?
50. Demuestra que si  $p$ ,  $q$  y  $r$  son fórmulas tales que  $p$  y  $q$  son lógicamente equivalentes y que  $q$  y  $r$  son lógicamente equivalentes, entonces  $p$  y  $r$  son lógicamente equivalentes.
51. La siguiente frase se ha tomado de una especificación de un sistema de telefonía: «Si la base de datos del directorio está abierta, el monitor se pone en estado cerrado si el sistema no está en estado inicial». La especificación es complicada de entender, pues involucra dos implicaciones. Encuentra una especificación equivalente, más fácil de entender, que incluya disyunciones o negaciones, pero no implicaciones.
52. ¿De cuántas formas las disyunciones  $p \vee \neg q$ ,  $\neg p \vee q$ ,  $q \vee r$ ,  $q \vee \neg r$ ,  $\neg q \vee \neg r$  se pueden hacer verdaderas simultáneamente mediante la asignación de valores de verdad a  $p$ ,  $q$  y  $r$ ?
53. ¿De cuántas formas las disyunciones  $p \vee \neg q \vee s$ ,  $\neg p \vee \neg r \vee s$ ,  $\neg p \vee \neg r \vee \neg s$ ,  $\neg p \vee q \vee \neg s$ ,  $q \vee r \vee \neg s$ ,  $q \vee \neg r \vee \neg s$ ,  $\neg p \vee \neg q \vee \neg s$ ,  $p \vee r \vee s$ ,  $p \vee r \vee \neg s$  se pueden hacer verdaderas simultáneamente mediante la asignación de valores de verdad a  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$ ?

Se dice que una fórmula es **satisfacible** si existe alguna asignación de valores de verdad para las variables de la proposición que la hacen verdadera.

54. ¿Cuáles de estas fórmulas son satisfacibles?

- a)  $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$   
 b)  $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$

- c)  $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$

55. Explica cómo puede usarse un algoritmo que determine si una fórmula es o no satisfacible para determinar si una fórmula es o no una tautología. (Indicación: Considera  $\neg p$ , donde  $p$  es la proposición que se examina).

## 1.3 Predicados y cuantificadores

### INTRODUCCIÓN

A menudo, en matemáticas y programas de ordenador se encuentran enunciados en los que se incluyen variables, como

$$\langle x > 3 \rangle, \langle x = y + 3 \rangle \text{ y } \langle x + y = z \rangle.$$

Estos enunciados no son ni verdaderos ni falsos si no se especifican los valores de las variables. En esta sección discutiremos las maneras en que las proposiciones pueden producir tales enunciados.

El enunciado « $x$  es mayor que 3» tiene dos partes. La primera parte, la variable  $x$ , es el sujeto del enunciado. La segunda parte —el **predicado**, «es mayor que 3»— hace referencia a una propiedad que puede tener el sujeto. Podemos denotar el enunciado « $x$  es mayor que 3» por  $P(x)$ , donde  $P$  denota el predicado «es mayor que 3» y  $x$  es la variable. La sentencia  $P(x)$  se dice también que es el valor de la **función proposicional**  $P$  en  $x$ . Una vez que se le haya asignado un valor a la variable  $x$ , la sentencia  $P(x)$  se convierte en una proposición y tiene un valor de verdad. Considera el Ejemplo 1.

**EJEMPLO 1**  $P(x)$  denota el enunciado « $x > 3$ ». ¿Cuáles son los valores de verdad de  $P(4)$  y  $P(2)$ ?

*Solución:* Obtenemos la sentencia  $P(4)$  haciendo  $x = 4$  en el enunciado « $x > 3$ ». Por tanto,  $P(4)$ , que es el enunciado « $4 > 3$ », es verdadero. Sin embargo,  $P(2)$ , el enunciado « $2 > 3$ », es falso. ◀

Podemos también tener sentencias que incluyan más de una variable. Por ejemplo, considera el enunciado « $x = y + 3$ ». Podemos denotar esta sentencia por  $Q(x, y)$ , donde  $x$  y  $y$  son variables y  $Q$  es el predicado. Cuando se asignan valores a  $x$  y  $y$ , la sentencia  $Q(x, y)$  tiene una tabla de verdad.

**EJEMPLO 2**  $Q(x, y)$  denota el enunciado « $x = y + 3$ ». ¿Cuáles son los valores de verdad de las proposiciones  $Q(1, 2)$  y  $Q(3, 0)$ ?

Ejemplos  
adicionales

*Solución:* Para obtener  $Q(1, 2)$  hacemos  $x = 1$  e  $y = 2$  en la sentencia  $Q(x, y)$ . Por tanto,  $Q(1, 2)$  es el enunciado « $1 = 2 + 3$ », que es falso. La sentencia  $Q(3, 0)$  es el enunciado « $3 = 0 + 3$ », que es verdadera. ◀

De forma similar, podemos denotar como  $R(x, y, z)$  el enunciado « $x + y = z$ ». Cuando se asignen valores a las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ , esta sentencia tendrá una tabla de verdad.

**EJEMPLO 3** ¿Cuáles son los valores de verdad de las proposiciones  $R(1, 2, 3)$  y  $R(0, 0, 1)$ ?

*Solución:* La proposición  $R(1, 2, 3)$  se obtiene haciendo  $x = 1$ ,  $y = 2$  y  $z = 3$  en la sentencia  $R(x, y, z)$ . Vemos que  $R(1, 2, 3)$  es el enunciado « $1 + 2 = 3$ », que es verdadero. También se ve que  $R(0, 0, 1)$ , el enunciado « $0 + 0 = 1$ », es falso. ◀

## **MATEMÁTICA DISCRETA Y SUS APLICACIONES**

Quinta Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 2013, respecto a la primera edición en español, por McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. L.

Edificio Valrealty, 1.ª planta

Basauri, 17

28023 Aravaca (Madrid)

Traducido de la quinta edición en inglés de

Discrete Mathematics and Its Applications

Copyright © MMIII por the MacGraw-Hill Companies, Inc.

ISBN: 0-07-242434-6

ISBN: 978-84-481-9126-9

Obra original: *Matemática discreta y sus aplicaciones* © 2004,

respecto a la quinta edición en español, por McGraw-Hill Interamericana de España, S.L.

ISBN edición original: 978-84-481-4073-1

Editora: Concepción Fernández

Asistente editorial: Amelia Nieva

Cubierta: CD-Form

Compuesto e impreso en Fernández Ciudad, S.L.

En general, una sentencia que incluye las  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se puede denotar como

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Una sentencia de la forma  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es el valor de la **función proposicional**  $P$  en la  $n$ -tupla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  $P$  se llama también un **predicado**.

Como muestra el Ejemplo 4, las funciones proposicionales se usan en programas de ordenador.

#### EJEMPLO 4 Considera la sentencia

**if**  $x > 0$  **then**  $x := x + 1$ .

Cuando el programa llega a esta línea, el valor de la variable  $x$  en este punto de la ejecución se inserta en  $P(x)$ , que es « $x > 0$ ». Si  $P(x)$  es verdadera para este valor de  $x$ , la sentencia de asignación  $x := x + 1$  se ejecuta, por lo que el valor de  $x$  se incrementa en 1. Si  $P(x)$  es falsa para este valor de  $x$ , la sentencia de asignación no se ejecuta, por lo que el valor de  $x$  no cambia. ◀

## CUANTIFICADORES

### Evaluación

Cuando a todas las variables de una función proposicional se le han asignado valores, la sentencia resultante se convierte en una proposición con un cierto valor de verdad. No obstante, hay otra forma importante, llamada **cuantificación**, de crear una proposición a partir de una función proposicional. Se discutirán en este apartado dos tipos de cuantificación, a saber, cuantificación universal y cuantificación existencial. El área de la lógica que trata con predicados y cuantificadores se llama **cálculo de predicados** o **lógica de primer orden**.

**EL CUANTIFICADOR UNIVERSAL** Muchas sentencias matemáticas imponen que una propiedad es verdadera para todos los valores de una variable en un dominio particular, llamado el **universo de discurso** o **dominio**. Tales sentencias se expresan utilizando un cuantificador universal. La cuantificación universal de una función proposicional es la proposición que afirma que  $P(x)$  es verdadera para todos los valores de  $x$  en el dominio. El dominio especifica los posibles valores de la variable  $x$ .



**CHARLES SANDERS PEIRCE (1839-1914)** Muchos consideran a Charles Peirce el intelecto más versátil y original de Estados Unidos. Nació en Cambridge, Massachusetts. Su padre, Benjamin Peirce, era profesor de matemáticas y filosofía natural en Harvard. Peirce estudió en Harvard (1855-1859), graduándose en letras en esta Universidad y en química en la Lawrence Scientific School (1863). Su padre le animó a seguir una carrera en ciencias, pero él eligió estudiar lógica y metodología científica.

En 1861, Peirce se hizo ayudante del Servicio de Guardacostas de Estados Unidos, con el objetivo de entender mejor la metodología científica. Este trabajo le eximió del servicio militar durante la guerra civil. Mientras trabajaba para la Guardia Costera, Peirce desarrolló trabajos sobre astronomía y geodesia. Hizo contribuciones esenciales al diseño de péndulos y proyecciones de mapas, aplicando nuevos desarrollos matemáticos en la teoría de funciones elípticas. Fue la primera persona en utilizar la longitud de onda de la luz como unidad de medida. Peirce ascendió a asistente del Servicio de Guardacostas, un puesto que mantuvo hasta que fue obligado a renunciar en 1891, cuando mostró su desacuerdo con la dirección que estaba tomando la nueva administración de Guardacostas.

Aunque dedicó su vida a las ciencias físicas, Peirce desarrolló una jerarquía de las ciencias, con las matemáticas en la parte más alta. Los métodos de una ciencia se podían adaptar para su uso en otras situadas por debajo en la jerarquía. Fue también el fundador de la teoría filosófica americana del pragmatismo.

El único puesto académico que ocupó fue de profesor de lógica en la Universidad Johns Hopkins, en Baltimore, de 1879 a 1884. Su trabajo matemático durante aquel tiempo incluyó contribuciones a la lógica, a la teoría de conjuntos, al álgebra abstracta y a la filosofía de las matemáticas. Su trabajo es todavía relevante hoy día. Parte de su trabajo en lógica se ha aplicado en inteligencia artificial. Peirce creía que el estudio de las matemáticas podía desarrollar capacidades de la mente como la imaginación, la abstracción y la generalización. Entre sus diversas actividades tras retirarse de la Guardia Costera se incluyen el escribir en periódicos y revistas, contribuciones en diccionarios eruditos, traducción de artículos científicos, dar conferencias invitadas y redactar libros de texto. Desgraciadamente, lo que ganó con estas actividades no fue suficiente para salvarle a él y a su segunda esposa de una miserable pobreza. Fue mantenido en sus últimos años por un fondo creado por sus muchos admiradores y administrado por el filósofo William James, amigo suyo durante toda la vida. Aunque Peirce escribió y publicó mucho en un amplio abanico de campos, dejó más de cien mil páginas manuscritas sin publicar. Debido a la dificultad del estudio de su trabajo no publicado, los investigadores han empezado ahora a comprender alguna de sus variadas contribuciones. Hay un grupo dedicado a poner su trabajo en Internet para que su obra sea mejor apreciada por todo el mundo.

**DEFINICIÓN 1**

La *cuantificación universal* de  $P(x)$  es la proposición  
« $P(x)$  es verdadera para todos los valores  $x$  del dominio».

La notación

$$\forall x P(x)$$

denota la cuantificación universal de  $P(x)$ . Aquí llamaremos al símbolo  $\forall$  el **cuantificador universal**. La proposición  $\forall x P(x)$  se lee como

«para todo  $x$   $P(x)$ », «para cada  $x$   $P(x)$ » o «para cualquier  $x$   $P(x)$ ».

Ilustraremos el uso del cuantificador universal en los Ejemplos 5-10.

**EJEMPLO 5** Sea  $P(x)$  el enunciado « $x + 1 > x$ ». ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación  $\forall x P(x)$ , donde el dominio consiste en todos los números reales?



*Solución:* Como  $P(x)$  es verdadera para todo número real  $x$ , la cuantificación

$$\forall x P(x)$$

es verdadera ◀

**EJEMPLO 6** Sea  $Q(x)$  el enunciado « $x < 2$ ». ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación  $\forall x Q(x)$ , donde el dominio consiste en todos los números reales?

*Solución:*  $Q(x)$  no es verdadera para todo número real  $x$ . Por ejemplo,  $Q(3)$  es falsa. Por tanto,

$$\forall x Q(x)$$

es falsa ▶

Cuando todos los elementos del dominio se pueden enumerar —escribiéndolos, por ejemplo, como  $x_1, x_2, \dots, x_n$ —, se sigue que la cuantificación universal  $\forall x P(x)$  es lo mismo que la conjunción

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n),$$

puesto que esta conjunción es verdadera si, y sólo si,  $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$  son todas verdaderas.

**EJEMPLO 7** ¿Cuál es el valor de verdad de  $\forall x P(x)$ , donde  $P(x)$  es el enunciado « $x^2 < 10$ » y el dominio consiste en los enteros positivos menores o iguales que 4?

*Solución:* La sentencia  $\forall x P(x)$  es lo mismo que la conjunción

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4),$$

puesto que el dominio consiste en los enteros 1, 2, 3 y 4. Como  $P(4)$ , la sentencia « $4^2 < 10$ », es falsa, se sigue que  $\forall x P(x)$  es falsa ▶

**EJEMPLO 8** ¿Qué significa la sentencia  $\forall x T(x)$  si  $T(x)$  es el enunciado « $x$  tiene un padre y una madre» y el dominio consiste en toda la gente?

*Solución:* La sentencia  $\forall x P(x)$  significa que toda persona  $x$  tiene un padre y una madre. La sentencia se puede expresar en lenguaje natural como «Toda persona tiene dos padres». La sentencia es verdadera (excepto para seres clonados, si los hay). ▶

**EJEMPLO 9** ¿Cuál es el valor de verdad de  $\forall x (x^2 \geq x)$  si el dominio consiste en todos los números reales y cuál es el valor de verdad si el dominio son todos los enteros?



*Solución:* Ten en cuenta que  $x^2 \geq x$  si, y sólo si,  $x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$ . Consecuentemente,  $x^2 \geq x$  si, y sólo si,  $x \leq 0$  o  $x \geq 1$ . Se sigue que  $\forall x (x^2 \geq x)$  es falsa si el dominio consiste en todos los números reales (ya que la desigualdad es falsa para los números reales  $x$  tales que  $0 < x < 1$ ). Sin embargo, si el dominio consiste en los enteros  $\forall x (x^2 \geq x)$  es verdadera por no haber enteros  $x$  tales que  $0 < x < 1$ . ◀

Para mostrar que una sentencia de la forma  $\forall x P(x)$  es falsa, donde  $P(x)$  es una función proposicional, sólo necesitamos encontrar un valor de  $x$  del dominio para el cual  $P(x)$  sea falsa. Este valor de  $x$  se llama **contraejemplo** de la sentencia  $\forall x P(x)$ .

**EJEMPLO 10** Supón que  $P(x)$  es « $x^2 > 0$ ». Para mostrar que la sentencia  $\forall x P(x)$  es falsa cuando el dominio sea todos los enteros, daremos un contraejemplo. Vemos que  $x = 0$  es un contraejemplo, ya que  $x^2 = 0$  cuando  $x = 0$ , por lo que no es mayor que 0 cuando  $x = 0$ . ◀

Buscar contraejemplos de sentencias que contienen al cuantificador universal es una actividad importante en el estudio de las matemáticas, como veremos en las secciones siguientes.

**EL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL** Muchas sentencias matemáticas afirman que hay un elemento con una cierta propiedad. Tales sentencias se expresan mediante cuantificadores existenciales. Con un cuantificador existencial formamos una proposición que es verdadera si y sólo si  $P(x)$  es verdadera para al menos un valor de  $x$  en el dominio.

## DEFINICIÓN 2

La *cuantificación existencial* de  $P(x)$  es la proposición

«Existe un elemento  $x$  en el dominio tal que  $P(x)$  es verdadera».

Usamos la notación

$$\exists x P(x)$$

para la cuantificación existencial de  $P(x)$ . El símbolo  $\exists$  se denomina **cuantificador existencial**. La cuantificación existencial  $\exists x P(x)$  se lee como

«Hay un  $x$  tal que  $P(x)$ »,

«Hay al menos un  $x$  tal que  $P(x)$ »

o

«Para algún  $x$   $P(x)$ ».

Ilustramos el uso del cuantificador existencial en los Ejemplos 11-13.

**EJEMPLO 11** Sea  $P(x)$  el enunciado « $x > 3$ ». ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación  $\exists x P(x)$ , donde el dominio consiste en todos los números reales?



*Solución:* Como « $x > 3$ » es verdadero, por ejemplo, para  $x = 4$ , la cuantificación existencial de  $P(x)$ , es decir,  $\exists x P(x)$ , es verdadera. ◀

**EJEMPLO 12** Sea  $Q(x)$  el enunciado « $x = x + 1$ ». ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación  $\exists x Q(x)$ , donde el dominio consiste en todos los números reales?

*Solución:* Como  $Q(x)$  es falsa para todo número real  $x$ , la cuantificación existencial de  $Q(x)$ , que es  $\exists x Q(x)$ , es falsa. ◀

Cuando todos los elementos del dominio se pueden enumerar, escribiéndolos, por ejemplo, como  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la cuantificación existencial  $\exists x P(x)$  es lo mismo que la disyunción

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n),$$

puesto que esta disyunción es verdadera si, y sólo si, al menos uno de  $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$  es verdadera.

**Tabla 1.** Cuantificadores.

<i>Sentencia</i>	<i>¿Cuándo es verdadera?</i>	<i>¿Cuándo es falsa?</i>
$\forall x P(x)$ $\exists x P(x)$	$P(x)$ es verdadera para todo $x$ Hay un $x$ para el que $P(x)$ es verdadera	Hay un $x$ para el que $P(x)$ es falsa $P(x)$ es falsa para todo $x$

**EJEMPLO 13** ¿Cuál es el valor de verdad de  $\exists x P(x)$ , donde  $P(x)$  es el enunciado « $x^2 > 10$ » y el dominio consiste en los enteros positivos menores o iguales que 4?

*Solución:* Como el dominio es  $\{1, 2, 3, 4\}$ , la proposición  $\exists x P(x)$  es lo mismo que la disyunción

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4).$$

Como  $P(4)$ , que es el enunciado « $4^2 > 10$ » es verdadera, se sigue que  $\exists x P(x)$  es verdadera. ◀

En la Tabla 1 se resume el significado de los cuantificadores universales y existenciales.

Cuando se quiere determinar el valor de verdad de una cuantificación, a veces es útil realizar una búsqueda sobre todos los posibles valores del dominio. Supongamos que hay  $n$  objetos en el dominio de la variable  $x$ . Para determinar si  $\forall x P(x)$  es verdadera, podemos barrer los  $n$  valores de  $x$  y ver si  $P(x)$  es verdadera para todos ellos. Si encontramos un valor de  $x$  para el cual  $P(x)$  es falsa, habremos demostrado que  $\forall x P(x)$  es falsa. En caso contrario,  $\forall x P(x)$  es verdadera. Para ver si  $\exists x P(x)$  es verdadera, barremos los  $n$  posibles de  $x$  buscando algún valor para el cual  $P(x)$  sea verdadera. Si encontramos uno, entonces  $\exists x P(x)$  es verdadera. Si no encontramos tal valor de  $x$ , habremos determinado que  $\exists x P(x)$  es falsa. (Observa que este procedimiento de búsqueda no puede ser aplicado si el dominio se compone de infinitos elementos. Aun así, sigue siendo una forma útil de trabajar con cuantificadores).

### VARIABLES LIGADAS

Cuando un cuantificador se usa sobre la variable  $x$  o cuando asignamos un valor a esta variable, decimos que la variable aparece **ligada**. Una variable que no aparece ligada por un cuantificador o fijada a un valor particular, se dice que es **libre**. Todas las variables que aparecen en una función proposicional deben ser ligadas para convertirla en proposición. Esto se puede hacer utilizando una combinación de cuantificadores universales, cuantificadores existenciales y asignación de valores.

La parte de una expresión lógica a la cual se aplica el cuantificador se llama **ámbito** de este cuantificador. Consecuentemente, una variable es libre si está fuera del ámbito de todos los cuantificadores en la fórmula.

**EJEMPLO 14** En la sentencia  $\exists x Q(x, y)$ , la variable  $x$  está ligada por el cuantificador existencial  $\exists x$ , pero la variable  $y$  es libre porque no está ligada a un cuantificador y no se le asigna valor alguno a esta variable.

En la sentencia  $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x R(x)$  todas las variables están ligadas. El ámbito del primer cuantificador,  $\exists x$ , es la expresión  $P(x) \wedge Q(x)$  porque  $\exists x$  se aplica sólo a  $P(x) \wedge Q(x)$  y no al resto de la sentencia. De forma similar, el ámbito del segundo cuantificador,  $\forall x$ , es la expresión  $R(x)$ . Es decir, el cuantificador existencial liga la variable  $x$  en  $P(x) \wedge Q(x)$  y el cuantificador universal  $\forall x$  liga la variable  $x$  en  $R(x)$ . Observa que podíamos haber escrito nuestra sentencia usando dos variables diferentes  $x$  e  $y$  como  $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall y R(y)$ , porque los ámbitos de los dos cuantificadores no se solapan. El lector debería prestar atención cuando se utilice la misma letra para representar variables ligadas por diferentes cuantificadores con ámbitos que no se solapan. ◀

## NEGACIONES

A menudo hace falta considerar la negación de una expresión cuantificada. Por ejemplo, consideremos la negación del enunciado

«Todos los estudiantes de la clase han cursado una asignatura de cálculo».

Esta sentencia es una cuantificación universal de la forma

$$\forall x P(x),$$

donde  $P(x)$  es la sentencia « $x$  ha cursado una asignatura de cálculo». La negación de esta sentencia es «No se cumple que todos los estudiantes de la clase hayan cursado una asignatura de cálculo». Esto es equivalente a «Hay al menos un estudiante en la clase que no ha cursado una asignatura de cálculo». Y esto es simplemente la cuantificación existencial de la negación de la función proposicional original, es decir,

$$\exists x \neg P(x).$$

Este ejemplo ilustra la siguiente equivalencia

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x).$$



Supongamos que queremos negar una cuantificación existencial. Por ejemplo, considera la proposición «Hay un estudiante en la clase que ha cursado una asignatura de cálculo». Ésta es una cuantificación existencial

$$\exists x Q(x),$$

donde  $Q(x)$  es el predicado « $x$  ha cursado una asignatura de cálculo». La negación de esta sentencia es la proposición «No se cumple que haya un estudiante en la clase que haya cursado una asignatura de cálculo». Esto es equivalente a «Ninguno de los estudiantes de la clase ha cursado una asignatura de cálculo», que es justamente la cuantificación universal de la negación de la función proposicional original. Sería equivalente, en lenguaje poco común, a «Para todo estudiante se cumple que no ha cursado un curso de cálculo», o expresado con cuantificadores,

$$\forall x \neg Q(x),$$

Este ejemplo ilustra la equivalencia

$$\neg \exists x Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x).$$

Las negaciones de cuantificadores se resumen en la Tabla 2.

**Observación:** Cuando el dominio de un predicado  $P(x)$  consiste en  $n$  elementos, donde  $n$  es un entero positivo, las reglas de la negación de sentencias cuantificadas son exactamente las mismas que la leyes de De Morgan descritas en la Sección 1.2. Esto es así porque  $\neg \forall x P(x)$  es lo mismo que  $\neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n))$ , equivalente a  $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n)$  por las leyes de De Morgan. Esto es lo mismo que  $\exists x \neg P(x)$ . De forma análoga,  $\neg \exists x P(x)$  es lo mismo que  $\neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n))$ , equivalente a  $\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n)$  por las leyes de De Morgan, lo que equivale a  $\forall x \neg P(x)$ .

Ilustramos la negación de las sentencias cuantificadas en los Ejemplos 15 y 16.

Tabla 2. Negación de cuantificadores.			
Negación	Fórmula equivalente	¿Cuándo es verdadera la negación?	¿Cuándo es falsa?
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Para cada $x$ , $P(x)$ es falsa	Hay un $x$ para el que $P(x)$ es verdadera
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Hay un $x$ para el que $P(x)$ es falsa	$P(x)$ es verdadera para cada $x$

**EJEMPLO 15** ¿Cuáles son las negaciones de los enunciados «Hay un político honesto» y «Todos los estadounidenses comen hamburguesas»?

*Solución:* Denotemos como  $H(x)$  a « $x$  es honesto». La sentencia «Hay un político honesto» se representa por  $\exists x H(x)$ , donde el dominio consiste en todos los políticos. La negación de la sentencia es  $\neg \exists x H(x)$ , lo que equivale a  $\forall x \neg H(x)$ . Esta negación se puede expresar como «Todo político es deshonesto». (Nota: En lenguaje natural, la frase «Los políticos son deshonestos» puede ser ambigua. A veces, esta frase se utiliza para expresar que «No todos los políticos son honestos». Por eso no utilizamos esta frase para expresar la negación).

Ejemplos  
adicionales

Sea  $C(x)$  el enunciado « $x$  como hamburguesas». Entonces, «Todos los estadounidenses comen hamburguesas» se representa por  $\forall x C(x)$ , donde el dominio consiste en todos los estadounidenses. La negación de esta sentencia es  $\neg \forall x C(x)$ , que es equivalente a  $\exists x \neg C(x)$ . Esta negación se puede expresar de muchas maneras, entre las que se incluyen «Algunos estadounidenses no comen hamburguesas» y «Hay algún estadounidense que no come hamburguesas». ◀

**EJEMPLO 16** ¿Cuáles son las negaciones de las sentencias  $\forall x (x^2 > x)$  y  $\exists x (x^2 = 2)$ ?

*Solución:* La negación de  $\forall x (x^2 > x)$  es la sentencia  $\neg \forall x (x^2 > x)$ , que es equivalente a  $\exists x \neg (x^2 > x)$ . Esto se puede reescribir de la forma  $\exists x (x^2 \leq x)$ . La negación de  $\exists x (x^2 = 2)$  es  $\neg \exists x (x^2 = 2)$ , equivalente a  $\forall x \neg (x^2 = 2)$ . La expresión anterior se puede reescribir como  $\forall x (x^2 \neq 2)$ . Los valores de verdad de estas sentencias dependen del dominio. ◀

## TRADUCCIÓN DE ORACIONES EN LENGUAJE NATURAL A LENGUAJE FORMAL

Traducir frases del lenguaje natural a expresiones lógicas es una tarea crucial en matemáticas, programación lógica, inteligencia artificial, ingeniería del *software* y muchas otras disciplinas. Comenzamos estudiando esta cuestión en la Sección 1.1, donde utilizamos fórmulas para expresar afirmaciones en expresiones lógicas. En aquella discusión evitamos a propósito afirmaciones cuya traducción requiriese predicados y cuantificadores. Formalizar expresiones del lenguaje natural en expresiones lógicas se hace más complejo cuando se necesitan cuantificadores. Además, puede haber diferentes formas de traducir una frase particular. (En consecuencia, no hay un «libro de recetas» que se pueda seguir paso a paso). Utilizaremos algunos ejemplos para ilustrar cómo se formalizan afirmaciones del lenguaje natural en lógica de predicados. El objetivo es producir expresiones lógicas simples y útiles. En esta sección nos limitamos a frases que pueden ser traducidas a fórmulas usando un solo cuantificador. En la siguiente sección veremos frases más complicadas que requieren múltiples cuantificadores.

**EJEMPLO 17** Expresa la frase «Todo estudiante de esta clase ha estudiado cálculo» utilizando predicados y cuantificadores.

Ejemplos  
adicionales

*Solución:* Primero, reescribimos la sentencia, de tal forma que podamos identificar con claridad los cuantificadores que debemos emplear. Haciéndolo, obtenemos:

«Para todo estudiante de esta clase, ese estudiante ha estudiado cálculo».

Luego introducimos la variable  $x$ , de tal forma que nuestra sentencia se convierte en

«Para todo estudiante  $x$  de esta clase,  $x$  ha estudiado cálculo».

Continuando, introducimos el predicado  $C(x)$ , que es el enunciado « $x$  ha estudiado cálculo». Por consiguiente, si el dominio de  $x$  consiste en los estudiantes de la clase, podemos traducir nuestra frase como  $\forall x C(x)$ .

No obstante, hay otras opciones correctas; se pueden considerar diferentes dominios o diferentes predicados. La opción que seleccionemos dependerá del razonamiento que queramos realizar a continuación. Por ejemplo, podemos estar interesados en un grupo de personas más amplio

que el de esa clase en particular. Si cambiamos el dominio, tomando el conjunto de todas las personas, habremos de expresar nuestro enunciado como

«Para toda persona  $x$ , si la persona  $x$  es un estudiante de esta clase, entonces  $x$  ha estudiado cálculo».

Si  $S(x)$  representa el predicado de que la persona  $x$  está en la clase, nuestra sentencia se puede expresar como  $\forall x (S(x) \rightarrow C(x))$ . [*Cuidado!* ¡Nuestra sentencia *no puede* expresarse como  $\forall x (S(x) \wedge C(x))$ , puesto que esta sentencia afirmaría que todas las personas son estudiantes de la clase y han estudiado cálculo!].

Finalmente, cuando estamos interesados en los estudios de una persona, aparte del cálculo, podríamos preferir usar un cuantificador de dos variables  $Q(x, y)$  para la frase «el estudiante  $x$  ha estudiado la asignatura  $y$ ». Así, podríamos reemplazar  $C(x)$  por  $Q(x, \text{cálculo})$  en las dos opciones que hemos elegido para obtener  $\forall x Q(x, \text{cálculo})$  o  $\forall x (S(x) \rightarrow Q(x, \text{cálculo}))$ . ◀

En el Ejemplo 17 mostramos diferentes formas de expresar la misma sentencia usando predicados y cuantificadores. No obstante, siempre adoptaremos la opción más sencilla que sea adecuada para nuestro razonamiento posterior.

**EJEMPLO 18** Formaliza las frases «Algún estudiante de esta clase ha visitado México» y «Todo estudiante de esta clase ha visitado bien México o bien Argentina».

*Solución:* La frase «Algún estudiante de esta clase ha visitado México» significa que

«Hay un estudiante en esta clase que tiene como atributo que ese estudiante ha visitado México».

Podemos introducir una variable  $x$ , de tal forma que nuestra frase se convierte en

«Hay un estudiante  $x$  en esta clase que tiene como atributo que  $x$  ha visitado México».

Introducimos el predicado  $M(x)$ , que es el enunciado « $x$  ha visitado México». Si el dominio para  $x$  consiste en los estudiantes de esta clase, se puede traducir esta primera frase como  $\exists x M(x)$ .

No obstante, si estamos interesados en otras personas además de las de la clase, tomamos la frase de forma ligeramente diferente. Nuestra frase se puede expresar como

«Hay una persona  $x$  que tiene como atributos que  $x$  es un estudiante de esta clase y que  $x$  ha visitado México».

En este caso, el dominio para la variable  $x$  es todas las personas. Introducimos el predicado  $S(x)$ , « $x$  es un estudiante de esta clase». Nuestra solución se convierte en  $\exists x (S(x) \wedge M(x))$ , ya que la frase hace referencia a una persona  $x$  que es estudiante de la clase y que ha visitado México. [*Cuidado!* Nuestra sentencia no puede expresarse como  $\exists x (S(x) \rightarrow M(x))$ , la cual es correcta cuando todos en la clase han visitado México].

De forma similar, la segunda frase se puede expresar como

«Para todo  $x$  en la clase,  $x$  tiene como atributo que  $x$  ha visitado México o  $x$  ha visitado Argentina».

(Ten en cuenta que estamos asumiendo el *o* inclusivo, no el exclusivo). Sea  $C(x)$  la sentencia « $x$  ha visitado Argentina». Siguiendo el razonamiento anterior, vemos que si el dominio de  $x$  consiste en los estudiantes de la clase, esta segunda sentencia se puede expresar  $\forall x (C(x) \vee M(x))$ . Sin embargo, si el dominio de  $x$  consiste en todas las personas, la frase se puede expresar como

«Para toda persona  $x$ , si  $x$  es un estudiante de esta clase, entonces  $x$  ha visitado México o  $x$  ha visitado Argentina».

En este caso, la sentencia se puede expresar como  $\forall x (S(x) \rightarrow (C(x) \vee M(x)))$ .

En lugar de utilizar los predicados  $M(x)$  y  $C(x)$  para representar que  $x$  ha visitado México y que  $x$  ha visitado Argentina, respectivamente, podríamos haber usado un predicado de dos variables  $V(x, y)$  para representar « $x$  ha visitado el país  $y$ ». En este caso,  $V(x, \text{México})$  y  $V(x, \text{Argentina})$

tendrían el mismo significado que  $M(x)$  y  $C(x)$  y podrían reemplazarlas en nuestras respuestas. Si estamos trabajando con muchas frases relacionadas con gente que visita diferentes países, podríamos preferir la opción de un predicado de dos variables. En otros casos, por simplicidad, nos quedaríamos con los predicados de una variable  $M(x)$  y  $C(x)$  ◀

## EJEMPLOS DE LEWIS CARROLL

Lewis Carroll (seudónimo de C. L. Dodgson), el autor de *Alicia en el país de las maravillas*, es también autor de varios trabajos sobre lógica simbólica. Sus libros contienen muchos ejemplos de razonamiento que usan cuantificadores. Los ejemplos 19 y 20 provienen de su libro.

*Lógica simbólica.* En el bloque de problemas al final de esta sección se dan más ejemplos de ese libro. Estos ejemplos ilustran cómo utilizar cuantificadores para expresar diferentes tipos de sentencias.

**EJEMPLO 19** Considera estas frases. Las dos primeras de llaman *premisas* y la tercera se llama *conclusión*. El conjunto de las tres se denomina *argumento*.

- «Todos los leones son fieros».
- «Algunos leones no toman café».
- «Algunas criaturas fieras no toman café».

(En la Sección 1.5 discutiremos el hecho de determinar si la conclusión es una consecuencia válida de las premisas. En este ejemplo, sí lo es). Sean  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$  los enunciados « $x$  es un león», « $x$  es fiero» y « $x$  toma café», respectivamente. Asumiendo que el dominio es el conjunto de todas las criaturas, expresa las sentencias del argumento usando los cuantificadores  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$ .

*Solución:* Expresamos estas sentencias como:

- $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)).$
- $\exists x (P(x) \wedge \neg R(x)).$
- $\exists x (Q(x) \wedge \neg R(x)).$

Ten en cuenta que la segunda sentencia no se puede escribir como  $\exists x (P(x) \rightarrow \neg R(x))$ . La razón es que  $P(x) \rightarrow \neg R(x)$  es verdadera siempre que  $x$  no sea un león, por lo que  $\exists x (P(x) \rightarrow \neg R(x))$  es verdadera mientras haya al menos una criatura que no sea un león, incluso si todo león toma café. De forma similar, la tercera sentencia no puede escribirse como

$$\exists x (Q(x) \rightarrow \neg R(x)).$$

**EJEMPLO 20** Considera estas frases, de las cuales las tres primeras son premisas y la cuarta es una conclusión válida.

- «Todos los colibríes tienen el plumaje de vivos colores».
- «No hay pájaros grandes que liben néctar».
- «Los pájaros que no liban néctar tienen el plumaje de colores pálidos».
- «Los colibríes son pequeños».



**CHARLES LUTWIDGE DODGSON (1832-1898)** Conocemos a Charles Dodgson como *Lewis Carroll*, seudónimo que utilizó en sus escritos de lógica. Dodgson, hijo de un clérigo, fue el tercero de once hermanos, todos ellos tartamudos. No se sentía cómodo en presencia de adultos y se decía que sólo hablaba sin tartamudear cuando lo hacía con jovencitas, con muchas de las cuales conversaba, se carteaba y a las que fotografiaba (con frecuencia, desnudas). Aunque se sentía atraído por las jovencitas, era extremadamente puritano y religioso. Su amistad con las tres jóvenes hijas del decano Liddell le llevó a escribir *Alicia en el país de las maravillas*, que le dio fama y fortuna.

Dodgson se graduó en Oxford en 1854 y obtuvo su licenciatura en letras en 1857. Fue nombrado profesor de matemáticas en el Christ Church College de Oxford en 1855. Se ordenó en la Iglesia anglicana en 1861, pero nunca practicó su ministerio. Sus escritos incluyen artículos y libros sobre geometría, determinantes, y sobre las matemáticas aplicadas a competiciones y elecciones. (También utilizó el seudónimo Lewis Carroll en sus muchos trabajos sobre lógica recreativa).

Sean  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  y  $S(x)$  los enunciados « $x$  es un colibrí», « $x$  es grande», « $x$  liba néctar» y « $x$  tiene el plumaje de vivos colores» respectivamente. Asumiendo que el dominio es el conjunto de todos los pájaros, expresa las sentencias del argumento usando cuantificadores y  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  y  $S(x)$ .

*Solución:* Podemos expresar las sentencias del argumento como

$$\begin{aligned}\forall x (P(x) \rightarrow S(x)). \\ \neg \exists x (Q(x) \wedge R(x)). \\ \forall x (\neg R(x) \rightarrow \neg S(x)). \\ \forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)).\end{aligned}$$

(Ten en cuenta que hemos asumido que «pequeño» es lo mismo que «no grande» y que «plumaje de colores pálidos» es lo mismo que «plumaje con colores no vivos». Para mostrar que la cuarta sentencia es una conclusión válida de las tres primeras, necesitamos utilizar reglas de inferencia que se describirán en la Sección 1.5). ◀

## PROGRAMACIÓN LÓGICA



Algunos lenguajes de programación han sido diseñados para razonar haciendo uso de las reglas de la lógica de predicados. Prolog (que proviene de *Programación en lógica*), desarrollado en los años setenta por informáticos que trabajaban en el área de inteligencia artificial, es un ejemplo de este importante tipo de lenguajes. Los programas en Prolog incluyen un conjunto de declaraciones basadas en dos tipos de sentencias, **hechos** y **reglas**. Los hechos en Prolog definen predicados especificando los elementos que satisfacen esos predicados. Las reglas en Prolog se emplean para definir nuevos predicados utilizando aquellos ya definidos por los hechos. El Ejemplo 21 ilustra estas nociones.

**EJEMPLO 21** Considera un programa en Prolog que parte de unos hechos que especifica el profesor de cada asignatura y en qué asignaturas están matriculados los alumnos. El programa hace uso de estos hechos para responder preguntas relacionadas con los profesores de un alumno en particular. Este programa podría utilizar los predicados  $\text{profesor}(p, a)$  y  $\text{matriculado}(e, a)$  para representar que el profesor  $p$  es el profesor de la asignatura  $a$  y que el estudiante  $e$  está matriculado en la asignatura  $a$ , respectivamente. Por ejemplo, los hechos en Prolog de tal programa podrían incluir:

```
profesor(chan, mate273)
profesor(patel, ec222)
profesor(grossman, cc301)
matriculado(kevin, mate273)
matriculado(juana, ec222)
matriculado(juana, cc301)
matriculado(kiko, mate273)
matriculado(kiko, cc301)
```

(Se han utilizado letras minúsculas porque Prolog considera que los nombres que empiezan por una mayúscula son variables).

Un nuevo predicado  $\text{enseña}(p, e)$ , que representa que el profesor  $p$  da clase al estudiante  $e$ , se puede definir haciendo uso de la regla en Prolog:

```
enseña(P, E) :- profesor(P, A), matriculado(E, A)
```

que significa que  $\text{enseña}(p, e)$  es verdadero si existe una asignatura  $a$  tal que el profesor  $p$  es el profesor de la asignatura  $a$  y el estudiante  $e$  está matriculado en la asignatura  $a$ . (Ten en cuenta que la coma se usa en Prolog para representar una conjunción de predicados. Análogamente, el punto y coma se usa para disyunción de predicados).

El Prolog responde preguntas utilizando hechos y reglas dadas. Por ejemplo, empleando los hechos y reglas anteriores, la pregunta

`?matriculado (kevin, mate273)`

genera la respuesta

yes

ya que el hecho *matriculado*(kevin, mate273) se proporcionó como entrada. La pregunta

`?matriculado (X, mate273)`

produce la respuesta

kevin

kiko

Para producir esta respuesta, el Prolog determina todos los posibles valores de  $X$  para los que *matriculado*( $X$ , mate273) se ha incluido entre los hechos. De forma similar, para encontrar los profesores que dan clase de las asignaturas en las que está matriculada Juana, se usa la pregunta

`?enseña(X, juana)`

que produce

patel

grossman

## Problemas

- Denotemos por  $P(x)$  la sentencia « $x \leq 4$ ». ¿Cuáles son los valores de verdad siguientes?  
**a)**  $P(0)$                       **b)**  $P(4)$                       **c)**  $P(6)$
- Denotemos por  $P(x)$  la sentencia «la palabra  $x$  contiene la letra  $a$ ». ¿Cuáles son los valores de verdad siguientes?  
**a)**  $P(\text{naranja})$                       **b)**  $P(\text{limón})$   
**c)**  $P(\text{verdadero})$                       **d)**  $P(\text{falsa})$
- Denotemos por  $Q(x, y)$  la sentencia « $x$  es la capital de  $y$ ». ¿Cuáles son los valores de verdad siguientes?  
**a)**  $Q(\text{Francia, París})$   
**b)**  $Q(\text{Bolivia, Tegucigalpa})$   
**c)**  $Q(\text{Honduras, La Paz})$   
**d)**  $Q(\text{Colombia, Cartagena})$
- Declara el valor de  $x$  tras ejecutar la sentencia **if**  $P(x)$  **then**  $x := 1$ , donde  $P(x)$  es la sentencia « $x > 1$ » si el valor de  $x$  cuando se llega a esta sentencia es:  
**a)**  $x = 0$                       **b)**  $x = 1$                       **c)**  $x = 2$
- Sea  $P(x)$  la sentencia « $x$  asiste a más de cinco horas de clase al día», donde el dominio de  $x$  consiste en todos los estudiantes. Expresa las siguientes cuantificaciones en lenguaje natural:  
**a)**  $\exists x P(x)$                       **b)**  $\forall x P(x)$   
**c)**  $\exists x \neg P(x)$                       **d)**  $\forall x \neg P(x)$
- Sea  $N(x)$  la sentencia « $x$  ha visitado Alemania», donde el dominio de  $x$  consiste en todos los estudiantes de tu clase. Expresa cada una de estas cuantificaciones en lenguaje natural:  
**a)**  $\exists x N(x)$                       **b)**  $\forall x N(x)$                       **c)**  $\neg \exists x N(x)$   
**d)**  $\exists x \neg N(x)$                       **e)**  $\neg \forall x N(x)$                       **f)**  $\forall x \neg N(x)$
- Traduce estas sentencias a lenguaje natural, donde  $C(x)$  es « $x$  es un cómico» y  $F(x)$  es « $x$  es divertido» y el dominio consiste en todas las personas.  
**a)**  $\forall x (C(x) \rightarrow F(x))$                       **b)**  $\forall x (C(x) \wedge F(x))$   
**c)**  $\exists x (C(x) \rightarrow F(x))$                       **d)**  $\exists x (C(x) \wedge F(x))$
- Traduce estas sentencias a lenguaje natural, donde  $R(x)$  es « $x$  es un conejo» y  $H(x)$  es « $x$  salta» y el dominio consiste en todos los animales.  
**a)**  $\forall x (R(x) \rightarrow H(x))$                       **b)**  $\forall x (R(x) \wedge H(x))$   
**c)**  $\exists x (R(x) \rightarrow H(x))$                       **d)**  $\exists x (R(x) \wedge H(x))$
- Sea  $P(x)$  la sentencia « $x$  habla ruso» y  $Q(x)$  « $x$  conoce el lenguaje de programación C++». Expresa cada una de las siguientes sentencias en términos de  $P(x)$ ,  $Q(x)$ , cuantificadores y conectivos lógicos. El dominio para los cuantificadores consiste en todos los estudiantes de tu facultad  
**a)** Hay un estudiante en tu facultad que habla ruso y conoce C++.  
**b)** Hay un estudiante en tu facultad que habla ruso pero que no conoce C++.



# Contenido

<i>Sobre el autor</i> .....	ix
<i>Prólogo</i> .....	xi
<i>La página web de ayuda</i> .....	xix
<i>Al estudiante</i> .....	xxi
<b>1. Los fundamentos: lógica y demostración, conjuntos y funciones ...</b>	<b>1</b>
1.1. Lógica .....	1
1.2. Equivalencias proposicionales .....	19
1.3. Predicados y cuantificadores .....	26
1.4. Cuantificadores anidados .....	40
1.5. Métodos de demostración .....	52
1.6. Conjuntos .....	71
1.7. Operaciones con conjuntos .....	79
1.8. Funciones .....	90
Material fin del Capítulo .....	103
<b>2. Los fundamentos: algoritmos, números enteros y matrices .....</b>	<b>109</b>
2.1. Algoritmos .....	109
2.2. Crecimiento de funciones .....	120
2.3. Complejidad de algoritmos .....	132
2.4. Enteros y división .....	140
2.5. Enteros y algoritmos .....	155
2.6. Aplicaciones de la teoría de números .....	167
2.7. Matrices .....	181
Material fin del Capítulo .....	191
<b>3. Razonamiento matemático, inducción y recursividad .....</b>	<b>199</b>
3.1. Estrategias de demostración .....	199
3.2. Sucesiones y sumatorios .....	210
3.3. Inducción matemática .....	222
3.4. Definiciones recursivas e inducción estructural .....	239
3.5. Algoritmos recursivos .....	255
3.6. Verificación de programas .....	264
Material fin del Capítulo .....	270
<b>4. Recuento .....</b>	<b>279</b>
4.1. Fundamentos de combinatoria .....	279
4.2. Principios del palomar .....	290
4.3. Permutaciones y combinaciones .....	297
4.4. Coeficientes binomiales .....	303
4.5. Permutaciones y combinaciones generalizadas .....	311

- c) Todos los estudiantes de tu facultad hablan ruso o conocen C++.
- d) Ningún estudiante de tu facultad habla ruso o conoce C++.
10. Sea  $C(x)$  la sentencia « $x$  tiene un gato»  $D(x)$ , « $x$  tiene un perro», y  $F(x)$ , « $x$  tiene un hámster». Expresa cada una de las siguientes sentencias en términos de  $C(x)$ ,  $D(x)$ ,  $F(x)$ , cuantificadores y conectivos lógicos. El dominio para los cuantificadores consiste en todos los estudiantes de tu clase.
- Un estudiante de tu clase tiene un gato, un perro y un hámster.
  - Todos los estudiantes de tu clase tienen un gato, un perro o un hámster.
  - Algún estudiante de tu clase tiene un gato y un hámster, pero no un perro.
  - Ningún estudiante de tu clase tiene un gato, un perro y un hámster.
  - Para cada uno de los tres animales, gatos, perros y hámsteres, hay un estudiante de tu clase que tiene uno de esos animales como mascota.
11. Sea  $P(x)$  la sentencia « $x = x^2$ ». Si el dominio consiste en todos los enteros, ¿cuáles son los valores de verdad?
- $P(0)$
  - $P(1)$
  - $P(2)$
  - $P(-1)$
  - $\exists x P(x)$
  - $\forall x P(x)$
12. Sea  $Q(x)$  la sentencia « $x + 1 > 2x$ ». Si el dominio consiste en todos los enteros, ¿cuáles son estos valores de verdad?
- $Q(0)$
  - $Q(-1)$
  - $Q(1)$
  - $\exists x Q(x)$
  - $\forall x Q(x)$
  - $\exists x \neg Q(x)$
  - $\forall x \neg Q(x)$
13. Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias si el dominio consiste en todos los enteros.
- $\forall n (n + 1 > n)$
  - $\exists n (2n = 3n)$
  - $\exists n (n = -n)$
  - $\forall n (n^2 \geq n)$
14. Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias si el dominio consiste en todos los números reales.
- $\exists x (x^3 = -1)$
  - $\exists x (x^4 < x^2)$
  - $\forall x ((-x)^2 = x^2)$
  - $\forall x (2x > x)$
15. Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias si el dominio consiste en todos los enteros.
- $\forall n (n^2 \geq 0)$
  - $\exists n (n^2 = 2)$
  - $\forall n (n^2 \geq n)$
  - $\exists n (n^2 < 0)$
16. Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias si el dominio consiste en todos los números reales.
- $\exists x (x^2 = 2)$
  - $\exists x (x^2 = -1)$
  - $\forall x (x^2 + 2 \geq 1)$
  - $\forall x (x^2 \neq x)$
17. Supón que el dominio de la función proposicional  $P(x)$  consiste en los enteros 0, 1, 2, 3 y 4. Escribe cada una de esas proposiciones usando disyunciones, conjunciones y negaciones.
- $\exists x P(x)$
  - $\forall x P(x)$
  - $\exists x \neg P(x)$
  - $\forall x \neg P(x)$
  - $\neg \exists x P(x)$
  - $\neg \forall x P(x)$
18. Supón que el dominio de la función proposicional  $Q(x)$  consiste en los enteros  $-2, -1, 0, 1$  y  $2$ . Escribe cada una de esas proposiciones usando disyunciones, conjunciones y negaciones.
- $\exists x P(x)$
  - $\forall x P(x)$
  - $\exists x \neg P(x)$
  - $\forall x \neg P(x)$
  - $\neg \exists x P(x)$
  - $\neg \forall x P(x)$
19. Supón que el dominio de la función proposicional  $P(x)$  consiste en los enteros 1, 2, 3, 4 y 5. Expresa las siguientes sentencias sin usar cuantificadores, sólo disyunciones, conjunciones y negaciones.
- $\exists x P(x)$
  - $\forall x P(x)$
  - $\neg \exists x P(x)$
  - $\neg \forall x P(x)$
  - $\forall x ((x \neq 3) \rightarrow P(x)) \vee \exists x \neg P(x)$
20. Supón que el dominio de la función proposicional  $P(x)$  consiste en los enteros  $-5, -3, -1, 1, 3$  y  $5$ . Expresa las siguientes sentencias sin usar cuantificadores, sólo disyunciones, conjunciones y negaciones.
- $\exists x P(x)$
  - $\forall x P(x)$
  - $\forall x ((x \neq 1) \rightarrow P(x))$
  - $\exists x ((x \geq 0) \wedge P(x))$
  - $\exists x (\neg P(x)) \wedge \forall x ((x < 0) \rightarrow P(x))$
21. Traduce de dos formas cada una de estas frases a expresiones lógicas utilizando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos. En primer lugar, el dominio consistirá en los estudiantes de tu clase, y en segundo lugar, será el conjunto de todas las personas.
- Alguien de tu clase habla hindú.
  - Todos en tu clase son amigables.
  - Hay una persona en tu clase que no nació en Santiago.
  - Un estudiante de tu clase ha visto una película.
  - Ningún estudiante de tu clase ha cursado una asignatura de programación lógica.
22. Traduce de dos formas cada una de estas frases a expresiones lógicas usando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos. En primer lugar, el dominio consistirá en los estudiantes de tu clase, y en segundo lugar, consistirá en toda la gente.
- Todos en tu clase tienen un teléfono móvil.
  - Alguien en tu clase ha visto una película extranjera.
  - Hay una persona en tu clase que no sabe nadar.
  - Todos los estudiantes de tu clase saben resolver ecuaciones de segundo grado.
  - Algún estudiante de clase no quiere ser rico.
23. Traduce cada una de estas frases a expresiones lógicas usando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos.
- Nadie es perfecto.
  - No todo el mundo es perfecto.
  - Todos tus amigos son perfectos.
  - Cada uno de tus amigos es perfecto.
  - Todo el mundo es tu amigo y es perfecto.
  - No todo el mundo es tu amigo o alguien no es perfecto.

24. Traduce cada una de estas frases a expresiones lógicas de tres formas diferentes variando el dominio y usando predicados con una y con dos variables.
- Alguien de tu facultad ha visitado Uzbekistán.
  - Todos en tu clase han estudiado cálculo y C++.
  - Nadie en tu facultad tiene una bicicleta y una moto.
  - Hay una persona en tu facultad que no es feliz.
  - Todos en tu clase han nacido en el siglo xx.
25. Traduce cada una de estas frases a expresiones lógicas de tres formas diferentes variando el dominio y utilizando predicados con una y con dos variables.
- Un estudiante de tu escuela ha vivido en La Rioja.
  - Hay un estudiante de tu facultad que no habla hindú.
  - Un estudiante de tu facultad sabe Java, Prolog y C++.
  - A todo el mundo en tu facultad le gusta la comida italiana.
  - Alguien de tu clase no juega al hockey.
26. Traduce cada una de estas frases a expresiones lógicas usando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos.
- Alguien no está en el lugar correcto.
  - Todas las herramientas están en el lugar correcto y están en excelentes condiciones.
  - Todo está en el lugar correcto y en excelentes condiciones.
  - Nada está en el lugar correcto y en excelentes condiciones.
  - Una de tus herramientas no está en el lugar correcto, pero está en excelentes condiciones.
27. Expresa cada una de estas frases utilizando operadores, predicados y cuantificadores.
- Algunas proposiciones son tautologías.
  - La negación de una contradicción es una tautología.
  - La disyunción de dos contingencias puede ser una tautología.
  - La conjunción de dos tautologías es una tautología.
28. Supón que el dominio de la función proposicional  $P(x, y)$  consiste en pares  $x$  e  $y$ , donde  $x$  es 1, 2 o 3 e  $y$  es 1, 2 o 3. Escribe estas proposiciones usando disyunciones y conjunciones.
- $\exists x P(x, 3)$
  - $\forall y P(1, y)$
  - $\exists y \neg P(2, y)$
  - $\forall x \neg P(x, 2)$
29. Supón que el dominio de  $Q(x, y, z)$  consiste en ternas  $x, y, z$ , donde  $x = 0, 1$  o  $2$ ,  $y = 0$  o  $1$  y  $z = 0$  o  $1$ . Escribe estas proposiciones usando disyunciones y conjunciones.
- $\forall y Q(0, y, 0)$
  - $\exists x Q(x, 1, 1)$
  - $\exists z \neg Q(0, 0, z)$
  - $\exists x \neg Q(x, 0, 1)$
30. Expresa cada una de estas frases utilizando cuantificadores. Luego forma la negación de la sentencia de tal forma que ninguna negación quede a la izquierda del cuantificador. Más tarde, expresa la negación en lenguaje natural. (No uses simplemente las palabras «No se cumple que...»).
- Todos los perros tienen pulgas.
  - Hay un caballo que puede sumar.
  - Todo koala puede trepar.
  - Ningún mono puede hablar francés.
  - Hay un cerdo que puede nadar y pescar peces.
31. Expresa cada una de estas frases utilizando cuantificadores. Luego forma la negación de la sentencia de tal forma que ninguna negación quede a la izquierda del cuantificador. Más tarde, expresa la negación en lenguaje natural. (No uses simplemente las palabras «No se da el caso de que...»).
- Algunos perros viejos pueden aprender trucos nuevos.
  - Ningún conejo sabe cálculo.
  - Todos los pájaros pueden volar.
  - No hay perro alguno que pueda hablar.
  - No hay nadie en la clase que hable francés y ruso.
32. Expresa la negación de estas proposiciones utilizando cuantificadores y luego expresa la negación en lenguaje natural.
- Algunos conductores no cumplen los límites de velocidad.
  - Todas las películas suecas son serias.
  - Nadie puede mantener un secreto.
  - Hay alguien en esta clase que no tiene buena actitud.
33. Halla un contraejemplo, si es posible, a estas sentencias universalmente cuantificadas, donde el dominio para todas las variables consiste en todos los enteros.
- $\forall x (x^2 \geq x)$
  - $\forall x (x > 0 \vee x < 0)$
  - $\forall x (x = 1)$
34. Halla un contraejemplo, si es posible, a estas sentencias cuantificadas universalmente, donde el dominio para todas las variables consiste en todos los números reales.
- $\forall x (x^2 \neq x)$
  - $\forall x (x^2 \neq 2)$
  - $\forall x (|x| > 0)$
35. Expresa cada una de estas sentencias usando predicados y cuantificadores.
- Un pasajero de una aerolínea es considerado viajero elite si vuela más de 40 000 km al año o toma más de 25 vuelos durante un año
  - Un hombre se clasifica para el maratón si su mejor tiempo es inferior a tres horas y una mujer se clasifica para el maratón si su mejor tiempo es inferior a tres horas y media.
  - Un estudiante debe dar al menos 60 horas de clase en el curso, o al menos 45 horas de clase en el curso, y escribir una tesina y que obtenga una puntuación no inferior a notable en todas las asignaturas requeridas para recibir la graduación.
  - Hay un estudiante que ha recibido más de 21 horas de clase en un semestre y ha sacado una media de sobresaliente.

Los problemas 36-40 tratan de traducciones entre especificaciones de sistema y expresiones lógicas con cuantificadores.

36. Traduce estas especificaciones de sistema a lenguaje natural, donde el predicado  $S(x, y)$  es « $x$  está en estado  $y$ » y donde los dominios para  $x$  e  $y$  consisten en todos los sistemas y todos los posibles estados, respectivamente.
- $\exists x S(x, \text{abierto})$
  - $\forall x (S(x, \text{estropeado}) \vee S(x, \text{diagnóstico}))$
  - $\exists x S(x, \text{abierto}) \vee \exists x S(x, \text{diagnóstico})$
  - $\exists x \neg S(x, \text{disponible})$
  - $\forall x \neg S(x, \text{funcionando})$
37. Traduce estas especificaciones de sistema a lenguaje natural, donde  $F(p)$  es «La impresora  $p$  está fuera de servicio»,  $B(p)$  es «La impresora  $p$  está ocupada»,  $L(j)$  es «El trabajo de impresión  $j$  se ha perdido» y  $Q(j)$  es «El trabajo de impresión  $j$  está en cola».
- $\exists p (F(p) \wedge B(p)) \rightarrow \exists j L(j)$
  - $\forall p B(p) \rightarrow \exists j Q(j)$
  - $\exists j (Q(j) \wedge L(j)) \rightarrow \exists p F(p)$
  - $(\forall p B(p) \wedge \forall j Q(j)) \rightarrow \exists j L(j)$
38. Expresa cada una de estas especificaciones de sistema usando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos.
- Cuando hay menos de 30 megabytes libres en un disco duro se envía un mensaje de aviso a todos los usuarios.
  - No se pueden abrir directorios en el sistema de archivos y no se pueden cerrar ficheros si se ha detectado un error de sistema.
  - No se puede hacer una copia de seguridad del sistema de archivos si hay un usuario en ese momento conectado.
  - Se puede proporcionar vídeo a petición del cliente cuando hay al menos 8 megabytes de memoria disponible y la velocidad de conexión es de al menos 56 kilobits por segundo.
39. Expresa cada una de estas especificaciones de sistema usando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos.
- Se puede guardar al menos un mensaje de correo si hay un disco con más de 10 kilobytes de espacio libre.
  - Siempre que haya una alerta activa, se transmitirán todos los mensajes en cola.
  - El monitor de diagnóstico vigila el estado de todos los sistemas menos el de la consola central.
  - Se le envía una factura a cada participante en la conferencia a quien el responsable no haya puesto en una lista especial.
40. Expresa cada una de estas especificaciones de sistema utilizando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos.
- Todos los usuarios tienen acceso al buzón de correo electrónico.
  - Cualquiera del grupo puede acceder al sistema de buzón de correo electrónico si el sistema de archivos está bloqueado.
  - El cortafuegos está en estado de diagnóstico sólo si el servidor *proxy* está en estado de diagnóstico.
  - Al menos un *router* está funcionando normalmente si la velocidad de transferencia está entre 100 kbps y 500 kbps y el *proxy* no está en modo de diagnóstico.
41. Determina si  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  y  $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$  tienen el mismo valor de verdad.
42. Muestra que  $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$  y  $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$  tienen el mismo valor de verdad.
43. Muestra que  $\exists x (P(x) \vee Q(x))$  y  $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$  tienen el mismo valor de verdad.
44. Establece estas equivalencias lógicas, donde  $A$  es una proposición sin cuantificadores.
- $(\forall x (P(x)) \vee A \equiv \forall x (P(x) \vee A)$
  - $(\exists x (P(x)) \vee A \equiv \exists x (P(x) \vee A)$
45. Establece estas equivalencias lógicas, donde  $A$  es una proposición sin cuantificadores.
- $(\forall x (P(x)) \wedge A \equiv \forall x (P(x) \wedge A)$
  - $(\exists x (P(x)) \wedge A \equiv \exists x (P(x) \wedge A)$
46. Muestra que  $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$  y  $\forall x (P(x) \vee Q(x))$  no son lógicamente equivalentes.
47. Muestra que  $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$  y  $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$  no son lógicamente equivalentes.
48. La notación  $\exists! x P(x)$  denota la proposición «Existe un único  $x$  tal que  $P(x)$  es verdadera». Si el dominio consiste en todos los enteros, ¿cuáles son los valores de verdad?
- $\exists! x (x > 1)$
  - $\exists! x (x^2 = 1)$
  - $\exists! x (x + 3 = 2x)$
  - $\exists! x (x = x + 1)$
49. ¿Cuáles son los valores de verdad de estas sentencias?
- $\exists! x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ .
  - $\forall x P(x) \rightarrow \exists! x P(x)$ .
  - $\exists! x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$
50. Escribe  $\exists! x P(x)$ , donde el dominio consiste en los enteros 1, 2 y 3, en términos de negaciones, conjunciones y disyunciones.
51. Dados los hechos Prolog del Ejemplo 21, ¿cuál será el resultado de estas preguntas en Prolog?
- ?profesor(chan, mate273)
  - ?profesor(patel, cc301)
  - ?matriculado(X, cc301)
  - ?matriculado(kiko, Y)
  - ?enseña(grossman, Y)
52. Dados los hechos Prolog del Ejemplo 21, ¿cuál será el resultado de estas preguntas en Prolog?
- ?matriculado(kevin, ec222)
  - ?matriculado(kiko, mate273)
  - ?profesor(grossman, X)
  - ?profesor(X, cc301)
  - ?enseña(X, kevin)
53. Supón que se utilizan hechos Prolog para definir el predicado *madre*( $M, Y$ ) y *padre*( $P, X$ ), que representan que  $M$

es la madre de  $Y$  y  $P$  es el padre de  $X$ , respectivamente. Obtén una regla Prolog para definir el predicado *hermanos*( $X, Y$ ), que significa que  $X$  e  $Y$  son hermanos (esto es, tienen la misma madre y el mismo padre).

54. Supón que utilizan hechos Prolog para definir el predicado *madre*( $M, Y$ ) y *padre*( $P, X$ ), que representan que  $M$  es la madre de  $Y$  y  $P$  es el padre de  $X$ , respectivamente. Obtén una regla Prolog para definir el predicado *abuelo*( $X, Y$ ), que significa que  $X$  es el abuelo de  $Y$ . (Indicación: Puedes escribir una disyunción en Prolog bien usando un punto y coma para separar predicados o bien poniendo estos predicados en líneas separadas).

Los problemas 55-58 se basan en preguntas del libro *Lógica simbólica*, de Lewis Carroll.

55. Sean  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$  las afirmaciones « $x$  es un profesor», « $x$  es ignorante» y « $x$  es inepto», respectivamente. Expresa cada una de las siguientes sentencias utilizando cuantificadores, conectivos lógicos y  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$ , donde el dominio consiste en toda la gente.

- a) No hay profesores ignorantes.
- b) Toda la gente ignorante es inepta.
- c) No hay profesores ineptos.
- d) ¿Se sigue (c) de (a) y (b)? Si no es así, ¿existe una conclusión correcta?

56. Sean  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$  las afirmaciones « $x$  es una explicación clara», « $x$  es satisfactoria» y « $x$  es una excusa», respectivamente. Suponemos que el dominio para  $x$  es todo texto en español. Expresa cada una de las siguientes sentencias usando cuantificadores, conectivos lógicos y  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$ .

- a) Todas las explicaciones claras son satisfactorias.
- b) Algunas excusas no son satisfactorias.
- c) Algunas excusas no son explicaciones claras.
- \*d) ¿Se sigue (c) de (a) y (b)? Si no es así, ¿existe una conclusión correcta?

57. Sean  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  y  $S(x)$  las afirmaciones « $x$  es un bebé», « $x$  es lógico», « $x$  es capaz de dominar a un cocodrilo» y « $x$  es despreciado», respectivamente. Suponemos que el dominio para  $x$  es toda la gente. Expresa cada una de las siguientes sentencias usando cuantificadores, conectivos lógicos y  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  y  $S(x)$ .

- a) Los bebés son ilógicos.
- b) Nadie que pueda dominar a un cocodrilo es despreciado.
- c) Las personas ilógicas son despreciadas.
- d) Los bebés no pueden dominar a un cocodrilo.
- \*e) ¿Se sigue (d) de (a), (b) y (c)? Si no es así, ¿existe una conclusión correcta?

58. Sean  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  y  $S(x)$  las afirmaciones « $x$  es un pato», « $x$  es un ave de mi corral», « $x$  es un oficial» y « $x$  quiere bailar un vals», respectivamente. Expresa cada una de las siguientes sentencias usando cuantificadores, conectivos lógicos y  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  y  $S(x)$ .

- a) Ningún pato quiere bailar un vals.
- b) Ningún oficial rechaza bailar un vals.
- c) Todas las aves de mi corral son patos.
- d) Las aves de mi corral no son oficiales.
- \*e) ¿Se sigue (d) de (a), (b) y (c)? Si no es así, ¿existe una conclusión correcta?

## 1.4 Cuantificadores anidados

### INTRODUCCIÓN

En la Sección 1.3 definimos los cuantificadores universal y existencial y mostramos cómo se pueden usar en la construcción de sentencias matemáticas. También explicamos cómo se pueden utilizar para formalizar frases en lenguaje natural, convirtiéndolas en expresiones lógicas. En esta sección estudiaremos **cuantificadores anidados**, que son cuantificadores que se localizan dentro del rango de aplicación de otros cuantificadores, como en la sentencia  $\forall x \exists y (x + y = 0)$ . Los cuantificadores anidados se usan tanto en matemáticas como en ciencias de la computación. Aunque a veces pueden ser difíciles de entender, las reglas que ya hemos estudiado en la Sección 1.3 nos ayudarán a trabajar con ellos.

### FORMALIZACIÓN DE SENTENCIAS CON CUANTIFICADORES ANIDADOS

En muchos contextos aparecen complicadas expresiones que hacen uso de cuantificadores. Para entender estas sentencias con muchos cuantificadores, debemos desenmarañar el significado de cada cuantificador y predicado que aparecen. Esto se ilustra en el Ejemplo 1.

**EJEMPLO 1** Supongamos que el dominio de las variables reales  $x$  e  $y$  consiste en todos los números reales. La sentencia



$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

afirma que  $x + y = y + x$  para todo par de números reales  $x$  e  $y$ . Es la ley conmutativa para la suma de números reales. De la misma forma, la sentencia

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

afirma que para cada número real  $x$  hay un real  $y$  tal que  $x + y = 0$ . Esto declara que todo número real tiene un inverso para la suma. Análogamente, la sentencia



$$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$$

es la ley asociativa para la suma de números reales. ◀

**EJEMPLO 2** Traduce a lenguaje natural la sentencia

$$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0)),$$

donde el dominio para ambas variables consiste en los números reales.

*Solución:* Esta sentencia afirma que para todo par de números reales  $x$  e  $y$ , si  $x > 0$  e  $y < 0$ , entonces  $xy < 0$ . Esto es, que para los pares de números reales  $x$  e  $y$ , si  $x$  es positivo e  $y$  es negativo, entonces  $xy$  es negativo. Esto se puede afirmar más sucintamente como «El producto de un número real positivo y un número real negativo es un número real negativo». ◀

Las expresiones con cuantificadores anidados que formulan sentencias en lenguaje natural pueden ser muy complicadas. El primer paso para traducir esas expresiones es escribir qué expresan los cuantificadores y predicados de la expresión. El siguiente paso es expresar el significado en una frase sencilla. Este proceso se ilustra en los Ejemplos 3 y 4.

**EJEMPLO 3** Traduce la sentencia

$$\forall x (C(x) \vee \exists y (C(y) \wedge F(x, y)))$$

a lenguaje natural, donde  $C(x)$  es « $x$  tiene un ordenador»,  $F(x, y)$  es « $x$  e  $y$  son amigos» y el dominio tanto para  $x$  como  $y$  consiste en todos los estudiantes de tu facultad.

*Solución:* La sentencia afirma que para cada estudiante  $x$  de tu facultad,  $x$  tiene un ordenador o hay un estudiante  $y$  tal que  $y$  tiene un ordenador y  $x$  e  $y$  son amigos. En otras palabras, todo estudiante de tu facultad tiene un ordenador o un amigo que tiene uno. ◀

**EJEMPLO 4** Traduce la sentencia

$$\exists x \forall y \forall z ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$$

a lenguaje natural, donde  $F(a, b)$  significa que  $a$  y  $b$  son amigos. El dominio para  $x$ ,  $y$  y  $z$  consiste en todos los estudiantes de tu facultad.

*Solución:* Primero examinamos la expresión  $(F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z)$ . Esta expresión dice que si los estudiantes  $x$  e  $y$  son amigos, los estudiantes  $x$  y  $z$  son amigos y, además,  $y$  y  $z$  no son la misma persona, entonces  $y$  y  $z$  no son amigos. Se sigue que la sentencia original, triplemente cuantificada, dice que hay un estudiante  $x$  tal que para todos los estudiantes  $y$  y todos los estudiantes  $z$  que son diferentes de  $y$ , si  $x$  e  $y$  son amigos y  $x$  y  $z$  también son amigos, entonces  $y$  y  $z$  no son amigos. En otras palabras, hay un estudiante para el cual se cumple que sus amigos no son amigos entre sí. ◀

## FORMALIZACIÓN DE SENTENCIAS EN EXPRESIONES LÓGICAS

En la Sección 1.3 vimos cómo se podían utilizar los cuantificadores para formalizar frases en expresiones lógicas. Sin embargo, evitamos sentencias cuya formalización requiriese el uso de cuantificadores anidados. Nos ocupamos ahora de estas sentencias.

**EJEMPLO 5** Expresa la sentencia «Si una persona es del sexo femenino y tiene un hijo, esta persona es la madre de alguien» como una expresión lógica que involucre predicados, cuantificadores —cuyo dominio es el conjunto de todas las personas— y conectivos lógicos.

*Solución:* La frase anterior se puede expresar como «Para toda persona  $x$ , si la persona  $x$  es del sexo femenino y la persona  $x$  tiene un hijo, entonces existe una persona  $y$  tal que la persona  $x$  es madre de la persona  $y$ ». Introducimos los predicados  $F(x)$  para representar « $x$  es del sexo femenino»,  $P(x)$  para representar « $x$  tiene un hijo» y  $M(x, y)$  para representar « $x$  es madre de  $y$ ». La frase original se puede expresar como

$$\forall x ((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x, y)).$$

Podemos desplazar  $\exists y$  hacia la izquierda, puesto que  $y$  no aparece en  $F(x) \wedge P(x)$ , para obtener una expresión equivalente

$$\forall x \exists y ((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow M(x, y)).$$

**EJEMPLO 6** Expresa la sentencia «Cada persona tiene exactamente un amigo preferido» como una expresión lógica que involucre predicados, cuantificadores —cuyo dominio es el conjunto de todas las personas— y conectivos lógicos.

*Solución:* La frase anterior se puede expresar como «Para cada persona  $x$ , la persona  $x$  tiene exactamente un amigo preferido». Introduciendo el cuantificador universal, se ve que la sentencia es la misma que « $\forall x$  (la persona  $x$  tiene exactamente un amigo preferido)», donde el dominio consiste en toda la gente.

Decir que  $x$  tiene exactamente un amigo preferido significa que hay una persona  $y$  que es el mejor amigo de  $x$ , y además, que para toda persona  $z$ , si  $z$  no es la persona  $y$ , entonces  $z$  no es el mejor amigo de  $x$ . Cuando introducimos el predicado  $B(x, y)$  como « $y$  es el mejor amigo de  $x$ », la sentencia que afirma que  $x$  tiene exactamente un amigo preferido se puede representar como

$$\exists y (B(x, y) \wedge \forall z ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z))).$$

Consecuentemente, nuestra sentencia original se puede expresar como

$$\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z))).$$

(Ten en cuenta que podemos escribir esta sentencia como  $\forall x \exists! y B(x, y)$ , donde  $\exists!$  es el «cuantificador de unicidad» definido en el Problema 48 de la Sección 1.3. De cualquier forma, el «cuantificador de unicidad» no es realmente un cuantificador; más bien es un recurso para expresar ciertas sentencias que se pueden expresar usando los cuantificadores  $\forall$  y  $\exists$ . El «cuantificador de unicidad»  $\exists!$  se puede considerar una macro).

**EJEMPLO 7** Emplea cuantificadores para expresar la sentencia «Hay una mujer que ha viajado en un vuelo en cada una de las líneas aéreas del mundo».

*Solución:* Sea  $P(w, f)$  « $w$  ha viajado en  $f$ » y  $Q(f, a)$  « $f$  es un vuelo de la línea aérea  $a$ ». Podemos expresar la sentencia como

$$\exists w \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a)),$$

donde los dominios para  $w, f$  y  $a$  consisten en todas las mujeres del mundo, todos los vuelos y todas las líneas aéreas, respectivamente.

La sentencia se podría haber expresado también como

$$\exists w \forall a \exists f R(w, f, a),$$

donde  $R(w, f, a)$  es « $w$  ha viajado en el vuelo  $f$  de la línea aérea  $a$ ». Aunque esta expresión es más compacta, oscurece un tanto las relaciones entre las variables. Por ello, la primera solución puede ser preferible. ◀

Las sentencias matemáticas expresadas en lenguaje natural se pueden formalizar en expresiones lógicas, como muestran los Ejemplos 8-10.

**EJEMPLO 8** Formaliza la afirmación «La suma de dos enteros positivos es positiva» en una expresión lógica



*Solución:* Para formalizar la afirmación, primero la reescribimos para evidenciar los cuantificadores implicados: «Para cada dos enteros positivos, la suma de estos enteros es positiva». Luego introducimos las variables  $x$  e  $y$  para obtener «Para todos los enteros positivos  $x$  e  $y$ ,  $x + y$  es positivo». Por consiguiente, podemos expresar esta afirmación como

$$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0)),$$

donde el dominio para ambas variables consiste en todos los enteros. ◀

**EJEMPLO 9** Formaliza la afirmación «Todo número real, excepto el cero, tiene un inverso para el producto».



*Solución:* Primero reescribimos la frase como «Para todo número real  $x$ , excepto el cero,  $x$  tiene un inverso para el producto». Esta sentencia se puede reescribir de nuevo como «Para todo número real  $x$ , si  $x \neq 0$ , entonces existe un número real  $y$  tal que  $xy = 1$ ». Esto se puede expresar como

$$\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1)).$$

Un ejemplo que te puede resultar familiar es el concepto de límite, que es importante en Cálculo. ▶

**EJEMPLO 10** (Se requiere Cálculo) Enuncia la definición de límite usando cuantificadores.

*Solución:* Recordamos que la sentencia

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

significa que para todo número real  $\varepsilon > 0$ , existe un número real  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $0 < |x - a| < \delta$ . Esta definición de límite se puede escribir en términos de cuantificadores como

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon),$$

donde el dominio para las variables  $\delta$  y  $\varepsilon$  consiste en todos los reales positivos y para  $x$  consiste en todos los reales.

Esta definición también se puede expresar como

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon),$$

donde el dominio para las variables  $\varepsilon$  y  $\delta$  consiste en todos los números reales en vez de sólo los reales positivos. ◀

## NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES ANIDADOS

Las sentencias con varios cuantificadores anidados se pueden negar aplicando sucesivamente las reglas de negación de las sentencias que contienen un único cuantificador. Esto se ilustra en los Ejemplos 11-13.



**EJEMPLO 11** Expresa la negación de la sentencia  $\forall x \exists y (xy = 1)$  de tal forma que ninguna negación preceda al cuantificador.

Ejemplos  
adicionales

*Solución:* Aplicando sucesivamente las reglas para negar sentencias cuantificadas dadas en la Tabla 2 de la Sección 1.3, podemos mover la negación en  $\neg \forall x \exists y (xy = 1)$  dentro de todos los cuantificadores. Encontramos que  $\neg \forall x \exists y (xy = 1)$  es equivalente a  $\exists x \neg \exists y (xy = 1)$ , que es equivalente a  $\exists x \forall y \neg (xy = 1)$ . Como  $\neg (xy = 1)$  se puede expresar más simplemente como  $xy \neq 1$ , concluimos que nuestra sentencia negada se puede expresar como  $\exists x \forall y (xy \neq 1)$ . ◀

**EJEMPLO 12** Usa cuantificadores para expresar la sentencia «No existe ninguna mujer que haya viajado en un vuelo de cada una de las líneas aéreas del mundo».

*Solución:* La afirmación anterior es la negación de la sentencia «Hay una mujer que ha viajado en un vuelo de cada línea aérea del mundo» del Ejemplo 7. Por el Ejemplo 7, nuestra sentencia se puede expresar como  $\neg \exists w \forall a \exists f (P(w, f) \wedge (Q(f, a)))$ , donde  $P(w, f)$  es « $w$  ha viajado en  $f$ » y  $Q(f, a)$  es « $f$  es un vuelo de la línea aérea  $a$ ». Aplicando sucesivamente las reglas de la negación de sentencias cuantificadas de la Tabla 2 de la Sección 1.3 para desplazar la negación dentro de cada cuantificador y aplicando las leyes de De Morgan en el último paso, encontramos que nuestra sentencia es equivalente a cada una de las de la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned}\neg \exists w \neg \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a)) &\equiv \forall w \exists a \neg \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a)) \\ &\equiv \forall w \exists a \forall f \neg (P(w, f) \wedge Q(f, a)) \\ &\equiv \forall w \exists a \forall f (\neg P(w, f) \vee \neg Q(f, a)).\end{aligned}$$

Esta última sentencia afirma que «Para toda mujer hay una línea aérea tal que, para todo vuelo, esta mujer no ha viajado en ese vuelo o ese vuelo no es de esa línea aérea». ◀

**EJEMPLO 13** Utiliza cuantificadores y predicados para expresar el hecho de que el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe.

*Solución:* Decir que el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe significa que para todos los números reales  $L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ . Usando el Ejemplo 10, la sentencia  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$  se puede expresar como

$$\neg \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Aplicando sucesivamente las reglas de la negación de expresiones cuantificadas, construimos esta secuencia de sentencias equivalentes

$$\begin{aligned}\neg \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 \neg \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \neg \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \neg (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon).\end{aligned}$$

Usamos la equivalencia  $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$  en el último paso.

Debido a que la sentencia  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe, significa que para todos los números reales  $L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ , la sentencia se puede expresar como

$$\forall L \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon).$$

Esta última sentencia afirma que para cada número real  $L$  hay un número real  $\varepsilon > 0$  tal que para todo número real  $\delta > 0$  existe un número real  $x$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$  y  $|f(x) - L| \geq \varepsilon$ . ◀

## EL ORDEN DE LOS CUANTIFICADORES

Muchas sentencias matemáticas usan cuantificaciones múltiples de funciones proposicionales con más de una variable. Es fundamental tener en cuenta que el orden de los cuantificadores es importante, a no ser que todos los cuantificadores sean universales o existenciales. Este hecho se ilus-

Ejemplos  
adicionales

tra en los Ejemplos 14-16. En cada uno de estos ejemplos el dominio de las variables consiste en todos los números reales.

**EJEMPLO 14** Sea  $P(x, y)$  la sentencia « $x + y = y + x$ ». ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación  $\forall x \forall y P(x, y)$ ?

*Solución:* La cuantificación

$$\forall x \forall y P(x, y)$$

denota la proposición

«Para todo número real  $x$  y todo número real  $y$ ,  $x + y = y + x$ ».

Como  $P(x, y)$  es verdadera para todos los números reales  $x$  e  $y$ , la proposición  $\forall x \forall y P(x, y)$  es verdadera. ◀

**EJEMPLO 15** Sea  $Q(x, y)$  la sentencia « $x + y = 0$ ». ¿Cuál es el valor de verdad de las cuantificaciones  $\exists y \forall x Q(x, y)$  y  $\forall x \exists y Q(x, y)$ ?

*Solución:* La cuantificación

$$\exists y \forall x Q(x, y)$$

denota la proposición

«Hay un número real  $y$  tal que para todo número real  $x$ ,  $Q(x, y)$ ».

Para cada  $y$  elegido, hay un único valor de  $x$  para el cual  $x + y = 0$ . Como no hay un número real  $y$  tal que  $x + y = 0$  para todos los números reales  $x$ , la sentencia  $\exists y \forall x Q(x, y)$  es falsa.

La cuantificación

$$\forall x \exists y Q(x, y)$$

denota la proposición

«Para todo número real  $x$  hay un número real  $y$  tal que  $Q(x, y)$ ».

Dado un número real  $x$ , se puede hallar un número real  $y$  tal que  $x + y = 0$ ; a saber,  $y = -x$ . Por tanto, la sentencia  $\forall x \exists y Q(x, y)$  es verdadera. ◀

El Ejemplo 15 ilustra que el orden en que aparecen los cuantificadores es importante. Las sentencias  $\exists y \forall x P(x, y)$  y  $\forall x \exists y P(x, y)$  no son lógicamente equivalentes. La sentencia  $\exists y \forall x P(x, y)$  es verdadera si, y sólo si, hay un  $y$  que hace  $P(x, y)$  verdadera para todo  $x$ . Por tanto, para que esta sentencia sea verdadera, debe haber un valor particular de  $y$  para el cual  $P(x, y)$  es verdadera, sin importar el valor que se elija de  $x$ . Por otra parte,  $\forall x \exists y P(x, y)$  es verdadera, si, y sólo si, para todo valor de  $x$  hay un valor de  $y$  para el cual  $P(x, y)$  es verdadera. Por tanto, para que esta sentencia sea verdadera, no importa la elección de  $x$ , debe haber un valor de  $y$  (posiblemente dependiente del valor que se escoja para  $x$ ) para el cual  $P(x, y)$  es verdadera. En otras palabras, en el segundo caso  $y$  puede depender de  $x$ , mientras que en el primer caso  $y$  es una constante independiente de  $x$ .

De estas observaciones se sigue que si  $\exists y \forall x P(x, y)$  es verdadera, entonces  $\forall x \exists y P(x, y)$  debe ser también verdadera. Sin embargo, si  $\forall x \exists y P(x, y)$  es verdadera, no es necesario que  $\exists y \forall x P(x, y)$  sea también verdadera. (Véanse los Problemas complementarios 14 y 16 al final del capítulo).

**PENSANDO EN LOS CUANTIFICADORES COMO BUCLES** Al trabajar con cuantificadores de más de una variable es útil a veces pensar en términos de bucles anidados. (Por supuesto, si hay un número infinito de elementos en el dominio de alguna variable, no podemos cerrar un bucle para todos los valores. A pesar de ello, esta forma de pensar sigue siendo útil). Por ejemplo, para ver si  $\forall x \forall y P(x, y)$  es verdadera, recorreremos en un bucle todas las variables  $x$ , y para cada  $x$  recorreremos en un segundo bucle todos valores de  $y$ . Si encontramos que  $P(x, y)$  es verdadera para todos los valores de  $x$  e  $y$ , hemos determinado que  $\forall x \forall y P(x, y)$  es verdadera. Si, por el contrario, encontramos algún valor de  $x$  para el cual hay un valor de  $y$  tal que  $P(x, y)$  resulta ser falsa, hemos demostrado que  $\forall x \forall y P(x, y)$  es falsa.

**Tabla 1.** Cuantificadores de dos variables.

<i>Sentencia</i>	<i>¿Cuándo es verdadera?</i>	<i>¿Cuándo es falsa?</i>
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	$P(x, y)$ es verdadera para todo par $x, y$	Hay un par $x, y$ para el cual $P(x, y)$ es falsa
$\forall x \exists y P(x, y)$	Para todo $x$ hay un $y$ para el cual $P(x, y)$ es verdadera	Hay un $x$ tal que $P(x, y)$ es falsa para para todo $y$
$\exists x \forall y P(x, y)$	Hay un $x$ para el cual $P(x, y)$ es verdadera para todo $y$	Para todo $x$ hay un $y$ para el cual $P(x, y)$ es falsa
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	Hay un par $x, y$ para el cual $P(x, y)$ es verdadera	$P(x, y)$ es falsa para todo par $x, y$

De forma similar, para determinar si  $\forall x \exists y P(x, y)$  es verdadera, recorremos en un bucle todos los valores de  $x$ . Para cada  $x$ , recorremos en un bucle los valores de  $y$  hasta que encontramos un  $y$  para el cual  $P(x, y)$  es verdadera. Si para todos los  $x$  encontramos tal valor de  $y$ , entonces  $\forall x \exists y P(x, y)$  es verdadera; si para algún  $x$  no encontramos un valor de  $y$  con esa propiedad, entonces  $\forall x \exists y P(x, y)$  es falsa.

Para ver si  $\exists x \forall y P(x, y)$  es verdadera, recorremos los valores de  $x$  en un bucle hasta que encontramos un  $x$  para el cual  $P(x, y)$  es siempre verdadera cuando recorremos en un bucle todos los valores de  $y$ . Una vez encontrado tal valor de  $x$ , sabemos que  $\exists x \forall y P(x, y)$  es verdadera. Si no encontramos nunca un  $x$  como ése, entonces sabremos que  $\exists x \forall y P(x, y)$  es falsa.

Finalmente, para saber si  $\exists x \exists y P(x, y)$  es verdadera, recorremos en un bucle los valores de  $x$ , y para cada valor de  $x$  recorremos los valores de  $y$  hasta que encontremos un  $x$  para el cual haya un  $y$  que verifique que  $P(x, y)$  sea verdadera.

La Tabla 1 resume los significados de las diferentes cuantificaciones posibles con dos variables.

También son comunes las cuantificaciones de más de dos variables, como ilustra el Ejemplo 16.

**EJEMPLO 16** Sea  $Q(x, y, z)$  la sentencia « $x + y = z$ ». ¿Cuáles son los valores de verdad de las sentencias  $\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$  y  $\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z)$ ?

*Solución:* Supongamos que asignamos valores a  $x$  e  $y$ . Entonces, existe un número real  $z$  tal que  $x + y = z$ . Por consiguiente, la cuantificación

$$\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$$

que es la sentencia

«Para todos los números reales  $x$  e  $y$  hay un número real  $z$  tal que  $x + y = z$ »,

es verdadera. El orden de la cuantificación aquí importa, ya que

$$\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z),$$

es la sentencia

«Hay un número real  $z$  tal que para todos los números reales  $x$  e  $y$  se cumple que  $x + y = z$ »,

la cual es falsa, ya que ningún valor de  $z$  satisface la ecuación  $x + y = z$  para todos los valores de  $x$  e  $y$ . ◀

4.6. Generación de permutaciones y combinaciones .....	320
Material fin del Capítulo .....	324
<b>5. Probabilidad discreta .....</b>	<b>329</b>
5.1. Una introducción a la probabilidad discreta .....	329
5.2. Teoría de la probabilidad .....	336
5.3. Valor esperado y varianza .....	352
Material fin del Capítulo .....	366
<b>6. Técnicas avanzadas de recuerdo .....</b>	<b>373</b>
6.1. Relaciones de recurrencia .....	373
6.2. Resolución de relaciones de recurrencia .....	384
6.3. Algoritmos de divide y vencerás y relaciones de recurrencia .....	396
6.4. Funciones generatrices .....	405
6.5. Principio de inclusión-exclusión .....	420
6.6. Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión .....	426
Material fin del Capítulo .....	433
<b>7. Relaciones .....</b>	<b>439</b>
7.1. Relaciones y sus propiedades .....	439
7.2. Relaciones $n$ -arias y sus aplicaciones .....	449
7.3. Representación de relaciones .....	456
7.4. Cierre de relaciones .....	463
7.5. Relaciones de equivalencia .....	473
7.6. Órdenes parciales .....	481
Material fin del Capítulo .....	495
<b>8. Grafos .....</b>	<b>503</b>
8.1. Introducción a los grafos .....	503
8.2. Terminología en teoría de grafos .....	511
8.3. Representación de grafos e isomorfismo de grafos .....	521
8.4. Conexión .....	531
8.5. Caminos eulorianos y hamiltonianos .....	540
8.6. Caminos de longitud mínima .....	554
8.7. Grafos planos .....	564
8.8. Coloreado de grafos .....	573
Material fin del Capítulo .....	581
<b>9. Árboles .....</b>	<b>589</b>
9.1. Introducción a los árboles .....	589
9.2. Aplicaciones de los árboles .....	601
9.3. Recorridos en árboles .....	615
9.4. Árboles generadores .....	628
9.5. Árbol generador mínimo .....	641
Material fin del Capítulo .....	646

## Problemas

- Traduce estas sentencias a lenguaje natural, donde el dominio para todas las variables es el conjunto de los números reales.
  - $\forall x \exists y (x < y)$
  - $\forall x \forall y (((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \rightarrow (xy \geq 0))$
  - $\forall x \forall y \exists z (xy = z)$
- Traduce estas sentencias a lenguaje natural, donde el dominio para todas las variables es el conjunto de los números reales.
  - $\exists x \forall y (xy = y)$
  - $\forall x \forall y (((x \geq 0) \wedge (y < 0)) \rightarrow (x - y > 0))$
  - $\forall x \forall y \exists z (x = y + z)$
- Sea  $Q(x, y)$  la sentencia « $x$  ha enviado un correo electrónico a  $y$ », donde el dominio tanto para  $x$  como para  $y$  consiste en todos los estudiantes de tu clase. Expresa cada una de estas cuantificaciones en lenguaje natural.
  - $\exists x \exists y Q(x, y)$
  - $\exists x \forall y Q(x, y)$
  - $\forall x \exists y Q(x, y)$
  - $\exists y \forall x Q(x, y)$
  - $\forall y \exists x Q(x, y)$
  - $\forall x \forall y Q(x, y)$
- Sea  $P(x, y)$  la sentencia «el estudiante  $x$  está matriculado en la asignatura  $y$ », donde el dominio para  $x$  son los estudiantes de tu clase y el de  $y$  consiste en todas las asignaturas de ingeniería informática. Expresa cada una de estas cuantificaciones en lenguaje natural.
  - $\exists x \exists y P(x, y)$
  - $\exists x \forall y P(x, y)$
  - $\forall x \exists y P(x, y)$
  - $\exists y \forall x P(x, y)$
  - $\forall y \exists x P(x, y)$
  - $\forall x \forall y P(x, y)$
- Supongamos que mediante la sentencia  $W(x, y)$  queremos expresar que el estudiante  $x$  ha visitado la página web  $y$ , donde el dominio para  $x$  consiste en todos los estudiantes de tu facultad y para  $y$  consiste en todas las páginas web. Expresa cada una de estas cuantificaciones en lenguaje natural.
  - $W(\text{Sarah Smith}, \text{www.att.com})$
  - $\exists x W(x, \text{www.imdb.org})$
  - $\exists y W(\text{José Orez}, y)$
  - $\exists y (W(\text{Ashok Puri}, y) \wedge W(\text{Cindy Yoon}, y))$
  - $\exists y \forall z (y \neq (\text{David Belcher}) \wedge (W(\text{David Belcher}, z) \rightarrow W(y, z)))$
  - $\exists x \exists y \forall z ((x \neq y) \wedge (W(x, z) \leftrightarrow W(y, z)))$
- Supongamos que mediante la sentencia  $C(x, y)$  queremos expresar que el estudiante  $x$  se ha matriculado en la asignatura  $y$ , donde el dominio para  $x$  consiste en todos los estudiantes de tu facultad y para  $y$  consiste en todas las asignaturas impartidas en ingeniería informática. Expresa cada una de estas cuantificaciones en lenguaje natural.
  - $C(\text{Randy Goldberg}, \text{CC 252})$
  - $\exists x C(x, \text{Mate 695})$
  - $\exists y C(\text{Carol Sitea}, y)$
  - $\exists x (C(x, \text{Mate 222}) \wedge C(x, \text{CC 252}))$
- Supongamos que mediante la sentencia  $T(x, y)$  queremos expresar que al estudiante  $x$  le gusta la cocina del país  $y$ , donde el dominio para  $x$  consiste en todos los estudiantes de tu facultad y para  $y$  consiste en todos los países con cultura culinaria propia. Expresa cada una de estas cuantificaciones en lenguaje natural.
  - $\neg T(\text{Abdallah Hussein}, \text{japonesa})$
  - $\exists x T(y, \text{coreana}) \wedge \forall x T(x, \text{mexicana})$
  - $\exists y (T(\text{Monique Arsenaault}, y) \vee T(\text{Jay Johnson}, y))$
  - $\forall x \forall z \exists y ((x \neq z) \rightarrow \neg (T(x, y) \wedge T(z, y)))$
  - $\exists x \exists z \forall y (T(x, y) \leftrightarrow T(z, y))$
  - $\forall x \forall z \exists y (T(x, y) \leftrightarrow T(z, y))$
- Sea  $Q(x, y)$  la sentencia «el estudiante  $x$  ha participado en el concurso  $y$ ». Expresa cada una de estas sentencias en términos de  $Q(x, y)$ , cuantificadores y conectivos lógicos, donde el dominio para  $x$  consiste en todos los estudiantes de tu facultad y para  $y$  consiste en todos los concursos de televisión.
  - Hay un estudiante en tu facultad que ha participado en un concurso de televisión.
  - Ningún estudiante de tu facultad ha participado nunca en un concurso de televisión.
  - Hay un estudiante en tu facultad que ha participado en los concursos «50 × 15» y «Pasa Palabra».
  - Cada concurso de televisión ha tenido un estudiante de tu facultad como participante.
  - Al menos dos estudiantes de tu facultad han participado en el concurso de televisión «50 × 15».
- Sea  $L(x, y)$  la sentencia « $x$  quiere a  $y$ », donde el dominio tanto para  $x$  como para  $y$  consiste en todas las personas del mundo. Usa cuantificadores para expresar cada una de las siguientes sentencias.
  - Todo el mundo quiere a Jaime.
  - Todo el mundo quiere a alguien.
  - Hay alguien a quien todo el mundo quiere.
  - Nadie quiere a todo el mundo.
  - Hay alguien a quien Lidia no quiere.
  - Hay alguien a quien no le quiere nadie.
  - Hay exactamente una persona a quien todo el mundo quiere.
  - Hay exactamente dos personas a quienes Lidia quiere.
  - Todo el mundo se quiere a sí mismo.
  - Hay alguien que no quiere a los que están a su lado.
- Sea  $F(x, y)$  la sentencia « $x$  puede engañar a  $y$ », donde el dominio tanto para  $x$  como para  $y$  consiste en todas las personas del mundo. Utiliza cuantificadores para expresar cada una de las siguientes sentencias.
  - Todo el mundo puede engañar a Fred.
  - Evelyn puede engañar a todo el mundo.

- c) Todo el mundo puede engañar a alguien.
  - d) No hay nadie que pueda engañar a todo el mundo.
  - e) Todo el mundo puede ser engañado por alguien.
  - f) Nadie puede engañar a Fred y a Jerry (a los dos).
  - g) Nancy puede engañar a exactamente dos personas.
  - h) Hay exactamente una persona a quien todo el mundo puede engañar.
  - i) Nadie puede engañarse a sí mismo.
  - j) Hay alguien que puede engañar a exactamente una de las personas que están a su lado.
11. Sea  $S(x)$  el predicado « $x$  es un estudiante»,  $F(x)$  el predicado « $x$  es un profesor» y  $A(x, y)$  el predicado « $x$  ha hecho una pregunta a  $y$ », donde el dominio consiste en todas las personas de tu facultad. Usa cuantificadores para expresar cada una de las siguientes sentencias.
- a) Luis ha hecho una pregunta al profesor Michaels.
  - b) Todos los estudiantes le han hecho una pregunta al profesor Gross.
  - c) Todos los profesores bien han hecho una pregunta al profesor Miller o bien han sido preguntados por el profesor Miller.
  - d) Algún estudiante no ha hecho una pregunta a ninguno de los profesores.
  - e) Hay un profesor al que ningún estudiante ha hecho nunca una pregunta.
  - f) Algún estudiante ha hecho una pregunta a cada uno de los profesores.
  - g) Hay un profesor que ha hecho una pregunta a cada uno de los otros profesores.
  - h) Algún estudiante no ha sido preguntado nunca por un profesor.
12. Sea  $I(x)$  la sentencia « $x$  tiene conexión a Internet» y  $C(x, y)$  la sentencia « $x$  y  $y$  han chateado en Internet», donde el dominio de las variables  $x$  y  $y$  consiste en todos los estudiantes de tu clase. Utiliza cuantificadores para expresar cada una de las siguientes sentencias.
- a) Jaime no tiene conexión a Internet.
  - b) Raquel no ha chateado en Internet con Chelsea.
  - c) Jan y Sharon nunca han chateado en Internet.
  - d) Nadie de la clase ha chateado con Bob.
  - e) Susana ha chateado con todos excepto con Bob.
  - f) Alguien de tu clase no tiene conexión a Internet.
  - g) No todos los de tu clase tienen conexión a Internet.
  - h) Exactamente un estudiante de tu clase tiene conexión a Internet.
  - i) Todos excepto un estudiante de tu clase tienen conexión a Internet.
  - j) Todos los estudiantes de tu clase que tienen conexión a Internet han chateado al menos con otro estudiante de tu clase.
  - k) Alguien en tu clase tiene conexión a Internet, pero no ha chateado con ningún otro estudiante.
  - l) Hay dos estudiantes en tu clase que no han chateado entre ellos en Internet.
  - m) Hay un estudiante en tu clase que ha chateado con cada uno de los estudiantes de tu clase.
  - n) Hay al menos dos estudiantes de tu clase que no han chateado con la misma persona de tu clase.
  - o) Hay dos estudiantes de tu clase que entre ambos han chateado con todos los estudiantes de la clase.
13. Sea  $M(x, y)$  « $x$  ha enviado a  $y$  mensajes por correo electrónico» y  $T(x, y)$  « $x$  ha telefonado a  $y$ », donde el dominio consiste en todos los estudiantes de tu clase. Usa cuantificadores para expresar cada una de las siguientes sentencias. (Supón que todos los mensajes enviados fueron recibidos..., que no es lo que siempre sucede).
- a) Carmen nunca ha enviado un mensaje por correo electrónico a Kiko.
  - b) Arlene nunca ha enviado un mensaje por correo electrónico o telefonado a Sara.
  - c) José nunca ha recibido un mensaje por correo electrónico de Débora.
  - d) Todos los estudiantes de tu clase han enviado un mensaje por correo electrónico a Ken.
  - e) Nadie de tu clase ha telefonado a Nina.
  - f) Todo el mundo en tu clase ha telefonado a Avi o le ha enviado un mensaje por correo electrónico.
  - g) Hay un estudiante en tu clase que ha enviado a cada uno de los demás un mensaje por correo electrónico.
  - h) Hay un estudiante en tu clase que ha enviado un mensaje por correo electrónico o ha telefonado a cada uno de los demás.
  - i) Hay dos estudiantes en tu clase que se han enviado mutuamente un mensaje por correo electrónico.
  - j) Hay un estudiante que se ha enviado a sí mismo un mensaje por correo electrónico.
  - k) Hay un estudiante en tu clase que no ha recibido un mensaje por correo electrónico de ningún otro estudiante de la clase ni tampoco ha sido telefonado por otro estudiante.
  - l) Todos los estudiantes de la clase bien han recibido un mensaje por correo electrónico de otro estudiante de la clase o bien han sido telefonados por otro estudiante de la clase.
  - m) Hay al menos dos estudiantes en tu clase tales que uno ha enviado al otro un mensaje por correo electrónico y el segundo ha telefonado al primero.
  - n) Hay dos estudiantes en tu clase que entre ambos bien han enviado un mensaje por correo electrónico o bien han telefonado a cada uno de los demás miembros de la clase.
14. Utiliza cuantificadores y predicados con más de una variable para expresar las siguientes afirmaciones.
- a) Hay un estudiante en esta clase que habla hindú.
  - b) Todo estudiante de esta clase practica algún deporte.
  - c) Algún estudiante de esta clase ha visitado Alaska, pero no ha visitado México.
  - d) Todos los estudiantes de esta clase han aprendido al menos un lenguaje de programación.
  - e) Hay un estudiante de esta clase que se ha matriculado en todas las asignaturas que ofrece uno de los departamentos de tu facultad.

- f) Algún estudiante de esta clase es de la misma ciudad que exactamente otro estudiante de la clase.
- g) Todo estudiante de la clase ha chateado con al menos otro estudiante en al menos un grupo de *chat*.
15. Usa cuantificadores y predicados con más de una variable para expresar las siguientes afirmaciones.
- Todo estudiante de ingeniería informática necesita un curso de matemática discreta.
  - Hay un estudiante en esta clase que tiene un ordenador personal.
  - Todo estudiante de esta clase ha cursado al menos una asignatura de ciencias de la computación.
  - Hay un estudiante en esta clase que ha cursado al menos una asignatura de ciencias de la computación.
  - Todo estudiante de esta clase ha estado en todos los edificios del campus.
  - Hay un estudiante en esta clase que ha estado en todas las habitaciones de al menos un edificio del campus.
  - Todo estudiante de esta clase ha estado al menos en una habitación de cada edificio del campus.
16. En un aula se reúnen los siguientes estudiantes: un estudiante de matemáticas de primer curso, 12 estudiantes de matemáticas de segundo curso, 15 estudiantes de ingeniería informática de segundo curso, 2 estudiantes de matemáticas de tercer curso, 2 estudiantes de ciencias de la computación de tercer curso y un estudiante de ciencias de la computación de cuarto curso. Expresa cada una de estas sentencias en términos de cuantificadores y determina su valor de verdad.
- Hay un estudiante en el aula que es de tercer curso.
  - Todo estudiante del aula es de ingeniería informática.
  - Hay un estudiante en el aula que ni es de matemáticas ni es de tercer curso.
  - Todo estudiante en el aula es bien de segundo curso o estudiante de ingeniería informática.
  - Hay una titulación tal que en el aula se encuentra un estudiante de cada año de estudio de esa titulación.
17. Expresa cada una de las siguientes especificaciones de sistema usando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos, según proceda.
- Todo usuario tiene exactamente un buzón de correo.
  - Hay un proceso que continúa su ejecución para todos los casos de error sólo si el *kernel* funciona correctamente.
  - Todos los usuarios de la red del campus pueden acceder a todas las página web cuyas direcciones terminen en .edu
  - \*d) Hay exactamente dos sistemas que monitorizan todos los servidores remotos.
18. Expresa cada una de las siguientes especificaciones de sistema usando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos, según proceda.
- Al menos una consola debe ser accesible durante cada condición de fallo.
  - Se puede obtener la dirección de correo electrónico de cada usuario siempre que la carpeta contenga al menos un mensaje enviado por cada usuario del sistema.
  - Para cada violación de la seguridad hay al menos un mecanismo que puede detectar esta violación si, y sólo si, hay un proceso que no ha sido afectado.
  - Hay al menos dos rutas que conectan cada dos terminales de la red.
  - Nadie conoce la clave de acceso de todos los usuarios del sistema, excepto el administrador.
19. Expresa cada una de las siguientes sentencias usando operadores matemáticos y lógicos, predicados y cuantificadores. El dominio consiste en todos los enteros.
- La suma de dos enteros negativos es negativa.
  - La diferencia de enteros positivos no es necesariamente positiva.
  - La suma de los cuadrados de dos enteros es mayor o igual que el cuadrado de su suma.
  - El valor absoluto del producto de dos enteros es el producto de sus valores absolutos.
20. Expresa cada una de las siguientes sentencias usando operadores matemáticos y lógicos, predicados y cuantificadores. El dominio consiste en todos los enteros.
- El producto de dos enteros negativos es positivo.
  - El valor medio de dos enteros positivos es positivo.
  - La diferencia de dos enteros negativos no es necesariamente negativa.
  - El valor absoluto de la suma de dos enteros no es mayor que la suma de los valores absolutos de estos enteros.
21. Usa predicados, cuantificadores, conectivos lógicos y operadores matemáticos para expresar la sentencia que dice que todo entero positivo es la suma de los cuadrados de cuatro enteros.
22. Usa predicados, cuantificadores, conectivos lógicos y operadores matemáticos para expresar la sentencia que dice que hay un entero positivo que no es la suma de tres cuadrados.
23. Expresa cada una de las siguientes sentencias usando predicados, cuantificadores y operadores matemáticos y lógicos.
- El producto de dos reales negativos es positivo.
  - La diferencia entre un número real y él mismo es cero.
  - Todo real positivo tiene exactamente dos raíces cuadradas.
  - Un real negativo no tiene raíces reales.
24. Traduce cada una de estas cuantificaciones anidadas a una frase en lenguaje natural que exprese una afirmación matemática. El dominio en cada caso consiste en todos los números reales.
- $\exists x \forall y (x + y = y)$
  - $\forall x \forall y (((x \geq 0) \wedge (y < 0)) \rightarrow (x - y > 0))$

- c)  $\exists x \exists y ((x \leq 0) \wedge (y \leq 0)) \wedge (x - y > 0)$   
 d)  $\forall x \forall y ((x \neq 0) \wedge (y \neq 0)) \leftrightarrow (xy \neq 0)$

25. Traduce cada una de estas cuantificaciones anidadas a una frase en lenguaje natural que exprese una afirmación matemática. El dominio en cada caso consiste en todos los números reales.

- a)  $\exists x \forall y (xy = y)$   
 b)  $\forall x \forall y (((x < 0) \wedge (y < 0)) \rightarrow (xy > 0))$   
 c)  $\exists x \exists y ((x^2 > y) \wedge (x < y))$   
 d)  $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$

26. Sea  $Q(x, y)$  la sentencia « $x + y = x - y$ ». Si el dominio para ambas variables consiste en todos los enteros, ¿cuáles son los valores de verdad de las siguientes sentencias?

- a)  $Q(1, 1)$       b)  $Q(2, 0)$       c)  $\forall y Q(1, y)$   
 d)  $\exists x Q(x, 2)$       e)  $\exists x \exists y Q(x, y)$       f)  $\forall x \exists y Q(x, y)$   
 g)  $\exists y \forall x Q(x, y)$   
 h)  $\forall y \exists x Q(x, y)$   
 i)  $\forall x \forall y Q(x, y)$

27. Determina el valor de verdad de cada una de estas sentencias si el dominio de todas las variables es el conjunto de todos los enteros.

- a)  $\forall n \exists m (n^2 < m)$       b)  $\exists n \forall m (n < m^2)$   
 c)  $\forall n \exists m (n + m = 0)$       d)  $\exists n \forall m (nm = m)$   
 e)  $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 5)$       f)  $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 6)$   
 g)  $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 1)$   
 h)  $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$   
 i)  $\forall n \forall m \exists p (p = (m + n)/2)$

28. Determina el valor de verdad de cada una de estas sentencias si el dominio de todas las variables es el conjunto de todos los números reales.

- a)  $\forall x \exists y (x^2 = y)$       b)  $\forall x \exists y (x = y^2)$   
 c)  $\exists x \forall y (xy = 0)$       d)  $\exists x \exists y (x + y \neq y + x)$   
 e)  $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (xy = 1))$   
 f)  $\exists x \forall y (y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$   
 g)  $\forall x \exists y (x + y = 1)$   
 h)  $\exists x \exists y (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$   
 i)  $\forall x \exists y (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$   
 j)  $\forall x \forall y \exists z (z = (x + y)/2)$

29. Supón que el dominio de la función proposicional  $P(x, y)$  consiste en los pares  $x$  e  $y$ , donde  $x$  es 1, 2 o 3 e  $y$  es 1, 2 o 3. Escribe estas proposiciones usando disyunciones y conjunciones.

- a)  $\forall x \forall y P(x, y)$       b)  $\exists x \exists y P(x, y)$   
 c)  $\exists x \forall y P(x, y)$       d)  $\forall y \exists x P(x, y)$

30. Reescribe cada una de las siguientes sentencias de tal forma que las negaciones aparezcan sólo dentro de los predicados (es decir, de tal forma que ninguna negación esté fuera de un cuantificador o de una expresión con conectivos lógicos).

- a)  $\neg \exists y \exists x P(x, y)$       b)  $\neg \forall x \exists y P(x, y)$   
 c)  $\neg \exists y (Q(y) \wedge \forall x \neg R(x, y))$   
 d)  $\neg \exists y (\exists x R(x, y) \vee \forall x S(x, y))$   
 e)  $\neg \exists y (\forall x \exists z T(x, y, z) \vee \exists x \forall z U(x, y, z))$

31. Expresa la negación de cada una de estas sentencias de tal forma que todos los símbolos de negación precedan inmediatamente a predicados.

- a)  $\forall x \exists y \forall z T(x, y, z)$   
 b)  $\forall x \exists y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$   
 c)  $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z R(x, y, z))$   
 d)  $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

32. Expresa las negaciones de cada una de estas sentencias de tal forma que todos los símbolos de negación precedan inmediatamente a predicados.

- a)  $\exists z \forall y \forall x T(x, y, z)$   
 b)  $\exists x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y)$   
 c)  $\exists x \exists y (Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$   
 d)  $\forall y \exists x \exists z (T(x, y, z) \vee Q(x, y))$

33. Reescribe cada una de las siguientes sentencias de tal forma que las negaciones aparezcan sólo dentro de los predicados (es decir, de tal forma que ninguna negación esté fuera de un cuantificador o de una expresión con conectivos lógicos).

- a)  $\neg \forall x \forall y P(x, y)$       b)  $\neg \forall y \exists x P(x, y)$   
 c)  $\neg \forall y \forall x P(x, y) \vee Q(x, y)$   
 d)  $\neg (\exists x \exists y \neg P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y))$   
 e)  $\neg \forall x (\exists y \forall z P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y P(x, y, z))$

34. Expresa cada una de estas sentencias utilizando cuantificadores. Posteriormente, forma la negación de la sentencia de tal forma que ninguna negación esté a la izquierda de un cuantificador. Finalmente, expresa la negación en lenguaje natural. (No te limites a usar la expresión «No se cumple que...»).

- a) Nadie ha perdido más de 1.000 euros jugando a la lotería.  
 b) Hay un estudiante en esta clase que ha chateado con exactamente otro estudiante de la clase.  
 c) Ningún estudiante de la clase ha enviado mensajes de correo electrónico a exactamente dos estudiantes de la clase.  
 d) Algún estudiante ha resuelto todos los problemas de este libro.  
 e) Ningún estudiante ha resuelto al menos un problema de cada sección de este libro.

35. Expresa cada una de estas sentencias usando cuantificadores. Posteriormente, forma la negación de la sentencia de tal forma que ninguna negación esté a la izquierda de un cuantificador. Finalmente, expresa la negación en lenguaje natural. (No te limites a utilizar la expresión «No se cumple que...»).

- a) Cada estudiante de esta clase ha cursado exactamente dos asignaturas de matemáticas en esta facultad.  
 b) Alguien ha visitado todos los países del mundo, excepto Libia.  
 c) Nadie ha escalado todas las montañas del Himalaya.  
 d) Todo actor ha participado en una película con Kevin Bacon o ha participado en una película con algún otro actor que ha participado en una película con Kevin Bacon.



36. Expresa las negaciones de estas proposiciones utilizando cuantificadores y en lenguaje natural.

- A todos los estudiantes de la clase les gustan las matemáticas.
- Hay un estudiante en esta clase que nunca ha visto un ordenador.
- Hay un estudiante en esta clase que ha cursado todas las asignaturas de matemáticas de la licenciatura.
- Hay un estudiante en esta clase que ha estado en al menos una habitación de cada edificio del campus.

37. Encuentra un contraejemplo, si es posible, de estas sentencias universalmente cuantificadas, donde el dominio de todas las variables consiste en todos los enteros.

- $\forall x \forall y (x^2 = y^2 \rightarrow x = y)$
- $\forall x \exists y (y^2 = x)$
- $\forall x \forall y (xy \geq x)$

38. Encuentra un contraejemplo, si es posible, de estas sentencias universalmente cuantificadas, donde el dominio de todas las variables consiste en todos los enteros.

- $\forall x \exists y (x = 1/y)$
- $\forall x \exists y (y^2 - x < 100)$
- $\forall x \forall y (x^2 \neq y^3)$

39. Utiliza cuantificadores para expresar la propiedad asociativa para el producto de números reales.

40. Utiliza cuantificadores para expresar la ley distributiva del producto con respecto a la suma de números reales.

41. Determina el valor de verdad de la sentencia  $\forall x \exists y (xy = 1)$  si el dominio es

- los reales no nulos,
- los enteros no nulos,
- los reales positivos.

42. Determina el valor de verdad de la sentencia  $\exists x \forall y (x \leq y^2)$  si el dominio es

- los reales positivos,
- los enteros,
- los reales no nulos.

43. Muestra que las dos sentencias  $\neg \exists x \forall y P(x, y)$  y  $\forall x \exists y \neg P(x, y)$  tienen el mismo valor de verdad.

\*44. Muestra que  $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$  y  $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$  son lógicamente equivalentes. (La nueva variable  $y$  se emplea para combinar los cuantificadores correctamente).

- Muestra que  $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$  es equivalente a  $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$ .
- Muestra que  $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$  es equivalente a  $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$ .

Una sentencia está en **forma normal prenex (PNF)** si, y sólo si, es de la forma

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_k x_k P(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

donde cada  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , es bien el cuantificador existen-

cial o el cuantificador universal, y  $P(x_1, \dots, x_k)$  es un predicado que no involucra ningún cuantificador. Por ejemplo,  $\exists x \forall y (P(x, y) \wedge Q(y))$  está en forma *prenex* normal, mientras que  $\exists x P(x) \vee \forall x Q(x)$  no (ya que no todos los cuantificadores se presentan al principio).

Toda sentencia formada con variables proposicionales, predicados y los valores **V** y **F**, utilizando conectivos lógicos y cuantificadores, es equivalente a una sentencia en forma normal *prenex*. El problema 47 pide demostrar este hecho.

\*46. Pon estas sentencias en forma normal *prenex*. (Indicación: Usa las equivalencias lógicas de las Tablas 5 y 6 de la Sección 1.2, la Tabla 2 de la Sección 1.3, los Problemas 42-45 de la Sección 1.3 y los Problemas 44 y 45 de esta sección).

- $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vee A$ , donde  $A$  es una proposición que involucra cuantificadores
- $\neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$
- $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

\*\*47. Muestra cómo se puede transformar una sentencia arbitraria en una sentencia en forma normal *prenex* que sea equivalente a la sentencia dada.

48. Un número real  $x$  es **cota superior** de un conjunto  $S$  de números reales si  $x$  es mayor o igual que todo número de  $S$ . El número real  $x$  se dice que es el **supremo** de un conjunto  $S$  de números reales si  $x$  es una cota superior y  $x$  es menor o igual que toda cota superior de  $S$ . Si este valor existe, es único.

- Utilizando cuantificadores, expresa el hecho de que  $x$  es una cota superior de  $S$ .
- Utilizando cuantificadores, expresa el hecho de que  $x$  es el supremo de  $S$ .

\*49. Expresa la cuantificación  $\exists! x P(x)$  usando cuantificadores universales, existenciales y operadores lógicos. La sentencia  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  significa que para todo número real positivo  $\epsilon$  hay un entero positivo  $N$  tal que  $|a_n - L| < \epsilon$  siempre que  $n > N$ .

50. (Se requiere Cálculo). Utiliza cuantificadores para expresar la sentencia  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

51. (Se requiere Cálculo). Utiliza cuantificadores para expresar la sentencia  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  no existe.

52. (Se requiere Cálculo). Utiliza cuantificadores para expresar la siguiente definición: una sucesión  $\{a_n\}$  es una sucesión de Cauchy si para todo número real  $\epsilon > 0$  hay un entero positivo  $N$  tal que  $|a_m - a_n| < \epsilon$  para cada par de enteros positivos  $n$  y  $m$ ,  $m > N$ ,  $n > N$ .

53. (Se requiere Cálculo). Utiliza cuantificadores y conectivos lógicos para expresar esta definición: un número  $L$  es el **límite superior** de una sucesión  $\{a_n\}$  si para todo número real  $\epsilon > 0$ ,  $a_n > L - \epsilon$  para infinitos valores de  $n$  y  $a_n > L + \epsilon$  sólo para un número finito de valores de  $n$ .

## 1.5 Métodos de demostración

### INTRODUCCIÓN

Dos importantes cuestiones que aparecen en el estudio de las matemáticas son: (1) ¿cuándo es correcto un argumento matemático?, y (2) ¿qué métodos se pueden utilizar para construir argumentos matemáticos? Esta sección ayudará a resolver estas dos preguntas describiendo varios tipos de argumentos matemáticos, correctos e incorrectos.

Un **teorema** es una sentencia que se puede verificar que es verdadera. (A veces a los teoremas se les llama *proposiciones*, *hechos* o *resultados*). Demostramos que un teorema es verdadero mediante una secuencia de sentencias que constituyen un argumento llamado **demostración**. Para construir demostraciones se necesitan métodos para derivar sentencias nuevas a partir de las conocidas. Las sentencias que se utilizan en una demostración pueden incluir **axiomas** o **postulados**, que son suposiciones que subyacen a las estructuras matemáticas, hipótesis del teorema o teoremas demostrados previamente. Las **reglas de inferencia**, que son los medios usados para deducir conclusiones a partir de otras afirmaciones, enlazan los pasos de una demostración.

En esta sección hablaremos sobre las reglas de inferencia, lo que ayudará a clarificar cómo construir una demostración correcta. Describiremos también algunas formas frecuentes de razonamiento incorrecto, que llamaremos **falacias**. Presentaremos varios métodos que se utilizan comúnmente para demostrar teoremas.

El término *lema* o *corolario* se emplea para cierto tipo de teoremas. Un **lema** es un teorema sencillo utilizado en la demostración de otros teoremas. Demostraciones complicadas son a veces más fáciles de entender haciendo uso de lemas, los cuales se demuestran por separado. Un **corolario** es una proposición que se puede establecer directamente a partir de un teorema que ya ha sido demostrado. Una **conjetura** es una sentencia cuyo valor de verdad es desconocido. Cuando se encuentra una demostración para una conjetura, ésta se convierte en teorema. Muchas veces las conjeturas resultan ser falsas, por lo que no llegan a ser teoremas.

Los métodos de demostración que se describen en este capítulo son importantes no sólo porque se usan para demostrar teoremas matemáticos, sino por sus muchas aplicaciones en ciencias de la computación. Entre ellas, podemos citar la verificación de que un programa de ordenador es correcto, establecer si un sistema operativo es seguro, hacer inferencias en el área de la inteligencia artificial o mostrar que las especificaciones de un sistema son consistentes. Por consiguiente, entender las técnicas que se utilizan en las demostraciones es esencial tanto en las matemáticas como en las ciencias de la computación.

### REGLAS DE INFERENCIA

Vamos a introducir en este apartado las reglas de inferencia para lógica proposicional. Estas reglas justifican los pasos dados para demostrar que a partir de una serie de hipótesis se llega de forma lógica a una conclusión. La tautología  $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$  es la base de la regla de inferencia llamada **modus ponens**. Esta tautología se escribe de la forma siguiente

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{\therefore q}$$

Usando esta notación, las hipótesis se escriben en una columna y la conclusión debajo de una barra horizontal. (El símbolo  $\therefore$  denota «por tanto» o «luego»). El *modus ponens* declara que si tanto una implicación como sus hipótesis son verdaderas, entonces la conclusión de esta implicación es verdadera.

#### EJEMPLO 1

Supongamos que la implicación «si nieva hoy, iremos a esquiar» y la hipótesis «está nevando hoy» son verdaderas. Entonces, por el *modus ponens*, se sigue que la conclusión «iremos a esquiar» es verdadera. ◀

Enlaces

Ejemplos  
adicionales

**EJEMPLO 2** Supongamos que la implicación «si  $n$  es mayor que 3, entonces  $n^2$  es mayor que 9» es verdadera. Por tanto, si  $n$  es mayor que 3, por el *modus ponens*, se sigue que  $n^2$  es mayor que 9. ◀

La Tabla 1 muestra un listado de las reglas de inferencia más importantes. En los problemas de la Sección 1.2 podemos encontrar verificaciones de estas reglas. Aquí daremos algunos ejemplos de argumentos que utilizan estas reglas de inferencias.

**EJEMPLO 3** Di en qué regla de inferencia se basa el argumento siguiente: «Ahora estamos bajo cero. Por tanto, bien estamos bajo cero o bien llueve ahora».

*Solución:* Sea  $p$  la proposición «Ahora estamos bajo cero» y  $q$  «Llueve ahora». Entonces, este argumento es de la forma

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

Este argumento utiliza la regla de adición. ▶

**EJEMPLO 4** Di en qué regla de inferencia se basa el argumento siguiente: «Estamos bajo cero y llueve. Por tanto, estamos bajo cero».

*Solución:* Sea  $p$  la proposición «Estamos bajo cero» y  $q$  «Llueve». Entonces, este argumento es de la forma

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

Este argumento utiliza la regla de simplificación. ▶

**Tabla 1.** Reglas de inferencia.

Regla de inferencia	Tautología	Nombre
$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \vee q)$	Adición
$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	Simplificación
$\frac{p}{q} \therefore p \wedge q$	$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$	Conjunción o ley de combinación
$\frac{p}{p \rightarrow q} \therefore q$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$	<i>Modus ponens</i>
$\frac{\neg q}{p \rightarrow q} \therefore \neg p$	$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$	<i>Modus tollens</i>
$\frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \therefore p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$	Silogismo hipotético
$\frac{p \vee q}{\neg p} \therefore q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$	Silogismo disyuntivo
$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \therefore q \vee r$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge r)] \rightarrow (q \vee r)$	Ley de resolución

**EJEMPLO 5** Di en qué regla de inferencia se basa el argumento siguiente:

«Si llueve hoy, entonces hoy no haremos una barbacoa. Si no hacemos una barbacoa hoy, haremos una barbacoa mañana. Por tanto, si llueve hoy, haremos una barbacoa mañana».

*Solución:* Sean  $p$  la proposición «Llueve ahora»,  $q$  «Hoy no haremos una barbacoa» y  $r$  «Haremos una barbacoa mañana». Entonces, este argumento es de la forma

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Por tanto, este argumento es un silogismo hipotético. ◀

## ARGUMENTOS VÁLIDOS

Se dice que un argumento deductivo es **correcto** si siempre que todas las hipótesis son verdaderas, la conclusión también lo es. Consecuentemente, mostrar que  $q$  se deduce lógicamente de las hipótesis  $p_1, p_2, \dots, p_n$  es lo mismo que mostrar que la implicación

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

es verdadera. Cuando todas las proposiciones utilizadas en un argumento correcto son verdaderas, se llega a una conclusión correcta. No obstante, un argumento correcto puede conducir a una conclusión incorrecta si se utilizan una o más proposiciones falsas en el argumento. Por ejemplo,

$$\begin{array}{l} \text{«Si } \sqrt{2} > \frac{1}{2}, \text{ en tal caso } (\sqrt{2})^2 > (\frac{1}{2})^2. \text{ Sabemos que } \sqrt{2} > \frac{3}{2}; \text{ por consiguiente,} \\ (\sqrt{2})^2 = 2 > (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} \text{»}. \end{array}$$

es un argumento correcto basado en el *modus ponens*. Sin embargo, la conclusión de este argumento es falsa, porque  $2 < \frac{9}{4}$ . Se ha usado en el argumento la proposición falsa « $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$ », lo que significa que la conclusión de este argumento puede ser falsa.

Cuando hay muchas premisas, a menudo se necesitan varias reglas de inferencia para demostrar que un argumento es correcto. Esto se ilustra en los ejemplos siguientes, donde se muestra paso a paso cómo se llega de un argumento a otro, razonando explícitamente cada paso que se ha dado. Estos ejemplos muestran también cómo se pueden analizar argumentos en lenguaje natural utilizando reglas de inferencia.

**EJEMPLO 6** Muestra que las hipótesis «Esta tarde no hace sol y hace más frío que ayer», «Iremos a nadar sólo si hace sol», «Si no vamos a nadar, daremos un paseo en canoa» y «Si damos un paseo en canoa, estaremos en casa para la puesta de sol» conducen a la conclusión «Estaremos en casa para la puesta de sol».

*Solución:* Sea  $p$  la proposición «Esta tarde hace sol»,  $q$  la proposición «Hace más frío que ayer»,  $r$  la proposición «Iremos a nadar»,  $s$  la proposición «daremos un paseo en canoa» y  $t$  la proposición «Estaremos en casa para la puesta de sol». Entonces, las hipótesis se pueden expresar como  $\neg p \wedge q, r \rightarrow p, \neg r \rightarrow s$  y  $s \rightarrow t$ . La conclusión es simplemente  $t$ . [En el caso de la segunda hipótesis, se recuerda que una de las formas de expresar  $r \rightarrow p$  recogida en la página 5, Sección 1.1, es « $r$  sólo si  $p$ », que es la forma de la hipótesis «Iremos a nadar sólo si hace sol»].

Construimos un argumento para mostrar que nuestras hipótesis conducen a la conclusión deseada como sigue.

Paso	Razonamiento
1. $\neg p \wedge q$	Hipótesis
2. $\neg p$	Simplificación usando el paso 1
3. $r \rightarrow p$	Hipótesis

- |                           |   |
|---------------------------|---|
| 4. $\neg r$               | <i>Modus tollens</i> usando los pasos 2 y 3 |
| 5. $\neg r \rightarrow s$ | Hipótesis                                   |
| 6. $s$                    | <i>Modus ponens</i> usando los pasos 4 y 5  |
| 7. $s \rightarrow t$      | Hipótesis                                   |
| 8. $t$                    | <i>Modus ponens</i> usando los pasos 6 y 7  |

**EJEMPLO 7** Muestra que las hipótesis «Si me mandas un mensaje por correo electrónico, entonces acabaré de escribir el programa», «Si no me mandas un mensaje por correo electrónico, me iré a la cama temprano» y «Si me voy a la cama temprano, me levantaré descansado» llevan a la conclusión «Si no acabo de escribir el programa, me levantaré descansado».

*Solución:* Sea  $p$  la proposición «Me mandas un mensaje por correo electrónico»,  $q$  la proposición «Terminaré de escribir el programa»,  $r$  la proposición «Me iré a la cama temprano» y  $s$  la proposición «Me levantaré mañana descansado». Las hipótesis se pueden reescribir como  $p \rightarrow q$ ,  $\neg p \rightarrow r$  y  $r \rightarrow s$ . La conclusión deseada es  $\neg q \rightarrow s$ .

Esta forma de argumento muestra que nuestras hipótesis conducen a la conclusión deseada.

- | Paso                           | Razonamiento                                 |
|--------------------------------|--|
| 1. $p \rightarrow q$           | Hipótesis                                    |
| 2. $\neg q \rightarrow \neg p$ | Contrarrecíproco del paso 1                  |
| 3. $\neg p \rightarrow r$      | Hipótesis                                    |
| 4. $\neg q \rightarrow r$      | Silogismo hipotético usando los pasos 2 y 3  |
| 5. $r \rightarrow s$           | Hipótesis                                    |
| 6. $\neg q \rightarrow s$      | Silogismo hipotético usando los pasos 4 y 5. |

## RESOLUCIÓN

### Enlaces

Se han desarrollado programas de ordenador que automatizan tareas de razonamiento y demostraciones de teoremas. Muchos de estos programas hacen uso de una regla de inferencia conocida como **resolución**. Esta regla de inferencia se basa en la tautología

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r).$$

(La comprobación de que esta sentencia es una tautología se trató en el Problema 28 de la Sección 1.2). La disyunción final en la regla de resolución,  $q \vee r$ , se llama **resolvente**. Cuando se cumple que  $q = r$  en esta tautología, tenemos que  $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow q$ . Además, cuando  $r = \mathbf{F}$ , obtenemos que  $(p \vee q) \wedge (\neg p) \rightarrow q$  (puesto que  $q \vee \mathbf{F} \equiv q$ ), lo cual es la tautología en la que se basa el silogismo disyuntivo.

**EJEMPLO 8** Utiliza la regla de resolución para mostrar que las hipótesis «Jaime está esquiando o no nieva» y «Nieva o Beatriz está jugando al hockey» implican que «Jaime está esquiando o Beatriz está jugando al hockey».

### Ejemplos adicionales

*Solución:* Sea  $p$  la proposición «Nieva»,  $q$  la proposición «Jaime está esquiando» y  $r$  la proposición «Beatriz está jugando al hockey». Podemos representar las hipótesis como  $\neg p \vee q$  y  $p \vee r$ , respectivamente. Utilizando la regla de resolución, se obtiene la proposición  $q \vee r$ , es decir, «Jaime está esquiando o Beatriz está jugando al hockey».

La regla de resolución desempeña un importante papel en lenguajes de programación basados en las reglas de la lógica, como el Prolog (donde se aplica la regla de resolución sobre sentencias cuantificadas). Además, se puede usar para construir sistemas automáticos de demostración de teoremas. Para construir demostraciones en lógica proposicional utilizando la regla de resolución como única regla de inferencia, la hipótesis y la conclusión deben ser expresadas como **cláusulas**, donde una cláusula es una disyunción de variables o negación de estas variables. Podemos sustituir una sentencia en lógica proposicional que no sea una cláusula por una o más sentencias equivalentes que sean cláusulas. Por ejemplo, supongamos que tenemos una sentencia de la forma

$p \vee (q \wedge r)$ . Como  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ , podemos sustituir la sentencia individual  $p \vee (q \wedge r)$  por la conjunción de las dos sentencias  $(p \vee q)$  y  $(p \vee r)$ , cada una de las cuales es una cláusula. Podemos sustituir una sentencia de la forma  $\neg(p \vee q)$  por la conjunción de las dos sentencias  $\neg p$  y  $\neg q$  (que son cláusulas), puesto que por las leyes de De Morgan  $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ . Podemos también reemplazar una implicación  $p \rightarrow q$  por la disyunción equivalente  $\neg p \vee q$ .

**EJEMPLO 9** Muestra que las hipótesis  $(p \wedge q) \vee r$  y  $r \rightarrow s$  implican la conclusión  $p \vee s$ .

*Solución:* Podemos reescribir la hipótesis  $(p \wedge q) \vee r$  como dos cláusulas,  $p \vee r$  y  $q \vee r$ . Podemos reemplazar también  $r \rightarrow s$  por la cláusula equivalente  $\neg r \vee s$ . Utilizando las dos cláusulas  $p \vee r$  y  $\neg r \vee s$ , podemos usar la regla de resolución para concluir  $p \vee s$ . ◀

## FALACIAS



Hay varias falacias muy frecuentes que surgen de razonamientos incorrectos. Estas falacias se asemejan a reglas de inferencia, pero se basan en contingencias, no en tautologías. Mostraremos en este apartado la distinción entre razonamientos correctos e incorrectos.

La proposición  $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$  no es una tautología, ya que es falsa cuando  $p$  es falsa y  $q$  es verdadera. No obstante, hay muchos argumentos incorrectos que tratan esta proposición como si fuese una tautología. Este tipo de razonamiento incorrecto se denomina **falacia de afirmar la conclusión**.

**EJEMPLO 10** ¿Es correcto el argumento siguiente?

Si haces todos los problemas de este libro, aprenderás matemática discreta. Tú has aprendido matemática discreta.

Por tanto, hiciste todos los problemas de este libro.

*Solución:* Sea  $p$  la proposición «Hiciste todos los problemas del libro». Sea  $q$  la sentencia «Tú aprendiste matemática discreta». Entonces, este argumento es de la forma: si  $p \rightarrow q$  y  $q$  entonces  $p$ . Esto es un ejemplo de un argumento incorrecto que usa la falacia de afirmar la conclusión. De hecho, es posible que tú aprendas matemática discreta de alguna otra forma que no sea hacer todos los problemas del libro. (Puedes aprender matemática discreta leyendo, asistiendo a clases y haciendo muchos, pero no todos, los problemas de este libro). ◀

La proposición  $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$  no es una tautología, puesto que es falsa cuando  $p$  es falsa y  $q$  es verdadera. Muchos argumentos incorrectos utilizan erróneamente lo anterior como regla de inferencia. Este tipo de razonamiento incorrecto se llama **falacia de negar la hipótesis**.

**EJEMPLO 11** Sean  $p$  y  $q$  las proposiciones del Ejemplo 10. Si la implicación  $p \rightarrow q$  es verdadera y  $\neg p$  es verdadera, ¿es correcto concluir que  $\neg q$  es verdadera? En otras palabras, ¿es correcto asumir que no aprendiste matemática discreta si no hiciste todos los problemas del libro, suponiendo que si haces todos los problemas del libro aprendes matemática discreta?

*Solución:* Es posible que aprendas matemática discreta incluso si no haces todos los problemas del libro. Este argumento incorrecto es de la forma  $p \rightarrow q$  y  $\neg p$  implica  $\neg q$ , que es un ejemplo de falacia de negación de la hipótesis. ◀

## REGLAS DE INFERENCIA PARA SENTENCIAS CUANTIFICADAS

Hemos hablado de reglas de inferencia para proposiciones. Ahora describiremos algunas reglas de inferencia importantes para sentencias que involucran cuantificadores. Estas reglas de inferencia se usan con frecuencia en los argumentos matemáticos, a veces sin mencionarlas explícitamente.

**Particularización universal** es la regla de inferencia que se utiliza para concluir que  $P(c)$  es verdadera, donde  $c$  es un miembro particular del dominio, dada la premisa  $\forall x P(x)$ . Se utiliza la

<b>10. Álgebra de Boole .....</b>	<b>653</b>
10.1. Funciones booleanas .....	653
10.2. Representación de funciones booeanas .....	660
10.3. Puertas lógicas.....	664
10.4. Minimización de circuitos .....	670
Material fin del Capítulo .....	684
 <b>11. Modelos de computación .....</b>	 <b>689</b>
11.1. Lenguajes y gramáticas .....	689
11.2. Máquinas de estado finito con salida .....	700
11.3. Máquinas de estado finito sin salida .....	706
11.4. Reconocimiento de lenguajes .....	713
11.5. Máquinas de Turing .....	722
Material fin del Capítulo .....	729

## APÉNDICES

<b>A-1. Funciones exponencial y logarítmica .....</b>	<b>735</b>
<b>A-2. Pseudocódigo .....</b>	<b>739</b>
Lecturas recomendadas .....	745
Respuestas a los problemas impares .....	753
Fotografías .....	829
Índice onomástico .....	831
Índice analítico.....	833

particularización universal cuando se concluye de la sentencia «Todas las mujeres son sabias» que «Lisa es sabia», donde Lisa es un miembro del dominio de todas las mujeres.

**Generalización universal** es la regla de inferencia que declara que  $\forall x P(x)$  es verdadera, dada la premisa de que  $P(c)$  es verdadera para todos los elementos  $c$  del dominio. Utilizamos la generalización universal cuando mostramos que  $\forall x P(x)$  es verdadera tomando un elemento arbitrario  $c$  del dominio y mostrando que  $P(c)$  es verdadera. El elemento  $c$  seleccionado debe ser un elemento arbitrario del dominio y no uno específico. La generalización universal se usa implícitamente en muchas demostraciones matemáticas; rara vez se menciona explícitamente.

**Particularización existencial** es la regla que nos permite concluir que hay un elemento  $c$  en el dominio para el cual  $P(c)$  es verdadera si sabemos que  $\exists x P(x)$  es verdadera. Aquí no podemos seleccionar un valor arbitrario de  $c$ , sino que debe ser un  $c$  para el cual sea verdadera. Generalmente, no tenemos conocimiento de qué  $c$  es, sólo de que éste existe. Como existe, le podemos dar un nombre y continuar nuestro argumento.

**Generalización existencial** es la regla de inferencia que se utiliza para concluir que  $\exists x P(x)$  es verdadera cuando se conoce un elemento particular  $c$  con  $P(c)$  verdadera. Esto es, si conocemos un elemento  $c$  del dominio para el cual  $P(c)$  es verdadera, sabemos que  $\exists x P(x)$  es verdadera.

Resumimos estas reglas de inferencia en la Tabla 2. Ilustraremos cómo se utiliza una de estas reglas de inferencia para sentencias cuantificadas en el Ejemplo 12.

**EJEMPLO 12** Muestra que las premisas «Todo el mundo en la clase de matemática discreta está matriculado en ingeniería informática» y «María es una estudiante de esta clase» implican la conclusión «María está matriculada en ingeniería informática».



*Solución:* Sean  $D(x)$  « $x$  está en la clase de matemática discreta» y  $C(x)$  « $x$  está matriculado en ingeniería informática». Entonces, las premisas son  $\forall x (D(x) \rightarrow C(x))$  y  $D(\text{María})$ . La conclusión es  $C(\text{María})$ .

Se pueden usar los siguientes pasos para establecer la conclusión a partir de las premisas:

Paso	Razonamiento
1. $\forall x (D(x) \rightarrow C(x))$	Premisa
2. $D(\text{María}) \rightarrow C(\text{María})$	Particularización universal de (1)
3. $D(\text{María})$	Premisa
4. $C(\text{María})$	<i>Modus ponens</i> usando (2) y (3)

**EJEMPLO 13** Muestra que las premisas «Un estudiante de esta clase no ha leído el libro» y «Todo el mundo en esta clase aprobó el primer examen» implican la conclusión «Alguien que aprobó el primer examen no ha leído el libro».

Tabla 2. Reglas de inferencia para sentencias cuantificadas.	
Regla de inferencia	Nombre
$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	Particularización universal
$\frac{P(c) \text{ para un } c \text{ arbitrario}}{\therefore \forall x P(x)}$	Generalización universal
$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c) \text{ para algún elemento } c}$	Particularización existencial
$\frac{P(c) \text{ para algún elemento } c}{\therefore \exists x P(x)}$	Generalización existencial



*Solución:* Sean  $C(x)$  « $x$  es de esta clase»,  $B(x)$  « $x$  ha leído el libro» y  $P(x)$  « $x$  ha aprobado el primer examen». Las premisas son  $\exists x (C(x) \wedge \neg B(x))$  y  $\forall x (C(x) \rightarrow P(x))$ . La conclusión es  $\exists x (P(x) \wedge \neg B(x))$ . Los pasos siguientes establecen la conclusión a partir de las premisas.

Paso	Razonamiento
1. $\exists x (C(x) \wedge \neg B(x))$	Premisa
2. $C(a) \wedge \neg B(a)$	Particularización existencial de (1)
3. $C(a)$	Simplificación de (2)
4. $\forall x (C(x) \rightarrow P(x))$	Premisa
5. $C(a) \rightarrow P(a)$	Particularización universal de (4)
6. $P(a)$	<i>Modus ponens</i> usando (3) y (5)
7. $\neg B(a)$	Simplificación de (2)
8. $P(a) \wedge \neg B(a)$	Conjunción de (6) y (7)
9. $\exists x (P(x) \wedge \neg B(x))$	Generalización existencial de (8) ◀

**Observación:** Los argumentos matemáticos a menudo incluyen pasos donde se utilizan reglas de inferencia tanto para proposiciones como para cuantificadores. Por ejemplo, la particularización universal y el *modus ponens* se usan a menudo juntos. Cuando estas reglas de inferencia se combinan, la hipótesis  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  y  $P(c)$ , donde  $c$  es del dominio, muestra que la conclusión  $Q(c)$  es verdadera.

**Observación:** Muchos teoremas en matemática discreta enuncian que una propiedad se cumple para todos los elementos de un conjunto en concreto, como el conjunto de los números enteros o los reales. Aunque el enunciado preciso de tales teoremas requiere incluir el cuantificador universal, por convención se omite. Por ejemplo, la sentencia «Si  $x > y$ , donde  $x$  e  $y$  son números reales positivos, entonces  $x^2 > y^2$ » significa realmente «Para todos los reales positivos  $x$  e  $y$ , si  $x > y$ , entonces  $x^2 > y^2$ ». Además, cuando se demuestran teoremas de este tipo, se utiliza a menudo la ley de generalización universal sin mencionarlo explícitamente. El primer paso de la demostración consiste en elegir un elemento genérico del dominio. Pasos posteriores muestran que este elemento cumple la propiedad en cuestión. La generalización universal implica que el teorema se cumple para todos los miembros del dominio.

En las siguientes explicaciones adoptaremos las convenciones usuales y no mencionaremos explícitamente el uso de la cuantificación y la generalización universales. No obstante, debería entenderse siempre cuándo se aplica esta regla de inferencia de modo implícito.

## MÉTODOS PARA DEMOSTRAR TEOREMAS

Demostrar teoremas es a veces muy difícil, por lo que necesitamos todas las herramientas disponibles que nos puedan ayudar. Presentamos ahora una batería de métodos diferentes de demostración. Estos métodos deberían convertirse en parte de tu repertorio para demostrar teoremas. Dado que muchos teoremas son implicaciones, las técnicas para demostrar implicaciones son importantes. Recuerda que  $p \rightarrow q$  es verdadera a no ser que  $p$  sea verdadera y  $q$  falsa. Ten en cuenta que cuando se demuestra la sentencia  $p \rightarrow q$ , sólo hace falta demostrar que  $q$  es verdadera si  $p$  lo es; por lo general, *no* se demuestra que  $q$  es verdadera. En lo que sigue presentaremos las técnicas más comunes para demostrar implicaciones.

**DEMOSTRACIONES DIRECTAS** La implicación  $p \rightarrow q$  se puede demostrar viendo que si  $p$  es verdadera, entonces  $q$  debe ser verdadera también. Esto pone de manifiesto que la combinación  $p$  verdadera y  $q$  falsa no ocurre nunca. Una demostración de este tipo se llama **demostración directa**. Para llevar a cabo este tipo de demostración, se supone que  $p$  es verdadera y se utilizan reglas de inferencia y teoremas ya demostrados para demostrar que  $q$  debe ser también verdadera.

Antes de dar un ejemplo de demostración directa, necesitamos una definición.

### DEFINICIÓN 1

El entero  $n$  es *par* si existe un entero  $k$  tal que  $n = 2k$  y es *impar* si existe un entero  $k$  tal que  $n = 2k + 1$ . (Observa que un número entero es bien par o bien impar).

Ejemplos  
adicionales

Evaluación

Ejemplos  
adicionales

**EJEMPLO 14** Da una demostración directa del teorema «Si  $n$  es un entero impar, entonces  $n^2$  es un entero impar».

*Solución:* Suponemos que la hipótesis de esta implicación es verdadera, es decir, que  $n$  es impar. Entonces,  $n = 2k + 1$ , donde  $k$  es un entero. Se sigue que  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ . Por tanto,  $n^2$  es un número impar (es una unidad mayor que el doble de un entero). ◀



**DEMOSTRACIONES INDIRECTAS** Como la implicación  $p \rightarrow q$  es equivalente a su contrarrecíproca,  $\neg q \rightarrow \neg p$ , la implicación  $p \rightarrow q$  se puede demostrar viendo que su contrarrecíproca es verdadera. La contrarrecíproca se suele demostrar directamente, pero se puede utilizar cualquier otra técnica. Un argumento de este tipo se llama **demostración indirecta**.

**EJEMPLO 15** Da una demostración directa del teorema «Si  $3n + 2$  es impar, entonces  $n$  es impar».

*Solución:* Supongamos que la conclusión de esta implicación es falsa, es decir, que  $n$  es par. Entonces,  $n = 2k$  para algún entero  $k$ . Se sigue que  $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ , por lo que  $3n + 2$  es par (por ser múltiplo de 2). Como la negación de la conclusión implica que la hipótesis es falsa, la implicación original es verdadera. ◀

**DEMOSTRACIONES VACUAS Y TRIVIALES** Supongamos que la hipótesis  $p$  de una implicación  $p \rightarrow q$  es falsa. Entonces, la implicación  $p \rightarrow q$  es verdadera, porque la sentencia tiene la forma  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}$  o  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ , y por tanto es verdadera. Consecuentemente, si se puede demostrar que  $p$  es falsa, entonces se puede dar una demostración, llamada **demostración vacua**, de la implicación  $p \rightarrow q$ . Las demostraciones vacuas se utilizan para establecer casos especiales de teoremas que enuncian que una implicación es verdadera para todos los enteros positivos [esto es, un teorema del tipo  $\forall n P(n)$  donde  $P(n)$  es una función proposicional]. Las técnicas de demostración para teoremas de esta clase se discutirán en la Sección 3.3.

**EJEMPLO 16** Muestra que la proposición  $P(0)$  es verdadera, donde  $P(n)$  es la función proposicional «Si  $n > 1$  es impar, entonces  $n^2 > n$ ».

*Solución:* Ten en cuenta que la proposición  $P(0)$  es la implicación «Si  $0 > 1$ , entonces  $0^2 > 0$ ». Como la hipótesis  $0 > 1$  es falsa, la implicación  $P(0)$  es automáticamente verdadera. ◀

**Observación:** El hecho de que la conclusión de esta implicación,  $0^2 > 0$ , sea falsa es irrelevante para el valor de verdad de esta implicación, porque está garantizado que una implicación con una hipótesis falsa es verdadera.

Supongamos que la conclusión  $q$  de una implicación  $p \rightarrow q$  es verdadera. Entonces,  $p \rightarrow q$  es verdadera, puesto que la sentencia tiene la forma  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  o  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}$ , lo cual es cierto. Por tanto, si se puede ver que  $q$  es verdadera, entonces se puede dar una demostración, llamada **demostración trivial**, de  $p \rightarrow q$ . Las demostraciones triviales son importantes para casos especiales de teoremas (véase la discusión sobre la técnica de demostración por casos) y en inducción matemática, que veremos en la Sección 3.3.

**EJEMPLO 17** Sea  $P(n)$  «Si  $a$  y  $b$  son enteros positivos,  $a \geq b$ , entonces  $a^n \geq b^n$ ». Muestra que la proposición  $P(0)$  es verdadera.

*Solución:* La proposición  $P(0)$  es «Si  $a \geq b$ , entonces  $a^0 \geq b^0$ ». Como  $a^0 = b^0 = 1$ , la conclusión de  $P(0)$  es verdadera. Por tanto,  $P(0)$  es verdadera. Éste es un ejemplo de una demostración trivial. Nota que la hipótesis, que es la sentencia « $a \geq b$ », no se necesitó en la demostración. ◀

**UN POCO DE ESTRATEGIA PARA HACER DEMOSTRACIONES** Hemos descrito tanto las demostraciones directas como indirectas y hemos proporcionado ejemplos de cómo se utilizan; sin embargo, cuando nos enfrentamos a un teorema que debemos demostrar, ¿qué método



deberemos usar? Primero evalúa si una demostración directa parece eficaz. Desarrolla las definiciones dadas en las hipótesis. Luego comienza a razonar haciendo uso de ellas, junto con los axiomas y los teoremas disponibles. Si no parece que conduzca a ningún sitio, intenta lo mismo con una demostración indirecta. Recuerda que en una demostración indirecta se asume que la conclusión de la implicación es falsa y se utiliza una demostración directa para demostrar que se deduce que la hipótesis debe ser falsa. A veces, cuando no hay una forma obvia de conseguir una demostración directa, una demostración indirecta puede funcionar. Ilustramos esta estrategia en los Ejemplos 18 y 19.

Antes de presentar los siguientes ejemplos, necesitamos una definición.

## DEFINICIÓN 2

El número real  $r$  es *racional* si existen dos enteros  $p$  y  $q$ ,  $q \neq 0$ , tales que  $r = p/q$ . Un número real que no es racional se llama *irracional*.

**EJEMPLO 18** Demuestra que la suma de dos números racionales es un número racional.

*Solución:* Primero intentamos una demostración directa. Para empezar, supongamos que  $r$  y  $s$  son números racionales. De la definición de número racional se sigue que hay dos enteros  $p$  y  $q$ ,  $q \neq 0$ , tales que  $r = p/q$ , y otros dos enteros  $t$  y  $u$ ,  $u \neq 0$ , tales que  $s = t/u$ . ¿Se puede usar esta información para mostrar que  $r + s$  es racional? El paso siguiente obvio es sumar  $r = p/q$  y  $s = t/u$  para obtener

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu}.$$

Como  $q \neq 0$  y  $u \neq 0$ , se sigue que  $qu \neq 0$ . Por consiguiente, hemos expresado  $r + s$  como la razón de dos enteros,  $pu + qt$  y  $qu$ , donde  $qu \neq 0$ . Esto significa que  $r + s$  es racional. Nuestro intento por encontrar una demostración directa ha tenido éxito. ◀

**EJEMPLO 19** Demuestra que si  $n$  es un entero y  $n^2$  es impar, entonces  $n$  es impar.

*Solución:* Primero intentamos una demostración directa. Supongamos que  $n$  es un entero y  $n^2$  es impar. Entonces, existe un entero  $k$  tal que  $n^2 = 2k + 1$ . ¿Se puede utilizar esta información para demostrar que  $n$  es impar? No parece haber un camino obvio para mostrar que  $n$  es impar porque las soluciones para  $n$  son de la forma  $n = \pm\sqrt{2k+1}$ , lo cual no es muy útil.

Como el intento de dar una demostración directa no parece tener éxito, intentamos la demostración indirecta. Tomamos como hipótesis que  $n$  no es impar. Como todo entero que no es impar es par,  $n$  es par. Esto implica que existe un  $k$  tal que  $n = 2k$ . Para demostrar el teorema, necesitamos mostrar que esta hipótesis implica la conclusión de que  $n^2$  no es impar, es decir, de que  $n^2$  es par. ¿Podemos usar la ecuación  $n = 2k$  para llegar a esto? Elevando ambos miembros al cuadrado, obtenemos  $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ , lo que implica que  $n^2$  es también par, ya que  $n^2 = 2t$ , donde  $t = 2k^2$ . Hemos tenido éxito en el intento de encontrar una demostración indirecta. ◀

**DEMOSTRACIONES POR REDUCCIÓN AL ABSURDO** Hay otras formas de demostración que no son ni la directa ni la indirecta. Presentamos ahora varias técnicas adicionales de demostración.

Supongamos que se puede encontrar una contradicción  $q$  tal que  $\neg p \rightarrow q$  sea verdadera, esto es,  $\neg p \rightarrow \mathbf{F}$  es verdadera. Entonces la proposición  $\neg p$  tiene que ser falsa. Por tanto,  $p$  debe ser verdadera. Esta técnica se utiliza cuando podemos encontrar una contradicción, como por ejemplo  $r \wedge \neg r$ , de tal forma que es posible mostrar que la implicación  $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$  sea verdadera. Un argumento de este tipo se llama **demostración por reducción al absurdo**.

Vamos a dar ahora tres ejemplos de demostraciones por reducción al absurdo. El primero es un ejemplo de la aplicación del principio del palomar, una técnica de combinatoria que se verá en profundidad en la Sección 4.2.

**EJEMPLO 20** Muestra que al menos cuatro de cada 22 días deben caer en el mismo día de la semana.



*Solución:* Sea  $p$  la proposición «Al menos cuatro de los 22 días elegidos caen en el mismo día de la semana». Supongamos que  $\neg p$  es verdadera. Entonces, como mucho, tres de estos 22 días corresponden al mismo día de la semana. Como hay siete días de la semana, esto implica que como mucho se podrían haber elegido 21 días, puesto que tres son los que, a lo más, pueden ser un día particular de la semana. Esto es una contradicción. ◀

**EJEMPLO 21** Muestra que  $\sqrt{2}$  es irracional dando una demostración por reducción al absurdo.

*Solución:* Sea  $p$  la proposición « $\sqrt{2}$  es irracional». Supongamos que  $\neg p$  es verdadera. Entonces,  $\sqrt{2}$  es racional. Mostraremos que esto conduce a una contradicción. Bajo la suposición de que  $\sqrt{2}$  es racional, existirán dos enteros  $a$  y  $b$  de tal forma que  $\sqrt{2} = a/b$ , donde  $a$  y  $b$  no tienen factores comunes (de tal forma que no hay una fracción equivalente a  $a/b$  con números más pequeños). Como  $\sqrt{2} = a/b$ , cuando ambos miembros de la ecuación se elevan al cuadrado, se sigue que

$$2 = a^2/b^2.$$

Por tanto,

$$2b^2 = a^2.$$

Esto significa que  $a^2$  es par, por lo que  $a$  es par. Además, como  $a$  es par,  $a = 2c$  para algún entero  $c$ . Así,

$$2b^2 = 4c^2,$$

por lo que

$$b^2 = 2c^2.$$

Esto significa que  $b^2$  es par. Por tanto,  $b$  debe ser par también.

Se ha mostrado que  $\neg p$  implica que  $\sqrt{2} = a/b$ , donde  $a$  y  $b$  no tienen factores comunes y 2 divide a  $a$  y a  $b$ . Esto es una contradicción, puesto que se ve que  $\neg p$  implica tanto  $r$  como  $\neg r$ , donde  $r$  es la sentencia « $a$  y  $b$  son enteros sin factores comunes». Por tanto,  $\neg p$  es falsa, es decir, « $\sqrt{2}$  es irracional» es verdadera. ◀

Una demostración indirecta de una implicación se puede reescribir como una demostración por reducción al absurdo. En una demostración indirecta mostramos que  $p \rightarrow q$  es verdadera utilizando una demostración directa para ver que  $\neg q \rightarrow \neg p$  es verdadera. Esto es, en una prueba indirecta de  $p \rightarrow q$  suponemos que  $\neg q$  es verdadera para mostrar que  $\neg p$  debe serlo. Para reescribir una demostración indirecta de  $p \rightarrow q$  como una demostración por reducción al absurdo, suponemos que tanto  $p$  como  $\neg q$  son verdaderas. Entonces usamos los pasos de la prueba directa  $\neg q \rightarrow \neg p$  para mostrar que  $\neg p$  debe ser verdadera también. Esto conduce a la contradicción  $p \wedge \neg p$ , completando la demostración por reducción al absurdo. El Ejemplo 22 ilustra cómo una demostración de una implicación se puede reescribir como una demostración por reducción al absurdo.

**EJEMPLO 22** Da una demostración por reducción al absurdo del teorema «Si  $3n + 2$  es impar, entonces  $n$  es impar».

*Solución:* Asumimos que  $3n + 2$  es impar y que  $n$  no es impar, es decir,  $n$  es par. Siguiendo los mismos pasos que en la solución del Ejemplo 15 (una demostración indirecta de este teorema), podemos mostrar que si  $n$  es par, entonces  $3n + 2$  es par. Esto contradice la suposición de que  $3n + 2$  es impar, completando la demostración. ◀

**DEMOSTRACIÓN POR CASOS** Para demostrar una implicación de la forma

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q$$

se puede utilizar la tautología

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)]$$

Ejemplos  
adicionales

como regla de inferencia. Esto muestra que la implicación original con una hipótesis construida mediante una disyunción de las proposiciones  $p_1, p_2, \dots, p_n$  se puede demostrar demostrando individualmente cada una de las  $n$  implicaciones  $p_i \rightarrow q$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Tal argumento se denomina una **demonstración por casos**. A veces para demostrar que una implicación  $p \rightarrow q$  es verdadera, es conveniente usar una disyunción de proposiciones  $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$  en lugar de una sola proposición  $p$  como hipótesis de la implicación, donde  $p$  y  $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$  son equivalentes. Considera el Ejemplo 23.

**EJEMPLO 23** Utiliza una demostración por casos para ver que  $|xy| = |x| |y|$ , donde  $x$  e  $y$  son números reales. (Recuerda que  $|x|$ , el valor absoluto de  $x$ , es igual a  $x$  cuando  $x \geq 0$  e igual a  $-x$  cuando  $x \leq 0$ ).

*Solución:* Sea  $p$  « $x$  e  $y$  son números reales» y sea  $q$  « $|xy| = |x| |y|$ ». Ten en cuenta que  $p$  es equivalente a  $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4$ , donde  $p_1$  es « $x \geq 0 \wedge y \geq 0$ »,  $p_2$  es « $x \geq 0 \wedge y < 0$ »,  $p_3$  es « $x < 0 \wedge y \geq 0$ » y  $p_4$  es « $x < 0 \wedge y < 0$ ». Por tanto, para demostrar  $p \rightarrow q$ , podemos ver que  $p_1 \rightarrow q$ ,  $p_2 \rightarrow q$ ,  $p_3 \rightarrow q$  y  $p_4 \rightarrow q$ . (Hemos considerado estos cuatro casos porque son una elección apropiada para poder eliminar el signo del producto dentro de cada caso).

Vemos que  $p_1 \rightarrow q$  porque  $xy \geq 0$  cuando  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ , por lo que  $|xy| = xy = |x| |y|$ .

Para ver que  $p_2 \rightarrow q$ , ten en cuenta que si  $x \geq 0$  e  $y < 0$ , entonces  $xy \leq 0$ , por lo que  $|xy| = -xy = x(-y) = |x| |y|$ . (Aquí, como  $y < 0$ , tenemos que  $|y| = -y$ ).

Para ver que  $p_3 \rightarrow q$ , seguimos el mismo razonamiento que en el caso anterior, cambiando  $x$  por  $y$ , y viceversa.

Para ver que  $p_4 \rightarrow q$ , ten en cuenta que cuando  $x < 0$  e  $y < 0$  se sigue que  $xy > 0$ . Por tanto,  $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x| |y|$ . Esto completa la demostración. ◀

**DEMOSTRACIONES POR EQUIVALENCIA** Para demostrar un teorema que viene dado por una bicondicional, esto es, una doble implicación de la forma  $p \leftrightarrow q$ , donde  $p$  y  $q$  son proposiciones, se puede usar la tautología

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)].$$

Esto es, la proposición « $p$  si, y sólo si,  $q$ » se puede demostrar si se demuestran las dos implicaciones «si  $p$ , entonces  $q$ » y «si  $q$ , entonces  $p$ ».

**EJEMPLO 24** Demuestra el teorema «El entero  $n$  es impar si, y sólo si,  $n^2$  es impar».

*Solución:* Este teorema tiene la forma « $p$  si, y sólo si,  $q$ », donde  $p$  es « $n$  es impar» y  $q$  es « $n^2$  es impar». Para demostrar este teorema, necesitamos mostrar que  $p \rightarrow q$  y  $q \rightarrow p$  son verdaderas.

Ya hemos demostrado que  $p \rightarrow q$  y que  $q \rightarrow p$  son verdaderas (Ejemplos 14 y 19, respectivamente). Como  $p \rightarrow q$  y  $q \rightarrow p$  son verdaderas, hemos demostrado que el teorema se cumple. ◀

Ejemplos  
adicionales

A veces, un teorema enuncia que varias proposiciones  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son equivalentes. Tales teoremas se pueden reescribir como

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n,$$

lo cual declara que las  $n$  proposiciones tienen los mismos valores de verdad y, por tanto, que para todo  $i$  y  $j$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ ,  $p_i$  y  $p_j$  son equivalentes. Una forma de demostrar estas equivalencias mutuas es emplear la tautología

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow p_1)]$$

Esto indica que si las implicaciones  $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, \dots, p_n \rightarrow p_1$  se pueden mostrar que son verdaderas, entonces las proposiciones  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son todas equivalentes.

Esto es mucho más eficiente que probar  $p_i \rightarrow p_j$  para  $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n$ .

Cuando demostramos que un grupo de sentencias son equivalentes, podemos establecer cualquier cadena de implicaciones que elijamos, ya que a través de la cadena es posible ir de una a otra cualesquiera. Por ejemplo, podemos ver que  $p_1, p_2$  y  $p_3$  son equivalentes mostrando que  $p_1 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow p_2$  y  $p_2 \rightarrow p_1$ .

**EJEMPLO 25** Muestra que estas sentencias son equivalentes:

- $p_1$ :  $n$  es un entero par  
 $p_2$ :  $n - 1$  es un entero impar  
 $p_3$ :  $n^2$  es un entero par

*Solución:* Mostraremos que estas tres sentencias son equivalentes viendo que las implicaciones que  $p_1 \rightarrow p_2$ ,  $p_2 \rightarrow p_3$  y  $p_3 \rightarrow p_1$  son verdaderas.

Hacemos una demostración directa para  $p_1 \rightarrow p_2$ . Supongamos que  $n$  es par. Entonces,  $n = 2k$  para algún entero  $k$ . Por tanto,  $n - 1 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$ . Esto significa que  $n - 1$  es impar, pues se puede poner de la forma  $2m + 1$ , donde  $m$  es el entero  $k - 1$ .

Daremos también una prueba directa de que  $p_2 \rightarrow p_3$ . Supongamos ahora que  $n - 1$  es impar. Entonces,  $n - 1 = 2k + 1$  para algún entero  $k$ . Por tanto,  $n = 2k + 2$ , por lo que  $n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$ . Esto significa que  $n^2$  es el doble del entero  $2k^2 + 4k + 2$ , y por tanto, par.

Para demostrar  $p_3 \rightarrow p_1$  utilizamos una demostración indirecta. Esto es, demostramos que si  $n$  no es par, entonces  $n^2$  no es par. Esto es lo mismo que demostrar que si  $n$  es impar,  $n^2$  es impar, lo cual se ha hecho ya en el Ejemplo 14. Esto completa la demostración. ◀

## TEOREMAS Y CUANTIFICADORES

Muchos teoremas se enuncian haciendo uso de proposiciones y cuantificadores. Se pueden utilizar varios métodos para demostrar teoremas que son cuantificaciones. Aquí describimos algunos de los más importantes.

**DEMOSTRACIONES DE EXISTENCIA** Muchos teoremas afirman la existencia de un tipo particular de objetos. Un teorema de este tipo es una proposición de la forma  $\exists x P(x)$ , donde  $P$  es un predicado. Una demostración de una proposición de la forma  $\exists x P(x)$  se llama **demostración de existencia**. Hay varias formas de demostrar un teorema de este tipo. A veces puede darse una demostración del tipo  $\exists x P(x)$  encontrando un elemento  $a$  tal que  $P(a)$  sea verdadera. Tal demostración de existencia se llama **constructiva**. También es posible dar una demostración de existencia que sea **no constructiva**. Esto es, no encontramos el elemento  $a$  tal que  $P(a)$  es verdadera, sino que demostramos que  $\exists x P(x)$  es verdadera de alguna otra forma. Un método común para dar una demostración no constructiva de existencia es utilizar una demostración por reducción al absurdo y mostrar que la negación de la cuantificación existencial implica una contradicción. El concepto de demostración constructiva se ilustra en el Ejemplo 26.



**EJEMPLO 26** Una demostración constructiva de existencia. Demuestra que hay un entero positivo que se puede poner de dos formas diferentes como suma de cubos de enteros positivos.

*Solución:* Tras considerables cálculos (haciendo uso, por ejemplo, de un programa de ordenador), encontramos que

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3.$$

Como hemos encontrado un entero positivo que puede escribirse como la suma de cubos de dos formas diferentes, la demostración está conseguida. ◀

**EJEMPLO 27** Una demostración no constructiva de existencia. Muestra que existen dos números irracionales  $x$  e  $y$  tales que  $x^y$  es racional.

*Solución:* Por el Ejemplo 21 sabemos que  $\sqrt{2}$  es irracional. Considera el número  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Si es racional, hemos encontrado dos números  $x$  e  $y$  con  $x^y$  racional:  $x = \sqrt{2}$  e  $y = \sqrt{2}$ . Por otra parte, si  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  es irracional, entonces podemos hacer  $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  e  $y = \sqrt{2}$ , de tal forma que  $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$ .

Esta demostración es un ejemplo de demostración no constructiva de existencia, porque no hemos encontrado dos números  $x$  e  $y$  tales que  $x^y$  es racional. Más bien hemos demostrado que bien el par  $x = \sqrt{2}$ ,  $y = \sqrt{2}$  o bien  $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ,  $y = \sqrt{2}$  uno de ellos tiene las propiedades deseadas, pero ¡no sabemos cuál de estos dos pares es el que buscamos!

**DEMOSTRACIONES DE UNICIDAD** Algunos teoremas afirman la existencia de un único elemento con una propiedad particular. En otras palabras, estos teoremas afirman que hay exactamente un elemento con esta propiedad. Para demostrar una sentencia de este tipo, necesitamos mostrar que existe un elemento con esta propiedad y que ningún otro elemento cumple esta propiedad. Las dos partes de una demostración unicidad son:

*Existencia:* Mostramos que existe un elemento  $x$  con la propiedad deseada.

*Unicidad:* Mostramos que si  $y \neq x$ , entonces  $y$  no tiene la propiedad deseada.

**Observación:** Mostrar que existe un único elemento  $x$  tal que  $P(x)$  es lo mismo que demostrar la sentencia  $\exists x (P(x) \wedge \forall y (y \neq x \rightarrow \neg P(y)))$ .

**EJEMPLO 28** Muestra que todo entero tiene un único inverso respecto la suma. Esto es, muestra que si  $p$  es un entero, entonces existe un único entero  $q$  tal que  $p + q = 0$ .

Ejemplos  
adicionales

*Solución:* Si  $p$  es un entero, encontramos que  $p + q = 0$  cuando  $q = -p$ . Como  $q$  es también entero, por consiguiente, existe un entero  $q$  tal que  $p + q = 0$ .

Para mostrar que dado el entero  $p$ , el entero  $q$  tal que  $p + q = 0$  es único, supongamos que  $r$  es un entero tal que  $r \neq q$  y  $p + r = 0$ . Así,  $p + q = p + r$ . Sustrayendo  $p$  de ambos lados de la ecuación, se sigue que  $q = r$ , lo que contradice la suposición de que  $q \neq r$ . Por tanto, hay un único entero  $q$  tal que  $p + q = 0$ .

**CONTRA EJEMPLOS** En la Sección 1.3 mencionamos que se podía ver que una sentencia de la forma  $\forall x P(x)$  es falsa si podemos encontrar un contraejemplo, esto es, un ejemplo  $x$  para el cual  $P(x)$  es falsa. Cuando nos encontramos una sentencia de la forma  $\forall x P(x)$  y bien creemos que es falsa o bien se nos resisten todos los intentos para encontrar una demostración, buscamos un contraejemplo. Ilustramos la caza de un contraejemplo en el Ejemplo 29.

Ejemplos  
adicionales

**EJEMPLO 29** Muestra que la sentencia «Todo entero positivo es la suma de los cuadrados de tres enteros» es falsa.

*Solución:* Podemos mostrar que esta sentencia es falsa si encontramos un contraejemplo. Esto es, la sentencia es falsa si podemos mostrar que hay un entero particular que no es la suma de los cuadrados de tres enteros. Para buscar un contraejemplo, intentamos escribir los sucesivos enteros positivos como suma de tres cuadrados. Encontramos que  $1 = 0^2 + 0^2 + 1^2$ ,  $2 = 0^2 + 1^2 + 1^2$ ,  $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$ ,  $4 = 0^2 + 0^2 + 2^2$ ,  $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$ ,  $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ , pero no podemos encontrar una forma para escribir 7 como la suma de tres cuadrados. Para demostrar que no hay tres cuadrados que sumen 7, ten en cuenta que podemos utilizar sólo aquellos cuadrados que no exceden de 7, a saber, 0, 1 y 4. Como no hay tres términos escogidos entre 0, 1 o 4 cuyos cuadrados sumen 7, se sigue que 7 es un contraejemplo. Concluimos que la sentencia «Todo entero positivo es la suma de los cuadrados de tres enteros» es falsa.

Enlaces

Un error común consiste en asumir que uno o más ejemplos establecen la verdad de una sentencia. No importa los ejemplos que se encuentren que hagan  $P(x)$  verdadera, la cuantificación universal  $\forall x P(x)$  puede ser falsa. Considera el Ejemplo 30.

**NOTA HISTÓRICA** Cuando el matemático inglés G. H. Hardy visitó al prodigio hindú Ramanujan en el hospital donde estaba convaleciente, Hardy señaló que el 1729, el número del taxi que había tomado, era bastante insulso. Ramanujan le replicó: «No, es un número muy interesante; es el número más pequeño que se puede expresar como la suma de cubos de dos formas diferentes». (Véanse los Problemas suplementarios del Capítulo 3 para las biografías de Hardy y Ramanujan).

**EJEMPLO 30** ¿Es verdad que todo entero positivo es la suma de 18 potencias cuartas de enteros? En otras palabras, ¿es un teorema la sentencia  $\forall n P(n)$ , donde  $P(n)$  es la sentencia « $n$  se puede escribir como la suma de 18 potencias cuartas de enteros» y el dominio consiste en todos los enteros positivos?

*Solución:* Para determinar si  $n$  se puede escribir como la suma de 18 potencias cuartas de enteros, deberíamos empezar examinando si  $n$  es la suma de 18 potencias cuartas de enteros para los enteros positivos más pequeños. Como las potencias cuartas de enteros son 0, 1, 16, 81, ..., si podemos seleccionar 18 términos de estos números que sumen  $n$ , entonces  $n$  es una suma de 18 potencias cuartas. Podemos mostrar que todos los enteros positivos hasta 78 se puede escribir como la suma de 18 potencias cuartas. (Los detalles se dejan al cuidado del lector). Sin embargo, si decidiéramos que esto es suficiente, habríamos llegado a una conclusión errónea. La sentencia inicial no es correcta porque 79 no es suma de 18 potencias cuartas (como el lector podría verificar). ◀

### ERRORES EN DEMOSTRACIONES

Hay mucho fallos comunes en la construcción de demostraciones. Describiremos brevemente algunos de ellos aquí. Entre los fallos más generalizados están las equivocaciones en aritmética y álgebra básica. Incluso matemáticos profesionales cometen tales errores, especialmente cuando trabajan con fórmulas complejas. Siempre que utilices cálculos complejos, deberías revisarlos tan cuidadosamente como sea posible. (Sería interesante que repasases algunos aspectos problemáticos del álgebra básica, especialmente antes de estudiar la Sección 3.3).

Cada paso de una demostración matemática debe ser correcto y la conclusión debe deducirse lógicamente de los pasos que la preceden. Muchas equivocaciones resultan de introducir pasos que no se han deducido lógicamente de los anteriores. Esto se ilustra en los Ejemplos 31-33.

**EJEMPLO 31** ¿Dónde está el error en la famosa «demostración» supuesta de que  $1 = 2$ ?

«**Demostración**»: Consideramos los siguientes pasos, donde  $a$  y  $b$  son dos enteros positivos iguales.

Paso	Razonamiento
1. $a = b$	Dado
2. $a^2 = ab$	Multiplicando ambos lados de (1) por $a$
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	Restando $b^2$ a ambos lados de (2)
4. $(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Factorizando ambos lados de (3)
5. $a + b = b$	Dividiendo ambos lados de (4) por $a - b$
6. $2b = b$	Reemplazando $a$ por $b$ en (5), porque $a = b$ , y simplificando
7. $2 = 1$	Dividiendo ambos lados de (6) por $b$

*Solución:* Todos los pasos son válidos excepto uno, el paso 5, donde dividimos ambos lados por  $a - b$ . El error está en que  $a - b$  es igual a cero. La división de ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad es válida siempre que esta cantidad no sea cero. ◀

**EJEMPLO 32** ¿Dónde está el error en esta «demostración»?

«Teorema»: Si  $n^2$  es positivo, entonces  $n$  es positivo.

«**Demostración**»: Supongamos que  $n^2$  es positivo. Como la implicación «Si  $n$  es positivo, entonces  $n^2$  es positivo» es verdadera, concluimos que  $n$  es positivo.

*Solución:* Sea  $P(n)$  « $n$  es positivo» y  $Q(n)$  « $n^2$  es positivo». Entonces nuestra hipótesis es  $Q(n)$ . La sentencia «Si  $n$  es positivo, entonces  $n^2$  es positivo» es la sentencia  $\forall n (P(n) \rightarrow Q(n))$ . De la hipótesis  $Q(n)$  y la sentencia  $\forall n (P(n) \rightarrow Q(n))$  no podemos concluir  $P(n)$ , porque no estamos empleando una regla de inferencia válida. De hecho, éste es un ejemplo de la falacia de la afirmación



de la conclusión. Se puede poner un contraejemplo con  $n = -1$ , para el cual  $n^2 = 1$  es entero positivo, pero  $n$  es negativo ◀

### EJEMPLO 33 ¿Dónde está el error en esta «demostración»?

«Teorema»: Si  $n$  no es positivo, entonces  $n^2$  no es positivo. (Esto es contrarrecíproco del «teorema» del Ejemplo 32).

«**Demostración**»: Supongamos que  $n$  no es positivo. Como la implicación «Si  $n$  es positivo, entonces  $n^2$  es positivo» es verdadera, concluimos que  $n^2$  no es positivo.

*Solución*: Sean  $P(n)$  y  $Q(n)$  del Ejemplo 32. Entonces nuestra hipótesis es  $\neg P(n)$  y la sentencia «Si  $n$  es positivo, entonces  $n^2$  es positivo» es la sentencia  $\forall n (P(n) \rightarrow Q(n))$ . De la hipótesis  $\neg P(n)$  y la sentencia  $\forall n (P(n) \rightarrow Q(n))$  no podemos concluir  $\neg Q(n)$ , porque no utilizamos una regla de inferencia correcta. De hecho, esto es un ejemplo de la falacia de negar la hipótesis. Puede darse un contraejemplo para  $n = -1$ , como en el Ejemplo 32. ◀

Un error común consistente en hacer suposiciones no garantizadas puede darse en las demostraciones por casos, en las cuales a veces no se consideran todos los casos. Esto se ilustra en el Ejemplo 34.

### EJEMPLO 34 ¿Dónde está el error en esta «demostración»?

«Teorema»: Si  $x$  es un número real, entonces  $x^2$  es un real positivo.

«**Demostración**»: Sea  $p_1$  « $x$  es positivo»,  $p_2$  « $x$  es negativo» y  $q$  « $x^2$  es positivo». Para mostrar que  $p_1 \rightarrow q$ , ten en cuenta que cuando  $x$  es positivo,  $x^2$  es positivo, puesto que el producto de dos números positivos ( $x$  y  $x$ ) reales es un real positivo. Para mostrar que  $p_2 \rightarrow q$ , se puede ver que cuando  $x$  es negativo,  $x^2$  es positivo, ya que el producto de dos números negativos,  $x$  y  $x$ , es positivo. Esto completa la demostración.

*Solución*: El problema de la solución que hemos dado es que hemos olvidado el caso en que  $x$  sea igual a 0. Cuando  $x = 0$ ,  $x^2 = 0$ , no es positivo, por lo que el teorema es falso. Si  $p$  es « $x$  es un número real», entonces podemos demostrar resultados donde  $p$  es la hipótesis con tres casos  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$ , donde  $p_1$  es « $x$  es positivo»,  $p_2$  es « $x$  es negativo» y  $p_3$  es « $x = 0$ », por la equivalencia  $p \leftrightarrow p_1 \vee p_2 \vee p_3$ . ◀

Finalmente, discutimos brevemente un tipo de error especialmente desafortunado. Muchos argumentos correctos se basan en una falacia llamada **petición de principio**. Esta falacia se presenta cuando uno o más pasos de una demostración se basan en la veracidad de la sentencia que se está demostrando. En otras palabras, esta falacia surge cuando se demuestra una sentencia usando en la demostración la misma sentencia o una sentencia equivalente a ella. Es por lo que esta falacia también se conoce como **razonamiento circular**.

### EJEMPLO 35 ¿Es correcto el siguiente argumento? Supuestamente, demuestra que $n$ es par siempre que $n^2$ sea par.

Supongamos que  $n^2$  es par. Entonces,  $n^2 = 2k$  para algún entero  $k$ . Sea  $n = 2l$  para algún entero  $l$ . Esto muestra que  $n$  es par.

*Solución*: Este argumento es incorrecto. La sentencia «Sea  $n = 2l$  para algún entero  $l$ » se utiliza en la demostración. No se ha dado ningún argumento que demuestre que  $n$  se puede escribir como  $2l$  para algún entero  $l$ . Esto es un razonamiento circular porque la sentencia es equivalente a la sentencia que se quiere demostrar, esto es, « $n$  es par». Por supuesto, el resultado es correcto; sólo el método de demostración es incorrecto. ◀

Cometer errores en las demostraciones es parte del proceso de aprendizaje. Cuando cometes un fallo y otra persona lo encuentra, deberías analizar cuidadosamente por qué te equivocaste y

10205571910241225

asegurarte de que no cometes el mismo fallo de nuevo. Incluso los matemáticos profesionales cometen errores en sus demostraciones. No pocas demostraciones incorrectas de resultados importantes han confundido a la gente durante muchos años antes de que los sutiles errores contenidos en ellas fueran encontrados.

## SÓLO EL COMIENZO

Hemos presentado algunos métodos para demostrar teoremas. Observa que no se ha dado ningún algoritmo para demostrar teoremas; ni siquiera se ha mencionado. Un resultado de gran calado es que no existe tal algoritmo.

Hay muchos teoremas cuyas demostraciones son fáciles de encontrar trabajando directamente con las hipótesis y las definiciones de los términos del teorema. No obstante, a veces es difícil demostrar un teorema sin hacer un uso inteligente de demostraciones indirectas por reducción al absurdo o por alguna otra técnica. Construir demostraciones es un arte que sólo se puede aprender a través de la experiencia, que consiste en escribir las demostraciones, hacerlas revisar, leer y analizar demostraciones hechas por otros, etc.

Presentamos más ejemplos de demostraciones en el resto de este capítulo y en el Capítulo 2. En el Capítulo 3 seguiremos viendo algo del arte y la estrategia de demostrar teoremas y trabajar con conjeturas, introduciendo varias técnicas de demostración importantes entre las que se incluye el principio de inducción, que se puede utilizar para demostrar resultados que se cumplen para enteros positivos. En el Capítulo 4 presentamos la noción de demostraciones combinatorias.

## Problemas

1. Qué reglas de inferencia se usan en los siguientes argumentos?
  - a) Alicia estudia matemáticas. Por tanto, Alicia estudia bien matemáticas o bien ingeniería informática.
  - b) Jerry estudia matemáticas e ingeniería informática. Por tanto, Jerry estudia matemáticas.
  - c) Si llueve, se cierra la piscina. Llueve; por tanto, está cerrada.
  - d) Si nieva hoy, se cerrará la universidad. La universidad no está cerrada hoy. Por tanto, no nieva hoy.
  - e) Si voy a nadar, entonces estaré al sol demasiado tiempo. Si estoy al sol demasiado tiempo, me quemaré. Por tanto, si voy a nadar me quemaré.
2. ¿Qué reglas de inferencia se usan en los siguientes argumentos?
  - a) Los canguros viven en Australia y son marsupiales. Por tanto, los canguros son marsupiales.
  - b) Estamos a más de 40 °C hoy o la polución es peligrosa. Estamos a menos de 40 °C hoy. Por tanto, la polución es peligrosa.
  - c) Linda es una excelente nadadora. Si Linda es una excelente nadadora, entonces puede trabajar como salvavidas. Por tanto, Linda puede trabajar como salvavidas.
  - d) Susana trabajará en una compañía de informática este verano. Por tanto, este verano Susana trabajará en una compañía de informática o deambulará por la playa.
  - e) Si trabajo toda la noche, podré resolver todos los problemas. Si puedo resolver todos los problemas, entonces tenderé la asignatura. Por tanto, si trabajo toda la noche, entonces entenderé la asignatura.
3. Construye un argumento utilizando reglas de inferencia para mostrar que las hipótesis «Randy trabaja duro», «Si Randy trabaja duro, será un chico soso», «Si Randy es un chico soso, no conseguirá el trabajo» implican la conclusión «Randy no conseguirá el trabajo».
4. Construye un argumento utilizando reglas de inferencia para mostrar que las hipótesis «Si no llueve o si no hace niebla, entonces se celebrará la competición de barcos y se hará una demostración de los salvavidas», «Si se celebra la competición de barcos, se entregará un trofeo» y «El trofeo no se ha entregado» implican la conclusión «Llovió».
5. ¿Qué regla de inferencia se utiliza en este famoso argumento? «Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por tanto, Sócrates es mortal».
6. ¿Qué regla de inferencia se usa en este argumento? «Ningún hombre es una isla. Manhattan es una isla. Por tanto, Manhattan no es un hombre».
7. Para cada uno de estos conjuntos de premisas, ¿qué conclusión o conclusiones se pueden deducir? Explica las reglas de inferencia utilizadas para obtener cada conclusión a partir de las premisas.
  - a) «Si me tomo el día libre, bien llueve o bien nieva». «Me tomé el martes o el jueves libre». «Hizo sol el martes». «No nevó el jueves».

- b) «Si ceno comidas picantes, entonces tengo sueños extraños». «Tengo sueños extraños si truena por la noche». «No he tenido sueños extraños».
- c) «Soy bien inteligente o bien afortunado». «No soy afortunado». «Si soy afortunado, me tocará la lotería».
- d) «Todo estudiante de ingeniería informática tiene un ordenador». «Ralph no tiene ordenador». «Ana tiene un ordenador».
- e) «Lo que es bueno para las empresas, lo es para tu país». «Lo que es bueno para tu país es bueno para ti». «Lo que es bueno para las empresas es que consumas compulsivamente».
- f) «Todos los roedores roen su comida». «Los ratones son roedores». «Los conejos no roen la comida». «Los murciélagos no son roedores».
8. Para cada una de estas premisas, ¿qué conclusión o conclusiones relevantes se pueden derivar? Explica las reglas de inferencia usadas para obtener cada conclusión.
- a) «Si juego al hockey, entonces estoy dolorido al día siguiente». «Uso la bañera de hidromasaje si estoy dolorido». «No usé la piscina de hidromasaje».
- b) «Si trabajo, está soleado o nublado a rachas». «Trabajé el último lunes o el último viernes». «El martes no estuvo soleado». «No estuvo nublado a rachas el viernes».
- c) «Todos los insectos tienen seis patas». «Las libélulas son insectos». «Las arañas no tienen seis patas». «Las arañas se comen a las libélulas».
- d) «Todos los estudiantes tienen una cuenta de Internet». «Homer no tiene una cuenta de Internet». «Maggie tiene una cuenta de Internet».
- e) «Toda la comida sana no sabe bien». «El tofu es sano». «Tú sólo comes lo que sabe bien». «Tú no comes tofu». «Las hamburguesas grasientas no son sanas».
- f) «Estoy soñando o estoy alucinado». «No estoy soñando». «Si estoy alucinando, veo elefantes corriendo por la carretera».
9. Para cada uno de estos argumentos, explica qué reglas de inferencia se han utilizado en cada paso
- a) «Domingo, un estudiante de esta clase, sabe programar en JAVA. Todos los que saben programar en JAVA pueden conseguir trabajos bien remunerados. Por tanto, alguien en esta clase puede conseguir un trabajo bien remunerado».
- b) «A alguien de tu clase le gusta observar las ballenas. Todas las personas a las que les gusta observar las ballenas se preocupan por la contaminación del océano. Por tanto, hay una persona en esta clase que se preocupa por la contaminación del océano».
- c) «Cada uno de los 93 estudiantes de la clase tiene un ordenador. Todos los que tienen un ordenador pueden utilizar un editor de texto. Por tanto, Zacarías, un estudiante de la clase, puede utilizar un editor de texto»
- d) «Todo el mundo en Santo Domingo vive a menos de 100 km del océano. Alguien en Santo Domingo no ha visto nunca el océano. Por tanto, alguien que vive a menos de 100 km del océano no ha visto nunca el océano».
10. Para cada uno de estos argumentos, explica qué reglas de inferencia se han usado en cada paso.
- a) Linda, una estudiante de esta clase, tiene un descapotable rojo. A todos los que tienen un descapotable rojo les han multado alguna vez por exceso de velocidad. Por tanto, a alguien en esta clase le han multado por exceso de velocidad».
- b) «Cada uno de los cinco compañeros de habitación, Melisa, Aarón, Ralph, Vanesa y Kiko, han cursado la asignatura de matemática discreta. Todos los estudiantes que han cursado la asignatura de matemática discreta pueden cursar la asignatura de algoritmos. Por tanto, los cinco compañeros de habitación pueden cursar la asignatura de algoritmos el año que viene».
- c) «Todas las películas producidas por John Sayles son maravillosas. John Sayles produjo una película sobre los mineros del carbón. Por tanto, hay una magnífica película sobre los mineros del carbón».
- d) «Hay alguien en la clase que ha visitado Francia. Todos los que van a Francia visitan el Louvre. Por tanto, alguien en esta clase ha visitado el Louvre».
11. Para cada uno de estos argumentos determina si es correcto o incorrecto y explica por qué.
- a) Todos los estudiantes de la clase entienden lógica. Xavier es un estudiante de la clase. Por tanto, Xavier entiende lógica.
- b) Todos los estudiantes de ingeniería informática cursan matemática discreta. Natacha cursa matemática discreta. Por tanto, Natacha es estudiante de ingeniería informática.
- c) A todos los loros les gusta la fruta. Mi pájaro no es un loro. Por tanto, a mi pájaro no le gusta la fruta.
- d) Los que comen vegetales todos los días están sanos. Linda no está sana. Por tanto, Linda no come vegetales todos los días.
12. Para cada uno de estos argumentos determina si son correctos o incorrectos y explica por qué.
- a) Todos los que han pasado por la universidad han vivido en una residencia. Mia no ha vivido en una residencia. Por tanto, Mia no ha pasado por la universidad.
- b) Los automóviles descapotables son divertidos de conducir. El automóvil de Isaac no es descapotable. Por tanto, el automóvil de Isaac no es divertido de conducir.
- c) A Quique le gustan las películas de acción. A Quique le gusta la película *En la línea de fuego*. Por tanto, *En la línea de fuego* es una película de acción.
- d) Todos los pescadores de langostas ponen al menos una docena de nasas. Hilario es un pescador de langostas. Por tanto, pone al menos una docena de nasas.
13. Determina si es correcto cada uno de los siguientes argumentos. Si el argumento es correcto, ¿cuál es la regla

de inferencia utilizada? Si no lo es, ¿qué error lógico ocurre?

- a) Si  $n$  es un número real tal que  $n > 1$ , entonces  $n^2 > 1$ . Supongamos que  $n^2 > 1$ . Entonces  $n > 1$ .
  - b) El número  $\log_2 3$  es irracional si no es la razón de dos enteros. Por tanto, como  $\log_2 3$  no se puede escribir en la forma  $a/b$  donde  $a$  y  $b$  son enteros, es irracional.
  - c) Si  $n$  es un número real y  $n > 3$ , entonces  $n^2 > 9$ . Supongamos que  $n^2 \leq 9$ . Entonces,  $n \leq 3$ .
  - d) Si  $n$  es un número real y  $n > 2$ , entonces  $n^2 > 4$ . Supongamos que  $n \leq 2$ . Entonces,  $n^2 \leq 4$ .
14. Determina si estos argumentos son correctos.
- a) «Si  $x^2$  es irracional, entonces  $x$  es irracional. Por tanto, si  $x$  es irracional, se sigue que  $x^2$  es irracional».
  - b) «Si  $x^2$  es irracional, entonces  $x$  es irracional. El número  $x = \pi^2$  es irracional. Por tanto, el número  $x = \pi$  es irracional».
15. ¿Qué está equivocado en este argumento? Sea  $H(x)$  « $x$  está feliz». Dada la premisa  $\exists x H(x)$ , concluimos que  $H(\text{Lola})$ . Por tanto, Lola está feliz.
16. ¿Qué está equivocado en este argumento? Sea  $S(x, y)$  « $x$  es más bajo que  $y$ ». Dada la premisa  $\exists s S(s, \text{Max})$ , se sigue que  $S(\text{Max}, \text{Max})$ . Entonces, por generalización de existencia, se sigue que  $\exists x S(x, x)$ , por lo que alguien es más bajo que él mismo.
17. Demuestra la proposición  $P(0)$ , donde  $P(n)$  es la proposición «Si  $n$  es un entero positivo mayor que 1, entonces  $n^2 > n$ ». ¿Qué tipo de demostración has empleado?
18. Demuestra la proposición  $P(1)$ , donde  $P(n)$  es la proposición «Si  $n$  es un entero positivo, entonces  $n^2 \geq n$ ». ¿Qué tipo de demostración has utilizado?
19. Sea  $P(n)$  la proposición «Si  $a$  y  $b$  son números reales positivos, entonces  $(a + b)^n \geq a^n + b^n$ ». Demuestra que  $P(1)$  es verdadera. ¿Qué tipo de demostración has usado?
20. Demuestra que el cuadrado de un número par es un número par utilizando:
- a) Una demostración directa.
  - b) Una demostración indirecta.
  - c) Una demostración por reducción al absurdo.
21. Demuestra que si  $n$  es un entero y  $n^3 + 5$  es impar, entonces  $n$  es par usando:
- a) Una demostración indirecta.
  - b) Una demostración por reducción al absurdo.
22. Demuestra que si  $n$  es un entero y  $3n + 2$  es par, entonces  $n$  es par usando:
- a) Una demostración indirecta.
  - b) Una demostración por reducción al absurdo.
23. Demuestra que la suma de dos impares es par.
24. Demuestra que el producto de dos números impares es impar.
25. Demuestra que la suma de un número irracional y un número racional es un número irracional utilizando una demostración por reducción al absurdo.
26. Demuestra que el producto de dos números racionales es racional.
27. Demuestra que se cumple, o que no, que el producto de dos números irracionales es irracional.
28. Demuestra que se cumple, o que no, que el producto de un número racional no nulo y un irracional es irracional.
29. Demuestra que si  $x$  es irracional,  $1/x$  también lo es.
30. Demuestra que si  $x$  es racional y  $x \neq 0$ ,  $1/x$  también lo es.
31. Demuestra que 10 de cualquier grupo de 64 días que se escojan deben corresponder al mismo día de la semana.
32. Demuestra que 3 de cualquier grupo de 25 días que se escojan deben corresponder al mismo mes del año.
33. Muestra que si  $x$  e  $y$  son números reales, entonces  $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$ . (Indicación: Usa una demostración por casos, siendo los dos casos  $x \geq y$  y  $x < y$ ).
34. Utiliza una demostración por casos para mostrar que  $\min(a, \min(b, c)) = \min(\min(a, b), c)$  siempre que  $a, b$  y  $c$  sean números reales.
35. Demuestra la **desigualdad triangular**, que afirma que si  $x$  e  $y$  son números reales, entonces  $|x| + |y| \geq |x + y|$  (donde  $|x|$  representa el valor absoluto de  $x$ , que es igual a  $x$  para  $x \geq 0$  y es igual a  $-x$  para  $x < 0$ ).
36. Demuestra que el cuadrado de un entero finaliza en 0, 1, 4, 5, 6 o 9. (Indicación: Sea  $n = 10k + l$ , donde  $l = 0, 1, \dots, 9$ ).
37. Demuestra que la potencia cuarta de un entero acaba en 0, 1, 5 o 6.
38. Demuestra que si  $n$  es un entero positivo, entonces  $n$  es par si, y sólo si,  $7n + 4$  es par.
39. Demuestra que si  $n$  es un entero positivo, entonces  $n$  es impar si, y sólo si,  $7n + 4$  es impar.
40. Demuestra que si  $m^2 = n^2$  si, y sólo si,  $m = n$  o  $m = -n$ .
41. Demuestra que se cumple, o que no, que si  $m$  y  $n$  son enteros tales que  $mn = 1$ , entonces bien  $m = 1$  y  $n = 1$  o bien  $m = -1$  y  $n = -1$ .
42. Demuestra que estas tres sentencias son equivalentes, donde  $a$  y  $b$  son números reales: (i)  $a$  es menor que  $b$ ; (ii) el valor medio de  $a$  y  $b$  es mayor que  $a$ , y (iii) el valor medio de  $a$  y  $b$  es menor que  $b$ .

43. Demuestra que estas tres sentencias son equivalentes:  
(i)  $3x + 2$  es un número par; (ii)  $x + 5$  es un entero impar, y (iii)  $x^2$  es un entero par.
44. Demuestra que estas tres sentencias son equivalentes:  
(i)  $x$  es racional; (ii)  $x/2$  es racional, y (iii)  $3x - 1$  es racional.
45. Demuestra que estas tres sentencias son equivalentes:  
(i)  $x$  es irracional; (ii)  $3x + 2$  es irracional, y (iii)  $x/2$  es irracional.
46. ¿Es correcto este razonamiento para encontrar las soluciones de la ecuación  $\sqrt{2x^2 - 1} = x$ ? (1). Se da  $\sqrt{2x^2 - 1} = x$ ; (2)  $2x^2 - 1 = x^2$ , elevando al cuadrado ambos términos de (1); (3)  $x^2 - 1 = 0$ , restando  $x^2$  a ambos lados de (2); (4)  $(x - 1)(x + 1) = 0$ , factorizando la parte izquierda de (3); (5)  $x = 1$  o  $x = -1$ , ya que si  $ab = 0$  implica que bien  $a = 0$  o bien  $b = 0$ .
47. ¿Son correctos estos pasos dados para encontrar las soluciones de la ecuación  $\sqrt{x + 3} = 3 - x$ ? (1) Se parte de  $\sqrt{x + 3} = 3 - x$ ; (2)  $x + 3 = x^2 - 6x + 9$ , elevando al cuadrado ambos lados de (1); (3)  $0 = x^2 - 7x + 6$ , restando  $x + 3$  a ambos términos de (2); (4)  $0 = (x - 1)(x - 6)$ , factorizando la parte derecha de (3); (5)  $x = 1$  o  $x = 6$ , ya que si  $ab = 0$  implica que bien  $a = 0$  o bien  $b = 0$ .
48. Demuestra que hay un entero positivo que es igual a la suma de los enteros positivos menores o iguales que él. ¿Es tu demostración constructiva o no constructiva?
49. Demuestra que hay cien enteros consecutivos que no son cuadrados perfectos. ¿Es tu demostración constructiva o no constructiva?
50. Demuestra que bien  $2 \cdot 10^{500} + 15$  o bien  $2 \cdot 10^{500} + 16$  no es cuadrado perfecto. ¿Es tu demostración constructiva o no constructiva?
51. Demuestra que hay un par de enteros positivos consecutivos tales que uno es un cuadrado perfecto y el otro un cubo perfecto.
52. Demuestra que el producto de dos de los números  $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$ ,  $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$  y  $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$  no es negativo. ¿Es tu demostración constructiva o no constructiva? (Indicación: ¡No intentes evaluar estos números!).
53. Demuestra que cada una de las siguientes sentencias se pueden utilizar para expresar el hecho de que hay un único elemento  $x$  tal que  $P(x)$  es verdadera. [Ten en cuenta que, por el Problema 48 de la Sección 1.3, ésta es la sentencia  $\exists! P(x)$ ].  
a)  $\exists x \forall y (P(y) \leftrightarrow x = y)$   
b)  $\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$   
c)  $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow x = y))$
54. Demuestra que si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales y  $a \neq 0$ , entonces existe una solución única para la ecuación  $ax + b = c$ .
55. Supongamos que  $a$  y  $b$  son enteros impares,  $a \neq b$ . Muestra que existe un único entero  $c$  tal que  $|a - c| = |b - c|$ .
56. Muestra que si  $r$  es un número irracional, hay un único entero  $n$  tal que la distancia entre  $r$  y  $n$  es menor que  $1/2$ .
57. Muestra que si  $n$  es un entero impar, entonces existe un único entero  $k$  tal que  $n$  es la suma de  $k - 2$  y  $k + 3$ .
58. Demuestra que dado un número real  $x$  existen dos únicos números  $n$  y  $\varepsilon$  tal que  $x = n + \varepsilon$ ,  $n$  es un entero y  $0 \leq \varepsilon < 1$ .
59. Demuestra que dado un número real  $x$  existen dos únicos números  $n$  y  $\varepsilon$  tal que  $x = n - \varepsilon$ ,  $n$  es un entero y  $0 \leq \varepsilon < 1$ .
60. Usa la regla de resolución para mostrar que las hipótesis «Allen es un mal chico o Hillary es una buena chica» y «Allen es un buen chico o David está contento» implican la conclusión «Hillary es una buena chica o David está contento».
61. Utiliza la regla de resolución para mostrar que las hipótesis «No llueve o Yvette tiene un paraguas», «Yvette no tiene un paraguas o ella no se moja» y «Llueve o Yvette no se moja» implican la conclusión «Yvette no se moja».
62. Muestra que las equivalencias  $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$  se pueden derivar utilizando la regla de resolución junto con el hecho de que una implicación con hipótesis falsa es correcta. (Indicación: Sea  $q = r = \mathbf{F}$  cuando se use la regla de resolución).
63. Usa la regla de resolución para demostrar que la fórmula  $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$  no se cumple.
64. Demuestra que se cumple, o que no, que si  $a$  y  $b$  son números racionales, entonces  $a^b$  también lo es.
65. Demuestra que se cumple, o que no, que hay un número racional  $x$  y un irracional  $y$  tales que  $x^y$  es irracional.
66. Muestra que puede verse que las proposiciones  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  son equivalentes demostrando que  $p_1 \leftrightarrow p_4, p_2 \leftrightarrow p_3$  y  $p_1 \leftrightarrow p_3$  son verdaderas.
67. Muestra que puede verse que las proposiciones  $p_1, p_2, p_3, p_4$  y  $p_5$  son equivalentes demostrando que  $p_1 \rightarrow p_4, p_3 \rightarrow p_1, p_4 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_5$  y  $p_5 \rightarrow p_3$  son verdaderas.
68. Demuestra que un tablero de ajedrez de  $8 \times 8$  casillas se puede cubrir completamente empleando fichas de dominó (piezas de  $1 \times 2$  casillas).
- \*69. Demuestra que es imposible cubrir un tablero de ajedrez de  $8 \times 8$  casillas con dos casillas quitadas en dos esquinas opuestas utilizando fichas de dominó.
- \*70. El Problema de Lógica, tomado de *WFF'N PROOF: The Game of Modern Logic*, usa estas dos suposiciones:  
1. «La lógica es difícil o a pocos estudiantes les gusta la lógica».

2. «Si las matemáticas son fáciles, entonces la lógica no es difícil».

Formalizando estos dos enunciados a sentencias con variables proposicionales y conectivos lógicos, determina cuáles de estas conclusiones son válidas para estas suposiciones.

- a) Que las matemáticas no son fáciles si a muchos estudiantes le gusta la lógica.
  - b) Que a pocos estudiantes les gusta la lógica si las matemáticas no son fáciles.
  - c) Que las matemáticas no son fáciles o la lógica es difícil.
  - d) Que la lógica no es difícil o las matemáticas no son fáciles.
  - e) Que si a pocos estudiantes les gusta la lógica, entonces bien las matemáticas no son fáciles o bien la lógica no es difícil.
71. Demuestra que al menos uno de los números reales  $a_1, a_2, \dots, a_n$  es mayor o igual que el promedio de ellos. ¿Qué clase de demostración has utilizado?
72. Usa el Problema 71 para mostrar que si se ponen los diez primeros números enteros positivos alrededor de un círculo, en cualquier orden, existen tres enteros en posiciones consecutivas alrededor del círculo que tienen una suma mayor o igual que 17.
73. Demuestra que si  $n$  es un entero, estas cuatro sentencias son equivalentes: (i)  $n$  es par, (ii)  $n + 1$  es impar, (iii)  $3n + 1$  es impar, (iv)  $3n$  es par.
74. Demuestra que estas cuatro sentencias son equivalentes: (i)  $n^2$  es impar, (ii)  $1 - n$  es par, (iii)  $n^3$  es impar, (iv)  $n^2 + 1$  es par.
75. ¿Qué reglas de inferencia se utilizan para establecer la conclusión del argumento de Lewis Carroll descrito en el Ejemplo 19 de la Sección 1.3?
76. ¿Qué reglas de inferencia se utilizan para establecer la conclusión del argumento de Lewis Carroll descrito en el Ejemplo 20 de la Sección 1.3?
- \*77. Determina si este argumento, tomado de Backhouse [Ba86], es correcto.

Si Superman fuese capaz y quisiese prevenir el crimen, lo haría. Si Superman no fuese capaz de prevenir el crimen, sería débil; si no quisiese prevenir el crimen, sería malevolente. Superman no previene el crimen. Si Superman existiese, ni sería débil ni malevolente. Por tanto, Superman no existe.

## 1.6 Conjuntos

### INTRODUCCIÓN

En este libro estudiaremos una gran variedad de estructuras discretas. Éstas incluyen relaciones, que consisten en pares ordenados de elementos; combinaciones, que son colecciones desordenadas de elementos, y grafos, que son conjuntos de vértices y aristas que conectan vértices. Además, ilustraremos cómo se utilizan estas y otras estructuras discretas en el modelado y la resolución de problemas. En particular, se describirán muchos ejemplos del uso de estructuras discretas en almacenamiento, comunicación y manipulación de datos. En esta sección estudiamos la estructura discreta fundamental, sobre la que se construyen todas las demás: el conjunto.

Los conjuntos se utilizan para agrupar objetos. Generalmente, los objetos de un conjunto tienen propiedades similares. Por ejemplo, todos los estudiantes que están matriculados en tu facultad forman un conjunto. De la misma forma, todos los estudiantes matriculados en la asignatura de matemática discreta en cualquier facultad forman un conjunto. Además, aquellos alumnos de matemática discreta matriculados en tu facultad forman otro conjunto que puede formarse tomando los elementos comunes de las dos primeras colecciones. El lenguaje de los conjuntos es un medio para estudiar tales colecciones de forma organizada. A continuación proporcionamos una definición de conjunto.

#### DEFINICIÓN 1

Un *conjunto* es una colección desordenada de objetos.



Observa que el término *objeto* se ha utilizado sin especificar qué es. Esta definición de conjunto como una colección de objetos, basada en la noción intuitiva de lo que es un objeto, fue establecida por primera vez por el matemático alemán Georg Cantor en 1895. La teoría que resulta de esta de-

finición intuitiva de conjunto conduce a **paradojas**, o inconsistencias lógicas, como el filósofo inglés Bertrand Russell mostró en 1902 (en el Problema 30 se describe una de estas paradojas). Estas inconsistencias lógicas se pueden evitar construyendo la teoría de conjuntos con suposiciones básicas, llamadas **axiomas**. En este texto seguiremos la versión original de Cantor de la teoría de conjuntos, conocida como la **teoría naif de conjuntos**, sin desarrollar una versión axiomática, puesto que todos los conjuntos que consideraremos se pueden tratar consistentemente usando la teoría original de Cantor.

Tras este preámbulo, comenzamos con nuestra discusión sobre conjuntos

## DEFINICIÓN 2

Los objetos de un conjunto se llaman también *elementos* o *miembros* del conjunto. Se dice que un conjunto *contiene* a sus elementos.

Hay varias formas de describir un conjunto. Una es enumerar todos los miembros del conjunto cuando esto sea posible. Para ello utilizamos una notación en la que todos los miembros se enumeran entre llaves. Por ejemplo, la notación  $\{a, b, c, d\}$  representa el conjunto con los cuatro elementos  $a, b, c$  y  $d$ .

**EJEMPLO 1** El conjunto de las vocales del alfabeto se puede escribir como  $V = \{a, e, i, o, u\}$ . ◀

**EJEMPLO 2** El conjunto de los enteros positivos impares menores que 10 se puede expresar como  $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ . ◀

**EJEMPLO 3** Aunque los conjuntos se suelen usar para agrupar elementos con propiedades comunes, no hay nada que impida a un conjunto tener elementos no relacionados. Por ejemplo,  $\{a, 2, \text{Alfredo}, \text{Sevilla}\}$  es el conjunto que contiene los cuatro elementos  $a, 2, \text{Alfredo}$  y  $\text{Sevilla}$ . ◀

A veces, la notación con llaves se utiliza para describir un conjunto sin enumerar todos sus miembros. Sólo se enumera algunos de ellos y usamos tres puntos suspensivos (...) para representar los demás cuando el patrón general de los elementos es obvio.

**EJEMPLO 4** El conjunto de enteros positivos menores que 100 se puede denotar como  $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ . ◀

Los siguientes conjuntos, escritos en negrita, desempeñan un importante papel en matemática discreta:

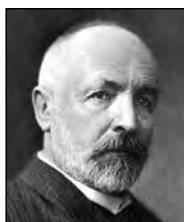
$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , el conjunto de los **números naturales**.

$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , el conjunto de los **enteros**.

$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ , el conjunto de los **enteros positivos**.

$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$ , el conjunto de los **números racionales**.

$\mathbf{R}$ , el conjunto de los **números reales**.



**GEORG CANTOR (1845-1918)** Georg Cantor nació en San Petersburgo, Rusia, donde su padre fue un próspero comerciante. Cantor desarrolló su interés por las matemáticas en la adolescencia. Comenzó sus estudios universitarios en Zurich en 1862, pero cuando su padre murió abandonó esta ciudad. Continuó sus estudios en la Universidad de Berlín en 1863 como discípulo de los eminentes matemáticos Weierstrass, Kummer y Kronecker. Defendió su tesis doctoral, que trataba sobre teoría de números, en 1867. Tomó posesión de una plaza de profesor en la Universidad de Halle en 1869, donde continuó hasta su muerte.

Cantor es considerado el fundador de la teoría de conjuntos. Sus aportaciones en este área incluyen el descubrimiento de que el conjunto de números reales es no numerable. Son notorias sus contribuciones al análisis. Cantor también se interesó por la filosofía y escribió trabajos relacionando su teoría de conjuntos con la metafísica.

Se casó en 1874 y tuvo cinco hijos. El buen ánimo de su mujer compensó su temperamento melancólico. Aunque recibió una gran herencia de su padre, fue mal pagado como profesor, y para mitigar esto, intentó conseguir un puesto mejor remunerado en la Universidad de Berlín. Su solicitud fue bloqueada por Kronecker, quien no estaba de acuerdo con los puntos de vista de Cantor sobre la teoría de conjuntos. Cantor sufrió una enfermedad mental en los últimos años de su vida. Murió en 1918 en una clínica psiquiátrica.



(Hay que tener en cuenta que algunas personas no consideran el 0 como un número natural, por lo que tienes que prestar cuidado al término *número natural* cuando trabajes con otros libros).

Muchas sentencias matemáticas declaran que dos colecciones de objetos especificadas de forma diferente son realmente el mismo conjunto. Necesitamos por ello aclarar qué entendemos con que dos conjuntos sean iguales.

### DEFINICIÓN 3

Dos conjuntos son *iguales* si, y sólo si, tienen los mismos elementos.

**EJEMPLO 5** Los conjuntos  $\{1, 3, 5\}$  y  $\{3, 5, 1\}$  son iguales, puesto que tienen los mismos elementos. Observa que el orden en el que se listan los elementos de un conjunto no importa. Ten en cuenta también que no importa que un elemento se liste más de una vez, por lo que  $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$  es el mismo conjunto que  $\{1, 3, 5\}$ , puesto que ambos tienen los mismos elementos. ◀

Ejemplos  
adicionales

Otra forma de describir un conjunto es usando la notación de **construcción de conjuntos**. Caracterizamos todos los elementos del conjunto declarando la propiedad o propiedades que deben tener sus miembros. Por ejemplo, el conjunto  $O$  de todos los enteros impares menores que 10 se puede escribir como

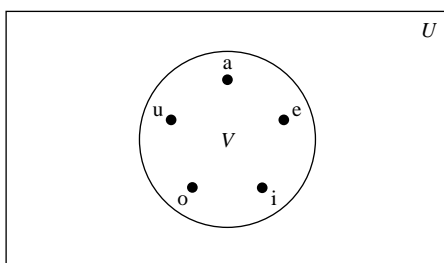
$$O = \{x \mid x \text{ es un entero positivo menor que } 10\}.$$

Generalmente utilizamos esta notación cuando es imposible enumerar todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, el conjunto de los números reales se puede escribir como

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ es un número real}\}.$$

Los conjuntos se pueden representar también gráficamente mediante diagramas de Venn, llamados así por el matemático inglés John Venn, quien introdujo esta representación en 1881. En los diagramas de Venn, el **conjunto universal**  $U$ , el cual contiene todos los objetos bajo consideración, se representa por un rectángulo. Dentro del rectángulo se utilizan círculos u otras figuras geométricas para representar conjuntos. A veces se emplean puntos para representar elementos particulares del conjunto. Los diagramas de Venn se usan a menudo para indicar relaciones entre conjuntos. En el siguiente ejemplo mostraremos cómo se puede utilizar un diagrama de Venn.

**EJEMPLO 6** Dibuja un diagrama de Venn que represente  $V$ , el conjunto de las vocales.



**Figura 1.** Diagrama de Venn para el conjunto de las vocales



**BERTRAND RUSSELL (1872-1970)** Bertrand Russell nació en una prominente familia inglesa activa en el movimiento progresista y con un fuerte compromiso con la libertad. Quedó huérfano a edad temprana y fue puesto bajo el cuidado de sus abuelos paternos, que le educaron en casa. Ingresó en el Trinity College, Cambridge, en 1890, donde destacó en matemáticas y ciencias morales. Consiguió una beca con su trabajo sobre los fundamentos de la geometría. En 1910, el Trinity College le nombró profesor de lógica y filosofía de las matemáticas.

Russell luchó por causas progresistas durante toda su vida. Sostuvo fuertes convicciones pacifistas y sus protestas contra la Primera Guerra Mundial le condujeron a dimitir de su plaza en el Trinity College. Estuvo en prisión durante seis meses en 1918 debido a un artículo que escribió que fue etiquetado de sedicioso. Russell luchó por el sufragio de la mujer en Gran Bretaña. En 1961, a la edad de ochenta y nueve años, fue a la cárcel por segunda vez por sus protestas a favor del desarme nuclear.

El gran trabajo de Russell fue el desarrollo de principios que pudiesen ser usados como fundamentos para todas las matemáticas. Su trabajo más famoso es *Principia Mathematica*, escrito con Alfred North Whitehead, en el que se intentan deducir todas las matemáticas utilizando un conjunto de axiomas primarios. Escribió muchos libros sobre filosofía, física y sus ideas políticas. Russell ganó el premio Nobel de Literatura en 1950.

Enlaces

**Solución:** Dibujamos un rectángulo para indicar el conjunto universal  $U$ , el conjunto de las 28 letras del alfabeto. Dentro del rectángulo dibujamos un círculo para representar  $V$ . Dentro de este círculo indicamos los elementos de  $V$  con puntos (véase la Figura 1). ◀

Ahora presentaremos la notación que se utiliza para describir la pertenencia a un conjunto. Escribimos que  $a \in A$  para denotar que  $a$  es un elemento del conjunto  $A$ . La notación  $a \notin A$  expresa que  $a$  no es miembro del conjunto  $A$ . (Generalmente, se usan letras minúsculas para denotar elementos de conjuntos).

Hay un conjunto especial que no tiene elementos. Este conjunto se llama **conjunto vacío** o **conjunto nulo**, y se denota por  $\emptyset$ . El conjunto vacío también se puede denotar por  $\{ \}$  (esto es, representamos el conjunto vacío por un par de llaves que encierran todos los elementos del conjunto). A menudo, un conjunto de elementos con determinadas propiedades resulta ser el conjunto vacío. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros positivos que son mayores que sus cuadrados es el conjunto vacío.

Un error que se comete a menudo consiste en confundir el conjunto vacío  $\emptyset$  con el conjunto  $\{\emptyset\}$ , que es un **conjunto unitario**, esto es, un conjunto con un solo elemento. ¡El único elemento del conjunto  $\{\emptyset\}$  es el conjunto vacío!

#### DEFINICIÓN 4

El conjunto  $A$  se dice que es subconjunto de  $B$  si, y sólo si, todo elemento de  $A$  es también un elemento de  $B$ . Usamos la notación  $A \subseteq B$  para indicar que  $A$  es un subconjunto de  $B$ .

Vemos que  $A \subseteq B$  si, y sólo si, la cuantificación

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

es verdadera. Por ejemplo, el conjunto de enteros positivos impares menores que 10 es un subconjunto del conjunto de los enteros positivos menores que 10. El conjunto de todos los estudiantes de ingeniería informática de tu facultad es un subconjunto del conjunto de todos los estudiantes de tu universidad.

El Teorema 1 muestra que todo subconjunto no vacío de  $S$  tiene al menos dos subconjuntos, el conjunto vacío y el conjunto  $S$ , esto es,  $\emptyset \subseteq S$  y  $S \subseteq S$ .

#### TEOREMA 1

Para cualquier conjunto  $S$ ,

- (i)  $\emptyset \subseteq S$  y (ii)  $S \subseteq S$ .

**Demostración:** Demostraremos (i) y dejaremos la demostración de (ii) como ejercicio.

Sea  $S$  un conjunto. Para demostrar que  $\emptyset \subseteq S$  debemos demostrar que  $\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$  es verdadera. Como el conjunto vacío no contiene elementos, se sigue que  $x \in \emptyset$  es siempre falsa. Por tanto, la implicación  $x \in \emptyset \rightarrow x \in S$  es siempre verdadera, porque la hipótesis es siempre falsa (y una implicación con hipótesis falsa es verdadera). Así,  $\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$  es verdadera, lo que completa la demostración de (i). Observa que esto es un ejemplo de demostración vacua. ◀

Cuando queremos enfatizar que  $A$  es un subconjunto de  $B$ , pero que  $A \neq B$ , escribimos  $A \subset B$  y decimos que  $A$  es un **subconjunto propio** de  $B$ . Los diagramas de Venn se pueden utilizar para



**JOHN VENN (1834-1923)** John Venn nació en una familia del Londres suburbano que destacaba por su filantropía. Estudió en Londres y obtuvo su graduación en matemáticas en el Caius College, Cambridge, en 1857. Posteriormente fue elegido para un puesto en este College, donde estuvo hasta su muerte. Se ordenó clérigo en 1859, y tras un breve período de trabajo religioso, volvió a Cambridge, donde se dedicó a la ética. Además de por su trabajo matemático, Venn se interesó por la historia y escribió mucho acerca de su College y su familia.

El libro de Venn *Lógica simbólica* clarifica ideas presentadas originalmente por Boole. En este libro presenta un desarrollo sistemático de un método que utiliza figuras geométricas, conocido como *diagramas de Venn*. Hoy día estos diagramas son una herramienta primordial para analizar argumentos lógicos e ilustrar relaciones entre conjuntos. Adicionalmente a su trabajo sobre lógica simbólica, Venn hizo contribuciones a la teoría de probabilidades descritas en su libro sobre esta materia, texto ampliamente utilizado.

mostrar que un conjunto  $A$  es un subconjunto del conjunto  $B$ . Dibujamos el conjunto universal  $U$  como un rectángulo. Dentro de este rectángulo dibujamos un círculo que corresponda a  $B$ . Como  $A$  es un subconjunto de  $B$ , dibujamos el círculo correspondiente a  $A$  dentro del círculo de  $B$ . Esta relación se muestra en la Figura 2.

Una forma de mostrar que dos conjuntos tienen los mismos elementos es mostrar que cada conjunto es subconjunto del otro. En otras palabras, si podemos mostrar que  $A$  y  $B$  cumplen que  $A \subseteq B$  y que  $B \subseteq A$ , entonces  $A = B$ . Éste es un método útil de ver que dos conjuntos son iguales. Esto es,  $A = B$ , donde  $A$  y  $B$  son conjuntos, si, y sólo si,  $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$  y  $\forall x (x \in B \rightarrow x \in A)$ , o de forma equivalente, si, y sólo si,  $\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ .

Los conjuntos pueden tener otros conjuntos como elementos. Por ejemplo, podemos definir los conjuntos  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$  y  $\{x \mid x \text{ es un subconjunto del conjunto } \{a, b\}\}$ . Observa que estos dos conjuntos son iguales.

Los conjuntos se usan con mucha frecuencia en problemas de recuento. Para tales aplicaciones necesitamos definir el tamaño de los conjuntos.

### DEFINICIÓN 5

Sea  $S$  un conjunto. Si hay exactamente  $n$  elementos distintos en  $S$ , donde  $n$  es un entero no negativo, decimos que  $S$  es un *conjunto finito* y  $n$  es el *cardinal* de  $S$ . El cardinal de  $S$  se denota por  $|S|$ .

**EJEMPLO 7** Sea  $A$  el conjunto de los enteros positivos impares menores que 10. Entonces,  $|A| = 5$ . ◀

**EJEMPLO 8** Sea  $S$  el conjunto de las letras del alfabeto español. Entonces,  $|S| = 28$ . ◀

[NOTA DEL TRADUCTOR: El alfabeto español se compone de las 26 letras del alfabeto internacional inglés utilizado típicamente en ciencias de la computación más las letras  $ch$  y  $ñ$ ]. ◀

**EJEMPLO 9** Como el conjunto vacío no tiene elementos, se sigue que  $|\emptyset| = 0$ . ◀

### DEFINICIÓN 6

Un conjunto se dice que es *infinito* si no es finito.

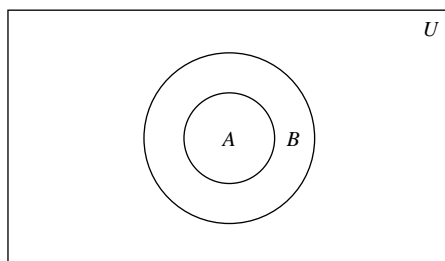
**EJEMPLO 10** El conjunto de los enteros positivos es infinito. ◀



Del cardinal de conjuntos infinitos hablaremos en la Sección 3.2. En esa sección discutiremos qué significa que un conjunto sea numerable y mostraremos que ciertas clases de conjuntos son numerables y otras no.

## EL CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

En muchos problemas debemos probar todas las combinaciones posibles de elementos de un conjunto para ver si satisfacen una propiedad determinada. Para considerar todas estas combina-



**Figura 2.** Diagrama de Venn que muestra que  $A$  es un subconjunto de  $B$ .

ciones de elementos de un conjunto  $S$ , construimos un nuevo conjunto cuyos elementos son todos los posibles subconjuntos de  $S$ .

**DEFINICIÓN 7**

Dado un conjunto  $S$ , el *conjunto de las partes* de  $S$  es el conjunto de todos los subconjuntos de  $S$ . El conjunto de las partes de  $S$  se denota por  $P(S)$ .

**EJEMPLO 11** ¿Cuál es el conjunto de las partes del conjunto  $\{0, 1, 2\}$ ?

*Solución:* El conjunto de las partes  $P(\{0, 1, 2\})$  es el conjunto de los subconjuntos de  $\{0, 1, 2\}$ . Por tanto,

$$P(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Observa que el conjunto vacío y el propio conjunto son miembros del conjunto de las partes. ◀

**EJEMPLO 12** ¿Cuál es el conjunto de las partes del conjunto vacío? ¿Cuál es el conjunto de las partes de  $\{\emptyset\}$ ?

*Solución:* El conjunto de las partes del conjunto vacío tiene exactamente un subconjunto: él mismo. Por tanto,

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

El conjunto  $\{\emptyset\}$  tiene exactamente dos subconjuntos, a saber,  $\emptyset$  y el propio conjunto  $\{\emptyset\}$ . Por tanto,

$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}. \quad \blacktriangleleft$$

Si un conjunto tiene  $n$  elementos, entonces el conjunto de las partes del conjunto tiene  $2^n$  elementos. Demostraremos este hecho de varias formas diferentes en secciones posteriores del libro.

## PRODUCTO CARTESIANO

---

El orden de los elementos en una colección puede ser importante. Como los elementos de un conjunto están desordenados, necesitamos una estructura diferente para representar colecciones ordenadas. Esto nos lo proporcionan las  **$n$ -tuplas ordenadas**.

**DEFINICIÓN 8**

La  *$n$ -tupla ordenada*  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  es la colección ordenada en la que  $a_1$  es su primer elemento,  $a_2$  el segundo, ... y  $a_n$  el elemento  $n$ -ésimo.

Decimos que dos  $n$ -tuplas ordenadas son iguales si, y sólo si, cada par correspondiente de sus elementos es igual. En otras palabras,  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  si, y sólo si,  $a_i = b_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . En particular, las 2-tuplas se llaman **pares ordenados**. Los pares ordenados  $(a, b)$  y  $(c, d)$  son iguales si, y sólo si,  $a = c$  y  $b = d$ . Observa que  $(a, b)$  y  $(b, a)$  no son iguales a no ser que  $a = b$ .

Muchas de las estructuras discretas que estudiaremos en capítulos posteriores se basan en la noción de *producto cartesiano* de conjuntos (llamado así por René Descartes). Definimos primero el producto cartesiano de dos conjuntos.

**DEFINICIÓN 9**

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. El *producto cartesiano* de  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \times B$ , es el conjunto de todos los pares ordenados  $(a, b)$  donde  $a \in A$  y  $b \in B$ . Por tanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$