NEGACIONES

A menudo hace falta considerar la negación de una expresión cuantificada. Por ejemplo, consideremos la negación del enunciado

«Todos los estudiantes de la clase han cursado una asignatura de cálculo».

Esta sentencia es una cuantificación universal de la forma

$\forall x\, P(x)$,

donde $P(x)$ es la sentencia «x ha cursado una asignatura de cálculo». La negación de esta sentencia es «No se cumple que todos los estudiantes de la clase hayan cursado una asignatura de cálculo». Esto es equivalente a «Hay al menos un estudiante en la clase que no ha cursado una asignatura de cálculo». Y esto es simplemente la cuantificación existencial de la negación de la función proposicional original, es decir,

$\exists x\, \neg P(x)$.

Este ejemplo ilustra la siguiente equivalencia

$$\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x).$$

Ejemplos adicionales

Supongamos que queremos negar una cuantificación existencial. Por ejemplo, considera la proposición «Hay un estudiante en la clase que ha cursado una asignatura de cálculo». Ésta es una cuantificación existencial

$\exists x\, Q(x)$,

donde $Q(x)$ es el predicado «x ha cursado una asignatura de cálculo». La negación de esta sentencia es la proposición «No se cumple que haya un estudiante en la clase que haya cursado una asignatura de cálculo». Esto es equivalente a «Ninguno de los estudiantes de la clase ha cursado una asignatura de cálculo», que es justamente la cuantificación universal de la negación de la función proposicional original. Sería equivalente, en lenguaje poco común, a «Para todo estudiante se cumple que no ha cursado un curso de cálculo», o expresado con cuantificadores,

$\forall x\, \neg Q(x)$,

Este ejemplo ilustra la equivalencia

$$\neg \exists x\, Q(x) \equiv \forall x\, \neg Q(x).$$

Las negaciones de cuantificadores se resumen en la Tabla 2.

Observación: Cuando el dominio de un predicado $P(x)$ consiste en n elementos, donde n es un entero positivo, las reglas de la negación de sentencias cuantificadas son exactamente las mismas que la leyes de De Morgan descritas en la Sección 1.2. Esto es así porque $\neg \forall x\, P(x)$ es lo mismo que $\neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n))$, equivalente a $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n)$ por las leyes de De Morgan. Esto es lo mismo que $\exists x\, \neg P(x)$. De forma análoga, $\neg \exists x\, P(x)$ es lo mismo que $\neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n))$, equivalente a $\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n)$ por las leyes de De Morgan, lo que equivale a $\forall x\, \neg P(x)$.

Ilustramos la negación de las sentencias cuantificadas en los Ejemplos 15 y 16.

Tabla 2. Negación de cuantificadores.

Negación	*Fórmula equivalente*	*¿Cuándo es verdadera la negación?*	*¿Cuándo es falsa?*
$\neg \exists x\, P(x)$	$\forall x\, \neg P(x)$	Para cada x, $P(x)$ es falsa	Hay un x para el que $P(x)$ es verdadera
$\neg \forall x\, P(x)$	$\exists x\, \neg P(x)$	Hay un x para el que $P(x)$ es falsa	$P(x)$ es verdadera para cada x