como regla de inferencia. Esto muestra que la implicación original con una hipótesis construida mediante una disyunción de las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se puede demostrar demostrando individualmente cada una de las n implicaciones $p_i \to q$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tal argumento se denomina una **demostración por casos.** A veces para demostrar que una implicación $p \to q$ es verdadera, es conveniente usar una disyunción de proposiciones $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ en lugar de una sola proposición p como hipótesis de la implicación, donde p y $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ son equivalentes. Considera el Ejemplo 23.

Ejemplos adicionales

EJEMPLO 23 Utiliza una demostración por casos para ver que $|xy| = |x|\,|y|$, donde x e y son números reales. (Recuerda que $|x|$, el valor absoluto de x, es igual a x cuando $x \geq 0$ e igual a $-x$ cuando $x \leq 0$).

Solución: Sea p «x e y son números reales» y sea q «$|xy| = |x|\,|y|$». Ten en cuenta que p es equivalente a $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4$, donde p_1 es «$x \geq 0 \wedge y \geq 0$», p_2 es «$x \geq 0 \wedge y < 0$», p_3 es «$x < 0 \wedge y \geq 0$» y p_4 es «$x < 0 \wedge y < 0$». Por tanto, para demostrar $p \to q$, podemos ver que $p_1 \to q$, $p_2 \to q$, $p_3 \to q$ y $p_4 \to q$. (Hemos considerado estos cuatro casos porque son una elección apropiada para poder eliminar el signo del producto dentro de cada caso).

Vemos que $p_1 \to q$ porque $xy \geq 0$ cuando $x \geq 0$ e $y \geq 0$, por lo que $|xy| = xy = |x||y|$.

Para ver que $p_2 \to q$, ten en cuenta que si $x \geq 0$ e $y < 0$, entonces $xy \leq 0$, por lo que $|xy| = -xy = x(-y) = |x|\,|y|$. (Aquí, como $y < 0$, tenemos que $|y| = -y$).

Para ver que $p_3 \to q$, seguimos el mismo razonamiento que en el caso anterior, cambiando x por y, y viceversa.

Para ver que $p_4 \to q$, ten en cuenta que cuando $x < 0$ e $y < 0$ se sigue que $xy > 0$. Por tanto, $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$. Esto completa la demostración. ◀

DEMOSTRACIONES POR EQUIVALENCIA Para demostrar un teorema que viene dado por una bicondicional, esto es, una doble implicación de la forma $p \leftrightarrow q$, donde p y q son proposiciones, se puede usar la tautología

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)].$$

Esto es, la proposición «p si, y sólo si, q» se puede demostrar si se demuestran las dos implicaciones «si p, entonces q» y «si q, entonces p».

EJEMPLO 24 Demuestra el teorema «El entero n es impar si, y sólo si, n^2 es impar».

Solución: Este teorema tiene la forma «p si, y sólo si, q», donde p es «n es impar» y q es «n^2 es impar». Para demostrar este teorema, necesitamos mostrar que $p \to q$ y $q \to p$ son verdaderas.

Ejemplos adicionales

Ya hemos demostrado que $p \to q$ y que $q \to p$ son verdaderas (Ejemplos 14 y 19, respectivamente). Como $p \to q$ y $q \to p$ son verdaderas, hemos demostrado que el teorema se cumple. ◀

A veces, un teorema enuncia que varias proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son equivalentes. Tales teoremas se pueden reescribir como

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n,$$

lo cual declara que las n proposiciones tienen los mismos valores de verdad y, por tanto, que para todo i y j, $1 \leq i \leq j \leq n$, p_i y p_j son equivalentes. Una forma de demostrar estas equivalencias mutuas es emplear la tautología

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \ldots \wedge (p_n \to p_1)]$$

Esto indica que si las implicaciones $p_1 \to p_2$, $p_2 \to p_3$, ..., $p_n \to p_1$ se pueden mostrar que son verdaderas, entonces las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son todas equivalentes.

Esto es mucho más eficiente que probar $p_i \to p_j$ para $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Cuando demostramos que un grupo de sentencias son equivalentes, podemos establecer cualquier cadena de implicaciones que elijamos, ya que a través de la cadena es posible ir de una a otra cualesquiera. Por ejemplo, podemos ver que p_1, p_2 y p_3 son equivalentes mostrando que $p_1 \to p_3$, $p_3 \to p_2$ y $p_2 \to p_1$.