La sentencia se podría haber expresado también como

$$\exists w \forall a \exists f \, R(w, f, a),$$

donde $R(w, f, a)$ es «w ha viajado en el vuelo f de la línea aérea a». Aunque esta expresión es más compacta, oscurece un tanto las relaciones entre las variables. Por ello, la primera solución puede ser preferible. ◀

Las sentencias matemáticas expresadas en lenguaje natural se pueden formalizar en expresiones lógicas, como muestran los Ejemplos 8-10.

EJEMPLO 8 Formaliza la afirmación «La suma de dos enteros positivos es positiva» en una expresión lógica

Pasos adicionales

Solución: Para formalizar la afirmación, primero la reescribimos para evidenciar los cuantificadores implicados: «Para cada dos enteros positivos, la suma de estos enteros es positiva». Luego introducimos las variables x e y para obtener «Para todos los enteros positivos x e y, $x + y$ es positivo». Por consiguiente, podemos expresar esta afirmación como

$$\forall x \forall y \, ((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0)),$$

donde el dominio para ambas variables consiste en todos los enteros. ◀

EJEMPLO 9 Formaliza la afirmación «Todo número real, excepto el cero, tiene un inverso para el producto».

Ejemplos adicionales

Solución: Primero reescribimos la frase como «Para todo número real x, excepto el cero, x tiene un inverso para el producto». Esta sentencia se puede reescribir de nuevo como «Para todo número real x, si $x \neq 0$, entonces existe un número real y tal que $xy = 1$». Esto se puede expresar como

$$\forall x \, ((x \neq 0) \rightarrow \exists y \, (xy = 1)).$$ ◀

Un ejemplo que te puede resultar familiar es el concepto de límite, que es importante en Cálculo.

EJEMPLO 10 **(Se requiere Cálculo)** Enuncia la definición de límite usando cuantificadores.

Solución: Recordamos que la sentencia

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que para todo número real $\varepsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Esta definición de límite se puede escribir en términos de cuantificadores como

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \, (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon),$$

donde el dominio para las variables δ y ε consiste en todos los reales positivos y para x consiste en todos los reales.

Esta definición también se puede expresar como

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \, (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon),$$

donde el dominio para las variables ε y δ consiste en todos los números reales en vez de sólo los reales positivos. ◀

NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES ANIDADOS

Las sentencias con varios cuantificadores anidados se pueden negar aplicando sucesivamente las reglas de negación de las sentencias que contienen un único cuantificador. Esto se ilustra en los Ejemplos 11-13.