deberemos usar? Primero evalúa si una demostración directa parece eficaz. Desarrolla las definiciones dadas en las hipótesis. Luego comienza a razonar haciendo uso de ellas, junto con los axiomas y los teoremas disponibles. Si no parece que conduzca a ningún sitio, intenta lo mismo con una demostración indirecta. Recuerda que en una demostración indirecta se asume que la conclusión de la implicación es falsa y se utiliza una demostración directa para demostrar que se deduce que la hipótesis debe ser falsa. A veces, cuando no hay una forma obvia de conseguir una demostración directa, una demostración indirecta puede funcionar. Ilustramos esta estrategia en los Ejemplos 18 y 19.

Ejemplos adicionales

Antes de presentar los siguientes ejemplos, necesitamos una definición.

DEFINICIÓN 2 El número real r es *racional* si existen dos enteros p y q, $q \neq 0$, tales que $r = p/q$. Un número real que no es racional se llama *irracional*.

EJEMPLO 18 Demuestra que la suma de dos números racionales es un número racional.

Solución: Primero intentamos una demostración directa. Para empezar, supongamos que r y s son números racionales. De la definición de número racional se sigue que hay dos enteros p y q, $q \neq 0$, tales que $r = p/q$, y otros dos enteros t y u, $u \neq 0$, tales que $s = t/u$. ¿Se puede usar esta información para mostrar que $r + s$ es racional? El paso siguiente obvio es sumar $r = p/q$ y $s = t/u$ para obtener

$$r+s=\frac{p}{q}+\frac{t}{u}=\frac{pu+qt}{qu}.$$

Como $q \neq 0$ y $u \neq 0$, se sigue que $qu \neq 0$. Por consiguiente, hemos expresado $r + s$ como la razón de dos enteros, $pu + qt$ y qu, donde $qu \neq 0$. Esto significa que $r + s$ es racional. Nuestro intento por encontrar una demostración directa ha tenido éxito. ◀

EJEMPLO 19 Demuestra que si n es un entero y n^2 es impar, entonces n es impar.

Solución: Primero intentamos una demostración directa. Supongamos que n es un entero y n^2 es impar. Entonces, existe un entero k tal que $n^2 = 2k + 1$. ¿Se puede utilizar esta información para demostrar que n es impar? No parece haber un camino obvio para mostrar que n es impar porque las soluciones para n son de la forma $n = \pm\sqrt{2k+1}$, lo cual no es muy útil.

Como el intento de dar una demostración directa no parece tener éxito, intentamos la demostración indirecta. Tomamos como hipótesis que n no es impar. Como todo entero que no es impar es par, n es par. Esto implica que existe un k tal que $n = 2k$. Para demostrar el teorema, necesitamos mostrar que esta hipótesis implica la conclusión de que n^2 no es impar, es decir, de que n^2 es par. ¿Podemos usar la ecuación $n = 2k$ para llegar a esto? Elevando ambos miembros al cuadrado, obtenemos $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, lo que implica que n^2 es también par, ya que $n^2 = 2t$, donde $t = 2k^2$. Hemos tenido éxito en el intento de encontrar una demostración indirecta. ◀

DEMOSTRACIONES POR REDUCCIÓN AL ABSURDO Hay otras formas de demostración que no son ni la directa ni la indirecta. Presentamos ahora varias técnicas adicionales de demostración.

Supongamos que se puede encontrar una contradicción q tal que $\neg p \rightarrow q$ sea verdadera, esto es, $\neg p \rightarrow \mathbf{F}$ es verdadera. Entonces la proposición $\neg p$ tiene que ser falsa. Por tanto, p debe ser verdadera. Esta técnica se utiliza cuando podemos encontrar una contradicción, como por ejemplo $r \wedge \neg r$, de tal forma que es posible mostrar que la implicación $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ sea verdadera. Un argumento de este tipo se llama **demostración por reducción al absurdo.**

Vamos a dar ahora tres ejemplos de demostraciones por reducción al absurdo. El primero es un ejemplo de la aplicación del principio del palomar, una técnica de combinatoria que se verá en profundidad en la Sección 4.2.