de la conclusión. Se puede poner un contraejemplo con $n = -1$, para el cual $n^2 = 1$ es entero positivo, pero n es negativo ◀

EJEMPLO 33 ¿Dónde está el error en esta «demostración»?

> «Teorema»: Si n no es positivo, entonces n^2 no es positivo. (Esto es contrarrecíproco del «teorema» del Ejemplo 32).

«Demostración»: Supongamos que n no es positivo. Como la implicación «Si n es positivo, entonces n^2 es positivo» es verdadera, concluimos que n^2 no es positivo.

Solución: Sean $P(n)$ y $Q(n)$ del Ejemplo 32. Entonces nuestra hipótesis es $\neg P(n)$ y la sentencia «Si n es positivo, entonces n^2 es positivo» es la sentencia $\forall n\,(P(n) \rightarrow Q(n))$. De la hipótesis $\neg P(n)$ y la sentencia $\forall n\,(P(n) \rightarrow Q(n))$ no podemos concluir $\neg Q(n)$, porque no utilizamos una regla de inferencia correcta. De hecho, esto es un ejemplo de la falacia de negar la hipótesis. Puede darse un contraejemplo para $n = -1$, como en el Ejemplo 32. ◀

Un error común consistente en hacer suposiciones no garantizadas puede darse en las demostraciones por casos, en las cuales a veces no se consideran todos los casos. Esto se ilustra en el Ejemplo 34.

EJEMPLO 34 ¿Dónde está el error en esta «demostración»?

> «Teorema»: Si x es un número real, entonces x^2 es un real positivo.

«Demostración»: Sea p_1 «x es positivo», p_2 «x es negativo» y q «x^2 es positivo». Para mostrar que $p_1 \rightarrow q$, ten en cuenta que cuando x es positivo, x^2 es positivo, puesto que el producto de dos números positivos (x y x) reales es un real positivo. Para mostrar que $p_2 \rightarrow q$, se puede ver que cuando x es negativo, x^2 es positivo, ya que el producto de dos números negativos, x y x, es positivo. Esto completa la demostración.

Solución: El problema de la solución que hemos dado es que hemos olvidado el caso en que x sea igual a 0. Cuando $x = 0$, $x^2 = 0$, no es positivo, por lo que el teorema es falso. Si p es «x es un número real», entonces podemos demostrar resultados donde p es la hipótesis con tres casos p_1, p_2 y p_3, donde p_1 es «x es positivo», p_2 es «x es negativo» y p_3 es «$x = 0$», por la equivalencia $p \leftrightarrow p_1 \vee p_2 \vee p_3$. ◀

Finalmente, discutimos brevemente un tipo de error especialmente desafortunado. Muchos argumentos correctos se basan en una falacia llamada **petición de principio.** Esta falacia se presenta cuando uno o más pasos de una demostración se basan en la veracidad de la sentencia que se está demostrando. En otras palabras, esta falacia surge cuando se demuestra una sentencia usando en la demostración la misma sentencia o una sentencia equivalente a ella. Es por lo que esta falacia también se conoce como **razonamiento circular.**

EJEMPLO 35 ¿Es correcto el siguiente argumento? Supuestamente, demuestra que n es par siempre que n^2 sea par.

> Supongamos que n^2 es par. Entonces, $n^2 = 2k$ para algún entero k. Sea $n = 2l$ para algún entero l. Esto muestra que n es par.

Solución: Este argumento es incorrecto. La sentencia «Sea $n = 2l$ para algún entero l» se utiliza en la demostración. No se ha dado ningún argumento que demuestre que n se puede escribir como $2l$ para algún entero l. Esto es un razonamiento circular porque la sentencia es equivalente a la sentencia que se quiere demostrar, esto es, «n es par». Por supuesto, el resultado es correcto; sólo el método de demostración es incorrecto. ◀

Cometer errores en las demostraciones es parte del proceso de aprendizaje. Cuando cometes un fallo y otra persona lo encuentra, deberías analizar cuidadosamente por qué te equivocaste y