FORMALIZACIÓN DE SENTENCIAS EN EXPRESIONES LÓGICAS

En la Sección 1.3 vimos cómo se podían utilizar los cuantificadores para formalizar frases en expresiones lógicas. Sin embargo, evitamos sentencias cuya formalización requiriese el uso de cuantificadores anidados. Nos ocupamos ahora de estas sentencias.

EJEMPLO 5 Expresa la sentencia «Si una persona es del sexo femenino y tiene un hijo, esta persona es la madre de alguien» como una expresión lógica que involucre predicados, cuantificadores —cuyo dominio es el conjunto de todas las personas— y conectivos lógicos**.**

Solución: La frase anterior se puede expresar como «Para toda persona x, si la persona x es del sexo femenino y la persona x tiene un hijo, entonces existe una persona y tal que la persona x es madre de la persona y». Introducimos los predicados $F(x)$ para representar «x es del sexo femenino», $P(x)$ para representar «x tiene un hijo» y $M(x, y)$ para representar «x es madre de y». La frase original se puede expresar como

$$\forall x\, ((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y\, M(x, y)).$$

Podemos desplazar $\exists y$ hacia la izquierda, puesto que y no aparece en $F(x) \wedge P(x)$, para obtener una expresión equivalente

$$\forall x \exists y\, ((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow M(x, y)).$$ ◀

EJEMPLO 6 Expresa la sentencia «Cada persona tiene exactamente un amigo preferido» como una expresión lógica que involucre predicados, cuantificadores –cuyo dominio es el conjunto de todas las personas– y conectivos lógicos.

Solución: La frase anterior se puede expresar como «Para cada persona x, la persona x tiene exactamente un amigo preferido». Introduciendo el cuantificador universal, se ve que la sentencia es la misma que «$\forall x$ (la persona x tiene exactamente un amigo preferido)», donde el dominio consiste en toda la gente.

Decir que x tiene exactamente un amigo preferido significa que hay una persona y que es el mejor amigo de x, y además, que para toda persona z, si z no es la persona y, entonces z no es el mejor amigo de x. Cuando introducimos el predicado $B(x, y)$ como «y es el mejor amigo de x», la sentencia que afirma que x tiene exactamente un amigo preferido se puede representar como

$$\exists y\, (B(x, y) \wedge \forall z\, ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z))).$$

Consecuentemente, nuestra sentencia original se puede expresar como

$$\forall x \exists y\, (B(x, y) \wedge \forall z\, ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z))).$$

(Ten en cuenta que podemos escribir esta sentencia como $\forall x \exists ! y\, B(x, y)$, donde $\exists !$ es el «cuantificador de unicidad» definido en el Problema 48 de la Sección 1.3. De cualquier forma, el «cuantificador de unicidad» no es realmente un cuantificador; más bien es un recurso para expresar ciertas sentencias que se pueden expresar usando los cuantificadores $\forall$ y $\exists$. El «cuantificador de unicidad» $\exists !$ se puede considerar una macro). ◀

EJEMPLO 7 Emplea cuantificadores para expresar la sentencia «Hay una mujer que ha viajado en un vuelo en cada una de las líneas aéreas del mundo».

Solución: Sea $P(w, f)$ «w ha viajado en f» y $Q(f, a)$ «f es un vuelo de la línea aérea a». Podemos expresar la sentencia como

$$\exists w \forall a \exists f\, (P(w, f) \wedge Q(f, a)),$$

donde los dominios para w, f y a consisten en todas las mujeres del mundo, todos los vuelos y todas las líneas aéreas, respectivamente.