Solución: Dibujamos un rectángulo para indicar el conjunto universal U, el conjunto de las 28 letras del alfabeto. Dentro del rectángulo dibujamos un círculo para representar V. Dentro de este círculo indicamos los elementos de V con puntos (véase la Figura 1). ◀

Ahora presentaremos la notación que se utiliza para describir la pertenencia a un conjunto. Escribimos que $a \in A$ para denotar que a es un elemento del conjunto A. La notación $a \notin A$ expresa que a no es miembro del conjunto A. (Generalmente, se usan letras minúsculas para denotar elementos de conjuntos).

Hay un conjunto especial que no tiene elementos. Este conjunto se llama **conjunto vacío** o **conjunto nulo,** y se denota por $\emptyset$. El conjunto vacío también se puede denotar por { } (esto es, representamos el conjunto vacío por un par de llaves que encierran todos los elementos del conjunto). A menudo, un conjunto de elementos con determinadas propiedades resulta ser el conjunto vacío. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros positivos que son mayores que sus cuadrados es el conjunto vacío.

Un error que se comete a menudo consiste en confundir el conjunto vacío $\emptyset$ con el conjunto $\{\emptyset\}$, que es un **conjunto unitario,** esto es, un conjunto con un solo elemento. ¡El único elemento del conjunto $\{\emptyset\}$ es el conjunto vacío!

DEFINICIÓN 4 El conjunto A se dice que es subconjunto de B si, y sólo si, todo elemento de A es también un elemento de B. Usamos la notación $A \subseteq B$ para indicar que A es un subconjunto de B.

Vemos que $A \subseteq B$ si, y sólo si, la cuantificación

$$\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

es verdadera. Por ejemplo, el conjunto de enteros positivos impares menores que 10 es un subconjunto del conjunto de los enteros positivos menores que 10. El conjunto de todos los estudiantes de ingeniería informática de tu facultad es un subconjunto del conjunto de todos los estudiantes de tu universidad.

El Teorema 1 muestra que todo subconjunto no vacío de S tiene al menos dos subconjuntos, el conjunto vacío y el conjunto S, esto es, $\emptyset \subseteq S$ y $S \subseteq S$.

TEOREMA 1 Para cualquier conjunto S,

(i) $\emptyset \subseteq S$ y (ii) $S \subseteq S$.

Demostración: Demostraremos (i) y dejaremos la demostración de (ii) como ejercicio.

Sea S un conjunto. Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$ debemos demostrar que $\forall x\,(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ es verdadera. Como el conjunto vacío no contiene elementos, se sigue que $x \in \emptyset$ es siempre falsa. Por tanto, la implicación $x \in \emptyset \rightarrow x \in S$ es siempre verdadera, porque la hipótesis es siempre falsa (y una implicación con hipótesis falsa es verdadera). Así, $\forall x\,(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ es verdadera, lo que completa la demostración de (i). Observa que esto es un ejemplo de demostración vacua. ◀

Cuando queremos enfatizar que A es un subconjunto de B, pero que $A \neq B$, escribimos $A \subset B$ y decimos que A es un **subconjunto propio** de B. Los diagramas de Venn se pueden utilizar para

Enlaces

JOHN VENN (1834-1923) John Venn nació en una familia del Londres suburbano que destacaba por su filantropía. Estudió en Londres y obtuvo su graduación en matemáticas en el Caius College, Cambridge, en 1857. Posteriormente fue elegido para un puesto en este College, donde estuvo hasta su muerte. Se ordenó clérigo en 1859, y tras un breve período de trabajo religioso, volvió a Cambridge, donde se dedicó a la ética. Además de por su trabajo matemático, Venn se interesó por la historia y escribió mucho acerca de su College y su familia.

El libro de Venn *Lógica simbólica* clarifica ideas presentadas originalmente por Boole. En este libro presenta un desarrollo sistemático de un método que utiliza figuras geométricas, conocido como *diagramas de Venn*. Hoy día estos diagramas son una herramienta primordial para analizar argumentos lógicos e ilustrar relaciones entre conjuntos. Adicionalmente a su trabajo sobre lógica simbólica, Venn hizo contribuciones a la teoría de probabilidades descritas en su libro sobre esta materia, texto ampliamente utilizado.