EJEMPLO 20 Muestra que al menos cuatro de cada 22 días deben caer en el mismo día de la semana.

Ejemplos adicionales

Solución: Sea p la proposición «Al menos cuatro de los 22 días elegidos caen en el mismo día de la semana». Supongamos que $\neg p$ es verdadera. Entonces, como mucho, tres de estos 22 días corresponden al mismo día de la semana. Como hay siete días de la semana, esto implica que como mucho se podrían haber elegido 21 días, puesto que tres son los que, a lo más, pueden ser un día particular de la semana. Esto es una contradicción. ◀

EJEMPLO 21 Muestra que $\sqrt{2}$ es irracional dando una demostración por reducción al absurdo.

Solución: Sea p la proposición «$\sqrt{2}$ es irracional». Supongamos que $\neg p$ es verdadera. Entonces, $\sqrt{2}$ es racional. Mostraremos que esto conduce a una contradicción. Bajo la suposición de que $\sqrt{2}$ es racional, existirán dos enteros a y b de tal forma que $\sqrt{2} = a/b$, donde a y b no tienen factores comunes (de tal forma que no hay una fracción equivalente a a/b con números más pequeños). Como $\sqrt{2} = a/b$, cuando ambos miembros de la ecuación se elevan al cuadrado, se sigue que

$$2 = a^2/b^2.$$

Por tanto,

$$2b^2 = a^2.$$

Esto significa que a^2 es par, por lo que a es par. Además, como a es par, $a = 2c$ para algún entero c. Así,

$$2b^2 = 4c^2,$$

por lo que

$$b^2 = 2c^2.$$

Esto significa que b^2 es par. Por tanto, b debe ser par también.

Se ha mostrado que $\neg p$ implica que $\sqrt{2} = a/b$, donde a y b no tienen factores comunes y 2 divide a a y a b. Esto es una contradicción, puesto que se ve que $\neg p$ implica tanto r como $\neg r$, donde r es la sentencia «a y b son enteros sin factores comunes». Por tanto, $\neg p$ es falsa, es decir, «$\sqrt{2}$ es irracional» es verdadera. ◀

Una demostración indirecta de una implicación se puede reescribir como una demostración por reducción al absurdo. En una demostración indirecta mostramos que $p \to q$ es verdadera utilizando una demostración directa para ver que $\neg q \to \neg p$ es verdadera. Esto es, en una prueba indirecta de $p \to q$ suponemos que $\neg q$ es verdadera para mostrar que $\neg p$ debe serlo. Para reescribir una demostración indirecta de $p \to q$ como una demostración por reducción al absurdo, suponemos que tanto p como $\neg q$ son verdaderas. Entonces usamos los pasos de la prueba directa $\neg q \to \neg p$ para mostrar que $\neg p$ debe ser verdadera también. Esto conduce a la contradicción $p \wedge \neg p$, completando la demostración por reducción al absurdo. El Ejemplo 22 ilustra cómo una demostración de una implicación se puede reescribir como una demostración por reducción al absurdo.

EJEMPLO 22 Da una demostración por reducción al absurdo del teorema «Si $3n + 2$ es impar, entonces n es impar».

Solución: Asumimos que $3n + 2$ es impar y que n no es impar, es decir, n es par. Siguiendo los mismos pasos que en la solución del Ejemplo 15 (una demostración indirecta de este teorema), podemos mostrar que si n es par, entonces $3n + 2$ es par. Esto contradice la suposición de que $3n + 2$ es impar, completando la demostración. ◀

DEMOSTRACIÓN POR CASOS Para demostrar una implicación de la forma

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q$$

se puede utilizar la tautología

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q] \leftrightarrow [(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)]$$