EJEMPLO 14 Da una demostración directa del teorema «Si n es un entero impar, entonces n^2 es un entero impar».

Solución: Suponemos que la hipótesis de esta implicación es verdadera, es decir, que n es impar. Entonces, $n = 2k + 1$, donde k es un entero. Se sigue que $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) +1$. Por tanto, n^2 es un número impar (es una unidad mayor que el doble de un entero). ◀

Ejemplos adicionales

DEMOSTRACIONES INDIRECTAS Como la implicación $p \to q$ es equivalente a su contrarrecíproca, $\neg q \to \neg p$, la implicación $p \to q$ se puede demostrar viendo que su contrarrecíproca es verdadera. La contrarrecíproca se suele demostrar directamente, pero se puede utilizar cualquier otra técnica. Un argumento de este tipo se llama **demostración indirecta.**

EJEMPLO 15 Da una demostración directa del teorema «Si $3n + 2$ es impar, entonces n es impar».

Solución: Supongamos que la conclusión de esta implicación es falsa, es decir, que n es par. Entonces, $n = 2k$ para algún entero k. Se sigue que $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, por lo que $3n + 2$ es par (por ser múltiplo de 2). Como la negación de la conclusión implica que la hipótesis es falsa, la implicación original es verdadera. ◀

DEMOSTRACIONES VACUAS Y TRIVIALES Supongamos que la hipótesis p de una implicación $p \to q$ es falsa. Entonces, la implicación $p \to q$ es verdadera, porque la sentencia tiene la forma **F** $\to$ **V** o **F** $\to$ **F**, y por tanto es verdadera. Consecuentemente, si se puede demostrar que p es falsa, entonces se puede dar una demostración, llamada **demostración vacua,** de la implicación $p \to q$. Las demostraciones vacuas se utilizan para establecer casos especiales de teoremas que enuncian que una implicación es verdadera para todos los enteros positivos [esto es, un teorema del tipo $\forall n\, P(n)$ donde $P(n)$ es una función proposicional]. Las técnicas de demostración para teoremas de esta clase se discutirán en la Sección 3.3.

EJEMPLO 16 Muestra que la proposición $P(0)$ es verdadera, donde $P(n)$ es la función proposicional «Si $n > 1$ es impar, entonces $n^2 > n$».

Solución: Ten en cuenta que la proposición $P(0)$ es la implicación «Si $0 > 1$, entonces $0^2 > 0$». Como la hipótesis $0 > 1$ es falsa, la implicación $P(0)$ es automáticamente verdadera. ◀

Observación: El hecho de que la conclusión de esta implicación, $0^2 > 0$, sea falsa es irrelevante para el valor de verdad de esta implicación, porque está garantizado que una implicación con una hipótesis falsa es verdadera.

Supongamos que la conclusión q de una implicación $p \to q$ es verdadera. Entonces, $p \to q$ es verdadera, puesto que la sentencia tiene la forma **V** $\to$ **V** o **F** $\to$ **V,** lo cual es cierto. Por tanto, si se puede ver que q es verdadera, entonces se puede dar una demostración, llamada **demostración trivial,** de $p \to q$. Las demostraciones triviales son importantes para casos especiales de teoremas (véase la discusión sobre la técnica de demostración por casos) y en inducción matemática, que veremos en la Sección 3.3.

EJEMPLO 17 Sea $P(n)$ «Si a y b son enteros positivos, $a \geq b$, entonces $a^n \geq b^n$». Muestra que la proposición $P(0)$ es verdadera.

Solución: La proposición $P(0)$ es «Si $a \geq b$, entonces $a^0 \geq b^0$». Como $a^0 = b^0 = 1$, la conclusión de $P(0)$ es verdadera. Por tanto, $P(0)$ es verdadera. Éste es un ejemplo de una demostración trivial. Nota que la hipótesis, que es la sentencia «$a \geq b$», no se necesitó en la demostración. ◀

UN POCO DE ESTRATEGIA PARA HACER DEMOSTRACIONES Hemos descrito tanto las demostraciones directas como indirectas y hemos proporcionado ejemplos de cómo se utilizan; sin embargo, cuando nos enfrentamos a un teorema que debemos demostrar, ¿qué método