tra en los Ejemplos 14-16. En cada uno de estos ejemplos el dominio de las variables consiste en todos los números reales.

EJEMPLO 14 Sea $P(x, y)$ la sentencia «$x + y = y + x$». ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x \forall y\, P(x, y)$?

Solución: La cuantificación

$$\forall x \forall y\, P(x, y)$$

denota la proposición

«Para todo número real x y todo número real y, $x + y = y + x$».

Como $P(x, y)$ es verdadera para todos los números reales x e y, la proposición $\forall x \forall y\, P(x, y)$ es verdadera. ◀

EJEMPLO 15 Sea $Q(x, y)$ la sentencia «$x + y = 0$». ¿Cuál es el valor de verdad de las cuantificaciones $\exists y \forall x\, Q(x, y)$ y $\forall x \exists y\, Q(x, y)$?

Solución: La cuantificación

$$\exists y \forall x\, Q(x, y)$$

denota la proposición

«Hay un número real y tal que para todo número real x, $Q(x,y)$».

Para cada y elegido, hay un único valor de x para el cual $x + y = 0$. Como no hay un número real y tal que $x + y = 0$ para todos los números reales x, la sentencia $\exists y \forall x\, Q(x, y)$ es falsa.

La cuantificación

$$\forall x \exists y\, Q(x, y)$$

denota la proposición

«Para todo número real x hay un número real y tal que $Q(x, y)$».

Dado un número real x, se puede hallar un número real y tal que $x + y = 0$; a saber, $y = -x$. Por tanto, la sentencia $\forall x \exists y\, Q(x, y)$ es verdadera. ◀

El Ejemplo 15 ilustra que el orden en que aparecen los cuantificadores es importante. Las sentencias $\exists y \forall x\, P(x, y)$ y $\forall x \exists y\, P(x, y)$ no son lógicamente equivalentes. La sentencia $\exists y \forall x\, P(x, y)$ es verdadera si, y sólo si, hay un y que hace $P(x, y)$ verdadera para todo x. Por tanto, para que esta sentencia sea verdadera, debe haber un valor particular de y para el cual $P(x, y)$ es verdadera, sin importar el valor que se elija de x. Por otra parte, $\forall x \exists y\, P(x, y)$ es verdadera, si, y sólo si, para todo valor de x hay un valor de y para el cual $P(x, y)$ es verdadera. Por tanto, para que esta sentencia sea verdadera, no importa la elección de x, debe haber un valor de y (posiblemente dependiente del valor que se escoja para x) para el cual $P(x, y)$ es verdadera. En otras palabras, en el segundo caso y puede depender de x, mientras que en el primer caso y es una constante independiente de x.

De estas observaciones se sigue que si $\exists y \forall x\, P(x, y)$ es verdadera, entonces $\forall x \exists y\, P(x, y)$ debe ser también verdadera. Sin embargo, si $\forall x \exists y\, P(x, y)$ es verdadera, no es necesario que $\exists y \forall x\, P(x, y)$ sea también verdadera. (Véanse los Problemas complementarios 14 y 16 al final del capítulo).

PENSANDO EN LOS CUANTIFICADORES COMO BUCLES Al trabajar con cuantificadores de más de una variable es útil a veces pensar en términos de bucles anidados. (Por supuesto, si hay un número infinito de elementos en el dominio de alguna variable, no podemos cerrar un bucle para todos los valores. A pesar de ello, esta forma de pensar sigue siendo útil). Por ejemplo, para ver si $\forall x \forall y\, P(x, y)$ es verdadera, recorremos en un bucle todas las variables x, y para cada x recorremos en un segundo bucle todos valores de y. Si encontramos que $P(x, y)$ es verdadera para todos los valores de x e y, hemos determinado que $\forall x \forall y\, P(x, y)$ es verdadera. Si, por el contrario, encontramos algún valor de x para el cual hay un valor de y tal que $P(x, y)$ resulta ser falsa, hemos demostrado que $\forall x \forall y\, P(x, y)$ es falsa.