Solución: Sean $C(x)$ «x es de esta clase», $B(x)$ «x ha leído el libro» y $P(x)$ «x ha aprobado el primer examen». Las premisas son $\exists x\,(C(x) \wedge \neg B(x))$ y $\forall x\,(C(x) \rightarrow P(x))$. La conclusión es $\exists x\,(P(x) \wedge \neg B(x))$. Los pasos siguientes establecen la conclusión a partir de las premisas.

Paso	**Razonamiento**
1. $\exists x\,(C(x) \wedge \neg B(x))$	Premisa
2. $C(a) \wedge \neg B(a)$	Particularización existencial de (1)
3. $C(a)$	Simplificación de (2)
4. $\forall x\,(C(x) \rightarrow P(x))$.	Premisa
5. $C(a) \rightarrow P(a)$	Particularización universal de (4)
6. $P(a)$	*Modus ponens* usando (3) y (5)
7. $\neg B(a)$	Simplificación de (2)
8. $P(a) \wedge \neg B(a)$	Conjunción de (6) y (7)
9. $\exists x\,(P(x) \wedge \neg B(x))$.	Generalización existencial de (8) ◀

Observación: Los argumentos matemáticos a menudo incluyen pasos donde se utilizan reglas de inferencia tanto para proposiciones como para cuantificadores. Por ejemplo, la particularización universal y el *modus ponens* se usan a menudo juntos. Cuando estas reglas de inferencia se combinan, la hipótesis $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ y $P(c)$, donde c es del dominio, muestra que la conclusión $Q(c)$ es verdadera.

Ejemplos adicionales

Observación: Muchos teoremas en matemática discreta enuncian que una propiedad se cumple para todos los elementos de un conjunto en concreto, como el conjunto de los números enteros o los reales. Aunque el enunciado preciso de tales teoremas requiere incluir el cuantificador universal, por convención se omite. Por ejemplo, la sentencia «Si $x > y$, donde x e y son números reales positivos, entonces $x^2 > y^2$» significa realmente «Para todos los reales positivos x e y, si $x > y$, entonces $x^2 > y^2$». Además, cuando se demuestran teoremas de este tipo, se utiliza a menudo la ley de generalización universal sin mencionarlo explícitamente. El primer paso de la demostración consiste en elegir un elemento genérico del dominio. Pasos posteriores muestran que este elemento cumple la propiedad en cuestión. La generalización universal implica que el teorema se cumple para todos los miembros del dominio.

En las siguientes explicaciones adoptaremos las convenciones usuales y no mencionaremos explícitamente el uso de la cuantificación y la generalización universales. No obstante, debería entenderse siempre cuándo se aplica esta regla de inferencia de modo implícito.

MÉTODOS PARA DEMOSTRAR TEOREMAS

Evaluación

Demostrar teoremas es a veces muy difícil, por lo que necesitamos todas las herramientas disponibles que nos puedan ayudar. Presentamos ahora una batería de métodos diferentes de demostración. Estos métodos deberían convertirse en parte de tu repertorio para demostrar teoremas. Dado que muchos teoremas son implicaciones, las técnicas para demostrar implicaciones son importantes. Recuerda que $p \rightarrow q$ es verdadera a no ser que p sea verdadera y q falsa. Ten en cuenta que cuando se demuestra la sentencia $p \rightarrow q$, sólo hace falta demostrar que q es verdadera si p lo es; por lo general, *no* se demuestra que q es verdadera. En lo que sigue presentaremos las técnicas más comunes para demostrar implicaciones.

DEMOSTRACIONES DIRECTAS La implicación $p \rightarrow q$ se puede demostrar viendo que si p es verdadera, entonces q debe ser verdadera también. Esto pone de manifiesto que la combinación p verdadera y q falsa no ocurre nunca. Una demostración de este tipo se llama **demostración directa.** Para llevar a cabo este tipo de demostración, se supone que p es verdadera y se utilizan reglas de inferencia y teoremas ya demostrados para demostrar que q debe ser también verdadera.

Ejemplos adicionales

Antes de dar un ejemplo de demostración directa, necesitamos una definición.

DEFINICIÓN 1 El entero n es *par* si existe un entero k tal que $n = 2k$ y es *impar* si existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. (Observa que un número entero es bien par o bien impar).