

Los fundamentos: lógica y demostración, conjuntos y funciones

En este capítulo se repasan los fundamentos de la matemática discreta. Se cubren tres importantes temas: lógica, conjuntos y funciones. Las reglas de la lógica especifican el significado de los enunciados matemáticos. Por ejemplo, estas reglas nos ayudan a entender y razonar enunciados como «Existe un entero que no es la suma de dos cuadrados» o «Para todo entero positivo n , la suma de enteros positivos que no sobrepasan n es $n(n+1)/2$ ». La lógica es la base de todo razonamiento matemático, y tiene aplicaciones prácticas en el diseño de equipos informáticos, la especificación de sistemas, la inteligencia artificial, la programación computacional, los lenguajes de programación y en otras áreas de ciencias de la computación, así como en otros muchos campos de estudio.

Para entender las matemáticas debemos entender qué es lo que constituye un argumento matemático correcto, es decir, una demostración. Además, para aprender matemáticas, una persona necesita construir activamente argumentos matemáticos, no limitarse a leer una exposición. En este capítulo explicamos cómo completar un argumento matemático correcto y presentamos herramientas para construir estos argumentos. Las demostraciones no son importantes sólo en matemáticas, sino en muchas partes de las ciencias de la computación, entre las que se incluyen verificación de programas, análisis de resultados de algoritmos y sistemas de seguridad. Se han construido sistemas de razonamiento automatizado que permiten a los ordenadores construir sus propias demostraciones.

Gran parte de la matemática discreta está dedicada al estudio de estructuras discretas, las cuales se usan para representar objetos discretos. Muchas estructuras discretas importantes se construyen utilizando conjuntos, que son colecciones de objetos. Entre las estructuras discretas construidas mediante conjuntos están las combinaciones, o colecciones desordenadas de objetos que se usan mucho en recuento; relaciones, o conjuntos de pares ordenados que representan dependencias entre objetos; grafos, que consisten en conjuntos de vértices y aristas que conectan vértices, y máquinas de estado finito, que se usan para modelar sistemas informáticos.

El concepto de función es extremadamente importante en matemática discreta. Una función asigna a cada elemento de un conjunto exactamente un elemento de otro conjunto. Estructuras útiles tales como sucesiones y cadenas son tipos especiales de funciones. Se usan para representar la complejidad computacional de los algoritmos, para estudiar el tamaño de los conjuntos, contar objetos de diferentes tipos y en una infinidad de casos más.

1.1 Lógica

INTRODUCCIÓN

Las reglas de la lógica le dan un significado preciso a los enunciados matemáticos o sentencias matemáticas. Estas reglas se usan para distinguir entre argumentos válidos y no válidos. Considerando que uno de los principales objetivos de este libro es enseñar al lector cómo entender y construir argumentos matemáticos correctos, empezamos nuestro estudio de la matemática discreta con una introducción a la lógica.

Además de su importancia en el razonamiento matemático, la lógica tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación. Las reglas de la lógica se usan en el diseño de circuitos de ordenador, la construcción de programas informáticos, la verificación de que un programa está bien construido y en muchas otras aplicaciones. Discutiremos cada una de ellas en los capítulos siguientes.