Se dice que una fórmula es **satisfacible** si existe alguna asignación de valores de verdad para las variables de la proposición que la hacen verdadera.

**54.** ¿Cuáles de estas fórmulas son satisfacibles?

**a)** $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$

**b)** $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$

**c)** $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$

**55.** Explica cómo puede usarse un algoritmo que determine si una fórmula es o no satisfacible para determinar si una fórmula es o no una tautología. (*Indicación:* Considera $\neg p$, donde $p$ es la proposición que se examina).

# 1.3 Predicados y cuantificadores

## INTRODUCCIÓN

A menudo, en matemáticas y programas de ordenador se encuentran enunciados en los que se incluyen variables, como

«$x > 3$», «$x = y + 3$» y «$x + y = z$».

Estos enunciados no son ni verdaderos ni falsos si no se especifican los valores de las variables. En esta sección discutiremos las maneras en que las proposiciones pueden producir tales enunciados.

El enunciado «$x$ es mayor que 3» tiene dos partes. La primera parte, la variable $x$, es el sujeto del enunciado. La segunda parte —el **predicado**, «es mayor que 3»— hace referencia a una propiedad que puede tener el sujeto. Podemos denotar el enunciado «$x$ es mayor que 3» por $P(x)$, donde $P$ denota el predicado «es mayor que 3» y $x$ es la variable. La sentencia $P(x)$ se dice también que es el valor de la **función proposicional** $P$ en $x$. Una vez que se le haya asignado un valor a la variable $x$, la sentencia $P(x)$ se convierte en una proposición y tiene un valor de verdad. Considera el Ejemplo 1.

**EJEMPLO 1** $P(x)$ denota el enunciado «$x > 3$». ¿Cuáles son los valores de verdad de $P(4)$ y $P(2)$?

*Solución:* Obtenemos la sentencia $P(4)$ haciendo $x = 4$ en el enunciado «$x > 3$». Por tanto, $P(4)$, que es el enunciado «$4 > 3$», es verdadero. Sin embargo, $P(2)$, el enunciado «$2 > 3$», es falso. ◀

Podemos también tener sentencias que incluyan más de una variable. Por ejemplo, considera el enunciado «$x = y + 3$». Podemos denotar esta sentencia por $Q(x, y)$, donde $x$ e $y$ son variables y $Q$ es el predicado. Cuando se asignan valores a $x$ e $y$, la sentencia $Q(x, y)$ tiene una tabla de verdad.

**EJEMPLO 2** $Q(x, y)$ denota el enunciado «$x = y + 3$». ¿Cuáles son los valores de verdad de las proposiciones $Q(1, 2)$ y $Q(3, 0)$?

Ejemplos adicionales

*Solución:* Para obtener $Q(1, 2)$ hacemos $x = 1$ e $y = 2$ en la sentencia $Q(x, y)$. Por tanto, $Q(1, 2)$ es el enunciado «$1 = 2 + 3$», que es falso. La sentencia $Q(3, 0)$ es el enunciado «$3 = 0 + 3$», que es verdadera. ◀

De forma similar, podemos denotar como $R(x, y, z)$ el enunciado «$x + y = z$». Cuando se asignen valores a las variables $x$, $y$ y $z$, esta sentencia tendrá una tabla de verdad.

**EJEMPLO 3** ¿Cuáles son los valores de verdad de las proposiciones $R(1, 2, 3)$ y $R(0, 0, 1)$?

*Solución:* La proposición $R(1, 2, 3)$ se obtiene haciendo $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$ en la sentencia $R(x, y, z)$. Vemos que $R(1, 2, 3)$ es el enunciado «$1 + 2 = 3$», que es verdadero. También se ve que $R(0, 0, 1)$, el enunciado «$0 + 0 = 1$», es falso. ◀