EJEMPLO 11 Expresa la negación de la sentencia $\forall x \exists y\ (xy = 1)$ de tal forma que ninguna negación preceda al cuantificador.

Ejemplos adicionales

Solución: Aplicando sucesivamente las reglas para negar sentencias cuantificadas dadas en la Tabla 2 de la Sección 1.3, podemos mover la negación en $\neg\forall x \exists y\ (xy = 1)$ dentro de todos los cuantificadores. Encontramos que $\neg\forall x \exists y\ (xy = 1)$ es equivalente a $\exists x \neg\exists y\ (xy = 1)$, que es equivalente a $\exists x \forall y\ \neg(xy = 1)$. Como $\neg(xy = 1)$ se puede expresar más simplemente como $xy \neq 1$, concluimos que nuestra sentencia negada se puede expresar como $\exists x \forall y\ (xy \neq 1)$. ◀

EJEMPLO 12 Usa cuantificadores para expresar la sentencia «No existe ninguna mujer que haya viajado en un vuelo de cada una de las líneas aéreas del mundo».

Solución: La afirmación anterior es la negación de la sentencia «Hay una mujer que ha viajado en un vuelo de cada línea aérea del mundo» del Ejemplo 7. Por el Ejemplo 7, nuestra sentencia se puede expresar como $\neg\exists w \forall a \exists f\ (P(w, f) \wedge (Q(f, a))$, donde $P(w, f)$ es «w ha viajado en f» y $Q(f, a)$ es «f es un vuelo de la línea aérea a». Aplicando sucesivamente las reglas de la negación de sentencias cuantificadas de la Tabla 2 de la Sección 1.3 para desplazar la negación dentro de cada cuantificador y aplicando las leyes de De Morgan en el último paso, encontramos que nuestra sentencia es equivalente a cada una de las de la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned}\forall w \neg\forall a \exists f\,(P(w, f) \wedge Q(f, a)) &\equiv \forall w \exists a \neg\exists f\,(P(w, f) \wedge Q(f, a))\\ &\equiv \forall w \exists a \forall f\,\neg(P(w, f) \wedge Q(f, a))\\ &\equiv \forall w \exists a \forall f\,(\neg P(w, f) \vee \neg Q(f, a)).\end{aligned}$$

Esta última sentencia afirma que «Para toda mujer hay una línea aérea tal que, para todo vuelo, esta mujer no ha viajado en ese vuelo o ese vuelo no es de esa línea aérea». ◀

EJEMPLO 13 Utiliza cuantificadores y predicados para expresar el hecho de que el $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

Solución: Decir que el $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe significa que para todos los números reales L, $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$. Usando el Ejemplo 10, la sentencia $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ se puede expresar como

$$\neg\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Aplicando sucesivamente las reglas de la negación de expresiones cuantificadas, construimos esta secuencia de sentencias equivalentes

$$\begin{aligned}&\neg\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\,(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)\\ &\quad\equiv \exists \varepsilon > 0\ \neg\exists \delta > 0\ \forall x\,(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)\\ &\quad\equiv \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \neg\forall x\,(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)\\ &\quad\equiv \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ \neg(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)\\ &\quad\equiv \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\,(0 < |x - a| < \delta\ \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon).\end{aligned}$$

Usamos la equivalencia $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ en el último paso.

Debido a que la sentencia $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe, significa que para todos los números reales L, $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$, la sentencia se puede expresar como

$$\forall L \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon).$$

Esta última sentencia afirma que para cada número real L hay un número real $\varepsilon > 0$ tal que para todo número real $\delta > 0$ existe un número real x tal que $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. ◀

EL ORDEN DE LOS CUANTIFICADORES

Ejemplos adicionales

Muchas sentencias matemáticas usan cuantificaciones múltiples de funciones proposicionales con más de una variable. Es fundamental tener en cuenta que el orden de los cuantificadores es importante, a no ser que todos los cuantificadores sean universales o existenciales. Este hecho se ilus-