EJEMPLO 1 Supongamos que el dominio de las variables reales x e y consiste en todos los números reales. La sentencia

Pasos adicionales

$$\forall x \forall y\ (x + y = y + x)$$

afirma que $x + y = y + x$ para todo par de números reales x e y. Es la ley conmutativa para la suma de números reales. De la misma forma, la sentencia

$$\forall x \exists y\ (x + y = 0)$$

afirma que para cada número real x hay un real y tal que $x + y = 0$. Esto declara que todo número real tiene un inverso para la suma. Análogamente, la sentencia

Ejemplos adicionales

$$\forall x \forall y \forall z\ (x + (y + z) = (x + y) + z)$$

es la ley asociativa para la suma de números reales. ◀

EJEMPLO 2 Traduce a lenguaje natural la sentencia

$$\forall x \forall y\ ((x > 0) \ \wedge \ (y < 0) \to (xy < 0)),$$

donde el dominio para ambas variables consiste en los números reales.

Solución: Esta sentencia afirma que para todo par de números reales x e y, si $x > 0$ e $y < 0$, entonces $xy < 0$. Esto es, que para los pares de números reales x e y, si x es positivo e y es negativo, entonces xy es negativo. Esto se puede afirmar más sucintamente como «El producto de un número real positivo y un número real negativo es un número real negativo». ◀

Las expresiones con cuantificadores anidados que formulan sentencias en lenguaje natural pueden ser muy complicadas. El primer paso para traducir esas expresiones es escribir qué expresan los cuantificadores y predicados de la expresión. El siguiente paso es expresar el significado en una frase sencilla. Este proceso se ilustra en los Ejemplos 3 y 4.

EJEMPLO 3 Traduce la sentencia

$$\forall x\ (C(x) \ \vee \ \exists y\ (C(y) \ \wedge \ F(x, y)))$$

a lenguaje natural, donde $C(x)$ es «x tiene un ordenador», $F(x, y)$ es «x e y son amigos» y el dominio tanto para x como y consiste en todos los estudiantes de tu facultad.

Solución: La sentencia afirma que para cada estudiante x de tu facultad, x tiene un ordenador o hay un estudiante y tal que y tiene un ordenador y x e y son amigos. En otras palabras, todo estudiante de tu facultad tiene un ordenador o un amigo que tiene uno. ◀

EJEMPLO 4 Traduce la sentencia

$$\exists x \forall y \forall z\ ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \to \neg F(y, z))$$

a lenguaje natural, donde $F(a, b)$ significa que a y b son amigos. El dominio para x, y y z consiste en todos los estudiantes de tu facultad.

Solución: Primero examinamos la expresión $(F(x , y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \to \neg F(y, z)$. Esta expresión dice que si los estudiantes x e y son amigos, los estudiantes x y z son amigos y, además, y y z no son la misma persona, entonces y y z no son amigos. Se sigue que la sentencia original, triplemente cuantificada, dice que hay un estudiante x tal que para todos los estudiantes y y todos los estudiantes z que son diferentes de y, si x e y son amigos y x y z también son amigos, entonces y y z no son amigos. En otras palabras, hay un estudiante para el cual se cumple que sus amigos no son amigos entre sí. ◀