DEFINICIÓN 1 La *cuantificación universal* de $P(x)$ es la proposición

«$P(x)$ es verdadera para todos los valores x del dominio».

La notación

$\forall x\, P(x)$

denota la cuantificación universal de $P(x)$. Aquí llamaremos al símbolo $\forall$ el **cuantificador universal**. La proposición $\forall x\, P(x)$ se lee como

«para todo x $P(x)$», «para cada x $P(x)$» o «para cualquier x $P(x)$».

Ilustraremos el uso del cuantificador universal en los Ejemplos 5-10.

EJEMPLO 5 Sea $P(x)$ el enunciado «$x + 1 > x$». ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x\, P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Ejemplos adicionales

Solución: Como $P(x)$ es verdadera para todo número real x, la cuantificación

$\forall x\, P(x)$

es verdadera ◀

EJEMPLO 6 Sea $Q(x)$ el enunciado «$x < 2$». ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x\, Q(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Solución: $Q(x)$ no es verdadera para todo número real x. Por ejemplo, $Q(3)$ es falsa. Por tanto,

$\forall x\, Q(x)$

es falsa ◀

Cuando todos los elementos del dominio se pueden enumerar —escribiéndolos, por ejemplo, como $x_1, x_2, ..., x_n$—, se sigue que la cuantificación universal $\forall x\, P(x)$ es lo mismo que la conjunción

$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$,

puesto que esta conjunción es verdadera si, y sólo si, $P(x_1), P(x_2), ..., P(x_n)$ son todas verdaderas.

EJEMPLO 7 ¿Cuál es el valor de verdad de $\forall x\, P(x)$, donde $P(x)$ es el enunciado «$x^2 < 10$» y el dominio consiste en los enteros positivos menores o iguales que 4?

Solución: La sentencia $\forall x\, P(x)$ es lo mismo que la conjunción

$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$,

puesto que el dominio consiste en los enteros 1, 2, 3 y 4. Como $P(4)$, la sentencia «$4^2 < 10$», es falsa, se sigue que $\forall x\, P(x)$ es falsa ◀

EJEMPLO 8 ¿Qué significa la sentencia $\forall x\, T(x)$ si $T(x)$ es el enunciado «x tiene un padre y una madre» y el dominio consiste en toda la gente?

Solución: La sentencia $\forall x\, P(x)$ significa que toda persona x tiene un padre y una madre. La sentencia se puede expresar en lenguaje natural como «Toda persona tiene dos padres». La sentencia es verdadera (excepto para seres clonados, si los hay). ◀

EJEMPLO 9 ¿Cuál es el valor de verdad de $\forall x\, (x^2 \geq x)$ si el dominio consiste en todos los números reales y cuál es el valor de verdad si el dominio son todos los enteros?