

Tabla 1. Cuantificadores de dos variables.

<i>Sentencia</i>	<i>¿Cuándo es verdadera?</i>	<i>¿Cuándo es falsa?</i>
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	$P(x, y)$ es verdadera para todo par x, y	Hay un par x, y para el cual $P(x, y)$ es falsa
$\forall x \exists y P(x, y)$	Para todo x hay un y para el cual $P(x, y)$ es verdadera	Hay un x tal que $P(x, y)$ es falsa para para todo y
$\exists x \forall y P(x, y)$	Hay un x para el cual $P(x, y)$ es verdadera para todo y	Para todo x hay un y para el cual $P(x, y)$ es falsa
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	Hay un par x, y para el cual $P(x, y)$ es verdadera	$P(x, y)$ es falsa para todo par x, y

De forma similar, para determinar si $\forall x \exists y P(x, y)$ es verdadera, recorremos en un bucle todos los valores de x . Para cada x , recorremos en un bucle los valores de y hasta que encontramos un y para el cual $P(x, y)$ es verdadera. Si para todos los x encontramos tal valor de y , entonces $\forall x \exists y P(x, y)$ es verdadera; si para algún x no encontramos un valor de y con esa propiedad, entonces $\forall x \exists y P(x, y)$ es falsa.

Para ver si $\exists x \forall y P(x, y)$ es verdadera, recorremos los valores de x en un bucle hasta que encontramos un x para el cual $P(x, y)$ es siempre verdadera cuando recorremos en un bucle todos los valores de y . Una vez encontrado tal valor de x , sabemos que $\exists x \forall y P(x, y)$ es verdadera. Si no encontramos nunca un x como ése, entonces sabremos que $\exists x \forall y P(x, y)$ es falsa.

Finalmente, para saber si $\exists x \exists y P(x, y)$ es verdadera, recorremos en un bucle los valores de x , y para cada valor de x recorremos los valores de y hasta que encontremos un x para el cual haya un y que verifique que $P(x, y)$ sea verdadera.

La Tabla 1 resume los significados de las diferentes cuantificaciones posibles con dos variables.

También son comunes las cuantificaciones de más de dos variables, como ilustra el Ejemplo 16.

EJEMPLO 16 Sea $Q(x, y, z)$ la sentencia « $x + y = z$ ». ¿Cuáles son los valores de verdad de las sentencias $\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$ y $\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z)$?

Solución: Supongamos que asignamos valores a x e y . Entonces, existe un número real z tal que $x + y = z$. Por consiguiente, la cuantificación

$$\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$$

que es la sentencia

«Para todos los números reales x e y hay un número real z tal que $x + y = z$ »,

es verdadera. El orden de la cuantificación aquí importa, ya que

$$\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z),$$

es la sentencia

«Hay un número real z tal que para todos los números reales x e y se cumple que $x + y = z$ »,

la cual es falsa, ya que ningún valor de z satisface la ecuación $x + y = z$ para todos los valores de x e y . ◀