MAC法

基礎方程式

連続の式

ある面積素dSを考えその法線ベクトルを$d\vec{n}$とする。この面積素から単位時間に流出する流体の体積は$dS\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)$と表せる。よってある閉じた立体を考えるとその立体から流出する流体の質量は

$$\int_S \rho\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)dS$$

と表せる。発散定理によりこれは

$$\int_\nu \nabla\cdot\rho\vec{V}d\nu$$

に等しい。一方、この質量は

$$-\int_\nu \frac{\partial\rho}{\partial t}d\nu$$

と表すこともできる。よって

$$\int_\nu\left(\nabla\cdot\rho\vec{V}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)d\nu=0$$

が導けた。流体が非圧縮性（ρが一定）という仮定のもと、

$$\nabla\cdot\vec{V}=0$$

2D :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

3D :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

運動方程式

中心が原点にある微小直方体

$$dxdydz$$

について運動方程式を書く。原点近くで平面$z=0$に平行で、x軸正向きに単位面積あたりに働く力をσ_{zx}と書くことにする。

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix}$$

とする。微小な直方体なので

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$$

が成り立つ。テイラー展開することで、この直方体の平面$z=\frac{dz}{2}$部分に単位面積あたりに働くx軸正向きの力を

$$\left(\sigma_{zx}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy$$

と書ける。このことを用いて微小直方体の運動方程式は

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}dxdydz=\rho\vec{g}dxdydz+\nabla\cdot\sigma dxdydz$$

となる。σを測定可能な数値で表すことを考える。変形速度テンソル

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix}$$

を

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^T\right)$$

と書き下して

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^T\right)$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^T\right)$$

とおくと、$\boldsymbol{E}$は歪み速度テンソル、$\boldsymbol{F}$は回転速度テンソルとなる。$\boldsymbol{F}$は回転するだけで全体的な位置を変化させるものではないので$\boldsymbol{E}$がσを決定していると考えられる。
$\boldsymbol{E}$の各要素e_{ij}を用いて

$$\sigma_{ij} = h_{ij}(e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{33})$$

と書く。テイラー展開して

$$\sigma_{ij} = h_{ij}(0, 0, \cdots, 0) + \sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3}\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial e_{ab}}\right)_{e_{ab}=0} e_{ab}$$

ここで、$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$というのは歪みがないということなので、

$$h_{ij}(0, 0, \cdots, 0) = h\left(\boldsymbol{0}\right) = -p\delta_{ij}$$

と書くことができる。pは原点に働く流体の静水圧である。またマジックを使うと（等方性という概念？）

$$\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial e_{ab}}\right)_{e_{ab}=0} = \lambda\delta_{ij}\delta ab + \mu(\delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ib}\delta_{ja})$$

と書ける。整理すると

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\left(\nabla \cdot \vec{V}\right)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

となる。連続の式と

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

は一定という過程のもと、

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu[\nabla^2\vec{V}]$$

が得られる。

2D :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=g_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=g_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\end{cases}$$

3D :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=g_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=g_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=g_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\end{cases}$$

エネルギー方程式

ある直方体$dxdydz$を考え、この系に関するエネルギー収支の式を立てる。

- 系の単位時間あたりのエネルギーの変化は単位質量あたりの内部エネルギーEと運動エネルギーKを用いて

  $$\rho\left(\frac{DE}{Dt}+\frac{DK}{Dt}\right)dxdydz$$

  と表せる。また、$K=\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}$であることを用いて

  $$\frac{DK}{Dt}=\vec{V}\cdot\frac{D\vec{V}}{Dt}$$

  である。
- 系が単位時間あたりに得る熱は単位時間、単位面積あたりの熱の移動量である熱流束$\vec{q}$を用いて、

  $$-\left(\nabla\cdot\vec{q}\right)dxdydz$$

と書ける。

- 系に単位時間あたりになされる仕事は

$$\left(\nabla\cdot\left(\sigma\cdot\vec{V}\right)+\rho\left(\vec{V}\cdot\vec{g}\right)\right)dxdydz$$

$$\rho C_p\frac{D\theta}{Dt}=\kappa\nabla^2\theta$$

2D :

$$\rho C_p\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=\kappa\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)$$

3D :

$$\rho C_p\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}+w\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)=\kappa\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)$$