今井研2週目

観測量の期待値とその計算法

- 観測量はケットに作用するエルミート演算子を使って表現する。観測の結果、状態がその演算子の固有ベクトルに定まり、観測量はその固有ベクトルに対応する固有値である。
- Aがn個のqubitに対するエルミート演算子であるとする。これらのqubitの状態を、Aの固有ベクトル基底$\{|\phi_i\rangle\}$を用いて

  $$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \gamma_i |\phi_i\rangle$$

  と表すことにする。固有ベクトル基底に対応するAの固有値を$\{a_i\}$とおいておくと、期待値は

  $$\langle\psi| A |\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i |\gamma_i|^2$$

  となる。

グラフ状態

グラフ$G=(V,E)$を考える。頂点iと辺で結ばれている頂点の集合を$neighbor(i)$と表すことにする。スタビライザー演算子

$$G_i = X_i \otimes \bigotimes_{j \in negibor(i)} Z_j$$

を考える。
この時、Gのスタビライザー状態$|\psi_G\rangle$を

$$G_1 |\psi_G\rangle = |\psi_G\rangle$$
$$G_2 |\psi_G\rangle = |\psi_G\rangle$$
$$\vdots$$
$$G_n |\psi_G\rangle = |\psi_G\rangle$$

を満たすベクトルとして定義する。

Baccariの論文

N個のqubitをN人で観測する。i番目の観測者はi番目のqubitについて$A_0^{(i)}$と$A_1^{(i)}$の二通りの観測をする。これらの固有値（観測結果）は± 1である。
ここで例えば、A_0^1, A_1^2, A_0^3の観測値の積の期待値を$\langle A_0^1 A_1^2 A_0^3 \rangle$と書くことにする。量子的には、

$$\langle A_0^1 A_1^2 A_0^3 \rangle = \langle \psi | \, A_0^1 \otimes A_1^2 \otimes A_0^3 \, | \psi \rangle$$

となる。ψは省略するが適当なものを想定しておく。

> ベルの不等式は
>
> $$\langle A_0^1 A_0^2 \rangle - \langle A_1^1 A_0^2 \rangle + \langle A_0^1 A_1^2 \rangle + \langle A_1^1 A_1^2 \rangle \le 2$$
>
> というように書ける。
>
> $$\begin{aligned} A_0^1 &= [X+Z]/\sqrt{2} \\ A_1^1 &= [X-Z]/\sqrt{2} \\ A_0^2 &= X \\ A_1^2 &= Z \end{aligned}$$
>
> とすれば、固有値が± 1という条件も満たしている。$|\psi\rangle = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta, -\sin\theta)^T$（2点を結んだグラフのスタビライザー状態）での期待値を計算すると
>
> $$\begin{aligned} \langle A_0^1 A_0^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta \\ \langle A_1^1 A_0^2 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta \\ \langle A_0^1 A_1^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta \\ \langle A_1^1 A_1^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta \end{aligned}$$
>
> となる。
>
> $$\begin{aligned} &\langle A_0^1 A_0^2 \rangle - \langle A_1^1 A_0^2 \rangle + \langle A_0^1 A_1^2 \rangle + \langle A_1^1 A_1^2 \rangle \\ =&\langle A_0^1 A_0^2 \rangle - \langle A_1^1 A_0^2 \rangle + \langle A_0^1 A_1^2 \rangle + \langle A_1^1 A_1^2 \rangle \end{aligned}$$

> ベルの不等式を破ることがある。

グラフ$G=(V,E)$を考える。ここで、適当に頂点に番号を与えて、

$$\begin{aligned} neighbor(1) &= \max_i neighbor(i) \\ &= n_{max} \end{aligned}$$

としておく。また、スタビライザー演算子G_iは全て演算子A_b^iの組み合わせで表現できるようにする。

> 具体的には、
>
> $$X_i = \begin{cases} [A_0^1 + A_1^1]/\sqrt{2} & (i=1) \\ A_0^i & (otherwise) \end{cases}$$
>
> $$Z_i = \begin{cases} [A_0^1 - A_1^1]/\sqrt{2} & (i=1) \\ A_1^i & (otherwise) \end{cases}$$
>
> と書けるようにA_b^iを定義する。

$$\begin{aligned} I_G :=& \sqrt{2} n_{max} \langle G_1 \rangle + \sqrt{2} \sum_{i \in neighbor(1)} \langle G_i \rangle + \sum_{i \notin neighbor(1) \cup \{1\}} \langle G_i \rangle \\ =& \sqrt{2} n_{max} \left\langle X_0 \prod_{i \in neighbor(1)} Z_i \right\rangle \\ & + \sqrt{2} \sum_{i \in neighbor(1)} \left\langle Z_0 X_i \prod_{j \in neighbor(i) \setminus \{1\}} Z_j \right\rangle \\ & + \sum_{i \notin neighbor(1) \cup \{1\}} \left\langle X_i \prod_{j \in neighbor(i)} Z_j \right\rangle \\ =& n_{max} \left\langle \left(A_0^1 + A_1^1\right) \prod_{i \in neighbor(1)} A_1^i \right\rangle \\ & + \sum_{i \in neighbor(1)} \left\langle \left(A_0^1 - A_1^1\right) A_0^i \prod_{j \in neighbor(i) \setminus \{1\}} A_1^j \right\rangle \\ & + \sum_{i \notin neighbor(1) \cup \{1\}} \left\langle A_0^i \prod_{j \in neighbor(i)} A_1^j \right\rangle \\ \leq & \beta_G \end{aligned}$$

という不等式を考える。

- Claasical bound

$$\left\langle \left(A_0^1 + A_1^1\right) \prod_{i \in neighbor(1)} A_1^i \right\rangle \leq \langle A_0^1 + A_1^1 \rangle$$

  と、

$$\left\langle \left(A_0^1 - A_1^1\right) A_0^i \prod_{j \in neighbor(i) \setminus \{1\}} A_1^j \right\rangle \leq \langle A_0^1 - A_1^1 \rangle$$

  が成り立つ。また、

$$\langle A_0^1 + A_1^1 \rangle + \langle A_0^1 - A_1^1 \rangle \leq 2$$

  が成り立つので、

$$\beta_G = N + n_{max} - 1$$

  が成り立つ。
- Quantum bound
  $\langle G \rangle \leq 1$より

$$\beta_G = N + (2\sqrt{2} - 1) n_{max} - 1$$

  を導ける。

Classical boundを超える結果を出したい！

Bo Yangさんの論文

65-qubitと27-qubitの量子コンピュータを使った。

1. path graph stateの作り方
   65-qubit、27-qubitのコンピュータから工夫してそれぞれ57-qubit、21-qubitのpathを作る。作り方は、①まず$|+\rangle^{\otimes N}$を用意して、②pathに含まれない辺にCZ-gateを適用し、③残りの辺にCZ-gateを適用する。
2. star graph stateの作り方
   65-qubit、27-qubitのコンピュータから工夫してそれぞれ39-qubit、27-qubitのpathを作る。star graphはGHZ状態とほぼ同じで、GHZ状態に対してstarの頂点以外にアダマールゲートを適用すればstar graphが得られる。GHZ状態は①ある

qubitにアダマールゲートを適用し、②このqubitと残りのqubitにCX-gateを適用すれば良い。

3. connection graph of quantum device
   65-qubit、27-qubitのコンピュータのqubitを全てそのまま使う。

のそれぞれついてベルの不等式が成り立つかどうか実験した。