

今井研2週目

観測量の期待値とその計算法

- 観測量はケットに作用するエルミート演算子を使って表現する。観測の結果、状態がその演算子の固有ベクトルに定まり、観測量はその固有ベクトルに対応する固有値である。
- A が n 個のqubitに対するエルミート演算子であるとする。これらのqubitの状態を、 A の固有ベクトル基底 $\{|\phi_i\rangle\}$ を用いて

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \gamma_i |\phi_i\rangle$$

と表すことにする。固有ベクトル基底に対応する A の固有値を $\{a_i\}$ とおいておくと、期待値は

$$\langle\psi| A |\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i |\gamma_i|^2$$

となる。

グラフ状態

グラフ $G = (V, E)$ を考える。頂点 i と辺で結ばれている頂点の集合を $neighbor(i)$ と表すことにする。スタビライザー演算子

$$G_i = X_i \otimes \bigotimes_{j \in neighbor(i)} Z_j$$

を考える。

この時、 G のスタビライザー状態 $|\psi_G\rangle$ を

$$\begin{aligned} G_1 |\psi_G\rangle &= |\psi_G\rangle \\ G_2 |\psi_G\rangle &= |\psi_G\rangle \\ &\vdots \\ G_n |\psi_G\rangle &= |\psi_G\rangle \end{aligned}$$

を満たすベクトルとして定義する。

Baccariの論文

N 個のqubitを N 人で観測する。 i 番目の観測者は i 番目のqubitについて $A_0^{(i)}$ と $A_1^{(i)}$ の二通りの観測をする。これらの固有値（観測結果）は ± 1 である。

ここで例えば、 A_0^1, A_1^2, A_0^3 の観測値の積の期待値を $\langle A_0^1 A_1^2 A_0^3 \rangle$ と書くことにする。量子的には、

$$\langle A_0^1 A_1^2 A_0^3 \rangle = \langle \psi | A_0^1 \otimes A_1^2 \otimes A_0^3 | \psi \rangle$$

となる。 ψ は省略するが適当なものを想定しておく。

ベルの不等式は

$$\langle A_0^1 A_0^2 \rangle - \langle A_1^1 A_0^2 \rangle + \langle A_0^1 A_1^2 \rangle + \langle A_1^1 A_1^2 \rangle \leq 2$$

というように書ける。

$$A_0^1 = [X + Z]/\sqrt{2}$$

$$A_1^1 = [X - Z]/\sqrt{2}$$

$$A_0^2 = X$$

$$A_1^2 = Z$$

とすれば、固有値が ± 1 という条件も満たしている。 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 1, -1)^T$ （2点を結んだグラフのスタビライザー状態）での期待値を計算すると

$$\langle A_0^1 A_0^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle A_1^1 A_0^2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle A_0^1 A_1^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle A_1^1 A_1^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。この時、

$$\langle A_0^1 A_0^2 \rangle - \langle A_1^1 A_0^2 \rangle + \langle A_0^1 A_1^2 \rangle + \langle A_1^1 A_1^2 \rangle = 2\sqrt{2}$$

となってベルの不等式を破る。

グラフ $G = (V, E)$ を考える。ここで、適当に頂点に番号を与えて、

$$\begin{aligned} neighbor(1) &= \max_i neighbor(i) \\ &= n_{max} \end{aligned}$$

としておく。また、スタビライザー演算子 G_i は全て演算子 A_b^i の組み合わせで表現できるようにする。

具体的には、

$$\begin{aligned} X_i &= \begin{cases} [A_0^1 + A_1^1]/\sqrt{2} & (i = 1) \\ A_0^i & (otherwise) \end{cases} \\ Z_i &= \begin{cases} [A_0^1 - A_1^1]/\sqrt{2} & (i = 1) \\ A_1^i & (otherwise) \end{cases} \end{aligned}$$

と書けるように A_b^i を定義する。

$$\begin{aligned} I_G &:= \sqrt{2} n_{max} \langle G_1 \rangle + \sqrt{2} \sum_{i \in neighbor(1)} \langle G_i \rangle + \sum_{i \notin neighbor(1) \cup \{1\}} \langle G_i \rangle \\ &= \sqrt{2} n_{max} \left\langle X_0 \prod_{i \in neighbor(1)} Z_i \right\rangle \\ &\quad + \sqrt{2} \sum_{i \in neighbor(1)} \left\langle Z_0 X_i \prod_{j \in neighbor(i) \setminus \{1\}} Z_j \right\rangle \\ &\quad + \sum_{i \notin neighbor(1) \cup \{1\}} \left\langle X_i \prod_{j \in neighbor(i)} Z_j \right\rangle \\ &= n_{max} \left\langle (A_0^1 + A_1^1) \prod_{i \in neighbor(1)} A_1^i \right\rangle \\ &\quad + \sum_{i \in neighbor(1)} \left\langle (A_0^1 - A_1^1) A_0^i \prod_{j \in neighbor(i) \setminus \{1\}} A_1^j \right\rangle \\ &\quad + \sum_{i \notin neighbor(1) \cup \{1\}} \left\langle A_0^i \prod_{j \in neighbor(i)} A_1^j \right\rangle \\ &\leq \beta_G \end{aligned}$$

という不等式を考える。

- Claasical bound

$$\left\langle (A_0^1 + A_1^1) \prod_{i \in \text{neighbor}(1)} A_1^i \right\rangle \leq \langle A_0^1 + A_1^1 \rangle$$

と、

$$\left\langle (A_0^1 - A_1^1) A_0^i \prod_{j \in \text{neighbor}(i) \setminus \{1\}} A_1^j \right\rangle \leq \langle A_0^1 - A_1^1 \rangle$$

が成り立つ。また、

$$\langle A_0^1 + A_1^1 \rangle + \langle A_0^1 - A_1^1 \rangle \leq 2$$

が成り立つので、

$$\beta_G = N + n_{max} - 1$$

が成り立つ。

- Quantum bound

$\langle G \rangle \leq 1$ より

$$\beta_G = N + (2\sqrt{2} - 1)n_{max} - 1$$

を導ける。

Classical boundを超える結果を出したい！

Bo Yangさんの論文

65-qubitと27-qubitの量子コンピュータを使った。

1. path graph stateの作り方

65-qubit、27-qubitのコンピュータから工夫してそれぞれ57-qubit、21-qubitのpathを作る。作り方は、①まず $|+\rangle^{\otimes N}$ を用意して、②1個飛ばしでCZ-gateを適用し、③残りの辺にCZ-gateを適用する。

2. star graph stateの作り方

65-qubit、27-qubitのコンピュータから工夫してそれぞれ39-qubit、27-qubitのpathを作る。star graphはGHZ状態とほぼ同じで、GHZ状態に対してstarの頂点以外にアダマールゲートを適用すればstar graphが得られる。GHZ状態は①あるqubitにアダマールゲートを適用し、②このqubitと残りのqubitにCX-gateを適用すれば良い。

3. connection graph of quantum device

65-qubit、27-qubitのコンピュータのqubitを全てそのまま使う。

のそれぞれについてベルの不等式が成り立つかどうか実験した。