今井研2週目

観測量の期待値とその計算法

- 観測量はケットに作用するエルミート演算子を使って表現する。観測の結果、状態がその演算子の固有ベクトルであるとき、観測量はその固有ベクトルに対応する固有値である。
- Aがn個のqubitに対するエルミート演算子であるとする。これらのqubitの状態を、Aの固有ベクトル基底$\{|\phi_i\rangle\}$を用いて

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \gamma_i |\phi_i\rangle$$

と表すことにする。固有ベクトル基底に対応するAの固有値を$\{a_i\}$とおいておくと、期待値は

$$\langle\psi| A |\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i |\gamma_i|^2$$

となる。

グラフ状態

グラフ$G=(V,E)$を考える。頂点iと辺で結ばれている頂点の集合を$neighbor(i)$と表すことにする。スタビライザー演算子

$$G_i = X_i \otimes \bigotimes_{j \in negibor(i)} Z_j$$

を考える。
この時、Gのスタビライザー状態$|\psi_G\rangle$を

$$G_1 |\psi_G\rangle = |\psi_G\rangle$$
$$G_2 |\psi_G\rangle = |\psi_G\rangle$$
$$\vdots$$
$$G_n |\psi_G\rangle = |\psi_G\rangle$$

を満たすベクトルとして定義する。

Baccariの論文

N個のqubitをN人で分担して観測する。i番目の観測者が担当のi番目のqubitを観測するとき、「0であるか」に相当する演算子を$A_0^{(i)}$、「1であるか」に相当する演算子を$A_1^{(i)}$とおいておく。これらの固有値（観測結果）は± 1でなければならない。

> 1, 2, 3の3人で3つのqubit1, 2, 3を観測するとき、qubit1が0, qubit2が1, qubit3が0である期待値は$\langle\psi|\, A_0^1 \otimes A_1^2 \otimes A_0^3 \,|\psi\rangle$と計算できる。

簡単に書くために、

$$\langle A_0^1 A_1^2 A_0^3 \rangle = \langle\psi|\, A_0^1 \otimes A_1^2 \otimes A_0^3 \,|\psi\rangle$$

というような記法を導入する。ψは省略するが適当なものを想定しておく。

> ベルの不等式は
>
> $$\langle A_0^1 A_0^2 \rangle + \langle A_1^1 A_0^2 \rangle + \langle A_0^1 A_1^2 \rangle - \langle A_1^1 A_1^2 \rangle \leq 2$$
>
> というように書ける。
>
> $$\begin{aligned} A_0^1 &= [X+Z]/\sqrt{2} \\ A_1^1 &= [X-Z]/\sqrt{2}, \\ A_0^2 &= X \\ A_1^2 &= Z \end{aligned}$$
>
> なので、固有値が± 1という条件も満たしている。

グラフ$G=(V,E)$を考える。ここで、適当に頂点に番号を与えて、

$$\begin{aligned} neighbor(1) &= \max_i neighbor(i) \\ &= n_{max} \end{aligned}$$

としておく。また、スタビライザー演算子G_iは全て演算子A_b^iの組み合わせで表現できるようにする。

> 具体的には、

> $$X_i = \begin{cases} A_0^1 + A_1^1 & (i=1) \\ A_0^i & (otherwise) \end{cases}$$
>
> $$Z_i = \begin{cases} A_0^1 - A_1^1 & (i=1) \\ A_1^i & (otherwise) \end{cases}$$
>
> と書けるようにA_b^iを定義する。

$$\begin{aligned} I_G := & n_{max} \left\langle \left(A_0^1 + A_1^1\right) \prod_{i \in neighbor(1)} A_1^i \right\rangle \\ & + \sum_{i \in neighbor(1)} \left\langle \left(A_0^1 - A_1^1\right) A_0^i \prod_{j \in neighbor(i) \setminus \{1\}} A_1^j \right\rangle \\ & + \sum_{i \notin neighbor(1) \cup \{1\}} \left\langle A_0^i \prod_{j \in neighbor(i)} A_1^j \right\rangle \\ \leq & \beta_G \end{aligned}$$

という不等式を考えていく。

Claasical bound

Quantum bound