令和2年度　修士論文概要

k-極大独立集合検証問題の分散計算複雑性	片山・金研究室	佐藤 僚祐
	No. 31414050	Ryosuke Sato

1 はじめに

分散グラフアルゴリズムとは, 計算機を頂点, 辺を通信リンクとみなしてネットワークをモデル化したグラフ上において, そのネットワーク自身を入力として様々な問題を解く枠組みである. 分散アルゴリズムにおける代表的なモデルのひとつとして *CONGEST* モデルが存在する.*CONGEST* モデルにおいて, 各ノードは同期して同じアルゴリズムを実行して入力グラフ上の問題を解決する. 各ノードは各ラウンドで (i)b ビットのメッセージを隣接ノードに送信 (ii) 隣接ノードからメッセージを受信 (iii) 内部計算の 3 つの動作をする. 標準的には,$b = \log n$ を想定する. *CONGEST* モデルにおいて, ある 1 つのノードにグラフ全体のトポロジの情報を集め, そのノード上で逐次アルゴリズムを実行するという素朴なアプローチから自明に $O(n^2)$ ラウンドの上界を得ることができる.*CONGEST* モデルにおける下界の証明では, 下界をこの n^2 にどれだけ近づけることができるかに興味がもたれている.

ネットワーク上の最大独立集合を発見する最大独立集合問題に対する数多くの分散グラフアルゴリズムが研究されている. 各頂点が隣接していない頂点部分集合を独立集合といい, 最大独立集合とは頂点数が最も多い独立集合である. 大きなサイズの独立集合は経済学, 計算生物学, 符号理論, 実験計画法など様々な分野への応用に用いられる [1] が, そもそも最大独立集合問題は NP 完全であり, 頂点数 n に対して n の多項式時間で解くことは, その近似を含めて絶望的であるとされている. 内部計算に指数時間かかることを許した *CONGEST* モデルの下でラウンド数を n の多項式でおさえるような最大独立集合の複雑性としては, 頂点の最大次数を Δ としたとき, 最大重み付き独立集合の $(1+\varepsilon)\cdot\Delta$-近似を高確率で見つけるアルゴリズムに対する $(\frac{poly(\log\log n)}{\varepsilon})$ ラウンドの上界 [1] や, 最大独立集合の $(\frac{1}{2}+\varepsilon)$-近似を見つけるアルゴリズムに対する $\Omega(\frac{n}{(\log n)^3})$ ラウンドの下界, $(\frac{3}{4}+\varepsilon)$-近似を見つけるアルゴリズムに対する $\Omega(\frac{n^2}{(\log n)^3})$ ラウンドの下界 [2] が知られている.

しかし, 内部計算に指数時間かかることを許した下での分散グラフアルゴリズムの複雑性の議論の妥当性にはやや疑問が残る. そこで今回, 我々は最大独立集合の局所最適解である k-極大独立集合 (k-Maximal Independet Set, k-MIS) について考える. 独立集合のうち,k 個の頂点をその集合から取り除いて独立集合を維持したまま $k+1$ 個以上の頂点を追加することができないとき, その独立集合を k-MIS といい, ネットワーク上の k-MIS を発見する k-MIS 問題は集中型アルゴリズムによって $O(n^{k+2})$ 時間で解くことができる. これは,$k = O(1)$ のとき n の多項式時間になる.

今回は k-MIS の検証問題 (verification) に着目し, その複雑性について議論を行う. k-MIS 検証問題とはネットワーク上に独立集合が与えられ, それが k-MIS かどうかを判定する問題である. k-MIS 問題に対する素朴な局所探索アルゴリズムは, ある 1 つの独立集合からスタートし, (I) 現在の状態が k-MIS であるか判定する. (II)YES であればそれを出力,NO であれば解を更新, というフェーズを繰り返す. k-MIS 検証問題は上記の (I) に対応しており,k-MIS 問題と関連付いた問題ととらえることができる.

今回, 我々は極大独立集合検証問題に対する 3 つの複雑性の結果を証明する. 最初に,1-MIS 検証問題が $O(1)$ ラウンドで解けることを証明する. 次に,2-MIS 検証問題に対する $\Omega(\sqrt{n})$ ラウンドの下界を証明する. 最後に,3-MIS 検証問題に対する $\Omega(n)$ ラウンドの下界を証明する. この下界を一般の k に拡張できないかを現在検討中である. 後半の 2 つの証明のアイデアは二者間通信複雑性からの帰着に基づいている.

2 諸定義

CONGEST モデル

本稿で考える *CONGEST* モデルは, 単純無向グラフ連結グラフ $G = (V, E)$ により表現される. ここで V はノードの集合で $|V| = n$ とし,E は通信リンクの集合である.*CONGEST* モデルでは計算機はラウンドに従って同期して動作するものとする. 1 ラウンド内で, 隣接頂点へのメッセージ送信, 隣接頂点からのメッセージ受信, 内部計算を行う. 各辺は単位ラウンドあたり $O(\log n)$ ビットを双方向に伝送可能であり, 各ノードは同一ラウンドに異なる接続辺に異なるメッセージを送信可能である. また, 各ノードには $O(\log n)$ ビットの自然数値による ID が付与されており, 自身の隣接ノードすべての ID を既知であるとする. 各ノードはグラフのトポロジに関する事前知識を持たないものとする.

二者間通信複雑性

二者間通信複雑性の枠組みでは, アリスとボブの二人のプレイヤーがそれぞれ n ビットの 0/1 のデータ列で構成されるプライベートな入力 X および Y を持っているとする. プレイヤーの目標は, 結合関数 $f(X,Y)$ を計算することであり, 複雑性の尺度として $f(X,Y)$ を計算するためにアリスとボブが通信によって交換する必要のあるビット数が用いられる.

この枠組みにおける重要な問題として, 交叉判定問題 (set-disjointness) がある. この問題では, アリスとボブはそれぞれ $X \in \{0,1\}^n$ と $Y \in \{0,1\}^n$ を入力として持ち, 目的は $DISJ_n(X,Y) := \bigwedge_{i=1}^{n} X_i \wedge Y_i$ を計算することである.n ビットの交叉判定問題を解くために, アリスとボブは通信によって $\Omega(n)$ ビット交換する必要があることが知られており, こ

の事実を用いて最小全域木や最小カット, 部分グラフ検出や近似最大クリークといったさまざまな問題に対する下界の証明がされている [2] .

k-極大独立集合

定義 2.1 I が k-極大独立集合 $\Leftrightarrow$
$\neg(\exists I' \subseteq I |I'| = k, \exists S \subseteq V |S| \geq k+1, (I \setminus I') \cap S$ が独立集合$)$

3 結果

aaa

4 今後の課題

bbb

参考文献

[1] Ken-ichi Kawarabayashi, Seri Khoury, Aaron Schild, and Gregory Schwartzman. Improved distributed approximation to maximum independent set. *arXiv preprint arXiv:1906.11524*, 2019.

[2] Yuval Efron, Ofer Grossman, and Seri Khoury. Beyond alice and bob: Improved inapproximability for maximum independent set in congest. *arXiv preprint arXiv:2003.07427*, 2020.