令和2年度　修士論文概要		
k-極大独立集合検証問題の分散計算複雑性	片山・金研究室	佐藤 僚祐
	No. 31414050	Ryosuke Sato

1　はじめに

分散グラフアルゴリズムとは, 計算機を頂点, 辺を通信リンクとみなしてネットワークをモデル化したグラフ上において, そのネットワーク自身を入力として様々な問題を解く枠組みである. 分散アルゴリズムにおける代表的なモデルのひとつとして *CONGEST* モデルが存在する.*CONGEST* モデルにおいて, 各ノードは同期して同じアルゴリズムを実行して入力グラフ上の問題を解決する. 各ノードは各ラウンドで (i)b ビットのメッセージを近傍に送信し, (ii) 近傍からメッセージを受信し,(iii) 内部計算を行う. 一般に,$b = \log n$ を想定する.

組み合わせ最適化問題の一つである最大独立集合の分散アルゴリズムに対する多くの研究がされている. 各頂点が隣接していない頂点部分集合を独立集合といい, 最大独立集合とは重みなしグラフにおいては頂点数が最も多い独立集合, 重み付きグラフにおいては合計重みが最も大きい独立集合である. 最大独立集合の複雑性としては, 頂点の最大次数を Δ としたとき, 最大重み付き独立集合の $(1+\varepsilon)\cdot\Delta$-近似を高確率で見つけるアルゴリズムに対する $(\frac{poly(\log\log n)}{\varepsilon})$ ラウンドの上限や, 最大独立集合の $(\frac{1}{2}+\varepsilon)$-近似を見つけるアルゴリズムに対する $\Omega(\frac{n}{(\log n)^3})$ ラウンドの下限が知られている.

大きなサイズの独立集合は経済学, 計算生物学, 符号理論, 実験計画法など様々な分野への応用に用いられるが, そもそも最大独立集合問題は NP 完全であり, 頂点数 n に対して n の多項式時間で解くことは, その近似を含めて絶望的であるとされている. 分散化によって近似アルゴリズムの複雑性の議論を行っても,(iii) の内部計算に指数時間必要とするためこの議論の妥当性にはやや疑問が残る. そこで今回, 我々は最大独立集合の局所最適解である k-極大独立集合 (k-Maximal Independet Set, k-MIS) について考える. 独立集合のうち,k 個の頂点をその集合から取り除いて独立集合を維持したまま $k+1$ 個以上の頂点を追加することができないとき, その独立集合を k-MISといい,k-MIS 問題は集中型アルゴリズムによって多項式時間で解くことができる.

今回は k-MIS の検証問題 (verification) に着目し, その複雑性について議論を行った.k-MIS 問題に対する一般的なアプローチは, ある 1 つの独立集合からスタートし,(I) 現在の状態が k-MIS であるか判定する.(II)k-MIS であればそれを出力, そうでなければ状態を更新. というフェーズを含む.k-MIS 検証問題とはネットワーク上に独立集合が与えられ, それが k-MIS かどうかを判定する問題であり,(I) に対応しているため,k-MIS 問題と関連付けることができる.

今回, 我々は 3 つの極大独立集合検証問題に対する複雑性の結果を提案する. 最初に,1-MIS 検証問題に対する $O(1)$ ラウンドアルゴリズムを提案する. 次に,2-MIS 検証問題に対するアルゴリズムの $\Omega(\sqrt{n})$ ラウンドの下限を提案する. 最後に,3-MIS 検証問題に対するアルゴリズムの $\Omega(n)$ ラウンドの下限を提案し, それを一般の k-MIS に拡張できないかを考える. 後半の 2 つに関しては二者間通信複雑性からの帰着を用いている.

2　諸定義

CONGEST モデル

本稿で考える *CONGEST* モデルは, 単純無向グラフ連結グラフ $G=(V,E)$ により表現される. ここで V はノードの集合で $|V|=n$ とし,E は通信リンクの集合である.*CONGEST* モデルでは計算機はラウンドに従って同期して動作するものとする. 1 ラウンド内で, 隣接頂点へのメッセージ送信, 隣接頂点からのメッセージ受信, 内部計算を行う. 各辺は単位ラウンドあたり $O(\log n)$ ビットを双方向に伝送可能であり, 各ノードは同一ラウンドに異なる接続辺に異なるメッセージを送信可能である. また, 各ノードには $O(\log n)$ ビットの自然数値による ID が付与されており, 自身の隣接ノードすべての ID を既知であるとする. 各ノードはグラフのトポロジに関する事前知識を持たないものとする.

二者間通信複雑性

二者間通信複雑性の枠組みでは, アリスとボブの二人のプレイヤーがそれぞれ n ビットの 0/1 のデータ列で構成されるプライベートな入力 X および Y を持っているとする. プレイヤーの目標は, 結合関数 $f(X,Y)$ を計算することであり, 複雑性の尺度として $f(X,Y)$ を計算するためにアリスとボブが通信によって交換する必要のあるビット数が用いられる.

この枠組みにおける重要な問題として, 交叉判定問題 (set-disjointness) がある. この問題では, アリスとボブはそれぞれ $X \in \{0,1\}^n$ と $Y \in \{0,1\}^n$ を入力として持ち, 目的は $DISJ_n(X,Y) := \bigwedge_{i=1}^{n} X_i \wedge Y_i$ を計算することである.n ビットの交叉判定問題を解くために, アリスとボブは通信によって $\Omega(n)$ ビット交換する必要があることが知られており, この事実を用いて最小全域木や最小カット, 部分グラフ検出や近似最大クリークといったさまざまな問題に対する下限の証明がされている.

独立集合

各頂点が隣接していない頂点部分集合を独立集合という. ネットワークにおける独立集合のうち, 最大独立集合とは次のものを指す. (i) 重みなしグラフにおいて, 頂点数が最も多い独立集合.(ii) 重み付きグラフにおいて, 合計重みが最も大きい独立集合.

極大独立集合とは, これ以上ネットワーク上の頂点を集合に追加できない独立集合である.k-極大独立集合とは独立集合のうち, 任意の k 個の頂点をその集合から取り除いて独立集合を維持したまま $k+1$ 個の頂点を追加することができないものである. つまり, 極大独立集合は 0-MIS と同じ意味である.