k-極大独立集合検証問題の分散計算複雑性

佐藤 僚祐 * 北村 直暉 * 江口 僚太 * 金 鎔煥 † 泉 泰介 ‡

1 はじめに

1.1 研究背景

分散グラフアルゴリズムとは，計算機を頂点，辺を通信リンクとみなしてネットワークをモデル化したグラフ上において，そのネットワーク自身を入力として定義されるグラフアルゴリズム上の諸問題を解く枠組みである．分散アルゴリズムにおける代表的なモデルのひとつとして CONGEST モデルが存在する．CONGEST モデルでは，各ノードは同期ラウンドに従って実行され，メッセージ交換によって協調動作を行う．各ノードは各ラウンドで (i)$O(\log n)$ ビットのメッセージを隣接ノードに送信 (ii) 隣接ノードからメッセージを受信 (iii) 内部計算の 3 つの動作をする．CONGEST モデルにおいては，ある 1 つのノードにグラフ全体のトポロジの情報を集め，そのノード上で逐次アルゴリズムを実行するという愚直なアプローチにより，任意の問題に対して自明に $O(n^2)$ ラウンドの上界を得ることができる．一般に，分散グラフアルゴリズムの計算複雑性においては，システムの規模，すなわち n の値に対して劣線形なラウンド複雑性を持つアルゴリズムを構成できるかどうかに興味がある．逆に，下界の観点からは，$\tilde{\Omega}(n)$ ラウンドの下界を得ることができるような問題は計算困難な問題として認識され，前述の万能な上界の結果から，$\tilde{\Omega}(n^2)$ ラウンドの下界を持つような問題は「最も難しい」問題ととらえることができる[1]．

本研究ではグラフ上の最適化問題の一つである，最大独立集合問題に注目する．逐次計算の文脈において，最大独立集合問題はグラフ理論における重要な基本問題としてよく知られているが，分散アルゴリズムの分野においても，同問題は一種の近傍頂点との間のリソース競合回避と見なすことができ，数多くの応用が存在する．しかしながら，逐次計算の複雑性理論において，最大独立集合問題は NP 完全であるのみならず，任意の定数 $\epsilon > 0$ に対して近似率 $O(n^{1-\epsilon})$ を達成不可能であることが知られているため，何らかの性能保証を持つ多項式時間アルゴリズムの設計は絶望的である [?]．一方で，分散アルゴリズムの分野においては，指数時間のローカル計算を許した CONGEST モデルにおいて，最大独立集合問題の近似解を求めるためのラウンド複雑性が近年議論されており，上界，下界の両面から，いくつかの結果が知られている．具体的には，CONGEST モデルにおいて最大重み付き独立集合の $(1+\epsilon)\cdot\Delta$-近似 (Δ は頂点の最大次数) を高確率で $(\mathrm{poly}(\log\log n)/\epsilon)$ ラウンドで発見するアルゴリズム [?] や，最大独立集合を発見するアルゴリズムに対する $\Omega\left(\frac{n^2}{(\log n)^2}\right)$ ラウンドの下界 [?]，最大独立集合の $(\frac{3}{4}+\epsilon)$-近似を発見するアルゴリズムに対する $\Omega\left(\frac{n^2}{(\log n)^3}\right)$ ラウンドの下界 [?] などが知られている．

1.2 本研究の目的と結果

本研究では，最大独立集合計算の複雑性理解に対して，近似解アルゴリズムとは異なる面からのアプローチを試みる．分散アルゴリズムにおける，上述の最大独立集合問題の近似に関する議論は，本質的に指数時間のローカル計算を許容したモデルを必要とするが，この仮定は必ずしも現実的とはいえない．そこで本研

*名古屋工業大学大学院工学研究科情報工学専攻
†名古屋工業大学大学院工学研究科
‡大阪大学大学院情報学研究科

[1] $\tilde{\Omega}(\cdot)$ は，通常の $\Omega(\cdot)$ 記法から，$\mathrm{polylog}(n)$ の項を (相対的に十分小さい項として) 無視した記法である．

究では，近似解の分散計算複雑性ではなく，(ある種の近傍の下での) 局所最適解の複雑性に着目する．具体的には，k-極大独立集合 (k-Maximal Independet Set， k-MIS) の発見問題に対する CONGEST モデルでのラウンド複雑性を検討する [?]．k-極大独立集合を定義するために，与えられた独立集合より高々 k 個の頂点を取り除き，他の $k+1$ 個以上の頂点を追加することで独立集合のサイズを一つ増加させるという近傍探索を定義する．k-極大独立集合は，この操作が適用不能な独立集合として定義される．通常の極大独立集合は，定義より 0-MIS であり，最大独立集合は明らかに n-MIS である．逐次計算においては，単純な局所探索法で，$k = O(1)$ に対して k-MIS を多項式時間で計算することが可能であるため，k-MIS は多項式時間のローカル計算のみを許容する CONGEST アルゴリズムにおいても取り扱うことが可能である．

自然な局所探索に基づいて k-MIS を構成しようとしたとき，与えられた独立集合 I が k-MIS，すなわち局所最適解かどうかを判定することが必要である．本研究ではこの判定問題 (k-MIS 検証問題) に注目して，CONGEST モデル上のでのラウンド複雑性を検討する．

具体的には，CONGEST モデルにおける k-MIS 検証問題に関して，以下の結果が成立することを示す．

1. 1-MIS 検証問題を $O(1)$ ラウンドで解くアルゴリズムが存在する．

2. 2-MIS 検証問題を解く任意のアルゴリズムの最悪時実行ラウンド数は $\tilde{\Omega}(\sqrt{n})$ となる．

3. 3-MIS 検証問題を解く任意のアルゴリズムの最悪時実行ラウンド数は $\tilde{\Omega}(n)$ ラウンドとなる．

4. 任意の自然数 $\ell \geq 1$ に対して，$(4\ell+5)$-MIS 検証問題を解く任意のアルゴリズムの最悪時実行ラウンド数は $\tilde{\Omega}\left((n^{2-\frac{1}{\ell+1}})/\ell\right)$ ラウンドとなる．

上記の下界はすべて，定数成功確率の乱択アルゴリズムについても成立する．4 番目の下界の結果より，$k \geq 5\log n$ に対して，k-MIS 検証問題のラウンド複雑性はナイーブなアルゴリズムの上界である $O(n^2)$ ラウンドにほぼ一致する ($\tilde{\Omega}(n^2)$ ラウンド) ことが分かる．なお，上述する下界の証明はすべて，CONGEST モデルでのラウンド数下界証明ための代表的な手法の一つである，2 者間通信複雑性における交叉判定問題からの帰着に基づいている．

1.3　関連研究

CONGEST モデルにおける最大独立集合問題の通信複雑性としては，最大重み付き独立集合の $(1+\epsilon)\cdot\Delta$-近似 (Δ は頂点の最大次数) を高確率で見つけるアルゴリズムに対する $(\mathrm{poly}(\log\log n)/\epsilon)$ ラウンドの上界 [?] や，最大独立集合を見つけるアルゴリズムに対する $\Omega\left(\frac{n^2}{(\log n)^2}\right)$ ラウンドの下界 [?]，最大独立集合の $(\frac{1}{2}+\epsilon)$-近似を見つけるアルゴリズムに対する $\Omega\left(\frac{n}{(\log n)^3}\right)$ ラウンドの下界，$(\frac{3}{4}+\epsilon)$-近似を見つけるアルゴリズムに対する $\Omega\left(\frac{n^2}{(\log n)^3}\right)$ ラウンドの下界 [?] が知られている．k-MIS の概念自体は Bollbas らにより初めて提示された [?]．k-MIS を解く分散アルゴリズムは主に自己安定アルゴリズムの分野においていくつかの結果が知られているが [?,?]，それらは CONGEST モデル上での結果ではない．一部のアルゴリズムは改変することなく CONGEST モデルで動作させることが可能であるが，$\Omega(n)$ ラウンドの計算時間を必要とする．極大独立集合 (0-MIS) 問題の複雑性に関して，CONGEST モデルにおいては $O(\log n)$ ラウンドの乱択アルゴリズム [?] や $\mathrm{poly}(\log n)$ ラウンドの決定性アルゴリズム [?] が知られている．LOCAL モデルにおいては $O(\log\Delta)+\mathrm{poly}(\log\log n)$ ラウンドの乱択アルゴリズムや $\mathrm{poly}(\log n)$ ラウンドの決定性アルゴリズム [?]，乱択アルゴリズムに対する $\Omega\left(\frac{\log\log n}{\log\log\log n}\right)$ の下界や決定性アルゴリズムに対する $\Omega\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$ の下界 [?] が知られている．

また集中型アルゴリズムについて，任意の $\epsilon > 0$ に対して最大独立集合の $n^{1-\epsilon}$ 近似を発見するアルゴリズムは存在しないことが知られている [?]．

前述の通り，本研究の下界に関する結果は 2 者間通信の枠組みにおける交叉判定問題からの帰着に基

づいているが，交叉判定問題からの帰着によって下界を示すという証明方法は多くの問題に対して用いられている．一部の例として最小カット発見問題と最小全域木問題に対する $\Omega(D+\sqrt{n})$ の下界 (D はグラフの直径) [?] や部分グラフ H_k 検出問題に対する $\Omega\left(\frac{n^{2-1/k}}{bk}\right)$ の下界 [?]，近似最大クリーク K_ℓ 検出問題に対する $\Omega\left(\frac{n}{(\ell+\sqrt{n})b}\right)$ の下界 [?] などが挙げられる．

1.4 論文の構成

本論文は全 5 節で構成される．第 2 節ではグラフの構造と用語の定義をしている．第 3 節では 1-MIS 検証問題に対する $O(1)$ ラウンドアルゴリズムについて述べている．第 4 節では k-MIS 検証問題 ($k=2,3,4\ell+5(\ell\geq 1)$) に対する下界について述べている．第 5 節ではまとめについて述べている．

2 諸定義

2.1 CONGEST モデル

CONGEST モデルにおいて，システムは単純無向連結グラフ $G=(V,E)$ により表現される．ここで V はノードの集合で $|V|=n$ とし， E は通信リンクの集合である．CONGEST モデルでは計算機は同期したラウンドに従って動作するものとする．1 ラウンド内で，隣接頂点へのメッセージ送信，隣接頂点からのメッセージ受信，内部計算を行う. 各辺は単位ラウンドあたり $b=O(\log n)$ ビットを双方向に伝送可能であり，各ノードは同一ラウンドに異なる接続辺に異なるメッセージを送信可能である．また，各ノードには $O(\log n)$ ビットの整数値による ID が付与されており，自身の隣接ノードすべての ID を既知であるとする．各ノードはグラフのトポロジに関する事前知識を持たないものとする．

2.2 k-極大独立集合検証問題

定義 2.1. 頂点集合 I に対して，以下を満たす頂点集合 $I'\subseteq I$ と $S\subseteq V\backslash I$ のペアが存在しないとき，I を k-極大独立集合と呼ぶ.

1. $|I'|\leq k$
2. $|S|\geq |I'|+1$
3. $(I\backslash I')\cup S$ は独立集合

つまり，ある独立集合 I に対して，サイズ $k'(\leq k)$ の I の部分集合 I' を取り除いてサイズ $k'+1$ 以上の V の部分集合 S を I に追加したものが新たな独立集合になり得ないとき，I を k-極大独立集合と定義する．前述の通り，0-MIS は通常の極大独立集合であり，n-MIS は最大独立集合である．本稿では，CONGEST モデルにおける k-独立集合検証問題を検討する．各ノードは，ローカル変数として入力変数 in_v および出力変数 out_v を保持しているとして，k-独立集合検証問題は以下のように定義される．

定義 2.2. グラフ $G=(V,E)$ の頂点部分集合 $I\subseteq V$ が入力の部分集合として与えられる．すなわち，頂点 v は $v\in I$ ならば初期状況において $in_v=1$ であり，そうでないならば $in_v=0$ であるとする．ある (乱択) アルゴリズム $\mathcal{A}$ が確率 2/3 以上で $f(n)$ ラウンド以内に以下の条件を満たして停止するとき，$\mathcal{A}$ は k-MIS 検証問題を解くアルゴリズムであるという.

1. I が k-MIS であるならば，任意の $v\in V$ について $out_v=1$.
2. I が k-MIS ではないならば，ある $v\in V$ について $out_v=0$.

2.3 2 者間通信複雑性

2 者間通信複雑性の枠組みでは，アリスとボブの二人のプレイヤーがそれぞれ k ビットのデータ列で構成されるプライベートな入力 x および y を持っているとする．プレイヤーの目標は，結合関数 $f(x,y)$

をできるだけ少ない通信ビット数で計算することである．通常，x,y は何らかの適切な方法により $\{0,1\}$ のビット列に符号化されているとみなす．x,y のビット長を k とし，これを入力のサイズとする．また，アリスおよびボブは無限の計算能力を持つものとする．ある関数プロトコル P がサイズ k の任意 x,y に対して f を正しく計算する，すなわちアリスおよびボブの両方が $f(x,y)$ の値を正しく出力するとき，P を f に対する (2 者間) プロトコルと呼ぶ．アリス及びボブが互いにプライベートなランダムビット列を持ち，乱択に基づくローカル計算を許す場合，乱択プロトコル P が任意の x,y に対して $f(x,y)$ の値を確率 $1-\epsilon$ 以上で正しく計算するとき，P は f に対する ϵ-誤り乱択 (2 者間) プロトコルと呼ぶ．f に対するプロトコル P において，サイズの k 入力に対する最悪通信ビット数 $cc(k)$ を**プロトコル P の通信複雑性**と呼ぶ．ある関数 f の**決定性通信複雑性**は，f を計算する最良の決定性プロトコル P における通信複雑性として定義される．同様にして f の **ϵ-誤り乱択通信複雑性**は，f を計算する最良の ϵ-誤り乱択プロトコルの通信複雑性として定義される．

2 者間通信複雑性における重要な基本問題として，**交叉判定問題** (set-disjointness) がある．この問題では, アリスとボブはそれぞれ $x \in \{0,1\}^k$ と $y \in \{0,1\}^k$ を入力として持ち，目的は $\mathrm{DISJ}_k(x,y) := \bigvee_{i=1}^{k} x_i \wedge y_i$ を計算することである．k ビットの交叉判定問題を解くために必要なアリスとボブの通信ビット数に関して，次の定理が成り立つ．

定理 2.1 (Kalyyanasudaram et al. [**?**])**.** k ビット交叉判定問題に対する 1/3-誤り乱択通信複雑性は $\Theta(k)$ である．

CONGEST モデルにおいて，様々な問題のラウンド数下界が 2 者間通信複雑性における交叉判定問題からの帰着により得られている (一部の例として，[**?**, **?**, **?**])．本研究では，Frischknecht ら [**?**] により初めて提示され，その後 Bachrach ら [**?**] により定式化された，**下界グラフ**と呼ばれるグラフの構成法に基づく帰着手法を用いる．

今，CONGEST モデルにおいて，問題のインスタンスがネットワークトポロジ $G=(V,E)$ および頂点ラベリング $I: V \to \Sigma$ により定義されるような問題を考える．このインスタンスに対する何らかの特性を表す述語 P（例えば「グラフに与えられた独立集合が 2-MIS でない」) を満たすかどうかを判定する問題のラウンド複雑性下界を導きたいとする．この問題を 2 者間交叉判定問題から帰着するために，交差判定問題の入力 (x,y) に対して決まる，以下に示す条件を満たすような入力インスタンス $G^{x,y}=(V,E)$ および $I^{x,y}$ を構成する．

- V はある互いに疎な頂点集合 V_A，V_B に分割される．
- V_A により誘導される部分グラフ G_A および V_B により誘導される部分グラフ G_B はそれぞれ入力文字列 x および y のみに依存して決定される．
- V_A，V_B に対する頂点ラベリングの値はそれぞれ x，y のみに依存して決定される．
- G_A と G_B の間にまたがるカット辺の集合 Cut は x および y いずれの値にも依存しない．
- 構成されたインスタンス $(G^{x,y}, I^{x,y})$ に対して，述語 P は，$\mathrm{DISJ}_k(x,y)=1$，かつその時に限り真となる．

グラフ G に辺や頂点を追加したグラフを $G^{x,y} = (V',E')$ とすると $V' = V \cup (V_A \cup V_B), E' = E \cup (E_A \cup E_B)$ と表すことができる．グラフ $G^{x,y}$ の構造の概要を図 **??** に示す．構成した下界グラフ $G^{x,y}=(V',E')$ に関して，以下の定理が成り立つ．

定理 2.2. $G^{x,y}$ および $I^{x,y}$ を入力インスタンス，k を交叉判定インスタンスのビット数，$|Cut|$ を $G^{x,y}$ におけるカット辺のサイズとする．このとき，任意の $x,y \in \{0,1\}^k$ に対して入力インスタンス $(G^{x,y}, I^{x,y})$ が述語 P を満たすかどうかを判定する CONGEST モデル上の任意のアルゴリズムは $\Omega(k/|Cut| \cdot \log n)$ ラウンドの下界を持つ．

証明. $\mathcal{A}$ を，述語 P を満たすかどうかを判定する分散アルゴリズムであるとする．アリスとボブは，入

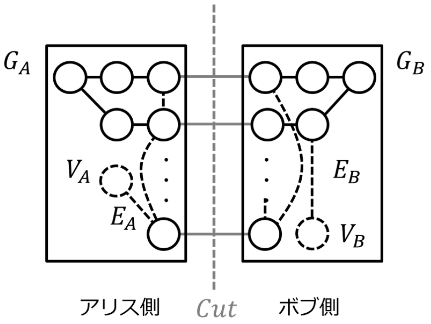

図 1: $G^{x,y} = (V', E')$

力グラフ上での $\mathcal{A}$ の実行をシミュレートすることで，(x, y) に対する交差判定問題を解くことができることを示す．まず最初に，アリスは G_A のトポロジおよびそこに含まれる頂点のラベリングを，ボブは G_B のトポロジおよびそこに含まれるのラベリングを構成する．下界グラフが満たす条件より，この構成はアリスとボブの間で通信を行うことなく局所的に計算可能である．構成結果より，アリス，ボブは互いに V_A および V_B 中の頂点の初期状態を知ることが可能である．この初期状態から始まる A の実行をシミュレートするために，アリス及びボブはシミュレーションの実行においてカット辺 C を通じて伝送されるメッセージを互いにやり取りする．G_A 中の辺で送信されるメッセージ，あるいは G_B 中の辺で送信されるメッセージは，アリスとボブがそれぞれお互いの通信なしに計算できるため，それとカット辺 Cut を通じて送信されるメッセージを互いに受信できれば，$G^{x,y}$ 全体での $\mathcal{A}$ のシミュレーションを (アリスとボブが手分けして) 実行することができる．今アルゴリズム $\mathcal{A}$ が r ラウンドで終了するとすると，アリスとボブは上述のシミュレーションにより述語 P の判定結果を知ることが可能であり，それに必要な通信ビット数は，各辺がラウンドあたり $O(\log n)$ ビットの情報を伝送可能であることより，$O(r \cdot |Cut| \cdot \log n)$ ビットである．下界グラフの構成より，述語 P の真偽と x，y が交差しているかどうかの真偽は同じであるため，このシミュレーションは $O(r \cdot |Cut| \cdot \log n)$ ビットの通信量で交差判定 (x, y) を解いている．定理 **??**より，この通信量は $\Omega(k)$ であり，これより $r = \Omega(k/|Cut| \cdot \log n)$ の下界を得ることができる． $\square$

3 1-MIS 検証問題の $O(1)$ ラウンドアルゴリズム

この節では，1-MIS 検証問題を $O(1)$ ラウンドで解くアルゴリズムついて述べる．本節のアルゴリズムの結果は，[?] において示されている手法と同様のアイデアを CONGEST モデル向けに書き換えただけものであるが，論文の完結性のために本稿においてもアルゴリズムおよび正当性を示しておく．CONGEST モデルにおいて，入力としてグラフ G と独立集合 I が与えられたとき，1-MIS 検証問題を解くために次のようなアルゴリズム $\mathcal{A}$ を実行する．

1. 各頂点 $v \in I$ は，自分の ID である $v.\mathrm{id}$ を隣接頂点全員に送信する．
2. 各頂点 $u \notin I$ のうち，2 種類以上の ID をもらった頂点は 0 を返し，アルゴリズムから離脱する．
3. 離脱しなかった頂点 $u \notin I$ のうち，1 種類だけの ID($v.\mathrm{id}$ とする) を受信した頂点は離脱していない全隣接頂点へ $v.\mathrm{id}$ を送信する．頂点 $u \notin I$ は，自身が持つ $v.\mathrm{id}$ と違う $v.\mathrm{id}$ が書かれたメッセージは無視し，自身が持つ $v.\mathrm{id}$ と同じ $v.\mathrm{id}$ が書かれたメッセージの数を記憶し，それを $u.a$ とする．
4. 各頂点 $v \in I$ は，自身と同じ $v.\mathrm{id}$ を返信してきた頂点の集合 ($v.X$ とする) を記憶する．その後サイズ $|v.X|$ を $v.X$ 中の頂点に送信し，0 を返す．
5. メッセージを受け取った $v.X$ 中の頂点 u は，送られたサイズ $|v.X|-1$ と $u.a$ を比較する．$|v.X|-1 = u.a$ であれば頂点 u は 0 を返し，そうでなければ u は 1 を返す．

アルゴリズム $\mathcal{A}$ の各ステップは明らかに $O(1)$ ラウンドで CONGEST モデルで実装できる．アルゴリズム $\mathcal{A}$ について，以下の定理が成り立つ．

定理 3.1. アルゴリズム $\mathcal{A}$ は 1-MIS 検証問題を解くことができる．

証明. アルゴリズム $\mathcal{A}$ は与えられた入力に対して誤った答えを返すとする．このとき以下の 2 つのうち，どちらかが成り立つ．

1. 与えられた独立集合が 1-MIS であり，アルゴリズム $\mathcal{A}$ が 1-MIS でないと返す．
2. 与えられた独立集合が 1-MIS でなく，アルゴリズム $\mathcal{A}$ が 1-MIS であると返す．

アルゴリズム $\mathcal{A}$ の 5 番目のステップで $|v.X|-1$ と a を比較して，$v.X$ に含まれる任意の頂点 u で $|v.X|-1 = u.a$ が成り立つとき $v.X$ の頂点はクリークを形成している．これは $v.X$ に含まれる頂点 $u \notin I$ で等号が成立するのは u が $v.X \backslash \{u\}$ に含まれる全ての頂点と隣接している場合のみだからである．

1．の場合，アルゴリズム $\mathcal{A}$ が 1-MIS でないと返したということは，ある $v.X$ についてその中の頂点 $u \notin I$ が 1 を返したということである．この場合，$v.X$ に含まれる頂点で u に隣接していない頂点 w が存在するはずである．また u と w に隣接する I 内の頂点は v のみである．従って v を I から取り除いて u と w を I に追加することで独立集合を維持しつつサイズを大きくすることができるため与えられた独立集合は 1-MIS ではないが，これは仮定に矛盾する．

2．の場合，アルゴリズム $\mathcal{A}$ が 1-MIS であると返したということは，全ての $v.X$ についてその中の頂点 $u \notin I$ が 0 を返したということである. この場合，全ての $v.X$ がクリークを形成している．従って，$v.X$ の中には独立集合に追加できる可能性のある頂点は存在しない．また，2 番目のステップで離脱した頂点も独立集合点に含まれている 1 頂点を取り除いただけ追加できる可能性はない．よって，独立集合を維持しつつサイズを大きくするために追加できる頂点は存在しないため与えられた独立集合は 1-MIS であるが，これは仮定に矛盾する．

以上より，アルゴリズム $\mathcal{A}$ は与えられた入力に対して正しい答えを返すことができるため，1-MIS 検証問題を解くことができる． □

4 k-MIS 検証問題の下界

この節では，k-MIS 検証問題の下界についての議論を行う．小節 4.1 では，2-MIS 検証問題の下界についての定理とその証明を述べる．小節 4.2 では，3-MIS 検証問題の下界についての定理とその証明を述べる．小節 4.3 では，$\ell > 0$ に対する，$(4\ell+5)$-MIS 検証問題の下界についての定理とその証明を述べる．

4.1 2-MIS 検証問題の下界

この小節では 2-MIS 検証問題の下界についての議論を行う．具体的には，次の定理を証明する．

定理 4.1. CONGEST モデルにおいて，2-MIS 検証問題を解く全てのアルゴリズムは $\tilde{\Omega}(\sqrt{n})$ の通信ラウンド数を必要とする．

証明. まず初めにアリスとボブは下界グラフのインスタンス $G^{x,y} = (V^{x,y}, E^{x,y})$, $I^{x,y} : V^{x,y} \to \{0,1\}$ を構築する．このインスタンスにおいて，頂点ラベリング関数 $I^{x,y}(v)$ は v が検証されるべき独立集合に含まれるとき 1，そうでないときに 0 を返す関数とする．記述の容易さのため，帰着の元となる交差判定問題のビット数を N^2 とし，インスタンス (x,y) の各ビットは $N \times N$ の要素でインデックス付けされているものとする．$(i,j) \in N \times N$．でインデックス付けされている x，y のビットを $x_{i,j}$ および $y_{i,j}$ で表すものとする．また，x，y に含まれる 1 のビットの個数を $|x|$，$|y|$ で表すとする．$G^{x,y}$ の頂点集合 $V^{x,y}$ は以下の通りに定義される．

$$
\begin{aligned}
V^{x,y} = A^1 \cup A^2 \cup B^1 \cup B^2 \cup C, \qquad & \text{ここで} \\
A^j = \{a_i^j \mid 1 \le i \le N\} \qquad & (j \in \{1,2\}), \\
B^j = \{a_i^j \mid 1 \le i \le N\} \qquad & (j \in \{1,2\}), \\
C = \{c_{i,j} \mid y_{i,j} = 1\}. &
\end{aligned}
$$

アリス及びボブがシミュレーションする頂点集合 $V_A^{x,y}$ および $V_B^{x,y}$ はそれぞれ $V_A^{x,y} = A^1 \cup A^2$，$V_B^{x,y} = B^1 \cup B^2 \cup C$ と定める．$G^{x,y}$ の辺集合 $E^{x,y}$ は以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
E^{x,y} = E^1 \cup E^2 \cup E_A \cup E_B \cup E_C, \qquad & \text{ここで} \\
E^j = \{(a_i^j, b_i^j) \mid 1 \leq i \leq N\} & \\
(j \in \{1,2\}), & \\
E_A = \{(a_i^1, a_j^2) \mid x_{i,j} = 0\}, & \\
E_B = \{(c_{i,j}, b_i^1) \mid y_{i,j} = 1\} & \\
\cup \{(c_{i,j}, b_j^2) \mid y_{i,j} = 1\}, & \\
E_C = \{(c_{i,j}, c_{i',j'}) \mid y_{i,j} = y_{i',j'} = 1\} & \\
((i,j) \neq (i',j')). &
\end{aligned}
$$

C 中の頂点はクリークを成している．アリス及びボブがシミュレーションする辺集合 $E_A^{x,y}$ および $E_B^{x,y}$ とカット辺の集合 Cut はそれぞれ $E_A^{x,y} = E_A$，$E_B^{x,y} = E_B \cup E_C$，$Cut = E^1 \cup E^2$ と定める．独立集合に含まれる頂点を示すラベリング $I^{x,y}$ は以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
&I^{x,y}(v) = 0 \quad if \quad v \in A^j \cup C \qquad (j \in \{1,2\}), \\
&I^{x,y}(v) = 1 \quad if \quad v \in B^j \qquad (j \in \{1,2\}).
\end{aligned}
$$

グラフ $G^{x,y} = (V^{x,y}, E^{x,y})$ を図 **??**に示す．図中の頂点のうち灰色のものは独立集合に含まれる頂点を表す．グラフ $G^{x,y} = (V^{x,y}, E^{x,y})$ は，

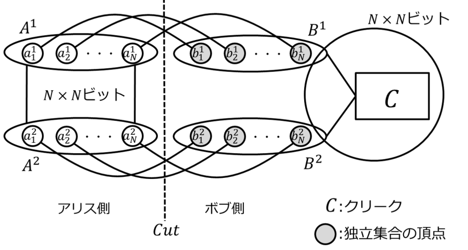

図 2: $G^{x,y} = (V^{x,y}, E^{x,y})$

「「$\mathrm{DISJ}_{N\times N}(x,y) = 1$ のとき，かつその時に限り $I^{x,y}$ が 2-MIS でない」」という特性を満たす．これを示すために，次の 2 点を確認する．

(i)$\mathrm{DISJ}_{N\times N}(x,y) = 1$ のとき，$I^{x,y}$ が 2-MIS でない：$x_{i,j} = y_{i,j} = 1$ とすると，b_i^1 と b_j^2 の 2 点を取り除いて a_i^1，a_j^2，$c_{i,j}$ の 3 点を追加できることから確認できる．

(ii)$\mathrm{DISJ}_{N\times N}(x,y) = 0$ のとき，$I^{x,y}$ が 2-MIS である：グラフに与えられている独立集合が 2-MIS でないと仮定する．このとき，ある 2 点を取り除くことで独立集合に追加できる 3 点が存在する．2 点の取り除き方は (1)b_i^1 と $b_j^1 (i \neq j)$，(2)b_i^2 と $b_j^2 (i \neq j)$，(3)b_i^1 と b_j^2 が考えられる．(1) では a_i^1 と a_j^1 の 2 点しか追加できる可能性がなく，(2) では a_i^2 と a_j^2 の 2 点しか追加できる可能性がない．(3) において，b_i^1 を取り除いて a_i^1 を追加し，b_j^2 を取り除いて a_j^2 を追加し，さらに $c_{i,j}$ を追加することを考える．a_i^1 と a_j^2 が両方とも追加できるのは $x_{i,j} = 1$ のときのみであり，$c_{i,j}$ が追加できる ($c_{i,j}$ が存在する) のは $y_{i,j} = 1$ のときのみであるが，これは $\mathrm{DISJ}_{N\times N}(x,y) = 0$ に矛盾する．したがってグラフに与えられている独立集合から 2 点取り除いて 3 点追加することはできないため，この独立集合は 2-MIS である．

今回，$N \times N$ ビットの交叉判定インスタンスをグラフに埋め込んでおり，カット辺のサイズ $|Cut| = 2N$ であることが分かる．CONGEST モデルにおいてグラフ上に与えられた独立集合が 2-MIS であるかどうかを r ラウンドで判定するアルゴリズム $\mathcal{A}$ が存在したとすると，定理**??**より $\mathcal{A}$ は少なくとも $r = \Omega(N \times N/2N \cdot \log n) = \tilde{\Omega}(N)$ ラウンドを必要とする．図**??**から分かる通り，A^1, A^2, B^1, B^2 はそれぞれ N 頂点で構成されており，C の頂点数は $O(N^2)$ であるため，グラフ全体の頂点数 n は $n = O(N + N^2)$ である．したがって $N = \Omega(\sqrt{n})$ となるため，$\tilde{\Omega}(\sqrt{n})$ ラウンドの下界を得ることができる． □

4.2 3-MIS 検証問題の下界

この小節では 3-MIS 検証問題の下界についての議論を行う．具体的には，次の定理を証明する．

定理 4.2. CONGEST モデルにおいて，3-MIS 検証問題を解く全てのアルゴリズムは $\tilde{\Omega}(n)$ の通信ラウンド数を必要とする．

証明. まず初めにアリスとボブは下界グラフのインスタンス $G^{x,y} = (V^{x,y}, E^{x,y})$, $I^{x,y} : V^{x,y} \to \{0,1\}$ を構築する．このインスタンスにおいて，頂点ラベリング関数 $I^{x,y}(v)$ は v が検証されるべき独立集合に含まれるとき 1，そうでないときに 0 を返す関数とする．記述の容易さのため，帰着の元となる交差判定問題のビット数を N^2 とし，インスタンス (x,y) の各ビットは $N \times N$ の要素でインデックス付けされているものとする．$(i,j) \in N \times N$．でインデックス付けされている x，y のビットを $x_{i,j}$ および $y_{i,j}$ で表すものとする．また，x，y に含まれる 1 のビットの個数を $|x|$，$|y|$ で表すとする．$G^{x,y}$ の頂点集合 $V^{x,y}$ は以下の通りに定義される．

$$
\begin{aligned}
V^{x,y} = A^1 \cup A^2 \cup B^1 \cup B^2 & \\
\cup C^1 \cup C^2 \cup \{s\}, &\qquad \text{ここで} \\
A^j = \{a_i^j \mid 1 \le i \le N\} &\qquad (j \in \{1,2\}), \\
B^j = \{a_i^j \mid 1 \le i \le N\} &\qquad (j \in \{1,2\}), \\
C^j = \{a_i^j \mid 1 \le i \le N\} &\qquad (j \in \{1,2\}).
\end{aligned}
$$

アリス及びボブがシミュレーションする頂点集合 $V_A^{x,y}$ および $V_B^{x,y}$ はそれぞれ $V_A^{x,y} = A^1 \cup A^2$，$V_B^{x,y} = B^1 \cup B^2 \cup C^1 \cup C^2 \cup \{s\}$ と定める．$G^{x,y}$ の辺集合 $E^{x,y}$ は以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
E^{x,y} = E^{A^1} \cup E^{A^2} \cup E^{B^1} \cup E^{B^2} \cup E^{CA} \cup E^{CB} & \\
\cup E^{SA} \cup E^{SB} \cup E_A \cup E_B, &\qquad \text{ここで} \\
E^{A^h} = \{(a_i^h, a_j^h) \mid i \neq j\} &\qquad (h \in \{1,2\}), \\
E^{B^h} = \{(b_i^h, b_j^h) \mid i \neq j\} &\qquad (h \in \{1,2\}), \\
E^{CA} = \{(a_i^1, c_i^1) \mid 1 \le i \le N\} & \\
\cup \{(a_i^2, c_i^2) \mid 1 \le i \le N\}, & \\
E^{CB} = \{(b_i^1, c_i^1) \mid 1 \le i \le N\} & \\
\cup \{(b_i^2, c_i^2) \mid 1 \le i \le N\}, & \\
E^{SA} = \{(a_i^1, s) \mid 1 \le i \le N\} & \\
\cup \{(a_i^2, s) \mid 1 \le i \le N\}, & \\
E^{SB} = \{(b_i^1, s) \mid 1 \le i \le N\} & \\
\cup \{(b_i^2, s) \mid 1 \le i \le N\}, & \\
E_A = \{(a_i^1, a_j^2) \mid x_{i,j} = 0\}, & \\
E_B = \{(b_i^1, b_j^2) \mid y_{i,j} = 0\}. &
\end{aligned}
$$

A^1，A^2，B^1，B^2 中の頂点はクリークを成している．アリス及びボブがシミュレーションする辺集合 $E_A^{x,y}$ および $E_B^{x,y}$ とカット辺の集合 Cut はそれぞれ $E_A^{x,y} = E^{A^1} \cup E^{A^2} \cup E_A$，$E_B^{x,y} = E^{B^1} \cup E^{B^2} \cup E^{CB} \cup E^{SB} \cup E_B$，$Cut = E^{CA} \cup E^{CB} \cup E^{SA}$ と定める．独立集合に含まれる頂点を示すラベリング $I^{x,y}$ は以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
I^{x,y}(v) = 0 \quad if \quad v \in A^j \cup B^j &\qquad (j \in \{1,2\}), \\
I^{x,y}(v) = 1 \quad if \quad v \in C^j \cup \{s\} &\qquad (j \in \{1,2\}).
\end{aligned}
$$

グラフ $G^{x,y} = (V^{x,y}, E^{x,y})$ を図 **??**に示す．図中の頂点のうち灰色のものは独立集合に含まれる頂点を表す．グラフ $G^{x,y} = (V^{x,y}, E^{x,y})$ は，「$\mathrm{DISJ}_{N \times N}(x,y) = 1$ のとき，かつその時に限り $I^{x,y}$ が 3-MIS でない」という特性を満たす．これを示すために，次の 2 点を確認する．

(i)$\mathrm{DISJ}_{N \times N}(x,y) = 1$ のとき，$I^{x,y}$ が 3-MIS でない：$x_{i,j} = y_{i,j} = 1$ とすると，s と c_i^1 と c_j^2 の 3 点を取り除いて a_i^1, b_i^1，a_j^2，c_j^2 の 4 点を追加できることから確認できる．

(ii)$\mathrm{DISJ}_{N \times N}(x,y) = 0$ のとき，$I^{x,y}$ が 3-MIS で

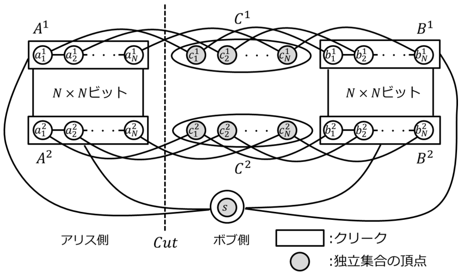

図 3: $G^{x,y}=(V^{x,y},E^{x,y})$

ある：グラフに与えられている独立集合が 3-MIS でないと仮定する．このとき，ある 3 点を取り除くことで独立集合に追加できる 4 点が存在するが，A^1,A^2,B^1,B^2 がそれぞれクリークであるため，4 点を追加するためにはそれぞれから 1 点を選ぶ必要がある．c_i^1 を取り除いて a_i^1 と b_i^1 を追加し，c_j^2 を取り除いて,a_j^2 と b_j^2 を独立集合に追加したとする．a_i^1 と a_j^2 が両方とも追加できるのは $x_{i,j}=1$ のときのみであり，b_i^1 と b_j^2 が両方とも追加できるのは $y_{i,j}=1$ のときのみであるが，これは $\mathrm{DISJ}_{N\times N}(x,y)=0$ に矛盾する。したがってグラフに与えられている独立集合から 3 点取り除いて 4 点追加することはできないため，この独立集合は 3-MIS である．

今回，$N\times N$ ビットの交叉判定インスタンスをグラフに埋め込んでおり，カット辺のサイズ $|Cut|=4N$ であることが分かる．CONGEST モデルにおいてグラフ上に与えられた独立集合が 3-MIS であるかどうかを r ラウンドで判定するアルゴリズム $\mathcal{A}$ が存在したとすると，定理**??**より $\mathcal{A}$ は少なくとも $r=\Omega(N\times N/4N\cdot\log n)=\tilde{\Omega}(N)$ ラウンドを必要とする．図**??**から分かる通り，s は 1 頂点，A^1,A^2,B^1,B^2,C^1,C^2 はそれぞれ N 頂点で構成されているため，グラフ全体の頂点数 n は $n=O(N)$ である．したがって $N=\Omega(n)$ になるため，$\tilde{\Omega}(n)$ ラウンドの下界を得ることができる． □

4.3　k-MIS 検証問題の下界

この小節では k-MIS 検証問題の下界についての議論を行う．具体的には，次の定理を証明する．

定理 4.3. CONGEST モデルにおいて，任意の $\ell\geq 1$ に対して $k=4\ell+5$ としたとき k-MIS 検証問題を解く全てのアルゴリズムは $\Omega\left(n^{2-\frac{1}{\ell+1}}/\ell\right)$ の通信ラウンド数を必要とする．

証明. これ以降，$k=4\ell+5$ とする．証明の簡略化のために N の $\ell+1$ 乗根は整数であると仮定する．このとき $M=\sqrt[\ell+1]{N}$ とする．また，自然数 i,j,h が与えられたとき，$\alpha_{i,h}(j)$ を j を i 進数で表したときの h 桁目の値と定義する．まず初めにアリスとボブは下界グラフのインスタンス $G^{x,y}=(V^{x,y},E^{x,y})$, $I^{x,y}:V^{x,y}\to\{0,1\}$ を構築する．このインスタンスにおいて，頂点ラベリング関数 $I^{x,y}(v)$ は v が検証されるべき独立集合に含まれるとき 1，そうでないときに 0 を返す関数とする．記述の容易さのため，帰着の元となる交差判定問題のビット数を N^2 とし，インスタンス (x,y) の各ビットは $N\times N$ の要素でインデックス付けされているものとする．$(i,j)\in N\times N$. でインデックス付けされている x，y のビットを $x_{i,j}$ および $y_{i,j}$ で表すものとする．また，x，y に含まれる 1 のビットの個数を $|x|$，$|y|$ で表すとする．$G^{x,y}$ の頂点集合 $V^{x,y}$ は以下の通りに定義される．

$$
\begin{aligned}
V^{x,y} = A^h \cup B_j^h \cup C_j^h \cup D_j^h \cup E_j^h \cup \{s\}& \\
(1\leq j\leq \ell+1, h\in\{1,2\})\quad ここで& \\
A^h &= \{a_i^h \mid 1\leq i\leq N\},\\
B_j^h &= \{b_i^{h,j} \mid 1\leq i\leq N, 1\leq i\leq \ell+1\},\\
C_j^h &= \{c_i^{h,j} \mid 1\leq i\leq M, 1\leq i\leq \ell+1\},\\
D_j^h &= \{d_i^{h,j} \mid 1\leq i\leq M, 1\leq i\leq \ell+1\},\\
E_j^h &= \{e_i^{h,j} \mid 1\leq i\leq M, 1\leq i\leq \ell+1\}.\\
&(すべて\ h\in\{1,2\})
\end{aligned}
$$

アリス及びボブがシミュレーションする頂点集合 $V_A^{x,y}$ および $V_B^{x,y}$ はそれぞれ $V_A^{x,y}=A^h\cup C_j^h\cup\{s\}$, $V_B^{x,y}=B_j^h\cup D_j^h\cup E_j^h$ $(1\leq j\leq\ell+1, h\in\{1,2\})$ と定める．$G^{x,y}$ の辺集合 $E^{x,y}$ は以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
E^{x,y} = & E^A \cup E^B \cup E^D \cup E^{SA} \cup E^{AC} \cup E^{BE} \\
& \cup E^{CD} \cup E^{ED} \cup E_A \cup E_B, \qquad \text{ここで} \\
& E^A = \{(a_i^h, a_{i'}^h) \mid i \neq i'\}, \\
& E^B = \{(b_i^{h,j}, b_{i'}^{h,j}) \mid i \neq i'\}, \\
& E^D = \{(d_i^{h,j}, d_{i'}^{h,j}) \mid i \neq i'\}, \\
& E^{SA} = \{(a_i^h, s) \mid 1 \leq i \leq N\}, \\
& E^{AC} = \{(a_i^h, c^{h,j}_{\alpha_{M,j}(i-1)+1}) \\
& \qquad \mid 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \ell+1)\}, \\
& E^{BE} = \{(b_i^{h,g}, c^{h,j}_{\alpha_{M,j}(i-1)+1}) \\
& \qquad \mid 1 \leq i \leq N, 1 \leq g, j \leq \ell+1)\}, \\
& E^{CD} = \{(c_i^{h,j}, d_i^{h,j}) \\
& \qquad \mid 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq \ell+1\}, \\
& E^{ED} = \{(e_i^{h,j}, d_i^{h,j}) \\
& \qquad \mid 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq \ell+1\}, \\
& E_A = \{(a_i^1, a_j^2) \mid x_{i,j} = 0\}, \\
& E_B = \{(b_i^1, b_j^2) \mid y_{i,j} = 0\}. \\
& \quad (\text{すべて } h \in \{1,2\})
\end{aligned}
$$

A^h，B_j^h，D_j^h 中の頂点はクリークを成している $(1 \leq j \leq \ell+1, h \in \{1,2\})$．アリス及びボブがシミュレーションする辺集合 $E_A^{x,y}$ および $E_B^{x,y}$ とカット辺の集合 Cut はそれぞれ $E_A^{x,y} = E^A \cup E^{SA} \cup E^{AC} \cup E_A$，$E_B^{x,y} = E^B \cup E^D \cup E^{BE} \cup E^{ED} \cup E_B$，$Cut = E^{CD}$ と定める．独立集合に含まれる頂点を示すラベリング $I^{x,y}$ は以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
& I^{x,y}(v) = 0 \quad if \quad v \in A^h \cup B_j^h \cup D_j^h \\
& \qquad\qquad (1 \leq j \leq \ell+1, h \in \{1,2\}), \\
& I^{x,y}(v) = 1 \quad if \quad v \in C_j^h \cup E_j^h \cup \{s\} \\
& \qquad\qquad (1 \leq j \leq \ell+1, h \in \{1,2\}).
\end{aligned}
$$

グラフ $G^{x,y} = (V^{x,y}, E^{x,y})$ を図 ??に示す．図中の頂点のうち灰色のものは独立集合に含まれる頂点を表す．グラフ $G^{x,y} = (V^{x,y}, E^{x,y})$ は，「$\mathrm{DISJ}_{N\times N}(x,y) = 1$ のとき，かつその時に限り $I^{x,y}$

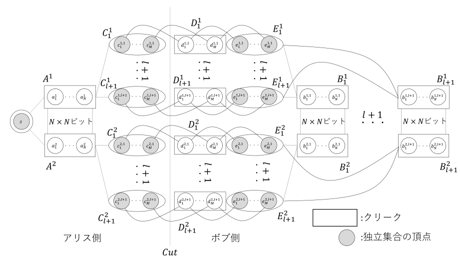

図 4: $G^{x,y} = (V^{x,y}, E^{x,y})$

が k-MIS でない」という特性を満たす．これを示すために，次の 2 点を確認する．

(i)$\mathrm{DISJ}_{N\times N}(x,y) = 1$ のとき，$I^{x,y}$ が k-MIS でない：$x_{i,j} = y_{i,j} = 1$ であると仮定する．このとき，

$$
\begin{aligned}
I' = \{s\} & \cup \bigcup_{1 \leq h \leq \ell+1} c^{1,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1} \\
& \cup \bigcup_{1 \leq h \leq \ell+1} c^{2,h}_{\alpha_{M,h}(j-1)+1} \\
& \cup \bigcup_{1 \leq h \leq \ell+1} e^{1,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1} \\
& \cup \bigcup_{1 \leq h \leq \ell+1} e^{2,h}_{\alpha_{M,h}(j-1)+1}, \\
S = \{a_i^1 \cup a_j^2\} & \cup \bigcup_{1 \leq h \leq \ell+1} b_j^{1,h} \cup \bigcup_{1 \leq h \leq \ell+1} b_j^{2,h} \\
& \cup \bigcup_{1 \leq h \leq \ell+1} d^{1,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1} \\
& \cup \bigcup_{1 \leq h \leq \ell+1} d^{2,h}_{\alpha_{M,h}(j-1)+1}
\end{aligned}
$$

とすると $I \backslash I' \cup S$ は独立集合になる．ここで $|I'| = 4\ell + 5$ で $|S| = 4\ell + 6$ であることから，$k = 4\ell + 5$ に対して I は k-MIS でないことが確認できる．

(ii)$\mathrm{DISJ}_{N\times N}(x,y) = 0$ のとき，$I^{x,y}$ が k-MIS である：グラフに与えられている独立集合が k-MIS でないと仮定する．このとき，$I' \subseteq I$ をサイズ k 以下の独立集合，$S \subseteq V \backslash I$ を $(I \backslash I') \cup S$ が独立集合になるサイズ $|I'|+1$ 以上の頂点集合とする．また，$(A^1 \cup A^2) \cap S$ を満たす頂点の数を $num(A)$，$\bigcup_{1 \leq i \leq \ell+1}(B_i^1 \cup B_i^2) \cap S$ を満たす頂点の数を $num(B)$，

$\left(\bigcup_{1\le i\le \ell+1} C_i^1 \cup \bigcup_{1\le i\le \ell+1} C_i^2\right) \cap S$ を満たす頂点の数を $num(C)$，$\left(\bigcup_{1\le i\le \ell+1} D_i^1 \cup \bigcup_{1\le i\le \ell+1} D_i^2\right) \cap S$ を満たす頂点の数を $num(D)$，$\left(\bigcup_{1\le i\le \ell+1} E_i^1 \cup \bigcup_{1\le i\le \ell+1} E_i^2\right) \cap S$ を満たす頂点の数を $num(E)$ とする．任意の $1 \le i \le M$ と $1 \le j \le \ell+1$ に対して $d_i^{1,j}$ を独立集合に追加するには $c_i^{1,j}$ と $e_i^{1,j}$ を独立集合から取り除く必要がある．また，任意の $1 \le i \le M$ と $1 \le j \le l+1$ に対して $d_i^{2,j}$ を独立集合に追加するには $c_i^{2,j}$ と $e_i^{2,j}$ を独立集合から取り除く必要がある．従って，$num(D)$ の値は $num(C)$ によって上から抑えられる．また，$num(D)$ の値は $num(E)$ によっても上から抑えられる．任意の $1 \le i \le N$ と $1 \le j \le \ell+1$ に対して，$b_i^{1,j}$ を独立集合に追加するには，$\bigcup_{1\le h\le \ell+1} e^{1,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1}$ を独立集合から取り除く必要がある．従って，任意の $1 \le i \le \ell+1$ に対して B_i^1 に含まれる頂点を独立集合に追加するには $\bigcup_{1\le j\le \ell+1} E_j^1$ に含まれる頂点を少なくとも $l+1$ 個独立集合から取り除く必要がある．同様に任意の $1 \le i \le N$ と $1 \le j \le \ell+1$ に対して，$b_i^{2,j}$ を独立集合に追加するには，$\bigcup_{1\le h\le \ell+1} e^{1,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1}$ を独立集合から取り除く必要がある．従って，任意の $1 \le i \le \ell+1$ に対して B_i^2 に含まれる頂点を独立集合に追加するには $\bigcup_{1\le j\le \ell+1} E_j^2$ に含まれる頂点を少なくとも $\ell+1$ 個独立集合から取り除く必要がある．任意の $1 \le i \le 2$ と $1 \le j \le \ell+1$ に対して，B_j^i はクリークであるので，B_j^i に含まれる頂点は高々1 つしか独立集合に加えることができない．従って $\bigcup_{1\le i\le \ell+1} B_i^1$ から独立集合に加えられる頂点の数は高々$\ell+1$ 個であり，$\bigcup_{1\le i\le \ell+1} B_i^2$ から独立集合に加えられる頂点の数は高々$\ell+1$ 個であるので，$num(B)$ の値は $num(E)$ の値によって上から抑えられる．従って $|S|\ge |I'|+1$ を満たすには $num(A) \ge 1$ である必要があるが，A^1 と A^2 はそれぞれクリークあるため $num(A) = 1$ もしくは $num(A) = 2$ である．

はじめに $num(A) = 1$ の場合を考える．このとき，$A^1 \cup A^2$ に含まれる頂点を独立集合に追加するには頂点 s を独立集合から取り除かなければならない．従って $|I'|= 1 + num(C) + num(E)$ と $|S|= 1 + num(D) + num(B)$ が成り立ち，$num(C) \ge num(B), num(D) \ge num(E)$ より $|I'|\ge |S|$ が成り立つがこれは I' と S の選択に矛盾する．

次に $num(A) = 2$ の場合について考える．$num(A) = 1$ の場合と同様に $A^1 \cup A^2$ に含まれる頂点を独立集合に追加するには頂点 s を独立集合から取り除かなければならない．従って，$|I'|= 1 + num(C) + num(E)$ と $|S|= 2 + num(D) + num(B)$ が成り立つ．ここで $|S|\ge |I'|+1$ を満たすのは $num(C) = num(D)$ かつ $num(B) = num(E)$ のときのみである．また，任意の $1 \le i \le N$ に対して a_i^1 を独立集合に追加するには頂点集合 $\bigcup_{1\le j\le \ell+1} c^{1,j}_{\alpha_{M,j}(i-1)+1}$ を独立集合から取り除く必要がある．同様に任意の $1 \le i \le N$ に対して a_i^2 を独立集合に追加するには頂点集合 $\bigcup_{1\le j\le \ell+1} c^{2,j}_{\alpha_{M,j}(i-1)+1}$ を独立集合から取り除く必要がある．従って，$num(C) \ge 2(\ell+1)$ が成り立つ．また，$num(E) \ge num(D) = num(C) \ge 2(\ell+1)$ が成り立つ．ここで，$|I'|\le k = 4\ell+5$ であることから，$num(C) = num(E) = 2(\ell+1)$ となる．

$S \cap (A^1 \cup A^2)$ に含まれる頂点を a_i^1 と a_j^2 とする．a_i^1 と a_j^2 を独立集合に加えるために取り除かれる頂点は $\{s\} \cup \bigcup_{1\le h\le \ell+1} c^{1,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1} \cup \bigcup_{1\le h\le \ell+1} c^{2,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1}$ である．このとき，任意の $\bigcup_{1\le i\le \ell+1}(D_i^1 \cup D_i^2)$ に含まれる頂点で独立集合に含まれる可能性があるのは，$\bigcup_{1\le h\le \ell+1} d^{1,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1} \cup \bigcup_{1\le h\le \ell+1} d^{2,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1}$ のみである．これらの頂点を独立集合に追加するには $\bigcup_{1\le h\le \ell+1} e^{1,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1} \cup \bigcup_{1\le h\le \ell+1} e^{2,h}_{\alpha_{M,h}(i-1)+1}$ を独立集合から取り除かなければならない．このとき，B_1^1 と B_1^2 で新しく独立集合に加えられる可能性があるのは $b_i^{1,1}$ と $b_j^{2,1}$ だけである．$b_i^{1,1}$ と $b_j^{2,1}$ の両方を独立集合に加えられるのは $b_i^{1,1}$ と $b_j^{2,1}$ の間に辺が存在しないときでありこれは $y_{i,j} = 1$ を意味する．また，a_i^1 と a_j^2 が独立集合に含まれることから，a_i^1 と a_j^2 の間に辺が存在しない．これは $x_{i,j} = 1$ を意味するが $\mathrm{DISJ}_{N\times N}(x, y) = 0$ に矛盾する．

今回，$N \times N$ ビットの交叉判定インスタンスをグラフに埋め込んでおり，カット辺のサイズ $|Cut| = 2(\ell+1) \cdot M = 2(\ell+1) \cdot N^{1/(\ell+1)}$ であることが分かる．CONGEST モデルにおいてグラフ上に与えられた独立集合が k-MIS であるかどうかを r ラウンドで判定するアルゴリズム $\mathcal{A}$ が存在したとすると，定理??より $\mathcal{A}$ は少なくとも $r = \Omega\left(N \times N/2(\ell+1) \cdot N^{1/(\ell+1)} \cdot \log n\right) = \tilde{\Omega}\left(N^{2-\frac{1}{\ell+1}}/\ell\right)$ ラウンドを必要とする．s は 1 頂点，任意の $1 \leq j \leq \ell+1, h \in \{1,2\}$ に対して頂点集合 A^h, B^h_j はそれぞれ N 頂点で，C^h_j, D^h_j, E^h_j の頂点集合はそれぞれ $M = N^{1/(\ell+1)}$ 頂点で構成されているため，グラフ全体の頂点数 n は $n = O(N)$ である．したがって $N = \Omega(n)$ になるため，$\tilde{\Omega}\left(n^{2-\frac{1}{\ell+1}}/\ell\right)$ ラウンドの下界を得ることができる．

5 まとめと今後の課題

5.1 まとめ

本研究では k-極大独立集合検証問題に CONGEST モデルにおける計算複雑性を示した．具体的には，1-MIS 検証問題に対する $O(1)$ ラウンドの上界，2-MIS 検証問題に対する $\tilde{\Omega}(\sqrt{n})$ ラウンドの下界，3-MIS 検証問題に対する $\tilde{\Omega}(n)$ ラウンドの下界，k-MIS 検証問題 ($k = 4\ell+5, \ell \geq 1$) に対する $\tilde{\Omega}\left(n^{2-\frac{1}{\ell+1}}/\ell\right)$ ラウンドの下界を証明した．

5.2 今後の課題

小節 4.3 で一般の k に対する k-MIS 検証問題の下界を証明したが，$k = 4, ..., 8$ については現在 $k = 3$ と同じ下界しか得られていない．この下界をよりタイトにできるかが今後の課題である．また，1-MIS の構成問題が小定数 $\epsilon > 0$ に対して $\Omega(n^{\epsilon})$ ラウンドの下界を持つかどうかは未解決であるが，この下界を本稿で提案した手法に基づいて証明することは困難であり，可能であるとするならば何らかの新たな証明手法が必要と思われる．また上界に関しては，$k = 1$，$k = 2$ であっても，現在知られている最速のアルゴリズムは $O(n)$ ラウンドであり，n に関して劣線形時間のアルゴリズムが得られるかどうかは興味深い未解決問題である．