令和2年度　　修士論文概要		
k-極大独立集合検証問題の分散計算複雑性	片山・金研究室	佐藤 僚祐
	No. 31414050	Ryosuke Sato

1　はじめに

分散グラフアルゴリズムとは, 計算機を頂点, 辺を通信リンクとみなしてネットワークをモデル化したグラフ上において, そのネットワーク自身を入力として様々な問題を解く枠組みである. 分散アルゴリズムにおける代表的なモデルのひとつとして *CONGEST* モデルが存在する.*CONGEST* モデルにおいて, 各ノードは同期して同じアルゴリズムを実行して入力グラフ上の問題を解決する. 各ノードは各ラウンドで (i)b ビットのメッセージを近傍に送信し, (ii) 近傍からメッセージを受信し,(iii) 内部計算を行う. 一般に,$b = \log n$ を想定する.

組み合わせ最適化問題の一つである最大独立集合の分散アルゴリズムに対する多くの研究がされている. 各頂点が隣接していない頂点部分集合を独立集合といい, 最大独立集合とは重みなしグラフにおいては頂点数が最も多い独立集合, 重み付きグラフにおいては合計重みが最も大きい独立集合である. 最大独立集合の複雑性としては, 頂点の最大次数を Δ としたとき, 最大重み付き独立集合の $(1+\varepsilon)\cdot\Delta$-近似を高確率で見つけるアルゴリズムに対する $(\frac{poly(\log\log n)}{\varepsilon})$ ラウンドの上限や, 最大独立集合の $(\frac{1}{2}+\varepsilon)$-近似を見つけるアルゴリズムに対する $\Omega(\frac{n}{(\log n)^3})$ ラウンドの下限が知られている.

大きなサイズの独立集合は経済学, 計算生物学, 符号理論, 実験計画法など様々な分野への応用に用いられるが, そもそも最大独立集合問題は NP 完全であり, 頂点数 n に対して n の多項式時間で解くことは, その近似を含めて絶望的であるとされている. 分散化によって近似アルゴリズムの複雑性の議論を行っても,(iii) の内部計算に指数時間必要とするためこの議論の妥当性にはやや疑問が残る. そこで今回, 我々は最大独立集合の局所最適解である k-極大独立集合 (k-Maximal Independet Set, k-MIS) について考える. 独立集合のうち,k 個の頂点をその集合から取り除いて独立集合を維持したまま $k+1$ 個以上の頂点を追加することができないとき, その独立集合を k-MISといい,k-MIS 問題は集中型アルゴリズムによって多項式時間で解くことができる.

今回は k-MIS の検証問題 (verification) に着目し, その複雑性について議論を行った.k-MIS 問題に対する一般的なアプローチは, ある 1 つの独立集合からスタートし,(I) 現在の状態が k-MIS であるか判定する.(II)k-MIS であればそれを出力, そうでなければ状態を更新. というフェーズを含む.k-MIS 検証問題とはネットワーク上に独立集合が与えられ, それが k-MIS かどうかを判定する問題であり,(I) に対応しているため,k-MIS 問題と関連付けることができる.

今回, 我々は 3 つの極大独立集合検証問題に対する複雑性の結果を提案する. 最初に,1-MIS 検証問題に対する $O(1)$ ラウンドアルゴリズムを提案する. 次に,2-MIS 検証問題に対するアルゴリズムの $\Omega(\sqrt{n})$ ラウンドの下限を提案する. 最後に,3-MIS 検証問題に対するアルゴリズムの $\Omega(n)$ ラウンドの下限を提案し, それを一般の k-MIS に拡張できないかを考える. 後半の 2 つに関しては二者間通信複雑性からの帰着を用いている.

二者間通信複雑性とは...