平成 30 年度
卒業論文

最大 k-plex 問題における
準指数時間アルゴリズム

名古屋工業大学　情報工学科

所属: 泉研究室

平成 27 年度入学　27115067 佐藤　僚祐

目 次

第1章

はじめに

1.1 研究背景

近年, 凝集性のグラフの検出はソーシャルネットワークの分野において大きな注目を集めている. 凝集性のグラフのひとつにクリークがある. しかし, クリークは制約が厳しく扱いづらい面がある. そこで, 代わりに k-plex が用いられる場合があり,k-plex はクリークの緩和モデルとなっている. グラフ中の最も大きい k-plex を検出する問題を最大 k-plex 問題という. 最大 k-plex 問題は NP 完全であり, 頂点数 n に対して n の多項式時間で解くことができないことが知られている.

現在, 最大 k-plex 問題を $\sigma_k^n n^{O(1)}$ ($\sigma_k < 2$ は k に関する値) で解くアルゴリズムがあることが知られている. これは 2^n という理論的限界を破った最初のアルゴリズムである. この論文では最大 k-plex 問題を, 辺の本数 m に対して $n^k 2^{O(\sqrt{m})}$ アルゴリズムを提案する. このアルゴリズムも同様に 2^n という理論的限界を破るアルゴリズムである.

1.2 本研究の成果

本研究では, 最大 2-plex 問題を $n^2 2^{O(\sqrt{m})}$ で解くアルゴリズムを提案する. さらにその発展として, 最大 k-plex 問題を $n^k 2^{O(\sqrt{m})}$ で解くアルゴリズムを提案する.

1.3 論文の構成

本論文は全 4 章で構成される. 第 2 章ではグラフの構造と用語の定義をしている. 第 3 章では既存の最大クリーク問題におけるアルゴリズムの導入とそれを応用した最大 2-plex 問題と最大 k-plex 問題のアルゴリズムの提案を行っている. 第 4 章ではまとめと今後の課題について述べている.

第2章

諸定義

2.1 グラフの構造

本論文中のグラフ $G = (V, E)$ は頂点数 $n = |V|$ と辺の本数 $m = |E|$ を持つ単純無向グラフとする. グラフ G の頂点部分集合 S によって誘導される誘導部分グラフを $G[S]$ と表す. 頂点 v に辺が接続されている頂点を v の近傍と呼び,$N(v)$ と表す. 頂点 (u, v) 間の最短パスの本数を頂点 (u, v) の距離とする.

2.2 最大クリークと最大 k-plex

グラフ G の頂点部分集合 S が完全グラフとき,S をクリークといい, クリークのうち最大サイズのものを見つける問題を最大クリーク問題という. 一方,$G[S]$ の全ての頂点が少なくとも $|S| - k$ の次数を持つとき, S を k-plex といい,k-plex のうち最大サイズのものを見つける問題を最大 k-plex 問題という.

第 3 章

最大 2-plex 問題と最大 k-plex 問題の準指数時間アルゴリズム

3.1　最大クリーク問題

以下に, 既存の最大クリーク問題に関する定理とその証明を示す.

定理 3.1. m 本の辺を持ったグラフの最大クリーク問題は $2^{O(\sqrt{m})}$ 時間で解くことができる.

証明. G を連結グラフとする. 最小次数の頂点 v を選ぶ. もし v の次数が $\sqrt{2m}$ 以上であるならば,

$$2m = \sum_{v \in V} |N(v)| \geqq n\sqrt{2m}$$

であるから $n \leqq \sqrt{2m}$ である. 全ての可能性のある頂点集合を計算するブルートフォースアルゴリズムの実行時間は $n2^{O(n)} = n2^{O(\sqrt{m})}$ となる. 以下 v の次数は $\sqrt{2m}$ 未満であるとする.

G 中の最大サイズのクリーク C を見つけるブランチングアルゴリズムを考える. 以下のような二つの部分問題にブランチする.

1. v が C 中の頂点の一つである
2. v が C 中の頂点の一つでない

一つ目の部分問題では $|N(v)|$ の全ての頂点部分集合をブルートフォースによって探索し

て v を含んだ最大サイズのクリークを見つける. 二つ目の部分問題では v を G から削除してアルゴリズムを再帰的に呼び出す.

このアルゴリズムのステップ数が多くとも $n2^{\sqrt{2m}}$ になることを m への帰納法によって証明する.

- $m = 0$ のとき,G はただ一つのクリークを持ち, その大きさは 1 である.
- $v \in C$ の場合に対応した部分問題を解くために, ブルートフォースを使って $|N(v)|$ 中の最大サイズのクリーク C' を選ぶ.$C = C' \cup v$ である.$|N(v)| < \sqrt{2m}$ であるから, 必要なステップ数は多くとも $2^{\sqrt{2m}}$ ステップである.
- $v \notin C$ の場合, 帰納法の仮定によって問題は多くとも $(n-1)2^{\sqrt{2m}}$ ステップで解ける.

ゆえにアルゴリズムの合計のステップ数は

$$2^{\sqrt{2m}} + (n-1)2^{\sqrt{2m}} = n2^{\sqrt{2m}}$$

でありその実行時間は $2^{O(\sqrt{m})}$ である.

3.2 最大 2-plex 問題

最大 2-plex 問題の準指数時間アルゴリズムを提案するために, 以下に 2 つの補題を示す.

補題 3.1. S を 2-plex の頂点集合とする. ある頂点 v が S に含まれているとき, v から距離が 3 以上離れた頂点は S に含まれない.

証明. v は 2-plex の頂点集合 S に含まれているとする. v から距離が 3 離れた頂点を a,v から距離が 2 離れており a と隣接している頂点を b とする.2-plex の定義より,S 中に含まれる全ての頂点は少なくとも $|S| - 2$ の次数を持つ, つまり S 中に含まれる頂点は S 中の $|S| - 1$ 頂点と隣接しているはずである. もし a が S 中に含まれる頂点であると仮定すると, v は a とも b とも隣接していないため矛盾する. したがって a は S に含まれない. 距離が 4 以上離れている頂点についても同様である.

補題 3.2. S を 2-plex の頂点集合とする. ある頂点 v が S に含まれているとき, v から距離が 2 離れた頂点は二つ以上は S に含まれない.

証明. v は 2-plex の頂点集合 S に含まれているとする. v から距離が 2 離れた二つの頂点をそれぞれ a,b とする.S 中に含まれる頂点は S 中の $|S|-1$ 頂点と隣接しているはずである. もし a と b が両方とも S 中に含まれると仮定すると,v は a とも b とも隣接していないため矛盾する. したがって a と b は両方とも S に含まれることはない.

これらの補題をふまえ, 最大 2-plex 問題に関する定理とその証明を示す.

定理 3.2. m 本の辺を持ったグラフの最大 2-plex 問題は $2^{O(\sqrt{m})}$ 時間で解くことができる.

証明. G を連結グラフとする. 最小次数の頂点 v を選ぶ. 定理 3.1 と同様の議論により v の次数は $\sqrt{2m}$ 未満であるとする.

G 中の最大サイズの 2-plex である S を見つけるために二つの部分問題にブランチする.

1. v が S 中の頂点の一つである
2. v が S 中の頂点の一つでない

一つ目の部分問題では v から距離 2 以内にあり,S に含まれる可能性のある頂点部分集合を探索して v を含んだ最大 2-plex を見つける. 二つ目の部分問題では v を G から削除してアルゴリズムを再帰的に呼び出す.

このアルゴリズムのステップ数が多くとも $n^2 2^{\sqrt{2m}}$ になることを m への帰納法によって証明する.

- $m=0$ のとき,G はただ一つの 2-plex を持ち, その大きさは 1 である.
- $v \in C$ の場合に対応した部分問題を解くために,v を含んだ最大サイズの 2-plex である S を選ぶ. 補題 3.1 より,v から距離 3 以上離れている頂点は S に含まれない. 補題 3.2 より,v から距離 2 離れている頂点は二つ以上は S に含まれない. v の近傍の頂点数を M,v から距離 2 離れた頂点数を N とすると,S を選ぶのに必要な頂点数は $2^M \times N$ である.$M < \sqrt{2m}$,$N \leqq n$ であるから, 必要なステップ数は多くとも $2^{\sqrt{2m}}$ ステップである.

- $v \notin C$ の場合, 帰納法の仮定によって問題は多くとも $(n-1)n2^{\sqrt{2m}}$ ステップで解ける.

ゆえにアルゴリズムの合計のステップ数は

$$n2^{\sqrt{2m}} + (n-1)n2^{\sqrt{2m}} = n^2 2^{\sqrt{2m}}$$

でありその実行時間は $2^{O(\sqrt{m})}$ である.

3.3 最大 k-plex 問題

結果どうこう

第4章

まとめと今後の課題

4.1　まとめ

まとめました

4.2　今後の課題

こうこうこうがかだいです

謝辞

本研究の機会を与え，数々の御指導を賜りました泉泰介准教授に深く感謝致します．また，本研究を進めるにあたり多くの助言を頂き，様々な御協力を頂きました泉研究室の学生のみなさんに深く感謝致します．

参考文献

あんまりない