Tarea 5 - Problemas físicos

4/11/2022

JORDÁN AARÓN DUARTE MARTÍNEZ

Problemas

1. Considerando un sistema en una dimension y sabiendo que:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \tag{2}$$

Demuestre que la posición se puede ver como:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{3}$$

Para un tiempo inicial $t_0 = 0$ y con $\vec{x_0}$ y $\vec{v_0}$ la posicion y velocidad inicial en el sistema.

Resolución:

Podemos integrar 1 para obtener una ecuación para la velocidad, tal que así:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{v}}{dt} \quad dt = \int_{t_0}^{t} \vec{a_0} \quad dt \tag{4}$$

Usando en 4 el teorema de cambio de variable para el miembro izquierdo de la ecuación:

$$\int_{\vec{v_0}}^{v(\vec{t})} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a_0} \quad dt \tag{5}$$

Aplicando la regla de Barrow en 5:

$$\vec{v} \mid_{\vec{v_0}}^{v(\vec{t})} = \vec{a}t \mid_{t_0}^{t} \tag{6}$$

Desarrollando 6:

$$v(\vec{t}) - \vec{v_0} = \vec{a_0}(t - t_0) \tag{7}$$

Pero organizando, y considerando que $t_0 = 0$, en 7 nos da:

$$v(\vec{t}) = \vec{v_0} + \vec{a_0}t \tag{8}$$

Remplazando 8 en el miembro izquierdo de 2

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v_0} + \vec{a_0}t \tag{9}$$

E integrando 9 se obtiene:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{x}}{dt} \quad dt = \int_{t_0}^{t} [\vec{v_0} + \vec{a_0}t] \quad dt \tag{10}$$

Usando en 10 el teorema de cambio de variable para el miembro izquierdo de la ecuación:

$$\int_{\vec{x_0}}^{\vec{x}} d\vec{x} = \int_{t_0}^{t} [\vec{v_0} + \vec{a_0}t] \quad dt \tag{11}$$

Desarrollando 11:

$$\int_{\vec{x_0}}^{\vec{x}} d\vec{x} = \int_{t_0}^{t} \vec{v_0} \quad dt + \int_{t_0}^{t} \vec{a_0}t \quad dt \tag{12}$$

Aplicando la regla de Barrow en 12:

$$\vec{x} \mid_{\vec{x_0}}^{\vec{x}} = \vec{v_0}t \mid_{t_0}^{t} + \frac{\vec{a_0}t^2}{2} \mid_{t_0}^{t} \tag{13}$$

Desarrollando 13:

$$\vec{x} - \vec{x_0} = \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{\vec{a_0}}{2}(t - t_0)^2 \tag{14}$$

Pero organizando, y considerando que $t_0 = 0$, en 14 nos da:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{15}$$

Y como 3 es igual a 15, entonces queda demostrado que la posición puede darse por la ecuación susodicha $\blacksquare$.

2. Considere una carrera entre dos coches, estos arrancan del reposo pero el coche uno hace trampa (cosa que nunca pasa), saliendo un segundo antes que el primero, si los autos tienen una aceleracion de 3.5 m/s y 4.9 m/s respectivamente.

   (a) ¿En qué momento el auto dos alcanza al auto uno, i.e. $t =$?

   Resolución:

   Tomano a $\vec{x_0} = 0$, y que el tiempo para cuando se alcanza un auto a otro es: $t_2 = t - 1$, para auto 2, y $t_1 = t$ para auto 1.

   Para el auto uno tenemos que:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a_1}t^2 \tag{16}$$

   Para el auto dos tenemos que:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v_0}(t-1) + \frac{1}{2}\vec{a_2}(t-1)^2 \tag{17}$$

   Igualando 16 y 17, y eliminando $\vec{x_0}$ y $\vec{v_0}t$ por su valor 0:

$$\frac{1}{2}\vec{a_1}t^2 = \frac{1}{2}\vec{a_2}(t-1)^2 \iff \frac{\vec{a_1}}{2}t^2 = \frac{\vec{a_2}}{2}(t^2 - 2t + 1) \tag{18}$$

$$\frac{\vec{a_1}}{2}t^2 = \frac{\vec{a_2}}{2}t^2 - \frac{\vec{a_2}}{2}2t + \frac{\vec{a_2}}{2} \iff \frac{\vec{a_2}}{2}t^2 - \frac{\vec{a_1}}{2}t^2 - \frac{\vec{a_2}}{2}2t + \frac{\vec{a_2}}{2} = 0 \tag{19}$$

   Como se ve al final del desarrollo de 18 a 19, podemos obteneter el factor común de donde está t^2, y así usar la fórmula general tal que así:

$$(\frac{\vec{a_2}}{2} - \frac{\vec{a_1}}{2})t^2 - \vec{a_2}t + \frac{\vec{a_2}}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{-(-\vec{a_2}) \pm \sqrt{(-\vec{a_2})^2 - 4(\frac{\vec{a_2}}{2} - \frac{\vec{a_1}}{2})(\frac{\vec{a_2}}{2})}}{2(\frac{\vec{a_2}}{2} - \frac{\vec{a_1}}{2})} \tag{20}$$

   Reemplazando las variables por sus valores numéricos en 20:

$$t = \frac{-(-4.9) \pm \sqrt{(-4.9)^2 - 4(\frac{4.9}{2} - \frac{3.5}{2})(\frac{4.9}{2})}}{2(\frac{4.9}{2} - \frac{3.5}{2})} = \frac{4.9 \pm \sqrt{24.01 - 4(2.45 - 1.75)(2.45)}}{2(2.45 - 1.75)} \tag{21}$$

$$t = \frac{4.9 \pm \sqrt{24.01 - 6.86}}{1.4} = \frac{4.9 \pm \sqrt{17.15}}{1.4} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{343/20}}{7/5} \tag{22}$$

   Una vez terminado el desarrollo de 21 a 22 calculamos t', t":

$$t' = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{343/20}}{7/5} \approx 6.46 \qquad t'' = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{343/20}}{7/5} \approx 0.54 \tag{23}$$

Pero como es imposible que el auto dos haya alcanzado al uno en t”, el t a tomar en cuenta de 23 es t’.

$\therefore$ **El auto dos alcanza al auto uno en el $t \approx 6.46$**, tomando como tiempo inicial inicial igual a 0 el instante en el que el auto 1 sale, es decir, un segundo antes de que iniciara la carrera.

(b) ¿Cuál será la posicion cuando el inciso (a) ocurra, $\vec{x} =$?

Resolución:

Tomando el lado izquierdo de 18, y remplazandolo las variables por sus valore numéricos, obtenemos:

$$\frac{1}{2}(3.5)(6.46)^2 = \frac{1}{2}(4.9)(6.46-1)^2 \iff (1.75)(6.46)^2 = (2.45)(5.46)^2 \iff 72.98 = 72.98 \quad (24)$$

$\therefore$ Gracias a la operación de 24 se puede afirmar con seguridad que **la posición cuando el inciso (a) ocurra será de aproximadamente 72.98 metros.**

(c) ¿Cuál será la velocidad que tendrá en ese punto para ambos autos?

Resolución:

Recordando la fórmula para la velocidad en MUA:

$$\vec{v_1} = \vec{v_0} + \vec{a_1}t \qquad \vec{v_2} = \vec{v_0} + \vec{a_2}(t-1) \quad (25)$$

Pero como $v_0 = 0$, entonces 25 queda como:

$$\vec{v_1} = \vec{a_1}t \qquad \vec{v_2} = \vec{a_2}(t-1) \quad (26)$$

Tomando 26, y remplazandolo las variables por sus valore numéricos, obtenemos:

$$\vec{v_1} = (3.5)(6.46) \approx 22.60 \qquad \vec{v_2} = (4.9)(6.46-1) = (4.9)(5.46) \approx 26.74 \quad (27)$$

$\therefore$ Por 27 se puede afirmar con seguridad que **la velocidad aproximada que tendrá en ese punto el auto 1 es de 22.60 m/s, mientrás que la del auto 2 será de 26.74 m/s.**

(d) Toma 5 tiempos diferentes a partir de que los autos arrancan, sin tomar el tiempo inicial, 3 antes del tiempo donde los autos se encuentran y dos posteriores a ese tiempo, realicen dos tablas, una para cada auto, con la siguiente informacion; aceleracion, tiempo, posicion y velocidad como se muestra en el Cuadro 1.

Auto 1			
No dependiente del tiempo	Dependientes del tiempo		
$\vec{a}[m/s^2]$	$t[s]$	$\vec{x}[m]$	$\vec{v}[m/s]$
Valor de la aceleración			

Tabelle 1: Cinemática del Auto 1 (Ejemplo)

Nótese que las celdas con la información "No dependiente del tiempo" y "Dependiente del tiempo" estan orientadas a la izquierda.

Intenten comparar las tablas correspondientes pensando que pasaría pasando la posición donde los autos se encuentran.

Resolución:

Tomando el tiempo inicial cuando arranca el auto 1, y tomando la fórmula de 26 y la parte izquierda de 18 notamos que:

$$\vec{x_1} = \frac{1}{2}\vec{a_1}t^2, \quad \vec{x_2} = \frac{1}{2}\vec{a_2}(t-1)^2, \quad \vec{v_1} = \vec{a_1}t, \quad \vec{v_2} = \vec{a_2}(t-1) \tag{28}$$

Con las ecuaciones de 28, considerando los tiempos: $t'_1 = 2s, t'_2 = 4s, t'_3 = 6s, t'_4 = 8s, t'_5 = 10s$, y remplazando las variables por sus valore numéricos, obtenemos:

$$\vec{x_{1.1}} = \frac{3.5}{2}(2)^2, \quad \vec{x_{1.2}} = \frac{3.5}{2}(4)^2, \quad \vec{x_{1.3}} = \frac{3.5}{2}(6)^2, \quad \vec{x_{1.4}} = \frac{3.5}{2}(8)^2, \quad \vec{x_{1.5}} = \frac{3.5}{2}(10)^2 \tag{29}$$

$$\vec{x_{2.1}} = \frac{4.9}{2}(1)^2, \quad \vec{x_{2.2}} = \frac{4.9}{2}(3)^2, \quad \vec{x_{2.3}} = \frac{4.9}{2}(5)^2, \quad \vec{x_{2.4}} = \frac{4.9}{2}(7)^2, \quad \vec{x_{2.5}} = \frac{4.9}{2}(9)^2 \tag{30}$$

$$\vec{v_{1.1}} = (3.5)(2), \quad \vec{v_{1.2}} = (3.5)(4), \quad \vec{v_{1.3}} = (3.5)(6), \quad \vec{v_{1.4}} = (3.5)(8), \quad \vec{v_{1.5}} = (3.5)(10) \tag{31}$$

$$\vec{v_{2.1}} = (4.9)(1), \quad \vec{v_{2.2}} = (4.9)(3), \quad \vec{v_{2.3}} = (4.9)(5), \quad \vec{v_{2.4}} = (4.9)(7), \quad \vec{v_{2.5}} = (4.9)(9) \tag{32}$$

Así de 29, 30, 31 y 32 nos dan correspondientemente:

$$\vec{x_{1.1}} = 7m, \quad \vec{x_{1.2}} = 28m, \quad \vec{x_{1.3}} = 63m, \quad \vec{x_{1.4}} = 112m, \quad \vec{x_{1.5}} = 175m \tag{33}$$

$$\vec{x_{2.1}} = 2.45m, \quad \vec{x_{2.2}} = 22.05m, \quad \vec{x_{2.3}} = 61.25m, \quad \vec{x_{2.4}} = 120.05m, \quad \vec{x_{2.5}} = 198.45m \quad (34)$$

$$\vec{v_{1.1}} = 7m/s, \quad \vec{v_{1.2}} = 14m/s, \quad \vec{v_{1.3}} = 21m/s, \quad \vec{v_{1.4}} = 28m/s, \quad \vec{v_{1.5}} = 35m/s \quad (35)$$

$$\vec{v_{2.1}} = 4.9m/s, \quad \vec{v_{2.2}} = 14.7m/s, \quad \vec{v_{2.3}} = 24.5m/s, \quad \vec{v_{2.4}} = 34.3m/s, \quad \vec{v_{2.5}} = 44.1m/s \quad (36)$$

Con los datos de 33, 34, 35 y 36 podemos hacer las siguientes tablas:

Auto 1			
No dependiente del tiempo	Dependientes del tiempo		
$\vec{a}[m/s^2]$	$t[s]$	$\vec{x}[m]$	$\vec{v}[m/s]$
3.5	2	7	7
	4	28	14
	6	63	21
	8	112	28
	10	175	35

Tabelle 2: Cinemática del Auto 1

Auto 2			
No dependiente del tiempo	Dependientes del tiempo		
$\vec{a}[m/s^2]$	$t[s]$	$\vec{x}[m]$	$\vec{v}[m/s]$
4.9	2	2.45	4.9
	4	22.05	14.7
	6	61.25	24.5
	8	120.05	34.3
	10	198.45	44.1

Tabelle 3: Cinemática del Auto 2

Por último cabe mencionar que en las dos últimas filas de las tablas 2 y 3 (en los tiempos 8 y 10) se nota que el auto 2, a pesar de haber salido más tarde que el auto 1, supera en distancia al auto 1; no obstante, la explicación de ello se encuentra en que la aceleración del segundo coche es superior a la del primero, lo cual, además, se ve reflejado a partir del segundo 4 en ambas tablas, pues desde ese segundo la velocidad del automóvil 2 se mantiene superior a la del automóvil 1.

3. Considere el siguiente sistema, dos bloques de masas m_1 y m_2 estan unidos por una cuerda ideal y descansan sobre una superficie horizontal sin roce. Si una fuerza de magintud A se le aplica

al bloque de masa m_2 horizontalmente, en la dirección que muestra la Figura 1. Realicen los respectivos diagramas de cuerpos libres (usen powerpoint, pait, dibújenlo, lo que guste) y anénxelo como una imagen, a partir de ellos determinen la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda entre los bloques.

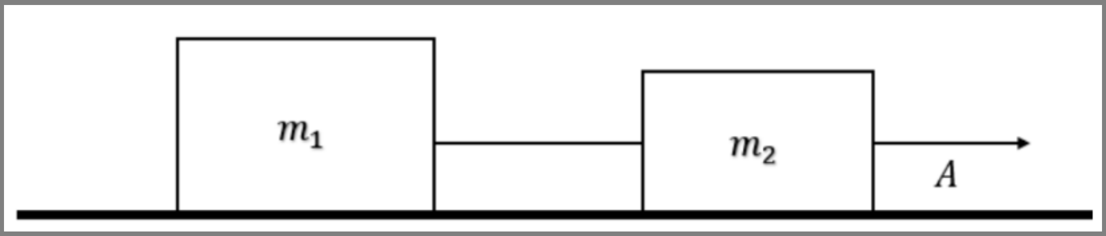

Abbildung 1: Sistema de dos bloques amarrados

Resolución:

Tomando en cuenta el siguiente diagrama de cuerpo libre:

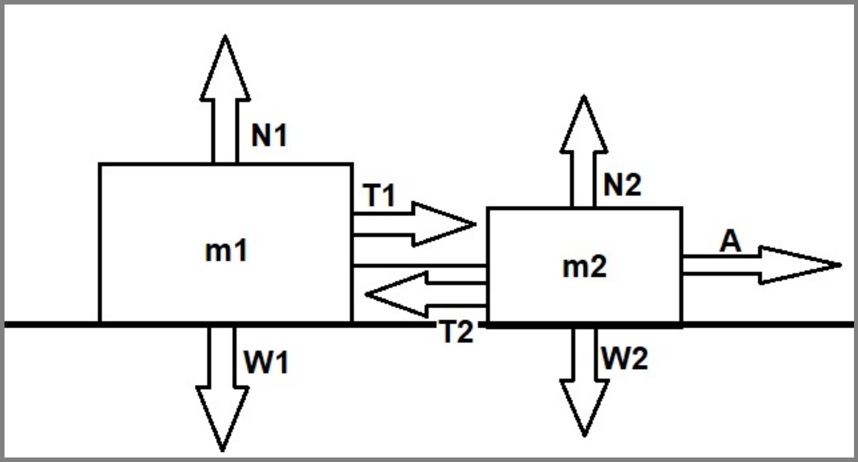

Abbildung 2: Diagrama cuerpo libre de dos bloques amarrados

Es fácil darse cuenta de que peso de las masas, en este caso, es paralelo a la fuerza normal, por lo que inmediatamente quedan descartadas ambas fuerzas a la hora de calcular la suma de las fuerzas que afectana a cada una de las masas, las cuales, por cierto, son:

$$\sum 1 = m_1\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{T_1} = m_1\vec{a} \tag{37}$$

$$\sum 2 = m_2\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} - \vec{T_2} = m_2\vec{a} \tag{38}$$

De este modo, es factible decir que la suma de los lados derechos de 37 y 38 nos darán un despeje aceptable para la aceleración, tal que así:

$$\vec{T_1} + \vec{A} - \vec{T_2} = m_1\vec{a} + m_2\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{T_1} - \vec{2} + \vec{A}}{m_1 + m_2} \tag{39}$$

Con lo cuál ya tendríamos una fórmula sencilla para la aceleración de todo el sistema en 39.

Ahora, para la tensión en la cuerda, hay que destacar que en la imagen 2 las fuerzas que actuan sobre la cuerda son, precisamente, la tensión 1 y la tensión 2, por lo cual la fórmula para la tensión sería:

$$\vec{T_1} = m_1\vec{a}, \quad \vec{T_2} = \vec{A} - m_2\vec{a} \quad \Rightarrow \quad T = \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{a}(m_1 - m_2) + \vec{A} \tag{40}$$

Y así se obtine la ecuación que determina la tensión de la cuerda, reflejada en 40.

Punto extra

Investiguen que hace la paquetería "hyperref" y expliquen que hace, citen su fuente donde fue investigado.

El paquete hyperref, por Overleaf, 2021, (\usepackage{hyperref}) es usado para tener un control adecuado de todo tipo de links y referencias a lo largo del texto, siendo esto último gracias a que las referencias previas citadas por el comando \ref{} se convierten automáticamente en links (que al darles click te llevaran directo a dónde está el objeto al que se hace referencia) al momento de aplicar la paquetería en cuestión.

Antes de continuar, cabe señalar que también nos da un mejor control en documento extensos al convertir en enlaces las líneas en la tabla de contenidos en cuestión.

Esta paquetería nos da los siguientes comandos nuevos:

- \url{link}.

  Este nos permite introducir cualquier link web en su forma "real"para hacerle referencia, y al clicar en él ir a la página de este.

- \href{link/nombre del archivo local}{nombre con el que aparecera en el texto}

  Sirve para lo mismo que el anterior comando, pero tiene la diferencia de que pone el enlace "oculto"y muestra, en su lugar, una palabra o frase que le atribuyamos; además de que con éste también se puede hacer referencia a archivos locales del documento.

- \hyperlink{la palabra/oración}{nombre con el que aparecera en el texto}

  Sirve para "enlazar"cualquier palabra del documento a otra parte usando como "link de referencia"(resaltado de algún color) la palabra que elijamos.

- \hypertarget{la palabra/oración}{nombre con el que aparecera en el texto}

  En palabras simples, funciona para lo mismo que el anterios comando, pero tiene la diferencia de que no resalta el texto de ningún color.

Cabe añadir que esta paquetería nos da la opción de personalizar ciertos parametro que se muestran en la tabla 4 y la tabla 5, siendo los de la primera tabla modificaciones para los links, y el segundo modificaciones especificas para agregar información adicional en el PDF, y cambiar la forma en que el visor del PDF muestra el archivo.

NOTA: Para ingresar todas estas modificaciones es necesario usar el comando \hypersetup{opción1,opción2,...}.

Tabelle 4: Modificaciones de links

Opción	**Valor default**	**Descripción**
hyperindex	true	Núm.s de pág.s de las entradas del índice convertidas en hipervínculos
linktocpage	false	Hace que los números de página, y no el texto, se vinculen al índice
breaklinks	false	Permite que los enlaces se dividan en varias líneas
colorlinks	false	Colorea el texto de los enlaces y anclas (visibles en la versión impresa)
linkcolor	red	Colorea los enlaces internos normales
anchorcolor	black	Color para el texto de anclaje
citecolor	green	Colorea las citas bibliográficas
filecolor	cyan	Colorea los enlaces que abren archivos locales
urlcolor	magenta	Color para las URL vinculadas
frenchlinks	false	Versalitas en lugar de colores para los enlaces
urlstyle{same}	same	Enlaces mostrados como texto normal

Tabelle 5: Modificaciones del PDF

Opción	**Valor default**	**Descripción**
bookmarks	true	Los marcadores de Acrobat están escritos de forma similar al índice
bookmarksopen	false	Marcadores motrados con todas sus subramificaciones expandidas
citebordercolor	0 1 0	Color del recuadro alrededor de las citas en formato RGB
filebordercolor	0 .5 .5	Color del recuadro alrededor de los links en formato RGB
linkbordercolor	1 0 0	Color del recuadro alrededor de los links normales en formato RGB
menubordercolor	1 0 0	Color del cuadro alrededor de los enlaces del menú en formato RGB
urlbordercolor	0 1 1	Color del cuadro alrededor de los enlaces a las URL en formato RGB
pdfpagemode	empty	Abre el PDF como: UseThumbs, UseOutlines o FullScreen
pdftitle		Establece el título del documento
pdfauthor		Establece el autor del documento
pdfstartpage	1	Determina en qué página se abre el archivo PDF

Literatur

Overleaf. (2021). *Hyperlinks - Overlife, Online LaTeX Editor*. https://www.overleaf.com/learn/latex/Hyperlinks.