

Uniwersytet Wrocławski
Kolegium Międzydziedzinowych Studiów Indywidualnych

Jakub Aleksander Miłoś

Nr albumu: 328818

**Zachowanie dyskretnie modelowanej
struktury terminowej stóp procentowych
w Polsce w okresie pandemii COVID-19**

Praca roczna
MIĘDZYOBSZAROWE STUDIA INDYWIDUALNE
Kierunek wiodący: EKONOMIA

Praca napisana pod kierunkiem
dr. hab. Piotra Borodulina-Nadziei, prof. UWr
Instytut Matematyczny UWr

Wrocław 2023

Streszczenie

Struktura terminowa stóp procentowych to ważne pojęcie w makroekonomii oraz teorii zarządzania portfelem inwestycyjnym. Praca pokazuje, jak dyskretnie modelowana struktura terminowa stóp procentowych zachowywała się w czasie od grudnia 2019 roku do grudnia 2022 roku w Polsce. Do wyznaczania struktury użyto dostosowanej do polskiego rynku metody *bootstrappingu* (modyfikacja metody powstała na potrzeby niniejszej pracy). Aby niezaznajomiony z matematyką finansową czytelnik mógł zrozumieć zmodyfikowaną metodę *bootstrappingu*, zdefiniowano i opisano: kapitalizację złożoną, wycenę obligacji o stałym oprocentowaniu, definicję struktury terminowej stóp procentowych oraz podręcznikową metodę *bootstrappingu*.

Słowa kluczowe

pandemia COVID-19, wartość pieniądza w czasie, obligacje o oprocentowaniu stałym, obligacje zerokuponowe, obligacje skarbowe, wycena obligacji, stopa zwrotu w terminie do wykupu, struktura terminowa stóp procentowych, metoda *bootstrappingu*

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

14.3 Ekonomia

Klasyfikacja tematyczna JEL

E43 Interest Rates: Determination, Term Structure, and Effects
G12 Asset Pricing, Trading Volume, Bond Interest Rates

Tytuł pracy w języku angielskim

Behaviour of the discretely modeled term structure of interest rates in Poland during the COVID-19 pandemic

Spis treści

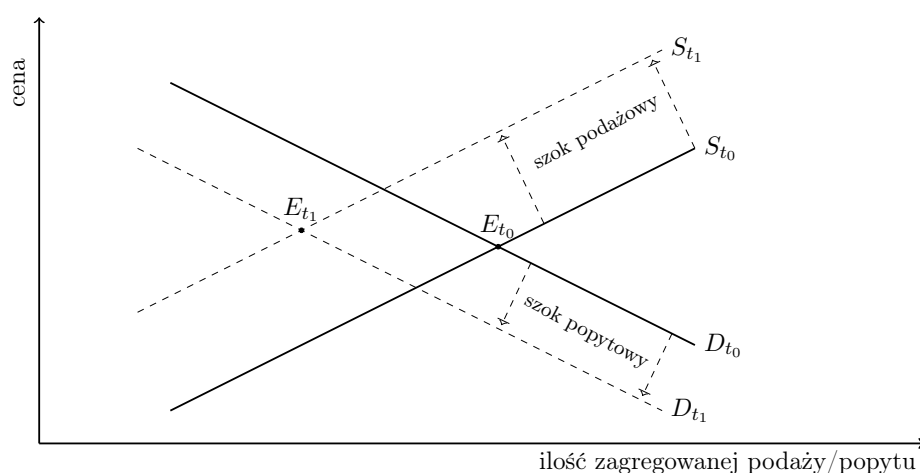
1. Wprowadzenie	5
1.1. Ekonomia a COVID-19	5
1.2. Cel i struktura oraz założenia pracy	7
2. Obligacja jako instrument finansowy oraz modele związane z jej wyceną	9
2.1. Czym jest obligacja?	9
2.2. Wartość pieniądza w czasie	10
2.3. Wycena obligacji o oprocentowaniu stałym	13
2.4. Stopa zwrotu w terminie do wykupu	15
3. Struktura terminowa stóp procentowych	17
3.1. Zdefiniowanie struktury stóp <i>spot</i> i stóp <i>forward</i>	17
3.2. Definicje a rzeczywistość	19
3.3. Metoda <i>bootstrappingu</i>	20
4. Zastosowanie zmodyfikowanej metody <i>bootstrappingu</i> na polskim rynku	23
4.1. Dostosowanie metody <i>bootstrappingu</i> do polskiego rynku	23
4.2. Przykład zastosowania	25
5. Struktura terminowych stóp procentowych w Polsce od grudnia 2019 roku do grudnia 2022 roku	29
5.1. Krzywe dochodowości	29
5.2. Podsumowanie	35
A. Kompilacja tabeli ze statystyk dziennych i tabeli ze statystyk miesięcznych	37
B. Kod programu w języku Python użyty do modelowania struktury terminowej stóp procentowych	43
Bibliografia	47

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Ekonomia a COVID-19

Pandemia COVID-19, która wybuchła pod koniec 2019 roku w Wuhan (prowincja Hubei, Chiny)¹, stała się olbrzymim wyzwaniem dla światowej gospodarki. Sposoby przeciwdziałania pandemii podjęte przez poszczególne kraje w I kwartale 2020 roku przyczyniły się do zerwania lub spowolnienia łańcuchów dostaw oraz do ograniczenia popytu konsumpcyjnego. Zmiany te doprowadziły w Polsce w pierwszej połowie 2020 roku do negatywnego szoku podażowego² oraz negatywnego szoku popytowego³.



Rysunek 1.1: Przesunięcie się krzywych podaży i popytu wywołane negatywnymi szokami⁴

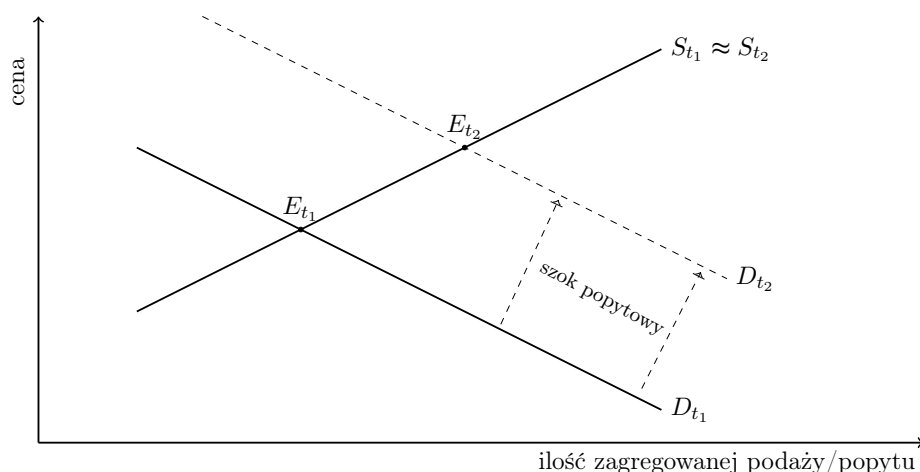
¹Wang C., Horby P. W., Hayden F. G., Gao G. F., *A novel coronavirus outbreak of global health concern*, „The Lancet”, Vol 395 No. 10223 (2020), s.470

²Nazarczuk J. M., Cicha-Nazarczuk M., Szczepańska K., *Wrażliwość polskiej gospodarki na zmiany wywołane pandemią COVID-19*, Instytut Badań Gospodarczych, Olsztyn 2022, s. 104

³https://stat.gov.pl/download/gfx/portalinformacyjny/pl/defaultaktualnosci/5480/9/3/1/informacja_gus_ws_zaktualizowanego_kwartalnego_szacunku_pkb_za_lata_2010-2021_i_1_i_2_kw_2022_r.xlsx, dostęp: 01.07.2023

⁴Przedstawione przesunięcia występują przy założeniu *ceteris paribus*. Inspirowane rysunkiem 4.9 z Cowen T., Tabarrok A., *Modern Principles: Microeconomics*, Worth Publishers, Nowy Jork 2015, s. 59.

Wraz z dalszym rozwojem pandemii sytuacja makroekonomiczna w Polsce zmieniała się dynamicznie. Część konsumentów w drugiej połowie 2020 roku zmniejszyła swoje obawy dotyczące potencjalnego załamania gospodarki⁵, co zapewne było jedną z przyczyn pozytywnego szoku popytowego, jaki nastąpił w tym czasie⁶. Jednak ów pozytywny szok, w wyniku powolnego odbudowywania się łańcuchów dostaw, nie był balansowany odpowiednim wzrostem podaży⁷, co *ceteris paribus* prowadziło do zwiększenia cen.



Rysunek 1.2: Przesunięcie się krzywej popytu wywołane pozytywnym szokiem⁸

Istotnie na opisany pozytywny szok popytowy oddziaływała również aktywna polityka antycykliczna rządu w postaci na przykład tarcz anty kryzysowych⁹. To wraz z luzowaniem ilościowym prowadzonym przez Narodowy Bank Polski wpłynęło na procentowy wzrost poziomu agregatu M1¹⁰ od 31.12.2019 do 31.12.2020 o 32,63%, a nominalny o 376 842,1 mln PLN z 1 154 871,6 mln PLN na 1 502 540,3 mln PLN. W tym samym okresie agregat M2¹¹ zanotował wzrost procentowy o 16,88%, co odpowiadało wzrostowi nominalnemu z 1 552 647,9 mln PLN na 1 814 748,9 mln PLN.

Agregat M1 przyrósł od 30.06.2019 do 30.06.2020 aż o 33,38%, taki wzrost M1 w

⁵Hamer K., Baran M., *Wpływ pandemii COVID-19 na zachowania, postawy i dobrostan Polaków - podsumowanie 10 miesięcy pandemii*, [bez wydawcy], [bez miejsca wydania] 2021, s. 4

⁶https://stat.gov.pl/download/gfx/portalinformacyjny/pl/defaultaktualnosci/5480/9/3/1/informacja_gus_ws_zaktualizowanego_kwartalnego_szacunku_pkb_za_lata_2010-2021_i_1_i_2_kw_2022_r.xlsx, dostęp: 01.07.2023

⁷Nazarczuk J. M., Cicha-Nazarczuk M., Szczepańska K., op. cit., s. 107

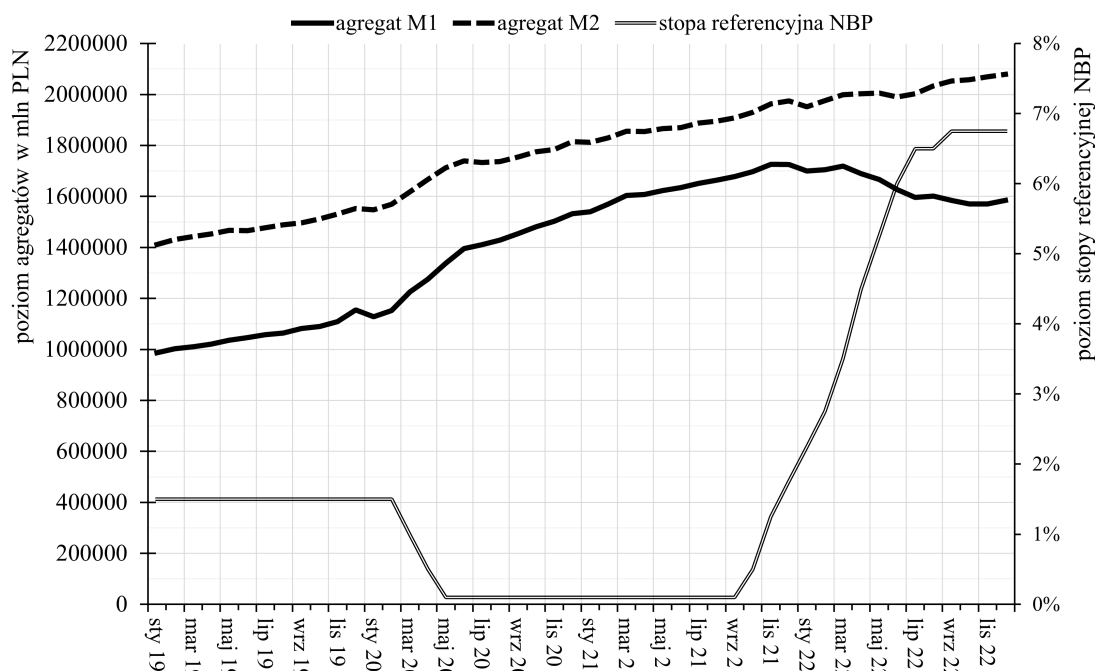
⁸Przedstawione przesunięcia występują przy założeniu *ceteris paribus*. Inspirowane rysunkiem 4.9 z Cowen T., Tabarrok A., op. cit., s. 59.

⁹Nazarczuk J. M., Cicha-Nazarczuk M., Szczepańska K., op. cit., s. 48

¹⁰Agregat M1 uwzględnia pieniądź gotówkowy w obiegu (poza kasami MIF) oraz depozyty i inne zobowiązania bieżące (złotowe i walutowe) wobec podmiotów krajowych innych niż MIF i instytucje rządowe szczebla centralnego.

¹¹Agregat M2 uwzględnia pieniądź M1 oraz depozyty i inne zobowiązania terminowe (złotowe i walutowe) z terminem pierwotnym do 2 lat włącznie wobec podmiotów krajowych innych niż MIF i instytucje rządowe szczebla centralnego.

przeciągu jednego roku nie był odnotowany w XXI wieku w Polsce¹². Z kolei agregat M2 od 31.05.2019 do 31.05.2020 przyrósł o 16,7%, wzrosty roczne tej wysokości (przekraczające 15%) były odnotowywane w Polsce w XXI wieku jedynie w trakcie globalnego kryzysu finansowego¹³. Pomimo tych historycznych przyrostów, Rada Polityki Pieniężnej zdecydowała się na pierwszą podwyżkę stopy referencyjnej dopiero 06.10.2021¹⁴; warto nadmienić, że w przeciągu pierwszych dziewięciu miesięcy 2021 roku agregaty M1 i M2 urosły odpowiednio o 9,56% oraz 5,14%.



Rysunek 1.3: Wykres poziomu agregatów M1 i M2 oraz poziomu stopy referencyjnej NBP od stycznia 2019 do grudnia 2022¹⁵

1.2 Cel i struktura oraz założenia pracy

Jak zostało powyżej zarysowane, pandemia COVID-19 była przyczyną bardzo gwałtownych zmian w polskiej i światowej gospodarce, wpłynęła ona również na rynek kapitałowy, w szczególności na rynek obligacji. Głównym celem pracy jest przedstawienie zmian, jakie nastąpiły od grudnia 2019 roku do grudnia 2022 roku zwłaszcza w trakcie

¹²https://static.nbp.pl/dane/monetarno-finansowa/miarypieniadza_nowe.xlsx, dostęp: 02.07.2023

¹³https://static.nbp.pl/dane/monetarno-finansowa/miarypieniadza_nowe.xlsx, dostęp: 02.07.2023. Globalny kryzys finansowy, czasami nazywany kryzysem *subprime*, trwał od 2007 roku do 2009 roku.

¹⁴<https://www.bankier.pl/wiadomosc/RPP-podnosi-stopy-procentowe-8200757.html>, dostęp: 02.07.2023

¹⁵Opracowanie własne na podstawie: https://static.nbp.pl/dane/monetarno-finansowa/miarypieniadza_nowe.xlsx, dostęp: 02.07.2023; https://static.nbp.pl/dane/stopy/stopy_procentowe_archiwum.xml, dostęp: 02.07.2023.

pandemii w strukturze terminowej stóp procentowych (ang. *term structure of interest rates*) w Polsce. Okres trwania pandemii zdefiniujemy jako czas od marca 2020 roku do maja 2022 roku, w którym to na terenie Polski trwał stan epidemii¹⁶.

Do modelowania struktury terminowej stóp procentowych konieczne jest zapoznanie się z definicją oraz modelem wyceny obligacji, te zagadnienia zostaną przedstawione w rozdziale 2. W podrozdziale 2.1 opiszemy obligację oraz wyróżnimy jej rodzaje ze względu na różne kryteria, następnie w podrozdziale 2.2 zostanie wprowadzona kluczowa w modelu wyceny obligacji koncepcja zmiany wartości pieniądza w czasie. Podrozdział 2.3 to opis modelu wyceny obligacji o stałym oprocentowaniu, a podrozdział 2.4 to opisanie kluczowej miary zysku z obligacji. Rozdział 3 opisuje teorię stojącą za przedmiotem rozważań pracy. W podrozdziale 3.1 zostanie dokładnie zdefiniowana struktura terminowa stóp procentowych *spot* oraz *future*, podrozdział 3.2 wskaże ograniczenia świata realnego, jakie stają na drodze tej definicji, a w podrozdziale 3.3 zostanie wyprowadzona teoria stojąca za metodą *bootstrappingu*. Rozdział 4 został poświęcony dostosowaniu metody *bootstrappingu* do polskiego rynku obligacji skarbowych. Treść podrozdziału 4.1 opisuje w sposób teoretyczny tę modyfikację, a w podrozdziale 4.2 zostanie przedstawiony przykład wykorzystania zmodyfikowanej metody. Rozdział 5 poświęcony jest zmianom krzywej dochodowości od grudnia 2019 roku do grudnia 2022 roku, podrozdział 5.1 przedstawia wizualnie te zmiany oraz opisuje ich charakter. Podrozdział 5.2 stanowi konkluzję zaobserwowanych zmian oraz zawiera sugestie co do dalszych kierunków badań w zakresie modelowania struktury terminowej stóp procentowych.

Podstawowym założeniem pracy jest to, że prezentowane w niej modele zakładają czas dyskretny. Oznacza to, że dla ustalonej inwestycji liczba kapitalizacji w okresie jej trwania jest liczbą naturalną. Innymi słowy, występują okresy bazowe¹⁷, które mają ustaloną naturalną i dodatnią ilość kapitalizacji w ich trakcie. Założeniem, które pośrednio wynika z poprzedniego, jest odrzucenie metody kapitalizacji ciągłej, a wszystkie modele bazują na przedstawionej w podrozdziale 2.2 kapitalizacji złożonej.

¹⁶Rozporządzenie Ministra Zdrowia z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie ogłoszenia na obszarze Rzeczypospolitej Polskiej stanu epidemii, Dz.U. 2020 poz. 491, § 1.; Rozporządzenie Ministra Zdrowia z dnia 12 maja 2022 r. w sprawie odwołania na obszarze Rzeczypospolitej Polskiej stanu epidemii, Dz.U. 2022 poz. 1027, § 1.

¹⁷Zazwyczaj za okres bazowy przyjmuje się rok.

Rozdział 2

Obligacja jako instrument finansowy oraz modele związane z jej wyceną

2.1 Czym jest obligacja?

Obligacja (ang. *bond*) to instrument finansowy, czyli kontrakt zawarty między dwiema stronami, regulujący zależność finansową między tymi stronami¹. W przypadku obligacji kontrakt ten wyraża dług emitenta w stosunku do obligatariusza – posiadacza obligacji.

Emitent oferuje na rynku spełnienie określonego świadczenia², zazwyczaj jest to potencjalny pieniądz płatny w przyszłości (zwany nominałem obligacji) oraz potencjalne regularne wypłaty ustalanego procenta nominalu (zwane kuponami) aż do momentu wykupu nominalu. Rynek wycenia ofertę zaproponowaną przez emitenta, jeśli emitent zgadza się z tą oceną, uzyskuje dług pozabankowy wysokości: wyznaczona cena rynkowa \times liczba obligacji w emisji.

Wyróżniamy dwa podstawowe kryteria sposobu klasyfikacji obligacji:

1. Kryterium rodzaju emitenta. Wyróżniamy wtedy obligacje³:

- **skarbowe**, których emitentem jest Skarb Państwa lub państwowe instytucje rozwoju, takie jak Bank Gospodarstwa Krajowego czy Polski Fundusz Rozwoju;
- **komunalne**, których emitentem są jednostki samorządu terytorialnego, na przykład: miasta, gminy lub województwa;
- **korporacyjne**, których emitentem są firmy.

2. Kryterium rodzaju oprocentowania. Wyróżniamy wtedy obligacje⁴:

¹Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje : instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015, s. 21

²Ustawa z dnia 15 stycznia 2015 r. o obligacjach, Dz.U. 2015 poz. 238, Art. 4.

³Czechowska I. D. et al., *Instrumenty dłużne w gospodarce*, pod red. Czechowska I. D., CeDeWu, Warszawa 2010, s. 116; Dębski W., *Akcje, obligacje i ich wycena*, ABSOLWENT, Łódź 1997, s. 48-50;

⁴Czechowska I. D. et al., op. cit., s. 116-117; Dębski W., op. cit., s. 51-52; Liberadzki K., *Dłużne papiery wartościowe*, Difin, Warszawa 2014, s. 15

- **o stałym oprocentowaniu** zwane czasami obligacjami stałokuponowymi. W przypadku tych obligacji stopa procentowa, która służy do obliczenia wysokości kuponu, jest niezmienna od emisji do wykupu obligacji.
- **zerokuponowe**, to podzbiór obligacji o stałym oprocentowaniu. Są to obligacje, których kupon wynosi 0, a jedyny przepływ, jaki uzyskuje obligatariusz to nominal w chwili wykupu.
- **zmiennokuponowe**, to obligacje, których kupon jest obliczany na podstawie sumy dwóch stóp procentowych. Pierwsza to stopa nazywana marżą, która jest niezmienna od emisji do wykupu obligacji. Druga to stopa ustalonego przez emitenta indeksu, na przykład WIBORu lub inflacji.

2.2 Wartość pieniądza w czasie

Aby rozpocząć opisywanie modeli związanych z wyceną jakichkolwiek instrumentów finansowych, konieczne jest wprowadzenie kluczowej dla matematyki finansowej koncepcji **zmiany wartości pieniądza w czasie**. Zakłada ona, że z perspektywy jednostki oraz ustalonej chwili ta sama nominalnie kwota pieniężna ma różną wartość w różnym czasie. Uściślając, w chwili bieżącej obietnica otrzymania $M \in (0; +\infty)$ jednostek pieniężnych w momencie $t_1 \in [0; +\infty)$ ma inną wartość, niż obietnica otrzymania M w momencie $t_2 \in [0; +\infty)$ (dla każdego $t_1 \neq t_2$).

Z reguły w praktyce, gdy $t_1 < t_2$, to M ma większą wartość na chwilę obecną w t_1 , a mniejszą w t_2 . Przyczyny takiego stanu rzeczy są różne, przykładowo są to:

- spadek siły nabywczej pieniądza, który zazwyczaj spowodowany jest inflacją;
- występowanie niepewności i ryzyka, im dalszy jest termin potencjalnego otrzymania M , tym niepewność i ryzyko są większe;
- preferowanie bieżącej konsumpcji, jest to skutek dodatniej preferencji czasowej wśród większości społeczeństwa⁵.

Z tych powodów, gdy inwestor inwestuje M w chwili bieżącej i w ramach tej inwestycji oczekuje jednego przepływu pieniężnego (ang. *inflow*) w przyszłości, to ów przepływ musi być odpowiednio większy.

Stąd wzór na wartość przyszłą (ang. *Future Value*) takiego rodzaju inwestycji przy najczęściej występującej na rynku kapitalizacji złożonej⁶:

$$FV = M \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{tk} \stackrel{\text{dla } k=1}{=} M (1 + r)^t \quad (2.1)$$

⁵Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 80-81

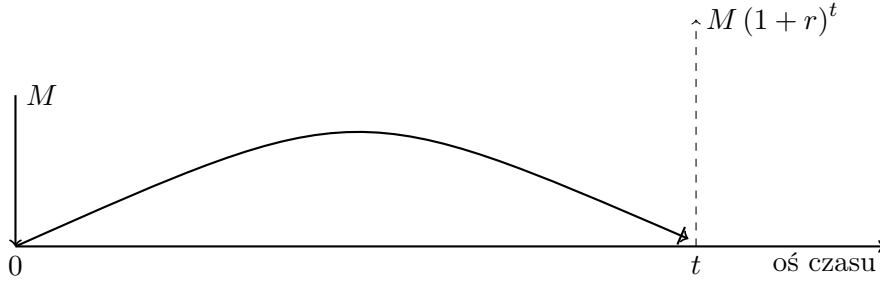
⁶Fabozzi F. J., *Bond Markets, Analysis, and Strategies*, Pearson, Global Edition 2013, s. 24-25; Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 84; Jaworski P., Micał J., *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Poltext, Warszawa 2005, s. 16-17; Kliber A. M., Kliber P., *Podstawy modelowania struktury terminowej stóp procentowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2010, s. 11; Liberadzki K., op. cit., s. 66-67; Mayo H. B., *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2020, s. 63; Sobczyk M., *Matematyka finansowa : podstawy teoretyczne, przykłady, zadania*, Agencja Wydawnicza „Placet”, Warszawa 2000, s. 42

Gdzie:

- $M \in (0; +\infty)$ to nominalna wartość zainwestowanego kapitału,
- $k \in \mathbb{N}_+$ to liczba kapitalizacji w trakcie jednego okresu bazowego,
- $t \in \mathbb{Q}$ to liczba wyrażająca długość inwestycji w okresach bazowych (ważne jest by $tk \in \mathbb{N}$),
- $r \in \mathbb{R}$ to okresowa stopa procentowa (niezmienna w $[0, t]$)⁷.

Ów wzór pozwala obliczyć jakiego zwrotu nominalnego można się spodziewać po zainwestowaniu M w inwestycję trwającą t przy okresowej stopie procentowej r (niezmiennej w czasie trwania całej inwestycji), która ma k kapitalizacji w okresie bazowym.

Poniżej wizualizacja wzoru na wartość przyszłą, przy założeniu jednej kapitalizacji w okresie bazowym (gdy $k = 1$).



Rysunek 2.1: Akumulacja kapitału z chwili bieżącej na czas t

Z przekształcenia wzoru (2.1) wprost wynika wzór na wartość bieżącą (ang. *Present Value*) przyływu pieniężnego wysokości \dot{M} w chwili t przy kapitalizacji złożonej. Znanie jest FV i wynosi ono \dot{M} ; z kolei M to szukane PV , więc otrzymujemy⁸:

$$PV = \dot{M} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{tk}} \stackrel{\text{dla } k=1}{=} \dot{M} \frac{1}{(1+r)^t} \quad (2.2)$$

Gdzie:

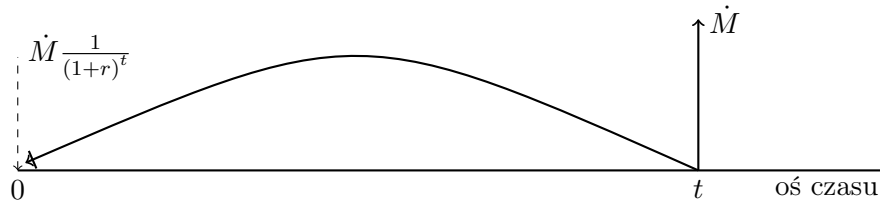
- $\dot{M} \in (0; +\infty)$ to nominalna wartość kapitału uzyskanego w chwili t ,
- $k \in \mathbb{N}_+$ to liczba kapitalizacji w okresie bazowym,
- $t \in \mathbb{Q}$ to liczba wyrażająca długość inwestycji w okresach bazowych (ważne jest by $tk \in \mathbb{N}$),
- $r \in \mathbb{R}$ to okresowa stopa procentowa (niezmienna w $[0, t]$).

⁷Jeśli okres bazowy to rok wtedy: okresowa stopa procentowa to roczna stopa procentowa, a założenie jednej kapitalizacji w okresie bazowym to założenie kapitalizacji rocznej.

⁸Fabozzi F. J., op. cit., s. 27-28; Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 87-88; Jaworski P., Micał J., op. cit., s. 70; Mayo H. B., op. cit., s. 66

Ów wzór pozwala obliczyć, ile obecnie jest warta inwestycja, która generuje przyływ o wartości \dot{M} w chwili t przy zakładanej okresowej stopie procentowej (niezmiennej w czasie trwania całej inwestycji) r oraz przy liczbie k kapitalizacji w trakcie okresu bazowego.

Poniżej wizualizacja wzoru na wartość bieżącą, przy założeniu jednej kapitalizacji w okresie bazowym (gdy $k = 1$).



Rysunek 2.2: Zdyskontowanie kapitału z czasu t na chwilę bieżącą

W ramach tego podrozdziału warto również wspomnieć o stopach zwrotu, czyli sposobie porównywania inwestycji przez inwestora. Rozważmy najprostszy rodzaj inwestycji: inwestor inwestuje w chwili bieżącej $M \in (0; +\infty)$ jednostek pieniężnych na czas $t \in \mathbb{Q}$ okresów bazowych i po tym czasie otrzymuje $\dot{M} \in [0; +\infty)$ jednostek pieniężnych. Najprostszym sposobem oceny takiej inwestycji jest **prosta stopa zwrotu** zwana również stopą zwrotu w okresie trwania inwestycji, wyznaczona wzorem⁹:

$$R = \frac{\dot{M} - M}{M} \quad (2.3)$$

Jest to przyrost procentowy kapitału, jaki zainwestował inwestor. Poważną wadą prostej stopy zwrotu jest brak uwzględnienia czasu trwania inwestycji, który zazwyczaj jest kluczowy przy zarządzaniu kapitałem. Stąd wprowadzenie pojęcia **stopy zwrotu w okresie bazowym**, jest to stopa procentowa, która dla opisanej wyżej inwestycji i przy założeniu $k \in \mathbb{N}_+$ kapitalizacji w okresie bazowym wyraża się wzorem¹⁰:

$$r = k \left(\sqrt[k]{\frac{\dot{M}}{M}} - 1 \right) \stackrel{\text{dla } k=1}{=} \sqrt[t]{\frac{\dot{M}}{M}} - 1 \quad (2.4)$$

Pod pojęciem stopy zwrotu najczęściej będziemy rozumieć właśnie stopę zwrotu w okresie bazowym, jej największą zaletą jest możliwość porównania wielu inwestycji o różnych horyzontach czasowych.

⁹Pera K., Buła R., Mitrenga D., *Modele inwestycyjne*, Wydawnictwo C. H. Beck, Warszawa 2014, s. 17.

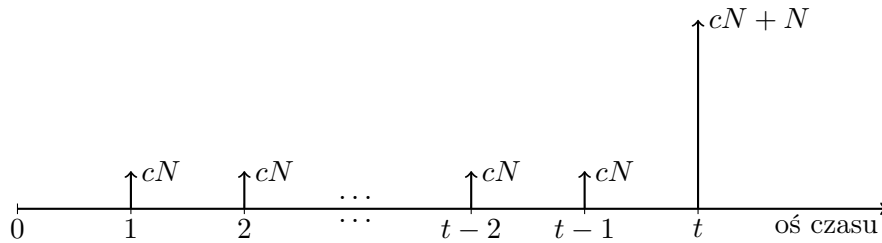
¹⁰Sobczyk M., op. cit., s. 44. Bywa nazywana czasami efektywną stopą zwrotu na przykład w: Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 93; Liberadzki K., op. cit., s. 67. Jest to nieprecyzyjne określenie, ponieważ zazwyczaj efektywna stopa zwrotu r_{eff} to, stopa w okresie bazowym, po której inwestor, inwestując na t okresów bazowych przy jednokrotnej kapitalizacji w okresie, osiągnie taki sam zysk jak z zainwestowania po stopie r na t okresów bazowy przy k krotnej kapitalizacji w okresie bazowym. Czyli to rozwiązanie równania: $(1 + r_{\text{eff}})^t = (1 + \frac{r}{k})^{kt}$ za Sobczyk M., op. cit., s. 52.

2.3 Wycena obligacji o oprocentowaniu stałym

Obligacja o oprocentowaniu stałym generuje ciąg przyływów pieniężnych rozłożonych w czasie. Ów ciąg można scharakteryzować za pomocą trzech liczb:

- $N \in (0; +\infty)$ to wartość nominalna obligacji,
- $c \in [0; +\infty)$ to stopa kuponowa obligacji (nazywana często stopą płaszcową obligacji),
- $t \in \mathbb{N}_+$ to liczba okresów bazowych od emisji do wykupu obligacji.

Obligacja wypłaca na koniec okresów bazowych $1, 2, \dots, t-2, t-1$ obligatariuszowi kwotę cN oraz w chwili t kwotę $cN + N$. Poniżej wizualizacja przepływu pieniężnego generowanego dla inwestora przez obligację o stałym oprocentowaniu oraz przy założeniu, że $c < 1$.



Rysunek 2.3: Przepływ pieniężny generowany przez obligację o oprocentowaniu stałym

Do wyceny tego instrumentu używamy wzoru (2.2), dzięki któremu można obliczyć wartość bieżącą na chwilę emisji przepływu generowanego przez obligację tego typu, będziemy ją oznaczać symbolem $S^{(t;c)}$. Zakładamy, że r (okresowa stopa procentowa) jest niezmienna w czasie $[0, t]$ oraz, że r to stopa wolna od ryzyka. Wtedy $S^{(t;c)}$ wynosi¹¹:

$$\begin{aligned} S^{(t;c)} &= \frac{cN}{(1+r)} + \frac{cN}{(1+r)^2} + \dots + \frac{cN}{(1+r)^{t-2}} + \frac{cN}{(1+r)^{t-1}} + \frac{cN+N}{(1+r)^t} \\ &= \sum_{n=1}^t \frac{cN}{(1+r)^n} + \frac{N}{(1+r)^t} = cN \sum_{n=1}^t \left(\frac{1}{1+r} \right)^n + \frac{N}{(1+r)^t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

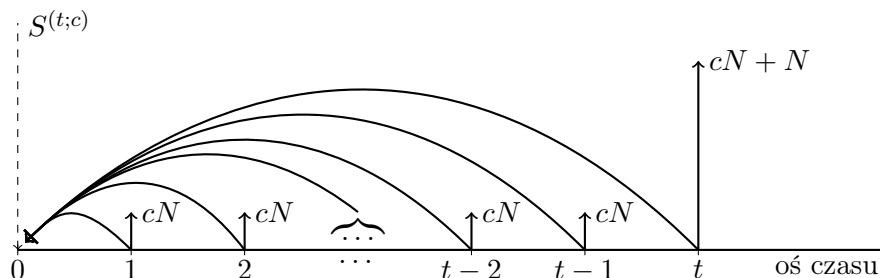
Przy dodatkowym założeniu, że $r > 0$ wzór (2.5) można sprowadzić do postaci niesumacyjnej¹²:

$$S^{(t;c)} = cN \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r} \right)^t}{r} + \frac{N}{(1+r)^t} = N \left(\frac{c}{r} + \frac{r-c}{r(1+r)^t} \right) \quad (2.6)$$

¹¹Czechowska I. D. et al., op. cit., s. 45-46; Dębski W., op. cit., s. 67-69; Fabozzi F. J., op. cit., s. 30-31; Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 104; Mayo H. B., op. cit., s. 475; Pera K., Buła R., Mitrenga D., op. cit., s. 201; Sobczyk M., op. cit., s. 265; Utkin J., *Obligacje i ich portfele : wycena, wrażliwość, strategie*, Szkoła Główna Handlowa-Oficyna Wydawnicza, Warszawa 2005, s. 15; Varian H. R., *Mikroekonomia. Kurs średni - ujęcie nowoczesne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2016, s. 223

¹²Czechowska I. D. et al., op. cit., s. 46; Fabozzi F. J., op. cit., s. 32; Pera K., Buła R., Mitrenga D., op. cit., s. 201; Utkin J., op. cit., s. 15

Poniżej rysunek wizualizujący wzór (2.5) oraz wzór (2.6).



Rysunek 2.4: Zdyskontowanie obligacji o oprocentowaniu stałym na czas emisji

Warto zwrócić uwagę na pewne własności $S^{(t;c)}$:

1. Gdy $t \rightarrow +\infty$, to $S^{(t;c)} \rightarrow \frac{cN}{r}$, ponieważ:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S^{(t;c)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{cN}{r} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(r-c)N}{r(1+r)^t} = \frac{cN}{r} + 0 = \frac{cN}{r} \quad \square$$

Stąd wynika, że obligacja, której termin wykupu jest nieskończenie daleki ma wartość bieżącą równą wartości bieżącej renty wieczystej płatnej z dołu o wysokości kuponu, ponieważ:

$$\frac{cN}{r} = \frac{cN}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cN}{(1+r)^n} \quad \square$$

2. Gdy $r \rightarrow +\infty$, to $S^{(t;c)} \rightarrow 0$, ponieważ:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} S^{(t;c)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{cN}{r} + \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N}{(1+r)^t} - \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{cN}{r(1+r)^t} = 0 + 0 - 0 = 0 \quad \square$$

3. Gdy $c = r$, to $S^{(t;c)} = N$, ponieważ:

$$S^{(t;r)} = N \left(\frac{r}{r} + \frac{r-r}{r(1+r)^t} \right) = N(1+0) = N \quad \square$$

Przypadkiem szczególnym obligacji o stałej stopie płaszczonej są **obligacje zerokuponowe** - jest to klasa obligacji, których $c = 0$. Wartość bieżącą tego instrumentu na chwilę emisji oznaczamy $W^{(t)}$, wynosi ona¹³:

$$W^{(t)} = S^{(t;0)} = 0 \cdot N \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^t}{r} + \frac{N}{(1+r)^t} = \frac{N}{(1+r)^t} \quad (2.7)$$

¹³Dębski W., op. cit., s. 76; Fabozzi F. J., op. cit., s. 33-34; Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 107; Sobczyk M., op. cit., s. 52; Utkin J., op. cit., s. 13-14

2.4 Stopa zwrotu w terminie do wykupu

Podstawową miarą zysku z obligacji jest **stopa zwrotu w terminie do wykupu** (ang. *yield to maturity*). Dla obligacji o stałym oprocentowaniu i przy danych:

- $N \in (0; +\infty)$ wartości nominalnej,
- $c \in [0; +\infty)$ stopie kuponowej,
- $t \in \mathbb{N}_+$ okresach bazowych do wykupu,
- $P \in (0; t \cdot cN + N)$ cenie rynkowej,

Stopa zwrotu w terminie do wykupu obliczana na początek bieżącego okresu bazowego to ostro większe od 0 i najbliższe 0¹⁴ rozwiązanie równania¹⁵:

$$P = \sum_{n=1}^t \frac{cN}{(1 + YTM)^n} + \frac{N}{(1 + YTM)^t} \iff$$

$$P(1 + YTM)^t - \sum_{n=0}^{t-1} cN(1 + YTM)^n - N = 0 \quad (2.8)$$

Tak zdefiniowany YTM jest wyznaczony jednoznacznie oraz istnieje. Ponieważ, gdy zdefiniujemy funkcję wielomianową:

$$f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(YTM) = P(1 + YTM)^t - \sum_{n=0}^{t-1} cN(1 + YTM)^n - N$$

wtedy $\lim_{YTM \rightarrow 0^+} f(YTM) = P - t \cdot cN - N < 0$, bo z założenia $P < t \cdot cN + N$;

$\lim_{YTM \rightarrow +\infty} f(YTM) = +\infty$ oraz f jest funkcją ciągłą; z tego wynika, że istnieje

$YTM \in (0, +\infty)$ taki, że $f(YTM) = 0$ \square

Warto dodać, że zgodnie z twierdzeniem Abela-Ruffiniego nie jest możliwe w każdym przypadku analityczne znalezienie YTM dla $t \geq 5$. Dużo łatwiejsze jest obliczenie YTM w szczególnym przypadku, gdy $c = 0$, czyli dla obligacji zerokuponowej. Wtedy YTM można wyrazić wzorem jawnym¹⁶:

$$YTM = \sqrt[t]{\frac{N}{P}} - 1 \quad (2.9)$$

¹⁴Najbliższe w sensie przestrzeni metrycznej (\mathbb{R}, d_e) .

¹⁵Borowski K., *Miary ryzyka na rynku akcji i obligacji*, Difin, Warszawa 2014, s. 101-102 za Jajuga K., Jajuga, T. op. cit., s. 109-110; Czechowska I. D. et al., op. cit., s. 56; Dębski W., op. cit., s. 80-81; Fabozzi F. J., op. cit., s. 48-49; Haugen R. A., *Teoria nowoczesnego inwestowania : obszerny podręcznik analizy portfelowej*, WIG-Press, Warszawa 1996, s. 456-457; Liberadzki K., op. cit., s. 74; Mayo H. B., op. cit., s. 484-485; Pera K., Buła R., Mitrenga D., op. cit., s. 211; Utkin J., op. cit., s. 22

¹⁶Fabozzi F. J., op. cit., s. 50; Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 111; Utkin J., op. cit., s. 21

Łatwo pokazać, że tak wyznaczone YTM jest w $(0; +\infty)$. Dowód nie wprost:

$$\text{Założmy, że } YTM \leq 0 \iff \sqrt[t]{\frac{N}{P}} \leq 1 \iff \frac{N}{P} \leq 1 \iff N \leq P$$

Sprzeczność, bo z założeń wynika, że: $P \in (0; N)$, czyli $N > P$ \square

YTM moglibyśmy interpretować jako stopę w okresie bazowym, po jakiej inwestujemy P jednostek pieniężnych na t okresów; oznaczałoby to, że mówilibyśmy o YTM jako o stopie zwrotu jak z równania (2.4). Jednak w przypadku, gdy $c \neq 0$ występuje ryzyko reinwestowania, które oznacza, że aby interpretować YTM w opisany wyżej sposób, konieczna jest reinwestycja wypłacanych kuponów w trakcie trwania inwestycji po stopie bazowej równej dokładnie YTM ¹⁷. Z oczywistych względów obligacje zerokuponowe ($c = 0$) są pozbawione tego ryzyka.

¹⁷Borowski K., op. cit., s. 99; Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 126-128

Rozdział 3

Struktura terminowa stóp procentowych

3.1 Zdefiniowanie struktury stóp *spot* i stóp *forward*

Użyta do wyceny stopa procentowa w okresie bazowym r w podrozdziale 2.3 to stopa wolna od ryzyka. Zostało tam przedstawione założenie, że stopa ta jest stała w całym okresie trwania inwestycji. W rzeczywistości stopa zwrotu w terminie do wykupu z zerokuponowych obligacji skarbowych, która jest najbliższa teoretycznej stopie wolnej od ryzyka, zmienia się w zależności od czasu do wykupu. Za instrumenty pozbawione ryzyka przyjmuje się zerokuponowe obligacje skarbowe ze względu na to, że są pozbawione ryzyka reinwestowania oraz ich emitent jest suwerenem polityki gospodarczej, a przez to zakłada się, że jest pozbawiony ryzyka niedotrzymania warunków (ang. *default risk*), czyli na przykład niewypłacenia odsetek lub niewykupienia obligacji w terminie¹. Warto jednak nadmienić, że w samym XXI wieku wiele krajów miało problemy ze spłatą swoich zobowiązań, można by wymienić przykładowo: Sri Lankę w 2022 roku², Liban i Argentynę w 2020³ roku czy Wenezuelę w 2017 roku⁴.

Ta obserwacja była przyczyną do zdefiniowania pojęcia **struktury terminowej stóp procentowych *spot*** jako zależności YTM wolnych od ryzyka obligacji zerokuponowych

¹Borowski K., op. cit., s.98; Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 124

²<https://www.ft.com/content/0e02eef2-8482-4caa-9b3d-3ccda19b041a>, dostęp: 03.07.2023

³<https://www.bbc.com/news/world-middle-east-51785690>, dostęp: 03.07.2023; <https://www.spglobal.com/marketintelligence/en/mi/research-analysis/argentina-in-default.html>, dostęp: 03.07.2023

⁴<https://money.cnn.com/2017/11/14/news/economy/venezuela-debt-default-sp/index.html>, dostęp: 03.07.2023

od ich terminów wykupu⁵. Matematycznie jest to ciąg⁶:

$$\begin{aligned} \tau r : \mathbb{N} &\longrightarrow [0; +\infty) \\ \tau r(n) &= 0 && \text{dla } n = 0 \\ \tau r(n) &= \tau r_n && \text{dla } n \in \mathbb{N}_+ \end{aligned} \tag{3.1}$$

Gdzie:

- τ to data w jakiej obliczana jest struktura,
- τr_n jest zdefiniowane jako *YTM* skarbowej obligacji zerokuponowej o czasie do wykupu równym n .

Nazwa *spot* wynika z natychmiastowości i pewności otrzymywanej stopy zwrotu, która wywodzi się z angielskiego określenia *on the spot* - można je przetłumaczyć jako *z miejsca*. W chwili bieżącej (data: τ) inwestor może natychmiast otrzymać dokładnie stopę równą τr_n w okresie bazowym dla inwestycji o horyzoncie n . Wykres ciągu τr_n nazwiemy krzywą dochodowości (ang. *yield curve*).

Warto odnotować, że z powodu istnienia struktury terminowej stóp procentowych *spot* wzór na wycenę dowolnej obligacji o oprocentowaniu stałym (2.5) nie może zostać już zapisany w postaci niesumacyjnej, jednak przybiera on ogólniejszą postać⁷:

$$S^{(t;c)} = \sum_{n=1}^t \frac{cN}{(1 + \tau r_n)^n} + \frac{N}{(1 + \tau r_t)^t} \tag{3.2}$$

Gdzie standardowo:

- $N \in (0; +\infty)$ to wartość nominalna obligacji,
- $c \in [0; +\infty)$ to stopa kuponowa obligacji,
- $t \in \mathbb{N}_+$ to liczba okresów bazowych od τ do wykupu obligacji.

Przyczynkiem do zdefiniowania stopy *forward* było pytanie: Jakiej stopy wolnej od ryzyka spodziewamy się obecnie (data: τ) w czasie okresu bazowego między chwilą $n \in \mathbb{N}$ a chwilą $n + 1$? Oznaczmy stopę odpowiadającą na powyższe pytanie symbolem $\tau f_{n;n+1}$. Zauważmy teraz, że gdy znamy strukturę stóp *spot* w τ , możemy wyznaczyć ciąg stóp *forward*, ów ciąg będziemy nazywać **strukturą terminową stóp procentowych forward** w τ . Zaobserwujemy, że:

⁵Fabozzi F. J., op. cit., s. 111-112; Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa : wycena instrumentów pochodnych, symulacje komputerowe, statystyka rynku*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998, s. 203. W Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 114-115 przyjęta jest szersza definicja, która nie zakłada zerowego ryzyka obligacji zerokuponowych tylko ten sam poziom ryzyka, ale za okres bazowy K. Jajuga i T. Jajuga zawsze przyjmują rok.

⁶Krawczak M., Miklewski A., Jakubowski A., Konieczny P., *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym : wybrane zagadnienia*, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa 2000, s. 109

⁷Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 109; Krawczak M., Miklewski A., Jakubowski A., Konieczny P., op. cit., s. 50

1. Wprost z definicji wynika, że gdy $n = 0$, to:

$${}_{{\tau}}f_{0;1} = {}_{\tau}r_1$$

Ponieważ ${}_{{\tau}}f_{0;1}$ to stopa, która obowiązuje w okresie bazowym między chwilami 0 i 1, a ${}_{\tau}r_1$ to stopa na okres bazowy jaka obowiązuje między chwilą obecną (czyli chwilą 0) i chwilą 1. \square

2. Gdy inwestor inwestuje $M \in \mathbb{R}_+$ na czas $n+1$ po stopie wolnej od ryzyka to wartość przyszła takiej inwestycji (korzystając ze wzoru (2.1)) wynosi z jednej strony:

$$FV = M(1 + {}_{\tau}r_{n+1})^{n+1}$$

Z drugiej strony inwestor może zakumulować kapitał na chwilę n po stopie ${}_{\tau}r_n$ i następnie zakumulować kapitał z chwili n na chwilę $n+1$ po stopie ${}_{{\tau}}f_{n;n+1}$, wtedy wartość przyszła to:

$$FV = M(1 + {}_{\tau}r_n)^n(1 + {}_{\tau}f_{n;n+1})$$

Przyrównując oba równania do siebie, mamy:

$${}_{{\tau}}f_{n;n+1} = \frac{(1 + {}_{\tau}r_{n+1})^{n+1}}{(1 + {}_{\tau}r_n)^n} - 1$$

W konsekwencji 1. i 2. otrzymujemy definicję struktury terminowej stóp procentowych *forward* w τ . Przy danej strukturze terminowej stóp procentowych *spot* w τ jest to ciąg $({}_{{\tau}}f_{n;n+1})_{n=0}^{+\infty}$ zadany wzorem⁸:

$$\begin{aligned} {}_{\tau}f_{n;n+1} &= {}_{\tau}r_1 & \text{dla } n = 0 \\ {}_{\tau}f_{n;n+1} &= \frac{(1 + {}_{\tau}r_{n+1})^{n+1}}{(1 + {}_{\tau}r_n)^n} - 1 & \text{dla } n \in \mathbb{N}_+ \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2 Definicje a rzeczywistość

Struktura terminowa stóp procentowych *spot*, skonstruowana zgodnie z definicją przedstawioną w podrozdziale **3.1**, byłaby możliwa do wyznaczenia, gdyby:

1. na rynku istniało przeliczalnie wiele skarbowych obligacji zerokuponowych;
2. istniałaby liczba jednostek czasu $\rho \in \mathbb{R}_+$, która stanowiłaby długość trwania okresu bazowego;
3. dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$ w chwili $k\rho$ istniałaby obligacja, która jest wykupywana w tej chwili.

⁸Krawczak M., Miklewski A., Jakubowski A., Konieczny P., op. cit., s. 109-110; Utkin J., op. cit., s. 52

Taka sytuacja nigdy nie może wystąpić, wbrew założeniu numer 1. instrumentów finansowych na danym rynku jest zawsze skończona ilość. Pierwszym uproszczeniem będzie zatem ograniczenie czasowe horyzontu prognozy, w wyniku tego uproszczenia struktura terminowa stóp procentowych będzie ciągiem skończonym. Z kolei bez straty ogólności możemy założyć, że $\rho = 1$.

Po uwzględnieniu przedstawionych wyżej uproszczeń teoretycznie jest możliwe konstruowanie struktury terminowej stóp procentowych. Jednak w rzeczywistości największym problem stanowi ilość notowanych skarbowych obligacji zerokuponowych. Zgodnie ze stanem na koniec czerwca 2023 roku na polskim rynku były notowane tylko dwie o kodach ISIN: PL0000114021, PL0000115283⁹. Ubogość tego segmentu rynku jest największym problemem przy wyznaczaniu struktury terminowej stóp procentowych z definicji.

3.3 Metoda *bootstrappingu*

Niewielka liczba zerokuponowych obligacji skarbowych stanowi kluczową przeszkodę, dlatego konstruowane w rzeczywistości struktury terminowych stóp procentowych nie są, nawet po uproszczeniach z poprzedniego podrozdziału, wyznaczane zgodnie z definicjami (3.1) i (3.3). Na rynkach obligacji skarbowych dominują obligacje o oprocentowaniu stałym, przykładowo w czerwcu 2023 roku na rynku Catalyst były notowane aż pięćdziesiąt dwie takie obligacje¹⁰. Taki stan rzeczy, nie tylko na rynku polskim, był przyczyną powstania metody *bootstrappingu* - tłumacząc na polski metody *odrywania kuponów*.

Głównym założeniem tej metody jest potraktowanie obligacji o stałym oprocentowaniu jako instrumentu, który składa się z portfela obligacji zerokuponowych. Przykładowo, gdy mamy obligacje o stałej stopie kuponowej $c \in (0; +\infty)$, nominale $N \in (0; +\infty)$ oraz $n \in \mathbb{N}_+$ okresach bazowych do wykupu, to patrzymy na nią jako¹¹:

- $n - 1$ obligacji zerokuponowych o nominale cN i chwilach wykupu: $1, 2, 3, \dots, n - 1$ oraz
- obligację zerokuponową o nominale $(c + 1)N$ i chwili wykupu n .

Dzięki temu założeniu, gdy chcemy prognozować strukturę terminową stóp procentowych *spot* o horyzoncie $t \in \mathbb{N}_+$ potrzebujemy t obligacji kuponowych o chwilach wykupu: $1, 2, 3, \dots, t$. Zastosujemy oznaczenia, że dla n -tej obligacji (gdzie $n \in \{1, 2, 3, \dots, t\}$) przyjmujemy, że:

- $N_n \in (0; +\infty)$ to wartość nominalna n -tej obligacji,
- $c_n \in [0; +\infty)$ to stopa kuponowa n -tej obligacji,
- $P_n \in (0; n \cdot c_n N_n + N_n)$ to cena n -tej obligacji.

⁹https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202306_CAT.xls,
dostęp: 07.07.2023

¹⁰https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202306_CAT.xls,
dostęp: 07.07.2023

¹¹Liberadzki K., op. cit., s. 113-114; Utkin J., op. cit., s. 50

Znamy z definicji wyraz ${}_{\tau}r_0 = 0$ ciągu $({}_{\tau}r_n)_{n=0}^t$, następne wyrazy wyznaczamy stosując następującą iterację:

- I. Wiemy, że obligacja o cenie rynkowej P_1 wypłaca po pierwszym okresie bazowym $c_1N_1 + N_1$, w związku z tym ${}_{\tau}r_1$ to stopa, która jest rozwiązaniem równania:

$$P_1 = (c_1 + 1)N_1 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_1)} \implies {}_{\tau}r_1 = \frac{(c_1 + 1)N_1}{P_1} - 1$$

- II. Znamy już: ${}_{\tau}r_1$. Wiemy, że obligacja o cenie rynkowej P_2 wypłaca po pierwszym okresie bazowym c_2N_2 i po dwóch okresach bazowych $c_2N_2 + N_2$. Dyskontujemy kupon wypłacany w chwili 1 stopą ${}_{\tau}r_1$ - jest to wspomniane oderwanie kuponu, od którego wywodzi się nazwa metody. ${}_{\tau}r_2$ jest zatem rozwiązaniem równania:

$$P_2 = c_2N_2 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_1)} + (c_2 + 1)N_2 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_2)^2} \implies$$

$${}_{\tau}r_2 = \sqrt[2]{\frac{(c_2 + 1)N_2}{P_2 - c_2N_2 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_1)}}} - 1$$

- III. Znamy już: ${}_{\tau}r_1, {}_{\tau}r_2$. Wiemy, że obligacja o cenie rynkowej P_3 wypłaca po pierwszym okresie bazowym c_3N_3 , po dwóch okresach bazowych c_3N_3 i po trzech okresach bazowych $c_3N_3 + N_3$. Odrywamy kupon z chwili 1 stopą ${}_{\tau}r_1$, a kupon z chwili 2 stopą ${}_{\tau}r_2$. ${}_{\tau}r_3$ jest zatem rozwiązaniem równania:

$$P_3 = c_3N_3 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_1)} + c_3N_3 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_2)^2} + (c_3 + 1)N_3 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_3)^3} \implies$$

$${}_{\tau}r_3 = \sqrt[3]{\frac{(c_3 + 1)N_3}{P_3 - c_3N_3 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_1)} - c_3N_3 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_2)^2}}} - 1$$

I tak kontynuujemy aż do wyznaczenia wszystkich wyrazów ciągu $({}_{\tau}r_n)_{n=0}^t$.

Opisana iteracja to proces rozwiązywania układu t równań z t niewiadomymi:

$$\begin{cases} P_1 = (c_1 + 1)N_1 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_1)} \\ P_2 = c_2N_2 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_1)} + (c_2 + 1)N_2 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_2)^2} \\ P_3 = c_3N_3 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_1)} + c_3N_3 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_2)^2} + (c_3 + 1)N_3 \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_3)^3} \\ \vdots \\ P_t = c_tN_t \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_1)} + c_tN_t \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_2)^2} + \dots + (c_t + 1)N_t \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_t)^t} \end{cases} \quad (3.4)$$

Układ (3.4) można zapisać w postaci macierzowej i rozwiązać go prościej niż w sposób

iteracyjny¹².

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + 1)N_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2N_2 & (c_2 + 1)N_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3N_3 & c_3N_3 & (c_3 + 1)N_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_tN_t & c_tN_t & c_tN_t & \cdots & (c_t + 1)N_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\tau r_1)} \\ \frac{1}{(1+\tau r_2)^2} \\ \frac{1}{(1+\tau r_3)^3} \\ \vdots \\ \frac{1}{(1+\tau r_t)^t} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Oznaczmy:

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} (c_1 + 1)N_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2N_2 & (c_2 + 1)N_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3N_3 & c_3N_3 & (c_3 + 1)N_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_tN_t & c_tN_t & c_tN_t & \cdots & (c_t + 1)N_t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\tau r_1)} \\ \frac{1}{(1+\tau r_2)^2} \\ \frac{1}{(1+\tau r_3)^3} \\ \vdots \\ \frac{1}{(1+\tau r_t)^t} \end{pmatrix}.$$

Z faktu, że macierz \mathbf{A} jest dolnotrójkątna wynika, że $\det(\mathbf{A}) = \prod_{n=1}^t (c_n + 1)N_n \neq 0$, bo dla każdego n z założeń $(c_n + 1)N_n > 0$.

To oznacza, że \mathbf{A} jest macierzą nieosobliwą i istnieje \mathbf{A}^{-1} . W związku z tym wektor \mathbf{R} można obliczyć z równania:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P} \quad (3.6)$$

Wyznaczając wektor \mathbf{R} w sposób oczywisty otrzymujemy również ciąg $({}_r r_n)_{n=0}^t$, czyli strukturę terminową stóp procentowych *spot*. Po zastosowaniu definicji (3.3) do wyznaczonego ciągu otrzymamy ciąg $({}_r f_{n,n+1})_{n=0}^{t-1}$, czyli strukturę terminową stóp procentowych *forward*.

¹²Kliber A. M., Kliber P., op. cit., s. 80-81; Glova J., *Matrix Theory Application in the Bootstrapping Method for the Term Structure of Interest Rates*, „Economic analysis”, Vol. 43 No. 1-2 (2010), s.46-47; Utkin J., op. cit., s. 50-51

Rozdział 4

Zastosowanie zmodyfikowanej metody *bootstrappingu* na polskim rynku

4.1 Dostosowanie metody *bootstrappingu* do polskiego rynku

Aby rozpocząć modelowanie struktury terminowych stóp procentowych będziemy musieli poczynić szereg założeń wynikających z ograniczeń polskiego rynku obligacji skarbowych.

0. Wynikające z definicji struktury terminowej stóp procentowych (3.1) oraz z założeń modelu *bootstrappingu* (3.4) założenie, że do modelowania będziemy używać jedynie obligacji zerokuponowych lub stałokuponowych, od których to będziemy odcinać kupony.
1. Weźmiemy pod uwagę jedynie obligacje notowane w polskich złotych. Na rynku występują też obligacje skarbowe notowane w euro, jednak w ich przypadku występuje ryzyko walutowe (nazywane czasami ryzykiem kursowym)¹, a struktura terminowa powinna być wyznaczana dla obligacji o podobnym (prawie zerowym) poziomie ryzyka.
2. Za okres bazowy dla struktury terminowej przyjmiemy jeden miesiąc. Trzeba nadmienić, że okres odsetkowy (czas pomiędzy wypłatą kuponów) dla stałokuponowej obligacji skarbowych to rok.
3. Data tworzenia struktury będzie zawsze bliska 25 dniu miesiąca (bliska, ponieważ 25 może być dniem bez sesji giełdowej), to oznacza $\tau \approx 25.\text{mm.rrrr}$. Przyczyną tego założenia jest fakt, że większości obligacji skarbowych ma swoją datę wykupu ustaloną właśnie na 25 dzień miesiąca.
4. Za cenę obligacji będziemy uznawać cenę brudną, jest to cena, którą musi zapłacić inwestor.

¹Borowski K., op. cit., s.100

$$\text{cena brudna} = \text{cena czysta (zwana rynkową)} + \text{narosłe odsetki od przyszłego kuponu}^2$$

To założenie wynika z hipotezy, że kupujący uwzględnia całą kwotę, jaką musi zapłacić i to właśnie ją uważa za równoważną przyszłemu ciągowi przepływów pieniężnych generowanych przez obligację.

5. Będziemy brali pod uwagę notowania jedynie z rynku regulowanego Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Ta sama obligacja skarbową może być notowana na rynku regulowanym GPW i rynku regulowanym BondSpot, albo w alternatywnym systemie obrotu GPW i alternatywnym systemie obrotu BondSpot. Ze względu na chęć minimalizacji ryzyka ograniczymy się do obligacji notowanych na rynku regulowanym, a spośród tych ze względu na płynność rynku wybierzemy te notowane na GPW.
6. Spośród wszystkich obligacji na rynku spełniających założenia od 0. do 5. obligacja o najwcześniejszym terminie wykupu, jest zerokuponowa lub jej czas do wykupu jest ostro mniejszy niż 13 miesięcy oraz jej cena jest mniejsza niż przepływ, który generuje.

Uwzględniając te wszystkie założenia możemy zdefiniować realistyczny model dla polskiego rynku. Przy $k \in \mathbb{N}_+$ obligacjach spełniających warunki od 0. do 6., gdzie dla n -tej obligacji ($n \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$) mamy daną jej:

- $P_n \in (0; +\infty)$ cenę,
- $N_n \in (0; +\infty)$ wartość nominalną,
- $c_n \in [0; +\infty)$ stopę płaszczową,
- $t_n \in \mathbb{N}_+$ czas do wykupu wyrażony w miesiącach.

Dodatkowo zakładamy również, że:

7. $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_k$, w szczególności dla każdego $n \neq m$ zachodzi $t_n \neq t_m$.

Na podstawie obligacji spełniających warunki od 0. do 7. wyznaczymy ciąg $({}_r r_i)_{i=0}^{t_k}$. Standardowo zakładamy, że ${}_r r_0 = 0$. Również wiemy, że obligacja o cenie rynkowej P_1 wypłaca po t_1 miesiącach $c_1 N_1 + N_1$, w wyniku tego oraz założenia 6. ${}_r r_{t_1}$ to stopa, która jest rozwiązaniem równania:

$$P_1 = (c_1 + 1)N_1 \frac{1}{(1 + {}_r r_{t_1})^{t_1}} \implies {}_r r_{t_1} = \sqrt[t_1]{\frac{(c_1 + 1)N_1}{P_1}} - 1$$

Z kolei dla każdego $i \in \{1; 2; 3; \dots; t_1 - 1\}$ przyjmujemy, że ${}_r r_i = {}_r r_0$. Pozostałe elementy ciągu uzyskujemy w wyniku iteracji po miesiącach. Dla miesiąca i -tego ($i > t_1$) mamy:

²Czechowska I. D. et al., op. cit. s. 43-44; Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 104; Pera K., Buła R., Mitrenga D., op. cit., s. 203

- I. Gdy na i -ty miesiąc nie przypada żaden wykup obligacji, to przyjmujemy, że ${}_{\tau}r_i = {}_{\tau}r_{i-1}$.
- II. Gdy istnieje n -ta obligacja taka, że $i = t_n$ o $\lfloor \frac{t_n}{12} \rfloor$ kuponach wysokości $c_n N_n$ oraz wypłacająca $c_n N_n + N_n$ w t_n (dla ułatwienia zapisu zdefiniujemy, że: $Q := \lfloor \frac{t_n}{12} \rfloor$ oraz $R := t_n \bmod 12$; nadmienimy, że $i = 12Q + R$), wtedy ${}_{\tau}r_i$ to dodatnie rozwiązanie wynikającego z (3.2) równania:

$$\begin{aligned}
P_n &= c_n N_n \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_R)^R} + c_n N_n \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_{R+12})^{R+12}} + c_n N_n \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_{R+24})^{R+24}} + \dots \\
&+ (c_n + 1) N_n \frac{1}{(1 + {}_{\tau}r_i)^i} = \sum_{l=0}^{Q-1} \frac{c_n N_n}{(1 + {}_{\tau}r_{R+12l})^{R+12l}} + \frac{(c_n + 1) N_n}{(1 + {}_{\tau}r_i)^i} \implies \\
{}_{\tau}r_i &= \sqrt[i]{\frac{(c_n + 1) N_n}{P_n - \sum_{l=0}^{Q-1} \frac{c_n N_n}{(1 + {}_{\tau}r_{R+12l})^{R+12l}}}} - 1
\end{aligned}$$

W przypadku, gdy nie istnieje takie ${}_{\tau}r_i \in (0; +\infty)$ przyjmujemy, że: ${}_{\tau}r_i = {}_{\tau}r_{i-1}$.

Za pomocą opisanej wyżej iteracji uzyskujemy cały ciąg $({}_{\tau}r_i)_{i=0}^{t_k}$ oraz funkcję opartą na nim, zdefiniowaną jako:

$$\begin{aligned}
{}_{\tau}s : \{0; 1; 2; \dots; k-1; k\} &\longrightarrow \{0; 1; 2; \dots; t_k-1; t_k\} \times [0; +\infty) \\
{}_{\tau}s(n) &= (t_n; 12 \cdot {}_{\tau}r_{t_n})
\end{aligned} \tag{4.1}$$

W wyniku połączenia na płaszczyźnie linią prostą sąsiednich elementów ciągu $({}_{\tau}s_n)_{n=0}^k$ uzyskamy krzywą dochodowości ze stopami procentowymi w skali rocznej przy założeniu kapitalizacji miesięcznej³.

4.2 Przykład zastosowania

Aby zademonstrować, jak działa metoda opisana w poprzednim podrozdziale, wyznaczmy krzywą dochodowości rocznych stóp procentowych *spot* dla $\tau = 23.12.2019$ (dla uproszczenia zapisu będziemy pisać $\tau = 12.2019$). Do wyznaczania krzywej potrzebna nam będzie tabela notowań z 23.12.2019 zawierająca notowane na rynku regulowanym GPW w złotówkach obligacje skarbowe o stałym kuponie lub zerowym kuponie, krótko mówiąc są to wszystkie obligacje notowane 23.12.2019, które spełniają warunki od 0. do 5. Rzeczona tabela znajduje się na następnej stronie, a metoda uzyskiwania jej z dwóch innych tabel podawanych przez GPW została przedstawiona w dodatku **A**.

³Dalej będziemy pisać po prostu krzywa dochodowości, ale istotne jest podkreślenie, że jest to krzywa utworzona ze struktury terminowej rocznych stóp *spot* zakładającej kapitalizację miesięczną.

Data wykupu	Oprocentowanie obligacji	Odsetki skumulowane (zł)	Cena nominalna (zł)	Kod ISIN	Nazwa	Kurs zamknięcia (%)	Wartość emisji (zł)
2020.04.25	1.5	10.2	1000	PL0000108510	PS0420	100.3	14478871000
2020.07.25		0	1000	PL0000110375	OK0720	99.33	4260694000
2020.10.25	5.25	9.47	1000	PL0000106126	DS1020	103.5	11154254000
2021.04.25	2	13.61	1000	PL0000108916	PS0421	101.05	26798293000
2021.05.25		0	1000	PL0000111274	OK0521	98.05	16485607000
2021.07.25	1.75	7.55	1000	PL0000109153	PS0721	100.35	30195157000
2021.10.25	5.75	10.37	1000	PL0000106670	DS1021	107.95	16181628000
2022.04.25	2.25	15.31	1000	PL0000109492	PS0422	101.65	28711511000
2022.07.25		0	1000	PL0000112165	OK0722	96.35	4007630000
2022.09.23	5.75	15.4	1000	PL0000102646	WS0922	111.55	22529065000
2022.10.25	5.75	10.37	1000	PL0000500070	IDS1022	113	5250000000
2023.01.25	2.5	23.22	1000	PL0000110151	PS0123	102.3	32685378000
2023.10.25		7.21	1000	PL0000107264	DS1023	108.64	26786861000
2024.04.25	2.5	17.01	1000	PL0000111191	PS0424	103.2	32053130000
2024.10.25	4	7.21	1000	PL0000500161	IDS1024	99.17	1270000000
2024.10.25	2.25	4.06	1000	PL0000111720	PS1024	102.5	18212879000
2026.07.25	2.5	10.79	1000	PL0000108866	DS0726	103.4	36934794000
2027.07.25	2.5	10.79	1000	PL0000109427	DS0727	103.36	31971360000
2028.04.25	2.75	18.71	1000	PL0000107611	WS0428	106.58	30207558000
2029.04.25	5.75	39.12	1000	PL0000105391	WS0429	134.4	8680338000
2029.10.25	2.75	4.96	1000	PL0000111498	DS1029	106.5	20200010000
2037.04.25	5	34.02	1000	PL0000104857	WS0437	125.8	1246504000
2045.06.25	6	30.82	1000	PL0000500062	IWS0645	97.9	1000000000
2047.04.25	4	27.21	1000	PL0000109765	WS0447	128.99	3161110000

Rysunek 4.1: Tabela notowań dziennych zawierająca notowane na rynku regulowanym GPW w zlotówkach obligacje skarbowe o stałym kuponie lub zerowym kuponie z 23.12.2019⁴

⁴Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/201912_CAT.xls, do-
step: 10.07.2023; https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20191223.xls, dostep: 10.07.2023;
https://www.finance.mf.gov.pl/dlug-publiczny/bony-i-obligacje-hurtowe/wyszukiwarka-listow-emisyjnych?p_p_id=securityissueviewportlet_WAR_mfportalsecuritytradingportlet&p_p_lifecycle=2&p_p_state=normal&p_p_mode=view&p_p_cacheability=cacheLevelPage&p_p_col_id=column-1&p_p_col_pos=1&p_p_col_count=2&fileName=iz_0823_cpilink.pdf&time=1693221135400, dostep: 10.07.2023.

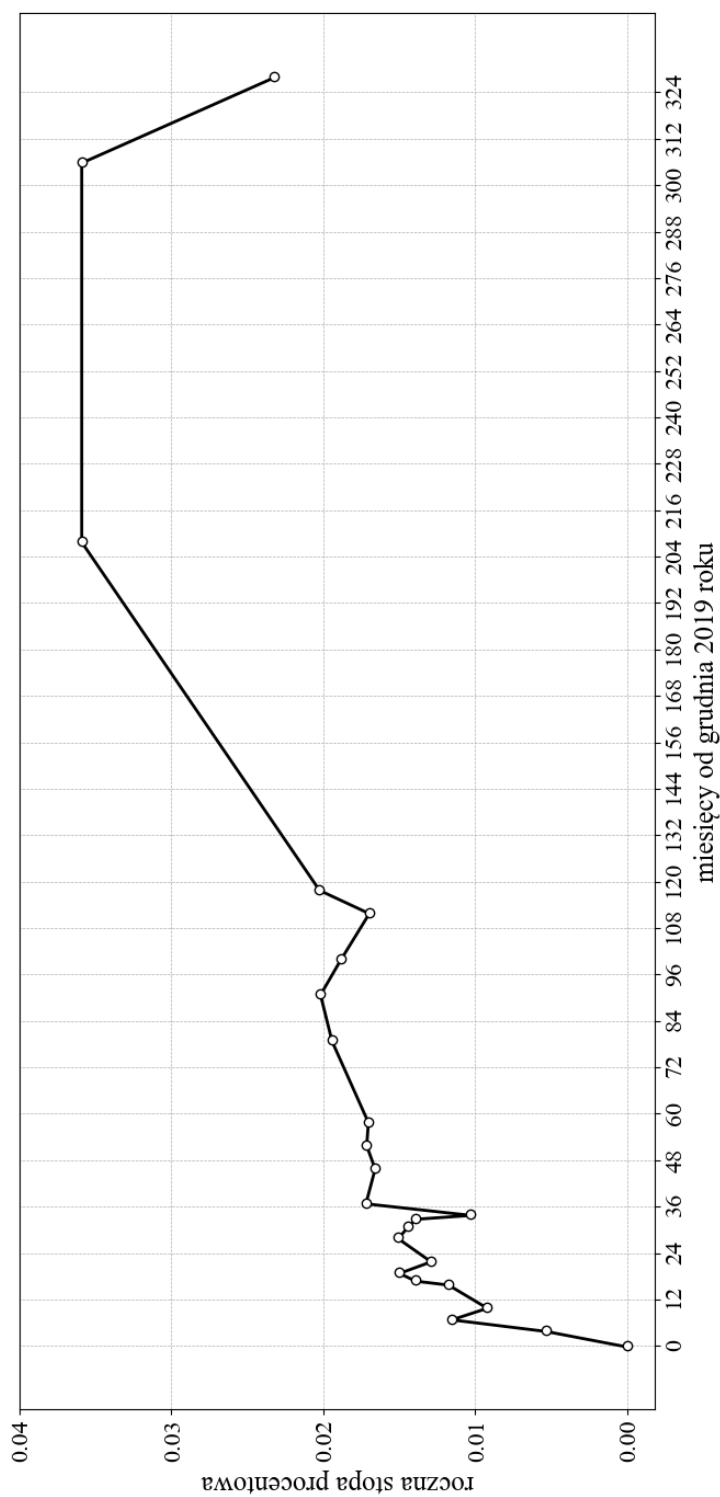
Następnie stosujemy do powyższych danych program, którego kod znajduje się w dodatku **B**. Program ten:

- filtruje dane, egzekwuje warunek 7. - wybiera z dwóch obligacji o tym samym czasie do wykupu te z większą wartością emisji;
- sprawdza, czy obligacja o najwcześniejszym terminie wykupu jest zerokuponowa lub jej czas do wykupu jest ostro mniejszy niż 13 miesięcy, jest to uwzględnienie warunku 6.;
- stosuje opisaną w podrozdziale **4.1** iterację na przefiltrowanych danych.

W wyniku jego działania otrzymujemy ciąg $(_{12.2019}s_n)_{n=0}^{23}$ o następujących wyrazach:

$$\begin{array}{ll}
_{12.2019}s_0 = (0; 0) & _{12.2019}s_1 = (4; 0,0053261) \\
_{12.2019}s_2 = (7; 0,0115299) & _{12.2019}s_3 = (10; 0,00919397) \\
_{12.2019}s_4 = (16; 0,011755) & _{12.2019}s_5 = (17; 0,0139087) \\
_{12.2019}s_6 = (19; 0,0149787) & _{12.2019}s_7 = (22; 0,0128936) \\
_{12.2019}s_8 = (28; 0,0150667) & _{12.2019}s_9 = (31; 0,014402) \\
{12.2019}s{10} = (33; 0,0138931) & _{12.2019}s_{11} = (34; 0,0102815) \\
{12.2019}s{12} = (37; 0,017188) & _{12.2019}s_{13} = (46; 0,0165809) \\
{12.2019}s{14} = (52; 0,0171355) & _{12.2019}s_{15} = (58; 0,0170244) \\
{12.2019}s{16} = (79; 0,0194165) & _{12.2019}s_{17} = (91; 0,0201756) \\
{12.2019}s{18} = (100; 0,0188459) & _{12.2019}s_{19} = (112; 0,0169639) \\
{12.2019}s{20} = (118; 0,0202398) & _{12.2019}s_{21} = (208; 0,0358961) \\
{12.2019}s{22} = (306; 0,0358961) & _{12.2019}s_{23} = (328; 0,0232677)
\end{array}$$

Krzywa dochodowości uzyskana z $(_{12.2019}s_n)_{n=0}^{23}$ znajduje się na następnej stronie.



Rysunek 4.2: Krzywa dochodowości z grudnia 2019 roku uzyskana poprzez zastosowanie metody zmodyfikowanego *bootstrappingu*⁵

⁵Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/201912_CAT.xls, dostęp: 10.07.2023; https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/dzienne/catalyst_20191223.xls, dostęp: 10.07.2023.

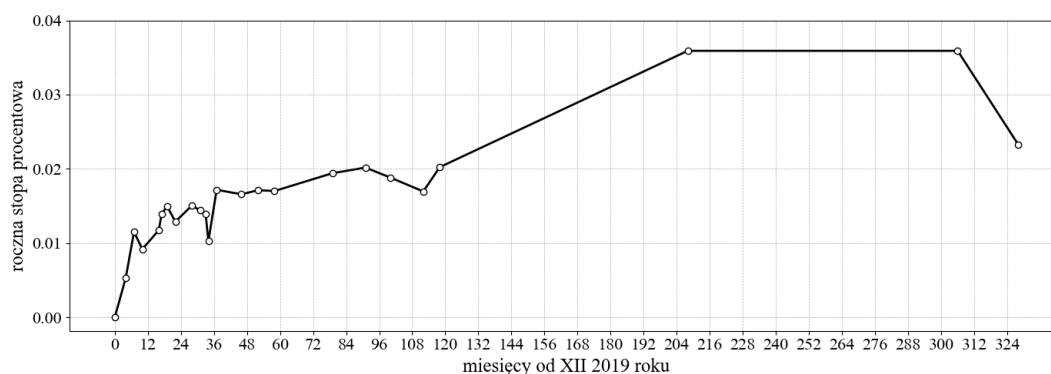
Rozdział 5

Struktura terminowych stóp procentowych w Polsce od grudnia 2019 roku do grudnia 2022 roku

5.1 Krzywe dochodowości

W tym podrozdziale zostanie zaprezentowane, w jaki sposób zmieniała się krzywa dochodowości od grudnia 2019 roku do grudnia 2022 roku. Zostanie zaprezentowanych 7 krzywych wyznaczonych co pół roku metodą opisaną w rozdziale 4.

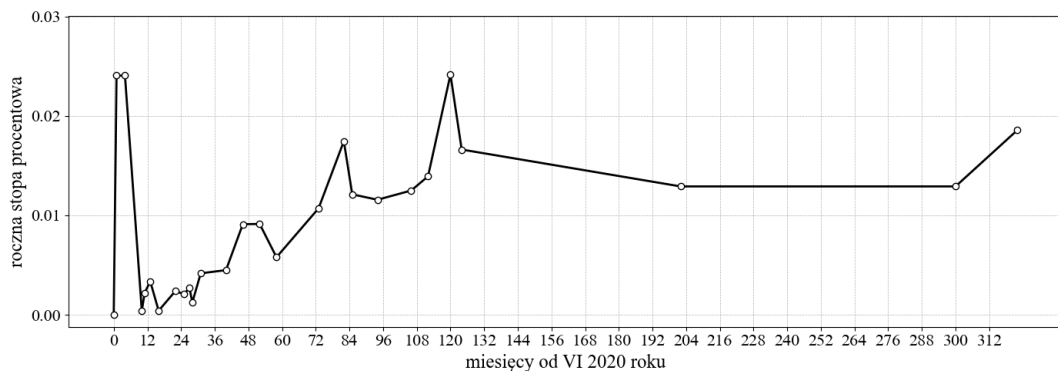
Wyznaczona w podrozdziale 4.2 krzywa dla $\tau = 12.2019$, pomijając kilka punktów, ma kształt normalny. Zwraca uwagę spadek o ponad 1% z przedostatniego punktu na ostatni, jednak można przyjąć, że jest on wynikiem bardzo dużej niepewności związanej z inwestycjami o tak długim horyzoncie czasowym na rynku wschodzącym.



Rysunek 5.1: Krzywa dochodowości z grudnia 2019 roku uzyskana poprzez zastosowanie metody zmodyfikowanego *bootstrappingu*¹

¹Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/201912_CAT.xls, dostęp: 10.07.2023; https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20191223.xls, dostęp: 10.07.2023.

Krzywa w ciągu 6 miesięcy zanotowała zmianę typu *butterfly*, co oznacza zmianę krzywizny krzywej dochodowości². Zmiana tego typu zachodzi najczęściej w przypadku gospodarczych zawirowań, niewątpliwie powodem tej zmiany była pandemia COVID-19 oraz reakcje organów państw na nią. W czerwcu 2020 roku krzywa miała kształt łukowaty. Można zaobserwować, że nawet mała zmiana czasu może zmienić znacząco poziom stopy, wskazuje to na niepokój na rynku. Warto zauważyć również, że stopa *spot* w horyzoncie 1 rok – 6 lat nie przekracza 1%, świadczy to o dużym popycie inwestorów na pewne przyprawy pieniężne w przyszłości dalszej niż rok. Z kolei wysoka (w stosunku do pozostałych terminów) stopa dla obligacji wykupowanych za mniej niż 12 miesięcy świadczy o awersji inwestorów do krótkoterminowych inwestycji. Dodatkowo średni poziom stopy zmalał w stosunku z 12.2019, przyczyną tego była niewątpliwie obniżka stóp Narodowego Banku Polskiego.



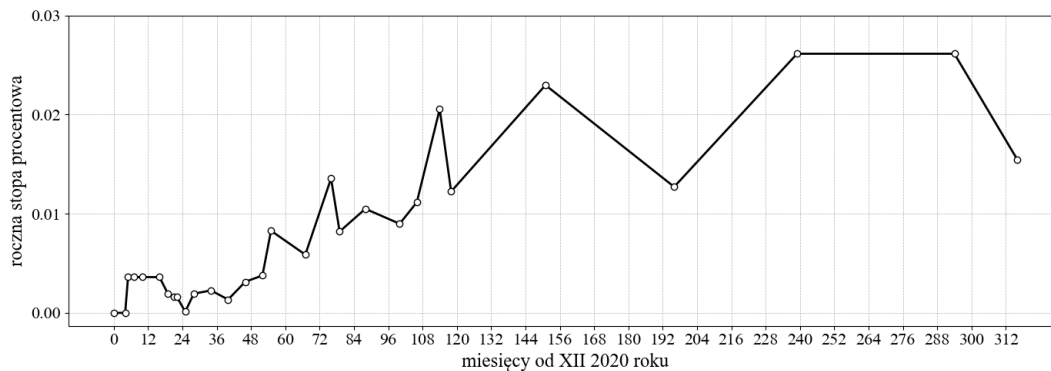
Rysunek 5.2: Krzywa dochodowości z czerwca 2020 roku uzyskana poprzez zastosowanie metody zmodyfikowanego *bootstrappingu*³

Na przełomie następnego półrocza krzywa w wyniku kolejnego *butterflya* normuje się, normalny kształt krzywej można tłumaczyć opisanym w podrozdziale 1.1 pewnym przyzwyczajeniem się konsumentów do sytuacji pandemicznej. Nadal występują gwałtowne zmiany przy niewielkiej zmianie czasu. Stopa referencyjna NBP pozostaje wciąż na poziomie z 06.2020 (10 punktów bazowych)⁴, co tłumaczy niski poziom średniej stopy *spot*.

²Borowski K., op. cit., s. 117-118; Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 123

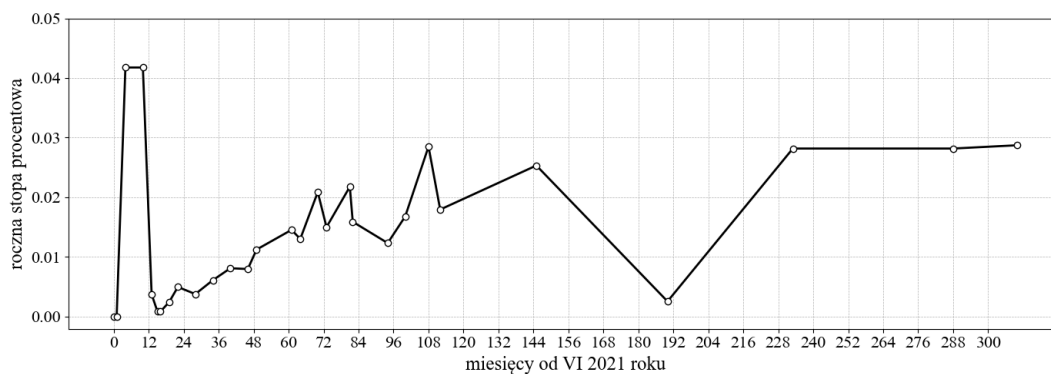
³Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202006_CAT.xls, dostęp: 11.07.2023; https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20200625.xls, dostęp: 11.07.2023.

⁴https://static.nbp.pl/dane/stopy/stopy_procentowe_archiwum.xml, dostęp: 01.07.2023



Rysunek 5.3: Krzywa dochodowości z grudnia 2020 roku uzyskana poprzez zastosowanie metody zmodyfikowanego *bootstrappingu*⁵

Dla $\tau = 06.2021$ stopa referencyjna NBP pozostaje na poziomie 0,1%, wartość odnotowania jest, że pomimo tego rynek spodziewa się wyższych stóp w przyszłości, świadczą o tym wyższe stopy *spot* w horyzontach od 36 miesięcy do 144 miesięcy niż w 12.2020. Krzywa podobnie jak w czerwcu poprzedniego roku ma kształt łukowaty.

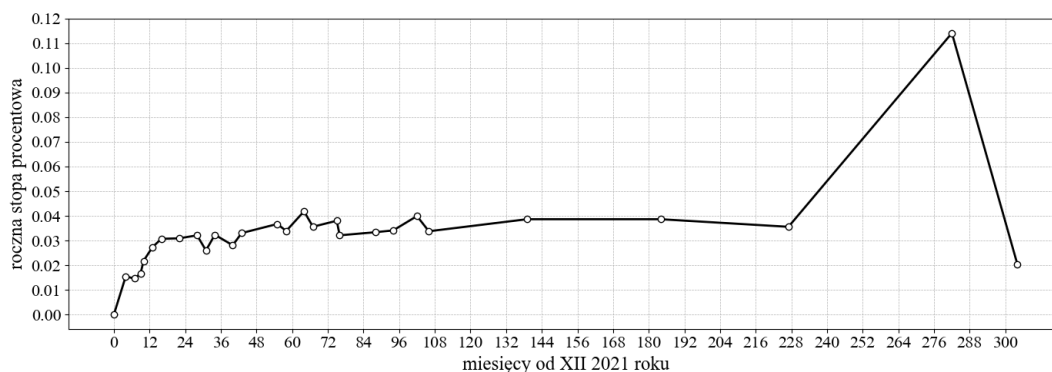


Rysunek 5.4: Krzywa dochodowości z czerwca 2021 roku uzyskana poprzez zastosowanie metody zmodyfikowanego *bootstrappingu*⁶

Grudzień 2021 roku to środek cyklu podwyżek stóp NBP. Można zaobserwować wyraźny wzrost stóp *spot* we wszystkich horyzontach czasowych, a krzywa nabiera kształtu normalnego. Dodatkową warto zauważyć, że ${}_{12.2021}r_{282} = 11,4019\%$ co jest najwyższą stopą ze wszystkich stóp w badanym okresie, można jednak przyjąć, że jest to pewna anomalia, biorąc pod uwagę, że następna stopa ${}_{12.2021}r_{304}$ jest już dużo niższa.

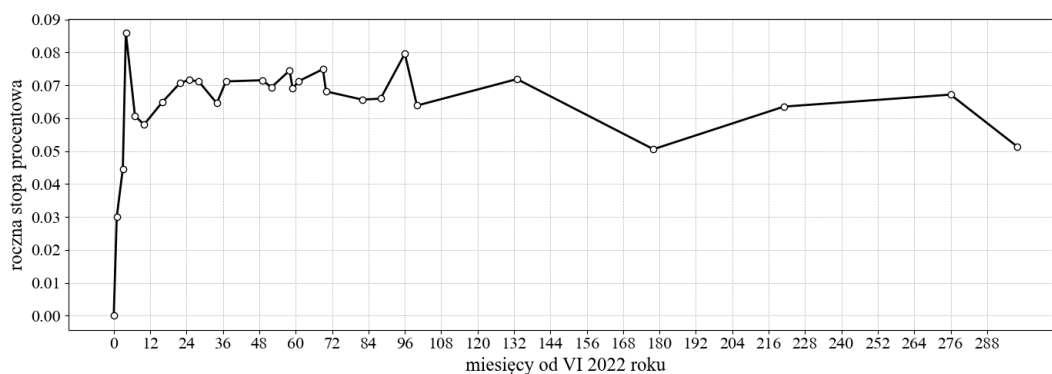
⁵Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202012_CAT.xls, dostęp: 11.07.2023; https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20201223.xls, dostęp: 11.07.2023.

⁶Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202106_CAT.xls, dostęp: 12.07.2023; https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20210625.xls, dostęp: 12.07.2023.



Rysunek 5.5: Krzywa dochodowości z grudnia 2021 roku uzyskana poprzez zastosowanie metody zmodyfikowanego *bootstrappingu*⁷

Na przełomie grudnia 2021 i czerwca 2022 krzywa dokonała *shiftu* (przesunięcia równoległego do osi stopy procentowej) w górę⁸. Przyczyną tak gwałtownej zmiany była inflacja oraz sytuacja geopolityczna w regionie, inwestorzy uwzględniali je i nisko cenili sobie stałe przyływy pieniężne w przyszłości.



Rysunek 5.6: Krzywa dochodowości z czerwca 2022 roku uzyskana poprzez zastosowanie metody zmodyfikowanego *bootstrappingu*⁹

W grudniu 2022 roku można zaobserwować (pomijając kilka punktów) płaską krzywą dochodowości, taka krzywa jest oznaką spokoju na rynku. Faktycznie można stwierdzić, że grudzień 2022 roku był momentem zmniejszenia napięcia w gospodarce (spadek CPI o prawie 1%¹⁰) oraz na arenie międzynarodowej (spotkanie prezydenta Wołodomyra Ze-

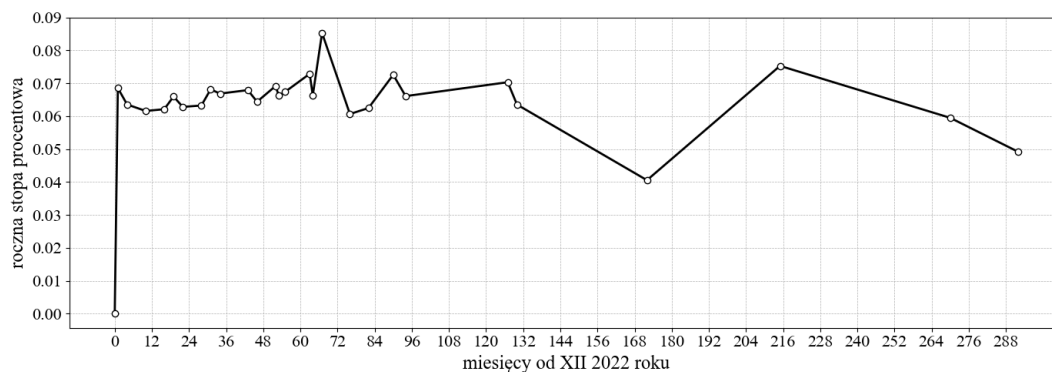
⁷Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202112_CAT.xls, dostęp: 12.07.2023; https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20211223.xls, dostęp: 12.07.2023.

⁸Borowski K., op. cit., s. 116-117; Jajuga K., Jajuga T., op. cit., s. 123

⁹Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202206_CAT.xls, dostęp: 12.07.2023; https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20220624.xls, dostęp: 12.07.2023.

¹⁰<https://stat.gov.pl/wykres/1.html>, dostęp: 14.07.2022

łńskiego z prezydentem Joe Bidenem¹¹). Krzywa utrzymała swój wysoki poziom, a jej kształt może również oznaczać, że inwestorzy spodziewali się kontynuacji spadku inflacji.

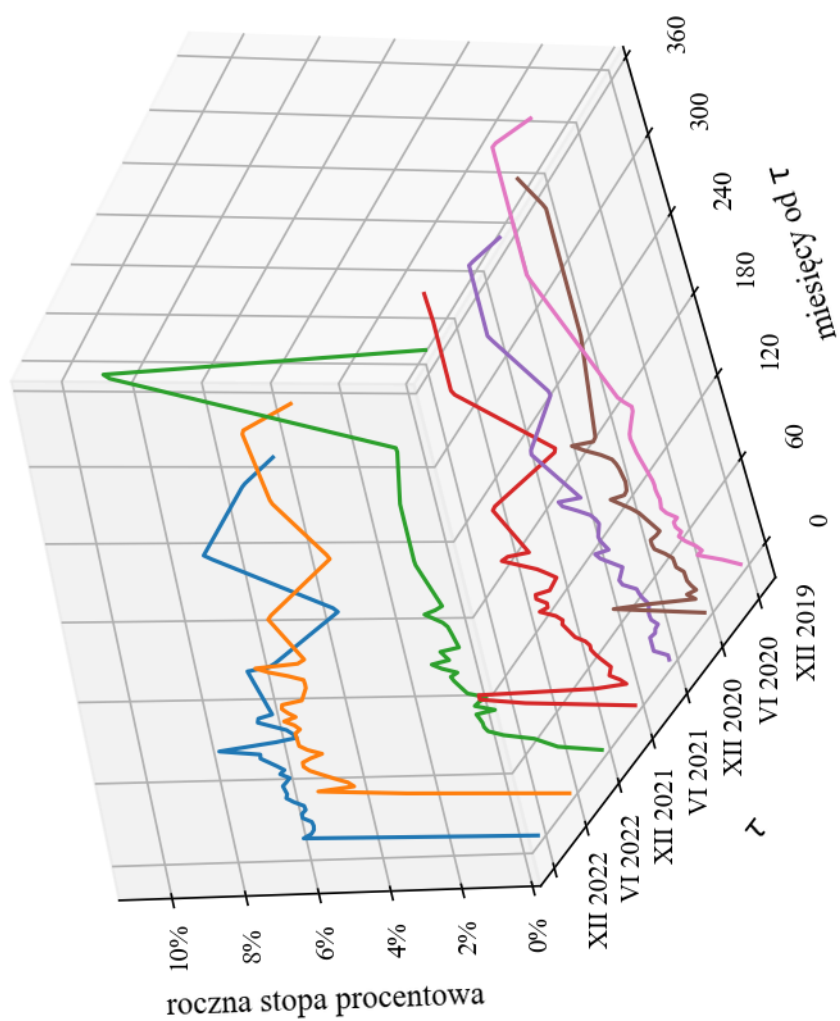


Rysunek 5.7: Krzywa dochodowości z grudnia 2022 roku uzyskana poprzez zastosowanie metody zmodyfikowanego *bootstrappingu*¹²

Na następnej stronie zostanie przedstawiony wykres, pokazujący jak zmieniała się krzywa dochodowości wraz ze zmianą τ .

¹¹<https://www.bbc.com/news/world-europe-64047058>, dostęp: 14.07.2022

¹²Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202212_CAT.xls, dostęp: 14.07.2023; https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20221223.xls, dostęp: 14.07.2023.



Rysunek 5.8: Krzywe dochodowości od grudnia 2019 roku do grudnia 2022 roku uzyskane poprzez zastosowanie metody zmodyfikowanego *bootstrappingu*¹³

¹³ Opracowanie własne na podstawie danych z: <https://gpwcatalyst.pl/statystyki>, dostęp: 15.07.2023. Inspirowane diagramem 13.2 z Haugen R. A., op. cit., s. 436.

5.2 Podsumowanie

Konkludując, widzimy wyraźnie, że pandemia miała wpływ na strukturę terminową stóp procentowych. Gdy $\tau = 06.2020, 12.2020, 06.2021$ krzywe dochodowości mają jedną wyraźnie widoczną wspólną cechę - dużą wariancję stóp. To wynika wprost z największej niepewności na rynku w tamtym okresie. Dla $\tau = 12.2021, 06.2022$ można zaobserwować, że niższa średnia stopa dla horyzontu 0-12 miesięcy od średniej stopy w horyzoncie 1 rok - 10 lat świadczy o spodziewanej przez rynek kontynuacji wzrostu inflacji. Podczas gdy wypłaszczenie się krzywej w grudniu 2022 roku świadczy o spodziewanej stabilnej sytuacji w przyszłości.

Warto nadmienić, że można wyznaczyć kilka przyszłych kierunków dalszej analizy oraz rozwoju modyfikacji modelu *bootstrappingu*:

- W modelu zmodyfikowanego bootstrappingu uwzględnienie obligacji o tej samej dacie wykupu (założmy, że to $t \in (0; +\infty)$) i przyjęcie ${}_t r_t$ jako średniej *YTM* (po obcięciu kuponów) ważonej obrotem tych obligacji.
- W modelu zmodyfikowanego bootstrappingu uwzględnienie istnienia ujemnych, ale większych od -1 stóp *spot*.
- Porównanie modeli zmodyfikowanego bootstrappingu, gdy za okres bazowy przyjmujemy dzień, tydzień i miesiąc.
- Porównanie modeli dyskretnych z modelami ciągłymi, takimi jak: model Vašíčka i model Coxa, Ingersolla, Rossa.
- Opracowanie potencjalnych strategii arbitrażu, które mogą wykorzystać duże podmioty¹⁴, ze względu na różne ceny tej samej obligacji na GPW i na BondSpot.

¹⁴Ograniczenie do dużych podmiotów wynika z tego, że jednostka transakcyjna na BondSpot wynosi co najmniej 100 tys. złotych.

Dodatek A

Kompilacja tabeli ze statystyk dziennych i tabeli ze statystyk miesięcznych

W rozdziale 4 zostało zaznaczone, że przedstawiona tam tabela dziennych notowań obligacji skarbowych notowanych w złotych na rynku regulowanym Giełdy Papierów Wartościowych o stałym kuponie lub zerowym kuponie z dodatkową kolumną dotyczącą wartości emisji została stworzona z dwóch innych tabel.

Przyczyną tego działania był brak dostatecznej ilości kategorii w tabeli notowań dziennych. Pomimo tego, że tabela ta zawiera takie kategorie jak:

- „Data wykupu (Maturity)”;
- „Oprocentowanie w bieżącym okresie odsetkowym (Interest on the current interest period)”, które to w przypadku, gdy mamy do czynienia z obligacją o oprocentowaniu stałym lub zerowym jest niezmiennie do daty wykupu;
- „Odsetki skumulowane (Accrued interest)”, która pokazuje narosłe odsetki od przyszłego kuponu;
- „Cena nominalna (Nominal value)”, czyli nominal obligacji;
- „Kod ISIN (ISIN code)” to unikalna nazwa obligacji danej serii;
- „Rynek (Market)” może to być: rynek regulowany GPW, alternatywny system obrotu GPW, rynek regulowany BS, alternatywny system obrotu BS;
- „Waluta notowania (Trading, currency)” może to być: złoty polski lub euro;
- „Kurs zamknięcia (Closing price)”, czyli cenę czystą wyznaczoną danego dnia (wyrażoną jako procent nominalu).

Jednak brak kolumny informującej o rodzaju kuponu danej obligacji uniemożliwia rozpoczęcie modelowania struktury (zgodnie z założeniami przedstawionymi w rozdziale 3 chcemy użyć jedynie obligacji o stałym lub zerowym kuponie). Dodatkowo należałoby uzyskać informację o wartości emisji danej obligacji. Potrzebne informacje zawiera tabela

przedstawiająca podsumowanie miesiąca na rynku, jednak z oczywistych względów nie uwzględnia ona cen rynkowych obligacji z danego dnia.

Po odpowienim przefiltrowaniu w arkuszu kalkulacyjnym (np. Excelu) tabela notowań dziennych będzie zawierała już tylko obligacje skarbowe notowane w złotych na rynku regulowanym GPW, a tabela statystyk miesięcznych będzie zawierała już tylko obligacje skarbowe notowane w złotych na rynku regulowanym GPW o stałym lub zerowym kuponie. Popatrzmy na przykład tabeli notowań dziennych z 23.12.2019 oraz tabeli statystyk z grudnia 2019 roku, po przefiltrowaniu można je doprowadzić do postaci przedstawionych poniżej.

Data wykupu Maturity	Oprocentowanie w bieżącym okresie odsetkowym Interest on the current interest period (%)	Cena nominalna Nominal value	Rynek Market	System notowań Trading system	Segment Segment	Kod ISIN ISIN code	Nazwa Security name	Wahita notowania Trading currency	Kurs zamknięcia Closing price (%)	Kurs otwarcia (pkt. proc.) Change (%pts)	Kurs maks. High price (%)	Kurs średni Average price (%)	Transakcje secyjne Electronic order book trades			Transakcje pakietowe Off-Electronic order book trades		
													Liczba transakcji Number of Trades	Wolumen (szt.) Volume	Wartość (tys.) Trading value (thous.)	Wolumen (szt.) Volume	Wartość (tys.) Trading value (thous.)	obrotu (tys.) Trading value (thous.)
2020.01.25	1.7500	1 000	GPW RRR	C		PL0000108601	WZ0120	PLN	100.05	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2020.04.25	1.5000	1 000	GPW RRR	C		PL0000108510	PS0420	PLN	100.30	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2020.07.25	0.00	1 000	GPW RRR	C		PL0000110375	OK0720	PLN	99.33	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2020.10.25	5.2500	1 000	GPW RRR	C		PL0000106126	DS1020	PLN	103.50	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2021.01.25	1.7900	1 000	GPW RRR	C		PL0000106068	WZ0121	PLN	100.49	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2021.04.25	2.0000	1 000	GPW RRR	C		PL0000108916	PS0421	PLN	101.05	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2021.05.25	0.00	1 000	GPW RRR	C		PL0000111274	OK0521	PLN	98.05	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2021.07.25	1.7500	7.55	1 000	GPW RRR	C	PL0000109153	PS0721	PLN	100.35	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2021.10.25	5.7500	1 000	GPW RRR	C		PL0000106670	DS1021	PLN	107.95	0.15	107.95	107.95	1.00	1.00	1.09	0	0.00	0.00
2022.04.25	2.2500	15.31	1 000	GPW RRR	C	PL0000109492	PS0422	PLN	101.65	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2022.07.25	0.00	1 000	GPW RRR	C		PL0000112165	OK0722	PLN	96.35	0.00	96.35	96.35	1.00	3.00	2.89	0	0.00	0.00
2022.09.23	5.7500	15.40	1 000	GPW RRR	C	PL0000102646	WS0922	PLN	111.55	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2022.04.25	5.7500	10.37	1 000	GPW RRR	C	PL0000500670	IDS1022	PLN	113.00	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2022.11.25	1.7900	1 000	GPW RRR	C		PL0000109377	WZ1122	PLN	100.33	0.11	100.49	100.33	2.00	398.00	400.00	0	0.00	0.00
2023.01.25	2.5000	23.22	1 000	GPW RRR	C	PL0000110151	PS0123	PLN	102.30	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2023.08.25	2.7500	11.66	1 222	GPW RRR	C	PL0000105359	IZ0823	PLN	113.87	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2023.10.25	4.0000	7.21	1 000	GPW RRR	C	PL0000107264	DS1023	PLN	108.64	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2024.01.25	1.7900	7.69	1 000	GPW RRR	C	PL0000107454	WZ0124	PLN	99.99	0.00	99.99	99.99	1.00	10.00	10.08	0	0.00	0.00
2024.04.25	2.5000	17.01	1 000	GPW RRR	C	PL0000111191	PS0424	PLN	103.20	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2024.05.25	1.7900	1.72	1 000	GPW RRR	C	PL0000110615	WZ0524	PLN	99.95	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2024.10.25	4.0000	7.21	1 000	GPW RRR	C	PL0000500161	IDS1024	PLN	99.17	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2024.10.25	2.2500	4.06	1 000	GPW RRR	C	PL0000111720	PS1024	PLN	102.50	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2025.05.25	1.7900	1.72	1 000	GPW RRR	C	PL0000111758	WZ0525	PLN	99.38	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2025.07.25	3.2500	14.03	1 000	GPW RRR	C	PL0000108197	DS0725	PLN	107.27	0.57	107.90	107.27	2.00	68.00	73.90	0	0.00	0.00
2026.01.25	1.7900	7.69	1 000	GPW RRR	C	PL0000108817	WZ0126	PLN	99.25	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2026.07.25	2.5000	10.79	1 000	GPW RRR	C	PL0000108866	DS0726	PLN	103.40	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2027.07.25	2.5000	10.79	1 000	GPW RRR	C	PL0000109427	DS0727	PLN	103.36	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2028.04.25	2.7500	18.71	1 000	GPW RRR	C	PL0000107611	WS0428	PLN	106.48	1.43	106.35	106.58	2.00	2243.00	2405.00	0	0.00	0.00
2028.05.25	1.7900	1.72	1 000	GPW RRR	C	PL0000110383	WZ0528	PLN	98.49	0.29	98.40	98.49	3.00	32.00	31.54	0	0.00	0.00
2029.04.25	5.7500	39.12	1 000	GPW RRR	C	PL0000105391	WS0429	PLN	134.40	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2029.10.25	2.7500	4.96	1 000	GPW RRR	C	PL0000111498	DS1029	PLN	106.50	-0.20	106.50	106.50	2.00	11.00	11.77	0	0.00	0.00
2029.11.25	1.7900	1.72	1 000	GPW RRR	C	PL0000111928	WZ1129	PLN	98.50	0.10	98.40	98.50	3.00	44.00	43.41	0	0.00	0.00
2037.04.25	5.0000	34.02	1 000	GPW RRR	C	PL0000104857	WS0437	PLN	125.80	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2045.06.25	6.0000	30.82	1 000	GPW RRR	C	PL0000500602	WS0645	PLN	97.90	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00
2047.04.25	4.0000	27.21	1 000	GPW RRR	C	PL0000109765	WS0447	PLN	128.99	0.00	---	---	0	0	0.00	0	0.00	0.00

Rysunek A.1: Tabela notowań dziennych zawierająca notowane na rynku regulowanym GPW w zlotówkach obligacje skarbowe z dnia 23.12.2019¹

¹Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20191223.xls, dostęp: 10.07.2023.

Kod ISIN <i>ISIN code</i>	Instrument <i>Instrument</i>	Emitent <i>Issuer</i>	Data wykupu <i>Maturity date</i>	Typ oprocentowania <i>Type of interest</i>	Waluta notowania <i>Trading currency</i>	Kupon <i>Coupon</i>	Cena nominalna <i>Nominal value</i>	Wartość emisji <i>Issue value</i>	Rynek <i>Market</i>	
PL0000108197	DS0725	SP	2025.07.25	stale/fixed	PLN	3.25	1000	28428531000	GPW RR	BS RR
PL0000108866	DS0726	SP	2026.07.25	stale/fixed	PLN	2.50	1000	36934794000	GPW RR	BS RR
PL0000109427	DS0727	SP	2027.07.25	stale/fixed	PLN	2.50	1000	31971360000	GPW RR	BS RR
PL0000106126	DS1020	SP	2020.10.25	stale/fixed	PLN	5.25	1000	11154254000	GPW RR	BS RR
PL0000106670	DS1021	SP	2021.10.25	stale/fixed	PLN	5.75	1000	16181628000	GPW RR	BS RR
PL0000107264	DS1023	SP	2023.10.25	stale/fixed	PLN	4.00	1000	26786861000	GPW RR	BS RR
PL0000111498	DS1029	SP	2029.10.25	stale/fixed	PLN	2.75	1000	20200010000	GPW RR	BS RR
PL0000500070	IDS1022	BGK	2022.10.25	stale/fixed	PLN	5.75	1000	5250000000	GPW RR	BS RR
PL0000500161	IDS1024	BGK	2024.10.25	stale/fixed	PLN	4.00	1000	1270000000	GPW RR	BS RR
PL0000500062	IWS0645	BGK	2045.06.25	stale/fixed	PLN	6.00	1000	1000000000	GPW RR	BS RR
PL0000105359	IZ0823	SP	2023.08.25	stale/fixed	PLN	2.75	1000	3889092000	GPW RR	BS RR
PL0000111274	OK0521	SP	2021.05.25	zerokuponowe/zerocoupon	PLN	---	1000	16485607000	GPW RR	BS RR
PL0000110375	OK0720	SP	2020.07.25	zerokuponowe/zerocoupon	PLN	---	1000	4260694000	GPW RR	BS RR
PL0000112165	OK0722	SP	2022.07.25	zerokuponowe/zerocoupon	PLN	---	1000	4007630000	GPW RR	BS RR
PL0000110151	PS0123	SP	2023.01.25	stale/fixed	PLN	2.50	1000	32685378000	GPW RR	BS RR
PL0000108510	PS0420	SP	2020.04.25	stale/fixed	PLN	1.50	1000	14478871000	GPW RR	BS RR
PL0000108916	PS0421	SP	2021.04.25	stale/fixed	PLN	2.00	1000	26798293000	GPW RR	BS RR
PL0000109492	PS0422	SP	2022.04.25	stale/fixed	PLN	2.25	1000	28711511000	GPW RR	BS RR
PL0000111191	PS0424	SP	2024.04.25	stale/fixed	PLN	2.50	1000	32053130000	GPW RR	BS RR
PL0000109153	PS0721	SP	2021.07.25	stale/fixed	PLN	1.75	1000	30195157000	GPW RR	BS RR
PL0000111720	PS1024	SP	2024.10.25	stale/fixed	PLN	2.25	1000	18212879000	GPW RR	BS RR
PL0000107611	WS0428	SP	2028.04.25	stale/fixed	PLN	2.75	1000	30207558000	GPW RR	BS RR
PL0000105391	WS0429	SP	2029.04.25	stale/fixed	PLN	5.75	1000	8680338000	GPW RR	BS RR
PL0000104857	WS0437	SP	2037.04.25	stale/fixed	PLN	5.00	1000	1246504000	GPW RR	BS RR
PL0000109765	WS0447	SP	2047.04.25	stale/fixed	PLN	4.00	1000	3161110000	GPW RR	BS RR
PL0000102646	WS0922	SP	2022.09.23	stale/fixed	PLN	5.75	1000	22529065000	GPW RR	BS RR

Rysunek A.2: Tabela statystyk miesięcznych zawierająca notowane na rynku regulowanym GPW w złotychkach obligacje skarbowe o stałym kuponie lub zerowym kuponie z grudnia 2019 roku²

²Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/201912_CAT.xls, dostęp: 10.07.2023.

Obie tabele można zamienić na pliki o rozszerzeniu `.csv`. Następnie przyrównując je ze sobą za pomocą funkcji w języku Python wyselekcjonujemy obligacje stałokuponowe i zerokuponowe z tabeli notowań dziennych i dopiszemy w pliku wynikowym kolumnę dotyczącą wartości emisji. Poniżej kod wspomnianej funkcji w języku Python.

```
def selection(daily_data, monthly_data):
    fixed_and_zero_rate_bonds = {}
    with open(monthly_data, 'r') as f1:
        for line in f1:
            lf1 = line.split(',')
            fixed_and_zero_rate_bonds[lf1[0]] = lf1[8]
    with open(daily_data, 'r') as f2, open('result_table.csv', 'w') as w:
        for line in f2:
            lf2 = line.split(',')
            if lf2[7] in fixed_and_zero_rate_bonds.keys():
                for i in [0, 1, 2, 3, 7, 8, 11]:
                    w.write(lf2[i])
                    w.write(',')
                w.write(fixed_and_zero_rate_bonds[lf2[7]] + '\n')
```

Po uruchomieniu funkcji `selection` na dwóch opisanych na poprzednich stronach tabelach otrzymujemy w pliku `result_table.csv` tabelę zawierającą kategorie takie jak:

- „Data wykupu”,
- „Oprocentowanie obligacji”,
- „Odsetki skumulowane”,
- „Cena nominalna”,
- „Kod ISIN”,
- „Nazwa”,
- „Kurs zamknięcia (%)”,
- „Wartość emisji”.

Te dane są już wystarczające do stworzenia struktury terminowej stóp procentowych. Na kolejnej stronie znajduje się tabela, która została stworzona poprzez zastosowanie `selection` na danych z rysunku **A.1** oraz rysunku **A.2**.

Data wykupu	Oprocentowanie obligacji	Odsetki skumulowane	Cena nominalna	Kod ISIN	Nazwa	Kurs zamknięcia (%)	Wartość emisji
2020.04.25	1.5	10.2	1000	PL0000108510	PS0420	100.3	14478871000
2020.07.25		0	1000	PL0000110375	OK0720	99.33	4260694000
2020.10.25	5.25	9.47	1000	PL0000106126	DS1020	103.5	11154254000
2021.04.25	2	13.61	1000	PL0000108916	PS0421	101.05	26798293000
2021.05.25		0	1000	PL0000111274	OK0521	98.05	16485607000
2021.07.25	1.75	7.55	1000	PL0000109153	PS0721	100.35	30195157000
2021.10.25	5.75	10.37	1000	PL0000106670	DS1021	107.95	16181628000
2022.04.25	2.25	15.31	1000	PL0000109492	PS0422	101.65	28711511000
2022.07.25		0	1000	PL0000112165	OK0722	96.35	4007630000
2022.09.23	5.75	15.4	1000	PL0000102646	WS0922	111.55	22529065000
2022.10.25	5.75	10.37	1000	PL0000500070	IDS1022	113	5250000000
2023.01.25	2.5	23.22	1000	PL0000110151	PS0123	102.3	32685378000
2023.08.25	2.75	11.66	1221.98	PL0000105359	IZ0823	113.87	3889092000
2023.10.25	4	7.21	1000	PL0000107264	DS1023	108.64	26786861000
2024.04.25	2.5	17.01	1000	PL0000111191	PS0424	103.2	32053130000
2024.10.25	4	7.21	1000	PL0000500161	IDS1024	99.17	1270000000
2024.10.25	2.25	4.06	1000	PL0000111720	PS1024	102.5	18212879000
2026.07.25	2.5	10.79	1000	PL0000108866	DS0726	103.4	36934794000
2027.07.25	2.5	10.79	1000	PL0000109427	DS0727	103.36	31971360000
2028.04.25	2.75	18.71	1000	PL0000107611	WS0428	106.58	30207558000
2029.04.25	5.75	39.12	1000	PL0000105591	WS0429	134.4	8680338000
2029.10.25	2.75	4.96	1000	PL0000111498	DS1029	106.5	20200010000
2037.04.25	5	34.02	1000	PL0000104857	WS0437	125.8	1246504000
2045.06.25	6	30.82	1000	PL0000500062	IWS0645	97.9	1000000000
2047.04.25	4	27.21	1000	PL0000109765	WS0447	128.99	3161110000

Rysunek A.3: Tabela notowań dziennych zawierająca notowane na rynku regulowanym GPW w złotych obligacje skarbowe o stałym kuponie lub zerowym kuponie (zgodnie z kategoriami GPW) z 23.12.2019³

Uwaga: Tabela zawiera obligacje skarbowe o stałym kuponie lub zerowym kuponie zgodnie z kategoriami podanymi w statystykach GPW. Obligacja o kodzie ISIN PL0000105359 jest w rzeczywistości obligacją o zmiennej stopie płaszczonej, ponieważ jest to obligacja indeksowana inflacją⁴. Z tej przyczyny nie ma jej w tabeli z rozdziału 4.2 oraz nie jest brana pod uwagę przy modelowaniu krzywych dochodowości w rozdziale 5.

³Opracowanie własne na podstawie: https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/201912_CAT.xls, dostęp: 10.07.2023; https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki_dzienne/catalyst_20191223.xls, dostęp: 10.07.2023.

⁴https://www.finanse.mf.gov.pl/dlug-publiczny/bony-i-obligacje-hurtowe/wyszukiwarka-listow-emisyjnych?p_p_id=securityissueviewportlet_WAR_mfportalsecuritytradingportlet&p_p_lifecycle=2&p_p_state=normal&p_p_mode=view&p_p_cacheability=cacheLevelPage&p_p_col_id=column-1&p_p_col_pos=1&p_p_col_count=2&fileName=iz_0823_cpilink.pdf&time=1693221135400, dostęp: 10.07.2023

Dodatek B

Kod programu w języku Python użyty do modelowania struktury terminowej stóp procentowych

```
from mpmath import mp, mpf

# Ustawienie dokładności obliczeń numerycznych:
mp.dps = 100

def get_term_structure_of_spot_interest_rates(date, file):
    # format daty: rrrr.mm.dd, typ daty: str

    date = [int(ch) for ch in date.split('.')[0:2]]
    bonds_lst = []

    with open(file, 'r') as f:
        for line in f:
            bond = []
            l = line.split(',')

            # Odczytywanie czasu do wykupu (w miesiącach) obligacji:
            bond_maturity_date = [int(ch) for ch in l[0].split('.')[0:2]]
            bond_maturity = (bond_maturity_date[0] - date[0]) * 12 + \
                (bond_maturity_date[1] - date[1])
            bond.append(bond_maturity)

            # Odczytywanie stopy kuponowej obligacji:
            coupon_rate = 0
            if l[1] != '':
                coupon_rate = mp.mpf(l[1]) / 100
            bond.append(coupon_rate)
```

```

# Odczytywanie nominału obligacji:
face_amount = mp.mpf(l[3])
bond.append(face_amount)

# Odczytywanie ceny brudnej obligacji:
dirty_price = mp.mpf(l[2]) + mp.mpf(l[6]) / 100 * face_amount
# cena brudna = odsetki +
# (cena czysta wyrażona jako % nominału)/100 * nominal
bond.append(dirty_price)

# Odczytywanie kodu ISIN obligacji:
isin_code = l[4]
bond.append(isin_code)

# Odczytywanie wartości emisji:
emission_value = int(l[7].strip())
bond.append(emission_value)

bonds_lst.append(bond)

# Gdy pokrywa się czas do wykupu, to
# odrzucamy obligację z mniejszą wartością emisji:
filtered_data = {}
for b in bonds_lst:
    key = b[0]
    if key in filtered_data.keys():
        if b[5] > filtered_data[key][5]:
            filtered_data[key] = b
    else:
        filtered_data[key] = b
bonds_lst = list(filtered_data.values())

# Sortowanie względem miesięcy do wykupu:
bonds_lst = sorted(bonds_lst, key=lambda t: t[0])

# Sprawdzenie czy obligacja o najwcześniejszym terminie wykupu jest
# zerokuponowa lub jej czas do wykupu jest
# ostro mniejszy niż 13 miesięcy
if bonds_lst[0][0] > 12 and bonds_lst[0][2] != 0:
    print('Nie jest możliwe odczytanie struktury terminowej '
          'stóp spot za pomocą metody bootstrappingu.\n'
          'Obligacja o najwcześniejszym terminie wykupu jest ')

```

```

        'obligacją kuponową o wykupie dłuższym niż 1 rok.')
```

return None

```

step_term_structure_spot_interest_rates = [0]
time = 1
bond_n = 0
while time <= bonds_lst[-1][0]:
    if time == bonds_lst[bond_n][0]:
        t = bonds_lst[bond_n][0]
        c = bonds_lst[bond_n][1]
        N = bonds_lst[bond_n][2]
        P = bonds_lst[bond_n][3]
        coupons_num = t // 12
        month_mod12 = t % 12
        for i in range(coupons_num):
            P -= (c * N) / (
                (1 + step_term_structure_spot_interest_rates[
                    12 * i + month_mod12]
                 ) ** (12 * i + month_mod12))
        root = mp.root((1 + c) * N / P, t) - 1
        if isinstance(root, mpf) and root > 0:
            step_term_structure_spot_interest_rates.append(
                root
            )
        else:
            step_term_structure_spot_interest_rates.append(
                step_term_structure_spot_interest_rates[-1]
            )
        bond_n += 1
    else:
        step_term_structure_spot_interest_rates.append(
            step_term_structure_spot_interest_rates[-1]
        )
    time += 1

maturity_time_lst = [0]
linear_term_structure_spot_interest = [0]
for b in bonds_lst:
    maturity_time_lst.append(b[0])
    linear_term_structure_spot_interest.append(
        step_term_structure_spot_interest_rates[b[0]]
    )

```

```
# Zwracamy krzywą dochodowości rocznych stóp procentowych spot:
return (maturity_time_lst,
        [12*el for el in linear_term_structure_spot_interest])
```


Bibliografia

- Borowski Krzysztof, *Miary ryzyka na rynku akcji i obligacji*, Difin, Warszawa 2014
- Cowen Tyler, Tabarrok Alex, *Modern principles: Microeconomics*, Worth Publishers, New York 2015
- Czechowska I. Dorota (red.), Konieczny Zygmunt, Dykto Maciej, Witczak Radosław, Hajdys Dagmara, Mikulska Aagnieszka, Uryszek Tomasz, *Instrumenty dłużne w gospodarce*, CeDeWu, Warszawa 2010
- Dębski Wiesław, *Akcje, obligacje i ich wycena*, ABSOLWENT, Łódź 1997
- Fabozzi Frank J., *Bond Markets, Analysis, and Strategies*, Pearson, Global Edition 2013
- Glova Jozef, *Matrix Theory Application in the Bootstrapping Method for the Term Structure of Interest Rates*, „Economic Analysis”, Vol. 43 No. 1-2 (2010), s. 44-49
- Hamer Katarzyna, Baran Maria, *Wpływ pandemii COVID-19 na zachowania, postawy i dobrostan Polaków - podsumowanie 10 miesięcy pandemii*, [bez wydawcy], [bez miejsca wydania] 2021
- Haugen Robert A., *Teoria nowoczesnego inwestowania : obszerny podręcznik analizy portfelowej*, WIG-Press, Warszawa 1996
- Jajuga Krzysztof, Jajuga Teresa, *Inwestycje : instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015
- Jaworski Piotr, Micał Jacek, *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Poltext, Warszawa 2005
- Kliber Agata M., Kliber Paweł, *Podstawy modelowania struktury terminowej stóp procentowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2010
- Krawczak Maciej, Miklewski Antoni, Jakubowski Andrzej, Konieczny Piotr, *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym : wybrane zagadnienia*, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa 2000
- Liberadzki Kamil, *Dłużne papiery wartościowe*, Difin, Warszawa 2014
- Mayo Herbert B., *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2020
- Nazarczuk Jarosław M., Cicha-Nazarczuk Marlena, Szczepańska Karolina, *Wrażliwość polskiej gospodarki na zmiany wywołane pandemią COVID-19*, Instytut Badań Gospodarczych, Olsztyn 2022
- Pera Krystian, Buła Rafał, Mitrenga Damian, *Modele inwestycyjne*, Wydawnictwo C. H. Beck, Warszawa 2014

- Sobczyk Mieczysław, *Matematyka finansowa : podstawy teoretyczne, przykłady, zadania*, Agencja Wydawnicza „Placet”, Warszawa 2000
- Utkin Joanna, *Obligacje i ich portfele : wycena, wrażliwość, strategie*, Szkoła Główna Handlowa-Oficina Wydawnicza, Warszawa 2005
- Varian Hal R., *Mikroekonomia. Kurs średni - ujęcie nowoczesne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2016
- Wang Chen, Horby Peter W., Hayden Frederick G., Gao George F., *A novel coronavirus outbreak of global health concern*, „The Lancet”, Vol. 395 No. 10223 (2020), s. 470-473
- Weron Aleksander, Weron Rafał, *Inżynieria finansowa : wycena instrumentów pochodnych, symulacje komputerowe, statystyka rynku*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998

Spis aktów prawnych

- Rozporządzenie Ministra Zdrowia z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie ogłoszenia na obszarze Rzeczypospolitej Polskiej stanu epidemii, Dz.U. 2020 poz. 491
- Rozporządzenie Ministra Zdrowia z dnia 12 maja 2022 r. w sprawie odwołania na obszarze Rzeczypospolitej Polskiej stanu epidemii, Dz.U. 2022 poz. 1027
- Ustawa z dnia 15 stycznia 2015 r. o obligacjach, Dz.U. 2015 poz. 238
- Ustawa z dnia 29 lipca 2005 r. o obrocie instrumentami finansowymi, Dz.U. 2005 nr 183 poz. 1538

Źródła internetowe

- https://stat.gov.pl/download/gfx/portalinformacyjny/pl/defaultaktualnosci/5480/9/3/1/informacja_gus_ws_zaktualizowanego_kwartalnego_szacunku_pkb_za_lata_2010-2021_i_1_i_2_kw_2022_r.xlsx, dostęp: 01.07.2023
- https://static.nbp.pl/dane/monetarno-finansowa/miarypieniadza_nowe.xlsx, dostęp: 02.07.2023
- <https://www.bankier.pl/wiadomosc/RPP-podnosi-stop-y-procentowe-8200757.html>, dostęp: 02.07.2023
- https://static.nbp.pl/dane/stopy/stopy_procentowe_archiwum.xml, dostęp: 02.07.2023
- <https://www.ft.com/content/0e02eef2-8482-4caa-9b3d-3ccda19b041a>, dostęp: 03.07.2023
- <https://www.bbc.com/news/world-middle-east-51785690>, dostęp: 03.07.2023
- <https://www.spglobal.com/marketintelligence/en/mi/research-analysis/argentina-in-default.html>, dostęp: 03.07.2023
- <https://money.cnn.com/2017/11/14/news/economy/venezuela-debt-default-sp/index.html>, dostęp: 03.07.2023
- https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202306_CAT.xls, dostęp: 07.07.2023

https://www.finance.mf.gov.pl/dlug-publiczny/bony-i-obligacje-hurtowe/wyszukiwarka-listow-emisyjnych?p_p_id=securityissueviewportlet_WAR_mfportalsecuritiestradingportlet&p_p_lifecycle=2&p_p_state=normal&p_p_mode=view&p_p_cacheability=cacheLevelPage&p_p_col_id=column-1&p_p_col_pos=1&p_p_col_count=2&fileName=iz_0823_cpilink.pdf&time=1693221135400, dostęp: 10.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/201912_CAT.xls, dostęp: 10.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20191223.xls, dostęp: 10.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202006_CAT.xls, dostęp: 11.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20200625.xls, dostęp: 11.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202012_CAT.xls, dostęp: 11.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20201223.xls, dostęp: 11.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202106_CAT.xls, dostęp: 12.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20210625.xls, dostęp: 12.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202112_CAT.xls, dostęp: 12.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20211223.xls, dostęp: 12.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202206_CAT.xls, dostęp: 12.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20220624.xls, dostęp: 12.07.2023
<https://stat.gov.pl/wykres/1.html>, dostęp: 14.07.2023
<https://www.bbc.com/news/world-europe-64047058>, dostęp: 14.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_miesieczne/202212_CAT.xls, dostęp: 14.07.2023
https://gpwcatalyst.pl/pub/CATALYST/statystyki/statystyki_dzienne/catalyst_20221223.xls, dostęp: 14.07.2023
<https://gpwcatalyst.pl/statystyki>, dostęp: 15.07.2023