

---

# WYCENA I ANALIZA OPCJI W MODELU DWUMIANOWYM

---

Wstęp do Inżynierii Finansowej

Magda Kozajda, Jakub Miłosz  
Uniwersytet Wrocławski

15.05.2024

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Wstęp teoretyczny</b>	<b>1</b>
2.1	Opcje . . . . .	1
2.2	Payoff . . . . .	2
2.3	Arbitraż . . . . .	2
2.4	Model dwumianowy . . . . .	3
2.4.1	Drzewo dwumianowe . . . . .	3
2.4.2	Drzewo dwumianowe jedno-okresowe . . . . .	3
2.4.3	Drzewo dwumianowe dwu-okresowe . . . . .	4
2.5	Opcje amerykańskie . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Opis projektu</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Wycena opcji</b>	<b>6</b>
4.1	Wycena opcji europejskich . . . . .	6
4.2	Wycena opcji amerykańskich . . . . .	9
4.3	Porównanie opcji europejskich i amerykańskich . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Analiza wrażliwości</b>	<b>12</b>
5.1	Cena wykonania . . . . .	12
5.2	Zapadalność . . . . .	13
5.3	Wartość początkowa aktywa bazowego . . . . .	14
5.4	Stopa procentowa . . . . .	15
5.5	Parametr $\sigma$ . . . . .	16
5.6	Liczba kroków w modelu . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Mapy ciepła</b>	<b>18</b>
6.1	Zapadalność i cena spot . . . . .	18
6.2	Zapadalność i stopa procentowa . . . . .	20
6.3	Zapadalność i zmienność . . . . .	21
6.4	Cena spot i cena wykonania . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Portfel zabezpieczający</b>	<b>24</b>
7.1	Opcja europejska . . . . .	25
7.1.1	Opcja call . . . . .	25
7.1.2	Opcja put . . . . .	25
7.2	Opcja amerykańska . . . . .	28
7.2.1	Opcja call . . . . .	28
7.2.2	Opcja put . . . . .	28
<b>8</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>31</b>
<b>9</b>	<b>Dodatek - czas działania funkcji</b>	<b>32</b>

# 1 Wstęp

Głównym celem wykonanego przez nas projektu była wycena i analiza opcji w modelu dwumianowym. Ważne dla nas było nie tylko teoretyczne przedstawienie zasad działania modelu ale również jego praktyczne zastosowanie i analiza efektywności w rzeczywistych warunkach rynkowych. W niniejszym raporcie opiszemy sposób wykonania zadania i przedstawimy osiągnięte rezultaty. Zaczniemy od przypomnienia definicji opcji i związanych z nimi pojęć. Następnie omówimy strukturę modelu dwumianowego i jego sposób działania. W kolejnych rozdziałach przedstawimy otrzymane wyniki na wykresach i dokonamy ich analizy. Ostatnim z zadań będzie stworzenie portfela replikującego opcje.

## 2 Wstęp teoretyczny

We wstępie teoretycznym przypomnimy pojęcia, którymi będziemy posługiwać się w kolejnych rozdziałach raportu. Zajmiemy się głównie ideą opcji oraz modelem drzewa dwumianowego. Źródłami definicji są notatki z wykładu oraz literatura [1].

### 2.1 Opcje

Na rynku finansowym **opcją** nazywamy umowę, którą można kupić i sprzedać, w ramach której właściciel ma prawo do zdecydowania, czy kupić (lub sprzedać) aktywo bazowe jak akcja czy obligacja, po ustalonej z góry cenie w określonym przedziale czasowym lub w określonym momencie.

Decyzję o kupnie lub sprzedaży aktywa bazowego nazywamy **wykonaniem opcji**. Cena, po której aktywo bazowe zostanie kupione/sprzedane w momencie wykonania opcji to **cena wykonania**. Opcję możemy wykonać do lub w **dacie wygaśnięcia**, czyli do ustalonego momentu, po którym opcja jest już nieważna.

Istnieją dwa rodzaje opcji: **opcje call** oraz **opcje put**. Opcje call są opcjami kupna - dają właścicielowi prawo do zakupu aktywa bazowego. Opcje put to opcje sprzedaży - ich właściciel może sprzedać aktywo bazowe.

Na rynku opcji mamy zatem czterech uczestników:

- kupujący opcje call
- sprzedający opcje call
- kupujący opcje put
- sprzedający opcje put

Kupujący są określani jako posiadający **pozycje długie (long position)**; sprzedający są określani jako posiadający **pozycje krótkie (short position)**.

Innym kryterium podziału opcji jest moment wykonania. W tym przypadku rozróżniamy **opcje europejskie** i **opcje amerykańskie**. Opcje europejskie można wykonać jedynie w dniu wygaśnięcia. Opcje amerykańskie mogą być wykonane w dowolnym momencie do daty wygaśnięcia.

## 2.2 Payoff

Warto podkreślić, że opcja daje właścicielowi prawo ale nie obowiązek do wykonania umowy. Jednym z narzędzi umożliwiających analizę zwrotu z inwestycji jest **payoff**, czyli funkcja wypłaty instrumentu finansowego. Wartość tej funkcji zależy między innymi od przyszłej wartości aktywa bazowego i ceny wykonania opcji. W zależności od warunków rynkowych payoff może przyjmować wartości dodatnie, ujemne lub zerowe. Payoff opcji europejskiej wyliczany jest w chwili jej wygaśnięcia; payoff opcji amerykańskiej można rozważać w dowolnym momencie jej trwania.

W tabelach 1 oraz 2 przedstawiono sposoby wyliczania wartości wypłaty opcji. Przyjęte oznaczenia to:  $T$  - moment wygaśnięcia opcji,  $t$  - moment czasu przed wygaśnięciem opcji,  $S_T$  lub  $S_t$  - rynkowa cena aktywa bazowego w danym momencie,  $K$  - cena wykonania opcji.

Opcja europejska		
	Pozycja długa (long)	Pozycja krótka (short)
Opcja call	$\max(S_T - K, 0)$	$\min(K - S_T, 0)$
Opcja put	$\max(K - S_T, 0)$	$\min(S_T - K, 0)$

Tabela 1: Payoff opcji europejskiej

Opcja amerykańska		
	Pozycja długa (long)	Pozycja krótka (short)
Opcja call	$\max(S_t - K, 0)$	$\min(K - S_t, 0)$
Opcja put	$\max(K - S_t, 0)$	$\min(S_t - K, 0)$

Tabela 2: Payoff opcji amerykańskiej

## 2.3 Arbitraż

Arbitraż to strategia inwestycyjna polegająca na jednoczesnym kupnie i sprzedaży tego samego lub podobnego instrumentu finansowego na różnych rynkach w celu osiągnięcia zysku bez ponoszenia ryzyka. Arbitraż jest możliwy dzięki różnicom w cenach tego samego aktywa na różnych rynkach. Inwestorzy wykorzystują te różnice, aby zarobić na zmianach cen, zanim rynki zdążą się wyrównać.

Na rynku możliwy jest arbitraż, jeżeli możemy zbudować taki portfel, że:

- w chwili  $t = 0$  jego wartość jest równa 0;
- w pewnej chwili  $t > 0$  jego payoff jest nieujemny z prawdopodobieństwem równym 1 a z dodatnim prawdopodobieństwem payoff jest większy niż zero.

## 2.4 Model dwumianowy

Model dwumianowy jest jednym z bardziej przydatnych i intuicyjnych sposobów wyceny opcji. Pozwala on na obserwowanie zmiany wartości aktywa bazowego w czasie.

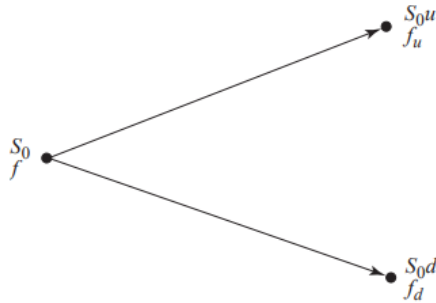
### 2.4.1 Drzewo dwumianowe

Model dwumianowy to diagram reprezentujący możliwe ścieżki dla ceny aktywa w czasie ważności opcji. Głównym założeniem modelu jest, że cena aktywa porusza się spacerem losowym, czyli w każdym kolejnym kroku istnieje pewne prawdopodobieństwo, że cena zwiększy się lub zmniejszy o pewien procent. Kolejnymi założeniami są brak arbitrażu i stała zmienność aktywa w czasie.

Przeanalizujemy sposób działania modelu dwumianowego na przykładach dla opcji europejskich.

### 2.4.2 Drzewo dwumianowe jedno-okresowe

Rozważmy aktywo o cenie  $S_0$  i opcję na to aktywo, której obecna cena wynosi  $f$ . Zakładamy, że opcja trwa przez czas  $T$ . W czasie trwania opcji cena aktywa może wzrosnąć z  $S_0$  do nowego poziomu  $S_0u$  dla  $u > 1$  lub spaść z  $S_0$  do poziomu  $S_0d$  dla  $d < 1$ . Przy wzroście ceny aktywa do  $S_0u$  zakładamy, że wypłata z opcji wynosi  $f_u$ ; jeżeli cena spadnie do  $S_0d$  wypłata to  $f_d$ . Rysunek 2.4.2 obrazuje opisaną sytuację.



Rysunek 1: Drzewo dwumianowe jedno-okresowe

Wartości  $f_u$  i  $f_d$  to payoff analizowanej opcji w przypadku, kiedy cena aktywa w chwili  $T$  równa jest odpowiednio  $S_0u$  lub  $S_0d$ . Czyli zakładając, że zajmujemy pozycję długą mamy:

- $f_u = \max(S_0u - K, 0)$  dla opcji call lub  $f_u = \max(K - S_0u, 0)$  dla opcji put,
- $f_d = \max(S_0d - K, 0)$  dla opcji call lub  $f_d = \max(K - S_0d, 0)$  dla opcji put,

Konstruując odpowiedni portfel i zakładając brak arbitrażu możemy pokazać, że cena opcji  $f$  jest równa:

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$$

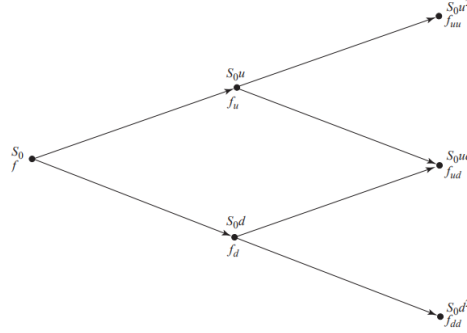
przy

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d},$$

gdzie  $r$  jest nominalną stopą procentową wolną od ryzyka.

### 2.4.3 Drzewo dwumianowe dwu-okresowe

Powyższą analizę możemy rozszerzyć na model dwumianowy dwu-okresowy pokazany na rysunku 2.



Rysunek 2: Drzewo dwumianowe dwu-okresowe

Ponownie rozważamy aktywo o wartości  $S_0$ . W każdym kroku czasowym jego cena wzrasta do  $u$  razy swojej początkowej wartości lub spada do  $d$  razy swojej początkowej wartości. Zakładamy, że stopa procentowa wolna od ryzyka wynosi  $r$  a długość kroku czasowego to  $\Delta t$ .

Przeanalizujemy ceny aktywa bazowego w poszczególnych etapach:

1. Po pierwszym kroku czasowym

Analogicznie jak w modelu jedno-okresowym - cena aktywa wynosi  $S_0u$  w przypadku wzrostu albo  $S_0d$  w przypadku spadku.

2. Po drugim kroku czasowym

Możemy rozważyć następujące sytuacje:

- Jeżeli cena aktywa wzrasta dwukrotnie wynosi  $S_0u^2$ . Wartość opcji oznaczamy wtedy jako  $f_{uu}$  i jest ona równa:  $f_{uu} = \max(S_0u^2 - K, 0)$  dla opcji call i  $f_{uu} = \max(K - S_0u^2, 0)$  dla opcji put.
- Jeżeli cena aktywa najpierw wzrasta a później spada, wynosi  $S_0ud$ . Cena opcji  $f_{ud}$  to:  $f_{ud} = \max(S_0ud - K, 0)$  dla opcji call i  $f_{ud} = \max(K - S_0ud, 0)$  dla opcji put.
- Jeśli cena aktywa najpierw spada, a potem wzrasta, wynosi  $S_0du$ . Cena opcji  $f_{du} = f_{ud}$
- Jeśli cena akcji spada dwukrotnie, wynosi  $S_0d^2$ . Wartość opcji oznaczamy wtedy jako  $f_{dd}$  i jest ona równa:  $f_{dd} = \max(S_0d^2 - K, 0)$  dla opcji call i  $f_{dd} = \max(K - S_0d^2, 0)$  dla opcji put.

Konstruując odpowiedni portfel ponownie możemy pokazać, że cena opcji  $f$  to:

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d],$$

przy prawdopodobieństwie  $p$  równym:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d},$$

Zastosowanie powyższych równań dla  $f_u$ ,  $f_d$  i  $f$  daje:

$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{du} + (1-p)f_{dd}]$$

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d].$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości otrzymujemy:

$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}],$$

gdzie zmienne  $p^2$ ,  $2p(1-p)$ ,  $(1-p)^2$  są prawdopodobieństwami osiągnięcia odpowiednio skrajnego górnego, środkowego i dolnego wierzchołka.

Zauważmy, że cena opcji  $f$  równa jest zdyskontowanej wartości oczekiwanej payoff-u tej opcji w sytuacji wolnej od ryzyka. Własność ta pozwala łatwo wyliczać  $f$  dla drzew dwumianowych rozbudowanych o kolejne okresy.

## 2.5 Opcje amerykańskie

Przypomnijmy, że opcje amerykańskie mogą być wykonane w dowolnym momencie do daty wygaśnięcia. Procedura wyceny opcji amerykańskiej polega na przejściu drzewa dwumianowego od końca: od ostatnich wierzchołków do początkowego. W każdym z wierzchołków sprawdzamy, czy wcześniejsze wykonanie opcji jest optymalne. Wartość opcji w końcowych węzłach jest taka sama jak dla opcji europejskich. W wcześniejszych węzłach wartość opcji jest większą z dwóch wartości:

1. Wartość opcji wyliczona jak w przypadku opcji europejskich
2. Payoff uzyskany ze wcześniejszego wykonania.

## 3 Opis projektu

Po przypomnieniu niezbędnych pojęć możemy przejść do treści projektu. Celem projektu jest wycena i analiza opcji w modelu dwumianowym. Szczególnie interesować nas będzie wrażliwość wyceny na poszczególne parametry jak czas, cena aktywa czy stopa procentowa. Ważną częścią będzie także porównanie opcji europejskich i amerykańskich.

W projekcie zakładamy dwumianowy model rynku, w którym akcja warta  $S_t$  w chwili  $t$  może w kolejnym kroku być warta  $uS_t$  albo  $dS_t$ , gdzie  $u$  i  $d$  są zadanymi parametrami. Zakładamy, że akcja ta nie wypłaca dywidend. Oprócz akcji dysponujemy również możliwością inwestycji (lub pożyczki) ze stałą stopą wolną od ryzyka  $r$  w każdym okresie (przyjmujemy oprocentowanie ciągłe). Czas mijający podczas jednego kroku w drzewie dwumianowym będziemy oznaczać  $\Delta t$ .

Rozważamy cztery opcje:

- opcje europejskie call i put z ceną wykonania  $K$  i zapadalnością  $T$  lat,

- opcje amerykańskie call i put z ceną wykonania  $K$  i zapadalnością  $T$  lat.

Początkowe parametry to:

- $\Delta t = 1/12$ ,  $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ,  $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ,  $\sigma = 0.3$ ,
- $S_0 = 50$ ,  $r = 0.02$ ,
- $K = 48$ ,  $T = 2$ .

Każde z zadań do wykonania w projekcie omówione zostanie w odpowiednim rozdziale. Rozwiązania zadań zaimplementowane są w języku Python - kod źródłowy znajduje się w osobnym pliku.

## 4 Wycena opcji

Pierwszym krokiem jest wycena opcji europejskich i amerykańskich. Wycenę przeprowadzamy zgodnie ze wcześniejszym teoretycznym opisem wyceny opcji w modelu dwumianowym. Początkowo rozważamy czas życia opcji równy dwa lata. Krok czasowy  $\Delta t = 1/12$  odpowiada jednemu miesiącowi. Rozważamy zatem model o 24 okresach, gdzie każdy z okresów oznacza jeden miesiąc.

Wyniki przedstawimy na grafikach przedstawiających modele drzew dwumianowych dla odpowiednich opcji. Kolorem czerwonym oznaczmy momenty, w których opłaca się wykonać opcje. Przypomnijmy, że wykonanie opcji call jest opłacalne, gdy cena aktywa bazowego jest większa niż cena wykonania, czyli:

$$S_T > K.$$

Opcję put opłaca się wykonać w przeciwnym wypadku, czyli dla:

$$S_T < K.$$

### 4.1 Wycena opcji europejskich

Na rysunkach numer 3 i 4 widzimy modele drzew dwumianowych opcji europejskich. Opcje europejskie mogą być wykonane jedynie w momencie zapadalności, czyli w ostatnich węzłach drzewa (przy  $T = 2$ ).

Na wykresie 3 widzimy, że istnieje 13 sytuacji, w których opłaca się wykonać opcję call. Wyliczona wartość europejskiej opcji call to:

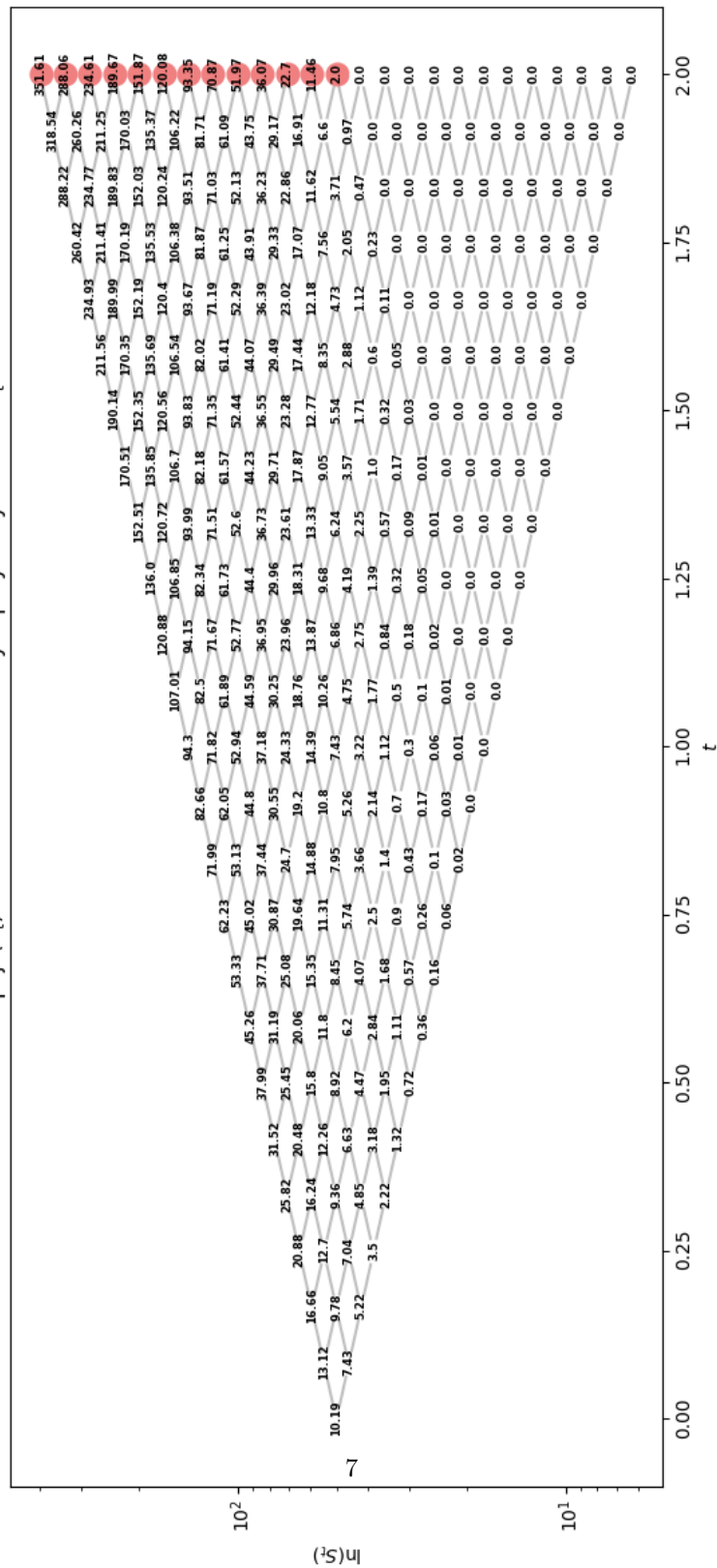
$$V_0 = 10.191185$$

Wykres 4 pokazuje 12 sytuacji, kiedy wykonanie opcji put jest opłacalne. Wartość europejskiej opcji put to:

$$V_0 = 6.309078$$

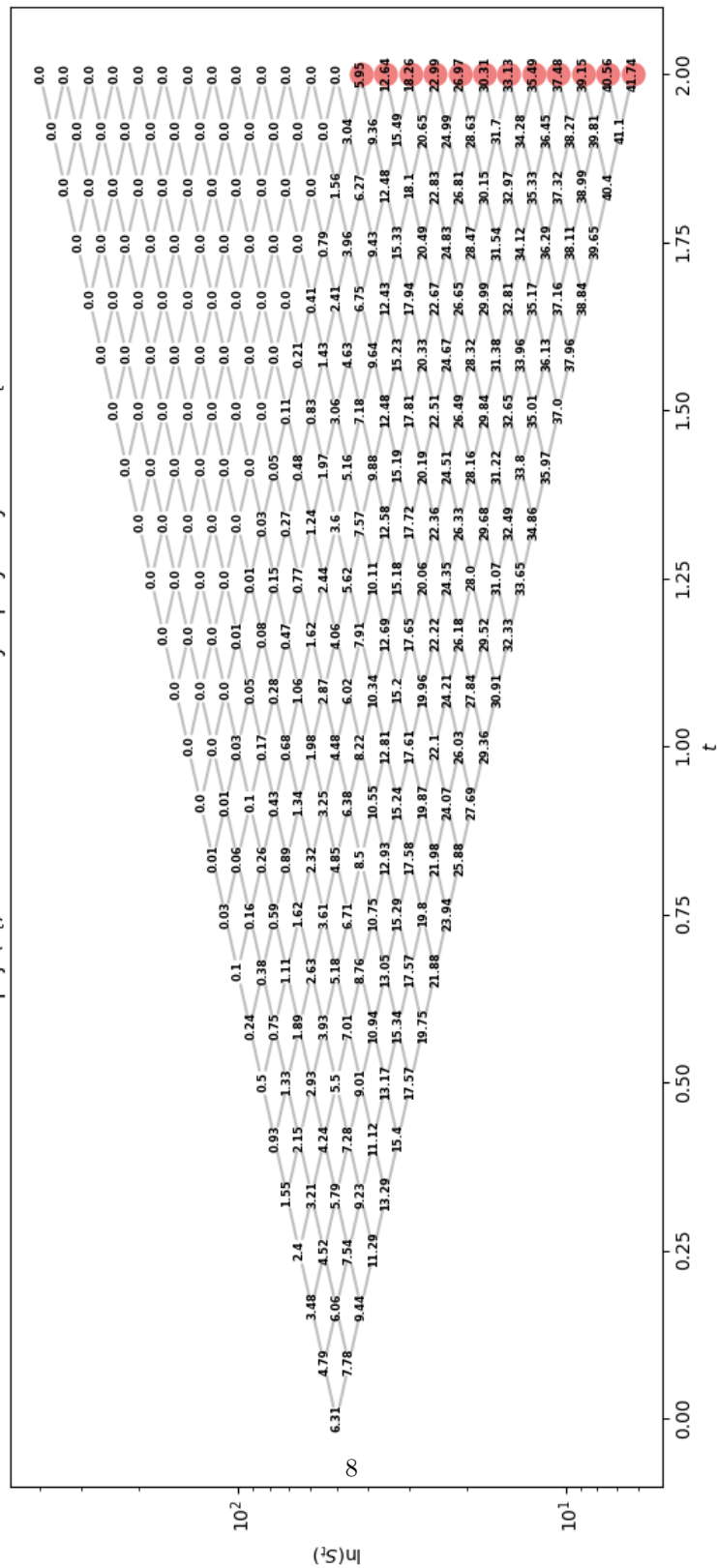


Wartość opcji ( $V_t$ ) w modelu dwumianowym przy danym  $t$  oraz  $S_t$



Rysunek 3: Wycena europejskiej opcji call

Wartość opcji ( $V_t$ ) w modelu dwumianowym przy danym  $t$  oraz  $S_t$



Rysunek 4: Wycena europejskiej opcji put

## 4.2 Wycena opcji amerykańskich

Opcje amerykańskie mogą być wykonane w dowolnym momencie życia opcji. Przeanalizujemy opłacalność wykonania opcji tego rodzaju. Wartość opcji w danym węźle jest większą z wartości payoff'u uzyskanego ze wcześniejszego wykonania i z wartości opcji wyliczonej według teoretycznego wzoru.

W przypadku opcji call payoff wyliczany jest jako:

$$\max(S_T - K, 0).$$

Wartość opcji  $S_T$  w jednej z gałęzi poddrzewa wyliczona jest jako  $S_{T-1}u$ , gdzie  $u > 1$ . Oznacza to, że dla niezerowej  $S_{T-1}$  wartość opcji będzie funkcją rosnącą. Przy stałym  $K$  payoff  $\max(S_T - K, 0)$  także będzie rosnący i dodatni dla  $S_T > K$ . Amerykańską opcję call opłaca się zatem wykonać przy możliwie największym  $T$ , czyli w momencie zapadalności opcji. Momenty, w których wykonanie opcji call jest opłacalne są zatem takie same dla opcji amerykańskich i europejskich. Drzewo dwumianowe dla amerykańskiej opcji call zobrażowane jest na rysunku numer 5. Cena opcji amerykańskiej jest równa cenie europejskiej ze względu na te same momenty wykonania. Stąd cena amerykańskiej opcji call wynosi:

$$V_0 = 10.191184$$

Wartość w końcowych węzłach drzewa dwumianowego opcji put (rys. 6) jest taka sama dla opcji amerykańskich i europejskich. Oznacza to, że w momencie zapadalności  $T$  oba typy opcji mają taką samą opłacalność wykonania.

Dla  $t < T$  musimy sprawdzić, czy opłaca się wcześniej wykonać opcję. W tym celu liczymy payoff opcji w momencie  $t$ . Payoff opcji put to:

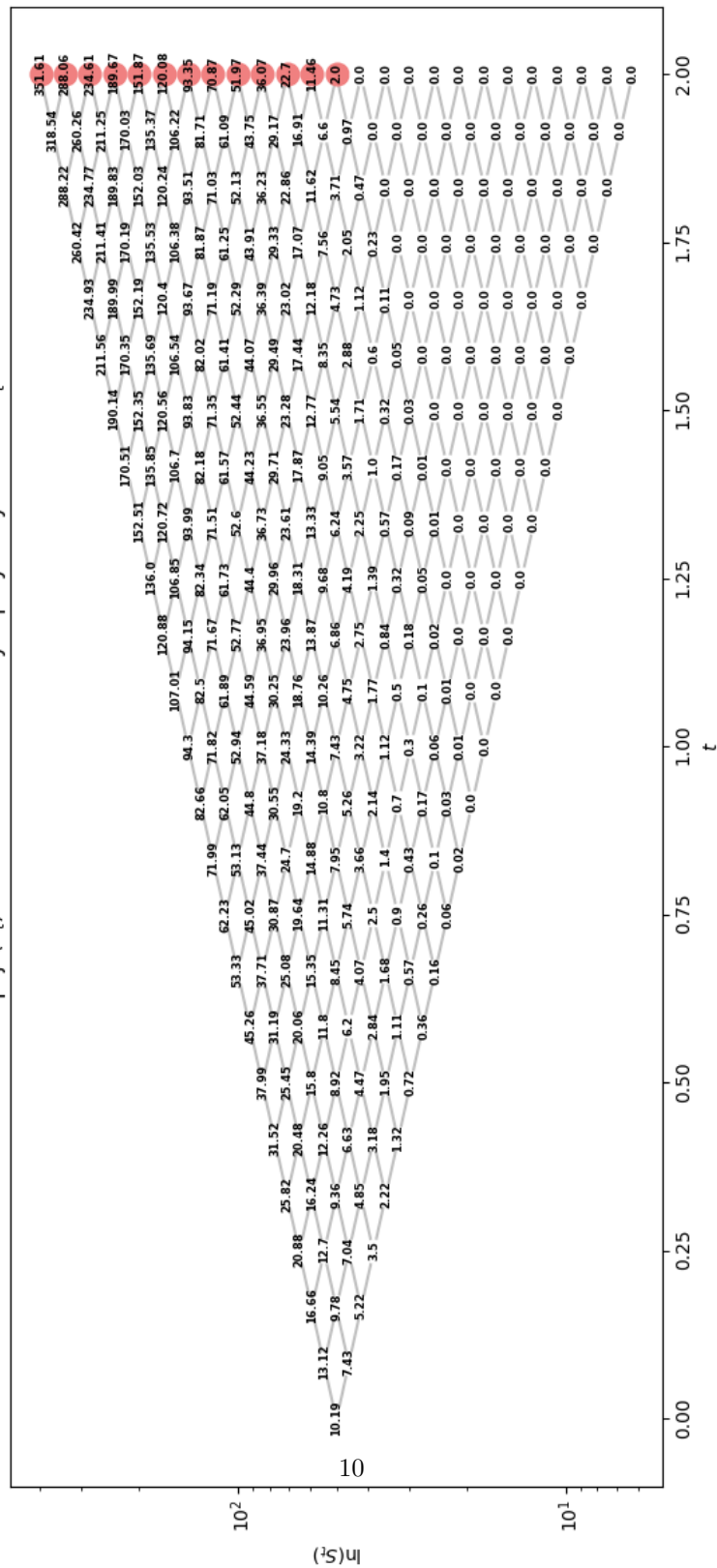
$$\max(K - S_t, 0).$$

W jednej z gałęzi poddrzewa wartość  $S_t = S_{t-1}d$ , gdzie  $d < 1$ . Oznacza to, że wartość funkcji  $S_t$  może być funkcją malejącą. W takich przypadkach (dla  $K > S_t$ ) payoff będzie dodatni a wykonanie funkcji będzie opłacalne.

Na grafice numer 6 przedstawiony jest model drzewa dwumianowego dla amerykańskiej opcji put. Czerwonym kolorem zaznaczone są węzły, w których wykonanie funkcji było opłacalne. Wyliczona cena amerykańskiej opcji put to:

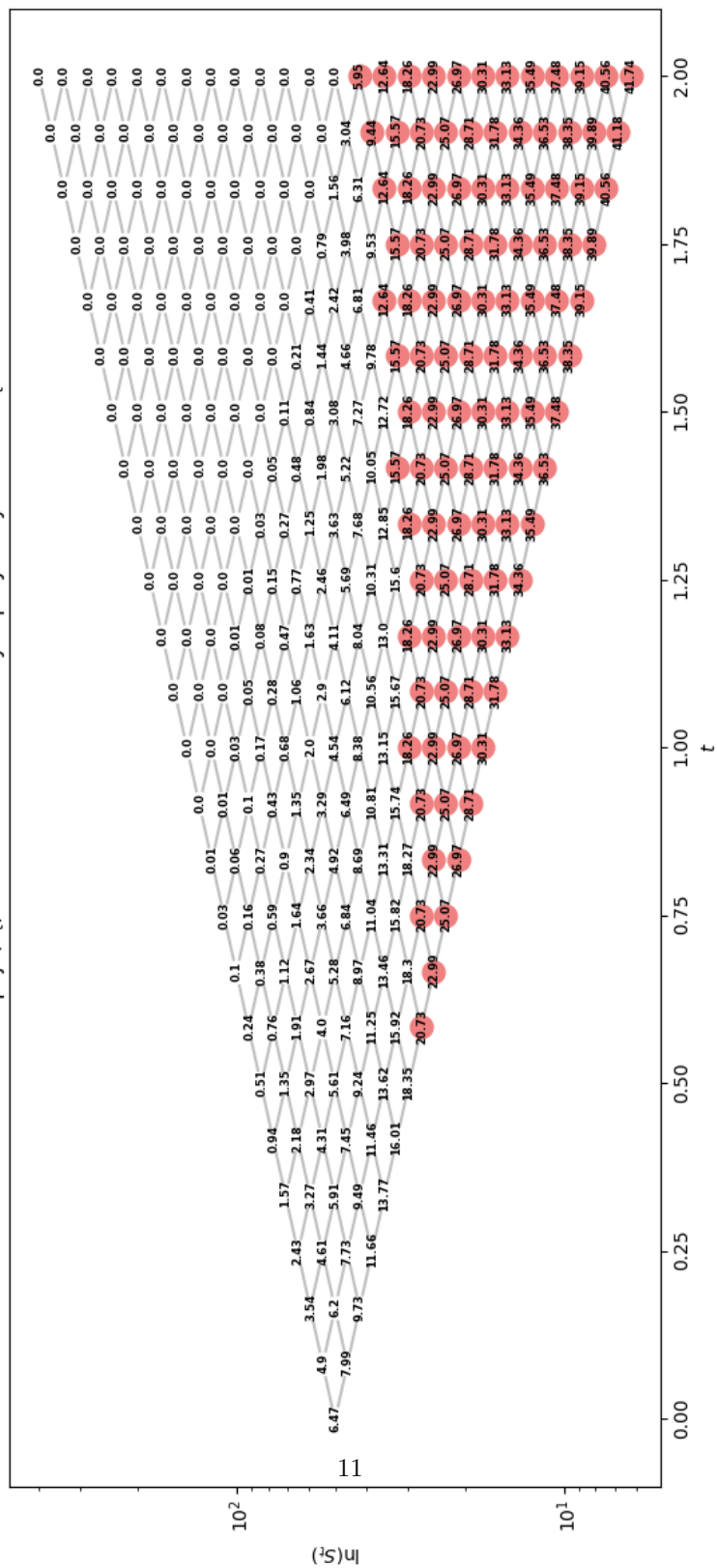
$$V_0 = 6.470605$$

Wartość opcji ( $V_t$ ) w modelu dwumianowym przy danym  $t$  oraz  $S_t$



Rysunek 5: Wycena amerykańskiej opcji call

Wartość opcji ( $V_t$ ) w modelu dwumianowym przy danym  $t$  oraz  $S_t$



### 4.3 Porównanie opcji europejskich i amerykańskich

W tej sekcji chcemy porównać własności opcji europejskich i amerykańskich.

Amerykańską opcję call opłaca się wykonać w końcowych węzłach drzewa, kiedy payoff jest dodatni. Europejskie opcje call wykonywane są w tych samych momentach. Stąd drzewa binarne dla obu typów opcji call są identyczne, co implikuje tę samą początkową cenę opcji.

Wartość w końcowych węzłach drzewa dwumianowego opcji put jest taka sama dla opcji amerykańskich i europejskich. Wartości w poprzednich węzłach mogą się różnić, ponieważ dla typu amerykańskiego musimy uwzględnić możliwość wcześniejszego wykonania opcji. Wartość węzła dla opcji amerykańskiej to maksimum z payoff'u uzyskanego ze wcześniejszego wykonania i z wartości wyliczonej jak dla opcji europejskiej. Oznacza to, że wartości węzłów opcji amerykańskich mogą być większe niż dla opcji europejskich. Wyliczając rekurencyjnie cenę opcji put otrzymujemy własność:

$$P_A \geq P_E.$$

Zatem cena amerykańskiej opcji put zawsze jest większa lub równa cenie akcji europejskiej.

W tabeli 3 przedstawiona jest wycena wszystkich typów opcji. Widzimy, że omawiane wyżej własności zachodzą w praktyce.

	Opcja call	Opcja put
Opcja europejska	10.191185	6.309078
Opcja amerykańska	10.191185	6.470605

Tabela 3: Wycena opcji call i put

## 5 Analiza wrażliwości

W tym rozdziale przeanalizujemy wrażliwość ceny opcji ze względu na parametry takie jak: cena wykonania  $K$ , zapadalność  $T$ , wartość początkowa aktywa bazowego  $S_0$ , stopa procentowa wolna od ryzyka  $r$  i parametr  $\sigma$ . Zbadamy też wrażliwość wyników wyceny tych opcji ze względu na liczbę kroków w modelu, czyli ze względu na  $\Delta t$ .

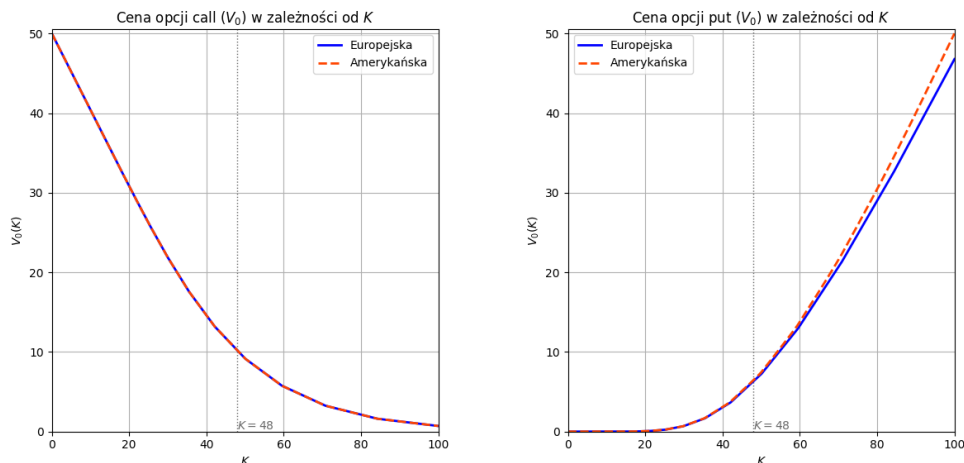
### 5.1 Cena wykonania

Na grafice numer 7 zaprezentowane są dwa wykresy obrazujące wrażliwość analizowanych opcji na cenę wykonania, czyli parametr  $K$ .

Na wykresie opcji call krzywe opcji europejskich i amerykańskich pokrywają się, ponieważ wartość opcji call jest taka sama dla obu typów opcji. We wzorze na cenę opcji call rozważamy payoff równy:

$$\text{payoff} = \max(S_T - K, 0).$$

Dla ustalonego  $S_T$  wartość opcji jest zatem funkcją malejącą i zbiegającą do 0 wraz ze wzrostem  $K$ .



Rysunek 7: Wrażliwość opcji na cenę wykonania

W przypadku opcji put cena opcji amerykańskiej jest większa niż opcji europejskiej. Payoff opcji put to:

$$\text{payoff} = \max(K - S_T, 0).$$

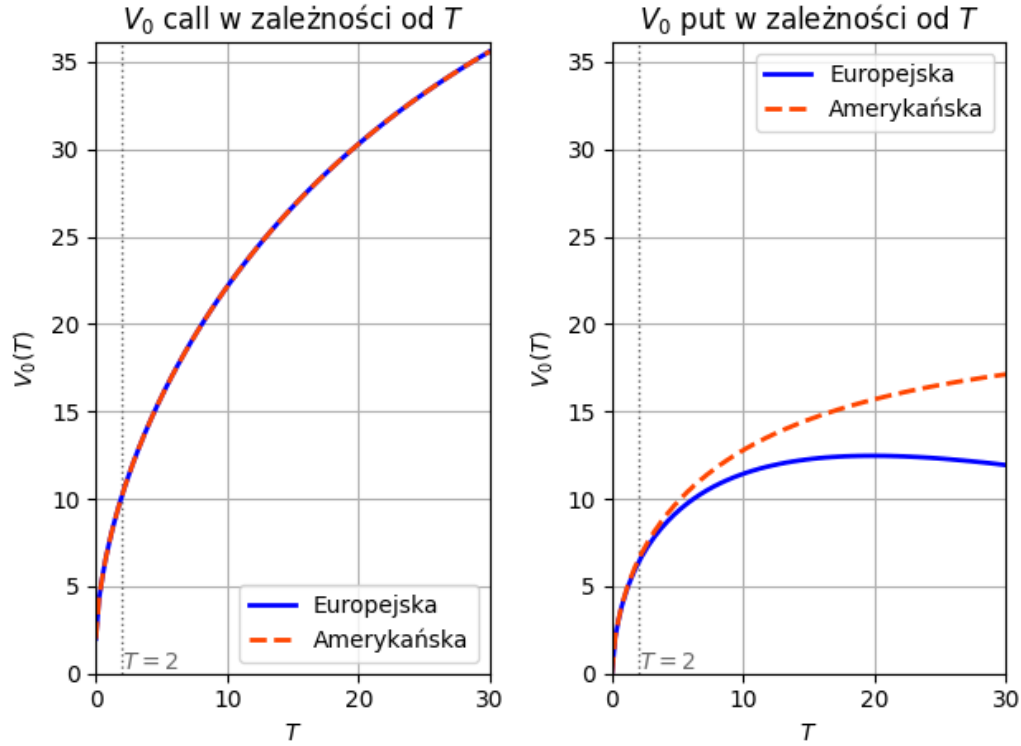
Przy ustalonym  $S_T$  payoff jest funkcją rosnącą, zatem wartość opcji także będzie rosnąć.

## 5.2 Zapadalność

Obrazek numer 8 pokazuje wpływ zapadalności opcji na jej wycenę.

W modelu drzewa dwumianowego wartość opcji call rośnie wraz ze wzrostem  $T$ . Ceny opcji europejskich i amerykańskich są sobie równe, ponieważ wykonanie opcji wcześniej nie jest opłacalne. Dłuższy czas do wygaśnięcia oznacza więcej możliwych scenariuszy, kiedy cena aktywa bazowego idzie w górę, co implikuje rosnący payoff. W takiej sytuacji wartość oczekiwana ceny opcji także rośnie.

Zapadalność ma znaczny wpływ także na cenę opcji put. Wartość opcji amerykańskiej put jest funkcją rosnącą ale ograniczoną z góry przez  $K$ . Aby nie wystąpił arbitraż cena opcji europejskiej put  $P_E$  musi być mniejsza niż  $Ke^{-rT}$ . Funkcja  $Ke^{-rT}$  jest malejąca zatem wartość  $P_E$  rośnie do pewnego momentu - na wykresie osiąga maksimum w okolicach  $T = 20$ , po czym maleje. Wartość opcji amerykańskiej jest większa niż opcji europejskiej ze względu na możliwość wykonania w opłacalnym momencie.



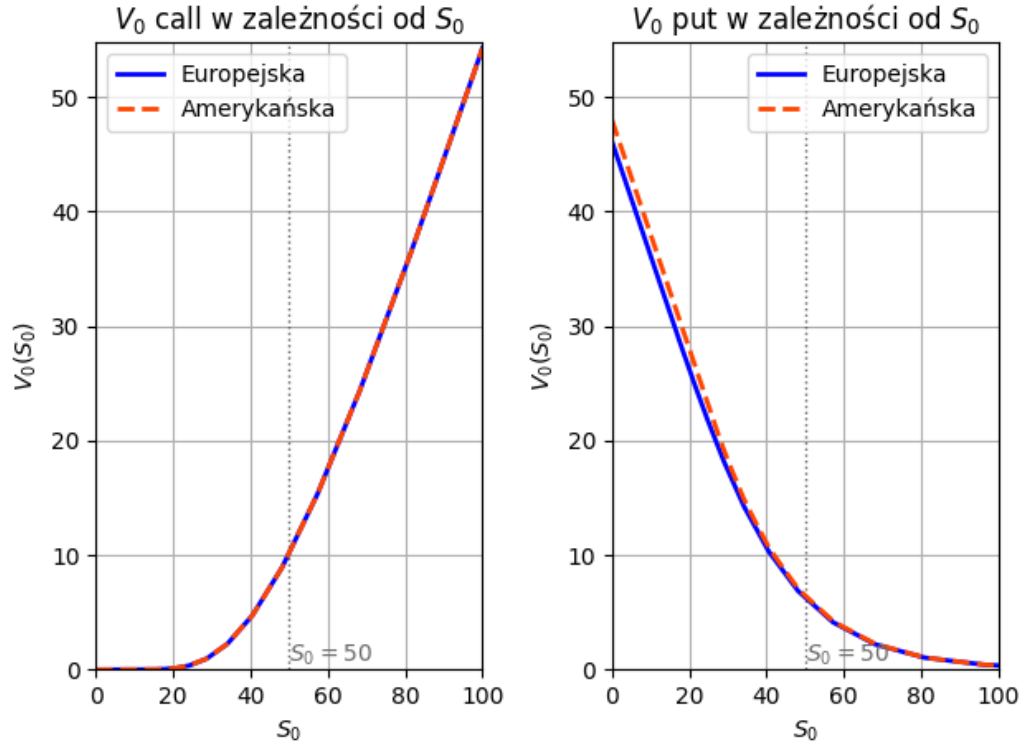
Rysunek 8: Wrażliwość opcji na zapadalność

### 5.3 Wartość początkowa aktywa bazowego

Wykresy z grafiki numer 9 jednoznacznie wskazują na duży wpływ ceny spot na wycenę opcji. Tę zależność można wytłumaczyć analizując model drzewa dwumianowego.

W pierwszym okresie drzewa dwumianowego cena aktywa bazowego rośnie do  $S_0u$  lub spada do  $S_0d$ . Po kolejnych  $n$ -krokach drzewa dwumianowego cena może wynosić:  $S_0u^n$ ,  $S_0u^{n-1}d, \dots, S_0ud^{n-1}$ ,  $S_0d^n$ . Przy ustalonych wartościach  $u$  oraz  $d$  cena aktywa jest monotoniczną funkcją parametru  $S_0$ . Zatem przy rosnącym  $S_0$  cena aktywa bazowego w chwili  $S_t$  rośnie, co implikuje rosnący payoff funkcji call i zwiększanie się jej wartości. W tym przypadku wcześniejsze wykonanie opcji amerykańskiej także nie jest opłacalne, więc jej cena pokrywa się z ceną europejskiej opcji call. Analogicznie wzrost ceny aktywa bazowego zmniejsza payoff opcji put. Z tego powodu wartości opcji put są funkcjami malejącymi. Cena opcji amerykańskiej jest większa ze względu na możliwość wcześniejszego wykonania.





Rysunek 9: Wrażliwość opcji na wartość początkową aktywa bazowego

## 5.4 Stopa procentowa

Przypomnijmy wzór na wycenę opcji w drzewie dwumianowym:

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$$

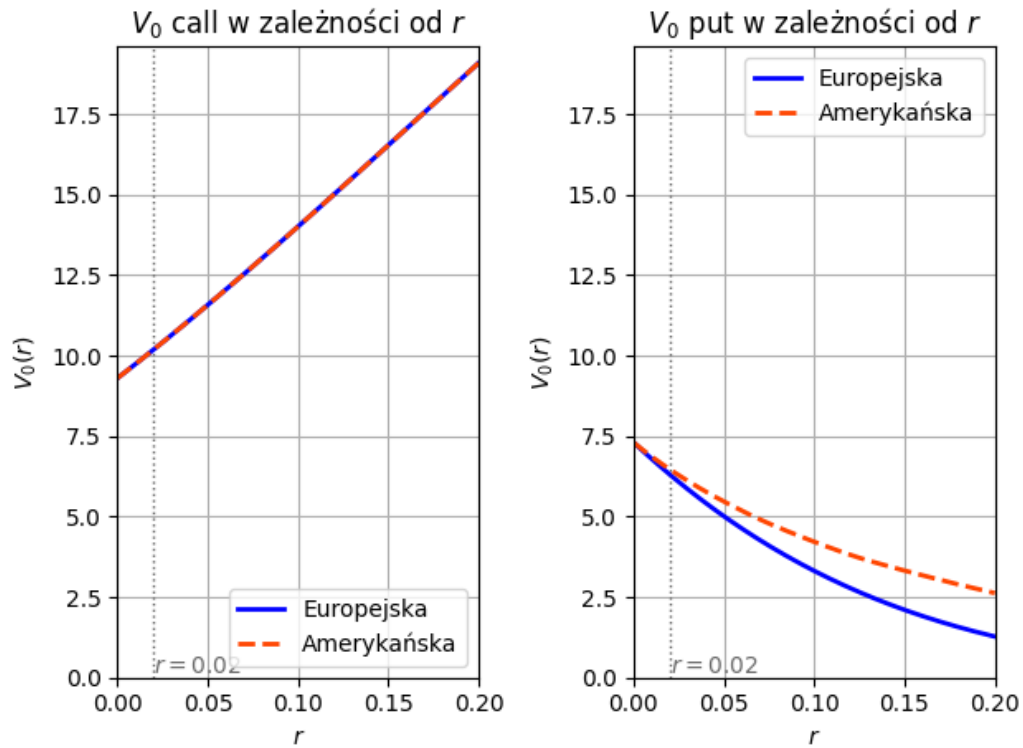
Parametr  $r$  pojawia się tutaj jako element czynnika dyskontującego  $e^{-rT}$ . Wielkość stopy procentowej  $r$  ma także wpływ na prawdopodobieństwo wzrostu ceny opcji, czyli na:

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}.$$

Przy ustalonych wartościach  $T$ ,  $d$ ,  $u$  wartość  $p$  jest rosnącą funkcją parametru  $r$ . Wiemy, że prawdopodobieństwo  $p$  jest mniejsze lub równe jeden. Cena opcji jest zatem funkcją rosnącą i ograniczoną.

Cena opcji call jest taka sama dla opcji amerykańskich i europejskich. Wraz ze wzrostem  $r$  zwiększa się prawdopodobieństwo, że cena aktywa bazowego wzrośnie. Stąd cena opcji call jest funkcją rosnącą i ograniczoną przez  $S_0$ .

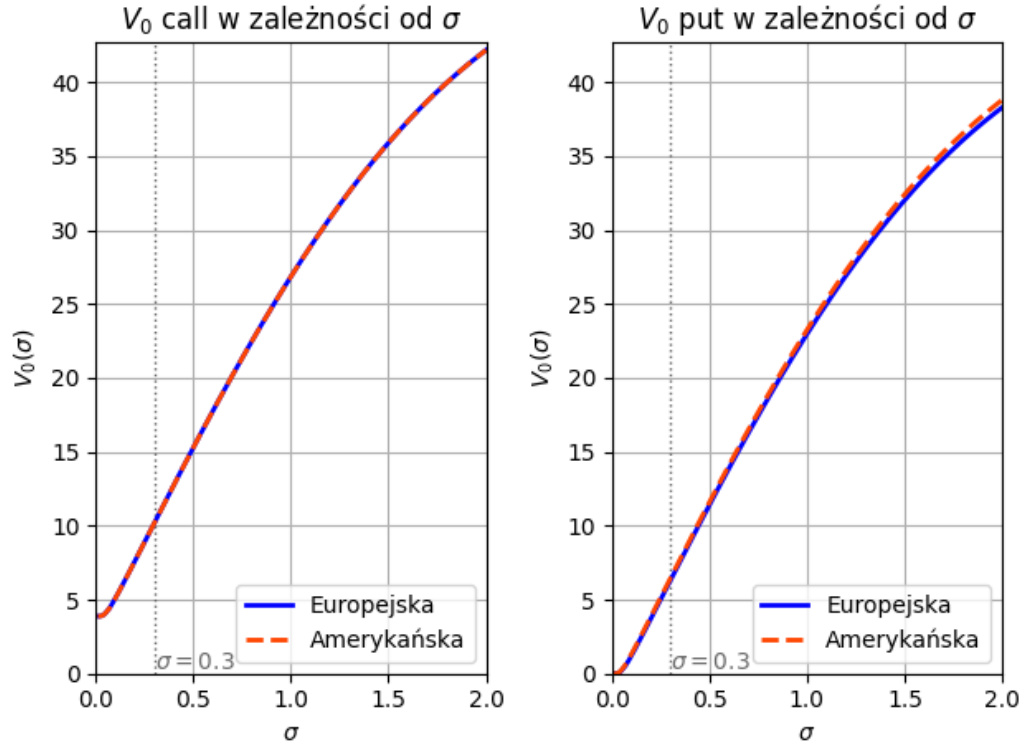
Zwiększanie się wartości aktywa bazowego powoduje, że opcja put jest mniej warta. Na wykresie 10 widzimy, że wartość opcji put jest funkcją malejącą dla obu typów opcji. Opcja amerykańska jest więcej warta ze względu na możliwość wykonania w opłacalnym dla posiadacza momencie.



Rysunek 10: Wrażliwość opcji na stopę procentową

## 5.5 Parametr $\sigma$

Parametr  $\sigma$  wpływa na prawdopodobieństwo wzrostu ( $u$ ) i spadku ( $d$ ) wartości aktywa bazowego. Prowadzi to do większych wahań cen aktywa bazowego w modelu dwumianowym. Niepewność dotycząca cen aktywa wpływa na wartość opcji, jako że istnieje większa szansa na dodatni payoff dla obu typów opcji. Na rysunku numer 12 widzimy, że wartość opcji w zależności od parametru  $\sigma$  jest funkcją rosnącą.

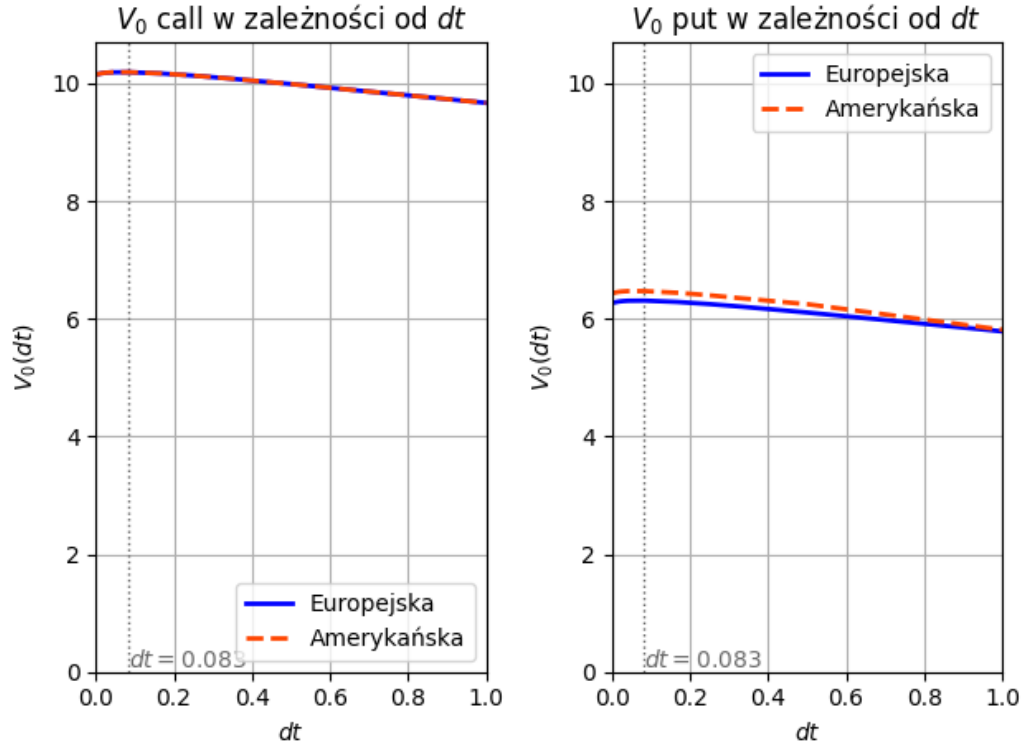


Rysunek 11: Wrażliwość opcji na parametr  $\sigma$

## 5.6 Liczba kroków w modelu

Liczba kroków w modelu wpływa na dokładność otrzymanych wyników. Dzięki zmniejszeniu kroku czasowego  $\Delta t$  parametry  $d = e^{-\sigma\Delta t}$  oraz  $u = e^{\sigma\Delta t}$  przyjmują mniejsze wartości, które są bardziej podobne do tych występujących na rynku. Jednocześnie model dwumianowy staje się bardziej rozbudowany i szczegółowy przez większą ilość kroków. Zwiększenie liczby kroków powoduje zbliżenie schematu drzewa dwumianowego do schematu Blacka-Scholesa.

Na rysunku 8 widzimy, że wartości wartości funkcji zawierają się w pewnym przedziale. Dla opcji call jest to otoczenie liczby 10 a dla opcji put - otoczenie liczby 6. Przy zwiększonym kroku czasowym wartości funkcji coraz bardziej odbiegają od wyliczonych przez nas 10.19 dla opcji call, 6.31 dla europejskiej opcji put i 6.47 dla amerykańskiej opcji put. Świadczy to o mniejszej dokładności modelu.



Rysunek 12: Wrażliwość opcji na liczbę kroków w modelu

## 6 Mapy ciepła

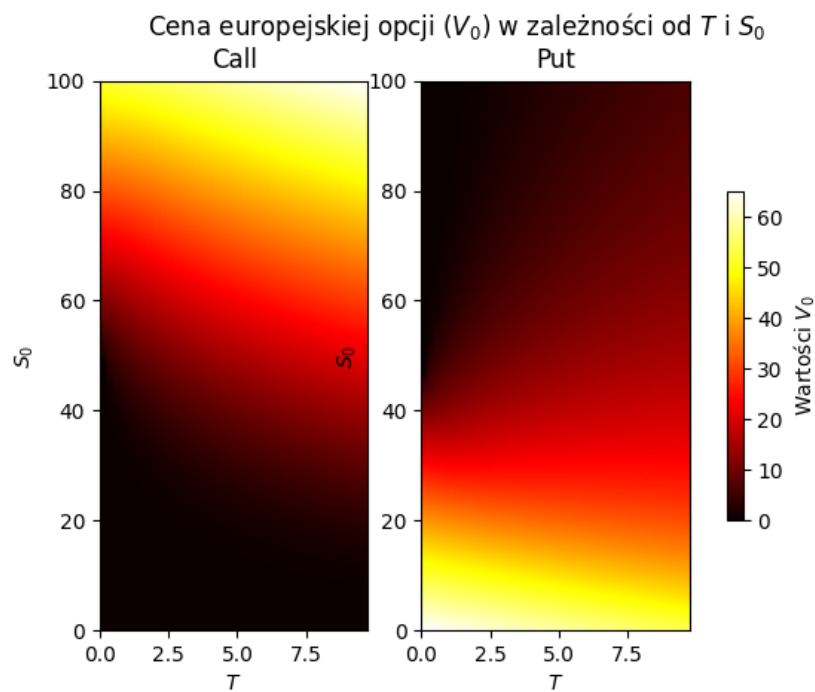
W tym rozdziale omówimy wpływ poszczególnych par parametrów na wycenę opcji. Wyniki przedstawimy na wykresach w postaci map ciepła.

### 6.1 Zapadalność i cena spot

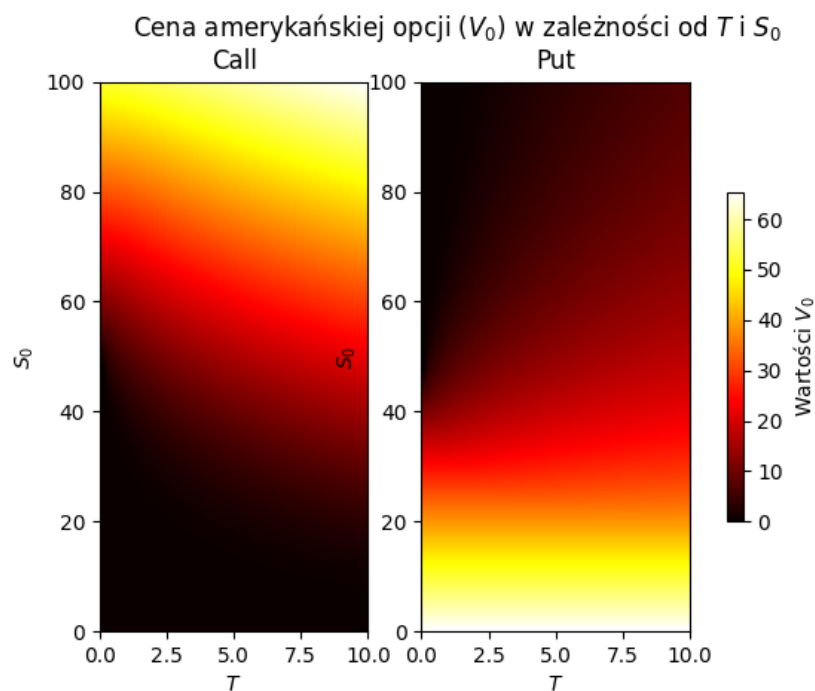
W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że cena opcji call jest rosnącą funkcją zapadalności  $T$  oraz ceny spot  $S_0$ . Funkcja dwóch zmiennych dla tej ceny opcji call także jest rosnąca. Wykresy opcji amerykańskiej i europejskiej ponownie są identyczne.

Cena opcji put jest funkcją rosnącą parametru  $T$  i funkcją malejącą parametru  $S_0$ . Funkcja dwóch zmiennych osiąga minimum przy maksymalnych wartościach  $S_0$  i przy jak najmniejszym  $T$ . Wykresy opcji amerykańskiej i europejskiej różnią się w dolnej części. Cena amerykańskiej opcji put osiąga maksimum przy  $S_0 = 0$  niezależnie od wartości  $T$ . Jest to spowodowane możliwością wykonania opcji w dowolnym momencie. Wartość europejskiej opcji put osiąga maksimum przy  $S_0$  i  $T$  bliskim 0.

Wrażliwość opcji na zapadalność i cenę spot przedstawione są na rysunkach numer 13 oraz 14.

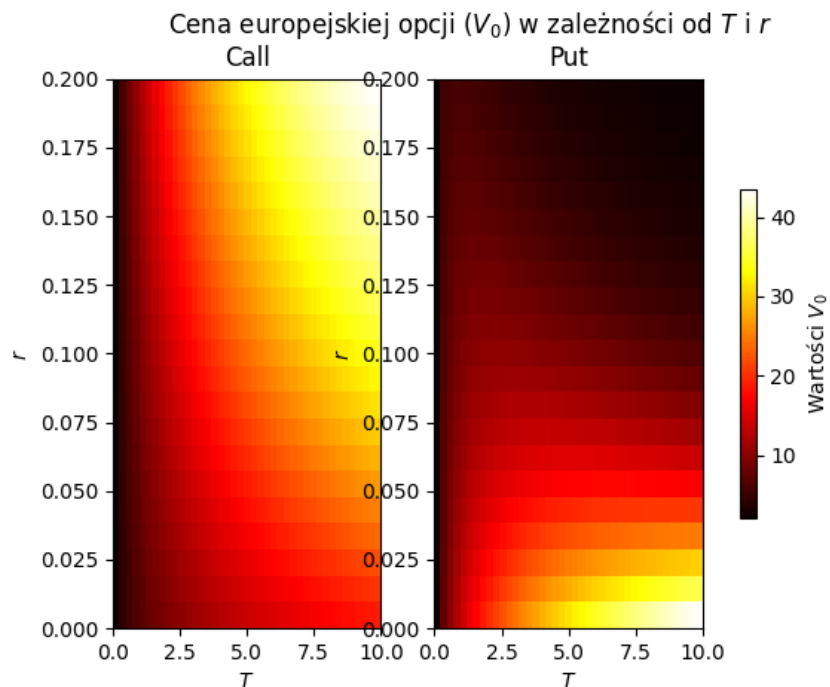


Rysunek 13: Wrażliwość opcji na zapadalność i cenę spot

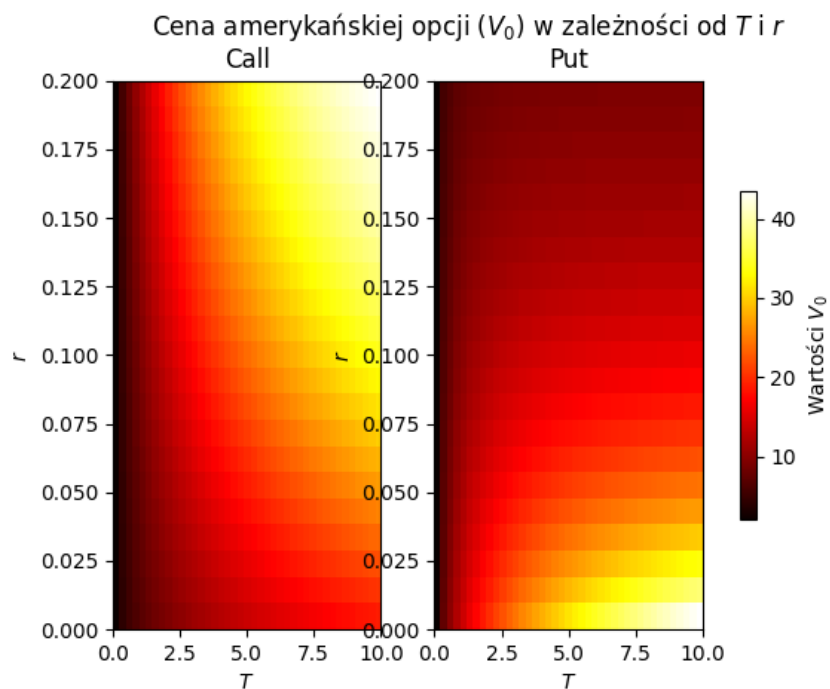


Rysunek 14: Wrażliwość opcji na zapadalność i cenę spot

## 6.2 Zapadalność i stopa procentowa



Rysunek 15: Wrażliwość opcji na zapadalność i stopę procentową



Rysunek 16: Wrażliwość opcji na zapadalność i stopę procentową

Grafiki o numerach 15 i 16 obrazują wrażliwość opcji na zapadalność i stopę procentową.

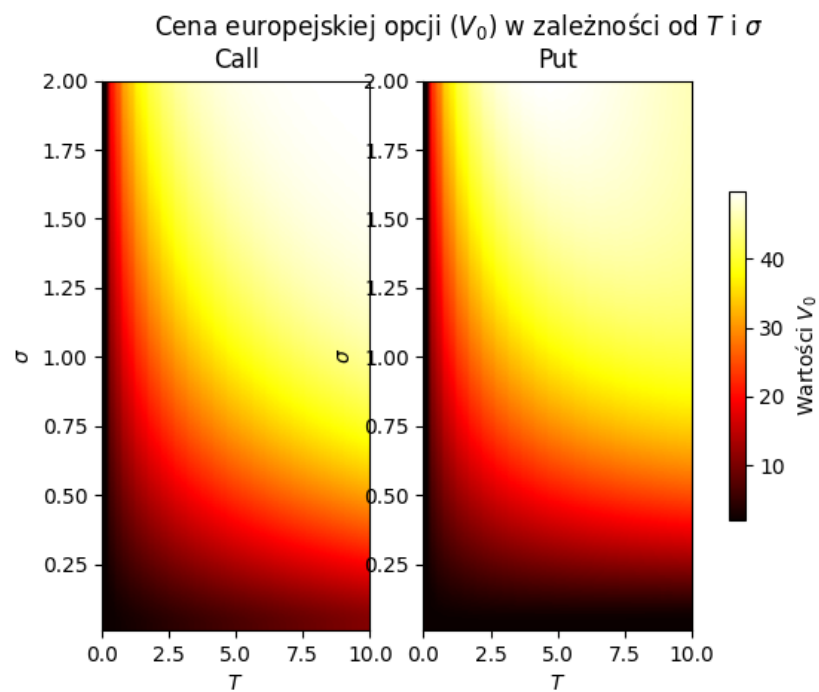
Wykresy opcji call dla obu typów opcji są identyczne. Moment zapadalności  $T$  zdaje się mieć większy wpływ na cenę opcji. Dla małych wartości  $T$  funkcja osiąga minimum niezależnie od parametru  $r$ . Dopiero przy wartościach  $T$  bliskim 5 stopa procentowa  $r$  zaczyna bardziej znacząco zmieniać cenę opcji. Funkcja ceny opcji call osiąga maksimum przy maksymalnych wartościach obu parametrów, co jest zgodne z rozumowaniem dla funkcji jednej zmiennej z poprzednich podrozdziałów.

W przypadku opcji put zapadalność także ma większy wpływ na cenę opcji. Dla  $r \in (0, 0.03)$  różnice między wykresami dla opcji amerykańskiej i europejskiej są niezauważalne. Wartości obu opcji są największe przy  $r$  bliskim 0 i  $T = 10$ . Dla  $r > 0.05$  wzrost  $r$  ma wpływ na wycenę opcji europejskiej, podczas gdy cena opcji amerykańskiej utrzymuje się na podobnym poziomie.

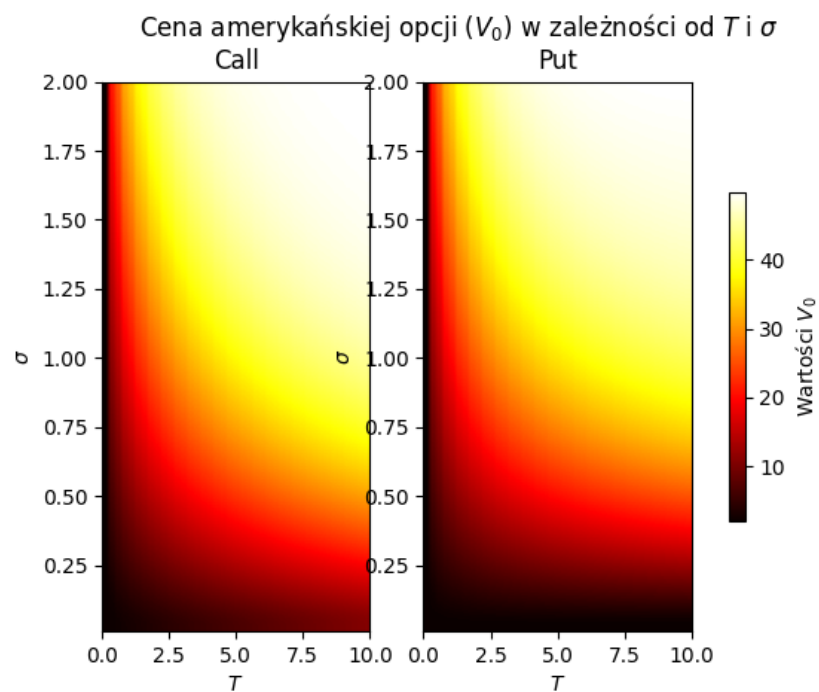
### 6.3 Zapadalność i zmienność

Na wykresach numer 17 i 18 widzimy wpływ zapadalności i parametru  $\sigma$  na wycenę opcji.

W analizie funkcji jednej zmiennej pokazaliśmy, że ceny opcji call i put są funkcjami rosnącymi parametru  $T$  oraz  $\sigma$ . Z wykresów poniżej możemy wnioskować, że oba te czynniki mają podobny wpływ na wycenę opcji. Wartości opcji call obu typów oraz amerykańskiej opcji put rosną wraz ze wzrostem  $T$  i  $\sigma$ . Europejska opcja put osiąga maksimum dla mniejszych wartości  $T$ , bliskich 5. Spowodowane jest to tym, że cena tej opcji jest ograniczona i zaczyna spadać po osiągnięciu maksimum dla pewnej wartości  $T$ .



Rysunek 17: Wrażliwość opcji na zapadalność i zmienność



Rysunek 18: Wrażliwość opcji na zapadalność i zmienność



## 6.4 Cena spot i cena wykonania

Rysunki numer 19 i 20 obrazują wpływ ceny spot i ceny wykonania na wycenę opcji.

Wycena opcji zależy bezpośrednio od funkcji payoff'u, która w przypadku opcji call wygląda następująco:

$$\text{payoff} = \max(S_T - K, 0).$$

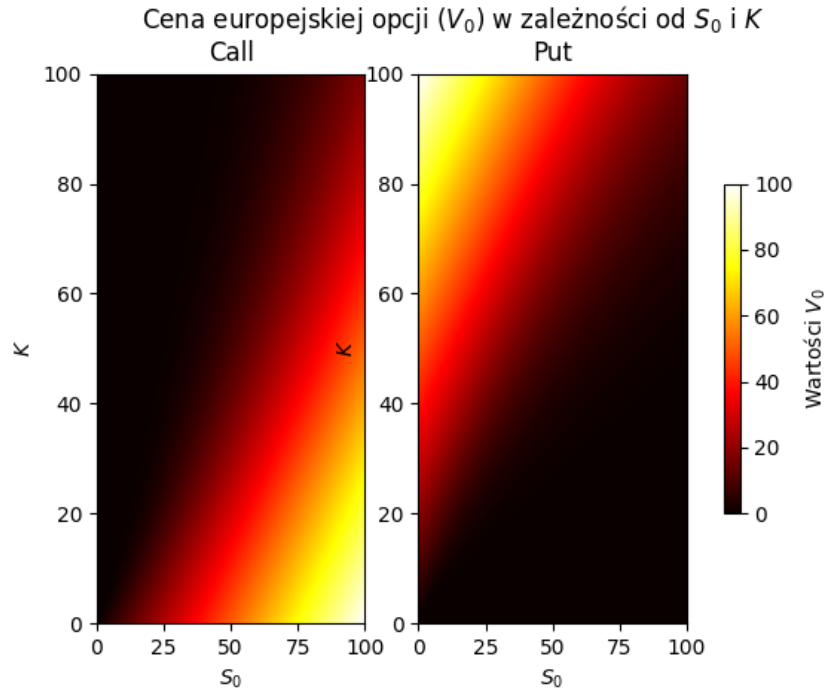
W poprzednich rozważaniach pokazaliśmy, że cena aktywa  $S_T$  zwiększa się wraz ze wzrostem  $S_0$ . Stąd payoff opcji call będzie największy dla dużych wartości  $S_0$  i małych wartości parametru  $K$ . Wtedy też cena opcji osiągnie największe wartości.

Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla opcji put. Payoff opcji tego typu wynosi:

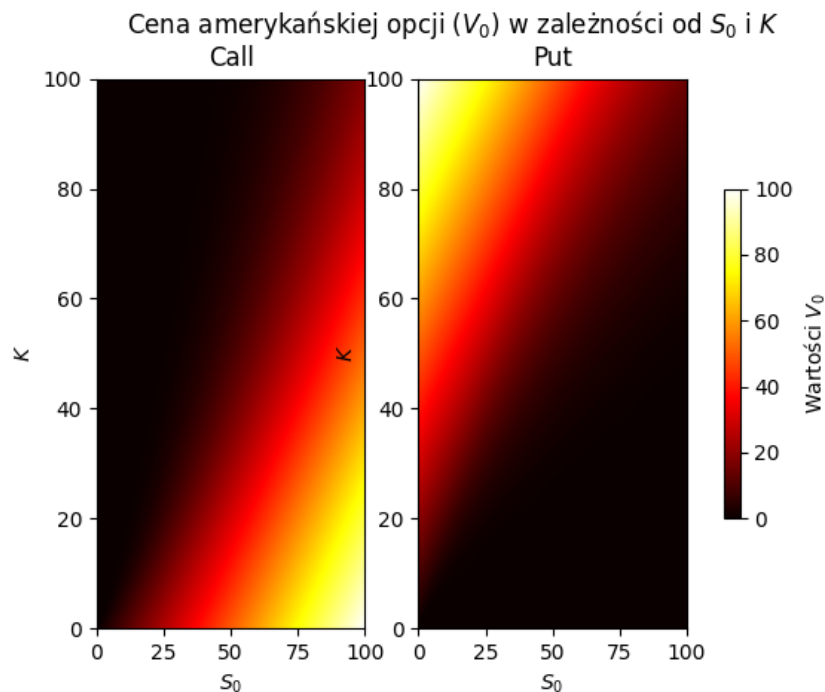
$$\text{payoff} = \max(K - S_T, 0).$$

Widzimy, że payoff będzie największy dla dużych wartości  $K$  i małych  $S_0$ . Na wykresie ceny opcji put widzimy, że jej wartość osiąga maksimum dla  $S_0 = 0$  i  $K = 100$ .

Wykresy opcji amerykańskich i europejskich są takie same, ponieważ rozważamy ustalone  $T$  a opcji amerykańskiej w tym przypadku nie opłacało się wykonać szybciej.



Rysunek 19: Wrażliwość opcji na cenę spot i cenę wykonania



Rysunek 20: Wrażliwość opcji na zapadalność i cenę wykonania

## 7 Portfel zabezpieczający

W tym rozdziale chcemy skonstruować portfel zabezpieczający wyceniane opcje, który składać się będzie z  $\Delta$  akcji i z odpowiedniej ilości gotówki ( $\alpha$ ).

**Portfel zabezpieczający (lub replikujący)** jest konstruowany tak, by jego wartość dokładnie naśladowała wartość opcji w danym momencie. Portfel złożony jest z odpowiedniej ilości akcji oraz z gotówki, które mają replikować analizowaną opcję.

W celu skonstruowania odpowiedniego portfela zabezpieczającego opcję musimy określić liczbę akcji  $\Delta$  i ilość gotówki  $\alpha$ . Korzystamy przy tym z następujących wzorów:

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d},$$

$$\alpha = e^{-r\Delta t}(V_u - \Delta S_u),$$

gdzie  $V_u$  i  $V_d$  to wartości opcji w drzewie dwumianowym po odpowiednio wzroście i spadku ceny aktywa bazowego a  $S_u$  i  $S_d$  to ceny aktywa bazowego po wzroście albo spadku jego ceny.

W ten sposób możemy wyznaczyć skład portfela replikującego dla każdego z wierzchołków niezależnie od rozmiaru drzewa.

## 7.1 Opcja europejska

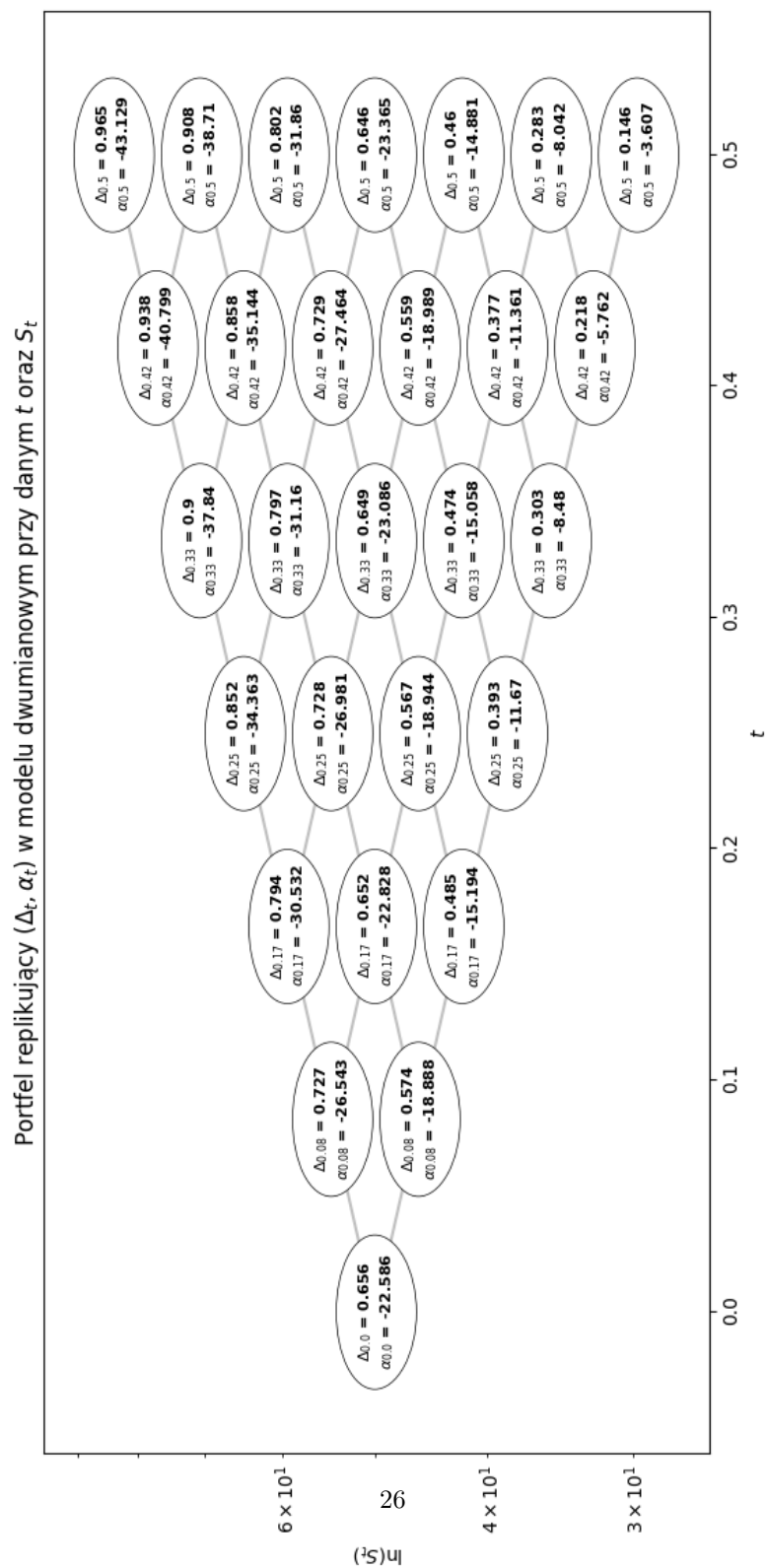
### 7.1.1 Opcja call

Rysunek numer 21 przedstawia skład portfela replikującego dla każdego z wierzchołków modelu drzewa dla europejskiej opcji call.

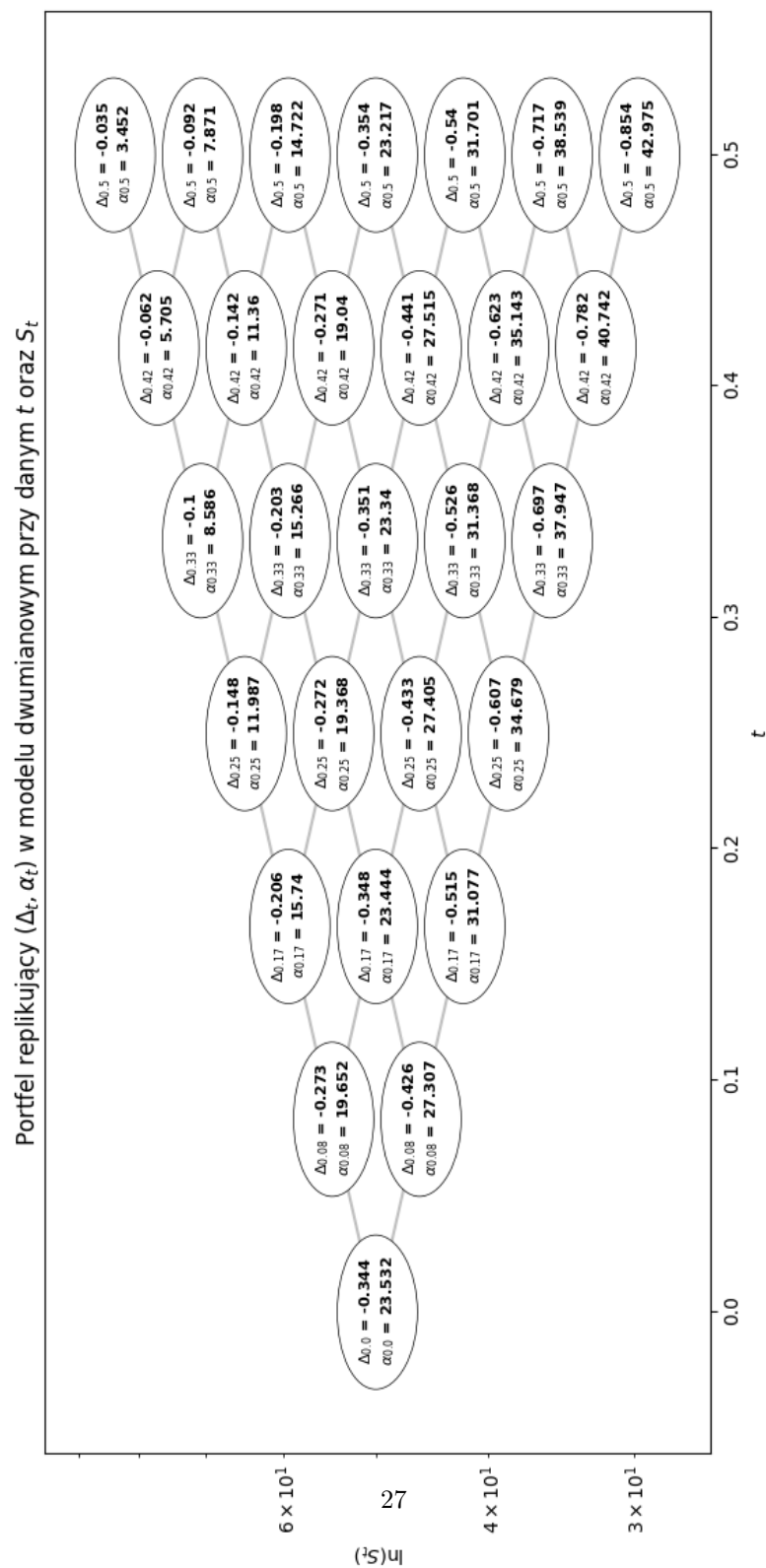
Czytając wartości  $\Delta$  i  $\alpha$  z wykresu widzimy, że  $\alpha$  zawsze przyjmuje wartości ujemne a  $\Delta$  dodatnie. Porównując skład portfela replikującego (wykres 21) z wykresem wartości opcji (wykres 3) widzimy, że liczba akcji w portfelu zwiększa się razem z wartością opcji. Analogicznie, w gałęziach drzewa, w których wartość opcji malała obserwujemy zmniejszanie się parametru  $\Delta$  i wzrost parametru  $\alpha$ .

### 7.1.2 Opcja put

W przypadku opcji put parametr  $\Delta$  przyjmuje ujemne wartości, podczas gdy  $\alpha$  jest dodatnia. Jest to sytuacja odwrotna niż w przypadku opcji call. Przy porównaniu wykresu wartości europejskiej opcji put (rysunek 4) ze schematem portfela replikującego tę opcję (rysunek 22) możemy zaobserwować związek ceny opcji z parametrem  $\Delta$ . Wzrost ceny opcji implikuje zmniejszanie się ilości akcji i jednoczesny wzrost ilości gotówki.



Rysunek 21: Portfel replikujący dla europejskiej opcji call



Rysunek 22: Portfel replikujący dla europejskiej opcji put

## 7.2 Opcja amerykańska

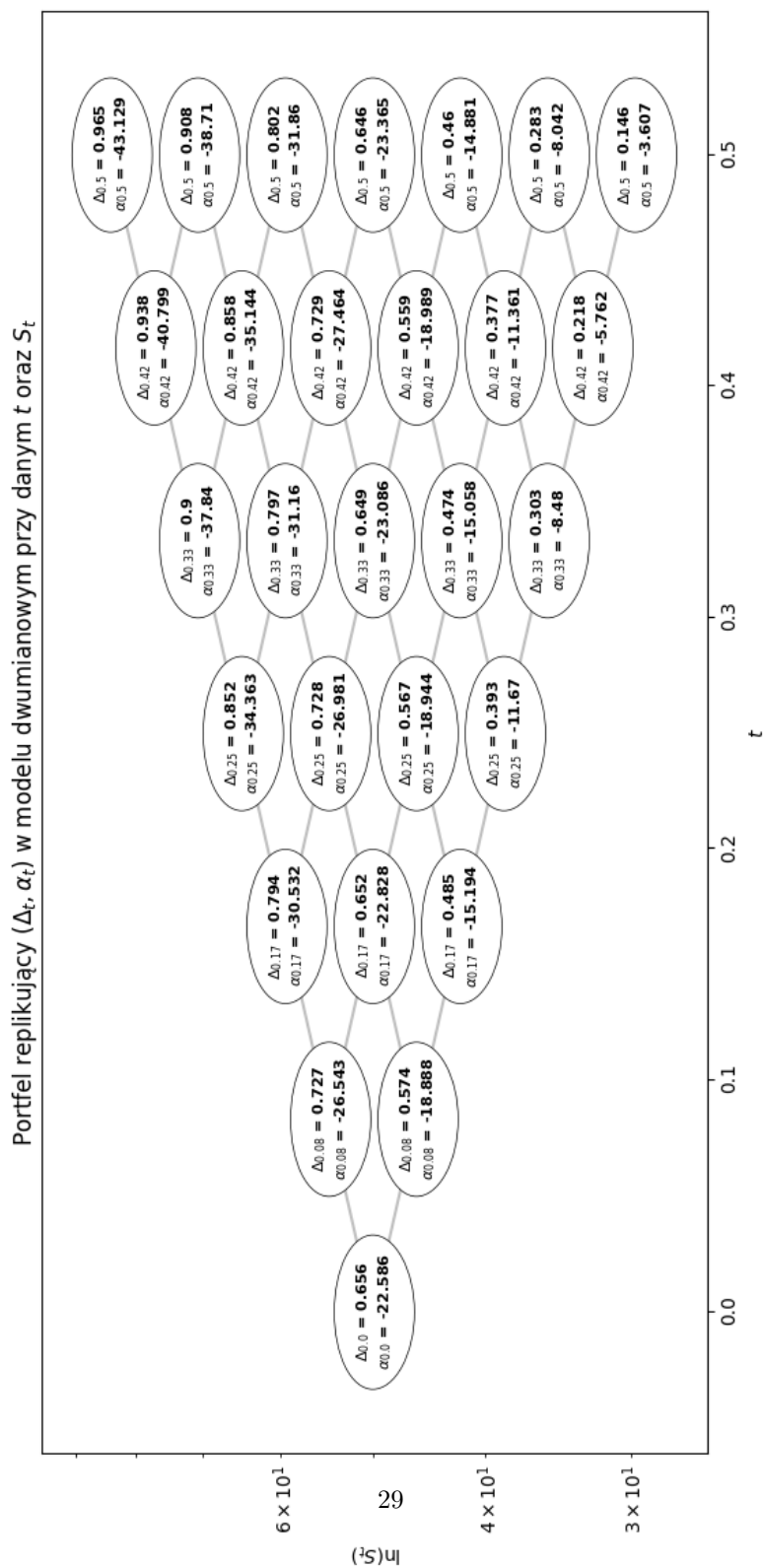
Na wykresach numer 23 i 24 przedstawiony jest skład portfela replikującego dla amerykańskich opcji typu call i pull.

### 7.2.1 Opcja call

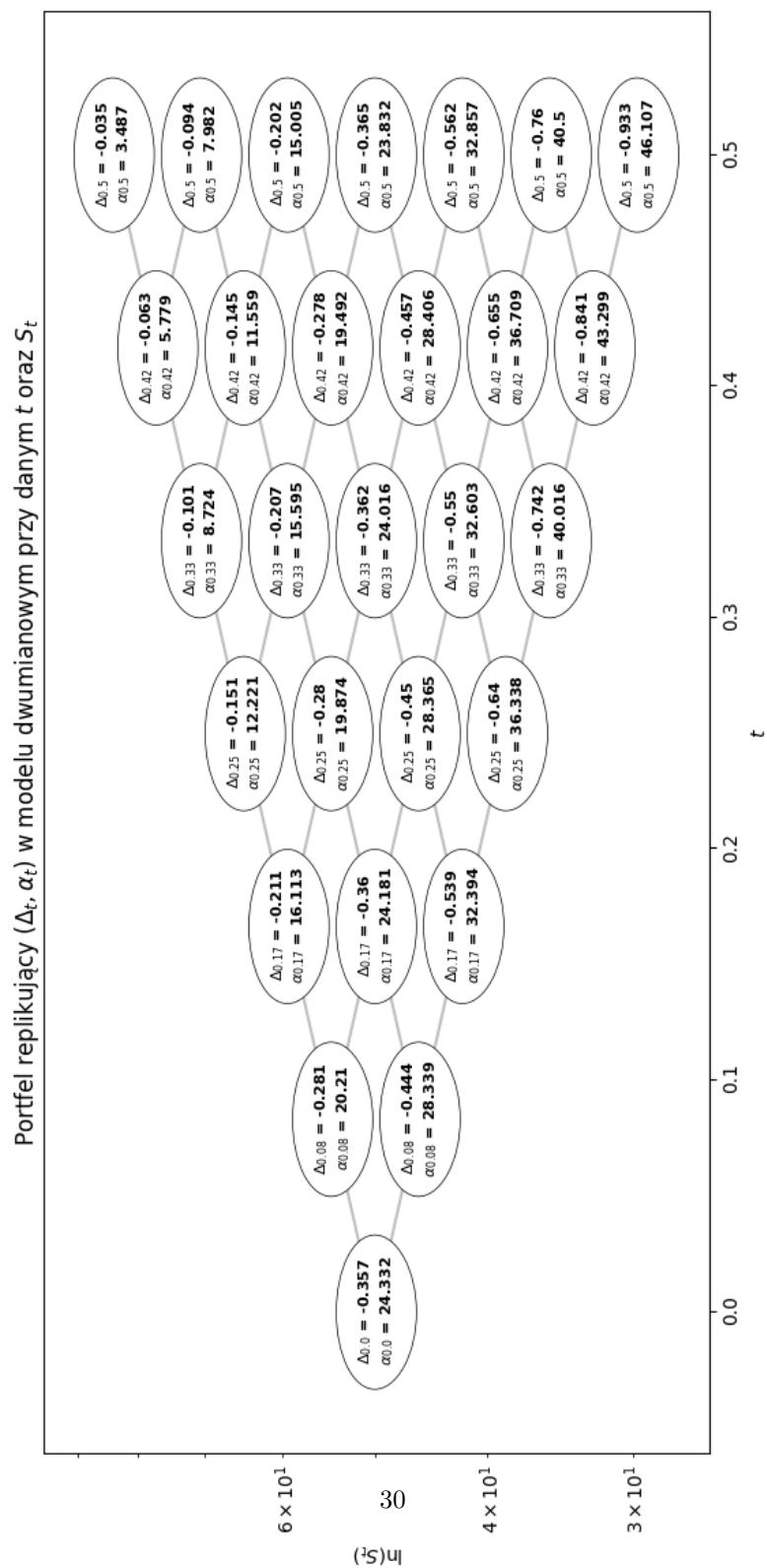
Wartości parametrów amerykańskiej opcji call są takie same jak w przypadku opcji europejskiej. Spowodowane jest to identycznymi wartościami w wierzchołkach drzewa dla wyceny opcji obu typów opcji call (wykres 3 i wykres 5).

### 7.2.2 Opcja put

Parametry  $\Delta$  i  $\alpha$  zachowują się analogicznie do tych dla europejskiej opcji put. Ich wartości są większe ze względu na większe wartości opcji.



Rysunek 23: Portfel replikujący dla amerykańskiej opcji call



Rysunek 24: Portfel replikujący dla amerykańskiej opcji put



## 8 Podsumowanie

W projekcie dokonaliśmy wyceny opcji z użyciem dwumianowego modelu rynku. Model dwumianowy jest skutecznym narzędziem wyceny opcji, pozwalającym na wiarygodne odwzorowywanie sytuacji rynkowych przy uwzględnieniu wielu możliwych scenariuszy zachowania się ceny aktywa bazowego. Na dokładność wyceny w tym modelu wpływa wiele czynników, z których głównym jest odpowiednie dobranie kroku czasowego  $\Delta t$ . Przy małych wartościach parametru możemy dokładniej odwzorować wzrost i spadek ceny aktywa, co wpływa na wiarygodniejszą wycenę opcji.

Ważną częścią projektu była też analiza wrażliwości ceny opcji na zmianę parametrów jak: zapadalność, cena spot, cena wykonania, zmienność czy stopa procentowa. Udało nam się ustalić które z parametrów (i w jakim stopniu) wpływają na wycenę opcji.

Dokonaliśmy także porównania opcji europejskich i amerykańskich i ustaliliśmy, które z nich i w jakich sytuacjach przynoszą większy dochód.

Ostatnim etapem naszej pracy było stworzenie portfeli replikujących opcje, które dzięki posiadaniu odpowiedniej ilości akcji i gotówki mogą naśladować wartość opcji w odpowiednich węzłach drzewa.

## 9 Dodatek - czas działania funkcji

Nazwa funkcji:	Czas w sekundach:
europaan_option_evaluation	0.001163
american_option_evaluation	0.000852
draw_option_binary_tree	2.827456
europaan_option_evaluation_for_drawing	0.000084
option_evaluation_relative_to_arg_and_option_type	0.121435
draw_plot_option_evaluation_relative_to_arg	5.172985
option_evaluation_relative_to_arg1_and_arg2_and_option_type	2.334492
draw_plot_option_evaluation_relative_to_arg1_and_arg2	5.63679
delta_alpha_hedging_portfolio	0.002054
draw_hedging_portfolio	2.000264

Tabela 4: Czasy wykonywania funkcji napisanych w języku Python wykorzystanych w projekcie

## Spis rysunków

1	Drzewo dwumianowe jedno-okresowe . . . . .	3
2	Drzewo dwumianowe dwu-okresowe . . . . .	4
3	Wycena europejskiej opcji call . . . . .	7
4	Wycena europejskiej opcji put . . . . .	8
5	Wycena amerykańskiej opcji call . . . . .	10
6	Wycena amerykańskiej opcji put . . . . .	11
7	Wrażliwość opcji na cenę wykonania . . . . .	13
8	Wrażliwość opcji na zapadalność . . . . .	14
9	Wrażliwość opcji na wartość początkową aktywa bazowego . . . . .	15
10	Wrażliwość opcji na stopę procentową . . . . .	16
11	Wrażliwość opcji na parametr $\sigma$ . . . . .	17
12	Wrażliwość opcji na liczbę kroków w modelu . . . . .	18
13	Wrażliwość opcji na zapadalność i cenę spot . . . . .	19
14	Wrażliwość opcji na zapadalność i cenę spot . . . . .	19
15	Wrażliwość opcji na zapadalność i stopę procentową . . . . .	20
16	Wrażliwość opcji na zapadalność i stopę procentową . . . . .	20
17	Wrażliwość opcji na zapadalność i zmienność . . . . .	22
18	Wrażliwość opcji na zapadalność i zmienność . . . . .	22
19	Wrażliwość opcji na cenę spot i cenę wykonania . . . . .	23
20	Wrażliwość opcji na zapadalność i cenę wykonania . . . . .	24
21	Portfel replikujący dla europejskiej opcji call . . . . .	26
22	Portfel replikujący dla europejskiej opcji put . . . . .	27
23	Portfel replikujący dla amerykańskiej opcji call . . . . .	29
24	Portfel replikujący dla amerykańskiej opcji put . . . . .	30

## Spis tabel

1	Payoff opcji europejskiej . . . . .	2
2	Payoff opcji amerykańskiej . . . . .	2
3	Wycena opcji call i put . . . . .	12
4	Czasy wykonywania funkcji napisanych w języku Python wykorzystanych w projekcie . . . . .	32

## Bibliografia

- [1] John C. Hull. *Options, futures, and other derivatives*. 2012.