MODELO AUTORREGRESIVO (AR)

Juan Isaula
Pas. Licenciatura Matemáticas

September 12, 2021

Contents

Operador de Rezago

Definición de operador de series de tiempo

Un operador de serie de tiempo es un ”proceso” que transforma una o más serie de tiempo en nuevas series de tiempo.

Ejemplos:

- **Multiplicación escalar:** $y_t = \beta x_t$
- **Suma:** $y_t = x_t + w_t$
- **Identidad:** $y_t = 1 y_t$

Nótese que:

$$y_t = \beta(x_t + w_t) = \beta x_t + \beta w_t$$

Operador de rezago

- El operador de rezago se denota por L y se define como:

$$L x_t = x_{t-1}$$

- En general, se tiene que:

$$L^k x_t = x_{t-k}$$

Algunas de las transformaciones de la serie y_t de la sección anterior pueden expresarse con el operador de rezagos:

- **Serie Original** y_t
- **Primera diferencia** $\triangle y_t = y_t - y_{t-1} = y_t - Ly_t = (1-L)y_t$
- **Tasa de crecimiento** $\triangle\% y_t \approx 100(\ln y_t - \ln y_{t-1}) = 100(1-L)\ln y_t$
- **Diferencia interanual** $\triangle_4 y_t = y_t - y_{t-4} = y_t - L^4 y_t = (1-L^4)y_t$
- **Tasa de crecimiento interanual** $\triangle_4\% y_t \approx 100(\ln y_t - \ln y_{t-4}) = 100(1-L^4)\ln y_t$
- **Suavizado por media móvil**

$$y_t^s = \frac{1}{4}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3}) = \frac{1}{4}(1 + L + L^2 + L^3)y_t$$

Propiedades del operador de rezago

Sean x_t, w_t dos series de tiempo. Entonces

- $L(\beta x_t) = \beta L x_t$
- $L(x_t + w_t) = L x_t + L w_t$
- $L(c) = c$
- $L^{-h} x_t = x_{t+h}$
- $L^0 x_t = x_t$
- $(\alpha L^h + \beta L^k) x_t = \alpha x_{t-h} + \beta x_{t-k}$

donde α, β, c son constantes.

Polinomio de rezagos

- **El operador de rezagos sigue las reglas usuales de operaciones algebraicas. Por ejemplo:**

$$
\begin{aligned}
(a + bL)(c + dL)x_t &= (a + bL)(cx_t + dx_{t-1}) \\
&= (acx_t + adx_{t-1} + bcx_{t-1} + bdx_{t-2}) \\
&= [ac + (ad + bc)L + bdL^2]x_t
\end{aligned}
$$

- **Así, definimos un polinomio de rezagos de orden p:**

$$(1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \ldots + \phi_p L^p)x_t = x_t + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \ldots + \phi_p x_{t-p}$$

Inverso de un polinomio de rezago de grado 1

Considere la operación

$$\begin{aligned}(1-\phi L)(1+\phi L+\ldots+\phi^k L^k)x_t &= (1-\phi^{k+1}L^{k+1})x_t \\ &= x_t-\phi^{k+1}x_{t-k-1}\end{aligned}$$

Si $|\phi|<1$,

$$\lim_{k\to\infty}\phi^{k+1}x_{t-k-1}=0$$

Con lo que

$$(1-\phi L)(1+\phi L+\phi^2 L^2+\ldots+)x_t=x_t$$

En este caso, escribimos

$$(1-\phi L)^{-1}=1+\phi L+\phi^2 L^2+\ldots$$

Inverso de un polinomio de rezago de grado p

- **Consideremos el polinomio**

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p$$

- **Si factorizamos el polinomio como**

$$\Phi(L) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)\ldots(1 - \lambda_p L)$$

- **Encontramos su inverso como**

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(L) &= (1 - \lambda_1 L)^{-1}\ldots(1 - \lambda_p L)^{-1} \\ &= (1 + \lambda_1 L + \lambda_1^2 L^2 + \ldots)\ldots(1 + \lambda_p L + \lambda_p^2 L + \ldots)\end{aligned}$$

Definición Ruido Blanco

Definición Ruido Blanco

Ruido blanco

Es una sucesión $\{a_t\}$ cuyos elementos satisfacen,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(a_t) &= 0 \\ \mathbb{E}(a_t^2) &= \sigma^2 \\ \mathbb{E}(a_t a_\tau) &= 0 \quad \text{para } t \neq \tau \end{aligned}$$

Test de Box - Pierce (1970)

Test de Box - Pierce (1970)

Test de Box - Pierce (1970)

¿Es esta serie un caso de ruido blanco?

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0 \qquad \text{(sí es ruido blanco)}$$

$$Test \qquad Q^* = T \sum_{j=1}^{m} \hat{\rho}_j^2$$

Si $Q^* > \chi_{m-k}(1 - \alpha)$**, rechazar** H_0 **con** $100\alpha\%$ **de significancia: la serie no es ruido blanco.**

La mayoria de los paquetes de software proporcionarán el valor p **de** $Q^*(m)$. **Entonces, la regla de decisión es rechazar** H_0 **si el valor** p **es menor o igual a** α**, el nivel de significancia.**

Modelo autoregresivo de primer orden: AR(1)

Modelo autoregresivo de primer orden: AR(1)

Sea $\{a_t\}$ una serie de ruido blanco.

Se define el proceso $AR(1)$ como:

$$\begin{aligned} r_t &= \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t \\ r_t - \phi_1 r_{t-1} &= \phi_0 + a_t \\ (1-\phi_1 L) r_t &= \phi_0 + a_t \end{aligned}$$

Por def. operador de rezago

Siempre que $|\phi_1| < 1$ podemos invertir el término $(1-\phi_1 L)$

$$\begin{aligned} r_t &= (1-\phi_1 L)^{-1}(\phi_0 + a_t) \\ &= (1-\phi_1 L)^{-1}\phi_0 + (1-\phi_1 L)^{-1} a_t \\ &= \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + (1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L + \ldots) a_t \\ &= \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \ldots \end{aligned}$$

Por resultados previos

Vemos por tanto que si $|\phi| < 1$ el proceso $AR(1)$ puede escribirse como

$$r_t = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} + a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + ...$$

Por lo que su valor esperado es:

$$\mathbb{E}(r_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

Y su varianza es:

$$\begin{aligned}
Var(r_t) = E[(r_t - \mathbb{E}(r_t))^2] &= E[(r_t - \mu)^2] \\
&= E[(a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + ..)^2] \\
&= \sigma_a^2 + \phi_2 \sigma_a^2 + \phi_1^4 \sigma_a^2 + ... \\
&= \underbrace{(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + ...)}_{serie\ geometrica} \sigma_a^2 \\
&= \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} \\
&= \gamma_0
\end{aligned}$$

Sabiendo que un proceso $AR(1)$ es estacionario si $|\phi_1| < 1$, entonces:

- $$\begin{aligned} r_t &= \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t && \textbf{(1)} \\ \mathbb{E}(r_t) &= \phi_0 + \phi_1 \mathbb{E}(r_{t-1}) + \mathbb{E}(a_t) && \textbf{(2)} \\ \mu &= \phi_0 + \phi_1 \mu + 0 \qquad \text{Por ser } y_t \text{ estacionario y } a_t \text{ ruido blanco} && \textbf{(3)} \\ \mu &= \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} && \textbf{(4)} \end{aligned}$$

- **Restando (3) de (1), vemos que**

$$\underbrace{r_t - \mu}_{\widetilde{r}_t} = \phi_1 (\underbrace{r_{t-1} - \mu}_{\widetilde{r}_{t-1}}) + a_t$$

Si repetimos esta relación hacia el pasado k veces obtenemos:

$$\begin{aligned} r_t - \mu &= \phi_1(r_{t-1} - \mu) + a_t \\ &= \phi_1(\phi_1(r_{t-2} - \mu) + a_{t-1}) + a_t \\ &\vdots \\ &= \phi^k r_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \phi_1^i a_{t-i} \end{aligned}$$

Note que si se continua este proceso hacia el pasado, siempre que $|\phi| < 1$, y r_t sea estacionario, entonces

$$r_t - \mu = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_1^i a_{t-i}$$

Para obtener su varianza elevamos al cuadrado la expresión anterior y tomamos su esperanza, es decir:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\widetilde{r}_t^2) &= \mathbb{E}[(\phi_1 \widetilde{r}_{t-1} + a_t)^2] \\
\gamma_0 &= \mathbb{E}[\phi_1^2 \widetilde{r}_{t-1}^2 + 2\phi_1 \widetilde{r}_{t-1} a_t + a_t^2] \\
&= \phi_1^2 \gamma_0 + 2 \times 0 + \sigma_a^2 \\
\gamma_0 &= \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}
\end{aligned}
$$

Para obtener su autocovarianza γ_i, para $i \geq 1$, escribimos

$$\widetilde{r}_t = \phi_1 \widetilde{r}_{t-1} + a_t$$

Multiplicamos ambos lados por $\widetilde{r}_{t-i}$ y tomamos la esperanza,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\widetilde{r}_t \widetilde{r}_{t-i}] &= \mathbb{E}[\phi_1 \widetilde{r}_{t-1} \widetilde{r}_{t-i} + \widetilde{r}_{t-i} a_t] \\ \gamma_i &= \phi_1 \gamma_{i-1} \end{aligned}$$

Modelo autoregresivo de orden p: AR(p)

Modelo autoregresivo de primer orden: AR(p)

- **Se puede extender el modelo $AR(1)$ para incluir más rezagos.**
- **El modelo$AR(p)$ es**

$$
\begin{aligned}
r_t &= \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \ldots + \phi_p r_{t-p} + a_t \\
r_t - \phi_1 r_{t-1} - \ldots - \phi_p r_{t-p} &= \phi_0 + a_t \\
(1 - \phi_1 L^1 - \ldots - \phi_p L^p) r_t &= \phi_0 + a_t \\
\Phi(L) r_t &= \phi_0 + a_t
\end{aligned}
$$

- **El modelo $AR(p)$ es una ecuación en diferencia de orden p.**
- **Esta ecuación es estable si y solo si las raíces del polinomio $1 - \phi_1 x - \ldots - \phi_p x^p$ están todas fueras del círculo unitario.**

Si el proceso es estable, resolvemos para r_t

$$\begin{aligned} r_t &= \Phi^{-1}(L)(\phi_0 + a_t) \\ &= \Phi^{-1}(1)\phi_0 + \Phi^{-1}(L)a_t \\ &= \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \ldots - \phi_p} + \Phi^{-1}(L)a_t \end{aligned}$$

Su valor esperado es

$$\mathbb{E}(r_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \ldots - \phi_p} = \mu$$

Similar a lo que obtuvimos para el proceso $AR(1)$, podemos escribir $AR(p)$ como $\widetilde{r_t} = r - \mu$.

$$\widetilde{r_t} = \phi_1 \widetilde{r}_{t-1} + \ldots + \phi_p \widetilde{r}_{t-p} + a_t$$

- **Para obtener su varianza y autocovarianzas multiplicamos la expresión anterior por $\widetilde{r}_{t-i}$, con $i \geq 0$, y calculamos el valor esperado**

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widetilde{r}_t \widetilde{r}_{t-i}] &= \mathbb{E}[\phi_1 \widetilde{r}_{t-1} \widetilde{r}_{t-i} + \ldots + \phi_p \widetilde{r}_{t-p} \widetilde{r}_{t-i} + a_t \widetilde{r}_{t-i}] \\
\gamma_i &= \begin{cases} \phi_1 \gamma_1 + \ldots + \phi_p \gamma_p + \sigma^2 & si \;\; i = 0 \\ \phi_1 \gamma_{i-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{i-p} & si \;\; i > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$