Laboratorium grafiki i multimediów

Krzywe Béziera

Bartosz Ziemkiewicz

Wydział Matematyki i Informatyki
UMK, Toruń

7 marca 2014

Krzywe Béziera

- Opracowane na początku lat 60. XX w. niezależnie przez Pierre'a Béziera, francuskiego inżyniera firmy Renault, oraz Paula de Casteljau, pracującego dla firmy Citroën.
- Są powszechnie stosowana w programach do projektowania inżynierskiego CAD, projektowania grafiki komputerowej, animacji (jako tory ruchu obiektów), do reprezentowania kształtów znaków w czcionkach komputerowych i systemach przetwarzania grafiki.

Krzywe Béziera 1-go stopnia

- Krzywa Béziera 1-go stopnia określona przez punkty P_0 i P_1 to po prostu odcinek łączący te punkty
- Krzywa jest określona wzorem

$$B(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$$

  gdzie $t \in [0, 1]$.
- Powyższe równanie należy rozumieć następująco. Jeżeli $P_0 = (P_0^x, P_0^y)$, a $P_1 = (P_1^x, P_1^y)$, to do krzywej należą punkty

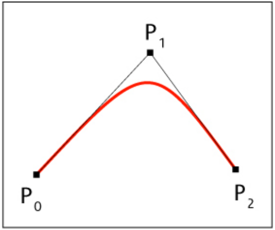
$$B(t) = (B^x(t), B^y(t)) = \left((1 - t)P_0^x + tP_1^x, (1 - t)P_0^y + tP_1^y\right)$$

  gdzie $t \in [0, 1]$. Równania dla krzywych wyższego stopnia należy rozumieć analogicznie.

- Krzywa Béziera 2-go stopnia zadana przez punkty P_0, P_1 i P_2 to fragment paraboli określony wzorem
- Krzywa jest określona wzorem

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

gdzie $t \in [0,1]$.
- Krzywa zaczyna się w punkcie P_0, kończy w P_2 i jest styczna do odcinków P_0P_1 i P_1P_2.



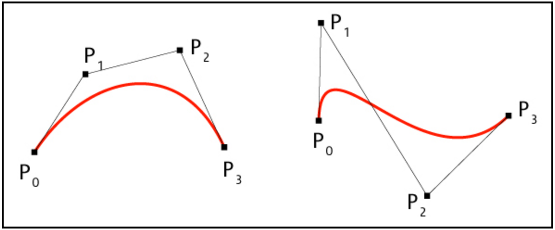
Źrodło: www.e-cartouche.ch/content_reg/cartouche/graphics/en/html/Curves_learningObject2.html

Krzywe Béziera 3-go stopnia

- Krzywa Béziera 3-go stopnia zadana przez punkty P_0, P_1, P_2 i P_3 to krzywa 3-go stopnia określona wzorem
- Krzywa jest określona wzorem

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3$$

gdzie $t \in [0, 1]$.
- Krzywa zaczyna się w punkcie P_0, kończy w P_3 i jest styczna do odcinków $P_0 P_1$ i $P_2 P_3$.



Źrodło: `www.e-cartouche.ch/content_reg/cartouche/graphics/en/html/Curves_learningObject2.html`

Własności krzywych Béziera

- Punkty P_0 i P_n określają początek i koniec krzywej. Pozostałe punkty zazwyczaj nie należą do krzywej.
- Łącząc kolejne punkty kontrolne od P_0 do P_1 otrzymujemy tzw. wielokąt Béziera.
- Początek krzywej jest styczny do pierwszego, a koniec do ostatniego boku wielokąta Béziera.
- Krzywa leży w otoczce wypukłej punktów kontrolnych $P_0, \ldots, P_n$.
- Krzywą można podzielić w dowolnym punkcie na dwie części z których każda jest też krzywą Béziera.
- Za pomocą krzywych Béziera nie można reprezentować krzywych stożkowych np. okręgów elips.

Wyświetlanie (rasteryzacja) krzywej Béziera

- Problem: jak dla danych punktów kontrolnych $P_0, \ldots, P_n$ wyznaczyć punkty należące do krzywej?
- Metoda najprostsza (ale mało efektywna) polega na obliczeniu wartości $B(t)$ dla t należących do pewnego podzbioru odcinka $[0, 1]$ i wyświetleniu tych pikseli na ekranie (po zaokrągleniu). Jeżeli podzbiór będzie odpowiednio gęsty (tzn. krok zwiększający t odpowiednio mały), to otrzymamy dobre przybliżenie krzywej.
- Inna metoda polega na wyznaczeniu wartości $B(t)$ dla pewnej liczby t i połączeniu otrzymanych punktów odcinkami. Przy odpowiednio dużej liczbie punktów otrzymamy dobre przybliżenie krzywej.
- Do obliczania wartości wielomianu można użyć standardowych metod takich jak schemat Hornera lub metody różnic skończonych. Można również użyć algorytmu de Casteljau przeznaczonego specjalnie do krzywych Bézeira.

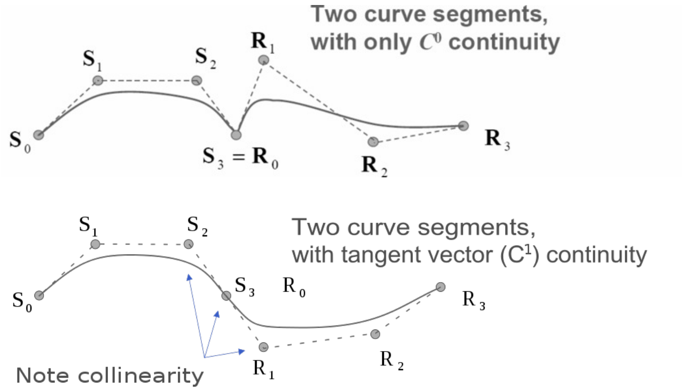
Łączenie segmentów krzywej

- Przy łączeniu krzywych najczęściej będziemy wymagać tzw. ciągłości parmetrycznej.
- O ciągłości parametrycznej C^n mówimy gdy pochodne rzędu n (i niższych) w punkcie połączenia obu kawałków krzywej są równe.
- W szczególności ciągłość C^0 oznacza, że krzywe się łączą (koniec pierwszej jest początkiem drugiej).
- Ciągłość C^1 oznacza, że połączenie jest gładkie, tzn. wektory styczne do obu krzywych w punkcie połączenia, mają ten sam kierunek i taką samą wartość.
- Ciągłość C^2 oznacza, że dodatkowo ich krzywizna jest taka sama.

Łączenie segmentów krzywej

- Ciągłość parametryczna jest szczególnie istotna gdy krzywe wykorzystujemy jako tory ruchu obiektów. Ponieważ pierwsza i druga pochodna to odpowiednio prędkość i przyspieszenie, brak ciągłości parametrycznej powodowałby gwałtowne zmiany tych parametrów.
- Czasem rozważa się słabsze pojęcie ciągłości geometrycznej (wizualnej). Na przykład ciągłość G^0 oznacza, że krzywe łączą się ze sobą, a ciągłość G^1, że ich wektory styczne mają taki sam kierunek, ale niekoniecznie tą sama wartość.
- W przypadku dwóch krzywych Béziera 3-go stopnia określonych przez punkty P_0, P_1, P_2, P_3 i Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, dla ciągłości G^0 i C^0 wystarczy aby $P_3 = Q_0$. Dla ciągłości G^1 punkty $P_2, P_3 = Q_0, Q_1$ muszą być współliniowe, a dla ciągłości C^1 dodatkowo odległość między P_2 i P_3 musi być równa odległości między Q_0 i Q_1.

Łączenie segmentów krzywej



Źrodło: `en.wikipedia.org/wiki/Parametric_continuity`

Reparametryzacja krzywej

- Przy łączeniu segmentów krzywej wygodnie jest czasem zmienić jej parametryzację, tak aby parametr t nie zerował się przy przechodzeniu do nowego segmentu.
- Aby parametr przebiegał po odcinku $[t_0, t_1]$ (zamiast $[0, 1]$) tak aby $B(t_0) = P_0$ i $B(t_1) = P_n$ wystarczy zmodyfikować nieco równanie krzywej Béziera

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\right)^i \left(\frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}\right)^{n-i} P_i.$$

Literatura

J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes, R.L. Phillips, *Wprowadzenie do grafiki komputerowej*, WNT 1995