Laboratorium grafiki i multimediów

Krzywe Béziera

Bartosz Ziemkiewicz

Wydział Matematyki i Informatyki
UMK, Toruń

2 marca 2014

Parametryczna reprezentacja krzywej

- Nie każdą krzywą można łatwo określić za pomocą zwykłego równania funkcyjnego $y = f(x)$. Na przykład dla okręgu konieczne są osobne równania dla górnej i dolnej połówki ($y = \sqrt{R^2 - x^2}$ i $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. W takich przypadkach często wygodniejsza jest reprezentacja parametryczna.
- W reprezentacji parametrycznej każda współrzędna krzywej jest pewną funkcją liczby rzeczywistej będącej wspomnianym parametrem.
- Aby określić krzywą na płaszczyźnie trzeba podać dwie funkcje (równania), a dla krzywej w przestrzeni trzy. Należy również podać zakres zmienności parametru

Parametryczna reprezentacja krzywej — przykłady

- Równanie parametryczne okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu R ma postać:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases}$$

gdzie $t \in [0, 2\pi)$.

- Równanie parametryczne krzywej śrubowej ma postać:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = a\sin(t) \\ z(t) = bt \end{cases}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Krzywe w grafice komputerowej

- W grafice komputerowej do reprezentacji krzywych wykorzystujemy najczęściej wielomiany trzeciego stopnia lub funkcje wymierne będące ilorazami wielomianów trzeciego stopnia.
- Najczęściej stosowane krzywe to
  - krzywe Béziera,
  - jednorodne nieułamkowe krzywe B-sklejane (B-spline),
  - niejednorodne ułamkowe krzywe B-sklejane (krzywe NURBS).

- Opracowane na początku lat 60. XX w. niezależnie przez Pierre'a Béziera, francuskiego inżyniera firmy Renault, oraz Paula de Casteljau, pracującego dla firmy Citroën.
- Są powszechnie stosowana w programach do projektowania inżynierskiego CAD, projektowania grafiki komputerowej, animacji (jako tory ruchu obiektów), do reprezentowania kształtów znaków w czcionkach komputerowych i systemach przetwarzania grafiki.

Krzywe Béziera 1-go stopnia

- Krzywa Béziera 1-go stopnia określona przez punkty P_0 i P_1 to po prostu odcinek łączący te punkty
- Krzywa jest określona wzorem

$$B(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

gdzie $t \in [0,1]$.

- Powyższe równanie należy rozumieć następująco. Jeżeli $P_0 = (P_0^x, P_0^y)$, a $P_1 = (P_1^x, P_1^y)$, to do krzywej należą punkty

$$B(t) = (B^x(t), B^y(t)) = \left((1-t)P_0^x + tP_1^x, (1-t)P_0^y + tP_1^y\right)$$

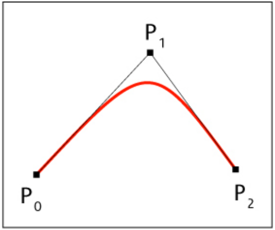
gdzie $t \in [0,1]$. Równania dla krzywych wyższego stopnia należy rozumieć analogicznie.

- Krzywa Béziera 2-go stopnia zadana przez punkty P_0, P_1 i P_2 to fragment paraboli określony wzorem
- Krzywa jest określona wzorem

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

gdzie $t \in [0, 1]$.

- Krzywa zaczyna się w punkcie P_0, kończy w P_2 i jest styczna do odcinków P_0P_1 i P_1P_2.



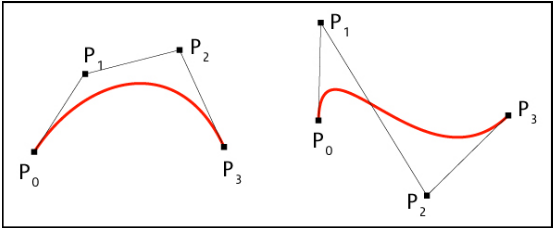
Źrodło: `www.e-cartouche.ch/content_reg/cartouche/graphics/en/html/Curves_learningObject2.html`

Krzywe Béziera 3-go stopnia

- Krzywa Béziera 3-go stopnia zadana przez punkty P_0, P_1, P_2 i P_3 to krzywa 3-go stopnia określona wzorem
- Krzywa jest określona wzorem

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$$

gdzie $t \in [0, 1]$.
- Krzywa zaczyna się w punkcie P_0, kończy w P_3 i jest styczna do odcinków P_0P_1 i P_2P_3.



Źrodło: www.e-cartouche.ch/content_reg/cartouche/graphics/en/html/Curves_learningObject2.html

Krzywe Béziera stopnia n

- Krzywą Béziera stopnia n definiuje $n+1$ punktów kontrolnych $P_0, P_1, \ldots, P_n$.
- Krzywa jest określona wzorem

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t) P_i,$$

gdzie $t \in [0,1]$, a $b_{i,n}(t)$ są wielomianami Bernsteina określonymi wzorem

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

dla $i = 0, 1, \ldots, n$.

Własności krzywych Béziera

- Punkty P_0 i P_n określają początek i koniec krzywej. Pozostałe punkty zazwyczaj nie należą do krzywej.
- Łącząc kolejne punkty kontrolne od P_0 do P_1 otrzymujemy tzw. wielokąt Béziera.
- Początek krzywej jest styczny do pierwszego, a koniec do ostatniego boku wielokąta Béziera.
- Krzywa leży w otoczce wypukłej punktów kontrolnych $P_0, \dots, P_n$.
- Krzywą można podzielić w dowolnym punkcie na dwie części z których każda jest też krzywą Béziera.
- Za pomocą krzywych Béziera nie można reprezentować krzywych stożkowych np. okręgów elips.

Wyświetlanie (rasteryzacja) krzywej Béziera

- Problem: jak dla danych punktów kontrolnych $P_0, \dots, P_n$ wyznaczyć punkty należące do krzywej?
- Metoda najprostsza (ale mało efektywna) polega na obliczeniu wartości $B(t)$ dla t należących do pewnego podzbioru odcinka $[0, 1]$ i wyświetleniu tych pikseli na ekranie (po zaokrągleniu). Jeżeli podzbiór będzie odpowiednio gęsty (tzn. krok zwiększający t odpowiednio mały), to otrzymamy dobre przybliżenie krzywej.
- Inna metoda polega na wyznaczeniu wartości $B(t)$ dla pewnej liczby t i połączeniu otrzymanych punktów odcinkami. Przy odpowiednio dużej liczbie punktów otrzymamy dobre przybliżenie krzywej.
- Do obliczania wartości wielomianu można użyć standardowych metod takich jak schemat Hornera lub metody różnic skończonych. Można również użyć algorytmu de Casteljau przeznaczonego specjalnie do krzywych Bézeira.

Problem. Obliczyć wartość wielomianu

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

gdzie $a_n \neq 0$ w punkcie t_0 wykonując możliwie najmniej działań.
Rozwiązanie. Korzystając z powyższej postaci wielomianu musimy wykonać $2n-1$ mnożeń i n dodawań (sprawdzić!). Jeżeli jednak przedstawimy wielomian w równoważnej postaci

Schemat Hornera

$$p(t) = a_0 + t(a_1 + t(a_2 + t(a_3 + \cdots + t(a_{n-1} + a_n t) \cdots)))$$

to otrzymamy algorytm obliczania $p(t_0)$, którego koszt wynosi tylko n mnożeń i n dodawań. Algorytm ten nazywamy schematem Hornera.

Schemat Hornera — algorytm

- Dane: wielomian $p(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ i punkt t_0.
- Wynik: $v = p(t_0)$

```
v = a[n];
for (k=n-1; k>=0; k--)
    v = a[k] + t0 * v;
```

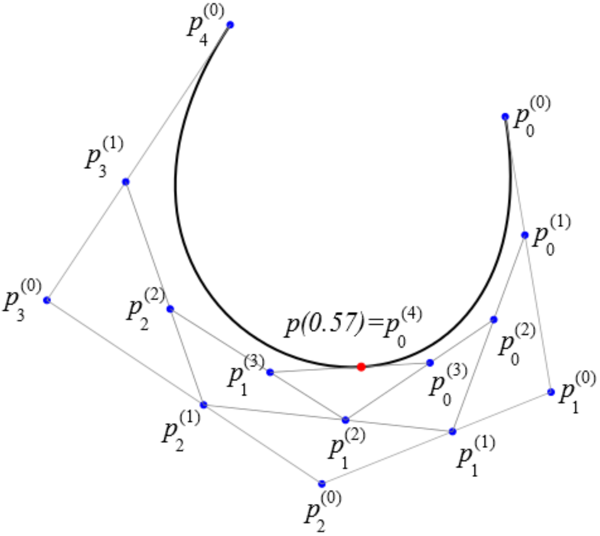
Algorytm de Casteljau

- Algorytm ten pozwala na rekurencyjne wyznaczenie punktów $B(t)$ leżących na krzywej Béziera dla $t \in [0, 1]$.
- Algorytm dzieli w stosunku $t : 1 - t$ każdy z odcinków $P_i P_{i+1}$ wyznaczonych przez punkty kontrolne krzywej. W wyniku otrzymujemy n nowych punktów. Dzielimy w takim samym stosunku odcinki wyznaczone przez te punkty i otrzymujemy $n - 1$ kolejnych punktów. Postępowanie to powtarzamy n razy, aż otrzymamy 1 punkt, który jest szukaną wartością $B(t)$.

$$
\begin{gathered}
P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, \ldots, P_{n-1}^{(0)}, P_n^{(0)} \\
P_0^{(1)}, P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \ldots, P_{n-1}^{(1)} \\
\vdots \\
P_0^{(n-1)}, P_1^{(n-1)} \\
P_0^{(n)}
\end{gathered}
$$

Algorytm de Casteljau

- Algorytm de Casteljau wyznacza również podział krzywej Béziera (w punkcie $P_0^{(n)}$) na dwie krzywe Béziera.
- Punkty kontrolne tych krzywych to $P_0^{(0)}, P_0^{(1)}, \ldots, P_0^{(n)}$ oraz $P_n^{(0)}, P_{n-1}^{(1)}, \ldots, P_0^{(n)}$. Leżą one na brzegach trójkąta punktów (patrz poprzedni slajd).



Źródło: `http://pl.wikipedia.org/wiki/Algorytm_de_Casteljau`

Algorytm de Casteljau

- Dane: Tablica $n+1$ punktów kontrolnych `P[0],...,P[n]` oraz punkt $t \in [0,1]$.
- Wynik: Punkt krzywej $B(t)$.

```
for (i=0; i<=n; i++)
    Q[i] = P[i];
for (k=1; k<=n; k++)
  for (i=0 i<=n-k; i++)
      Q[i] = (1 - t) * Q[i] + t * Q[i + 1];

return Q[0];
```

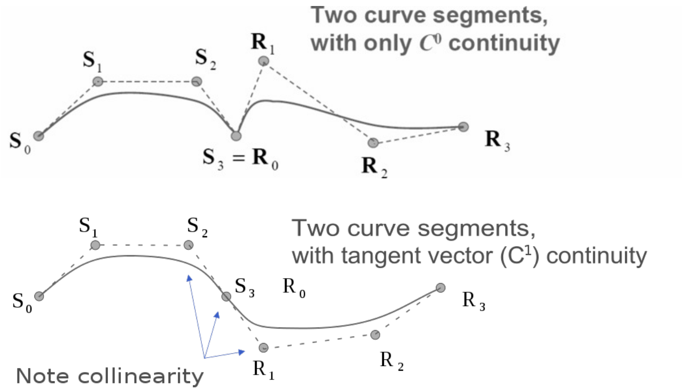
Łączenie segmentów krzywej

- Przy łączeniu krzywych najczęściej będziemy wymagać tzw. ciągłości parmetrycznej.
- O ciągłości parametrycznej C^n mówimy gdy pochodne rzędu n (i niższych) w punkcie połączenia obu kawałków krzywej są równe.
- W szczególności ciągłość C^0 oznacza, że krzywe się łączą (koniec pierwszej jest początkiem drugiej).
- Ciągłość C^1 oznacza, że połączenie jest gładkie, tzn. wektory styczne do obu krzywych w punkcie połączenia, mają ten sam kierunek i taką samą wartość.
- Ciągłość C^2 oznacza, że dodatkowo ich krzywizna jest taka sama.

Łączenie segmentów krzywej

- Ciągłość parametryczna jest szczególnie istotna gdy krzywe wykorzystujemy jako tory ruchu obiektów. Ponieważ pierwsza i druga pochodna to odpowiednio prędkość i przyspieszenie, brak ciągłości parametrycznej powodowałby gwałtowne zmiany tych parametrów.
- Czasem rozważa się słabsze pojęcie ciągłości geometrycznej (wizualnej). Na przykład ciągłość G^0 oznacza, że krzywe łączą się ze sobą, a ciągłość G^1, że ich wektory styczne mają taki sam kierunek, ale niekoniecznie tą sama wartość.
- W przypadku dwóch krzywych Béziera 3-go stopnia określonych przez punkty P_0, P_1, P_2, P_3 i Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, dla ciągłości G^0 i C^0 wystarczy aby $P_3 = Q_0$. Dla ciągłości G^1 punkty $P_2, P_3 = Q_0, Q_1$ muszą być współliniowe, a dla ciągłości C^1 dodatkowo odległość między P_2 i P_3 musi być równa odległości między Q_0 i Q_1.

Łączenie segmentów krzywej



Reparametryzacja krzywej

- Przy łączeniu segmentów krzywej wygodnie jest czasem zmienić jej parametryzację, tak aby parametr t nie zerował się przy przechodzeniu do nowego segmentu.
- Aby parametr przebiegał po odcinku $[t_0, t_1]$ (zamiast $[0, 1]$) tak aby $B(t_0) = P_0$ i $B(t_1) = P_n$ wystarczy zmodyfikować nieco równanie krzywej Béziera

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right)^{i} \left(\frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} \right)^{n-i} P_i.$$

Literatura

J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes, R.L. Phillips, *Wprowadzenie do grafiki komputerowej*, WNT 1995