

1.拓扑排序

图的导出边 (a,b,w) (a 为入点, b 为出点, w 为权重), $m[b_i]$ 为 b_i 的入度

- 将所有入度为0的顶点入栈, 初始化数组 t , 表示完成该点所对应的最短时间, 初始化为0
- 若栈为空
 - 栈顶元素出栈, 以该元素为入点的所有边 (a, b_i, w_i)
 - $t[b_i] = \max(t[b_i], t[a] + w_i)$
 - $m[b_i]$ 减去1, 若操作后为0, 则 b_i 入栈
- 栈清空后, 数组 t 的元素最大值即为最短时间

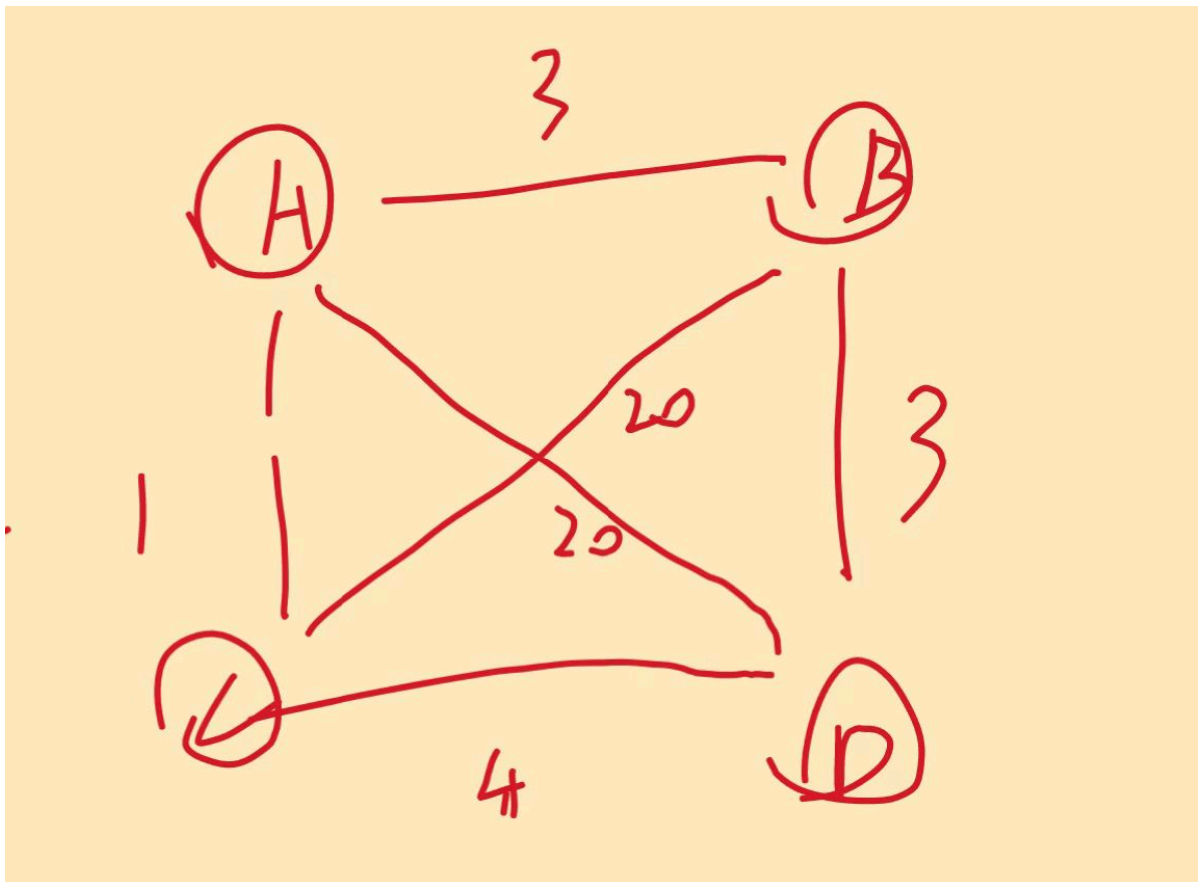
2

(1)

是的, 因为Dijkstra节点每次增加一个, 则增加一条边与原来第一组相连, 最终覆盖所有顶点, 所以连通, 有边数=点数-1, 又连通, 所以是无环

(2)

否



类似这个图片, 我们对A应用Dijkstra算法, $(A,C), (A,B), (C,D)$ 这三条边被加入

而最小生成树是D-B-A-C

最小生成树

(1)

(A,B),(B,E),(E,F),(E,D),(E,C)

(2)

(E,F),(E,D),(B,E),(A,B),(E,C)

(3)

假设存在两个最小生成树,

(3)

如果不唯一, 假设 T_1 和 T_2 都是最小生成树. 假设 $e = \arg \min_{e_i \in T_1 \cup T_2, e_i \notin T_1 \cap T_2} w(e_i)$.

不妨设 $e \in T_1, e \notin T_2$, 将 e 添加到 T_2 则后者成环, 注意到这个环不可能在 T_1 中完整出现, 因此存在 $e' \in T_2 \setminus T_1, e'$ 在 e 引起的这个环上

此时, $T_1 \cup \{e'\} \setminus \{e\}, T_2 \cup \{e\} \setminus \{e'\}$ 都是生成树, 注意到 T_1 和 T_2 是最小生成树, 因此 $w(e') - w(e) \geq 0, w(e) - w(e') \geq 0$, 从而 $w(e) = w(e')$. 矛盾。