

第三章 栈和队列

第一题

已知栈的三个基本运算定义如下：

- `push(S, x)`：元素 `x` 入栈 `S`；
- `pop(S)`：栈顶元素出栈并返回；
- `empty(S)`：判断栈 `S` 是否为空。

队列的四个基本运算定义如下：

- `enqueue(Q, x)`：元素 `x` 入队列 `Q`（在队尾插入元素）。
- `dequeue(Q)`：队列 `Q` 的队首元素出队列，并返回该元素。
- `getFront(Q)`：返回队列 `Q` 的队首元素，但不出队列。
- `isEmpty(Q)`：判断队列 `Q` 是否为空。

现给定一个栈 `S`，要求你用**一个辅助队列 `Q`**来完成以下运算：

- `reverse_top_k(S, k)`**：将栈 `S` 栈顶的前 `k` 个元素逆序。
- `is_palindrome(S)`**：判断栈 `S` 中所有元素是否为回文结构（即从栈顶到栈底的顺序与从栈底到栈顶的顺序相同），并在判断结束后恢复栈 `S` 的原始顺序。

要求：你只能使用一个额外的队列 `Q`，并只能使用栈和队列的基本操作来实现这两个功能。请写出实现上述功能的算法思路。

第二题

有 n 辆卡车编号为 $1, 2, \dots, n$ ，它们依次进入一个运输站，运输站的结构为栈式和队列式组合的卸货区。具体规则如下：

- 每辆卡车进入运输站后，必须依次选择一个**栈式平台**或**队列式平台**进行卸货。
- 栈式平台**遵循后进先出（LIFO）规则，进入的车可以暂时停放在栈内进行排队，卡车在出栈时卸货。
- 队列式平台**遵循先进先出（FIFO）规则，进入的车按照进入的顺序立即进行卸货。
- 车进入栈或队列后，必须按照该平台的规则卸货，并且所有卡车都必须卸货完毕。

请问：在栈式和队列式平台的混合规则下，所有卡车的卸货顺序有多少种可能？请给出推导过程。

第三题

证明：从初始输入序列 $1, 2, \dots, n$ ，可以利用一个栈得到输出序列 p_1, p_2, \dots, p_n （ p_1, p_2, \dots, p_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的一种排列）的充分必要条件是：输出序列中不存在下标 i, j, k ，使得 $i < j < k$ 且 $p_i > p_k > p_j$ 。