

Asignación 1: Transformada discreta de Fourier

Jefferson Gómez Herrera *
Universidad Industrial de Santander

Versión 24 de junio de 2022

Índice

1. Introducción	2
2. Metodología	2
3. Resultados	2
3.1. Señales sin ruido	2
3.1.1. Función de cosenos	2
3.1.2. Función de senos	4
3.2. Señales con ruido	8
4. Conclusiones y Recomendaciones	10
5. Referencias	13

Resumen

El análisis de Fourier tiene numerosas e importantes aplicaciones en la física. En este reporte se estudiará un poco acerca del análisis de señales utilizando transformadas de Fourier y la función de autocorrelación. El análisis se realiza empleando herramientas computacionales como los Jupyter Notebooks y MATLAB. Se muestra que la transformada discreta de Fourier es una muy buena aproximación a la transformada analítica. Más aún, se clarifica la importancia en la elección del tiempo de medición T de la señal como requisito fundamental en el objetivo de obtener una transformada discreta coherente. Sin embargo, hubo dificultades en el cálculo de la función de correlación. Lo anterior penaliza notablemente el análisis de la eficacia de la autocorrelación como método de reducción de ruido.

* Jefferson Gómez Herrera: jefferson2201293@correo.uis.edu.co

1. Introducción

El análisis de Fourier es el estudio de cómo descomponer funciones generales en términos de funciones trigonométricas o exponenciales con frecuencias específicas. Además, es posible identificar dos tipos de expansiones de Fourier: las series de Fourier y la transformada de Fourier. El estudio de este campo es importante, ya que nos permite pasar de trabajar con funciones complicadas a trabajar con representaciones sencillas de estas. La transformada de Fourier tiene una aplicación directa y una interpretación específica en el análisis y procesamiento de señales. La aplicación al análisis de señales surge como motivación para la realización de este reporte. Para ello se estudiarán, en primer lugar, funciones libres de ruido y, en segundo lugar, funciones con ruido. Para esta última se usa la función de autocorrelación como estrategia para eliminar el ruido indeseado. Todo esto a través de la representación de las funciones en el lenguaje de programación Python.

El reporte consta de tres partes principales. Inicia con la metodología, en la cual se explica en detalle el procedimiento tenido en cuenta para la realización del estudio; seguidamente se tienen los resultados y discusión, en donde se expone lo obtenido a través del procedimiento explicado en la metodología y cómo estos resultados encajan con la teoría; luego, se encuentran las conclusiones y recomendaciones. Aquí se enumeran los resultados primordiales logrados.

2. Metodología

Para el desarrollo del reporte se utilizó, principalmente, el lenguaje de programación de alto nivel Python a través de los Jupyter Notebooks. Para el cálculo de las transformadas analíticas de Fourier se utilizó MATLAB. La decisión de utilizar MATLAB yace en la limitación de Python y sus librerías para esta tarea. La librería SymPy, de trabajo simbólico, fue incapaz de la realización de esta tarea, en cuanto que la respuesta envuelve deltas de Dirac.

Las señales con y sin ruido se definieron y graficaron con las librerías NumPy y Matplotlib. El código que permitió el cálculo de las transformadas discretas de Fourier fue tomado del libro [1]. El código estará disponible en el repositorio del GitHub.

3. Resultados

3.1. Señales sin ruido

3.1.1. Función de cosenos

Se consideró como primera señal $y_1(t) = 3 \cos(\omega t) + 5 \cos(3\omega t) + 8 \cos(7\omega t)$.

De la primera señal, como es par, se espera una transformada de Fourier con valores reales. Esto se evidencia en su transformada analítica 1. La transformada discreta concuerda bastante bien con lo esperado. No obstante, se obtuvieron valores imaginarios de la transformada. Esto se debe la manera en que se realizó cálculo, pues computacionalmente siempre hay un error. La transformada permite observar el comportamiento frecuencial de $y_1(t)$. De ahí que nos sea posible conocer las frecuencias presentes en la función y confirmar los datos esperados, según la definición de $y_1(t)$.

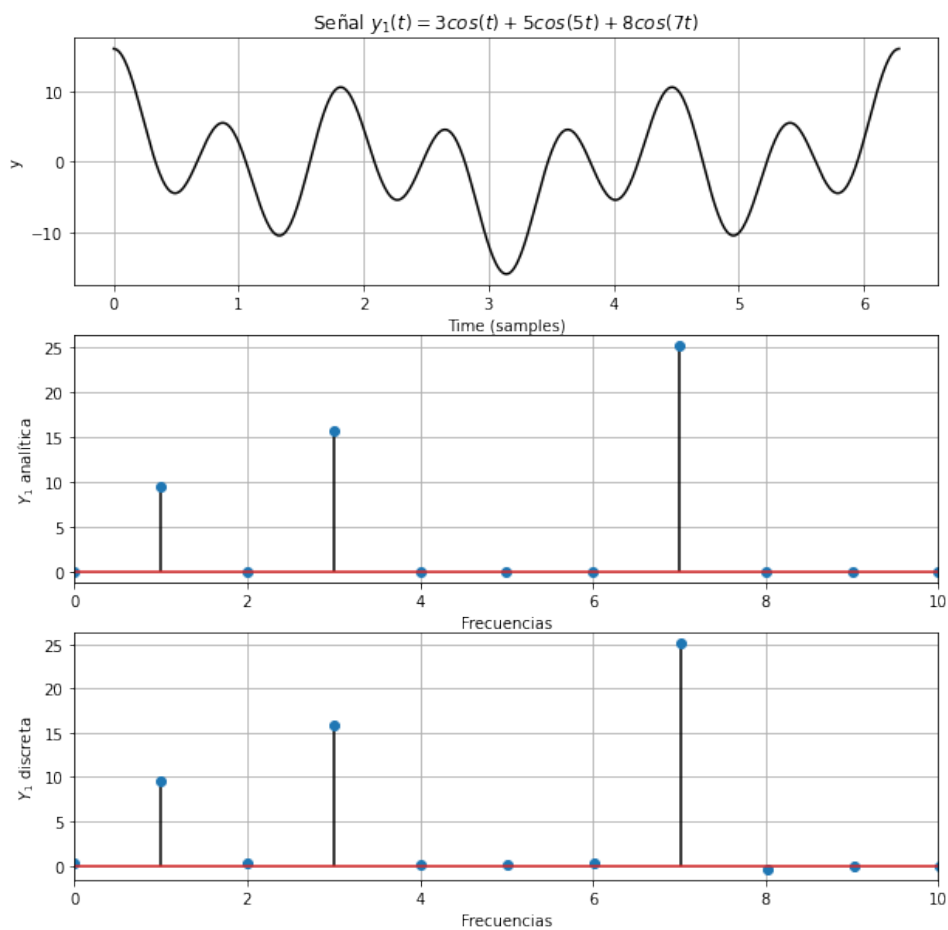


Figura 1: Señal $y_1(t)$, su transformada def Fourier analítica y discreta.

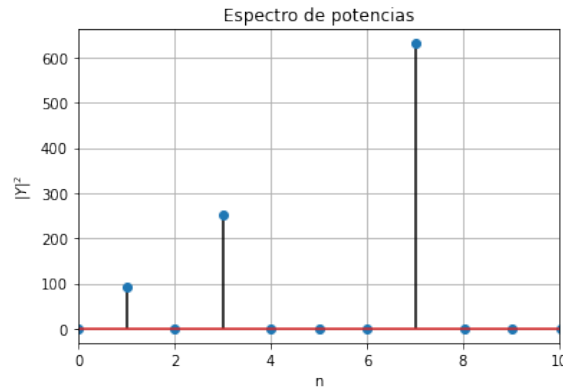


Figura 2: Espectro de potencias señal $y_1(t)$

En 2 se halló el espectro de potencias para $y_1(t)$ utilizando los datos de la transformada discreta. Se obtiene lo esperado, pues predominan las frecuencias para $n = 1, 3, 7$.

Lo anterior se realizó tomando un tiempo de medición $T = 2\pi$, pues este contiene a la frecuencia más baja de la señal, $\omega = 1$. Cuando se experimentó con la modificación del tiempo de medición $T = Nh$ y, en consecuencia, el paso h , se encontró dos comportamientos de la transformada. El primero ocurre cuando se modifica T de manera que los siguientes tomados sean múltiplos pares de 2π . Esto implica que los valores de frecuencias bajas se hacen cada vez menos precisos. Dejando únicamente valores de la frecuencia más alta. Es posible evidenciar este comportamiento en 3. En segundo lugar, cuando T se elige de forma que tome valores impares de π , la transformada tiene un comportamiento irregular. La razón de esta contrariedad puede estar en la forma de computar la transformada discreta. En efecto, al tomar valores del periodo T de medición que no incluyen periodos completos de la frecuencia fundamental, se está incumpliendo con una de las restricciones tomadas para el algoritmo de cálculo. Esto es, $y(0) = y(N)$.

3.1.2. Función de senos

Se consideró como segunda señal $y_2(t) = 3 \sin(\omega t) + 2 \sin(3\omega t) + 3 \sin(8\omega t)$.

De la segunda señal, como es impar, se espera una transformada de Fourier con valores imaginarios puros. Se evidencia en su transformada analítica 5. La transformada discreta concuerda bastante bien con lo esperado. No obstante, también se obtuvieron valores reales de la transformada.

En 6 se halló el espectro de potencias para $y_2(t)$ utilizando los datos de la transformada discreta. Se obtiene lo esperado, pues predominan las frecuencias para $n = 1, 3, 8$. Para esta función también ocurre el mismo fenómeno cuando se amplía el tiempo de medición T .

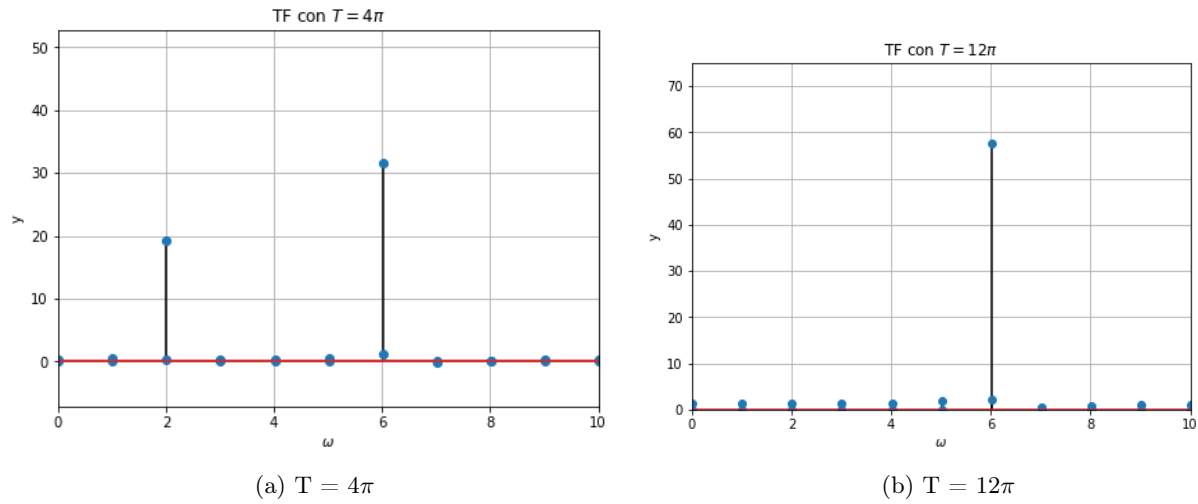


Figura 3: Comportamiento de la TF de $y_1(t)$ cuando T aumenta en múltiplos pares de 2π .

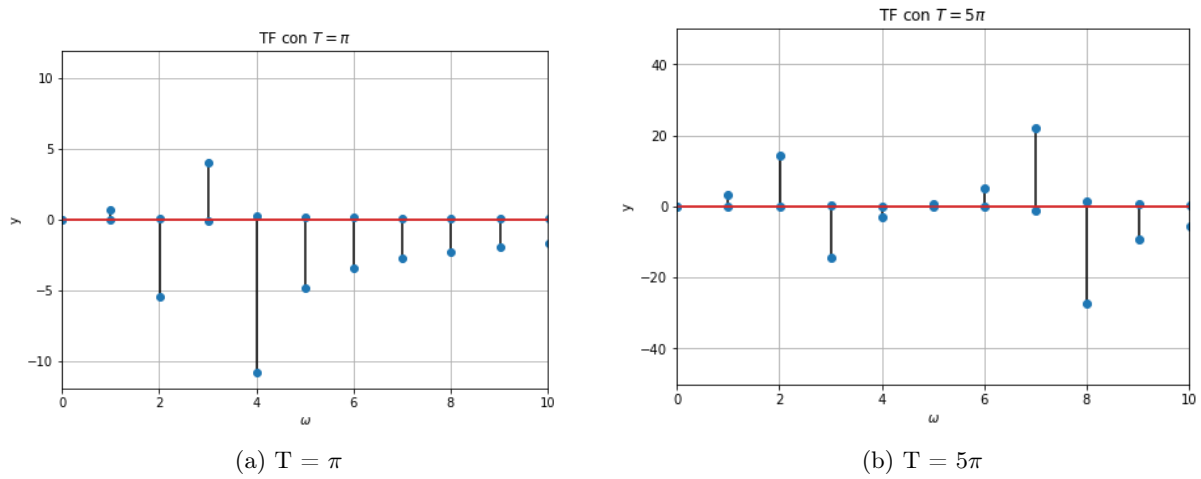


Figura 4: Comportamiento de la TF $y_1(t)$ cuando T aumenta en múltiplos impares de π .

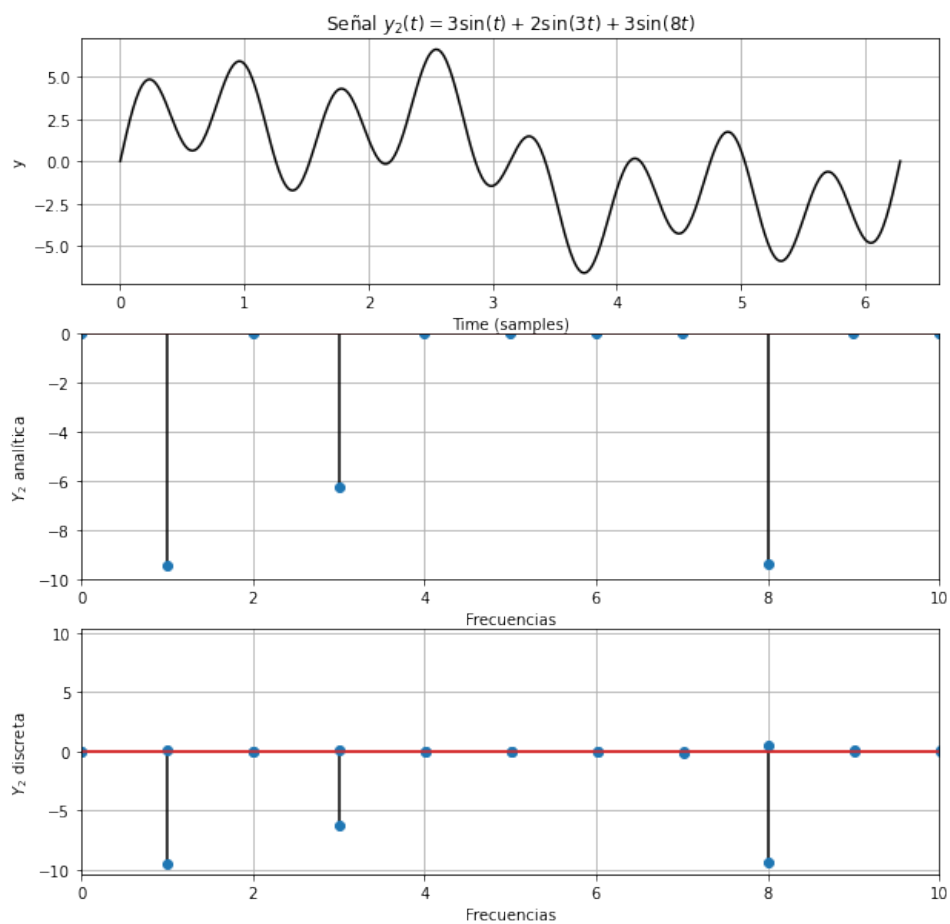
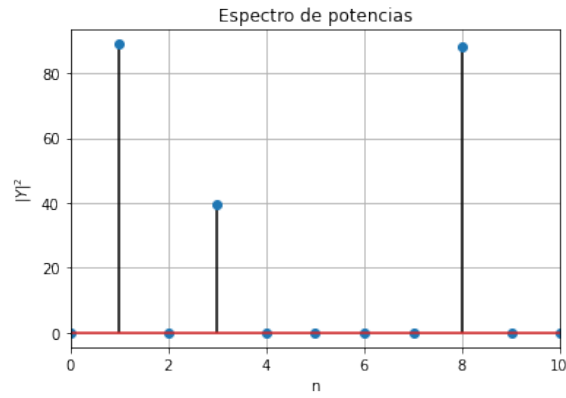
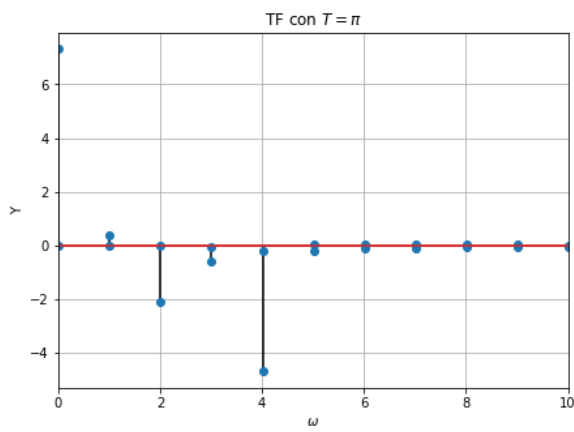
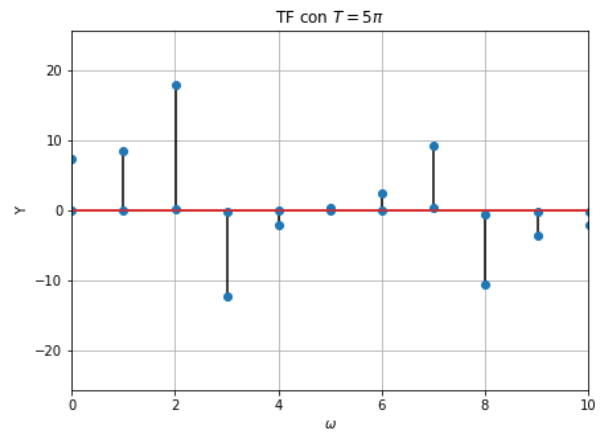


Figura 5: Señal $y_2(t)$, su transformada de Fourier analítica y discreta.

Figura 6: Espectro de potencias señal $y_2(t)$ (a) $T = \pi$ (b) $T = 5\pi$ Figura 7: Comportamiento de la TF $y_2(t)$ cuando T aumenta en múltiplos impares de π .

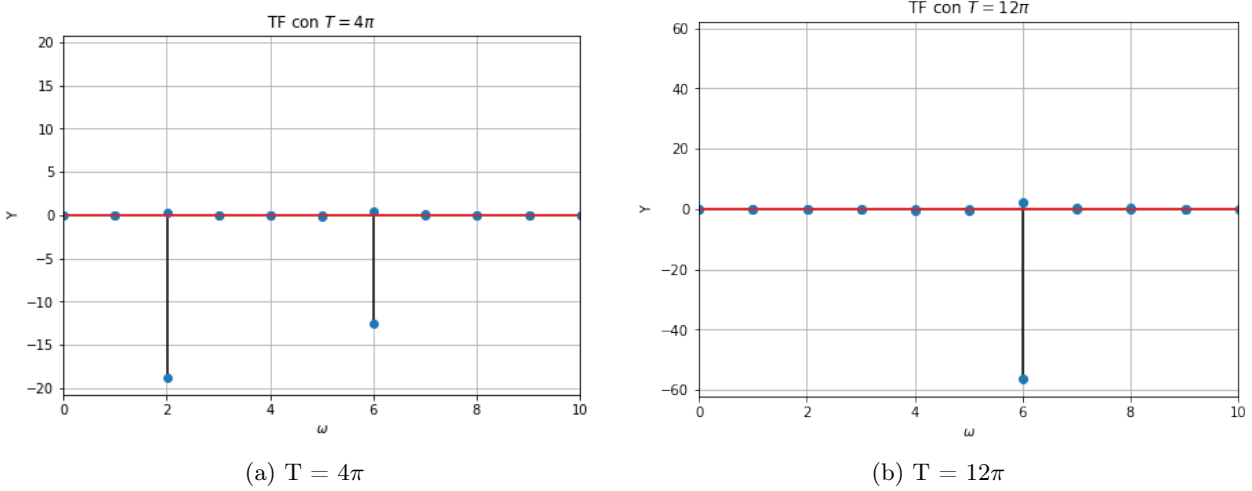


Figura 8: Comportamiento de la TF $y_2(t)$ cuando T aumenta en múltiplos pares de π .

3.2. Señales con ruido

Se realiza el análisis de la función

$$y(t) = \frac{10}{10 - 9 \sin(t)} + \alpha(3\Re - 1)$$

donde α es un parámetro de control de ruido y \Re es un número aleatorio. En 9 se aprecia la señal sin ruido, $\alpha = 0$, tomando 3 períodos. Asimismo se tiene la señal con ruido bajo, es decir, $\alpha = 2$. Para la señal con ruido $\alpha = 2$, en 10, se tiene la transformada de Fourier y espectro de potencias. Como se analiza una función impar, se esperan valores imaginarios puros para su transformada de Fourier.

Asimismo se tiene la señal con ruido bajo, es decir, $\alpha = 2$. Para la señal con ruido $\alpha = 2$, en 10, se tiene la transformada de Fourier y espectro de potencias. Como se analiza una función impar, se esperan valores imaginarios puros para su transformada de Fourier.

Se calcula la función de autocorrelación y su transformada de Fourier para $y(t)$ con ruido $\alpha = 2$. Los resultados se ven en 11. Concuerda con la teoría estudiada, pues se obtiene una función más suave.

Análogamente, se consideró a la función con ruido medio $\alpha = 5$ y alto $\alpha = 200$. En 12 es posible apreciar la forma que toma $y(t)$ con cada uno de estos niveles de ruidos. Aquí, la función a primera vista es poco reconocible. Por lo tanto, se usa la función de autocorrelación para cada caso. En 13 se ven los resultados. Para ruido alto, la función es bastante menos suave que en el ruido medio. De ahí que surja la duda de si es posible recuperar a la función original de allí. Se realizó la transformada de Fourier de estas funciones de autocorrelación 14. Con todo esto, se aprovechó el conocimiento de la señal limpia para comparar con lo obtenido a través de la función de autocorrelación, ya que se sabe de la teoría que la transformada de Fourier $A(\omega)$ es proporcional

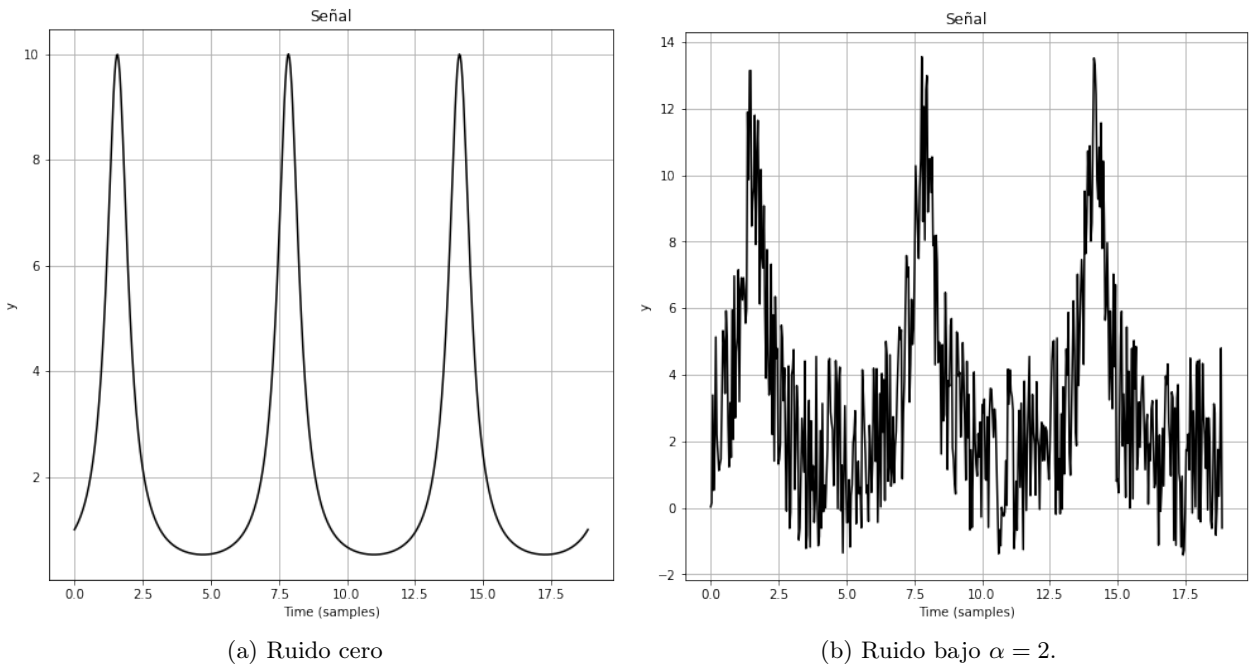
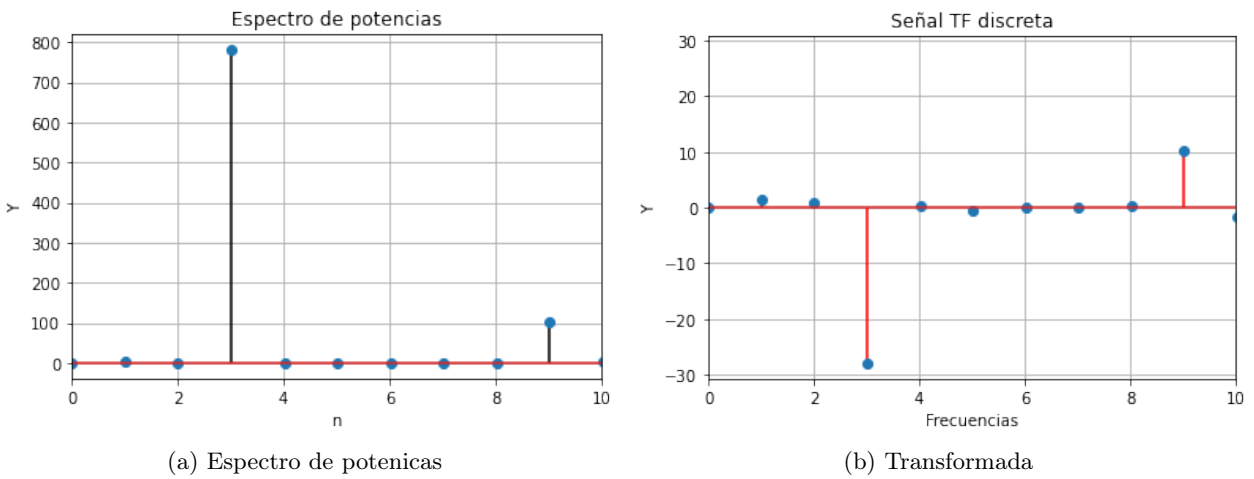


Figura 9: Señal con y sin ruido.

Figura 10: Transformada y espectro de potencias para señal con ruido bajo $\alpha = 2$.

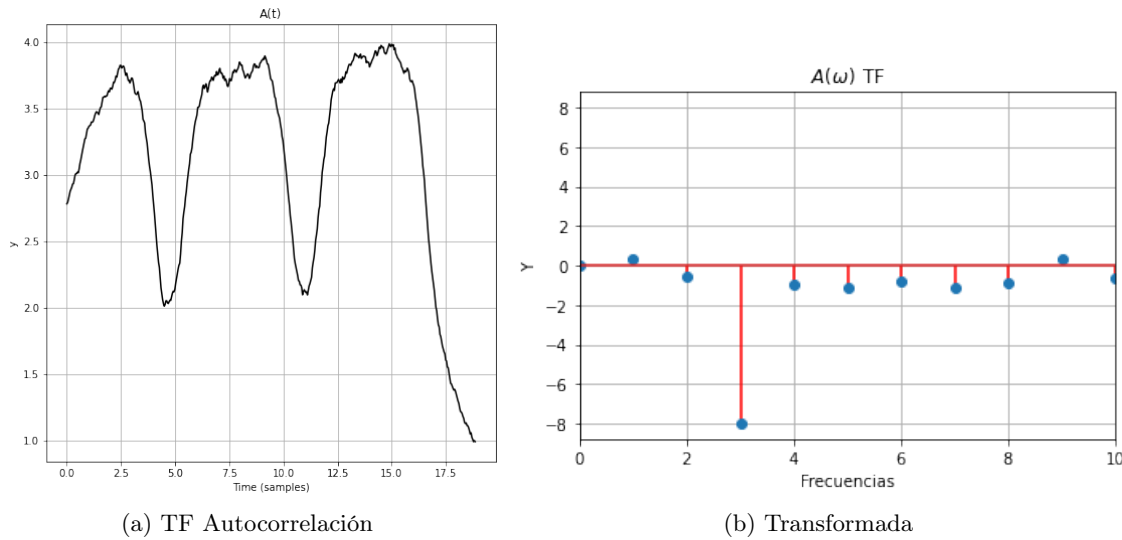


Figura 11: Función de autocorrelación y su transformada

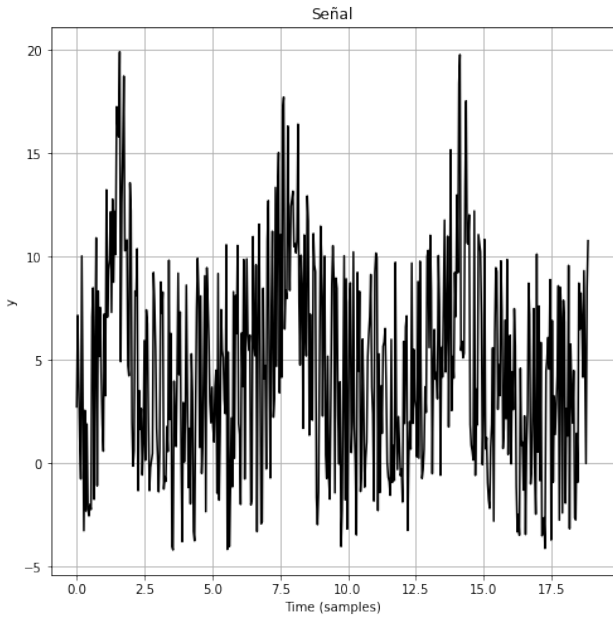
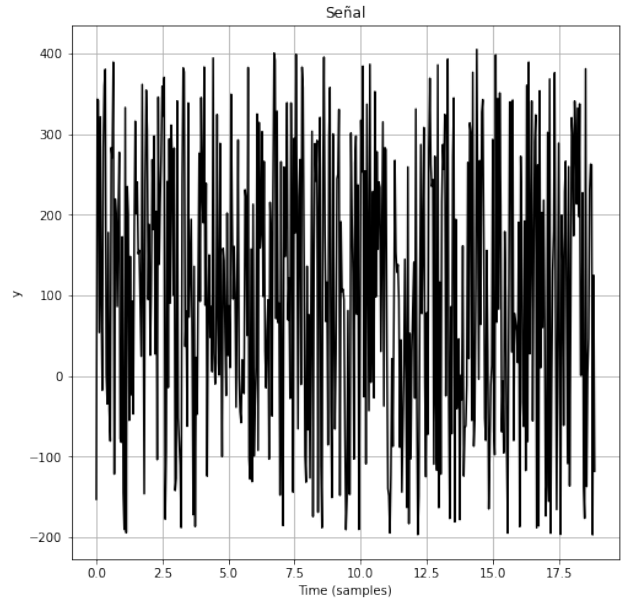
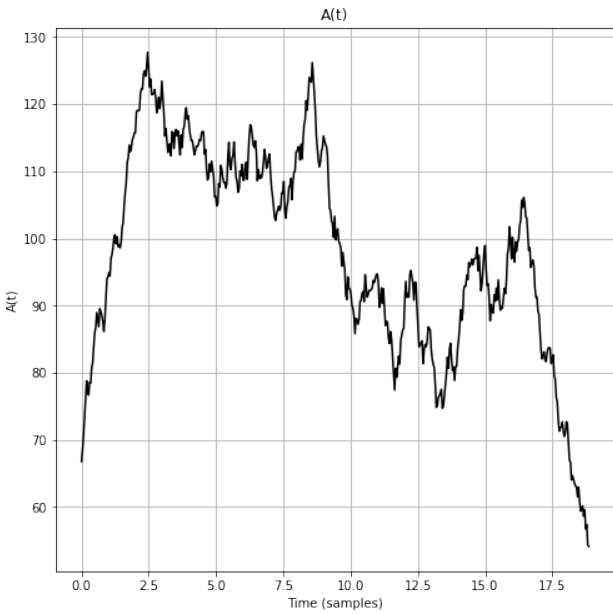
al el espectro de potencia de la señal limpia. Sin embargo, no se obtuvo el resultado esperado, es decir, que la transformada $A(\omega)$ es proporcional al espectro de potencias de la señal sin ruido. Esto se aprecia mirando el espectro de potencias en 15. Resulta evidente que la transformada $A(\omega)$, para ningún caso, parece ser proporcional al espectro de la señal limpia. Esto podría deberse a la función utilizada para realizar la autocorrelación de $y(t)$. Espero en una versión posterior de este reporte haber solucionado el problema.

4. Conclusiones y Recomendaciones

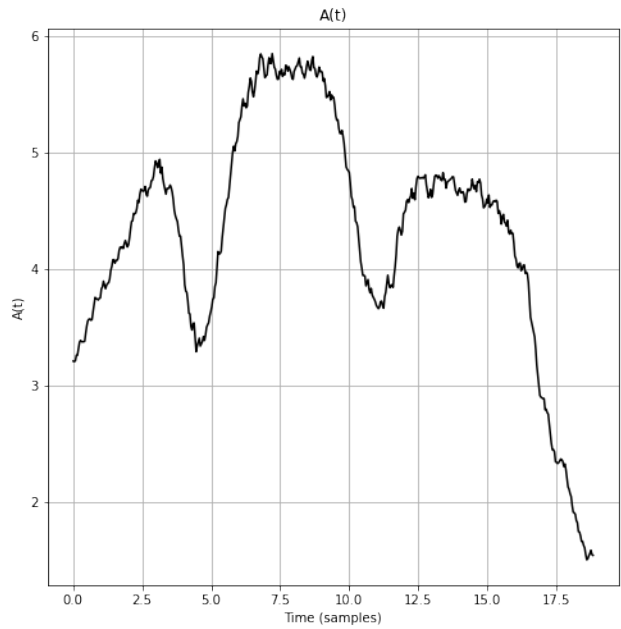
La importancia de la realización de este reporte radica en la consolidación del material estudiado. Además, muestra de primera mano una aplicación específica e interesante de lo visto en el curso.

De la elaboración del reporte es posible concluir lo siguiente:

- Las transformadas analíticas y discreta se corresponden bastante bien.
- Se confirma que para funciones impares la transformada proporciona valores imaginarios puros (analíticamente); la discreta proporciona errores pequeños. Para funciones pares se obtienen valores reales (analíticamente); la discreta proporciona errores pequeños.
- El espectro de potencias se corresponde con lo esperado por la teoría.
- La ampliación del periodo de medición T debe tener en cuenta a la frecuencia fundamental para obtener valores coherentes.

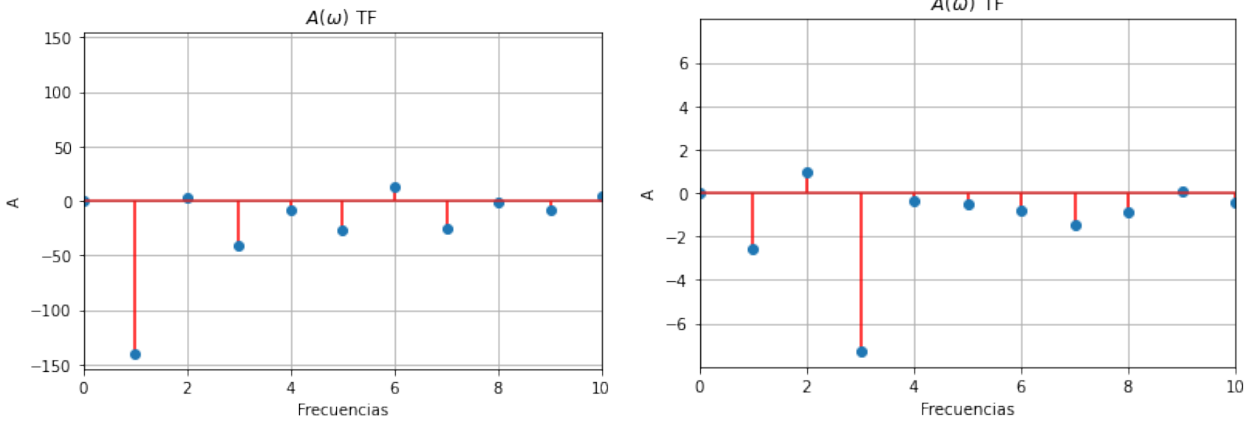
(a) $\alpha = 5$ (b) $\alpha = 200$ Figura 12: $y(t)$ con ruido medio y alto.

(a) Autocorrelación ruido alto



(b) Autocorrelación ruido medio

Figura 13: Función de autocorrelación para $y(t)$ con ruido alto y medio



(a) Transformada de Fourier autocorrelación ruido alto. (b) Transformada de Fourier autocorrelación ruido medio.

Figura 14: Transformada de Fourier de autocorrelación para $y(t)$ con ruido alto y medio.

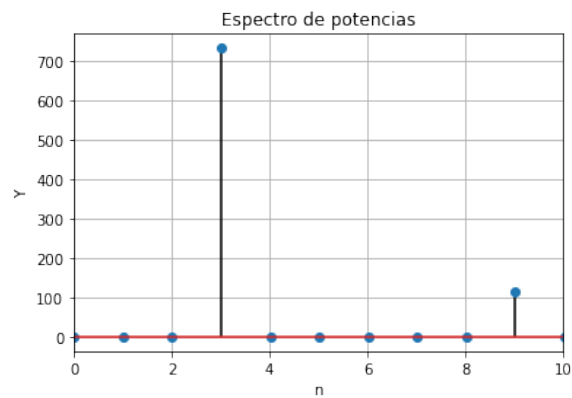


Figura 15: Espectro de potencias señal sin ruido

5. Referencias

Referencias

- [1] K. KONG, T. SIAUW, A. BAYEN y H.D. SHERALI, *Python Programming and Numerical Methods - A Guide for Engineers and Scientists*, 2021.