

文章编号:1002-0640-(2002)04-0048-03

卡尔曼滤波算法的几何解释

范洪达, 李相民

(海军航空工程学院, 山东 烟台 264001)

摘要:对低维卡尔曼滤波算法作了几何解释, 这种解释对卡尔曼滤波有一种直观的理解, 使人们对卡尔曼滤波有更本质的认识。

关键词:卡尔曼滤波; 算法; 几何解释

中图分类号: TN713

文献标识码: A

The Geometrical Explanation of Kalman Filter Arithmetic

FAN Hong-da, LI Xiang-min

(Naval Aeronautical Engineering Academy, Yantai 264001, China)

Abstract: The paper presents a geometrical explanation of low dimension Kalman filter, which provides a intuitionistic comprehension to Kalman filter. It helps to understand the essence of Kalman filter.

Key words: kalman filter, arithmetic, geometrical explanation

1 卡尔曼滤波算法

卡尔曼滤波方程有多种不同定义方式的描述方程组, 详见文献[2-6], 本文以文献[5]为参考, 列举一种进行讨论。

1.1 动态系统

过程方程:

$$X(k+1) = \phi(k)X(k) + G(k)U(k) + W(k) \quad (1)$$

其中:

$$E[W(k)] = 0$$

$$E[W(k)W^T(j)] = Q(k)\delta_{kj}$$

量测方程:

$$Z(k+1) = H(k+1)X(k+1) + v(k+1) \quad (2)$$

其中:

$$E[v(k)] = 0$$

$$E[v(k)v^T(j)] = R(k)\delta_{kj}$$

1.2 滤波算法

假设已知 k 时刻状态 $X(k)$ 的滤波值为 $\hat{X}(k/k)$

和 $X(k)$ 的协方差矩阵为 $P(k/k)$, 这样滤波方程可表示如下:

状态预测值:

$$\hat{X}(k+1/k) = \phi(k)\hat{X}(k/k) + G(k)U(k) \quad (3)$$

预测协方差矩阵:

$$P(k+1/k) = \phi(k)P(k/k)\phi^T(k) + Q(k) \quad (4)$$

量测预测值:

$$\hat{Z}(k+1/k) = H(k+1)\hat{X}(k+1/k) \quad (5)$$

新息协方差矩阵:

$$S(k+1) = H(k+1)P(k+1/k)H^T(k+1) + R(k+1) \quad (6)$$

增益矩阵:

$$K(k+1) = P(k+1/k)H^T(k+1)S^{-1}(k+1) \quad (7)$$

状态滤波值:

$$\hat{X}(k+1/k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1)[Z(k+1) - \hat{Z}(k+1/k)] \quad (8)$$

滤波协方差矩阵:

$$P(k+1/k+1) = P(k+1/k) - K(k+1)S(k+1)K^T(k+1) \quad (9)$$

1.3 最小协方差

状态转移矩阵和量测矩阵的一步预报状态估计和量测向量为:

$$\hat{X}(k+1/k) = \phi\hat{X}(k/k) \quad (10)$$

收稿日期: 2001-06-15

修回日期: 2001-11-30

作者简介: 范洪达(1941-), 男, 教授、博士生导师。主要从事火力与指挥控制方面的教学与研究;

李相民, 男, 副教授、博士研究生。

$$\hat{Z}(k+1/k) = H\hat{X}(k+1/k) \quad (11)$$

记预测状态向量误差为:

$$\tilde{X}(k+1/k) = X(k+1) - \hat{X}(k+1/k) \quad (12)$$

$$\tilde{X}(k+1/k+1) = X(k+1) - \hat{X}(k+1/k+1) \quad (13)$$

类似的量测向量多余部分

$$\tilde{Z}(k+1) = Z(k+1) - \hat{Z}(k+1/k) \quad (14)$$

此处注意不要与预测量测向量误差相混淆, 预测量测向量误差等于

$$HX(k+1) - \hat{Z}(k+1/k)$$

滤波问题就是求式(8)中增益 $K(k+1)$, 使更新的状态估计误差最小

$$\hat{X}(k+1/k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1)\tilde{Z}(k+1) \quad (15)$$

其中 $K(k+1)$ 是卡尔曼滤波增益, 见式(7), 最小协方差表达式见式(9)。

2 几何解释

设 X 包含两项, 即

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{bmatrix}$$

$H = [1, 0]$, H 中第 1 项为 1, 表明 $X_1(k+1)$ 可由 $Z(k+1)$ “直接观测”得到, $X_2(k+1)$ 只能“间接观测”, 用与“直接观测”结果相关来估计。

2.1 直接观测元

$$\tilde{Z}(k+1) = Z(k+1) - \hat{Z}(k+1/k) =$$

$$\begin{aligned} &HX(k+1) + v(k+1) - H\hat{X}(k+1/k) = \\ &X_1(k+1) + v(k+1) - \hat{X}_1(k+1/k) = \\ &\tilde{X}_1(k+1/k) + v(k+1) \end{aligned} \quad (16)$$

由于量测噪声 $v(k+1)$ 是白噪声, 与过程噪声 $W(k+1)$ 不相关。预测误差 $\tilde{X}_1(k+1/k)$ 受 $W(k+1)$ 和递推量测噪声影响, 与 $v(k+1)$ 不相关, 这意味 $v(k+1)$ 和 $\tilde{X}_1(k+1/k)$ 几何上是正交向量。这样可构成图 1 所示三角形。

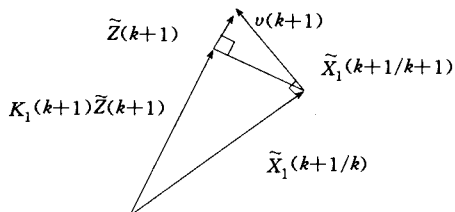


图1 可直接观测状态向量余项与最佳增益几何描述
 $\hat{X}_1(k+1/k+1) = \hat{X}_1(k+1/k) + K_1(k+1)\tilde{Z}(k+1)$ (17)

式(13)、式(12)并利用式(17)可以得到:

$$\tilde{X}_1(k+1/k+1) = \tilde{X}_1(k+1/k) - K_1(k+1)\tilde{Z}(k+1) \quad (18)$$

为使滤波协方差最小, 从三角形顶角作垂线形成的新三角形如图 1 所示的各边定义的正是 $K_1(k+1)$ 最佳时的式(18)。

$\|\tilde{X}_1(k+1/k+1)\|$ 最小从而保证 $\|\tilde{X}_1(k+1/k+1)\|$ 与 $\tilde{Z}(k+1)$ 正交。从图 1 中的相似三角形可求出 K_1 :

$$\frac{K_1(k+1)\|\tilde{Z}(k+1)\|}{\|\tilde{X}_1(k+1/k)\|} = \frac{\|\tilde{X}_1(k+1/k)\|}{\|\tilde{Z}(k+1)\|}$$

$$\text{求出 } K_1(k+1) = \frac{\|\tilde{X}_1(k+1/k)\|^2}{\|\tilde{Z}(k+1)\|^2} \quad (19)$$

式(19)对应的更一般的表达式, 可写成

$$K_1(k+1) = \frac{\text{cov}[\tilde{X}_1(k+1/k), \tilde{X}_1(k+1/k)]}{\text{cov}[\tilde{Z}(k+1), \tilde{Z}(k+1)]} = \frac{P_{11}(k+1/k)}{S(k+1)} \quad (20)$$

式中 $P_{i,j}$ 是矩阵 P 第 i 行第 j 列上的元素。本例中 P 是 2×2 的矩阵, S 是 1×1 的矩阵, 经整理后的式(20)是标量方程。

同样, 协方差更新算法可根据三角形勾股定理, 由向量 $\tilde{X}_1(k+1/k)$ 、 $\tilde{X}_1(k+1/k+1)$ 和 $K_1(k+1)\tilde{Z}(k+1)$ 构成, 得到:

$$\begin{aligned} \|\tilde{X}_1(k+1/k)\|^2 &= K_1^2(k+1)\|\tilde{Z}(k+1)\|^2 + \\ &\quad \|\tilde{X}_1(k+1/k+1)\|^2 \\ \|\tilde{X}_1(k+1/k+1)\|^2 &= \|\tilde{X}_1(k+1/k)\|^2 - K_1^2(k+1)\|\tilde{Z}(k+1)\|^2 \end{aligned} \quad (21)$$

同样可写出更一般的表达式

$$P_{11}(k+1/k+1) = P_{11}(k+1/k) - K_1^2(k+1)S(k+1) \quad (22)$$

至此图 1 完整描述了式(22)中各向量之间直接关系。

2.2 间接观测元

间接观测元误差向量间关系可借鉴图 1 的方法, 用图 2 中的两个大三角形直观表示。

$\tilde{X}_2(k+1/k)$ 引入两个正交分量: $\tilde{X}_{2P}(k+1/k)$ 和 $\tilde{X}_{2Q}(k+1/k)$, 如图 2 所示。 $\tilde{X}_{2P}(k+1/k)$ 是从直

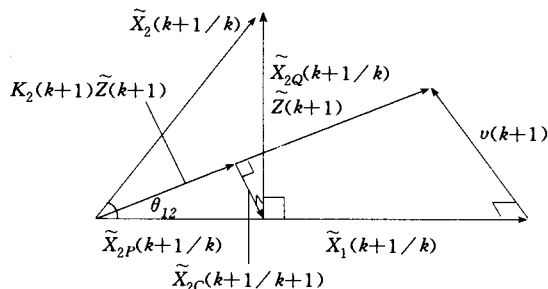


图2 间接观测状态向量的最佳增益几何解释

接观测元 $\tilde{X}_1(k+1/k)$ 引伸出来,因此在 $\tilde{X}_{2P}(k+1/k)$ 边上的截取获得,并从 A 作 $\tilde{X}_{2P}(k+1/k)$ 垂线 $\tilde{X}_{2Q}(k+1/k)$ 。由图 2 得:

$$\|\tilde{X}_2(k+1/k)\|^2 = \|\tilde{X}_{2P}(k+1/k)\|^2 + \|\tilde{X}_{2Q}(k+1/k)\|^2 \quad (23)$$

同理式(23)的更一般表达式可写成:

$$P_{21}(k+1/k) = \text{cov}[\tilde{X}_2(k+1/k)\tilde{X}_1(k+1/k)] = \text{cov}[\tilde{X}_{2P}(k+1/k)\tilde{X}_1(k+1/k)] \quad (24)$$

$$\text{cov}[\tilde{X}_{2Q}(k+1/k)\tilde{X}_1(k+1/k)] = 0 \quad (25)$$

间接观测元是通过相关直接观测元进行的。很明显,如果 \tilde{X}_{2Q} 是 \tilde{X}_2 唯一的误差组成成分,那么 \tilde{X}_2 和 \tilde{X}_1 不会相关,也无法进行估计。 \tilde{X}_{2P} 是从直接观测变量,所以能从 $\tilde{Z}(k+1)$ 导出并与 $\tilde{X}_1(k+1/k)$ 相一致。因为它与 \tilde{X}_1 相关。但不会对 \tilde{X}_{2Q} 产生影响。采用与直接观测组成的三角形类比方法,从 A 作垂线到 $\tilde{Z}(k+1)$,通过相似三角形找到最佳增益表达式为:

$$\frac{K_2(k+1)\|\tilde{z}(k+1)\|}{\|\tilde{X}_{2P}(k+1/k)\|} = \frac{\|\tilde{X}_1(k+1/k)\|}{\|\tilde{Z}(k+1)\|}$$

求出:

$$K_2(k+1) = \frac{\|\tilde{X}_{2P}(k+1/k)\| \cdot \|\tilde{X}_1(k+1/k)\|}{\|\tilde{Z}(k+1)\|^2} \quad (26)$$

同理写出更一般表达式:

$$K_2(k+1) = \frac{\text{cov}[\tilde{X}_{2P}(k+1/k) \cdot \tilde{X}_1(k+1/k)]}{\|\tilde{Z}(k+1)\|^2} = \frac{\text{cov}[\tilde{X}_{2P}(k+1/k) \cdot \tilde{X}_1(k+1/k)]}{\text{cov}[\tilde{Z}(k+1)\tilde{Z}(k+1)]} \quad (27)$$

$$\text{可以推出: } K_2(k+1) = \frac{P_{21}(k+1/k)}{S(k+1)} \quad (28)$$

这种情况下变量 $\tilde{X}_2(k+1/k+1)$ 为最小,这可以从下式得到:

$$\tilde{X}_{2P}(k+1/k+1) = \tilde{X}_{2C}(k+1/k) + K_2(k+1)\tilde{Z}(k+1) \quad (29)$$

同时可导出:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2(k+1/k+1) &= \tilde{X}_2(k+1/k) - K_2(k+1)\tilde{Z}(k+1) \\ &= \tilde{X}_{2Q}(k+1/k) + [\tilde{X}_{2P}(k+1/k) - K_2(k+1)\tilde{Z}(k+1)] = \tilde{X}_{2Q}(k+1/k) + \tilde{X}_{2C}(k+1/k+1) \end{aligned} \quad (30)$$

图 2 中没有明确表示 $\tilde{X}_2(k+1/k+1)$,从式(30)可知它由两个分量组成,其中一个不能通过 $\tilde{Z}(k+1)$ 来观测,另一个通过选取 $K_2(k+1)$ 使之达到最小。

与直接观测元类比,从图 2 并考虑式(23)可以求出 $\tilde{X}_2(k+1/k+1)$ 的方差如下:

$$\begin{aligned} P_{22}(k+1/k+1) &= \|\tilde{X}_{2Q}(k+1/k)\|^2 + \|\tilde{X}_{2C}(k+1/k+1)\|^2 = \|\tilde{X}_{2Q}(k+1/k)\|^2 + \|\tilde{X}_{2P}(k+1/k)\|^2 - K_2^2(k+1)\|\tilde{Z}(k+1)\|^2 \\ &= \|\tilde{X}_2(k+1/k)\|^2 - K_2^2(k+1)\|\tilde{Z}(k+1)\|^2 = P_{22}(k+1/k) - K_2^2(k+1)\|\tilde{Z}(k+1)\|^2 \\ &= P_{22}(k+1/k) - K_2^2(k+1)S(k+1) \end{aligned} \quad (31)$$

3 结 论

本文揭示了卡尔曼滤波和协方差更新算法,尽管仅是对低维系统,其几何解释能使我们卡尔曼滤波过程有一种直观的理解,从本质上对卡尔曼滤波方程组有一个更深刻的理解和认识。

参考文献:

- [1] Thomas R. Kronhamn Geometric Illustration of the Kalman Filter Gain and Covariance Update Algorithms[J]. IEEE Control System Magazine, 1985.
- [2] 周宏仁,等. 机动目标跟踪[M]. 北京:国防工业出版社, 1991.
- [3] 董志荣. 舰艇指控系统理论基础[M]. 北京:国防工业出版社, 1995.
- [4] 郭 治. 现代火控理论[M]. 北京:国防工业出版社, 1996.
- [5] 蔡庆宇,等. 相控雷达数据处理及其仿真技术[M]. 北京:国防工业出版社, 1997.
- [6] 范洪达,李相民,等. 导弹火控系统分析与设计[M]. 北京:海潮出版社, 1999.

简 讯

《火力与指挥控制》杂志第十一届编委会工作会议于 2002 年 8 月 23 日至 25 日在河北省秦皇岛市召开。

参加会议的有编委会主任委员、副主任委员及委员共 30 余人。会议听取了主任委员魏云升同志对第十届编委会所做的工作总结及副主任委员秦继荣对新一届编委组成的情况介绍。委员们对编委会和编辑部的工作成绩给予了充分的肯定。会议认为:两年来杂志始终坚持了明确的办刊宗旨、办刊方向,选题恰当,定位准确,刊物质量及发行量呈上升态势。

本次编委会新吸纳了 7 位我国国防战线上的资深院士,再次体现了本刊年轻化、专业化、知识化的特点。