

环形一级倒立摆摆起及稳定控制研究

Study on Swing-up and stability Control for Single Link Rotary Inverted Pendulum

(清华大学)王东亮 刘 斌 张曾科

WANG DONGLIANG LIU BIN ZHANG ZENGKE

摘要:本文通过拉格朗日方程推导出环形一级倒立摆系统的数学模型,用能量方法对该模型进行摆起控制;在倒立摆成功摆起后,在倒立平衡点对系统模型进行线性化,并用线性二次型最优控制(LQR)算法对倒立摆线性化模型进行稳定控制。仿真结果表明本文给出的控制方法是有效的。

关键词:环形倒立摆;摆起控制;稳定控制;线性二次型最优控制

中图分类号:TP273

文献标识码:A

Abstract: This paper derives the mathematical model for system of single link rotary inverted pendulum from Lagrange Equation, and through this model the rotary inverted pendulum is swung up by energy methods. After the success of the inverted pendulum swung up, the mathematical model is made linear on the inverted balance point and through the linear model the inverted pendulum is kept stable on the inverted point by linear quadratic optimal control. Simulation experiments show that the control methods are effective.

Key words: rotary inverted pendulum, swing-up control, stability control, LQR

1 引言

倒立摆系统是一个典型的多变量、非线性、强耦合和快速运动的自然不稳定系统,它是机器人、火箭飞行姿态控制等许多控制对象的最简单模型。人们以前主要研究的是直线轨道型的小车倒立摆系统的控制问题,而旋转轨道型(简称环形)倒立摆系统是一种典型的非线性系统,相比于直线型的小车倒立摆系统,环形倒立摆系统具有3个自由度,克服了行程限制,是校验各种控制理论的更为理想的试验设备。

倒立摆的研究包括倒立平衡点稳定控制和倒立摆摆起控制。对于稳定控制,选择了鲁棒性和瞬态性较好的线性二次型最优控制(LQR)算法。倒立摆的摆起控制是真正复杂非线性系统的控制问题,许多线性控制理论方法都不适用。文献用能量方法实现了直线型倒立摆的起摆,作者把这种能量方法进行了推广,实现了环形倒立摆的摆起控制。

2 环形一级倒立摆系统的数学模型

环形单级倒立摆模型由一个转动杆和一个摆杆组成,其坐标系如图1所示。图中 l_1 为转动杆杆长, l_2 为摆杆杆长; θ_1 和 θ_2 分别为转动杆相对于X轴的转角、摆杆与垂直向上方向的夹角,逆时针为正。这是一个二自由度系统,转动杆绕Z轴水平转动,以使摆杆进入工作状态。所谓工作状态,就是摆相对于不稳定平衡点为 $\theta_2=0$,摆杆的 θ_2 角保持在一定的范围内。在距摆杆摆动轴 O_1 距离为 l 处取一小段 dl ,这一小段的坐标为

$$x = l_1 \cos \theta_1 - l \sin \theta_2 \sin \theta_1, \quad y = l_1 \sin \theta_1 + l \sin \theta_2 \cos \theta_1, \quad z = l \cos \theta_2$$

令摆杆质量为 m_2 ,则这一小段的动能为

$$dT = \frac{1}{2} \frac{dl}{l_2} m_2 \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{dl}{2l_2} m_2 (\dot{\theta}_1^2 l_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l l_1 \cos \theta_1 + l^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_2 + l^2 \dot{\theta}_2^2)$$

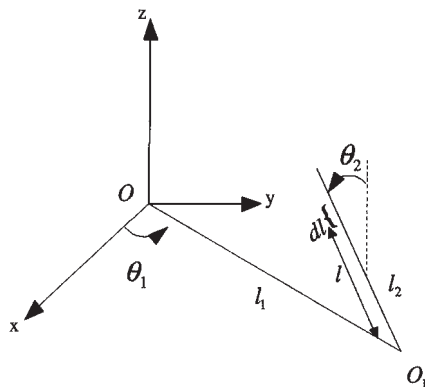


图1 环形一级倒立摆坐标系

摆杆的动能为:

$$T_2 = \int_0^{l_2} dT = \frac{1}{6} m_2 [(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2 + \dot{\theta}_2^2) l_2^2 + 3l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + 3l_1^2 \dot{\theta}_1^2]$$

转动杆只有转动,其动能为: $T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$

则系统总动能为: $T = T_1 + T_2$

以转动杆水平位置为0势能位置,则系统势能等于摆杆势

$$能为: V = \frac{1}{2} m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

拉格朗日算子 $L = T - V$, 系统广义坐标为 $q = \{\theta_1, \theta_2\}$, 在广义坐标 θ_2 上无外力作用。令 F_i 为广义力, 由拉格朗日方程: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \quad (i=1,2)$

可得系统非线性数学模型为:

$$M\ddot{q} + N = F_q \quad (1)$$

$$\text{其中: } M = \begin{bmatrix} (J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \sin^2 \theta_2) & 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\ 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & J_2 + m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + 2m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ -m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad F_q = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

王东亮:讲师 硕士研究生

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60504005)

J_1 为转动杆绕 Z 轴转动惯量: $J_1 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2$; J_2 为摆杆绕转动轴心的转动惯量: $J_2 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2$ 。各参数具体数值如表 1 所示。

表 1 参数物理意义及数值

参数	物理意义	数值
m_1	转动杆质量	0.2 kg
m_2	摆杆质量	0.1 kg
l_1	转动杆长度	2 m
l_2	摆杆长度	1.5 m
g	重力加速度	9.8 m/s ²

3 基于能量的环形倒立摆起摆控制

倒立摆的摆起控制涉及到力学模型、参数识别和复杂控制律计算等问题,是真正复杂非线性系统的控制问题。在此我们通过控制摆的能量来直接实现起摆控制。使用能量控制的基本思想是先找出施加到转动杆上的控制力矩与倒立摆系统能量之间的关系,通过外加控制力矩来改变倒立摆系统能量,直至摆杆实现倒立。

以摆杆摆动轴 O_1 为坐标原点建立坐标系,定义摆杆在倒立位置时系统能量为 0,则在非惯性系下倒立摆系统的能量为:

$$E = \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 (\cos \theta_2 - 1)$$

$$\text{其导数 } \frac{dE}{dt} = J_2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

$$\text{由于 } J_2 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \sin \theta_2 + m_2 u_2 l_2 \cos \theta_2 = 0$$

$$\text{则 } \frac{dE}{dt} = (J_2 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2 = -m_2 u_2 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

应用李亚普诺夫方法,令李亚普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2} (E - E_0)^2 \text{ 则 } \frac{dV}{dt} = (E - E_0) \frac{dE}{dt}$$

$$\text{令 } u_2 = k(E - E_0) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

$$\text{则 } \frac{dV}{dt} = -k m_2 l_2 (E - E_0)^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 \leq 0$$

由于摆杆不可能一直在水平位置,即 $\dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2$ 不会一直为 0,因此函数 V 会逐渐较小,直到 $E=E_0$,此时摆杆摆起,实现了倒立。因此只要找到适当控制律(见第 5 部分),通过控制摆的能量,可以实现摆杆摆起。

4 采用 LQR 控制器的环形倒立摆稳定控制

在起摆成功后,采用线性二次型最优控制算法(LQR)来控制摆杆一直稳定在竖直倒立状态。为此,我们把系统非线性数学模型(1)在平衡点 $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = (0, 0, 0, 0)$ 处进行线性化。我们令 $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$,取状态变量为 $X = [\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$,输出量为 $Y = [\theta_1, \theta_2]^T$,可得系统线性化状态空间方程为:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ Y &= CX + Du \end{aligned} \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2m_2^2 g l_1^2}{4m_1^2 l_1^2 l_2^2 - J_1 J_2 - J_2 m_1 l_1^2 - J_1 m_2 l_2^2 - m_1 m_2 l_1^2 l_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-m_2 g l_2 (J_1 + m_1 l_1^2)}{J_1 J_2 + J_2 m_1 l_1^2 + J_1 m_2 l_2^2 + m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 - 4m_2^2 l_1^2 l_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J_2 + m_2 l_2^2}{J_1 J_2 + J_2 m_1 l_1^2 + J_1 m_2 l_2^2 + m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 - 4m_2^2 l_1^2 l_2^2} \\ \frac{2m_2 l_1 l_2}{4m_1^2 l_1^2 l_2^2 - J_1 J_2 - J_2 m_1 l_1^2 - J_1 m_2 l_2^2 - m_1 m_2 l_1^2 l_2^2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J_2 + m_2 l_2^2}{J_1 J_2 + J_2 m_1 l_1^2 + J_1 m_2 l_2^2 + m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 - 4m_2^2 l_1^2 l_2^2} \\ \frac{2m_2 l_1 l_2}{4m_1^2 l_1^2 l_2^2 - J_1 J_2 - J_2 m_1 l_1^2 - J_1 m_2 l_2^2 - m_1 m_2 l_1^2 l_2^2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系统的特征根为 Eigenvalue(A)=[0 0 6.2610 -6.2610]^T,显然开环系统不稳定。经验证,开环倒摆系统既可控又可观。用最优化线性二次型调节器(LQR)在系统误差和控制力度之间权衡,来确定反馈系数 K,构成闭环控制系统。为此,选择:

$$\text{性能指标矩阵: } R=1; \text{状态权矩阵: } Q = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到反馈系数为: $K = \text{lqr}(A, B, Q, R) = [70.7107 \quad 4.0239 \quad 13.4693 \quad -1.2346]$ 。

5 环形倒立摆的摆起及稳定控制仿真结果

在不影响李亚普诺夫函数递减的情况下对控制律进行调整。调整原则是控制力矩尽可能大,以使摆杆在最短时间内实现摆起,取:

$$u = 100 \text{sign}(\dot{\theta}_2 \cos \theta_2)(E - E_0) \text{ 其中 } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

使用仿真软件 MATLAB 6.5 进行仿真,得到仿真结果如图 2、图 3 所示。

6 结束语

本文通过拉格朗日方程建立了环形一级倒立摆系统的非线性数学模型,然后用能量方法直接对非线性倒立摆进行摆起控制,摆起成功后对倒立摆的非线性数学模型进行了线性化,并用线性二次型最优控制(LQR)算法对摆起后倒立摆进行稳定控制,仿真结果显示环形倒立摆的摆起和稳定控制都是有效的。

本文作者创新点:用能量方法实现了环形倒立摆的摆起控制。

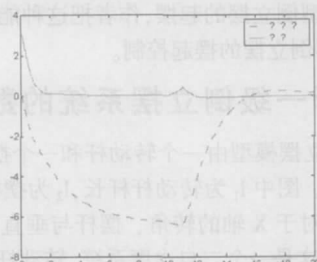


图 2 环形倒立摆的转角曲线图

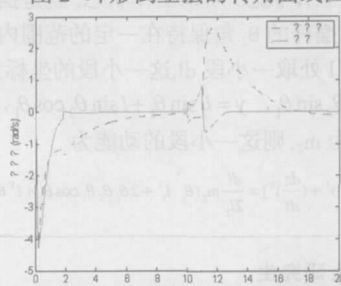


图 3 环形倒立摆的角速度曲线图 (下转第 14 页)

3.2 WinCC与S7-200的通讯

一般来说,可以通过WinCC、触摸屏、自由口通讯三种方式来监控S7-200。用触摸屏进行监控,可靠性高,不需要考虑通讯问题,设计容易,但是价格高,扩展性差;用自由口通讯,优点就是可以用任何编程工具来实现,投资低,缺点是可靠性低,而且需要占有PLC内部资源。对于该工厂而言,一方面要考虑经济因素,另一方面由于扩大生产的需要,扩展性很重要,因此本次项目选用WinCC作为监控软件的界面开发平台。

由于SIMATIC WinCC是采用了最新的32位技术的过程监控软件,具有良好的开放性和灵活性,所以无论是单用户系统,还是冗余多服务器/多用户系统,WinCC均是较好的选择。但由于西门子公司S7-200系列PLC比监控组态软件WinCC推出晚,WinCC中没有集成S7-200系列PLC的通信驱动程序,因此需通过Profibus、OPC与S7-200通讯。采用OPC方式简单,只需要有一个OPC Server,这可以通过S7-200 PC Access软件来实现;而采用Profibus方式,需要一个Profibus DP模块,一个通讯模块如CP5412,还需要Profibus电缆,整体成本远高于采用OPC方式,因此本次改造采用基于OPC的WinCC监控方式。

3.3 参数下载功能

该工厂需要生产不同品种的粘胶,每种粘胶的生产工艺不一样,并且每种粘胶的生产过程由若干个化学反应过程组成,这些化学反应需要的环境温度也各不相同。若把这些具体的温度值放在程序里,当生产工艺改变时,就必须修改程序,这就要求工厂的操作人员有较高的程序设计能力,同时系统的可维护性也低。另一方面,对于不同的生产工艺,控制器的PID参数不同,基于上面所述的原因,PID参数设定也应该从程序中分离。

参数下载是监控软件的一个重要功能,在下载过程中,WinCC与PLC通讯可能不正常,造成下载失败,这就需要有一个纠错过程。解决的方法是,在监控界面里用户输入的只是WinCC中的一些内部变量,同时设计一些表格和曲线,它们用来显示OPC的客户端的变量(也即WinCC过程变量),当相对应的数据一致时,表示参数下载成功,一次典型失败下载如图2所示。

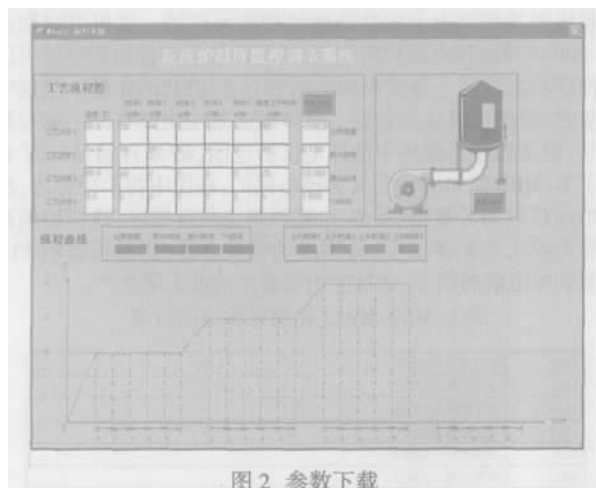


图2 参数下载

这里用户输入了3个温度保持阶段以及PID参数,但坐标轴上没有显示对应的温度,这就提示用户PLC和上位机通讯出了故障。

3.4 变量记录

WinCC的变量记录编辑器允许用户为其过程数据生成用户档案库,过程数据和档案库之间的联系是过程变量,通过变量记录,用户可以分析反应炉的数学模型,可以查看PID参数是否设置合理,这项功能对于作者所控制的反应炉而言尤为重要。粘胶生产所用的反应炉是一个大滞后的系统,对于大滞后的系统消除这种滞后影响非常重要,因此必须弄清它的惯性常数,借助于WinCC对设定温度,反应炉实际温度,水的流量这三个变量的归档数据,可以大大方便作者对反应炉的分析。另外WinCC里有种控件叫做在线趋势控件,利用该控件可以在终端机PC上实时地显示上述三个变量的曲线,对于参数调整很有帮助。记录变量可以通过WinCC的变量记录编辑器来完成。

4 结论

本文作者创新点:监控系统的参数下载的故障出错提示功能。工厂的操作人员对参数下载功能很满意,避免了他们的误操作。

本文实现了基于S7-200的粘胶生产自动化监控系统,实际生产表明控制系统可以将反应炉的温度控制在1,作为安全设计的开关量电磁阀打开次数很少,控制模拟量电磁阀的电流信号波动不大,整个系统的控制性能令人满意。

参考文献:

[1]西门子(中国)有限公司自动化与驱动集团.深入浅出西门子S7-200PLC[M].北京航空航天大学出版社,2003.30~36

[2]周晓,姜建芳,苏少钰,陈讯. S7-200系列PLC与监控计算机通讯实现的研究[J]微计算机信息,2004,20(1):5~7

作者简介:何顶新,华中科技大学博士,副教授,主要研究方向为:计算机控制技术、系统集成技术等. E-mail:hedingxin@163.com.

Biography:He,Dingxin, doctor and vice professor of HuaZhong University of Science and Technology. His research interest includes computer control technique, system integration technique. E-mail:hedingxin@163.com.

(430074 湖北武汉 华中科技大学控制科学与工程系)何顶新 万学维 徐金榜 王维

通讯地址:(430074 湖北武汉 华中科技大学控制科学与工程系)何顶新

(收稿日期:2006.10.12)(修稿日期:2006.11.9)

(上接第2页)

参考文献:

[1]K.J. Astrom and K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control[J]. Automatica, 2000,2, 36(2).

[2]黄丹等. 基于LQR最优调节器的倒立摆控制系统[J]微计算机信息, 2004-20,2:37-38

作者简介:王东亮(1977-),男,河南人,讲师,硕士研究生,主要研究领域为智能控制和非线性控制,E-mail:wdbright@163.com.

Biography: Dongliang Wang, born in 1977, male, lecturer, graduate, smart control and nonlinear control, E-mail:wdbright@163.com.

(100084 北京 清华大学自动化系)王东亮 刘斌 张曾科

通讯地址:(100084 北京 清华大学 1#351)王东亮

(收稿日期:2006.10.12)(修稿日期:2006.11.9)