Introducción curvas algebraicas

1 Las 27 rectas de una superficie cúbica

1.1 Superficie cúbica lisa

Definición. Recordamos que si K es un cuerpo y n $\in \mathbb{N}$, decimos que S $\subset \mathbb{P}^n_K$ es una hipersuperficie de $\mathbb{P}^n_K$ si existen polinomios homogéneos no constantes F$(x_0, x_1, ..., x_n) \in K[x_0, x_1, ..., x_n]$ tales que

$$H = V(F) = \{p \in P^n(K) | F(p) = 0\}$$

Además,

(1)Si el polinomio F cumple que

$$\nabla F(p) := \Big(\frac{\partial F}{\partial x_0}(p), ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)\Big) \neq (0, ..., 0), \forall p \in H \tag{1.1}$$

Decimos que S es lisa
(2) Si el grado de F es 3, decimos que H es una superficie cúbica
(3)Si además el polinomio F satisface la condición (1.1) y es de grado 3, decimos que S es una **superficie cúbica lisa**
El ejemplo más sencillo de superficie cúbica lisa lo encontramos en la cúbica de Fermat

1.2 Las 27 rectas de la cúbica de Fermat

La cúbica de Fermat es la superficie $S \subset \mathbb{P}^3$ dada por la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$$

El polinomio que la define es

$$F(x, y, z, t) = x^3 + y^3 + z^3 + t^3$$

cuyo gradiente

$$\nabla F = (3x, 3y, 3z, 3t)$$

Como podemos ver, no hay ningún punto en S en el ∇F se anule, por lo que la cúbica de Fermat es una superficie cúbica lisa. Ahora vamos a encontrar las 27 rectas: Veamos que una recta L en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ está dada por dos hiperplanos, que son hipersuperficies de grado 1. Elegimos una recta L en $\mathbb{P}^3$, salvo cambio de coordenadas, estos dos hiperplanos vienen dados por

$$x = az + bt, y = cz + dt$$

Por tanto, la recta L está contenida en la cúbica de Fermat si y sólo si

$$(az + bt)^3 + (cz + dt)^3 + z^3 + t^3 = 0$$

como polinomio en $\mathbb{C}[z, t]$. Desarrollando esta expresión,

$$a^3z^3 + b^3t^3 + 3azb^2t^2 + 3a^2z^2bt$$

$$+c^3z^3 + d^3t^3 + 3czd^2t^2 + 3c^2z^2dt$$

$$+z^3 + t^3 = 0$$

Deben satisfacerse las siguientes cuatro ecuaciones:

$(1)a^3 + c^3 + 1 = 0$

$(2)b^3 + d^3 + 1 = 0$

$(3)ab^2 + cd^2 = 0$

$(4)a^2b + c^2d = 0$

Si suponemos que los a,b,c,d son todos distintos de cero, entonces haciendo $(3)^2/(4)$ obtenemos $b^3 = -d^3$ lo que contradice (2). Por tanto, al menos uno de estos a,b,c,d debe ser no nulo.
Salvo cambio de coordenadas, podemos asumir que a=0 y así obtenemos que $b^3 = c^3 = -1$ y a=d=0. El par (b,c) será de la forma (b,c)=$(-w^j, -w^k)$ para 0≤ j, k≤ 2 donde w es la raíz cúbica primitiva de la unidad, es decir, w=$e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Las rectas son producto de todas las posibles permutaciones de las coordenadas:

$$x + tw^k = y + zw^j =, 0 \leq j, k \leq 2$$
$$x + zw^k = t + yw^j =, 0 \leq j, k \leq 2$$
$$x + yw^k = t + zw^j =, 0 \leq j, k \leq 2$$

Cada ecuación nos da un total de 9 rectas introduciendo los pares (j,k)=(0,0),(1,0),(2,0), (0,1),(1,1),(2,1), (0,2),(1,2),(2,2) en cada una de ellas. Tenemos 27 rectas en total, 3 reales y 24 complejas.

2 Las 27 rectas de una superficie cúbica 2?

2.1 Intersección de la superficie cúbica con un plano

Proposición. (a)Existen como mucho 3 rectas de S que pasan por cualquier punto $P \in$ S; si hay 2 o 3 deben ser coplanarias.

(b)Cada plano $\Pi \subset \mathbb{P}^3$ interseca a S en alguna de las siguientes formas:

- una cúbica irreducible
- una cónica y una recta
- 3 rectas distintas

Demostración. (a)Si L⊂ S entonces L=$T_pL \subset T_pS$ de forma que todas las rectas de S que pasan por P están contenidas en el plano T_pS; existen como mucho 3 por (b)
(b) Debemos probar que una recta múltiple es imposible: si $\Pi : (T = 0)$ y $L : (Z = 0) \subset \Pi$ entonces decir que L es una recta múltiple de $S \cap \Pi$ equivale a decir que f es de la forma

$$f = Z^2A(X, Y, Z, T) + TB(X, Y, Z, T),$$

con A una forma lineal, B una forma cuadrática. Entonces S:(f=0) es singular en el punto donde Z=T=B=0; lo que es distinto del vacío, ya que es el conjunto de raíces de B en la recta L:(Z=T=0)
Proposición. Existe al menos una recta L en S.
Definiciones varias previas a la demo. No se si va a ir así o luego cuando vaya saliendo cada concepto...

Definición 1: plano tangente Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y $H \subset P_k^n$ una hipersuperficie lisa. Sea F un polinomio homogéneo tal que H = Z(F) y que satisface (1.1). Llamamos plano tangente de H en P $\in H$ a

$$T_pH := \Big\{(x_0 : ... : x_n) \in P_k^n / x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) + ... + x_n \frac{\partial F}{\partial x_n}(p) = 0\Big\}$$

Proposición 1.1.6 Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y $H \subset P_k^n$ una superficie lisa. Si l es una recta contenida en H, entonces $l \subset T_pH$ para todo $p \in l$.
*Demostración.*https://addi.ehu.es/bitstream/handle/10810/30499/TFG$_{d}e_{l}a_{B}odega_{D}omingo-Aldama_{J}avier.pdf?sequen$
$5isAllowed = y$**Teorema 1.1.7**$SeaKuncuerpoalgebraicamentecerradoyH \subset P_k^n$ una cuádrica o una cúbica lisa, con $n > 1$. Entonces H es una variedad proyectiva.
*Demostración.*https://addi.ehu.es/bitstream/handle/10810/30499/TFG$_{d}e_{l}a_{B}odega_{D}omingo-Aldama_{J}avier.pdf?sequen$
$5isAllowed = y$

Hay varias pruebas para esto. Un argumento estándar es mediante dimensiones: las rectas de $\mathbb{P}^3$ están parametrizadas por una variedad 4-dimensional, y para que una recta esté en S, impone 4 condiciones sobre la recta (ya que la restricción de f a la recta L es una forma cúbica, cuyos 4 coeficientes deben anularse).

Paso 1: Construcción preliminar

Lema 1 Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado y n> 1, cada par de hipersuperficies en $\mathbb{P}_K^n$ tienen una intersección no vacía.
Demostración. Lo probamos por inducción sobre n. Si n =2, el resultado es una consecuencia del teorema de Bézout
Sea nn> 2 y supongamos que se cumple para n-1. Sean $H_1, H_2 \subset P_K^n$ dos hipersuperficies. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que son variedades proyectivas, ya que de lo contrario solo sería necesario probar la afirmación para sus componentes irreducibles, las cuales también son hipersuperficies en P_K^n. Tomamos un hiperplano $\Pi \subset P_K^n$. Como H_i es irreducible para cada i=1,2, sabemos que Π no está contenido en H_i. Además $H_i \cap \Pi \neq \emptyset$. Por tanto, $H_1 \cap \Pi$ y $H_2 \cap \Pi$ son hipersuperficies en P_K^{n-1}. Como Π es proyectivamente equivalente aP_K^{n-1}, por la hipótesis de inducción tenemos que $H_1 \cap \Pi$ y $H_2 \cap \Pi$ tienen intersección no vacía.

Demostración. https://math.stackexchange.com/questions/2268545/intersection-of-a-hypersurface-v-subset-mathbbpn-with-a-tangent-hyperplan

Para cualquier punto P $\in$ S, la intersección de S con el plano tangente T_pS es una curva cúbica plana (lema ¿no se?, hay lema de esto?) C=$S \cap T_pS$ que es singular en P (lema2). Asumimos que C es irreducible, de lo contrario P está en una recta de S; entonces C es una cúbica nodal o cuspidal y puedo elegir las coordandas (X,Y,Z,T) de $\mathbb{P}^3$ de manera que T_pS:(T=0), P=(0,0,1,0) y

$$C : (XYZ = X^3 + Y^3) o (X^2Z = Y^3)$$

Que C sea nodal o cuspidal para un P $\in$ S determinado depende de la matriz de segundas derivadas parciales de f en P (matriz Hessiana) Vamos a ver esto: Consideramos la superficie H:=$Z(H_F)$, por el lema 1, $S \cap H \neq \emptyset$, así que existe un punto p $\in S$ tal que $H_F(p) = 0$. Como S es irreducible, $T_pS \not\subset S$ y $T_pS \cap S$ es necesariamente una cúbica plana. Suponemos además que es irreducbile. Asumimos que $T_pS = Z(t)$ y P=(0,0,1,0) y $H_F(p) = 0$. Por la definición de plano tangente y superficie lisa tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p) = \frac{\partial F}{\partial y}(p) = \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0 \neq \frac{\partial F}{\partial t}(p).$$

Dividiendo a F por un escalar si fuera necesario, esto fuerza al polinomio a ser de la forma

$$F(x, y, z, t) = z^2t + zQ(x, y, t) + G(x, y, t),$$

donde Q(x,y,t), G(x,y,t) $\in \mathbb{C}[x, y, t]$ son polinomios homogéneos de grado 2 y 3 respectivamente.
A su vez, Q es de la forma

$$Q(x, y, t) = \sum_{i,j=0,1,3} a_{ij}x_ix_j,$$

con $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i,j.
Tenemos que

$$0 = H_F(p) = det \begin{vmatrix} 2a_{00} & 2a_{01} & 0 & 2a_{03} \\ 2a_{10} & 2a_{11} & 0 & 2a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2a_{30} & 2a_{31} & 2 & 2a_{33} \end{vmatrix} = 16det \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}$$

y por tanto,

$$det \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, Q(x,y,0) es el cuadrado de un polinomio lineal homogéneo o el polinomio cero. Por contradicción, si Q(x,y,0) =0, entonces F(x,y,z,0)=Q(x,y,0) y la cúbica sería la unión de como mucho tres rectas, lo que contradice que la curva sea irreducible.
Por tanto, $Q(x, y, 0) = L(x, y)^2$ para algún polinomio lineal $L(x, y)$ en $\mathbb{C}[x, y]$ y podemos asumir que $L(x, y)$=x. Entonces,

$$F(x, y, z, 0) = x^2 z + G(x, y, 0)$$

y escribimos

$$G(x, y, 0) = ax^3 + bx^2 y + cxy +^2 + dy^3.$$

Como la cúbica es irreducible entonces d$\neq$ 0. Tras un cambio de coordenadas

$$y = \widetilde{y} - \frac{c}{3d} x,$$

F resulta

$$F(x, y, z, 0) = x^2 z + a' x^3 + b' x^2 \widetilde{y} + d\widetilde{y}^3$$

para a',b' $\in \mathbb{C}$. Tras un segundo cambio de coordenadas

$$z = -a'x - b'\widetilde{y} - d\widetilde{z}$$

obtenemos finalmente

$$F(x, y, z, 0) = -d(x^2 \widetilde{z} - \widetilde{y}^3)$$

que es equivalente a la cúbica cuspidal

Por simplicidad, vamos a probarlo en el caso de que sea una curva cúbica cuspidal. Por tanto asumimos que f es de la forma

$$f = X^2 Z - Y^3 + gT,$$

donde $g = g_2(X, Y, Z, T)$ es una forma cuadrática; g(0,0,1,0)$\neq$ 0 por la no singularidad de S en P, así que podemos asumir que g(0,0,1,0)=1

Paso 2: Problema principal
Consideramos el punto variable $P_\alpha = (1, \alpha, \alpha^3, 0)$ de C $\subset S$. Cualquier recta de $\mathbb{P}^3$ que pase por P_α interseca con el plano complementario Π:(X=0) en un punto Q=(0,Y,Z,T). Escribimos las ecuaciones para que la recta $P_\alpha Q$ esté contenida en S en términos de α y Q; desarrollando f($\lambda P_\alpha + \mu Q$) en potencias de λ y μ llegamos a

$$\overline{P_\alpha Q} \subset S \Longleftrightarrow A(Y, Z, T) = B(Y, Z, T) = C(Y, Z, T) = 0,$$

donde $A(Y, Z, T) = F_1(P_\alpha, Q)$, $B(Y, Z, T) = F_1(Q, P_\alpha)$ y $C(Y, Z, T) = F(Q)$ (son polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[\alpha][Y, Z, T]$). Necesitamos probar que existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que A(Y,Z,T), B(Y,Z,T) y C(Y,Z,T) tienen una raíz común en $\mathbb{P}^2$
Proposición. Existe un polinomio 'resultante' $R_{27}(\alpha)$, que es mónico de grado 27 en α, tal que

$$R(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow A = B = C = 0 \text{tienen un cero común } (\eta : \varsigma : \tau) \text{en} \mathbb{P}^2$$

Este enunciado prueba que existe al menos una recta L en S, ya que implica que para cada raíz α de R, existe un punto Q=$(0 : \eta : \varsigma : \tau)$ en Π para el que la recta $P_\alpha Q$ está contenida en S.

Paso 3: Forma polar
Definición. La polar de f es la forma en dos conjuntos (X,Y,Z,T) y (X',Y',Z',T') dada por

$$f_1(X,Y,Z,T;X',Y',Z',T') = \frac{\partial f}{\partial X}X' + \frac{\partial f}{\partial Y}Y' + \frac{\partial f}{\partial Z}Z' + \frac{\partial f}{\partial T}T'$$

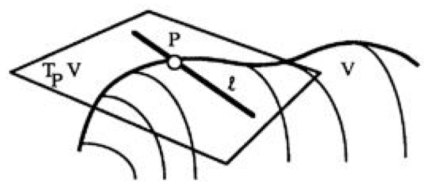
Definición. Sea V $\subset \mathbb{A}^n$ una subvariedad, con P=$(a_1,...,a_n)$ $\in$ V. Para cualquier f $\in k[x_0,...,x_n]$ tenemos

$$f_P^{(1)} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(P)(X_i - a_i)$$

como el polinomio lineal afín.
El espacio tangente a V en P lo definimos como

$$T_pV = \bigcap (f_P^{(1)} = 0) \subset \mathbb{A}^n$$

para toda f $\in I(V)$.



Por la definición de espacio tangente, tenemos que para P=(X,Y,Z,T) $\in$ S y P $\neq Q = (X',Y',Z',T') \in \mathbb{P}^3$,

$$f_1(P;Q) = 0 \Longleftrightarrow \text{la recta PQ es tangente a S en P.}$$

Así se cumple

$$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda^3 f(P) + \lambda^2 \mu f_1(P;Q) + \lambda \mu^2 f_1(Q;P) + \mu^3 f(Q),$$

para P $\neq Q \in \mathbb{P}^3$, las siguientes 4 condiciones

$$f(P) = f_1(P;Q) = f_1(Q;P) = f(Q)$$

son las ecuaciones para la recta L =PQ contenida en S:(f=0). Geométricamente, esto quiere decir que esta recta L es tangente a S tanto en P como en Q, de modo que f restringido a L tiene raíces dobles en ambos puntos y entonces L $\subset S$

La polar de$f = X^2Z - Y^3 + gT$ es

$$f_1 = 2XZX' - 3Y^2Y' + X^2Z' + g(X,Y,Z,T)T' + Tg_1$$

donde $g_1 = g_1(X,Y,Z,T;X',Y',Z',T')$ es la forma polar g definida de la misma manera que antes; como g_1 es cuadrática, g_1 es una forma simétrica bilineal tal que $g_1(P,P) = 2g(P)$.
Sustituyendo $P_\alpha = (1,\alpha,\alpha^3,0)$ y Q=(0,Y,Z,T) obtenemos las ecuaciones de $P_\alpha Q \subset S$ y como A=B=C=0, donde

$$\begin{aligned} A &= Z - 3\alpha^2 Y + g(1,\alpha,\alpha^3,0)T, \\ B &= -3\alpha^2 + g_1(1,\alpha,\alpha^3,0;0,Y,Z,T)T, \\ C &= -Y^3 + g(0,Y,Z,T)T. \end{aligned}$$

Paso 4: Último cálculo Ahora eliminamos Y,Z,T de las 3 ecuaciones anteriores, nos fijamos en las potencias de α más grandes. Como g(0,0,1,0)=1, tenemos que

$$g(1,\alpha,\alpha^3,0) = \alpha^6 + ... = a^{(6)}$$

, donde ... representan los términos de un grado inferior de α, así $a^{(6)}$ es mónico de grado 6. Entonces como A=0, obtenemos Z como una forma lineal dependiente de Y y T

$$Z = 3\alpha^2 Y - a^{(6)} T$$

Sustituyendo en B y usando la bilinealidad de g_1 obtenemos

$$B = -3\alpha Y^2 + g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, Y, 3\alpha^2 Y - a^{(6)}T, T)T = b_0 Y^2 + b_1 YT + b_2 T^2,$$

donde

$$b_0 = 3\alpha, \qquad b_1 = g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, 1, 3\alpha^2, 0) = 6\alpha^5 + ...,$$
$$b_2 = g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, -a(6), 1) = -2\alpha^9 + ...$$

De forma similar sustituyendo Z en C, y desarrollando la forma cuadrática g obtenemos

$$C = -Y^3 + g(0, Y, 3\alpha^2 Y a(6)T, T)T = c_0 Y^3 + c_1 Y^2 T + c_2 Y T^2 + c_3 T_3,$$

donde

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = g(0, 1, 3\alpha^2, 0) = 9\alpha^4 + ...,$$
$$c_2 = g_1(0, 1, 3\alpha^2, 0; 0, 0, a(6), 1) = 6\alpha^8 + ...,$$
$$c_3 = g(0, 0, a(6), 1) = \alpha 12 + ...$$

Lema Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, U una forma cuadrática y V una forma cúbica tales que:

$$q(U, V) = a_0 U^2 + a_1 UV + a_2 V^2,$$
$$c(U, V) = b_0 U^3 + b_1 U^2 V + b_2 UV^2 + b_3 V^3.$$

Decimos que q y c tienen un cero común $(\varsigma : \tau) \in \mathbb{P}^1$ si y sólo si

$$det = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

En general tenemos, este resultado:

Definición Sean r,s $\in \mathbb{C}[u, v]$ dos polinomios homogéneos dados por las siguientes ecuaciones:

$$r(u, v) = a_0 u^2 + a_1 uv + a_2 v^2,$$

$$s(u, v) = b_0 u^3 + b_1 u^2 v + b_2 uv^2 + b_3 v^3,$$

el resultante de r y s se define por

$$R(r, s) := det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Proposición Sean r y s como arriba. Entonces, tienen una raíz común en $\mathbb{P}^1$ si y sólo si R(r,s)=0.

Demostración Consideramos el espacio vectorial complejo V de los polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[u, v]$ de grado 4. Este espacio tiene diemnsión 5 y base canónica $u^4, u^3 v, u^2 v^2, uv^3, v^4$. En esta base, las coordenadas de los polinomios $u^2 r, uvr, v^2 r, us, vs$ corresponden respectivamente con las filas de

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, estos polinomios son linealmente dependientes si y sólo si R(r, s) = 0.
Si r y s tienen una raíz común, también la tienen u^2r, uvr, v^2r, us, vs. Por tanto, no pueden cubrir todo V y son linealmente dependientes. De forma inversa, si u^2r, uvr, v^2r, us, vs son linealmente dependientes, existen l,q $\in \mathbb{C}[u, v]$ polinomios homogéneos cuadráticos y lineales respectivamente, ambos no nulos, tales que qr = ls. En particular, qr y ls tienen las mismas raíces en $\mathbb{P}^1$, por lo que necesariamente r y s tienen una raíz común.
Ahora podemos decir que B' y C' tienen un cero común $(\varsigma : \tau)$ si y sólo si

$$det = \begin{vmatrix} -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 & & \\ & -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 & \\ & & -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 \\ -1 & 9\alpha^4 & -6\alpha^8 & \alpha^12 & \\ & -1 & 9\alpha^4 & -6\alpha^8 & \alpha^12 \end{vmatrix} = \alpha^{27} det = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 2 & & \\ & -3 & 6 & 2 & \\ & & -3 & 6 & 2 \\ -1 & 9 & -6 & 1 & \\ & -1 & 9 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^{27}$$

COrolario Marina Si asumimos que existe una recta, y L$\subset H$. Entonces S$\cap H$ debe ser una curva cúbica plana. *Demostración.* Tomamos coordenadas (X:Y:Z:T) de forma que H sea el plano X=0. Entonces la ecuación de la superficie cúbica viene dada por F(X,Y,Z,T)=0, donde F es un polinomio homogéneo de grado tres. Si X divide al polinomio, entonces la superficie no es irreducible, en contra de las hipótesis con las que trabajamos. Por tanto, la intersección de H con la cúbica tiene ecuación F(0,Y,Z,T)=0 y como X no divide a F(X,Y,Z,T), F(0,Y,Z,T) es un polinomio no nulo, homogéneo de grado tres en las variables Y,Z,T, es decir, la ecuación de una curva cúbica en el plano H.
Lema 3 La intersección de una hipersuperficie V $\subset \mathbb{A}^n$ con el hiperplano tangente T_pV es singular en P.