

Vorlesungsmitschrift (*kein* offizielles Skript)

# Funktionalanalysis

Prof. Dr. Harald Garcke

Version vom 4. April 2014

Gesetzt in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X von Johannes Prem

# Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?	1
2	Grundstrukturen der Funktionalanalysis	4
3	Lineare Operatoren	15
4	Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen	20
5	Bairescher Kategoriensatz und seine Konsequenzen	40
6	Hilberträume	53
7	Schwache Konvergenz	67
8	Spektrum für kompakte Operatoren	81
9	Spektralsatz für kompakte normale Operatoren	93
10	$L^p$ -Räume	99
11	Sobolev-Räume und schwache Form von Randwertproblemen in einer Dimension	117



# 1 Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?

Zum Beispiel von der *Analysis auf Banachräumen* (vollständigen normierten Vektorräumen)

**1.1.** Auf  $\mathbb{R}^n$  definiere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_2 := |x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

**1.2** (Funktionen auf kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ ).

Zum Beispiel:  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, z. B.  $K = [0, 1]$ .

$$C^0(K) := \{f \mid f: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird Banachraum mit der Norm:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty$$

**1.3** (Operatoren auf  $C^0([0, 1])$ ).

Definiere

$$L(C^0([0, 1]), C^0([0, 1])) := \{T: C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]) \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

Beispiele:

$$(Tf)(x) := g(x) f(x) \quad \text{wobei } g \in C^0([0, 1])$$

$$(Tf)(x) := \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) \quad \text{wobei } 0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$$

$$L_i: \text{Lagrange-Basis-Fkt.: } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y) \, dy \quad \text{wobei } K \in C^0([0, 1]^2)$$

Bemerkung:  $L(C^0([0, 1]), C^0([0, 1]))$  wird zu einem Banachraum mit der Operatornorm

$$\|T\|_{L(C^0, C^0)} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{C^0}}{\|f\|_{C^0}}$$

**1.4.** Welche Besonderheiten ergeben sich in unendlich-dimensionalen Räumen?

- (1) Problem in  $\infty$ -dimensionalen Vektorräumen: Wenig sinnvolle Aussagen ohne Topologie möglich
- (2) Für  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear gilt:

$$T \text{ surjektiv} \iff T \text{ injektiv}$$

Im  $\infty$ -dim. ist dies i. A. falsch.

Beispiel:

$$c_* := \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}, \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall \ell > \bar{k}: x_\ell = 0\}$$

$c_*$  modelliert „Folgen, die irgendwann abbrechen“. Außerdem enthält  $c_*$  den  $\mathbb{R}^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  beliebig groß.

Definiere die sog. *Shift-Abbildung* wie folgt:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Dann ist  $T$  injektiv, aber nicht surjektiv.

- (3) Grundproblem der linearen Algebra: Finde Normalformen für lineare Abbildungen.

Ziel: Verallgemeinerung auf  $\infty$ -dim. Räume.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Diagonalisierbarkeit} \\ \text{symmetrischer Matrizen} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spektralsatz für} \\ \text{kompakte, normale Operatoren} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Jordansche} \\ \text{Normalform} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spektralsatz für} \\ \text{kompakte Operatoren} \end{array} \right.$$

- (4) Kompaktheit

In  $\infty$ -dim. Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel *nicht* kompakt.

Beispiel  $c_*$ : Nutze die Norm

$$\|x\|_{c_*} := \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

und die Einheitsvektoren  $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  (wobei die 1 an der  $i$ -ten Stelle steht). Dann gilt:

$$\|e_i\|_{c_*} = 1 \quad \text{und} \quad \|e_i - e_k\|_{c_*} = 1 \text{ für } i \neq k$$

Also hat  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  *keine* konvergente Teilfolge, woraus folgt, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist.

- (5) Nicht alle Normen sind zueinander äquivalent.

Beispiel: Betrachte auf  $C^0([0, 1])$  die Normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}$$

Es gilt  $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty$ . Aber: Es gibt keine Konstante  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $f \in C^0([0, 1])$  gilt:  $\|f\|_\infty \leq c \|f\|_{L^2}$ . Betrachte dazu:



Es gilt:  $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1$ ,  $\|f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{\varepsilon}$ .

Außerdem gilt:

$(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  ist Banachraum

$(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2})$  ist normierter Vektorraum (aber nicht vollständig)

Funktionalanalysis lässt sich sinnvoll nur in vollständigen Räumen entwickeln. Deshalb werden wir nicht vollständige Räume vervollständigen (siehe 2.18).

## 2 Grundstrukturen der Funktionalanalysis

**2.1 (Topologie).** Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{T}$  ein System von Teilmengen. Dann heißt  $\mathcal{T}$  *Topologie (auf  $X$ )*, falls gilt:

$$(T1) \quad \emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$$

$$(T2) \quad \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$$

$$(T3) \quad T_1, T_2 \in \mathcal{T} \implies T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$$

Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt *Hausdorff-Raum*, falls er zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt:

$$(T4) \quad \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad \exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}: U_1 \cap U_2 = \emptyset \wedge x_i \in U_i$$

Mengen in  $\mathcal{T}$  heißen *offene Mengen*. Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Eine Menge  $W \subset X$  mit  $x \in W$  für die eine offene Menge  $U$  mit  $x \in U$  und  $U \subset W$  existiert, heißt *Umgebung von  $x$* .

Seien  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume, so heißt  $f: X \rightarrow Y$  *stetig*, falls die Urbilder offener Mengen stets offen sind. (Formal:  $\forall U' \in \mathcal{T}_Y: f^{-1}(U') \in \mathcal{T}_X$ )

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *stetig in  $x \in X$* , falls

$$f(x) \in V \in \mathcal{T}_Y \implies \exists U \in \mathcal{T}_X: x \in U \subset f^{-1}(V)$$

(d. h.  $f^{-1}(V)$  ist Umgebung von  $x$ ).

**2.2.** Ist  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , so heißt  $(X, \mathcal{T})$  *topologischer Vektorraum*, falls  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum ist und die Abbildungen

$$X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$\mathbb{K} \times X \rightarrow X, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

stetig sind. („Algebraische und topologische Struktur sind verträglich“)

**2.3 (Metrik).** Ein Tupel  $(X, d)$  heißt *metrischer Raum*, falls  $X$  eine Menge ist und  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  folgende Bedingungen für alle  $x, y, z \in X$  erfüllt:

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Konvergenz:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge, falls:

$$d(x_k, x_\ell) \rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty$$

$x$  heißt Grenzwert von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (Notation:  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  oder:  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ ), falls:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$(X, d)$  heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in  $X$  besitzt.

Abstand von Mengen  $A, B \subset X$ :

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Für  $A \subset X$  und  $x \in X$  definieren wir:  $\text{dist}(x, A) := \text{dist}(\{x\}, A)$ .

Für  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  sowie  $A \subset X$ ,  $x \in X$  definieren wir:

$$B_r(A) := \{x \in X \mid \text{dist}(x, A) < r\}$$

$$B_r(x) := B_r(\{x\})$$

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

Wir sagen  $A$  ist *beschränkt*, falls  $\text{diam}(A) < \infty$ .

**2.4** (Topologie von Metriken). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$ .

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \subset A\} \quad \text{ist das Innere von } A.$$

$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{ist der Abschluss von } A.$$

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{ist der Rand von } A.$$

Wir sagen, dass  $A$  offen ist, falls  $A^\circ = A$  gilt, und dass  $A$  abgeschlossen ist, falls  $\overline{A} = A$  gilt.

Durch die Definition  $\mathcal{T} := \{A \subset X \mid A \text{ offen}\}$  wird  $(X, \mathcal{T})$  zu einem hausdorffschen topologischen Raum.

**2.5** (Fréchet-Metrik). Sei  $X$  ein Vektorraum. Eine Abbildung  $d: X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Fréchet-Metrik*, falls für alle  $x, y \in X$  gilt:

$$(F1) \quad d(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x) = 0 \iff x = 0$$

$$(F2) \quad d(-x) = d(x)$$

$$(F3) \quad d(x + y) \leq d(x) + d(y)$$



Dann ist  $(x, y) \mapsto d(x - y)$  eine Metrik auf  $X$ .

Beispiel: Fréchet-Metriken auf  $\mathbb{R}$ :

$$x \mapsto |x|^\alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha \leq 1$$

$$x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x|}$$

**2.6 (Norm).**  $X$  sei ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum (mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

Eine Abbildung  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Norm*, falls folgende Bedingungen für alle  $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$  erfüllt sind:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dann ist  $x \mapsto \|x\|$  eine Fréchet-Metrik. Wir nennen  $X$  *Banachraum*, falls  $X$  mit einer gegebenen Norm vollständig ist.

$X$  ist eine *Banachalgebra*, falls  $X$  eine Algebra ist (d. h. es gibt ein Produkt auf  $X$ , das dem Assoziativgesetz und Distributivgesetz genügt) und  $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  für alle  $x, y \in X$  gilt.

**2.7 (Skalarprodukt).** Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

(a)  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *Hermitesche Form* ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  symmetrische Sesquilinearform), falls für alle  $x, x_1, x_2, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$  gilt:

$$(S1) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(S2) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$(S3) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

(Es folgt: für alle  $x \in X$  gilt  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ .)

(b)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt *positiv semidefinit*, falls

$$(S4') \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

und *positiv definit*, falls

$$(S4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

gilt.

(c)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt *Skalarprodukt*, falls (S1)–(S4) erfüllt sind. Dann ist  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eine Norm auf  $X$  und wir nennen  $X$  dann einen *Prä-Hilbertraum*. Falls  $X$  zusätzlich vollständig ist, so heißt  $X$  *Hilbertraum*.

Beispiele:

i)  $\mathbb{R}^n$  mit  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ,  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

ii)  $X = C^0(K, \mathbb{R})$  für  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt.

$$\langle f, g \rangle := \int_K f(x) g(x) \, dx$$

Dann ist  $(C^0(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Prä-Hilbertraum (aber kein Hilbertraum!)

**Satz 2.8.** Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum  $X$ . Dann gelten:

- (1) Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU):  $\forall x, y \in X: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .  
Gleichheit gilt nur, falls  $y$  ein Vielfaches von  $x$  ist.
- (2) Dreiecksungleichung:  $\forall x, y \in X: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (3) Parallelogrammidentität:  $\forall x, y \in X: \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

*Bemerkung:* Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  folgt aus der CSU für  $x, y \in X \setminus \{0\}$ :

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \in [-1, 1] \quad (*)$$

D. h. es gibt genau ein  $\theta \in [0, \pi]$ , s. d.

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \cos \theta.$$

Wir interpretieren  $\theta$  als den Winkel zwischen  $x$  und  $y$ .

*Beweis von Satz 2.8.*

(3)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Ersetze  $y$  durch  $-y$  und addiere beide Gleichungen.

(1) Ersetze in (\*)  $y$  durch  $-\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$  (o. E.  $y \neq 0$ ). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

Es folgt die CSU. In der ersten Zeile gilt bei  $\leq$  die Gleichheit genau dann, wenn  $x$  ein Vielfaches von  $y$  ist.

(2)

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \underbrace{\operatorname{Re}\langle x, y \rangle}_{\leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|} \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

■

**2.9** (Vergleich von Topologien). Seien  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  zwei Topologien auf einer Menge  $X$ . Wir sagen  $\mathcal{T}_2$  ist *stärker* (oder *feiner*) als  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_1$  ist *schwächer* (oder *gröber*) als  $\mathcal{T}_2$ , falls  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$  gilt.

Sind  $d_1, d_2$  zwei Metriken auf  $X$  und  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  die induzierten Topologien (siehe 2.4), so heißt die Metrik  $d_1$  *stärker* (bzw. *schwächer*) als  $d_2$ , falls  $\mathcal{T}_1$  stärker (bzw. schwächer) als  $\mathcal{T}_2$  ist. Die Metriken heißen äquivalent, falls  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ . Entsprechend heißt eine Norm stärker bzw. schwächer als eine zweite, wenn dies für die induzierten Metriken gilt. Analog für Äquivalenz von Normen.

**2.10** (Vergleich von Normen). Seien  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  zwei Normen auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $X$ . Dann gilt:

(1)  $\|\cdot\|_2$  ist stärker als  $\|\cdot\|_1$  genau dann, wenn es ein  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt mit:

$$\forall x \in X: \|x\|_1 \leq c \|x\|_2$$

(2) Die beiden Normen sind genau dann äquivalent, wenn es  $c, C \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt mit:

$$\forall x \in X: c \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2$$

*Beweis.* (1) Es sei  $B_r^i(x) = \{x' \in X \mid \|x - x'\|_i < r\}$  und  $\mathcal{T}_i$  sei die von  $\|\cdot\|_i$  induzierte Topologie.

Sei  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ . Da  $B_1^1(0) \in \mathcal{T}_1$  gilt, ist  $B_1^1(0)$  offen bezüglich  $\mathcal{T}_1$  und bezüglich  $\mathcal{T}_2$ . Es liegt 0 im Inneren (bezüglich  $\|\cdot\|_2$ ) von  $B_1^1(0)$ . Somit gilt  $B_\varepsilon^2(0) \subset B_1^1(0)$  für ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Daher gilt für  $x \in X \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varepsilon x}{2\|x\|_2} \right\|_2 &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ \implies \left\| \frac{\varepsilon x}{2\|x\|_2} \right\|_1 &< 1 \implies \|x\|_1 < \frac{2}{\varepsilon} \|x\|_2 \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt die Ungleichung in (1) so ist für alle  $x \in X$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$B_r^2(x) \subset B_{cr}^1(x)$$

Sei nun  $A \in \mathcal{T}_1$ . Dann ist  $A = A^\circ$  bezüglich  $\mathcal{T}_1$ . D.h. zu  $x \in A$  existiert ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $B_\varepsilon^1(x) \subset A$ . Also gilt:

$$B_{\varepsilon/c}^2(x) \subset A$$

Dies zeigt  $A \in \mathcal{T}_2$ .

(2) Wende den ersten Teil zweimal an.

■

**Satz 2.11.** Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent. Endlich-dimensionale Vektorräume sind Banachräume. Endlich-dimensionale Unterräume normierter Räume sind abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $X$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\|\cdot\|$  eine Norm. Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $(X, \|\cdot\|)$ . Jedem  $x \in X$  mit  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  ordnen wir den Vektor  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{K}^n$  zu.

Die Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^n &\rightarrow X \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto x \mapsto \|x\|\end{aligned}$$

sind stetig.

Daher nimmt  $\|x\|$  auf der kompakten Menge

$$S := \{\alpha \mid \|\alpha\|_2 = 1\}$$

ein Maximum  $M$  und ein Minimum  $m$  an. (Dabei gilt  $m > 0$ , da  $\|x\| > 0$  für alle  $x \in S$ .)  
Damit gilt für  $x$  mit  $\|\alpha(x)\|_2 = 1$

$$m \leq \|x\| \leq M.$$

Für allgemeine  $x \neq 0$  gilt

$$\left\| \alpha \left( \frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right) \right\|_2 = 1 \quad \text{und somit} \quad m \leq \left\| \frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right\| \leq M$$

Dies zeigt die Äquivalenz einer beliebigen Norm zur Norm  $x \mapsto \|\alpha(x)\|_2$ . Damit sind zwei beliebige Normen äquivalent.

Die Vollständigkeit von  $X$  folgt aus der Vollständigkeit von  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ . Die Tatsache, dass endlich-dimensionale Räume abgeschlossen sind, folgt mit Aufgabe 1 von Übungsblatt 2.

■

**2.12 (Folgenräume).** Wir bezeichnen mit  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  die Menge aller Folgen über  $\mathbb{K}$ , d. h.

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Es gilt:

1)  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  ist ein metrischer Raum mit der Fréchet-Metrik

$$\varrho(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|} \quad \text{für } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

2) Ist  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_i)^k_{i \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  und ist  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , so gilt:

$$\varrho(x^k - x) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \iff \forall i \in \mathbb{N}: x_i^k \rightarrow x_i \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

(Vergleiche Aufgabe 2 von Blatt 1.)

3)  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  ist mit dieser Metrik vollständig.

4) Definiere für  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

$$\|x\|_{\ell^p} := \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty] \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \in [0, \infty]$$

Wir betrachten für  $1 \leq p \leq \infty$  die Mengen

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_{\ell^p} < \infty\}$$

Diese Räume sind normierte Vektorräume und auch vollständig (also Banachräume). (Beweis, siehe später.) Wenn der Körper  $\mathbb{K}$  aus dem Kontext klar ist, lassen wir diesen in der Notation auch weg.

5) Interessante Unterräume von  $\ell^\infty$  sind:

$$c := \{x \in \ell^\infty \mid \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \text{ existiert}\} \quad \text{und}$$

$$c_0 := \{x \in \ell^\infty \mid \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0\}.$$

Beide Räume versehen wir mit der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm. Es gilt:  $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$

6) Der Raum  $\ell^2$  besitzt das Skalarprodukt

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{für } x, y \in \ell^2$$

**Lemma 2.13** (Youngsche Ungleichung). Es seien  $p, p' \in (1, \infty)$ , so dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  gilt. Dann gilt für alle  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ :

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \log(ab) &= \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(b^{p'}) \\ &\leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichheit folgt daraus, dass der Logarithmus eine konkave Funktion ist. Da außerdem  $\exp$  monoton ist, folgt hieraus die Behauptung. ■

**Satz 2.14** (Höldersche Ungleichung auf  $\ell^p$ ). Es sei  $1 \leq p, p' \leq \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Für  $x \in \ell^p$  und  $y \in \ell^{p'}$  ist  $xy \in \ell^1$  (dabei sei für  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  das Produkt definiert als:  $xy := (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) und es gilt:

$$\|xy\|_{\ell^1} \leq \|x\|_{\ell^p} \cdot \|y\|_{\ell^{p'}}.$$

*Beweis.* Falls  $p = \infty$  setze  $p' = 1$  (und umgekehrt). In diesem Fall ist der Beweis einfach. Sei nun  $1 < p < \infty$  und  $\|x\|_{\ell^p} > 0, \|y\|_{\ell^{p'}} > 0$ . Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) liefert:

$$\frac{|x_k| |y_k|}{\|x\|_{\ell^p} \|y\|_{\ell^{p'}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_{\ell^p}^p} + \frac{1}{p'} \frac{|y_k|^{p'}}{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}}$$

Die Reihe über die Terme der rechten Seite ist eine konvergente Reihe und damit folgt aus dem Majorantenkriterium, dass  $xy \in \ell^1$  erfüllt sein muss. ■

**Satz 2.15.** Der Raum  $\ell^p$  ist für  $1 \leq p \leq \infty$  ein Banachraum.

*Beweis.* Die Vollständigkeit von  $\ell^1$  ist eine Übungsaufgabe. Für  $\ell^p$  folgt dies ähnlich (vergleiche mit dem späteren Beweis über  $L^p(\mu)$ .) Die Normeigenschaften abgesehen von der  $\Delta$ -Ungleichung ergeben sich einfach. Wir zeigen die  $\Delta$ -Ungleichung für  $p \in (1, \infty)$ . Es seien also  $p, p' \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{(p-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}) (\|x + y\|_{\ell^p}^{p-1}) \end{aligned}$$

Bei  $(*)$  geht die Höldersche Ungleichung ein. Dies zeigt  $\|x + y\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}$ . ■

**2.16** (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen). Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und beschränkt (also nach Heine-Borel äquivalenterweise kompakt) und  $Y$  ein Banachraum über  $\mathbb{K}$ , so ist  $C^0(K, Y)$  ein Unterraum von  $B(K, Y)$ . (Vergleiche Aufgabe 1 von Blatt 2.)

**Satz:** Mit  $\|f\|_{C^0} := \|f\|_{\infty} := \sup_{x \in K} |f(x)|$  wird  $C^0(K, Y)$  ein Banachraum.

*Beweis.* Jedes  $f \in C^0(K, Y)$  ist beschränkt, denn: Zu  $x \in K$  existiert ein  $\delta_x \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $f(B_{\delta_x}(x)) \subset B_1(f(x))$ . Da  $K$  kompakt ist, existieren endlich viele Punkte  $x_1, \dots, x_m \in K$  mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Es folgt:

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^m B_1(f(x_i)).$$

Die rechte Menge ist beschränkt, also ist auch  $f$  beschränkt.

Aufgabe 1 (iv) von Blatt 2 zeigt, dass  $B(K, Y)$  ein Banachraum ist. Eine Cauchy-Folge in  $C^0(K, Y)$  ist auch eine Cauchy-Folge in  $B(K, Y)$ . Da  $B(K, Y)$  vollständig ist, besitzt jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Sei jetzt  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $C^0(K, Y)$  mit Grenzwert  $f$  in  $B(Y, K)$ . Für  $x, y \in K$  gilt:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \underbrace{\|f_i(y) - f_i(x)\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x \text{ und jedes } i} + 2 \underbrace{\|f - f_i\|_{\infty}}_{\rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty}$$

Dies beweist  $f \in C^0(K, Y)$ . ■

**2.17** (Räume differenzierbarer Funktionen). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und  $m \in \mathbb{N}_0$ . Dann definieren wir:

$$C^m(\overline{\Omega}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } m\text{-mal stetig diffenzierbar auf } \Omega \text{ und für } s \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |s| \leq m \text{ ist } \partial^s f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar}\}.$$

(Dabei ist  $s$  ein Multiindex mit  $|s| = s_1 + \dots + s_n$ .)

**Satz:** Der Raum  $C^m(\overline{\Omega})$  ist mit der Norm

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$$

ein Banachraum.

*Beweis.* Wir beweisen die Vollständigkeit von  $C^1(\overline{\Omega})$ . (Der Fall  $m > 1$  folgt induktiv.) Ist  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $C^1(\overline{\Omega})$ , so sind  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(\partial_i f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folgen in  $C^0(\overline{\Omega})$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Daher existieren  $f$  und  $g_i$  in  $C^0(\overline{\Omega})$ , so dass  $f_k \rightarrow f$  sowie  $\partial_i f_k \rightarrow g_i$  gleichmäßig für  $k \rightarrow \infty$  in  $C^0(\overline{\Omega})$ . Für  $x \in \Omega$  und  $y$  nahe  $x$  mit  $x_t := (1-t)x + ty$  folgt aus dem HDI:

$$f_k(x_1) - f_k(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_k(x_t) dt = \int_0^1 (y - x) \cdot \nabla f_k(x_t) dt$$

Es folgt (mit  $g = (g_1, \dots, g_n)$ ):

$$\begin{aligned} \|f_k(y) - f_k(x) - (y - x) \cdot \nabla f_k(x)\| &= \left\| \int_0^1 ((y - x) \cdot \nabla f_k(x_t) - (y - x) \cdot \nabla f_k(x)) dt \right\| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_0^1 \|\nabla f_k(x_t) - \nabla f_k(x)\| dt \|y - x\| \\ &\leq \left( 2\|\nabla f_k - g\|_{\infty} + \sup_{t \in [0,1]} \|g(x_t) - g(x)\| \right) \|y - x\| \end{aligned}$$

Für  $k \rightarrow \infty$  gilt dann:

$$\|f(y) - f(x) - (y - x) \cdot g(x)\| \leq \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq 1} \|g(x_t) - g(x)\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x \text{ wegen Stetigkeit von } g} \|y - x\|$$

Dies bedeutet  $f$  ist in  $x$  diff'bar mit  $\nabla f(x) = g(x)$ . ■

**2.18 (Vervollständigung).** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\tilde{X} := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}$$

zusammen mit der Äquivalenzrelation

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \tilde{X} : \Longleftrightarrow (d(x_j, y_j))_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

Führe Metrik auf  $\tilde{X}$  ein: für  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$  sei

$$\tilde{d}((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) := \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, y_j).$$

**Satz:**

- i) Dann ist  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  ein vollständiger metrischer Raum.
- ii) Durch  $J(x) := (x)_{j \in \mathbb{N}}$  ist eine injektive Abbildung  $J: X \rightarrow \tilde{X}$  definiert, welche isometrisch ist, d. h. für alle  $x, y \in X$  gilt

$$\tilde{d}(J(x), J(y)) = d(x, y).$$

- iii) Es liegt  $J(X)$  dicht in  $\tilde{X}$ .

*Beweis.* Für  $\tilde{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  und  $\tilde{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\tilde{X}$  gilt (mithilfe der sog. *Vierecksungleichung*):

$$|d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i)| \leq d(x_j, x_i) + d(y_j, y_i) \rightarrow 0 \quad \text{für } i, j \rightarrow \infty.$$

Somit existiert  $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, y_j)$ . Für  $\tilde{x}^1 = \tilde{x}^2$  und  $\tilde{y}^1 = \tilde{y}^2$  in  $\tilde{X}$  folgt:

$$|d(x_j^2, y_j^2) - d(x_j^1, y_j^1)| \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Dies zeigt, dass  $\tilde{d}$  wohldefiniert ist. Außerdem gilt:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{x} = \tilde{y},$$

was direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation folgt. Die  $\triangle$ -Ungleichung und Symmetrie übertragen sich direkt.



Zur Vollständigkeit: Es sei  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\tilde{X}$ , mit  $x^k = (x_j^k)_{j \in \mathbb{N}}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Zu  $k \in \mathbb{N}$  wähle  $j_k \in \mathbb{N}$ , so dass  $d(x_i^k, x_j^k) \leq 1/k$  für alle  $i, j \geq j_k$  erfüllt ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_{j_k}^k, x_{j_\ell}^\ell) &\leq d(x_{j_k}^k, x_{j_j}^k) + d(x_{j_j}^k, x_{j_j}^\ell) + d(x_{j_j}^\ell, x_{j_\ell}^\ell) \\ &\leq \frac{1}{k} + d(x_j^k, x_j^\ell) + \frac{1}{\ell} \quad \text{für } j \geq j_k, j_\ell \\ &\rightarrow \frac{1}{k} + \tilde{d}(x^k, x^\ell) + \frac{1}{\ell} \quad \text{für } j \rightarrow \infty \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also ist  $x^\infty := (x_{j_\ell}^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  in  $\tilde{X}$  und es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x^\ell, x^\infty) &\leftarrow d(x_k^\ell, x_k^\infty) \quad \text{für } k \rightarrow \infty \\ &\leq d(x_k^\ell, x_{j_\ell}^\ell) + d(x_{j_\ell}^\ell, x_{j_\ell}^k) \\ &\leq \frac{1}{\ell} + d(x_{j_\ell}^\ell, x_{j_k}^k) \quad \text{für } k \geq j_\ell \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Es gilt also  $x^\ell \rightarrow x^\infty$ . Da  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Cauchy-Folge in  $\tilde{X}$  war, hat also jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Die Aussagen ii) und iii) sind eine einfache Übung. ■

# 3 Lineare Operatoren

## Definition 3.1.

- (a) Seien  $X, Y$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Topologien  $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$ . Wir definieren

$$L(X, Y) := \{T: X \rightarrow Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Elemente in  $L(X, Y)$  heißen *lineare Operatoren von  $X$  nach  $Y$* . (Für  $T \in L(X, Y)$  und  $x \in X$  schreiben wir auch oft  $Tx$  statt  $T(x)$ .)

- (b) Der *Dualraum* von  $X$  ist

$$X' := L(X, \mathbb{K})$$

und Elemente aus  $X'$  nennen wir *lineare Funktionale*.

## Beispiele 3.2.

- 1) Gelte  $X = C^2(\overline{\Omega})$  und  $Y = C^0(\overline{\Omega})$  für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Betrachte dann  $T: X \rightarrow Y$  mit

$$(Tu)(x) := -\Delta u(x)$$

für alle  $u \in C^2(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$ .

- 2) Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und sei  $K: \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei dann  $T$  für alle  $u \in C^0(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$  gegeben durch:

$$(Tu)(x) := \int_{\overline{\Omega}} K(x, y) u(y) \, dy.$$

**Lemma 3.3.** Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume und sei  $T: X \rightarrow Y$  linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1)  $T$  ist stetig, also  $T \in L(X, Y)$ .
- (2)  $T$  ist stetig in  $x_0$  für ein  $x_0 \in X$ .
- (3) Es gilt für die Operatornorm von  $T$ :

$$\|T\|_{L(X, Y)} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y < \infty$$

- (4) Es existiert ein  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so dass für alle  $x \in X$  gilt:  $\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X$ . (Bemerkung:  $C = \|T\|_{L(X, Y)}$  ist die kleinste solche Zahl.)

*Beweis.* (1)  $\implies$  (2): klar.

(2)  $\implies$  (3): Es gibt ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass

$$T(\overline{B_\delta(x_0)}) \subset \overline{B_1(T(x_0))}$$

erfüllt ist. Für  $x$  mit  $\|x\|_X \leq 1$  folgt  $x_0 + \delta x \in \overline{B_\delta(x_0)}$  und daraus:  $T(x_0 + \delta x) \in \overline{B_1(T(x_0))}$ , d. h. es gilt:

$$\|T(x_0 + \delta x) - T(x_0)\| \leq 1.$$

Wegen der Linearität von  $T$  gilt  $T(x_0 + \delta x) - T(x_0) = \delta T(x)$ , weshalb wir  $\|T(x)\| \leq 1/\delta$  bekommen.

(3)  $\implies$  (4): Für  $x \neq 0$  gilt  $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ . Daraus folgt:

$$\|Tx\| = \left\| \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|T\| \|x\|.$$

(4)  $\implies$  (1): Für  $x, x_0 \in X$  gilt:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq C \|x - x_0\|.$$

Also ist  $T$  Lipschitz-stetig und somit auch stetig. ■

### **Lemma 3.4.**

(1)  $X, Y$  normierte Räume  $\implies L(X, Y)$  normiert mit der Operatornorm.

(2)  $Y$  Banachraum  $\implies L(X, Y)$  Banachraum

(3)  $X$  Banachraum  $\implies L(X) := L(X, X)$  Banachalgebra

(4)  $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z) \implies ST \in L(X, Z)$  mit  $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$

*Beweis.* Zu (1): Wir zeigen nur die  $\Delta$ -Ungleichung (der Rest ist klar). Es gilt

$$\|(T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\|,$$

woraus folgt:

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Zu (2): Es sei  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L(X, Y)$ . Für alle  $x \in X$  ist dann  $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $Y$ . Setze

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x.$$

Da Grenzwertbildung linear ist, ist auch  $T$  linear. Wir behaupten, dass  $T \in L(X, Y)$  und  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gelten.

Zu  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  wähle  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  gilt:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Sei  $x \in X$  mit  $\|x\| \leq 1$ . Wähle  $m_0 = m_0(\varepsilon, x) \geq n_0$  mit

$$\|T_{m_0}x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  folgt nun:

$$\|T_nx - Tx\| \leq \|T_nx - T_{m_0}x\| + \|T_{m_0}x - Tx\| \leq \|T_n - T_{m_0}\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Damit folgen nun aber  $\|T\| \leq \infty$  sowie  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Zu (3) und (4): Es gilt:

$$\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|.$$

Also gilt allgemein:  $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$ . ■

**Bemerkung 3.5.** Es sei  $T \in L(X, Y)$  und  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L(X, Y)$  mit  $T_kx \rightarrow Tx$  für  $k \rightarrow \infty$  und für alle  $x \in X$ . Dann folgt i. A. *nicht*  $T_k \rightarrow T$  in  $L(X, Y)$ .

Beispiel:  $X = c_0$  (Raum der Nullfolgen, siehe 2.12 (5)) mit der Supremumsnorm,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $T_kx := x_k$ . Dann gilt:  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_kx = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 =: Tx$ . Offensichtlich gilt  $\|T_kx\| = 1$  für  $x = e_k$ . Außerdem gilt  $\|T_kx\| = \|x_k\| \leq 1$  für  $\|x\| \leq 1$ . D. h.  $\|T_k\| = 1$ , aber  $\|T\| = 0$ .

**Definition 3.6.** Für  $T \in L(X, Y)$  definieren wir den *Nullraum (Kern) von T* als

$$N(T) := \{x \in X \mid T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\}).$$

Es ist  $N(T)$  ein abgeschlossener Unterraum von  $L(X, Y)$ .

Weiter sei

$$R(T) := \{Tx \in Y \mid x \in X\} = T(X)$$

der *Bildraum* (engl.: „range“) von  $T$ . Es ist  $R(T)$  ein linearer Unterraum von  $Y$ , i. A. aber nicht abgeschlossen.

Beispiel:  $X = C^0([0, 1])$ ,

$$T: X \rightarrow X, \quad (Tf)(x) := \int_0^x f(\xi) \, d\xi$$

$$R(T) = \{g \in C^1([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

Es gilt  $T \in L(X, Y)$  aber  $R(T)$  ist nicht abgeschlossen in  $X$ , denn:

$$\overline{R(T)} = \{g \in C^0([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

(denn stetige Funktionen können durch  $C^1$ -Funktionen in der  $C^0$ -Norm approximiert werden, siehe später).

**Satz 3.7** (Neumannsche Reihe). Sei  $X$  ein Banachraum und sei  $A \in L(X)$  mit  $\|A\| < 1$ . Es bezeichne  $\text{Id}$  den Identitätsoperator. Dann liegt  $(\text{Id} - A)^{-1}$  in  $L(X)$  und es gilt:

$$(\text{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

*Beweis.* Sei für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$B_n := \sum_{k=0}^n A^k \in L(X).$$

Mit  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  folgt:

$$\begin{aligned} \|B_n x - B_m x\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n A^k x \right\| \quad \text{für } n > m \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \|A\|^k \|x\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty \text{ für alle } x \text{ mit gleichmäßig } \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

Also existiert  $B \in L(X)$  mit  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ . Noch zu zeigen:  $B(\text{Id} - A) = \text{Id} = (\text{Id} - A)B$ . Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n A^k (\text{Id} - A) = \sum_{k=0}^n (A^k - A^{k+1}) = \text{Id} - A^{n+1} \rightarrow \text{Id} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also:

$$B(\text{Id} - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n (\text{Id} - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Id} - A^{n+1}) = \text{Id}$$

■

**3.8** (Invertierbare Operatoren). Seien  $X, Y$  Banachräume. Wir sagen  $T \in L(X, Y)$  ist invertierbar, falls  $T$  bijektiv ist und  $T^{-1} \in L(Y, X)$  gilt.

**Satz:**

- i) Die Teilmenge  $\{T \in L(X, Y) \mid T \text{ invertierbar}\}$  ist offen in  $L(X, Y)$ .
- ii) Es gilt genauer für  $T, S \in L(X, Y)$  mit invertierbarem  $T$ :

$$\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1} \implies T - S \text{ invertierbar}$$

*Beweis.* Es gilt:

$$T - S = T(\text{Id}_X - \underbrace{T^{-1}S}_{\in L(X)}).$$

Also folgt mit  $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ :

$$\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\| \|S\| < 1.$$

Mithilfe der Neumannschen Reihe (Satz 3.7) erhalten wir:

$(\text{Id} - T^{-1}S)$  ist invertierbar.

Also ist auch  $T - S$  invertierbar

■

## 4 Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen

Problem: Setze ein Funktional stetig von einem Unterraum auf den gesamten Raum fort.

Bisher wissen wir nicht, ob auf jedem normierten Vektorraum ein (nicht-triviales) stetiges lineares Funktional existiert. Da wir im Folgenden grundlegend das *Zorn'sche Lemma* verwenden, wiederholen kurz die Voraussetzungen dafür.

**Definition 4.1.**

i) Sei  $M$  eine Menge. Eine Teilmenge  $H \subset M \times M$  definiert eine *Halbordnung* (wir sagen  $a \leq b$ , falls  $(a, b) \in H$  erfüllt ist), wenn für alle  $a, b \in M$  gilt:

a)  $a \leq a$

b)  $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

c)  $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$

ii) Eine Teilmenge  $K \subset M$  heißt *Kette* (oder *total geordnete Teilmenge*), falls für alle  $a, b \in K$  entweder  $a \leq b$  oder  $b \leq a$  gilt.

iii) Eine *obere Schranke* einer Teilmenge  $K \subset M$  ist ein Element  $s \in M$  mit  $a \leq s$  für alle  $a \in K$ . (Achtung:  $s$  muss *nicht* in  $K$  liegen!)

iv) Wir sagen  $M$  ist *induktiv geordnet*, falls jede Kette in  $M$  eine obere Schranke besitzt.

v) Ein  $m \in K$  heißt *maximales Element von  $K$* , wenn für alle  $a \in K$  aus  $a \geq m$  schon  $a = m$  folgt.

**4.2 (Zorn'sches Lemma).** Jede induktiv geordnete Menge besitzt (mindestens) ein maximales Element.

Bemerkung: Das Zorn'sche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

**Satz 4.3 (Satz von Hahn-Banach).** Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $Y \subset X$  ein Unterraum. Weiter gelte:

(1)  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  ist sublinear, d. h. für alle  $x, y \in X$  und  $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{und} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

(2)  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$  ist linear.

(3)  $f \leq p$  auf  $Y$ .

Dann existiert eine lineare Abbildung  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \leq p$  auf  $X$ .

*Beweis.* Nutze das Zorn'sche Lemma (4.2). Es sei

$$M := \{(Z, g) \mid Y \subset Z \subset X, Z \text{ ist Unterraum}, \\ g: Z \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist linear, } g = f \text{ auf } Y, g \leq p \text{ auf } Z\}.$$

Wir definieren eine Halbordnung auf dieser Menge folgendermaßen:

$$(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad Z_1 \subset Z_2 \wedge g_2|_{Z_1} = g_1.$$

Es ist zunächst zu zeigen, dass es überhaupt ein  $F$  gibt, so dass  $(X, F) \in M$  gilt. Hierzu brauchen wir folgende Konstruktion:

Sei  $(Z, g) \in M, z_0 \in X \setminus Z$ . Definiere dann  $Z_0 := Z \oplus \text{span}\{z_0\}$ . Das Ziel ist es nun,  $g$  auf  $Z_0$  fortzusetzen. Ansatz:

$$g_0(z + \alpha z_0) = g(z) + \alpha c$$

für  $z \in Z, \alpha \in \mathbb{R}$ . Gesucht ist nun ein geeignetes  $c \in \mathbb{R}$ .

Es muss für alle  $z \in Z$  gelten:

$$g(z) + \alpha c \leq p(z + \alpha z_0).$$

Für  $\alpha = 0$  ist dies klar. Für  $\alpha > 0$  haben wir:

$$c \leq \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = p\left(\frac{z}{\alpha} + z_0\right) - g\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

und für  $\alpha < 0$ :

$$c \geq \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = -p\left(-\frac{z}{\alpha} - z_0\right) + g\left(-\frac{z}{\alpha}\right).$$

Gesucht ist nun ein  $c$ , so dass

$$\sup_{z' \in Z} (g(z') - p(z' - z_0)) \leq c \leq \inf_{z \in Z} (p(z + z_0) - g(z)) \quad (\star)$$

erfüllt ist.

Es gilt für alle  $z', z \in Z$ :

$$g(z + z') \leq p(z + z') = p(z + z_0 + z' - z_0) \leq p(z + z_0) + p(z' - z_0).$$

Daraus folgt für alle  $z', z \in Z$ :

$$g(z') - p(z' - z_0) \leq p(z + z_0) - g(z),$$



was wiederum bedeutet, dass wir für  $c$  einfach den Wert des Supremums in  $(\star)$  nehmen können. Somit existiert also ein  $c \in \mathbb{R}$ , so dass  $(Z_0, g_0) \in M$  gilt. Sei nun  $N \subset M$  eine Kette. Definiere dann

$$Z_0 := \bigcup_{(Z,g) \in N} Z$$

und

$$g_0: Z_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z_0 \mapsto g(z_0) \text{ falls } z_0 \in Z \text{ mit } (Z, g) \in N.$$

Da  $N$  eine Kette ist, ist  $g_0$  tatsächlich wohldefiniert. Es folgt also  $(Z_0, g_0) \in M$  und für alle  $(Z, g) \in N$  gilt  $(Z, g) \leq (Z_0, g_0)$ .

Das Zorn'sche Lemma liefert nun: Es existiert ein maximales Element  $(Z, g) \in M$ . Dann muss schon  $Z = X$  gelten, denn: Falls  $z_0 \in X \setminus Z$  existiert, konstruiere eine Fortsetzung von  $g$  auf  $Z \oplus \text{span}\{z_0\}$  wie oben. Dies liefert einen Widerspruch zur Maximalität von  $(Z, g)$ . Damit ist der Satz gezeigt. ■

Wir wollen nun den Satz von Hahn-Banach auf den komplexen Fall verallgemeinern. Die Frage ist, wie wir „ $f \leq p$ “ auf  $\mathbb{C}$  umgehen. Dazu betrachten wir die Realteilstfunktion  $\text{Re } f$  von  $f$ .

**Lemma 4.4.** Sei  $X$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

(a) Sei  $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$  ein  $\mathbb{R}$ -lineares Funktional, d. h.

$$\ell(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \ell(x_1) + \lambda_2 \ell(x_2)$$

für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1, x_2 \in X$ . Setzen wir

$$\tilde{\ell}(x) := \ell(x) - i \ell(ix),$$

so ist  $\tilde{\ell}: X \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung mit  $\ell = \text{Re } \tilde{\ell}$ .

(b) Ist  $h: X \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung,  $\ell = \text{Re } h$  und  $\tilde{\ell}$  wie in (a), so ist  $\ell$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung mit  $\tilde{\ell} = h$ .

(c) Ist  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Halbnorm (es gelten die Normaxiome bis auf  $p(x) = 0 \implies x = 0$ ) und ist  $\ell: X \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, so gilt:

$$\left( \forall x \in X: |\ell(x)| \leq p(x) \right) \iff \left( \forall x \in X: |\text{Re } \ell(x)| \leq p(x) \right).$$

(d) Ist  $X$  ein normierter Vektorraum und ist  $\ell: X \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung und stetig, so ist  $\|\ell\| = \|\text{Re } \ell\|$ .

Bemerkung:  $\ell \mapsto \text{Re } \ell$  ist also eine bijektive  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung zwischen den  $\mathbb{C}$ -linearen und den  $\mathbb{R}$ -linearen,  $\mathbb{R}$ -wertigen Abbildungen. Im normierten Fall ist die Abbildung sogar eine Isometrie.

*Beweis.*

- (a) Da  $x \mapsto ix$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung ist, folgt:  $\tilde{\ell}$  ist  $\mathbb{R}$ -linear. Die Gleichheit  $\operatorname{Re} \tilde{\ell} = \ell$  gilt nach Konstruktion. Außerdem gilt:

$$\tilde{\ell}(ix) = \ell(ix) - i\ell(i^2x) = \ell(ix) - i\ell(-x) = i(\ell(x) - i\ell(ix)) = i\tilde{\ell}(x).$$

- (b) Natürlich ist  $\ell = \operatorname{Re} h$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Es gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} h(x) &= \operatorname{Re} h(x) + i \operatorname{Im} h(x) = \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re}(ih(x)) \\ &= \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re} h(ix) = \ell(x) - i\ell(ix) = \tilde{\ell}(x) \end{aligned}$$

- (c) Wegen  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt die Hinrichtung. Die Rückrichtung ergibt sich wie folgt: Schreibe  $\ell(x) = \lambda |\ell(x)|$  für ein geeignetes  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| = 1$ . Dann gilt für alle  $x \in X$ :

$$|\ell(x)| = \lambda^{-1} \ell(x) = \ell(\lambda^{-1}x) = |\operatorname{Re} \ell(\lambda^{-1}x)| \leq p(\lambda^{-1}x) = p(x).$$

- (d) folgt sofort aus (c). ■

**Satz 4.5.** Sei  $X$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und sei  $U \subset X$  ein Unterraum. Weiter sei  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  sublinear und  $\ell: U \rightarrow \mathbb{C}$  linear mit  $\operatorname{Re} \ell(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in U$ . Dann existiert eine lineare Fortsetzung  $L: X \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $L|_U = \ell$  und  $\operatorname{Re} L(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in X$ .

*Beweis.* Wende den Satz von Hahn-Banach (4.3) auf das  $\mathbb{R}$ -lineare Funktional  $\operatorname{Re} \ell: U \rightarrow \mathbb{R}$  an und erhalte eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F|_U = \operatorname{Re} \ell$  und  $F(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in X$ . Nach Lemma 4.4 ist  $F = \operatorname{Re} L$  für ein  $\mathbb{C}$ -lineares Funktional  $L: X \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann ist  $L$  eine geeignete Fortsetzung. ■

**Satz 4.6.** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und sei  $U \subset X$  ein Unterraum. Zu jedem stetigen linearen Funktional  $u': U \rightarrow \mathbb{K}$  existiert ein lineares Funktional  $x': X \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $x'|_U = u'$  und  $\|x'\| = \|u'\|$ .

*Beweis.* Sei  $X$  zunächst ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Definiere für alle  $x \in X$

$$p(x) := \|u'\| \|x\|,$$

womit  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  sublinear ist. Der Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) liefert: Es existiert eine lineare Abbildung  $x': X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x'|_U = u'$  und  $x'(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in X$ . Da auch  $x'(-x) \leq p(-x) = p(x)$  gilt, folgt

$$|x'(x)| \leq \|u'\| \|x\| \quad \text{also} \quad \|x'\| \leq \|u'\|.$$

Umgekehrt gilt:

$$\|u'\| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |u'(u)| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |x'(u)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |x'(x)| = \|x'\|.$$

Sei  $X$  nun ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Wir erhalten wie in Satz 4.5 ein lineares Funktional  $x': X \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $x'|_U = u'$  und  $\|\operatorname{Re} x'\| = \|u'\|$ . Lemma 4.4 (d) liefert dann wie gewünscht  $\|x'\| = \|u'\|$ . ■

**Bemerkung 4.7.**

- i) Die Fortsetzungen im Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) und seinen Folgerungen sind im Allgemeinen *nicht* eindeutig.
- ii) Für Operatoren (lineare Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ ) ist die Aussage in Satz 4.6 im Allgemeinen falsch.

Beispiel: Es gibt keinen stetigen linearen Operator  $T: \ell^\infty \rightarrow c_0$ , der die Identität  $\operatorname{Id}: c_0 \rightarrow c_0$  fortsetzt.

- iii) Es gibt eine eindeutige stetige Fortsetzung, falls der Unterraum  $U$  dicht in  $X$  liegt.

**Definition 4.8.** Eine *affine Hyperebene* in einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $X$  ist eine Teilmenge  $H \subset X$  der Form

$$H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$$

für eine (nicht-triviale) lineare Abbildung  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Wir schreiben auch kurz:  $H = \{f = \alpha\}$ .

**Satz 4.9.** Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  linear und sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Die Hyperebene  $H = \{f = \alpha\}$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $f$  stetig ist.

*Beweis.* Es ist klar, dass  $H$  abgeschlossen ist, wenn  $f$  stetig ist, denn es gilt  $f^{-1}(\{\alpha\}) = H$  und  $\{\alpha\}$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ . Für die Rückrichtung sei  $H$  abgeschlossen in  $X$ . Dann ist  $H^c$  offen und nicht leer. Jetzt sei  $x_0 \in H^c$  mit  $f(x_0) \neq \alpha$ , o. E.  $f(x_0) < \alpha$ . Sei  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $B_r(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\} \subset H^c$ . (Abbildung 4.2)



Abbildung 4.1: Zwei Teilmengen  $A$  und  $B$  eines Vektorraums, getrennt durch eine Hyperebene  $H$  (hier eine Gerade im  $\mathbb{R}^2$ )



Abbildung 4.2: Hyperebene  $H$  und Ball  $B_r(x_0)$  um  $x_0$  mit  $x \in B_r(x_0)$

Wir behaupten nun, dass dann schon für alle  $x \in B_r(x_0)$  die Ungleichung

$$f(x) < \alpha \quad (*)$$

gilt. Angenommen dies gilt nicht und es existiert ein  $x_1 \in B_r(x_0)$ , so dass  $f(x_1) > \alpha$  gilt. Das Segment

$$[x_0, x_1] := \{x_t := (1-t)x_0 + tx_1 \mid t \in [0, 1]\}$$

ist in  $B_r(x_0)$  enthalten (da Bälle in normierten Räumen konvex sind). Somit folgt für alle  $t \in [0, 1]$ :

$$f(x_t) \neq \alpha.$$

Andererseits gilt offenbar

$$f(x_t) = \alpha \quad \text{für} \quad t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Dies ist ein Widerspruch, also muss doch schon  $(*)$  gelten. Wir erhalten, dass für alle  $z \in B_1(0)$

$$\underbrace{f(x_0 + rz)}_{\in B_r(x_0)} < \alpha$$

gilt, woraus sofort

$$f(z) < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0))$$

folgt. Nutze diese Ungleichung für  $z$  und  $-z$  aus  $B_1(0)$ , um Folgendes für alle  $z \in B_1(0)$  zu erhalten:

$$|f(z)| < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0)).$$

Insgesamt folgt:

$$\|f\| = \sup_{z \in B_1(0)} |f(z)| \leq \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0)).$$

■

**Definition 4.10.** Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und seien  $A, B \subset X$  zwei Teilmengen von  $X$ . Die Hyperebene  $H = \{f = \alpha\}$  trennt die Mengen  $A$  und  $B$ , falls für alle  $a \in A$  und alle  $b \in B$  die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha \quad \text{und} \quad f(b) \geq \alpha$$

gelten.



Abbildung 4.3: Zwei *nicht* strikt durch  $H$  getrennte Mengen; die Mengen aus Abbildung 4.1 sind hingegen strikt durch  $H$  getrennt

Die Hyperebene  $H$  *trennt*  $A$  und  $B$  *strikt*, falls es ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt, so dass für alle  $a \in A$  und alle  $b \in B$  die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon \quad \text{und} \quad f(b) \geq \alpha + \varepsilon$$

gelten.

**Bemerkung 4.11.**

- i) Geometrisch sagt solch eine Trennung aus, dass  $A$  auf der einen Seite von  $H$  liegt und  $B$  auf der anderen Seite. (Siehe Abbildung 4.1 und Abbildung 4.3.)
- ii) Ist  $X$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, so sagen wir, dass  $A$  und  $B$  durch eine *reelle Hyperebene* getrennt werden, falls  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  linear und  $\alpha \in \mathbb{R}$  existieren, so dass für alle  $a \in A$  und alle  $b \in B$  die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} f(b) \geq \alpha$$

gelten.

- iii) Wir nennen  $A \subset X$  konvex, falls für alle  $x, y \in A$  auch

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\} \subset A$$

gilt.

**Definition:** Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $K \subset X$ . Dann ist das *Minkowski-Funktional* zu  $K$  definiert durch

$$p(x) := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in K \right\}.$$

Für  $K = B_1(0)$  gilt gerade  $p(x) = \|x\|$ .

**Lemma 4.12.** Es sei  $K$  konvex, offen und  $0 \in K$ . Dann gilt:

- i) Das Minkowski-Funktional  $p$  zu  $K$  ist sublinear.
- ii) Es existiert ein  $M \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $x \in X$  gilt:

$$0 \leq p(x) \leq M \|x\|.$$

- iii) Zwischen  $K$  und  $p$  besteht folgender Zusammenhang:

$$K = \{x \in X \mid p(x) < 1\}.$$

*Beweis.*

- i) Seien  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $x \in X$ . Dann gilt  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ , denn:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} \lambda x \in K \right\} = \inf \left\{ \alpha' \lambda \mid \frac{1}{\alpha' \lambda} \lambda x \in K \right\} \\ &= \lambda \inf \left\{ \alpha' \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha'} x \in K \right\} = \lambda p(x) \end{aligned}$$

Die  $\triangle$ -Ungleichung zeigen wir später.

- ii) Es sei  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  derart, dass  $B_r(0) \subset K$  gilt. Es gilt dann für alle  $x \in X$ :

$$p(x) \leq \frac{1}{r} \|x\|,$$

denn:

$$\begin{aligned} p(x) &= \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in K \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in B_r(0) \right\} \\ &= \frac{1}{r} \|x\| \end{aligned}$$

- iii) Es sei  $x \in K$ . Da  $K$  offen ist, folgt  $(1 + \varepsilon)x \in K$  für  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  klein genug. Dann gilt:

$$p(x) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1.$$

Falls  $p(x) < 1$  gilt, muss ein  $\alpha \in (0, 1)$  geben, so dass  $x/\alpha \in K$  erfüllt ist. Damit gilt:

$$x = \alpha \left( \frac{x}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) \cdot 0 \in K,$$

denn  $K$  ist nach Voraussetzung konvex.



Abbildung 4.4: Links eine konvexe Menge  $K$ , getrennt von  $\{x_0\}$  durch  $H$ ; rechts eine nicht konvexe Menge, so dass diese und  $x_0$  nicht durch eine Hyperebene  $H$  getrennt werden können

- i) Es bleibt die  $\triangle$ -Ungleichung zu zeigen. Seien  $x, y \in X$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Aus dem bisher Gezeigten folgt:

$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon}, \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in K.$$

Damit gilt also für alle  $t \in [0, 1]$ :

$$\frac{tx}{p(x) + \varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y) + \varepsilon} \in K.$$

Wähle nun  $t = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$ , dann erhalten wir

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in K \quad \text{und mit (iii) folgt} \quad p\left(\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}\right) < 1.$$

Es folgt:

$$p(x + y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Da  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  beliebig war, folgt die Behauptung. ■

**Lemma 4.13.** Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und sei  $K \subset X$  nicht-leer, offen und konvex. Sei weiter  $x_0 \in K^\circ$ . Dann existiert ein  $x' \in X'$ , so dass für alle  $x \in K$  gilt:

$$\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x_0).$$

Insbesondere trennt im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  die reelle Hyperebene  $\{\operatorname{Re} x' = \operatorname{Re} x'(x_0)\}$  somit  $\{x_0\}$  und  $K$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Ohne Einschränkung können wir  $0 \in K$  annehmen. Sei  $p$  das Minkowski-Funktional zu  $K$ . Sei weiter  $U := \operatorname{span}\{x_0\}$  und  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch  $g(tx_0) := t$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $x \in U$ :

$$g(x) \leq p(x)$$

und für  $x_0$  haben wir  $g(x_0) = 1 \leq p(x_0)$ , da  $x_0$  nicht in  $K$  liegt. (Achtung:  $tx_0$  mit  $t < 0$  ist kein Problem, da  $g(tx_0) < 0$ .)

Wende nun Hahn-Banach (Satz 4.3) an, womit wir ein  $x': X \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten, mit  $x'(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in X$  und außerdem  $x'|_U = g$ . Insbesondere gilt also  $x'(x_0) = 1$ . Außerdem ist  $x'$  stetig (vgl. Lemma 4.12 (ii)). Mit Lemma 4.12 (iii) erhalten wir: für alle  $x \in K$  gilt

$$x'(x) < 1.$$

Der komplexe Fall (also  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) folgt aus dem Obigen und Lemma 4.4. ■

**Satz 4.14** (Satz von Hahn-Banach (erste geometrische Formulierung)). Sei  $X$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und seien  $A, B \subset X$  nicht-leer, konvex und disjunkt. Außerdem sei  $A$  offen. Dann existiert  $x' \in X'$  mit  $\operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b)$  für alle  $a \in A$  und  $b \in B$ .

Bemerkung: Ist  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so trennt die abgeschlossene Hyperebene  $\{x' = \alpha\}$  mit

$$\alpha \in \left[ \sup_{a \in A} x'(a), \inf_{b \in B} x'(b) \right]$$

die Mengen  $A$  und  $B$ .

*Beweis.* Es sei  $C := A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$ . Dann ist  $C$  konvex (leichte Rechnung) und offen, denn:

$$C = \bigcup_{b \in B} \underbrace{(A - \{b\})}_{\text{offen}}.$$

Da  $A$  und  $B$  disjunkt sind, liegt  $0$  nicht in  $C$ . Aus Lemma 4.13 folgt die Existenz eines  $x' \in X'$ , welches für alle  $x \in C$  die Ungleichung

$$\operatorname{Re} x'(x) < 0 = \operatorname{Re} x'(0)$$

erfüllt. Das heißt, es gilt für alle  $a \in A$  und  $b \in B$

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < 0 \quad \text{oder äquivalent} \quad \operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b).$$
■

**Satz 4.15** (Satz von Hahn-Banach (zweite geometrische Formulierung)). Sei  $X$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und seien  $A, B \subset X$  nicht-leer, konvex und disjunkt. Weiter sei  $A$  abgeschlossen und  $B$  kompakt. Dann existiert ein  $x' \in X'$  sowie ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  und ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $a \in A$  und  $b \in B$  die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \alpha \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon$$

gelten.

*Beweis.* Es sei  $C := A - B$  wie bei Satz 4.14. Damit ist  $C$  konvex und abgeschlossen (siehe unten) und es gilt  $0 \notin C$ . Damit existiert ein  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $B_r(0) \cap C = \emptyset$  gilt. Satz 4.14 liefert: Es existiert ein  $x' \in X'$  mit  $x' \neq 0$ , so dass für alle  $a \in A$ ,  $b \in B$  und  $z \in B_1(0)$  gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < \operatorname{Re} x'(rz).$$



Also gilt für alle  $a \in A$  und  $b \in B$ :

$$\operatorname{Re} x'(a - b) \leq -r \|x'\|.$$

Für  $\varepsilon r \|x'\|/2 > 0$  ergibt sich, dass für alle  $a \in A$  und alle  $b \in B$  gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon.$$

Wähle  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass

$$\sup_{a \in A} (x'(a) + \varepsilon) \leq \alpha \leq \sup_{b \in B} (x'(b) - \varepsilon)$$

erfüllt ist. Noch zu zeigen:  $C$  ist abgeschlossen. Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C$  mit Grenzwert  $c \in X$ . Da  $B$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mit  $b_{n_k} \rightarrow b \in B$  für  $k \rightarrow \infty$ . Damit ergibt sich:

$$a_{n_k} = c_{n_k} + b_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c + b.$$

Da  $A$  abgeschlossen ist, folgt  $c + b \in A$  und damit  $c = (c + b) - b \in A - B = C$ . ■

Im Allgemeinen lassen sich konvexe Mengen mit  $A \cap B = \emptyset$  nicht trennen. Es gibt Beispiele mit  $A, B$  zusätzlich abgeschlossen, in denen Trennungen nicht möglich ist. (Siehe Übungen.)

**Korollar 4.16.** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und  $U \subset X$  ein Unterraum mit  $\overline{U} \neq X$ . Dann existiert ein  $x' \in X'$  mit  $x' \neq 0$  und  $x'|_U = 0$ .

*Beweis.* Es sei  $x_0 \in X$  mit  $x_0 \notin \overline{U}$ . Wende Satz 4.15 auf  $A = \overline{U}$  und  $B = \{x_0\}$  an. Wir erhalten somit ein  $x' \in X'$  und ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{Re} x'(x) < \alpha < \operatorname{Re} x'(x_0)$  für alle  $x \in \overline{U}$ . Es folgt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \overline{U}$ :

$$\operatorname{Re} x'(\lambda x) < \alpha.$$

Also muss schon  $\operatorname{Re} x'(x) = 0$  für alle  $x \in \overline{U}$  gelten. Wegen  $\operatorname{Re} x'(x_0) > \operatorname{Re} x'(x) = 0$  für alle  $x \in U$  ist außerdem  $x' \neq 0$ . ■

**Bemerkung:** Korollar 4.16 wird genutzt, um zu zeigen, dass ein Unterraum  $U$  dicht in einem umgebenden Raum  $X$  liegt. Kann man zeigen, dass für alle  $x' \in X'$  aus  $x'|_U = 0$  schon  $x' = 0$  folgt, so ergibt sich  $\overline{U} = X$ .

**Definition 4.17.** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $X'$  der Dualraum zu  $X$  (Definition 3.1 (b)). Dann ist  $X'' := (X')'$  der *Bidualraum* von  $X$ .

Wir können auf kanonische Weise eine Abbildung  $J_X: X \rightarrow X''$  wie folgt definieren:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} X' \rightarrow \mathbb{K} \\ x' \mapsto x'(x) \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $J_X$  linear und stetig, denn es gilt für alle  $x' \in X'$  und alle  $x \in X$  die Ungleichung  $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$  und damit für alle  $x \in X$ :

$$\|J_X(x)\| \leq \|x\|. \quad (*)$$

Sei

$$\bar{B}_1^{X'} := \overline{B_1^{X'}(0)} = \{x' \in X' \mid \|x'\| \leq 1\}.$$

Dann gilt sogar

$$\|x\| = \sup_{x' \in \bar{B}_1^{X'}} |x'(x)| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sei  $x_0 \in X \setminus \{0\}$ . Setze dann das Funktional

$$u': \text{span}\{x_0\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \lambda \|x_0\| \quad \text{falls } \lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } x = \lambda x_0$$

normgleich auf  $X$  fort. Es gilt dann  $\|x'\| = \|u'\| = 1$  und  $x'(x_0) = \|x_0\|$ . Damit ist in  $(*)$  sogar Gleichheit gezeigt. Insgesamt folgt:

**Satz 4.18.** Die Abbildung  $J_X$  ist eine (im Allgemeinen nicht surjektive) lineare Isometrie, d. h. für alle  $x \in X$  gilt  $\|J_X(x)\|_{X''} = \|x\|_X$ . (Insbesondere ist  $J_X$  als Isometrie stets injektiv.)

**Definition 4.19.** Ein Banachraum  $X$  ist *reflexiv*, wenn  $J_X$  surjektiv (also bijektiv) ist.

**Bemerkung:** Da  $J_X$  injektiv ist, kann  $X$  mit einem Unterraum von  $X''$  identifiziert werden.

**Definition 4.20.** Sei  $X$  ein normierter Raum,  $M \subset X$  ein Unterraum und  $N \subset X'$  ein Unterraum des Dualraums. Wir definieren dann den *Annihilator von  $M$*  als

$$\begin{aligned} M^\perp &:= \{x' \in X' \mid \forall x \in M: x'(x) = 0\} \\ &= \{x' \in X' \mid x'|_M = 0\} \end{aligned}$$

und den *Annihilator von  $N$*  als

$$N^\perp := \{x \in X \mid \forall x' \in N: x'(x) = 0\}.$$

**Bemerkung 4.21.**

- (i) Es ist  $N^\perp$  eine Teilmenge von  $X$  und *nicht* von  $X''$ .
- (ii) Es sind  $M^\perp$  und  $N^\perp$  abgeschlossene Unterräume.

**Satz 4.22.** Sei  $X$  ein normierter Raum und  $M \subset X$  ein Unterraum. Dann gilt

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M}.$$

Sei außerdem  $N \subset X'$  ein Unterraum. Dann gilt

$$(N^\perp)^\perp \supset \overline{N}.$$

(Im Allgemeinen ist diese Inklusion echt.)

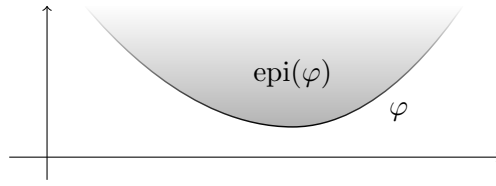


Abbildung 4.5: Epigraph einer Funktion  $\varphi$

**Definition 4.23.**

- i) Es sei  $E$  eine Menge und  $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  eine Abbildung. Wir definieren dann

$$D(\varphi) := \{x \in E \mid \varphi(x) < \infty\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}).$$

- ii) Der *Epigraph* von  $\varphi$  (Abbildung 4.5) ist die Menge

$$\text{epi}(\varphi) := \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq \lambda\}.$$

**Definition 4.24.** Sei  $(E, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Eine Abbildung  $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty]$  ist *unterhalbstetig*, wenn für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Menge

$$\{\varphi \leq \lambda\} := \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \lambda\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \lambda}) \subset E$$

abgeschlossen ist.

**Lemma 4.25.** Sei  $(E, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty]$  eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Es ist  $\varphi$  genau dann unterhalbstetig, wenn  $\text{epi}(\varphi)$  abgeschlossen in  $E \times \mathbb{R}$  (mit der Produkttopologie) ist.
- (ii) Es ist  $\varphi$  genau dann unterhalbstetig, wenn für alle  $x \in E$  und alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  existiert, so dass für alle  $y \in V$  gilt:  $\varphi(y) \geq \varphi(x) \cdot \varepsilon$ .



Abbildung 4.6: Die Funktion  $\tilde{\varphi}$  ist *nicht* unterhalbstetig,  $\varphi$  schon

(iii) Ist  $\varphi$  unterhalbstetig, so gilt für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $E$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in E$ :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Falls  $E$  ein metrischer Raum ist, so gilt auch die Umkehrung.

(iv) Sind  $\varphi$  und  $\tilde{\varphi}: E \rightarrow (-\infty, \infty]$  unterhalbstetig, so auch  $\varphi + \tilde{\varphi}$ .

(v) Ist  $(\varphi_i)_{i \in I}$  eine Familie unterhalbstetiger Abbildungen  $E \rightarrow (-\infty, \infty]$  mit

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$$

für alle  $x \in E$ , so ist auch  $\varphi$  unterhalbstetig.

(vi) Ist  $E \neq \emptyset$  folgenkompakt und  $\varphi$  unterhalbstetig, so nimmt die Funktion  $\varphi$  ihr Minimum an, d. h. es existiert ein  $x_0 \in E$  mit  $\varphi(x_0) = \inf_{x \in E} \varphi(x)$ .

*Beweis.* Siehe Übungen für Teile der Aussagen. Wir beweisen hier nur (vi):

Sei also  $E$  folgenkompakt und nicht leer und sei  $\varphi$  unterhalbstetig. Sei dann  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $E$ , für welche  $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\inf_{x \in E} \varphi(x)$  konvergiert. Weil  $E$  folgenkompakt ist, existiert dann eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und wir definieren  $x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . Aus (iii) folgt dann:

$$\varphi(x_0) \leq \inf_{x \in E} \varphi(x) \leq \varphi(x_0).$$

(Dies zeigt auch, dass  $\inf_{x \in E} \varphi(x) > -\infty$  gelten muss.)

■

**Definition 4.26.** Sei  $X$  ein Vektorraum. Eine Funktion  $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  ist *konvex*, wenn  $\varphi$  für alle  $x, y \in X$  und alle  $t \in [0, 1]$  die Ungleichung

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

erfüllt. (Abbildung 4.7)

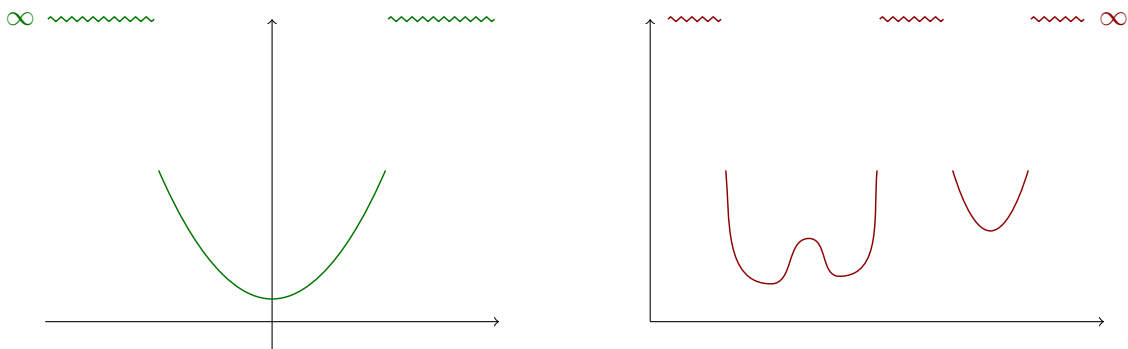


Abbildung 4.7: Konvexe Funktion links und *nicht* konvexe Funktion rechts

**Lemma 4.27.** Sei  $X$  ein Vektorraum.

- (i) Es ist  $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  genau dann konvex, wenn  $\text{epi}(\varphi)$  eine konvexe Teilmenge von  $X \times \mathbb{R}$  ist.
- (ii) Ist  $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex, so ist die Menge  $\{\varphi \leq \lambda\}$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  konvex. (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.)
- (iii) Sind  $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex, so auch  $\varphi_1 + \varphi_2$ .
- (iv) Ist  $(\varphi_i)_{i \in I}$  eine Familie konvexer Abbildungen  $X \rightarrow (-\infty, \infty]$ , so ist auch

$$\sup_{i \in I} \varphi_i := \left( x \mapsto \sup_{i \in I} \varphi_i(x) \right)$$

konvex.

Ab jetzt betrachten wir vornehmlich normierte  $\mathbb{R}$ -Vektorräume.

**Definition 4.28.** Sei  $X$  ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und sei  $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  eine Funktion mit  $D(\varphi) \neq \emptyset$  (d. h.  $\varphi$  ist nicht konstant  $\infty$ ). Dann ist die *Legendre-Transformation* (oder *konjugierte Funktion*) von  $\varphi$  die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^*: X' &\rightarrow (-\infty, \infty] \\ f &\mapsto \sup_{x \in X} (f(x) - \varphi(x)). \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.29.**

- (i) Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$  eine Abbildung. Ist  $f \in (\mathbb{R}^n)'$ , so gibt es genau einen Vektor  $y_f \in \mathbb{R}^n$  mit  $f(x) = x \cdot y := \langle x, y \rangle_{\text{eukl}}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Wir identifizieren dann  $(\mathbb{R}^n)'$  mit  $\mathbb{R}^n$  vermöge

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)' &\longleftrightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\longmapsto y_f \\ (x \mapsto x \cdot y) &\longleftarrow y, \end{aligned}$$

und somit gilt für alle  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x \cdot y - \varphi(x)).$$

- (ii) Es ist  $\varphi^*$  stets konvex und unterhalbstetig. Dies folgt daraus, dass wir das Supremum betrachten und dass  $f \mapsto f(x) - \varphi(x)$  konvex und stetig ist (da affin linear).
- (iii) Es gilt für alle  $x \in X$  und alle  $f \in X'$  die Ungleichung

$$f(x) \leq \varphi(x) + \varphi^*(f),$$

was direkt aus der Definition von  $\varphi^*$  folgt.

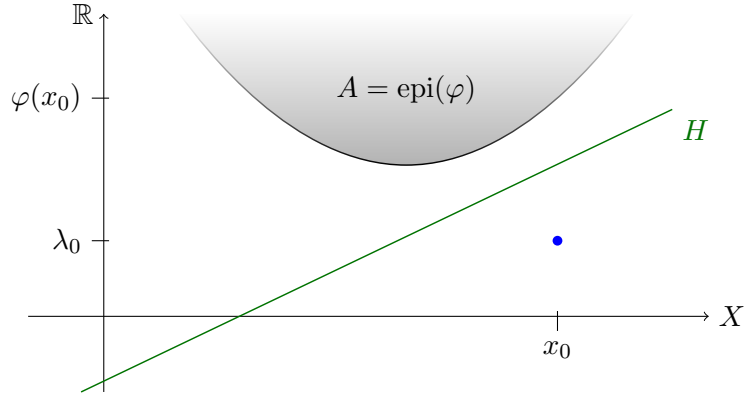


Abbildung 4.8: Skizze zum Beweis von Theorem 4.30

- (iv) Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) ist ein Spezialfall von (iii). Seien  $p, p' \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  und setze  $\varphi(x) := \frac{1}{p} |x|^p$ . Dann gilt für alle  $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ :

$$\varphi^*(y) = \frac{1}{p'} |y|^{p'}.$$

(Siehe Übungen.)

**Theorem 4.30.** Sei  $X$  ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex und unterhalbstetig mit  $D(\varphi) \neq \emptyset$ . Dann gilt  $D(\varphi^*) \neq \emptyset$  und  $\varphi$  ist von unten durch eine affin lineare Funktion beschränkt.

*Beweis.* Sei  $x_0 \in D(\varphi)$  und sei  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_0 < \varphi(x_0)$ . Wende nun die zweite geometrische Form des Satzes von Hahn-Banach (4.15) auf den Raum  $X \times \mathbb{R}$ , die abgeschlossene Menge  $A := \text{epi}(\varphi)$  und die kompakte Menge  $B := \{(x_0, \lambda_0)\}$  an. (Abbildung 4.8) Wir erhalten somit ein stetiges lineares Funktional  $\Phi: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so dass die abgeschlossene Hyperebene  $H = \{\Phi = \alpha\} \subset X \times \mathbb{R}$  die Mengen  $A$  und  $B$  trennt. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Phi((x, 0)) \end{aligned}$$

ist stetig und es gilt  $f \in X'$ . Mit  $k := \Phi((0, 1))$  gilt für alle  $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$

$$\Phi((x, \lambda)) = f(x) + k\lambda.$$

Es gilt weiter  $\Phi|_A > \alpha$  und  $\Phi|_B < \alpha$ . Dann gilt also  $f(x_0) + k\lambda_0 < \alpha$  und

$$f(x) + k\lambda > \alpha$$

für alle  $(x, \lambda) \in \text{epi}(\varphi)$ . Somit erhalten wir für alle  $x \in D(\varphi)$ :

$$f(x) + k\varphi(x) > \alpha \tag{*}$$

und für den Punkt  $(x_0, \lambda_0)$ :

$$f(x_0) + k\varphi(x_0) > \alpha > f(x_0) + k\lambda_0.$$

Dies zeigt  $k > 0$  (da  $\varphi(x_0) > \lambda_0$  nach Wahl von  $\lambda_0$ ). Aus  $(\star)$  folgt, dass für alle  $x \in D(\varphi)$  gilt:

$$-\frac{1}{k}f(x) - \varphi(x) < -\frac{\alpha}{k}.$$

Daraus folgt  $\varphi^*(-\frac{1}{k}f) < \infty$  (nach Definition von  $\varphi^*$ ) und damit

$$\varphi(x) > -\frac{1}{k}f(x) + \frac{\alpha}{k},$$

aber gerade das wollten wir zeigen. ■

Wir können auch die Funktion  $\varphi^{**}$  betrachten. Dies wäre eigentlich eine Abbildung von  $X''$  nach  $\mathbb{R}$ . Wir schränken diese aber auf  $X$  ein (unter der Einbettung von  $X$  nach  $X''$  vermöge der Isometrie  $J_X$ , siehe Definition 4.17 ff.).

**Definition 4.31.** Es sei  $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  mit  $D(\varphi) \neq \emptyset$ . Wir definieren  $\varphi^{**}: X \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $x \in X$  durch

$$\varphi^{**}(x) := \sup_{f \in X'} (f(x) - \varphi^*(f)).$$

**Theorem 4.32** (Fenchel-Moreau). Sei  $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex, unterhalbstetig und  $D(\varphi) \neq \emptyset$ . Dann gilt  $\varphi^{**} = \varphi$ .

*Beweis. Schritt 1:* Wir setzen  $\varphi \geq 0$  voraus. Da für alle  $x \in X$  und alle  $f \in X'$

$$f(x) - \varphi^*(f) \leq \varphi(x)$$

gilt, erhalten wir zunächst  $\varphi^{**} \leq \varphi$ . Angenommen es existiert ein  $x_0 \in X$  mit

$$\varphi^{**}(x_0) < \varphi(x_0)$$

(wobei  $\varphi(x_0) = \infty$  möglich ist). Nutze wieder den Satz von Hahn-Banach in der zweiten geometrischen Formulierung (4.15) mit  $A = \text{epi}(\varphi)$  abgeschlossen und  $B = \{(x_0, \varphi^{**}(x_0))\}$  kompakt. (Vgl. Beweis von Theorem 4.30.) Wir erhalten somit ein  $f \in X'$  und  $k, \alpha \in \mathbb{R}$  mit  $f(x_0) + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha$  und

$$f(x) + k\lambda > \alpha. \tag{\diamond}$$

für alle  $(x, \lambda) \in \text{epi}(\varphi)$ . Wähle  $x \in D(\varphi)$  und betrachte  $\lambda \rightarrow \infty$  in der letzten Ungleichung. Es folgt  $k \geq 0$ . Jetzt sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Da  $\varphi \geq 0$  gilt, folgt aus  $(\diamond)$ , dass für alle  $x \in D(\varphi)$  gilt:

$$f(x) + (k + \varepsilon)\varphi(x) \geq \alpha.$$

Somit erhalten wir für alle  $x \in D(\varphi)$ :

$$-\frac{1}{k+\varepsilon} f(x) - \varphi(x) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Dies zeigt:

$$\varphi^* \left( -\frac{f}{k+\varepsilon} \right) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Die Definition von  $\varphi^{**}$  liefert für  $\varphi^{**}(x_0)$ :

$$\varphi^{**}(x_0) \geq -\frac{f}{k+\varepsilon}(x_0) - \varphi^* \left( -\frac{f}{k+\varepsilon} \right) \geq -\frac{f}{k+\varepsilon}(x_0) + \frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Damit folgt

$$f(x_0) + (k+\varepsilon) \varphi^{**}(x_0) \geq \alpha,$$

was aber für  $\varepsilon \rightarrow 0$  einen Widerspruch zu  $f(x_0) + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha$  liefert.

*Schritt 2 (allgemeiner Fall):* Theorem 4.30 sichert uns  $D(\varphi^*) \neq \emptyset$ . Wähle dann  $f_0 \in D(\varphi^*)$  und setze für alle  $x \in X$

$$\bar{\varphi}(x) := \varphi(x) - f_0(x) + \varphi^*(f_0).$$

Es gilt (wie einfache Rechnungen zeigen), dass  $\bar{\varphi}$  konvex und unterhalbstetig ist, und wir haben  $\bar{\varphi} \geq 0$  (denn  $\varphi^*(f_0) \geq f_0(x) - \varphi(x)$  für  $x \in X$ ). Dann gilt nach Schritt 1:  $(\bar{\varphi})^{**} = \bar{\varphi}$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} (\bar{\varphi})^*(f) &= \sup_{x \in X} (f(x) - \bar{\varphi}(x)) = \sup_{x \in X} (f(x) - \varphi(x) + f_0(x) - \varphi^*(f_0)) \\ &= \varphi^*(f + f_0) - \varphi^*(f_0) \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} (\bar{\varphi})^{**} &= \sup_{f \in X'} (f(x) - (\bar{\varphi})^*(f)) = \sup_{f \in X'} (f(x) - \varphi^*(f + f_0) + \varphi^*(f_0)) \\ &= \sup_{f \in X'} ((f + f_0)(x) - \varphi^*(f + f_0) - f_0(x) + \varphi^*(f_0)) \\ &= \varphi^{**}(x) - f_0(x) + \varphi^*(f_0). \end{aligned}$$

Da  $(\bar{\varphi})^{**} = \bar{\varphi}$  gilt, folgt  $\varphi^{**} = \varphi$ . ■



Abbildung 4.9: Beispiel 4.33 (i) für  $\varphi(x) = |x|$  auf  $\mathbb{R}$  mit zugehörigem  $\varphi^*$



**Beispiele 4.33.**

- (i) Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi(x) := \|x\|$  für alle  $x \in X$ . Dann gilt:

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in X} (f(x) - \varphi(x)) = (f(x) - \|x\|) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \|f\| \leq 1 \\ \infty, & \text{falls } \|f\| > 1. \end{cases}$$

Dies erhalten wir wie folgt. Es gilt:

$$\|f\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{f(x)}{\|x\|}.$$

Für  $\|f\| > 1$  existiert ein  $x \in X$  mit  $f(x)/\|x\| > 1$  und damit  $f(x) - \|x\| > 0$ . Ersetze nun  $x$  durch  $\alpha x$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  und betrachte  $\alpha \rightarrow \infty$ . Es folgt:

$$\sup_{x \in X} (f(x) - \|x\|) = \infty.$$

Der andere Fall ergibt sich ähnlich. (Abbildung 4.9) Es folgt mit Theorem 4.32:

$$\|x\| = \varphi(x) = \varphi^{**}(x) = \sup_{f \in X'} (f(x) - \varphi^*(f)) = \sup_{\substack{f \in X', \\ \|f\| \leq 1}} f(x).$$

- (ii) Sei  $X$  ein normierter Raum und  $K \subset X$ . Wir definieren die sogenannte *Indikatorfunktion* von  $K$  für alle  $x \in X$  durch

$$I_K(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in K \\ \infty & \text{falls } x \notin K. \end{cases}$$

(Achtung: dies ist *nicht* die charakteristische Funktion von  $K$ .) Einfache Überlegungen liefern:  $I_K$  ist genau dann konvex, wenn  $K$  konvex ist und  $I_K$  ist genau dann unterhalbstetig, wenn  $K$  abgeschlossen ist. Die *Trägerfunktion* zu  $K$  ist dann definiert durch die konjugierte Funktion  $(I_K)^*$  von  $I_K$ . Man kann nun folgende Aussagen zeigen:

- Falls  $K = M \subset X$  ein Unterraum ist, so gilt:

$$(I_M)^* = I_{M^\perp}, \quad (I_M)^{**} = I_{(M^\perp)^\perp}.$$

- Falls  $M$  zusätzlich abgeschlossen ist, so gilt

$$(I_M)^{**} = I_M \quad \text{und somit} \quad (M^\perp)^\perp = M.$$

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $\emptyset \neq K = [a, b] \subset \mathbb{R}$  erhalten wir  $(I_K)^*$  als Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ :

$$(I_K)^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (x \cdot y - I_K(x)) = \sup_{x \in [a, b]} x \cdot y = \begin{cases} by, & \text{falls } y \geq 0 \\ ay, & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

(Siehe Abbildung 4.10.)



Abbildung 4.10: Beispiel 4.33 (ii) für  $K = [a, b]$  mit  $a = -3$  und  $b = 1$

(iii) Sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{|x|} = \infty.$$

Dann gilt: In

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \cdot y - g(x))$$

wird das Supremum für ein endliches  $x \in \mathbb{R}$  angenommen (da  $x \cdot y - g(x) \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ ). Berechne  $x$  maximal als Lösung von  $y - g'(x) = 0$ . Falls  $g'$  streng monoton ist, gibt es höchstens eine solche Lösung. Für  $y \in \mathbb{R}$  gilt dann

$$g^*(y) = (g')^{-1}(y) y - g((g')^{-1}(y)).$$

Falls  $g \in C^2$  gilt, so können wir folgende Rechnung machen:

$$\begin{aligned} (g^*)'(y) &= (g')^{-1}(y) + ((g')^{-1}(y))' y - g'((g')^{-1}(y)) ((g')^{-1}(y))' \\ &= (g')^{-1}(y). \end{aligned}$$

Das heißt, dass wir unter geeigneten Voraussetzungen an  $g$  die Formel

$$(g^*)'(y) = (g')^{-1}(y)$$

erhalten. In der Theorie erhalten wir dann  $g^*$ , indem wir  $g$  ableiten, die Umkehrfunktion von  $g'$  bestimmen und zu dieser eine Stammfunktion finden.

## 5 Bairescher Kategoriensatz und seine Konsequenzen

**Satz 5.1** (Bairescher Kategoriensatz). Sei  $(X, d)$  ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum. Sei  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von in  $X$  abgeschlossenen Mengen und gelte

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Dann gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so dass das Innere von  $A_{k_0}$  nicht leer ist, d. h. so dass  $A_{k_0}^\circ \neq \emptyset$  gilt.

*Beweis.* Angenommen für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $A_k^\circ = \emptyset$ . Dann ist für alle offenen, nicht-leeren Teilmengen  $U \subset X$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  die Menge  $U \setminus A_k$  offen und nicht leer; insbesondere existiert in dieser Situation ein  $x \in X$  und ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , o. E.  $\varepsilon \leq 1/k$ , mit

$$\overline{B_\varepsilon(x)} \subset (U \setminus A_k).$$

Wir wählen für den ersten Schritt  $U = X$  und konstruieren dann auf obige Weise induktiv Folgen  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $X$  und  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon_k \leq 1/k \quad \text{und} \quad \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset (B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k)$$

gilt. Dann ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $X$ , denn: Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt es nach Konstruktion ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\varepsilon_k \leq \varepsilon$  und für alle  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq k}$  gilt dann

$$x_\ell \in B_{\varepsilon_k}(x_k).$$

Da  $X$  vollständig ist, existiert ein  $x \in X$  mit  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Weil für alle  $k \in \mathbb{N}$  fast alle Folgenglieder von  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  im abgeschlossenen  $\varepsilon_k$ -Ball um  $x_k$  liegen, muss dies auch für den Grenzwert  $x$  gelten, d. h. für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset X \setminus A_k.$$

Es folgt der Widerspruch

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (X \setminus A_k) = X \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset. \quad \blacksquare$$

### Bemerkung:

Die Vollständigkeit von  $X$  ist hier entscheidend. Als Gegenbeispiel betrachte man  $X = \mathbb{Q}$ .

**Satz 5.2** (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $Y$  ein normierter Raum und  $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$ . Es gelte für alle  $x \in X$ :

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty.$$

Dann existieren ein  $x_0 \in X$ , ein  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  und ein  $C \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass gilt:

$$\forall x \in \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \quad \forall f \in \mathcal{F}: \quad \|f(x)\|_Y \leq C.$$

*Beweis.* Die Menge

$$A_k := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{x \in X \mid \|f(x)\|_Y \leq k\}$$

ist für alle  $k \in \mathbb{N}$  abgeschlossen. Außerdem gibt es nach Voraussetzung für alle  $x \in X$  ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $f \in \mathcal{F}$  gilt:  $\|f(x)\| \leq k$ . Also gilt

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Der Bairescher Kategoriensatz (5.1) liefert: es existieren  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in X$ ,  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \subset A_{k_0}.$$

■

**Satz 5.3** (Banach-Steinhaus). Sei  $X$  ein Banachraum,  $Y$  ein normierter Raum und  $\mathcal{T} \subset L(X, Y)$ . Für alle  $x \in X$  gelte:  $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty$ . Dann folgt schon

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty.$$

*Beweis.* Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 5.2) liefert: es gibt  $x_0 \in X$ ,  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $C \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $x \in X$  gilt:

$$\|x - x_0\| \leq \varepsilon_0 \implies \forall T \in \mathcal{T}: \|Tx\| \leq C.$$

Damit folgt, dass für alle  $x \in \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)}$  und alle  $T \in \mathcal{T}$  gilt:

$$\left\| T \left( \frac{x - x_0}{\varepsilon_0} \right) \right\| \leq \frac{C + \sup_{\tilde{T} \in \mathcal{T}} \|\tilde{T}x_0\|_Y}{\varepsilon_0} =: C_0.$$

Es folgt  $\|T\| \leq C_0$ , denn  $\frac{x - x_0}{\varepsilon_0}$  nimmt alle Vektoren der Norm kleiner-gleich eins an.

■

**Bemerkung 5.4.**

- (i) Der Satz von Banach-Steinhaus (5.3) liefert das erstaunliche Resultat, dass eine punktweise beschränkte Familie von stetigen linearen Operatoren schon beschränkt in der Operatornorm ist.

- (ii) Punktweise Grenzwerte von stetigen Funktionen sind im Allgemeinen nicht stetig. Aus dem Satz von Banach-Steinhaus (5.3) folgt aber, dass dies für lineare Abbildungen doch gilt.
- (iii) Ist  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von linearen Operatoren mit punktwisem Grenzwert  $T$ , so gilt im Allgemeinen nicht  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Es gilt aber eine etwas schwächere Aussage, siehe Korollar 5.5.

**Korollar 5.5.** Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume. Sei  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L(X, Y)$ , so dass für alle  $x \in X$  die Folge  $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $Y$  konvergiert. Setzen wir

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$$

für alle  $x \in X$ , so gilt:

- (a)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$
- (b)  $T \in L(X, Y)$
- (c)  $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$

*Beweis.* Zunächst ist aufgrund der Linearität des Grenzwerts klar, dass auch  $T$  linear ist. Aussage (a) folgt unmittelbar aus dem Satz von Banach-Steinhaus (5.3). Es existiert somit ein  $C \in \mathbb{R}_{>0}$ , welches  $\|T_n\| \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt. Somit gilt für alle  $x \in X$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \|T_n x\| &\leq \|T_n\| \cdot \|x\| \\ &\leq C \|x\| \end{aligned}$$

Aus der unteren Ungleichung erhalten wir im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  für alle  $x \in X$  die Ungleichung  $\|Tx\| \leq C \|x\|$ , woraus folgt, dass  $T$  stetig ist. Damit ist also (b) gezeigt. Aus der oberen Ungleichung erhalten wir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\|,$$

und weil  $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $x \in X$  konvergiert, gilt für alle  $x \in X$  mit  $\|x\| \leq 1$  (mithilfe der Stetigkeit der Norm):

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|.$$

Daraus folgt (c). ■

**Korollar 5.6.** Sei  $Z$  ein Banachraum über  $\mathbb{K}$  und  $B \subset Z$  eine Teilmenge von  $Z$ . Für alle  $f \in Z'$  sei  $f(B) \subset \mathbb{K}$  beschränkt. Dann ist  $B$  beschränkt in  $Z$ .

*Beweis.* Nutze Banach-Steinhaus (Satz 5.3) mit (in den dortigen Bezeichnern)  $X = Z'$ ,  $Y = \mathbb{K}$  und

$$\mathcal{T} = \{J_{Z'}(b) \mid b \in B\} \subset Z''$$

(mit  $J_{Z'}$  wie nach Definition 4.17, d. h. für  $b \in B$  und  $f \in Z'$  gilt  $J_{Z'}(b)(f) = f(b)$ ). Nach Voraussetzung gilt für alle  $f \in Z'$ :

$$\sup_{b \in B} |J_{Z'}(b)(f)| = \sup_{b \in B} |f(b)| < \infty.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus gilt also:

$$\sup_{b \in B} \|J_{Z'}(b)\| = \sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty.$$

Nach Satz 4.18 ist  $J_X$  aber eine Isometrie, also folgt

$$\sup_{b \in B} \|b\| = \sup_{b \in B} \|J_{Z'}(b)\| < \infty,$$

aber dies bedeutet gerade, dass  $B$  in  $Z$  beschränkt ist. ■

**Bemerkung:** Im endlich-dimensionalen besagt dieses Korollar: Eine Menge ist beschränkt, falls die Projektion auf alle Komponenten beschränkt ist. (Das Korollar ist also eine Verallgemeinerung dieser Tatsache.)

**Korollar 5.7.** Sei  $Z$  ein Banachraum über  $\mathbb{K}$  und sei  $A \subset Z'$  eine Teilmenge des Dualraums. Sei außerdem für alle  $x \in Z$  die Menge

$$A(x) := \{f(x) \mid f \in A\}$$

beschränkt in  $\mathbb{K}$ . Dann ist  $A$  beschränkt in  $Z'$ .

*Beweis.* Folgt unmittelbar aus Banach-Steinhaus (Satz 5.3) mit (in den dortigen Bezeichnern)  $X = Z$ ,  $Y = \mathbb{K}$  und  $\mathcal{T} = A$ . ■

**Definition 5.8.** Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann ist  $f$  *offen*, wenn Bilder offener Mengen offen sind, d. h. wenn für alle in  $X$  offenen Teilmengen  $U \subset X$  auch  $f(U)$  offen in  $Y$  ist.

**Bemerkung:** Sind  $X, Y$  normierte Räume und ist  $f$  linear, so ist  $f$  genau dann offen, wenn es ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt mit

$$B_\delta(0) \subset f(B_1(0)).$$

**Satz 5.9** (Satz von der offenen Abbildung). Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und sei  $T \in L(X, Y)$ . Dann ist  $T$  genau dann surjektiv, wenn  $T$  offen ist.

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Es existiert also ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$B_\delta(0) \subset T(B_1(0)).$$

Durch Skalierung erhalten wir für alle  $k \in \mathbb{N}$ :

$$B_{k\delta}(0) \subset T(B_k(0)).$$

Daraus folgt, dass  $T$  surjektiv ist.

„ $\Rightarrow$ “: Weil  $T$  surjektiv ist, gilt

$$Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\overline{T(B_k(0))}}_{=: A_k}.$$

Wir wenden den Bairescher Kategoriensatz (5.1) auf die Folge  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  an und erhalten somit  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $y_0 \in Y$ ,  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)} \subset \overline{T(B_{k_0}(0))}.$$

Sei  $y \in \overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)}$ , dann gilt  $y_0 + y \in \overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)}$ . Wähle dann eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $B_{k_0}(0)$  mit

$$Tx_n \rightarrow y_0 + y \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Sei außerdem  $x_0 \in X$  mit  $Tx_0 = y_0$ . Dann erhalten wir

$$T(x_n - x_0) = Tx_n - y_0 \rightarrow y \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt:

$$T\left(\underbrace{\frac{x_n - x_0}{k_0 + \|x_0\|}}_{\in B_1(0)}\right) \rightarrow \underbrace{\frac{y}{k_0 + \|x_0\|}}_{\in B_\delta(0)} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

mit  $\delta := \frac{\varepsilon_0}{k_0 + \|x_0\|}$ . Das bedeutet aber:

$$B_\delta(0) \subset \overline{T(B_1(0))}.$$

Um die Behauptung zu zeigen, benötigen wir diese Inklusion aber ohne den Abschluss auf der rechten Seite. Sei dazu nun  $y \in B_\delta(0)$ . Dann gibt es ein  $x \in B_1(0)$  mit  $\|y - Tx\| < \delta/2$ . Daraus folgt:

$$2(-Tx + y) \in B_\delta(0).$$

Indem wir  $y_1 := y$  setzen, erhalten wir so induktiv Folgen  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $B_\delta(0)$  und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $B_1(0)$  mit folgender Eigenschaft für alle  $k \in \mathbb{N}$ :

$$y_{k+1} = 2(y_k - Tx_k).$$

Es folgt für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$2^{-k}y_{k+1} = 2^{-k+1}y_k - \underbrace{T(2^{-k+1}x_k)}_{=: a_k}$$

oder durch umstellen

$$a_k = 2^{-(k-1)}y_k - 2^{-k}y_{k+1}.$$

Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\sum_{k=1}^m a_k$  offenbar eine Teleskopsumme, also gilt:

$$\sum_{k=1}^m a_k = y_1 - 2^{-m} y_{m+1}.$$

Da  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, gilt  $2^{-m} y_{m+1} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ . Also erhalten wir:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T\left(\sum_{k=1}^m 2^{-(k-1)} x_k\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_k = y_1.$$

Außerdem konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} x_k$  in  $X$ , denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|2^{-(k-1)} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

womit man leicht zeigt, dass  $(\sum_{k=1}^m 2^{-(k-1)} x_k)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $X$  ist (und damit auch konvergent, aufgrund der Vollständigkeit von  $X$ ). Sei also  $\tilde{x} := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} x_k$ . Dann gilt wegen der Stetigkeit von  $T$  auch  $T(\tilde{x}) = y_1 = y$  und aus der obigen Betrachtung folgt außerdem  $\|\tilde{x}\| \leq 2 < 3$ . Also gilt  $B_{\delta}(0) \subset T(B_3(0))$  und durch Skalierung erhalten wir wie gewünscht:

$$B_{\delta/3}(0) \subset T(B_1(0)).$$

■

**Satz 5.10** (Satz von der inversen Abbildung). Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und sei  $T \in L(X, Y)$  bijektiv. Dann gilt:  $T^{-1} \in L(Y, X)$ .

*Beweis.* Weil  $T$  surjektiv ist, liefert der Satz von der offenen Abbildung (5.9), dass  $T$  offen ist. Daraus folgt unmittelbar, dass  $T^{-1}$  stetig ist.

■

**Korollar 5.11.** Sei  $X$  ein Vektorraum mit zwei Normen  $\|\cdot\|_{\textcircled{1}}$  und  $\|\cdot\|_{\textcircled{2}}$ . Außerdem gebe es ein  $C_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $x \in X$  die Ungleichung  $\|x\|_{\textcircled{2}} \leq C_1 \|x\|_{\textcircled{1}}$  gilt. Sei weiter  $(X, \|\cdot\|_{\textcircled{1}})$  ein Banachraum. Dann gilt:  $(X, \|\cdot\|_{\textcircled{2}})$  ist genau dann ein Banachraum, wenn es ein  $C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt mit  $\|x\|_{\textcircled{1}} \leq C_2 \|x\|_{\textcircled{2}}$  für alle  $x \in X$ .

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ ist klar.

„ $\Rightarrow$ “: Die Identität

$$\text{id}: (X, \|\cdot\|_{\textcircled{1}}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_{\textcircled{2}})$$

ist stetig und bijektiv. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert:

$$\text{id}^{-1}: (X, \|\cdot\|_{\textcircled{2}}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_{\textcircled{1}})$$

ist stetig. Daraus erhalten wir eine Konstante  $C_2$  wie gefordert.

■



**Satz 5.12** (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume,  $D(T)$  ein Unterraum von  $X$  und sei  $T: D(T) \rightarrow Y$  eine lineare Abbildung. Sei

$$\text{graph}(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y \mid x \in D(T)\}$$

der Graph von  $T$  in  $X \times Y$ . Dabei wird  $X \times Y$  zu einem Banachraum bezüglich folgender Norm:

$$\|\cdot\|: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y) \mapsto \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Dann gilt: Ist  $D(T)$  abgeschlossen, so ist  $\text{graph}(T)$  genau dann abgeschlossen in  $X \times Y$ , wenn  $T \in L(D(T), Y)$  gilt.

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: klar, denn: Sei  $(x_n, Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\text{graph}(T)$ , die in  $X \times Y$  konvergiert. Sei  $x \in X$  der Grenzwert von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so gilt wegen der Stetigkeit von  $T$  auch  $Tx_n \rightarrow Tx$  für  $n \rightarrow \infty$ , aber  $(x, Tx) \in \text{graph}(T)$  gilt nach Definition von  $\text{graph}(T)$ .

„ $\Rightarrow$ “: Da  $\text{graph}(T)$  abgeschlossen ist, muss dieser Raum (mit der Einschränkung der Norm von  $X \times Y$ ) ein Banachraum sein. Seien  $P_X$  und  $P_Y$  die Projektionen  $X \times Y \rightarrow X$  bzw.  $X \times Y \rightarrow Y$ . Dann sind  $P_X, P_Y$  stetig und linear und  $P_X$  ist bijektiv von  $\text{graph}(T)$  auf  $D(T)$ . Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert:

$$P_X^{-1} \in L(D(T), \text{graph}(T)).$$

Daraus folgt:  $T = P_Y P_X^{-1} \in L(D(T), Y)$ . ■

**5.13** (Projektoren). Sei  $Z$  ein Vektorraum und  $A \subset Z$ . Sei weiter  $X$  ein normierter Raum und  $Y \subset X$  ein Unterraum.

- (1) Eine Abbildung  $P: Z \rightarrow Z$  ist eine *Projektion auf  $A$* , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$P(Z) \subset A \quad \text{und} \quad P|_A = \text{Id}_A.$$

Äquivalent kann man fordern:

$$P(Z) = A \quad \text{und} \quad P^2 = P \circ P = P.$$

Es folgt:

$$P(\text{Id} - P) = (\text{Id} - P)P = 0.$$

Beispiel: orthogonale Projektionen im euklidischen Raum sind Projektionen.

- (2) Sei  $P: X \rightarrow Y$  eine lineare Projektion auf  $Y$ . Dann gilt  $Y = R(P)$  und  $\text{Id} = (\text{Id} - P) + P$  und  $(\text{Id} - P)$  ist eine Projektion auf  $N(P)$ . (Zur Definition des Bildraums  $R(\cdot)$  und des Nullraums  $N(\cdot)$ , siehe Definition 3.6.)

Es gilt  $X = N(P) \oplus R(P) = R(\text{Id} - P) \oplus N(\text{Id} - P)$ ,  $N(P) = R(\text{Id} - P)$  und  $R(P) = N(\text{Id} - P)$ , denn:

Für  $x \in X$  gilt:  $x = (x - Px) + Px$  mit  $(x - Px) \in N(P)$  und  $Px \in R(P)$ . Ist  $x \in N(P) \cap R(P)$ , so gilt  $Px = 0$  und  $x = Px$ , also  $x = 0$ . Außerdem gelten folgende Äquivalenzen:

$$x \in N(\text{Id} - P) \iff x - Px = 0 \iff x = Px \iff x \in R(P).$$

Also gilt  $N(\text{Id} - P) = R(P)$ .

- (3) Eine Abbildung  $P: X \rightarrow X$  ist ein *Projektor auf  $Y$* , falls  $P$  eine stetige lineare Projektion auf  $Y$  ist. Es sei

$$\text{Pr}(X) := \{P: X \rightarrow X \mid P \text{ ist Projektor}\}.$$

Falls  $P$  ein Projektor ist, so ist klarerweise auch  $\text{Id} - P$  ein Projektor und  $N(P)$  sowie  $R(P) = N(\text{Id} - P)$  sind abgeschlossen.

**Satz 5.14** (Satz vom abgeschlossenen Komplement). Sei  $X$  ein Banachraum und seien  $Y$  und  $Z$  Unterräume von  $X$ . Außerdem gelte  $X = Z \oplus Y$  und  $Y$  sei abgeschlossen. Dann gilt: Der Unterraum  $Z$  ist genau dann abgeschlossen, wenn es einen stetigen Projektor  $P$  auf  $Y$  mit  $N(P) = Z$  gibt.

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ ist klar, da  $P$  stetig ist.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $\tilde{X} := Z \times Y$ . Definiere

$$T: \tilde{X} \rightarrow X, \quad (z, y) \mapsto z + y.$$

Dann ist  $T$  linear, bijektiv und stetig (wie man mithilfe der  $\Delta$ -Ungleichung einsieht). Weil  $Y$  und  $Z$  abgeschlossen sind, ist auch  $\tilde{X}$  ein abgeschlossener Unterraum von  $X \times X$  und damit ein Banachraum. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert  $T^{-1} \in L(X, \tilde{X})$ . Sei

$$P: X \rightarrow Y, \quad z + y \mapsto y \quad (\text{mit } z \in Z \text{ und } y \in Y).$$

Dann ist  $P$  eine lineare Projektion auf  $Y$  und es gilt  $N(P) = Z$ . Außerdem ist  $P$  stetig, denn es gilt  $P = P_Y T^{-1}$ , wobei  $P_Y$  die Projektion  $\tilde{X} \rightarrow Y$  auf die zweite Komponente ist. Damit ist  $P$  der gesuchte Projektor. ■

**Definition 5.15.** Seien  $X$  und  $Y$  normierte Vektorräume und  $T \in L(X, Y)$ . Dann ist der *adjungierte Operator  $T'$*  die Abbildung

$$T': Y' \rightarrow X' \\ y' \mapsto \begin{pmatrix} X \mapsto \mathbb{K} \\ x \mapsto y'(Tx) \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung:** Es gilt

$$|(T'y')(x)| = |y'(Tx)| \leq \|y'\| \cdot \|Tx\| \leq \|y'\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

für alle  $y' \in Y'$  und alle  $x \in X$ . Dies zeigt, dass  $T'$  wohldefiniert ist ( $T'y' \in X'$  für alle  $y' \in Y'$ ) und dass  $\|T'y'\| \leq \|y'\| \cdot \|T\|$  gilt. Daraus folgt  $T' \in L(Y', X')$ .

**Beispiel 5.16** (Shift-Operator). Wir betrachten auf  $\ell^2$  über  $\mathbb{R}$  den Shift-Operator

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, \dots).$$

Wir möchten nun  $T'$  bestimmen. Später zeigen wir:  $(\ell^2)'$  kann mit  $\ell^2$  identifiziert werden. Jedes  $x \in \ell^2$  definiert einen linearen Operator auf  $\ell^2$  durch  $x'(y) = (x, y)_{\ell^2} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$  für alle  $y \in \ell^2$ . Dies liefert schon  $(\ell^2)'$ . Wir fordern für  $y' \in (\ell^2)'$ , dargestellt durch  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$y'(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} y_n = \sum_{n=2}^{\infty} x_n \tilde{y}_n \stackrel{!}{=} (T' y')(x),$$

wobei  $\tilde{y}_n = y_{n-1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Dies zeigt, dass

$$T': Y' \rightarrow X', \quad (y_1, y_2, \dots) \mapsto (0, y_1, y_2, \dots)$$

gilt. Dabei haben wir  $TT' = \text{Id}$ , aber  $T'T \neq \text{Id}$ .

**Satz 5.17.** Seien  $X$  und  $Y$  normierte Räume.

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} ' : L(X, Y) &\rightarrow L(Y', X') \\ y &\mapsto y' \end{aligned}$$

ist eine lineare Isometrie.

(ii) Sei  $Z$  ein weiterer normierter Raum. Für alle  $T \in L(X, Y)$  und  $S \in L(Y, Z)$  gilt

$$(ST)' = T' S'.$$

*Beweis.*

(i) Die Linearität rechnet man leicht nach. Sei  $T \in L(X, Y)$ . Dann gilt für alle  $y' \in Y'$

$$\|T' y'\| \leq \|y'\| \cdot \|T\|, \quad \text{woraus} \quad \|T'\| \leq \|T\| \quad \text{folgt.}$$

Dass wir tatsächlich auch Gleichheit haben, sehen wir wie folgt ein (– um die Notation übersichtlicher zu halten, bezeichne  $\bar{B}_1^X := \overline{B_1^X(0)}$  die abgeschlossene Einheitskugel in  $X$  und  $\bar{B}_1^{Y'} := \overline{B_1^{Y'}(0)}$  diejenige in  $Y'$ ):

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in \bar{B}_1^X} \|Tx\| = \sup_{x \in \bar{B}_1^X} \sup_{y' \in \bar{B}_1^{Y'}} |y'(Tx)| \\ &= \sup_{y' \in \bar{B}_1^{Y'}} \sup_{x \in \bar{B}_1^X} |y'(Tx)| = \sup_{y' \in \bar{B}_1^{Y'}} \|T' y'\| = \|T'\|. \end{aligned}$$

(Die zweite Gleichheit gilt dabei nach Satz 4.18.)

(ii) Seien  $T \in L(X, Y)$ ,  $S \in L(Y, Z)$  und  $z' \in Z'$  sowie  $x \in X$ . Dann gilt:

$$((ST)' z')(x) = z'(STx) = (S' z')(Tx) = (T' S' z')(x).$$

Es folgt die Behauptung. ■

Mit Hilfe der adjungierten Abbildung können wir die Lösbarkeit von linearen Gleichungen untersuchen. Dazu benötigen wir zunächst einige Hilfsaussagen.

**Satz 5.18.** Seien  $X, Y$  Banachräume und sei  $T \in L(X, Y)$ . Dann gilt

$$\overline{R(T)} = (N(T'))^\perp.$$

*Beweis.* „ $\subset$ “: Sei  $x \in X$  und  $y := Tx \in R(T)$ . Gilt  $y' \in N(T')$ , so folgt

$$y'(y) = y'(Tx) = \underbrace{(T'y')(x)}_{=0} = 0.$$

Es folgt  $R(T) \subset (N(T'))^\perp$ . Da  $N(T')^\perp$  abgeschlossen ist (Bemerkung 4.21 (ii)), folgt

$$\overline{R(T)} \subset (N(T'))^\perp.$$

„ $\supset$ “: Setze  $U := \overline{R(T)}$ . Es sei  $y \notin U$ . Zeigen wir nun  $y \notin (N(T'))^\perp$ , so sind wir fertig. Aus Korollar 4.16 erhalten wir ein  $y' \in Y'$  mit  $y'|_U = 0$  und  $y'(y) \neq 0$ . Insbesondere gilt  $y'(Tx) = 0$  für alle  $x \in X$ . Also haben wir sicher  $y' \in N(T')$  und wegen  $y'(y) \neq 0$  gilt auch  $y' \notin (N(T'))^\perp$ . ■

**Korollar 5.19.** Seien  $X, Y$  Banachräume und sei  $T \in L(X, Y)$ . Sei weiter  $R(T)$  abgeschlossen und  $y \in Y$ . Dann ist  $Tx = y$  genau dann lösbar, wenn  $y'(y) = 0$  für alle  $y' \in N(T')$ .

*Beweis.* Die Hinrichtung ist klar. Zur Rückrichtung: Aus  $y'(y) = 0$  für alle  $y' \in N(T')$  folgt sofort  $y \in (N(T'))^\perp$  und damit:

$$y \in (N(T'))^\perp = \overline{R(T)} = R(T).$$

■

**Bemerkung:**

- (i) Korollar 5.19 liefert die Existenz einer Lösung durch Bedingungen an den Nullraum von  $T'$ .
- (ii) Falls  $T'$  injektiv ist, brauchen wir im Fall, dass  $R(T)$  abgeschlossen ist, *keine* Zusatzbedingungen mehr, denn: Mit  $N(T') = \{0\}$  und  $R(T)$  abgeschlossen sind die Voraussetzungen aus Korollar 5.19 sicher erfüllt.

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, die Abgeschlossenheit von  $R(T)$  zu überprüfen. Wir wollen nun also Kriterien finden, die dies vereinfachen.

**Satz 5.20.** Sei  $X$  ein normierter Raum und  $Y$  ein abgeschlossener Unterraum. Dann wird durch

$$X/U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \hat{x} \mapsto \inf_{y \in \hat{x}} \|y\|$$

eine Norm auf dem Quotientenvektorraum definiert. Ist  $X$  vollständig, so auch  $X/U$ .

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe.

**Lemma 5.21.** Seien  $X, Y$  Banachräume und sei  $T \in L(X, Y)$ . Sei weiter  $R(T)$  abgeschlossen. Dann existiert ein  $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit folgender Eigenschaft:

$$\forall y \in R(T) \exists x \in X: Tx = y \wedge \|x\| \leq K\|y\|.$$

*Beweis.* Sei  $\hat{T}$  die lineare und stetige Bijektion, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & R(T) \\ \downarrow & \nearrow \hat{T} & \\ X/N(T) & & \end{array}$$

(dabei sei die vertikale Abbildung die kanonische Projektion). Da  $R(T)$  abgeschlossener Teilraum des Banachraums  $Y$  ist, ist auch  $R(T)$  ein Banachraum. Auch  $X/N(T)$  ist ein Banachraum, da  $N(T)$  abgeschlossen ist. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert, dass  $\hat{T}^{-1}$  stetig ist. Also existiert ein  $\hat{K} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\|\hat{T}^{-1}y\| \leq \hat{K}\|y\|$ . Mit der Definition der Norm auf  $X/N(T)$  folgt: Es existiert ein  $x \in \hat{T}^{-1}y$  mit  $\|x\| \leq (\hat{K} + 1)\|y\|$  und da  $\hat{T}^{-1}y$  gerade alle  $x \in X$  mit  $Tx = y$  enthält, folgt die Behauptung. ■

**Lemma 5.22.** Seien  $X, Y$  Banachräume über  $\mathbb{K}$  und sei  $T \in L(X, Y)$ . Weiter sei  $K \in \mathbb{R}_{> 0}$ , so dass für alle  $y' \in Y'$  gilt:

$$K\|y'\| \leq \|T'y'\|.$$

Dann ist  $T$  offen und insbesondere surjektiv.

*Beweis.* Es bezeichne  $U_\varepsilon := B_\varepsilon^X(0)$  den offenen  $\varepsilon$ -Ball in  $X$  und  $V_\varepsilon := B_\varepsilon^Y(0)$  denjenigen in  $Y$ . Bei der Betrachtung offener Abbildungen hatten wir schon gesehen, dass es genügt  $V_K \subset T(U_1)$  zu zeigen. Wie im Beweis des Satzes von der offenen Abbildung (5.9) genügt es sogar,  $V_K \subset \overline{T(U_1)} =: D$  zu zeigen. Sei  $y_0 \in V_K$ , d. h.  $\|y_0\| < K$ . Angenommen es gilt  $y_0 \notin D$ . Dann existiert nach Hahn-Banach in der zweiten geometrischen Formulierung (Satz 4.15) ein  $y' \in Y'$  und ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit

$$\operatorname{Re} y'(y) \leq \alpha < \operatorname{Re} y'(y_0) \leq |y'(y_0)|$$

für alle  $y \in D$ . Wegen  $0 \in D$  und  $y'(0) = 0$  gilt  $0 \leq \alpha$ . Wegen der echten Ungleichheit in  $\alpha < \operatorname{Re} y'(y_0)$  können wir o. E.  $\alpha > 0$  annehmen und indem wir  $y'$  durch  $y'/\alpha$  ersetzen, können wir annehmen, dass  $\alpha = 1$  gilt. Weil  $T$  linear ist, liegt für alle  $y \in D$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  mit  $|\lambda| \leq 1$  auch  $\lambda y$  in  $D$ . Ist also  $y \in D$  mit  $y'(y) \neq 0$ , so gilt auch  $y|y'(y)|/y'(y) \in D$ , und damit folgt:

$$|y'(y)| = y'(y) \frac{|y'(y)|}{y'(y)} = y' \left( y \frac{|y'(y)|}{y'(y)} \right) \leq 1.$$

Also gilt für alle  $y \in D$  sogar

$$|y'(y)| \leq 1 < |y'(y_0)|.$$

Für alle  $x \in U_1$  (und damit  $Tx \in D$ ) gilt somit

$$|y'(Tx)| = |(T'y')(x)| \leq 1,$$

woraus wir  $\|T'y'\| \leq 1$  erhalten.

Es folgt

$$1 < |y'(y_0)| \leq \|y'\| \|y_0\| \leq K\|y'\| \leq \|T'y'\| \leq 1,$$

ein Widerspruch. Also muss doch  $y_0 \in D$  gelten und damit sind wir fertig. ■

**Bemerkung:** Aus Satz 5.18 und Korollar 5.19 erhalten wir, dass  $T'$  genau dann injektiv ist, wenn  $T$  dichtes Bild hat. Außerdem folgt aus der Injektivität von  $T'$  und abgeschlossenem  $R(T)$ , dass  $T$  surjektiv ist. Obiges Lemma 5.22 verschärft diese Aussage noch.

**Satz 5.23** (Satz vom abgeschlossenen Bild). Seien  $X, Y$  Banachräume über  $\mathbb{K}$  und sei  $T \in L(X, Y)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i)  $R(T)$  ist abgeschlossen

(ii)  $R(T) = (N(T'))^\perp$

(iii)  $R(T')$  ist abgeschlossen

(iv)  $R(T') = (N(T))^\perp$

*Beweis.* „(i) $\Leftrightarrow$ (ii)“ folgt aus Satz 5.18.

„(i) $\Rightarrow$ (iv)“: Es gilt stets  $R(T') \subset (N(T))^\perp$  (da  $T'y'(x) = y'(Tx) = 0$  für alle  $x \in N(T)$ ). Sei  $x' \in (N(T))^\perp$ . Betrachte dann die Abbildung

$$z': R(T) \rightarrow \mathbb{K}, \quad y \mapsto x'(x) \quad \text{falls } Tx = y.$$

Es ist  $z'$  wohldefiniert, denn: für  $x_1, x_2 \in X$  mit  $Tx_1 = y = Tx_2$  gilt  $T(x_1 - x_2) = 0$ , also  $x_1 - x_2 \in N(T)$ , also  $x'(x_1 - x_2) = 0$ , also  $x'(x_1) = x'(x_2)$ . Die Abbildung  $z'$  ist auch stetig, denn: Aus Lemma 5.21 erhalten wir ein  $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so dass für alle  $y \in R(T)$  ein  $x \in X$  existiert mit  $Tx = y$  und  $\|x\| \leq K\|y\|$ . Für solche  $x$  gilt:

$$|z'(y)| = |x'(x)| \leq \|x'\| \|x\| \leq K\|x'\| \|y\|.$$

Daraus folgt die Stetigkeit von  $z'$ . Wir setzen nun  $z'$  mittels Satz 4.6 zu  $y' \in Y'$  fort. Dann gilt  $x' = T'y'$ , denn für alle  $x \in X$  gilt

$$x'(x) = z'(Tx) = y'(Tx) = (T'y')(x).$$

Dies zeigt  $(N(T))^\perp \subset R(T')$ .

„(iv) $\Rightarrow$ (iii)“: Klar, da  $((N(T))^\perp)^\perp$  stets abgeschlossen ist (Bemerkung 4.21).

„(iii) $\Rightarrow$ (i)“: Definiere  $Z := \overline{R(T)}$  und  $S \in L(X, Z)$  durch  $Sx := Tx$  für alle  $x \in X$ . Für  $y' \in Y'$  und  $x \in X$  gilt dann

$$(T'y')(x) = y'(Tx) = y'|_Z(Sx) = (S'(y'|_Z))(x).$$

D. h.  $T'y' = S'(y'|_Z)$ . Dies zeigt  $R(T') \subset R(S')$ . Ist  $S'(z') \in R(S')$ , so gilt für jede gemäß Satz 4.6 gewählte Fortsetzung  $y' \in Y'$  von  $z' \in Z'$  (nach demselben Argument wie oben)  $S'z' = T'y'$ . Dies zeigt  $R(T') = R(S')$ . Nach Voraussetzung ist somit  $R(S')$  abgeschlossen.

Nach Satz 5.18 gilt  $\overline{R(S)} = (N(S'))^\perp$  und da  $S$  dichtes Bild hat, folgt, dass  $S'$  injektiv ist. Also ist  $S'$  eine stetige Bijektion zwischen den Banachräumen  $Z'$  und  $R(S')$ . Aus dem Satz von der inversen Abbildung (5.10) folgt:

$$\exists C \in \mathbb{R}_{>0} \forall z' \in Z': \quad C\|z'\| \leq \|S'z'\|.$$

Lemma 5.22 liefert  $R(S) = Z$ . Damit gilt aber auch  $R(T) = Z$  und weil  $Z$  nach Definition abgeschlossen ist, hat  $T$  somit abgeschlossenes Bild. ■

**Bemerkung 5.24.** Oft ist es einfacher zu zeigen, dass  $R(T')$  abgeschlossen ist, als  $R(T)$  zu bestimmen. Dann erhält man mit dem Satz vom abgeschlossenen Bild (5.23) direkt:  $R(T)$  abgeschlossen,  $R(T) = (N(T'))^\perp$ . Man bekommt also Informationen über  $R(T)$ , indem man  $T'$  betrachtet.

Beispiel: Ist  $T'$  injektiv, dann folgt  $N(T) = \{0\}$  und daraus  $R(T) = (N(T'))^\perp = Y$ .

## 6 Hilberträume

Siehe 2.7 (c). Eine wichtige Eigenschaft von Hilberträumen ist, dass stets orthogonale Projektionen auf abgeschlossene, konvexe Teilmengen existieren.

**Satz 6.1** (Projektionssatz). Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $K \subset H$  eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Dann existiert für jedes  $f \in H$  ein eindeutiges  $u \in K$ , so dass gilt:

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| = \text{dist}(f, K).$$

Das Element  $u \in H$  ist eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$u \in K \quad \text{und für alle } v \in K \text{ gilt} \quad \text{Re}\langle f - u, v - u \rangle \leq 0.$$

Das Element  $u$  nennen wir dann *Projektion von  $f$  auf  $K$*  und wir schreiben dafür  $u = P_K(f)$ .

*Beweis.* Wähle eine Minimalfolge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $K$  für das Infimum  $\text{dist}(f, K)$ , also mit  $d_n := \|f - v_n\| \rightarrow \inf_{v \in K} \|f - v\| =: d$ . Wir behaupten, dass dann  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schon eine Cauchyfolge sein muss. Dazu wenden wir die Parallelogramm-Identität (Satz 2.8 (3)) auf  $f - v_n$  und  $f - v_m$  an. Wir erhalten:

$$\|2f - (v_n + v_m)\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2(d_n^2 + d_m^2).$$

Da  $K$  konvex ist, gilt  $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$ , und es folgt:

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d.$$

Nach Multiplizieren der vorherigen Ungleichung mit 1/4 folgt somit:

$$\left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tatsächlich eine Cauchy-Folge. Weil  $K$  eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raums ist, ist  $K$  insbesondere vollständig. Also konvergiert  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $K$  und es gibt ein  $v \in K$  mit  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ . Für dieses gilt dann

$$\|f - v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\| = d = \text{dist}(f, K).$$

Wir zeigen nun, dass die beiden Charakterisierungen aus der Behauptung äquivalent sind. Sei hierzu für  $u \in K$  die erste Bedingung erfüllt. Wähle  $w \in K$ . Dann folgt für  $t \in [0, 1]$

$$v = (1 - t)u + tw \in K.$$



Damit erhalten wir für alle  $t \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \|f - u\| &\leq \|f - (1 - t)u + tw\| = \|(f - u) - t(w - u)\| \\ \implies \|f - u\|^2 &\leq \|f - u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle f - u, w - u \rangle + t^2\|w - u\|^2 \\ \implies 2\operatorname{Re}\langle f - u, w - u \rangle &\leq t^2\|w - u\|^2 \end{aligned}$$

Für  $t \rightarrow 0$  erhalten wir die zweite Charakterisierung. Sei umgekehrt letztere gegeben für  $u \in K$ . Dann gilt

$$\|u - f\|^2 - \|v - f\|^2 = \|u - f\|^2 - \|v - u + (u - f)\|^2 = 2\operatorname{Re}\langle f - u, v - u \rangle - \|u - v\|^2 \leq 0,$$

woraus die erste Charakterisierung folgt.

Zur Eindeutigkeit: Angenommen  $u_1, u_2 \in K$  erfüllen beide die zweite Charakterisierung. Dann gilt für alle  $v \in K$

$$\operatorname{Re}\langle f - v_1, v - u_1 \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\langle f - v_2, v - u_2 \rangle \leq 0.$$

Wähle in der ersten Ungleichung  $v = u_2$ , in der zweiten  $v = u_1$  und addiere beide Gleichungen. Dann erhalten wir

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \operatorname{Re}\langle u_1 - u_2, v_1 - v_2 \rangle \leq 0,$$

woraus  $u_1 = u_2$  folgt. ■

**Bemerkung 6.2.** Das Problem im obigen Satz ist ein Minimierungsproblem. Auch in anderen bereits bekannten Problemen wird ein Minimum durch Ungleichungen beschrieben. Betrachte zum Beispiel  $F \in C^1([0, 1])$  und  $F(u) = \min_{v \in [0, 1]} F(v)$ . Dann gilt  $F'(u) = 0$ , falls  $u \in (0, 1)$ ,  $F'(u) \geq 0$ , falls  $u = 0$  und  $F'(u) \leq 0$ , falls  $u = 1$ . Oder zusammengefasst:

$$u \in [0, 1] \quad \text{und für alle } v \in [0, 1] \text{ gilt} \quad F'(u)(v - u) \geq 0.$$

**Satz 6.3.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $K \subset H$  eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Dann nimmt der Abstand durch die Anwendung von  $P_K$  nicht zu, d. h.  $P_K$  ist Lipschitz zur Konstante 1, d. h. für alle  $f_1, f_2 \in H$  gilt

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

*Beweis.* Sei  $u_1 := P_K f_1$  und  $u_2 := P_K f_2$ . Dann gilt für alle  $v \in K$ :

$$\operatorname{Re}\langle f_1 - u_1, v - u_1 \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\langle f_2 - u_2, v - u_2 \rangle \leq 0.$$

Wähle einmal  $v = u_2$  und einmal  $v = u_1$  und erhalte durch Addition:

$$\operatorname{Re}\langle f_2 - u_2 - f_1 + u_1, u_1 - u_2 \rangle \leq 0.$$

Daraus folgt:

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|f_1 - f_2\| \|u_1 - u_2\|.$$

Nach Dividieren durch  $\|u_1 - u_2\|$  folgt die Behauptung. ■

**Korollar 6.4.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $M \subset H$  ein abgeschlossener Unterraum. Für  $f \in H$  ist  $P_M f =: u$  charakterisiert durch:  $u \in M$  und  $\langle f - u, v \rangle = 0$  für alle  $v \in M$ . Insbesondere ist  $P_M$  ein linearer stetiger Operator.

*Beweis.* Es gilt  $\operatorname{Re}\langle f - u, v - u \rangle \leq 0$  für alle  $v \in M$ . Sei  $w \in M$ . Dann gilt auch  $v = u + \langle f - u, w \rangle w \in M$  und damit

$$|\langle f - u, w \rangle|^2 = \operatorname{Re}(\overline{\langle f - u, w \rangle} \langle f - u, w \rangle) \leq 0,$$

woraus wie gewünscht

$$\langle f - u, w \rangle = 0$$

folgt. Gilt andererseits  $\langle f - u, w \rangle = 0$  für alle  $w \in M$ , so folgt für alle  $v \in M$  schon

$$\operatorname{Re}\langle f - v, v - u \rangle \leq 0,$$

da  $v - u \in M$ . Die Linearität ist nach der obigen Charakterisierung klar und die Stetigkeit folgt aus Satz 6.3. ■

**6.5 (Dualraum eines Hilbertraums).** In einem Hilbertraum  $H$  können wir durch

$$H \ni u \mapsto \langle u, f \rangle \in \mathbb{K}$$

für jedes  $f \in H$  ein lineares Funktional definieren. Der folgende Satz zeigt, dass wir dadurch sogar bereits alle linearen Funktionale erhalten.

**Satz:** (Riesz'scher Darstellungssatz)

Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{K}$ . Dann ist

$$J: H \rightarrow H'$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} H \rightarrow \mathbb{K} \\ y \mapsto \langle y, x \rangle \end{pmatrix}$$

ein isometrischer, konjugiert linearer Isomorphismus. (Dabei bedeutet konjugiert linear, dass  $J(\alpha x + y) = \bar{\alpha}J(x) + J(y)$  für alle  $x, y \in H$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  gilt.)

*Beweis.* Seien  $x, y \in H$ . Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 2.8 (1)) folgt

$$|J(x)(y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Daraus folgt  $J(x) \in X'$  mit  $\|J(x)\| \leq \|x\|$ . Wegen  $|J(x)(x)| = \|x\|^2$  gilt  $\|J(x)\| \geq \|x\|$ . Also ist  $J$  eine Isometrie und damit insbesondere injektiv. Der wesentliche Schritt ist nun, die Surjektivität von  $J$  zu zeigen. Sei dazu  $x'_0 \in X' \setminus \{0\}$ . Wähle  $P$  als orthogonale Projektion auf  $N(x'_0)$  (was ein abgeschlossener Unterraum ist). Wähle  $e \in X$  mit  $x'_0(e) = 1$  und definiere  $x_0 := e - Pe$ . Dann gilt  $x'_0(x_0) = 1 \neq 0$ . Aus dem Projektionssatz (6.1) folgt:

$$\forall y \in N(x'_0): \quad \langle y, x_0 \rangle = 0. \quad (\star)$$



Abbildung 6.1: Situation im Beweis des Riesz'schen Darstellungssatzes

Sei wieder  $x \in X$ . Dann gilt

$$x = \underbrace{(x - x'_0(x) x_0)}_{\in N(x'_0)} + x'_0(x) x_0$$

und damit wegen  $(\star)$ :

$$\langle x, x_0 \rangle = \langle x'_0(x) x_0, x_0 \rangle = x'_0(x) \|x_0\|^2.$$

Es folgt

$$x'_0(x) = \left\langle x, \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right\rangle = J \left( \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right) (x)$$

und daraus  $x' = J(x_0/\|x_0\|^2)$ . Also ist  $J$  surjektiv. ■

**6.6** (Soll man  $H$  mit  $H'$  identifizieren?). Der Riesz'sche Darstellungssatz erlaubt es uns,  $H$  mit  $H'$  zu identifizieren. Wir werden dies oft tun, aber nicht immer. Wir wollen eine Situation betrachten, in der man vorsichtig mit einer solchen Identifikation sein sollte:

Sei  $H$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und assoziierter Norm  $\|\cdot\|$ . Sei nun  $V \subset H$  ein linearer Unterraum, der dicht in  $H$  liegt. Wir nehmen an, dass  $V$  ein Banachraum ist mit Norm  $\|\cdot\|_V$ . Weiter sei die Inklusion  $V \hookrightarrow H$  stetig, d. h. es existiert ein  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $v \in V$  gilt:  $\|v\|_V \leq c\|v\|$ .

Ein Beispiel für eine solche Situation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= L^2([0, 1]) \\ &= \{v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} \mid \int_0^1 (v(x))^2 dx < \infty\} / \{v \mid v = 0 \text{ fast überall}\} \end{aligned}$$

mit Skalarprodukt  $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x) v(x) dx$  für  $u, v \in H$  und  $V = C([0, 1])$ . Dann existiert eine kanonische Abbildung

$$T: H' \rightarrow V', \quad x' \mapsto (v \mapsto x'(v)).$$

Wir sehen einfach ein, dass  $T$  stetig und injektiv ist. Nun identifizieren wir  $H'$  mit  $H$ , geschrieben  $H \simeq H'$ , und erhalten:  $V \subset H \simeq H' \subset V'$  ( $\diamond$ ), wobei dies alles stetige Injektionen sind. Problematisch wird diese Situation, falls  $V$  ein Hilbertraum mit eigenem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  und  $\|\cdot\|_V$  die zugehörige Norm ist. Wir könnten  $V$  mit  $V'$  identifizieren. Aber was bedeutet dann ( $\diamond$ )? Wir können also nicht gleichzeitig  $H$  mit  $H'$  und  $V$  mit  $V'$  identifizieren. Typischerweise verwendet man dann nur  $H \simeq H'$ .

Wir betrachten noch ein weiteres Beispiel:

$$H = \ell^2(\mathbb{R}) \quad \text{mit Skalarprodukt} \quad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n.$$

Weiter sei

$$V = \left\{ u \in H \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < \infty \right\},$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle\langle u, v \rangle\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n v_n.$$

Es gilt  $V \subset H$  und die Inklusion  $V \hookrightarrow H$  ist stetig. Wir identifizieren  $H'$  mit  $H$  und  $V'$  mit dem Raum

$$V' = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n^2 < \infty \right\},$$

indem wir für  $f \in V'$ ,  $v \in V$  die Anwendung von  $f$  auf  $v$  durch  $f(v) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n$  erklären (man rechnet leicht mit der Hölderschen Ungleichung nach, dass dies wohldefiniert ist). Dieser Raum ist offenbar echt größer als  $H$ . Die Isometrie  $J: V \rightarrow V'$  aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (6.5) ist dann gegeben durch

$$u \mapsto (n^2 u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Bemerkung 6.7.** Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{K}$ . Dann ist  $H$  reflexiv (Definition 4.19). Sei  $J$  der konjugiert lineare Isomorphismus aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (6.5). Es ist zu zeigen, dass  $J_H$  (aus Satz 4.18) surjektiv ist. Sei also  $x'' \in H''$ . Dann ist

$$x': H \rightarrow \mathbb{K}, \quad y \mapsto \overline{x''(Jy)}$$

ein Element in  $H'$ . Setze  $x := J^{-1}x'$ . Sei  $y' \in H'$  und  $y \in H$  mit  $Jy = y'$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} x''(y') &= x''(Jy) = \overline{x'(y)} = \overline{(Jx)(y)} = \overline{\langle y, x \rangle} \\ &= \langle x, y \rangle = (Jy)(x) = y'(x) = (J_H x)(y') \end{aligned}$$

Also gilt  $x'' = J_H x$  und damit ist  $J_H$  surjektiv.

**Bemerkung 6.8.** Sei  $H \simeq H'$  ein Hilbertraum und  $M \subset H$  ein Unterraum. Dann kann man den Annihilator  $M^\perp$  identifizieren mit

$$M^\perp = \{ u \in H \mid \forall v \in M: \langle v, u \rangle = 0 \}.$$

Außerdem gilt  $M \cap M^\perp = \{0\}$ . Wenn  $M$  abgeschlossen ist, so gilt  $M + M^\perp = H$ .

**Definition 6.9.** Sei  $H$  ein Hilbertraum. Wir nennen eine Sesquilinearform  $a$  auf  $H$  stetig, wenn es ein  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt, so dass gilt:

$$\forall u, v \in H: \quad |a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|.$$

Wir nennen  $a$  *koerziv*, wenn ein  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert, so dass gilt:

$$\forall u \in H: \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Für den Beweis des folgenden Theorems benötigen wir den Banach'schen Fixpunktsatz:

**Satz:** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $S: X \rightarrow X$  eine (strikte) Kontraktion. Dann besitzt  $S$  genau einen Fixpunkt.

**Theorem 6.10** (Stampacchia). Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{K}$  und  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  eine stetige, koerzive Sesquilinearform. Weiter sei  $K \subset H$  nicht leer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es für alle  $\varphi \in H'$  genau ein  $u \in K$ , so dass gilt:

$$\forall v \in K: \quad \operatorname{Re} a(v - u, u) \geq \operatorname{Re} \varphi(v - u). \quad (\star)$$

Ist  $a$  außerdem symmetrisch, so ist das Element  $u \in H$  eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$u \in K \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} a(u, u) - \operatorname{Re} \varphi(u) = \min_{v \in K} \left( \frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v) \right).$$

*Beweis.* Sei  $\varphi \in H'$  gegeben. Riez (6.5) liefert: es gibt genau ein  $f \in H$ , so dass für alle  $v \in H$  schon  $\varphi(v) = \langle v, f \rangle$  gilt. Andererseits ist für  $u \in H$  die Abbildung

$$v \mapsto a(v, u)$$

ein Element in  $H'$ . Also erhalten wir erneut mit Riesz: Es existiert genau ein  $Au \in H$ , so dass für alle  $v \in H$  gilt:

$$a(v, u) = \langle v, Au \rangle.$$

Seien  $C, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  entsprechende Konstanten für  $a$  wie in Definition 6.9. Dann gilt:

$$\|Au\| \leq \|a(\cdot, u)\| \leq C \|u\|.$$

Da  $a$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  im zweiten Argument konjugiert linear sind, folgt, dass  $A$  linear ist. Somit ergibt sich:

$$A \in L(H) \quad \text{und} \quad \|A\| \leq C.$$

Außerdem gilt für alle  $u \in H$ :

$$\operatorname{Re} \langle u, Au \rangle = \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Die Eigenschaft  $(\star)$  aus der Behauptung ist äquivalent zu:

$$\forall v \in K: \quad \operatorname{Re} \langle v - u, Au \rangle \geq \operatorname{Re} \langle v - u, f \rangle.$$

Für  $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$  ist dies wiederum äquivalent zu:

$$\forall v \in K: \quad \operatorname{Re}\langle v - u, \varrho f - \varrho Au + u - u \rangle \leq 0.$$

Aus dem Projektionssatz (6.1) folgt, dass dies äquivalent dazu ist, ein  $u \in K$  zu finden mit

$$u = P_K(\varrho f - \varrho Au + u).$$

Definiere für  $v \in K$ :

$$S(v) := P_K(\varrho f - \varrho Av + v).$$

Satz 6.3 liefert: für alle  $v_1, v_2 \in K$  gilt:

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq \|(v_1 - v_2) - \varrho(Av_1 - Av_2)\|.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \|Sv_1 - Sv_2\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\varrho \underbrace{\operatorname{Re}\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle}_{\geq \alpha \|v_1 - v_2\|^2} + \varrho^2 \|Av_1 - Av_2\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2 \underbrace{\left(1 - 2\varrho\alpha + \varrho^2 C^2\right)}_{< 1 \text{ für } \varrho \in (0, 2\alpha/C^2)} \end{aligned}$$

Für  $\varrho$  klein genug ist  $S$  also eine Kontraktion und damit liefert der Banach'sche Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen Fixpunkts. Nach den vorherigen Überlegungen ist dieser dann die eindeutige Lösung von  $(\star)$ .

Sei nun  $a$  symmetrisch. Dann definiert  $(u, v) \mapsto a(u, v)$  ein Skalarprodukt auf  $H$ . Die zugehörige Norm  $u \mapsto \sqrt{a(u, u)}$  ist äquivalent zur Norm  $u \mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  (was man leicht aus den Voraussetzungen an  $a$  folgern kann). Also ist  $H$  auch ein Hilbertraum bezüglich des von  $a$  gegebenen Skalarprodukts. Der Riesz'sche Darstellungssatz (6.5) liefert: Für alle  $\varphi \in H'$  gibt es ein eindeutiges  $g \in H$  mit  $\varphi = a(\cdot, g)$ . Damit ist  $(\star)$  aber äquivalent dazu, ein  $u \in K$  zu finden, welches folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\forall v \in K: \quad \operatorname{Re} a(v - u, g - u) \leq 0.$$

Das heißt aber, dass  $u$  die Projektion von  $g$  auf  $K$  bezüglich des durch  $a$  gegebenen Skalarprodukts ist. Der Projektionssatz (6.1) liefert dann, dass dies äquivalent ist zu

$$u \in K \quad \text{und} \quad \sqrt{a(g - u, g - u)} = \min_{v \in K} \sqrt{a(g - v, g - v)},$$

was offenbar genau dann der Fall ist, wenn  $u$  die Funktion

$$v \mapsto a(g - v, g - v) = a(v, v) - 2 \operatorname{Re} a(v, g) + a(g, g) = a(v, v) - 2 \operatorname{Re} \varphi(v) + a(g, g)$$

auf  $K$  minimiert, oder äquivalent die Funktion

$$v \mapsto \frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v).$$

■

### Bemerkung:

Ist  $a$  eine positiv semidefinite Bilinearform auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $H$ , so ist die Abbildung  $v \mapsto a(v, v)$  konvex. Falls  $a$  sogar positiv definit ist, ist diese Abbildung strikt konvex. In der Regel besitzen strikt konvexe Funktionen mit  $f(x) \rightarrow \infty$  für  $\|x\| \rightarrow \infty$  ein eindeutiges Minimum.

**Satz 6.11** (Lax-Milgram). Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{K}$  und  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  eine stetige, koerzive Sesquilinearform. Dann gibt es für jedes  $\varphi \in H'$  genau ein  $u \in H$ , so dass gilt:

$$\forall v \in H: \quad \operatorname{Re} a(v, u) = \operatorname{Re} \varphi(v). \quad (\star\star)$$

Ist  $a$  außerdem symmetrisch, so ist das Element  $u \in H$  eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \operatorname{Re} \varphi(u) = \min_{v \in H} \left( \frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v) \right).$$

*Beweis.* Sei  $\varphi \in H'$  und  $w \in H$ . Wählen wir  $K = H$  im Theorem von Stampacchia (6.10), so erhalten wir ein  $u \in H$  mit folgender Eigenschaft:

$$\forall v \in H: \quad \operatorname{Re} a(v - u, u) \geq \operatorname{Re} \varphi(v - u).$$

Also erhalten wir für  $\pm w + u \in H$  zwei Ungleichungen, die zusammen

$$\operatorname{Re} a(w, u) = \operatorname{Re} \varphi(w)$$

implizieren. Es folgt die Behauptung. ■

**Bemerkung 6.12.**

- (i) Der Satz von Lax-Milgram (6.11) kann zur Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen genutzt werden.
- (ii) Sei  $a$  symmetrisch und sei  $F: H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v \mapsto \frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v)$ . Dann bedeutet  $(\star\star)$ , dass für das Minimum „ $F'(u) = 0$ “ gilt. Betrachte dazu  $\frac{d}{dt} F(u + tv)|_{t=0}$ .

Es gilt

$$F(u + tv) = \frac{1}{2} (a(u, u) + ta(u, v) + ta(v, u) + t^2 a(v, v)) - \operatorname{Re} \varphi(u) - t \operatorname{Re} \varphi(v),$$

also erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} F(u + tv) = \operatorname{Re} a(u, v) + ta(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v).$$

**Definition 6.13.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von abgeschlossenen Unterräumen von  $H$ . Dann nennen wir  $H$  die *Hilbertsumme von  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$* , falls

- (a)  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise orthogonal ist, d. h.  $\langle u, v \rangle = 0$  für alle  $u \in E_n$ ,  $v \in E_m$  mit  $n \neq m$ , und
- (b) der lineare Raum  $\operatorname{span}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$  ist dicht in  $H$ .

In diesem Fall schreiben wir

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n.$$

**Satz 6.14.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und gelte  $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$  für eine Folge abgeschlossener Unterräume  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Sei  $u \in H$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $u_n := P_{E_n}(u)$  sowie  $S_n := \sum_{k=1}^n u_k$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u$$

(wofür wir auch die Notation  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u$  verwenden) und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2,$$

die sogenannte *Bessel-Parseval-Identität*.

Für den Beweis benötigen wir zunächst eine Hilfsaussage.

**Lemma 6.15.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge paarweise orthogonaler Vektoren in  $H$  (d. h. für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq m$  gilt  $\langle v_n, v_m \rangle = 0$ ). Gelte außerdem  $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|^2 < \infty$ . Sei  $S_n := \sum_{k=1}^n v_k$ . Dann existiert der Grenzwert  $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  und es gilt

$$\|S\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2.$$

*Beweis.* Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n > 1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|S_m - S_{n-1}\|^2 &= \left\| \sum_{k=n}^m v_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=n}^m v_k, \sum_{\ell=n}^m v_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=n}^m \sum_{\ell=n}^m \langle v_k, v_\ell \rangle = \sum_{k=n}^m \|v_k\|^2 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist. Da  $H$  vollständig ist, existiert also auch ein Grenzwert  $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Außerdem folgt aus der obigen Rechnung

$$\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2,$$

woraus für  $n \rightarrow \infty$  die zweite Behauptung folgt. ■

*Beweis von Satz 6.14.* Aus Korollar 6.4 folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall v \in E_n: \quad \langle u - u_n, v \rangle = 0.$$

Insbesondere erhalten wir daraus  $\langle u, u_n \rangle = \|u_n\|^2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Dann gilt also:

$$\langle u, S_m \rangle = \sum_{n=1}^m \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2.$$



(Für die zweite Gleichheit, vergleiche Beweis von Lemma 6.15.) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 2.8 (1)) liefert

$$\|S_m\|^2 \leq \|u\| \|S_m\|,$$

woraus  $\|S_m\| \leq \|u\|$  folgt. Dies zeigt:

$$\sum_{n=1}^m \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Damit konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$  und wir können Lemma 6.15 anwenden. Wir erhalten die Existenz des Grenzwerts  $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Wir wollen nun  $S$  bestimmen (zunächst ohne die Dichtheit von  $\text{span}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$  vorauszusetzen). Sei  $F := \text{span}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ . Wir behaupten

$$S = P_{\overline{F}} u. \quad (**)$$

Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $v \in E_m$  und sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle u - S_n, v \rangle &= \left\langle u - \sum_{k=1}^n u_k, v \right\rangle = \langle u, v \rangle - \sum_{k=1}^n \underbrace{\langle u_k, v \rangle}_{=0 \text{ für } k \neq m} \\ &= \langle u, v \rangle - \langle u_m, v \rangle = \langle u - u_m, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts  $\langle u - S, v \rangle = 0$ . Es folgt  $\langle u - S, \tilde{v} \rangle = 0$  für alle  $\tilde{v} \in F$ . Dies impliziert (erneut wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts)

$$\forall \tilde{v} \in \overline{F}: \quad \langle u - S, \tilde{v} \rangle = 0.$$

Wegen  $S_n \in F$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , gilt  $S \in \overline{F}$ . Mithilfe von (6.4) folgt nun (\*\*). Wir benutzen nun zusätzlich, dass  $F$  dicht in  $H$  liegt, also  $\overline{F} = H$ . Dann ergibt (\*\*) direkt  $S = u$ . Gehen wir in  $\sum_{n=1}^m \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2$  zum Grenzwert  $m \rightarrow \infty$  über, so folgt die Bessel-Parseval-Identität. ■

**Definition 6.16** (Schauder-Basis). Sei  $X$  ein normierter Raum und  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ . Dann nennen wir  $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  eine Schauder-Basis von  $X$ , falls gilt: Für alle  $x \in X$  existiert eine eindeutige Folge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{K}$  mit

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \rightarrow x \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

**Definition:** (Orthonormalbasis) Sei  $H$  ein Prä-Hilbertraum und  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $H$ . Dann nennen wir  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine *Orthonormalbasis* (oder *Hilbertbasis*), falls  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Schauder-Basis ist und  $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt (mit dem Kroneckerdelta  $\delta$ ).

**Satz 6.17.** Sei  $H$  ein Prä-Hilbertraum und  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem, d. h. für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt  $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  liegt dicht in  $H$
- (2)  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Schauder-Basis
- (3)  $\forall x \in H: \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$
- (4)  $\forall x, y \in H: \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}$  (Parseval-Identität)
- (5)  $\forall x \in H: \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$  (Vollständigkeitsrelation)

Falls eine dieser Bedingungen gilt, ist  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  also eine Hilbertbasis.

*Beweis.* „(1) $\Rightarrow$ (3)“: Nutze Satz 6.14 (in den dortigen Bezeichnern) mit  $E_n = \text{span}\{e_n\}$ . Es gilt dann  $u_n = \alpha_n e_n$  mit  $\alpha_n = \langle e_n, u \rangle$ . Das heißt:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \langle e_k, u \rangle e_k$$

(folgt aus der Orthogonalität der Projektion). Also folgt  $S_n \rightarrow u$  für  $n \rightarrow \infty$ . Aus 6.14 folgt dann die Behauptung.

„(3) $\Rightarrow$ (2)“: Wir müssen die Eindeutigkeit der Koeffizienten zeigen. Wegen der Linearität reicht es, den Fall  $x = 0$  zu betrachten. Gilt

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

so folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts:

$$0 = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle e_k, e_\ell \rangle = \alpha_\ell.$$

„(2) $\Rightarrow$ (1)“ folgt aus der Definition der Schauder-Basis.

„(3) $\Rightarrow$ (4)“: Aus der Stetigkeit des Skalarprodukts erhalten wir:

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{\ell=1}^n \langle y, e_\ell \rangle e_\ell \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_\ell \rangle} \underbrace{\langle e_k, e_\ell \rangle}_{\delta_{k\ell}}.$$

„(4) $\Rightarrow$ (5)“ ist klar.

„(5) $\Rightarrow$ (3)“:

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 &\leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

■

**Definition 6.18** (separabel). Ein topologischer Raum  $X$  heißt *separabel*, falls  $X$  eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

**Beispiele:**

- (a)  $\mathbb{R}$  ist separabel, da  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  dicht liegt.
- (b)  $C^0([a, b])$  mit der Supremumsnorm ist separabel, da die Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht liegen. (Weierstraßscher Approximationssatz)
- (c)  $\ell^2(\mathbb{R})$  ist separabel, da die abzählbaren Folgen aus  $\ell^2(\mathbb{Q})$  dicht liegt (vgl. Beweis von Lemma 6.19).

**Lemma 6.19.** Sei  $X$  ein unendlich-dimensionaler normierter Raum. Dann sind äquivalent:

- (1)  $X$  ist separabel
- (2) Es gibt eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  endlich-dimensionaler Unterräume von  $X$  mit folgenden Eigenschaften: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $X_n \subset X_{n+1}$  und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  liegt dicht in  $X$ .
- (3) Es gibt eine Folge  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  endlich-dimensionaler Unterräumen von  $X$  mit folgenden Eigenschaften: Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq m$  gilt  $E_n \cap E_m = \{0\}$  und

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} E_k := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E_1 \oplus \cdots \oplus E_k)$$

liegt dicht in  $X$ .

- (4) Es gibt eine linear unabhängige Menge  $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  von Vektoren aus  $X$ , so dass  $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $X$  liegt.

*Beweis.* „(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Sei  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $X$ . Definiere  $X_n := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann erfüllt die Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die geforderten Bedingungen.

„(2)  $\Rightarrow$  (3)“: Sei  $E_1 := X_1$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $X_{n+1}$  endlich-dimensional ist, gibt es einen Teilraum  $E_{n+1} \subset X_{n+1}$  mit  $X_{n+1} = X_n \oplus E_{n+1}$ . Wir erhalten so eine Folge von Unterräumen  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann gilt  $X_n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$  und nach Voraussetzung liegt aber  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  dicht in  $X$ .

„(3)  $\Rightarrow$  (4)“: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $(e_{n,j})_{j \in \{1, \dots, \dim E_n\}}$  eine Basis von  $E_n$ . Setze

$$X_n := E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = \text{span}\{e_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \dim E_i\}.$$

Dann gilt

$$\text{span}\{e_{i,j} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq \dim E_i\} = \text{span}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\right)$$

und nach Voraussetzung liegt die rechte Menge dicht in  $X$ . Also ist

$$\{e_{i,j} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq \dim E_i\}$$

die gesuchte linear unabhängige Menge.

„(4)  $\Rightarrow$  (1)“: Für  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$A_n := \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}: \alpha_k \in \mathbb{K} \cap \mathbb{Q}(i) \right\}$$

abzählbar (wobei  $\mathbb{Q}(i) = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ ) mit

$$\overline{A_n} = \text{span}\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

Da abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen wieder abzählbar sind, liefert die Teilmenge  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  von  $X$  die Behauptung. ■

**Satz 6.20.** Für jeden unendlich-dimensionalen Hilbertraum  $H$  über  $\mathbb{K}$  ist äquivalent:

- (1)  $H$  ist separabel
- (2)  $H$  besitzt eine Hilbertbasis

Weiter gilt: Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so ist  $H$  isometrisch isomorph zu  $\ell^2(\mathbb{K})$ .

*Beweis.* „(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Sei  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  wie in Lemma 6.19 (4) und für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $H_n := \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ . Definiere induktiv für alle  $n \in \mathbb{N}$  Elemente  $\hat{e}_n$  durch

$$\begin{aligned} \tilde{e}_n &:= e_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_n, \tilde{e}_k \rangle \tilde{e}_k \in H_n \setminus H_{n-1} \\ \hat{e}_n &:= \frac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|}. \end{aligned}$$

Dann gilt  $\hat{e}_n \in H_n \cap H_{n-1}^\perp$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also ist  $(\hat{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem. Wegen  $\text{span}\{\hat{e}_k \mid 1 \leq k \leq n\} = H_n$  folgt:

$$\text{span}\{\hat{e}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ liegt dicht in } H.$$

Nach Satz 6.17 ist damit  $\{\hat{e}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  eine Hilbertbasis und es gilt  $x = \sum_{k=1}^\infty \langle x, \hat{e}_k \rangle \hat{e}_k$  für alle  $x \in H$ . Die Abbildung

$$J: H \rightarrow \ell^2(\mathbb{K}), \quad x \mapsto (\langle x, \hat{e}_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$$

erfüllt dann  $\langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in H$  wieder nach Satz 6.17. Außerdem ist  $J$  linear und bijektiv.

„(2)  $\Rightarrow$  (1)“ folgt aus Lemma 6.19, da  $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  existiert mit  $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $H$ . ■

**Bemerkung:** Auf  $\ell^2(\mathbb{K})$  ist  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} := ((\delta_{kn})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Hilbertbasis. (Dabei ist  $\delta$  das Kroneckerdelta, also hat für  $n \in \mathbb{N}$  der Vektor  $e_n$  nur in der  $n$ -ten Komponente den Eintrag 1, ansonsten 0.)

Es bildet  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem. Außerdem liegt  $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $\ell^2$ . Sei  $x \in \ell^2$  und sei

$$x^{(k)} := (x_1, \dots, x_k, 0, \dots) = \sum_{i=1}^k x_i e_i.$$

Dann gilt:

$$\|x^{(k)} - x\|^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} x_i^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

**Bemerkung:** Die Tatsache, dass alle separablen Hilberträume isometrisch isomorph zu  $\ell^2$  sind, könnte dazu verführen, nur noch  $\ell^2$  zu betrachten. Viele Operatoren zwischen separablen Hilberträumen haben aber eine komplizierte Struktur, wenn man sie in  $\ell^2$  ausdrückt. Fazit: Oft ist es besser, doch direkt mit dem entsprechenden Hilbertraum zu arbeiten.

## 7 Schwache Konvergenz

Zur Erinnerung: Im  $\mathbb{R}^n$  kann man aus jeder beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge auswählen. Außerdem gilt für Teilmengen  $K \subset \mathbb{R}^n$  der *Satz von Heine-Borel*:  $K$  ist genau dann kompakt, wenn  $K$  beschränkt und abgeschlossen ist. Beides ist in unendlich-dimensionalen Banachräumen i. A. nicht mehr gegeben. Wir versuchen, Ersatz dafür zu finden.

**Definition 7.1.** (i) Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann heißt  $A$  *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von  $A$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d. h. falls  $A$  folgende Eigenschaft besitzt: Ist  $I$  eine Menge und  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie offener Mengen in  $X$  mit  $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ , so gibt es eine endliche Teilmenge  $J \subset I$  mit  $A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ .

(ii) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$ . Dann heißt  $A$  *präkompakt*, falls für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  endlich viele  $x_1, \dots, x_n \in X$  existieren mit  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$ .

**Bemerkung:** Man kann Definition 7.1 (ii) dahingehend verschärfen, dass die Mittelpunkte  $x_1, \dots, x_n$  der  $\varepsilon$ -Kugeln in  $A$  liegen müssen. Dies ist äquivalent zur obigen Definition.

**Satz 7.2.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1)  $A$  ist kompakt
- (2)  $A$  ist folgenkompakt, d. h. jede Folge in  $A$  besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $A$ .
- (3)  $A$  ist präkompakt und  $(A, d|_A)$  ist vollständig.

*Beweis.* „(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$ . Besitzt  $A$  keinen Häufungspunkt so gibt es für alle  $y \in A$  ein  $r_y \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass

$$N_y := \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in B_{r_y}(y) \cap A\}$$

endlich ist. Weil  $(B_{r_y}(y))_{y \in A}$  eine offene Überdeckung von  $A$  bildet und  $A$  kompakt ist, gibt es  $y_1, \dots, y_n \in A$  mit  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_{y_i}}(y_i)$ . Damit wäre  $\mathbb{N} \subset \bigcup_{i=1}^n N_{y_i}$  endlich. Widerspruch.

„(2)  $\Rightarrow$  (3)“: Jede Cauchy-Folge in  $A$  besitzt wegen der Folgenkompaktheit von  $A$  eine konvergente Teilfolge. Da aber eine Cauchyfolge mit konvergenter Teilfolge schon selbst konvergiert

(gegen den Grenzwert der Teilfolge), ist  $A$  also vollständig. Zur Präkompaktheit: Falls es für ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  keine endliche  $\varepsilon$ -Überdeckung von  $A$  gibt, wähle induktiv

$$x_{k+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x_i).$$

Damit hätte  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  keinen Häufungspunkt, im Widerspruch zur Folgenkompaktheit von  $A$ .

„(3)  $\Rightarrow$  (1)“: Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Angenommen  $(U_i)_{i \in I}$  besitzt keine endliche Teilüberdeckung von  $A$ . Wähle zunächst endlich viele  $y_1, \dots, y_\ell \in X$ , so dass  $A \subset \bigcup_{j=1}^\ell B_{1/2}(y_j)$  gilt (was wegen der Präkompaktheit von  $A$  möglich ist). Dann gibt es ein  $B_{1/2}(y_j)$ , so dass  $B_{1/2}(y_j) \cap A$  nicht von endlich vielen  $U_i$  überdeckt wird. Wähle dann  $x_1 := y_j$ . Falls nun  $x_n$  schon definiert ist, so gehen wir analog vor: Seien  $y_1^n, \dots, y_{\ell_n}^n \in X$ , so dass

$$B_{1/2^n}(x_n) \cap A \subset A \subset \bigcup_{j=1}^{\ell_n} B_{1/2^{n+1}}(y_j^n)$$

gilt. Weil nach Konstruktion  $B_{1/2^n}(x_n) \cap A$  nicht von endlich vielen  $U_i$  überdeckt wird, muss es ein  $B_{1/2^{n+1}}(y_j^n)$  geben, das  $B_{1/2^n}(x_n) \cap A$  nicht-trivial schneidet und das nicht von endlich vielen  $U_i$  überdeckt wird. Setze dann  $x_{n+1} := y_j^n$ . Somit erhalten wir induktiv eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit  $A_n := B_{1/2^{n+1}}(x_{n+1}) \cap B_{1/2^n}(x_n) \cap A \neq \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wähle dann  $z_n \in A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; dies liefert eine Cauchy-Folge in  $A$ , was aus

$$d(z_n, z_{n+1}) \leq d(z_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, z_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt. Da  $A$  vollständig ist, folgt: Es gibt ein  $z \in A$  mit  $z_n \rightarrow z$  für  $n \rightarrow \infty$ . Weil  $(U_i)_{i \in I}$  eine Überdeckung von  $A$  ist, gibt es also ein  $i_0 \in I$  mit  $z \in U_{i_0}$ . Da  $U_{i_0}$  offen ist, gibt es ein  $R \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $B_R(z)$  komplett in  $U_{i_0}$  enthalten ist. Weil  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $z$  konvergiert und nach Wahl von  $z_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auch  $d(x_n, z_n) < 1/2^n$  gilt, finden wir ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$B_{1/2^N}(x_N) \subset B_R(z) \subset U_{i_0}.$$

Damit wird aber  $B_{1/2^N}(x_N) \cap A$  von  $U_{i_0}$  überdeckt, was nach Konstruktion ausgeschlossen war. Also muss es doch eine endliche Teilüberdeckung von  $(U_i)_{i \in I}$  geben. ■

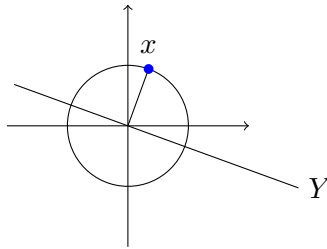


Abbildung 7.1: Maximaler Abstand zwischen Gerade und Einheitssphäre

**Satz 7.3** (Fast orthogonales Element). Sei  $X$  ein normierter Raum und  $Y \subsetneq X$  ein abgeschlossener Unterraum. Weiter sei  $\theta \in (0, 1)$  oder, falls  $X$  ein Hilbertraum ist,  $\theta \in (0, 1]$ . Dann gibt es ein  $x_\theta \in X$  mit (s. Abbildung 7.1)

$$\|x_\theta\| = 1 \quad \text{und} \quad \theta \leq \text{dist}(x_\theta, Y) \leq 1.$$

*Beweis.* Sei zunächst  $\theta \in (0, 1)$ . Wähle  $x \in X \setminus Y$ . Da  $Y$  abgeschlossen ist, gilt  $\text{dist}(x, Y) > 0$ . Es gibt daher ein  $y_\theta \in Y$  mit

$$\|x - y_\theta\| \leq \frac{1}{\theta} \text{dist}(x, Y).$$

Setze nun

$$x_\theta := \frac{x - y_\theta}{\|x - y_\theta\|}.$$

Dann gilt für alle  $y \in Y$

$$\|x_\theta - y\| = \frac{1}{\|x - y_\theta\|} \|x - (y_\theta + \|x - y_\theta\| y)\|,$$

woraus folgt:

$$\|x_\theta - y\| \geq \frac{\text{dist}(x, Y)}{\frac{1}{\theta} \text{dist}(x, Y)} = \theta.$$

Falls  $X$  ein Hilbertraum und  $\theta = 1$  ist, so wähle  $y_1 = P_Y(x)$ . ■

**Satz 7.4** (Heine-Borel). Sei  $X$  ein normierter Raum. Dann gilt:

$$\overline{B_1(0)} \text{ kompakt} \iff \dim X < \infty.$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $X$ . Zu  $x \in X$  bezeichne  $\alpha(x)$  den eindeutigen Vektor in  $\mathbb{K}^n$ , für den  $x = \sum_{i=1}^n \alpha(x)_i e_i$  gilt. Da alle Normen äquivalent sind, genügt es, die Kompaktheit von  $\overline{B_1(0)}$  in folgender Norm zu zeigen: für  $\alpha \in \mathbb{K}^n$  und  $x \in X$  sei

$$\|\alpha\|_{\max} := \max_i |\alpha_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_{\max} := \|\alpha(x)\|_{\max}.$$

Nun gilt:

$$\overline{B_1(0)} \subset \bigcup_{\substack{z \in \mathbb{Z}^n, \\ \|z\|_{\max} \leq m}} B_{2/m} \left( \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{m} e_i \right).$$

Damit ist  $\overline{B_1(0)}$  präkompakt und da in endlich-dimensionalen Räumen abgeschlossene Teilmengen auch vollständig sind, folgt mit Satz 7.2 die Behauptung.



„ $\Rightarrow$ “: Sei  $\varepsilon \in (0, 1)$  und

$$\overline{B_1(0)} \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(x_i)$$

für geeignete  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_{n_\varepsilon} \in X$ . Dann ist

$$Y := \text{span}\{x_1, \dots, x_{n_\varepsilon}\}$$

ein abgeschlossener Unterraum (da endlich-dimensional). Angenommen  $Y \subsetneq X$ . Dann liefert Satz 7.3 ein  $x_\varepsilon$  mit  $\|x_\varepsilon\| = 1$  und  $\varepsilon \leq \text{dist}(x_\varepsilon, Y)$ . Dann folgt aber  $x \in \overline{B_1(0)}$  und damit muss es ein  $i_0 \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$  geben, so dass  $x \in B_\varepsilon(x_{i_0})$  gilt. Somit erhalten wir folgenden Widerspruch:

$$\varepsilon \leq \text{dist}(x_\varepsilon, Y) \leq \|x_{i_0} - x_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Also war die Annahme falsch und es muss doch schon  $Y = X$  und damit  $\dim X \leq n_\varepsilon < \infty$  gelten. ■

**Definition 7.5** (Schwache Konvergenz). Sei  $X$  ein Banachraum.

1. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  *konvergiert schwach gegen*  $x \in X$ , falls gilt:

$$\forall x' \in X': \quad x'(x_n) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Notation:  $x_n \rightarrow x$  schwach in  $X$  für  $n \rightarrow \infty$ , oder  $x_n \rightharpoonup x$  in  $X$  für  $n \rightarrow \infty$ .

2. Eine Folge  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X'$  *konvergiert schwach-\* gegen*  $x' \in X'$ , falls gilt:

$$\forall x \in X: \quad x'_n(x) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(Dies entspricht gerade punktwiser Konvergenz von  $x'$ .) Notation:  $x'_n \rightarrow x'$  schwach-\* in  $X'$  für  $n \rightarrow \infty$ , oder  $x'_n \xrightarrow{*} x'$  in  $X'$  für  $n \rightarrow \infty$ .

3. Eine Teilmenge  $M \subset X$  (bzw.  $M \subset X'$ ) heißt *schwach* (bzw. *schwach-\**) *folgenkompakt*, falls jede Folge in  $M$  eine schwach (bzw. schwach-\*) konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in  $M$  liegt.

**Bemerkungen:**

- (i) Falls  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  für  $n \rightarrow \infty$  (bezüglich Normkonvergenz) gilt, so sagen wir zur besseren Unterscheidung auch:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert *stark* gegen  $x$ . Die Topologie, die  $X$  von der Norm erhält, nennen wir auch *starke Topologie*.
- (ii) Die schwache Konvergenz kann als schwach-\* Konvergenz im Bidualraum aufgefasst werden.

$$\begin{aligned} x_n \rightharpoonup x \quad \text{für } n \rightarrow \infty &\iff \forall x' \in X': \quad x'(x_n) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \\ &\iff \forall x' \in X': \quad (J_X x_n)(x') \rightarrow (J_X x)(x') \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Frage: Welche Konvergenz in  $X'$  ist stärker? Schwache Konvergenz oder schwach-\* Konvergenz?

$$\begin{aligned} x'_n \rightharpoonup x' & \text{ bedeutet } \forall x'' \in X'': x''(x'_n) \rightarrow x''(x') \\ x'_n \xrightarrow{*} x' & \text{ bedeutet } \forall x \in X: x'_n(x) \rightarrow x'(x) \end{aligned}$$

Es gilt  $x'' = J_X x$  für gewisse  $x'' \in X''$  (und geeignetes  $x \in X$ ), aber i. A. ist  $J_X$  nicht surjektiv (d. h. es gibt „mehr  $x''$  als  $J_X x$ “). Also verlangt  $x'_n \rightharpoonup x'$  mehr als  $x'_n \xrightarrow{*} x'$ . Damit ist schwach-\* Konvergenz im Allgemeinen schwächer als schwache Konvergenz (d. h. es gibt mehr konvergente Folgen bezüglich schwach-\* Konvergenz als bezüglich schwacher Konvergenz).

**Lemma 7.6.** Sei  $X$  ein Banachraum. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) Der schwache Limes und der schwach-\* Limes sind eindeutig bestimmt.
- (2) Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.
- (3) Aus  $x'_n \rightarrow x'$  schwach-\* in  $X'$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt:

$$\|x'\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x'_n\|.$$

- (4) Aus  $x_n \rightarrow x$  schwach in  $X$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt:

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

(Dies zeigt, dass die Norm unterhalbstetig ist bezüglich schwacher Konvergenz.)

- (5) Schwach und schwach-\* konvergente Folgen sind (bezüglich der Norm) beschränkt.
- (6) Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $X$  bzw.  $X'$  und seien  $x \in X$  und  $x' \in X'$ . Sind für  $n \rightarrow \infty$  die Bedingungen

$$x_n \rightarrow x \text{ stark} \quad \text{und} \quad x'_n \xrightarrow{*} x'$$

oder die Bedingungen

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{und} \quad x'_n \rightarrow x' \text{ stark}$$

erfüllt, so folgt:

$$x'_n(x_n) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* (1) Punktweise Grenzwerte sind eindeutig, also auch der schwach-\* Grenzwert. Angenommen  $x, y$  sind schwache Grenzwerte von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann gilt für alle  $x' \in X'$ :

$$x'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x'(x_n) = x'(y).$$

Also folgt  $x'(x - y) = 0$  für alle  $x' \in X'$ . Daraus erhalten wir:

$$0 = \sup_{x' \in X'} \|x'(x - y)\| \geq \|J_X(x - y)\| = \|x - y\|,$$

also  $\|x - y\| = 0$  und damit muss schon  $x = y$  gelten.

- (2) Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ , die stark gegen  $x \in X$  konvergiert. Dann gilt  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Damit folgt für alle  $x' \in X'$ :

$$|x'(x_n) - x'(x)| = |x'(x_n - x)| \leq \|x'\| \|x - x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dies entspricht schwacher Konvergenz.

- (3) Sei  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X'$  mit  $x'_n \xrightarrow{*} x' \in X'$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für alle  $x \in X$  gilt

$$|x'_n(x)| \leq \|x'_n\| \|x\|$$

und durch Bilden des  $\liminf$  erhalten wir somit:

$$|x'(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x'_n(x)| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |x'_n(x)| \leq \|x\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x'_n\|.$$

Es folgt:

$$\|x'\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x'_n\|.$$

- (4) Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x \in X$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für  $x = 0$  gilt die Behauptung offenbar, also sei nun o. E.  $x \neq 0$ . Dann gilt für alle  $x' \in X'$  (mit analogen Argumenten wie zuvor):

$$|x'(x)| \leq \|x'\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Wir wählen ein  $x' \in X'$  mit  $\|x'\| = 1$  und  $x'(x) = \|x\|$  (vgl. Konstruktion direkt vor Satz 4.18) und erhalten so die Behauptung.

- (5) Sei  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X'$  mit  $x'_n \xrightarrow{*} x'$  in  $X'$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für alle  $x \in X$  ist dann  $(x'_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente, also beschränkte Folge, d. h. es gilt:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x'_n(x)| < \infty.$$

Banach-Steinhaus (Satz 5.3) liefert:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x'_n\| < \infty.$$

Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  für  $n \rightarrow \infty$ , so gilt

$$J_X x_n \xrightarrow{*} J_X x \quad \text{in } X'' \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Nach dem vorherigen Absatz ist also  $(J_X x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X''$  beschränkt und da  $J_X$  eine Isometrie ist, folgt:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt in  $X$ .

- (6) Seien die ersten beiden Bedingungen aus der Behauptung erfüllt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |x'(x) - x'_n(x_n)| &= |x'(x) - x'_n(x) + x'_n(x) - x'_n(x_n)| \\ &\leq \underbrace{|x'(x) - x'_n(x)|}_{\rightarrow 0, \text{ da } x'_n \xrightarrow{*} x'} + \underbrace{\|x - x_n\| \|x'_n\|}_{\rightarrow 0, \text{ da } x_n \rightarrow x \text{ stark und } (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt nach (5)}} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Sind die zweiten Bedingungen erfüllt, so gilt mit einem analogen Argument:

$$\begin{aligned} |x'(x) - x'_n(x_n)| &\leq \underbrace{|x'(x) - x'(x_n)|}_{\rightarrow 0, \text{ da } x_n \rightarrow x} + \underbrace{\|x' - x'_n\| \|x_n\|}_{\rightarrow 0, \text{ da } x'_n \rightarrow x' \text{ stark und } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt nach (5)}} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

**Bemerkung 7.7.**

(i) In einem Hilbertraum  $H$  gilt:

$$x_n \rightarrow x \iff \forall y \in H: \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle.$$

Dies gilt, da wir  $H'$  isometrisch isomorph mit  $H$  identifizieren können.

(ii) Schwache Konvergenz ist eine Verallgemeinerung der Konvergenz in allen Koordinatenrichtungen. Ersetze „Koordinaten von  $x$ “ durch  $x'(x)$  für Funktionale  $x' \in X'$ .

**Satz 7.8.** Sei  $X$  ein separabler Banachraum über  $\mathbb{K}$ . Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel  $\overline{B_1(0)}$  in  $X'$  schwach-\* folgenkompakt.

*Beweis.* Sei  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $X$  und sei  $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X'$  mit  $\|x'_k\| \leq 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(x'_k(x_n))_{k \in \mathbb{N}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{K}$ . Nach dem Diagonalverfahren gibt es eine Teilfolge  $(x'_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ , so dass  $(x'_{k_i}(x_n))_{i \in \mathbb{N}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  konvergiert. Setze dann für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$x'(x_n) := \lim_{i \rightarrow \infty} x'_{k_i}(x_n).$$

Wir setzen  $x'$  linear fort auf  $Y := \text{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Für alle  $y \in Y$  gilt dann

$$|x'(y)| = \lim_{i \rightarrow \infty} |x'_{k_i}(y)| \leq \|y\|,$$

woraus folgt, dass  $x'$  auf  $Y$  gleichmäßig stetig ist und sich somit eindeutig auf  $\overline{Y} = X$  fortsetzen lässt. Folglich ist  $x' \in X'$  mit  $\|x'\| \leq 1$ . Sei  $x \in X$  und  $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $Y$ , die gegen  $x$  konvergiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(x' - x'_{k_i})(x)| &\leq |(x' - x'_{k_i})(y_j)| + \|x' - x'_{k_i}\| \|x - y_j\| \\ &\leq |(x' - x'_{k_i})(y_j)| + 2\|x - y_j\| \\ &\xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\text{nach Konstr.}} 0 + 2\|x - y_j\| \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Da  $x$  beliebig war, folgt wie gewünscht:

$$\forall x \in X: \quad x'_{k_i}(x) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

■

Wir hätten gerne die analoge Aussage von Satz 7.8 für  $\overline{B_1(0)} \subset X$  und schwache Konvergenz. Dafür brauchen wir Reflexivität und einige Aussagen über reflexive Räume.

**Lemma 7.9.** Sei  $X$  ein Banachraum. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) Ist  $X$  reflexiv und  $Y \subset X$  ein abgeschlossener Unterraum, so ist  $Y$  reflexiv.
- (2) Sei  $Y$  ein weiterer Banachraum und gelte  $X \cong Y$  mittels des Operators  $T \in L(X, Y)$  (mit  $T^{-1} \in L(Y, X)$ ). Dann ist  $X$  genau dann reflexiv, wenn  $Y$  reflexiv ist.
- (3) Es ist  $X$  genau dann reflexiv, wenn  $X'$  reflexiv ist.

*Beweis.* (1) Sei o. E.  $Y \neq X$  und sei  $y'' \in Y''$ . Dann definieren wir  $x'' \in X''$  durch

$$x''(x') := y''(x'|_Y).$$

Sei  $x := J_X^{-1}x'' \in X$ . Für alle  $x' \in X'$  mit  $x'|_Y = 0$  gilt

$$0 = x''(x') = (J_X x)(x') = x'(x)$$

und somit folgt  $x \in Y$  aus (dem Beweis von) Korollar 4.16. Sei  $y' \in Y'$  und sei  $x' \in X'$  eine Hahn-Banach-Fortsetzung von  $y'$  (Satz 4.6). Dann gilt

$$y''(y') = y''(x'|_Y) = x''(x') = x'(x) = y'(x) = (J_Y x)(y').$$

Es folgt  $J_Y x = y''$  und somit ist  $J_Y$  surjektiv, also  $Y$  reflexiv.

- (2) Aus Symmetriegründen genügt es, eine Richtung zu zeigen. Sei  $X$  reflexiv und  $y'' \in Y''$ . Definiere  $x'' \in X''$  durch

$$x''(x') := y''(x' \circ T^{-1}).$$

Für  $y' \in Y'$  gilt dann

$$y''(y') = x''(y' \circ T) = (y' \circ T)(J_X^{-1}x'') = y'(T J_X^{-1}x'') = J_Y(T J_X^{-1}x'')(y'),$$

also folgt  $y'' = J_Y(T J_X^{-1}x'')$  und damit ist  $J_Y$  surjektiv, d. h.  $Y$  reflexiv.

- (3) „ $\Rightarrow$ “: Sei  $X$  reflexiv. Ist  $x''' \in X'''$ , so gilt  $x''' \circ J_X \in X'$ . Für alle  $x'' \in X''$  gilt:

$$x'''(x'') = (x''' \circ J_X)(J_X^{-1}x'') = x''(x''' \circ J_X) = J_{X'}(x''' \circ J_X)(x'').$$

Also folgt  $x''' = J_{X'}(x''' \circ J_X)$  und damit ist  $J_{X'}$  surjektiv.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $X'$  reflexiv. Nach dem gerade Gezeigten ist  $X''$  reflexiv. Weil  $J_X$  eine Isometrie ist, muss  $J_X(X) \subset X''$  ein abgeschlossener Unterraum sein. Mit (1) folgt, dass  $J_X(X)$  reflexiv ist, und mit (2) die Reflexivität von  $X$ .

■

**Lemma 7.10.** Sei  $X$  ein Banachraum. Dann gilt:

$$X' \text{ separabel} \implies X \text{ separabel}$$

*Beweis.* Sei  $\{x'_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $X'$ . Wähle nun für alle  $k \in \mathbb{N}$  ein  $x_k \in X$  mit  $\|x_k\| = 1$  und  $x'_k(x_k) \geq \frac{1}{2} \|x'_k\|$ . Definiere dann

$$Y := \overline{\text{span}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

Sei  $x' \in X'$  mit  $x'|_Y = 0$ . Dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\|x' - x'_k\| \geq |(x' - x'_k)(x_k)| = |x'_k(x_k)| \geq \frac{1}{2} \|x'_k\| \geq \frac{1}{2} (\|x'\| - \|x'_k - x'\|).$$

Daraus folgt

$$\|x'\| \leq 3 \inf_{k \in \mathbb{N}} \|x' - x'_k\| = 0,$$

da  $\{x'_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  dicht liegt in  $X'$ . Mittels Korollar 4.16 folgt  $X = Y$ . ■

Achtung, die Umkehrung von Lemma 7.10 gilt im Allgemeinen nicht!

**Satz 7.11.** Sei  $X$  ein reflexiver Banachraum. Dann ist  $\overline{B_1(0)} \subset X$  schwach folgenkompakt.

*Beweis.* Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\overline{B_1(0)}$  und

$$Y := \overline{\text{span}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

Dann ist  $Y$  offenbar separabel. Da  $Y$  ein abgeschlossener Unterraum des reflexiven Banachraums  $X$  ist, erhalten wir mit Lemma 7.9 (1), dass auch  $Y$  reflexiv ist. Also ist  $Y'' = J_Y(Y)$  separabel. Nach Lemma 7.10 ist damit auch  $Y'$  separabel. Da  $\overline{B_1(0)} \subset (Y')'$  schwach-\* folgenkompakt ist (Satz 7.8), existiert eine Teilfolge  $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$  und ein  $y'' \in Y''$  mit

$$J_Y x_{k_i} \rightarrow y'' \quad \text{schwach-* in } Y'' \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Für  $x := J_Y^{-1} y''$  gilt also  $J_Y x_{k_i} \xrightarrow{*} J_Y x$  für  $i \rightarrow \infty$ . Somit gilt für alle  $y' \in Y'$ :

$$y'(x_{k_i}) = (J_Y x_{k_i})(y') \rightarrow (J_Y x)(y') = y'(x) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Es folgt  $x_{k_i} \rightarrow x$  schwach in  $Y$  für  $i \rightarrow \infty$  und damit auch

$$x_{k_i} \rightarrow x \quad \text{schwach in } X \quad \text{für } i \rightarrow \infty. \quad \text{■}$$

**Satz 7.12** (Anwendung auf Hilberträume). Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $H$ . Dann existiert eine Teilfolge  $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$  und ein  $x \in H$ , so dass für alle  $y \in H$  gilt:

$$\langle x_{k_i}, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* Nach Bemerkung 6.7 ist  $H$  reflexiv. Nach Satz 7.11 sind abgeschlossene Kugeln also schwach folgenkompakt. Das heißt, es existieren eine Teilfolge  $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$  und ein  $x \in H$  mit:

$$\forall x' \in X': \quad x'(x_{k_i}) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Mit dem Rieszschen Darstellungssatz (6.5) erhalten wir:

$$\forall y \in H \exists x'_y \in H': \quad \langle \cdot, y \rangle = x'_y$$

Dies impliziert:

$$\forall y \in H: \quad \langle x_{k_i}, y \rangle = x'_y(x_{k_i}) \rightarrow x'_y(x) = \langle x, y \rangle \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

■

**Satz 7.13.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $H$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_k \rightarrow x \quad \text{stark in } H \quad & \text{für } k \rightarrow \infty \\ \iff x_k \rightarrow x \quad \text{schwach in } H \quad \text{und} \quad \|x_k\| \rightarrow \|x\| \quad & \text{für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ ist klar.

„ $\Leftarrow$ “: Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned} \|x_k\|^2 &= \|x - x + x_k\|^2 = \langle x - x + x_k, x - x + x_k \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x_k - x, x \rangle + \|x_k - x\|^2. \end{aligned}$$

Wegen  $x_k \rightharpoonup x$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt  $\langle x_k - x, x \rangle \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Es folgt

$$\|x - x_k\| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

■

**Satz 7.14.** Sei  $X$  ein normierter Raum und  $M \subset X$  abgeschlossen und konvex. Dann ist  $M$  schwach folgenabgeschlossen, das heißt: Ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$  mit  $x_k \rightharpoonup x$  schwach in  $X$  für  $k \rightarrow \infty$ , so ist auch  $x \in M$ .

*Beweis.* Sei o. E.  $M$  nicht leer und sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$  mit  $x_k \rightharpoonup x \in X$  für  $k \rightarrow \infty$ . Angenommen  $x \notin M$ . Dann liefert der Satz von Hahn-Banach in der zweiten geometrischen Formulierung (4.15) die Existenz eines  $x' \in X'$  und eines  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit

$$\alpha < \operatorname{Re} x'(x) \quad \text{und} \quad \forall y \in M: \operatorname{Re} x'(y) \leq \alpha.$$

Nach Voraussetzung gilt  $x_k \rightharpoonup x$  für  $k \rightarrow \infty$ , also folgt

$$\operatorname{Re} x'(x_k) \rightarrow \operatorname{Re} x'(x) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Wegen  $x_k \in M$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt dann aber

$$\operatorname{Re} x'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} x'(x_k) \leq \alpha,$$

im Widerspruch zu  $\operatorname{Re} x'(x) > \alpha$ .

■

**Lemma 7.15** (Lemma von Mazur). Sei  $X$  ein normierter Raum und sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  mit  $x_k \rightarrow x$  schwach in  $X$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dann gilt:

$$x \in \overline{\text{conv}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

(Dabei sei  $\text{conv}(A)$  für eine Teilmenge  $A \subset X$  die *konvexe Hülle von  $A$  in  $X$* , d. h. die kleinste konvexe Teilmenge von  $X$ , die  $A$  enthält.)

*Beweis.* Setze

$$M := \text{conv}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist  $M$  konvex und damit auch  $\overline{M}$ . Aus Satz 7.14 folgt, dass  $\overline{M}$  schwach folgenabgeschlossen ist und da  $x_k \in M \subset \overline{M}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  erfüllt ist, erhalten wir die Behauptung. ■

**Definition 7.16.** Sei  $X$  ein Banachraum und

$$\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$$

eine Abbildung. Dann heißt  $\varphi$  *schwach unterhalbstetig*, falls für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x$  schwach für  $n \rightarrow \infty$  gilt:

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

**Satz 7.17.** Sei  $X$  ein Banachraum und

$$\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$$

konvex und unterhalbstetig in der starken Topologie. Dann ist  $\varphi$  schwach unterhalbstetig.

*Beweis.* Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist die Menge

$$A_\lambda := \{y \in X \mid \varphi(y) \leq \lambda\}$$

konvex (Lemma 4.27 (ii)) und abgeschlossen. Aus Satz 7.14 folgt, dass  $A_\lambda$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  schwach folgenabgeschlossen ist. Seien

$$L := \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \quad \text{und} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}.$$

(Ein ähnliches Argument wie das folgende zeigt auch  $-\infty < L$ .) Dann sind unendlich viele Folgenglieder von  $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  kleiner als  $L + \varepsilon$  und damit liegen unendlich viele Folgenglieder von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A_{L+\varepsilon}$ . Wir können also eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auswählen, so dass alle Folgenglieder dieser Teilfolge in  $A_{L+\varepsilon}$  liegen. Weil  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schwach gegen  $x$  konvergiert, muss dies auch für  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gelten. Da  $A_{L+\varepsilon}$  schwach folgenabgeschlossen ist, folgt  $x \in A_{L+\varepsilon}$ . Weil dies für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt, erhalten wir

$$x \in \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}} A_{L+\varepsilon} = A_L,$$

also  $\varphi(x) \leq L = \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)$  wie gewünscht. Damit ist  $\varphi$  unterhalbstetig. ■



**Bemerkung:** Der Satz gilt auch für

$$\varphi: M \rightarrow (-\infty, \infty]$$

mit konvexem und abgeschlossenem  $M \subset X$ . (Setze z. B.  $\varphi$  durch  $\infty$  auf  $X$  fort.)

**Satz 7.18.** Sei  $X$  ein reflexiver Banachraum und  $M \subset X$  nicht leer, konvex und abgeschlossen. Weiter sei

$$\varphi: M \rightarrow (-\infty, \infty]$$

konvex und unterhalbstetig mit  $D(\varphi) \neq \emptyset$  und, falls  $M$  nicht beschränkt ist:

$$\lim_{\substack{x \in M, \\ \|x\| \rightarrow \infty}} \varphi(x) = \infty,$$

wobei wir dies wie folgt auffassen:

$$\forall K \in \mathbb{R}_{>0} \exists R \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in M: \|x\| > R \implies \varphi(x) \geq K.$$

Dann nimmt  $\varphi$  sein Minimum an, d. h. es existiert ein  $x_0 \in M$ , so dass  $\varphi(x_0) = \min_M \varphi$  gilt.

*Beweis.* Sei  $m := \inf_M \varphi$ . Es gilt  $m < \infty$  (da  $D(\varphi) \neq \emptyset$ ). Nun sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$  mit  $\varphi(x_k) \rightarrow m$  für  $k \rightarrow \infty$ . Nach Voraussetzung ist aber  $M$  beschränkt oder es gilt  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ , also muss  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt sein. Weil  $X$  reflexiv ist, gibt es also nach Satz 7.11 eine schwach konvergente Teilfolge von  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Sei  $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$  solch eine Teilfolge mit Grenzwert  $x$ . Da  $M$  nach Satz 7.14 schwach folgenabgeschlossen ist, folgt  $x \in M$ . Nach Satz 7.17 ist  $\varphi$  schwach unterhalbstetig, also gilt:

$$\varphi(x) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \varphi(x_{k_i}) = m.$$

Wegen  $x \in M$  gilt dann also

$$\varphi(x) = \inf_M \varphi.$$

■

**7.19 (Initialtopologie).** Sei  $X$  eine Menge und  $(Y_i)_{i \in I}$  eine Familie von topologischen Räumen. Weiter sei  $(\varphi_i: X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$  eine Familie von Abbildungen. Wir betrachten:

Problem 1: Konstruiere eine Topologie auf  $X$ , so dass für alle  $i \in I$  die Abbildung  $\varphi_i$  stetig ist. Falls möglich, finde eine Topologie  $\mathcal{T}$ , die aus wenigen offenen Mengen besteht ( $\mathcal{T}$  soll also „ökonomisch“ sein).

**Bemerkung:**

- (i) Wir können immer die diskrete Topologie  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  wählen, aber dies ist nicht sehr ökonomisch.
- (ii) Für alle  $i \in I$  muss natürlich gelten:

$$W_i \subset Y_i \text{ offen} \implies \varphi_i^{-1}(W_i) \in \mathcal{T},$$

da sonst  $\varphi_i$  nicht stetig wäre. Fassen wir alle diese Mengen zusammen, so erhalten wir ein Mengensystem  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ .

Problem 2: Ist  $X$  eine Menge und  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ein System von Teilmengen von  $X$ , so finde die kleinste Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$ , so dass  $U_\lambda$  offen ist für alle  $\lambda \in \Lambda$ .

Wir müssen ein System von Mengen finden, das stabil ist unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen.

Wir benutzen folgendes Vorgehen:

(i) Bilde endliche Schnitte

$$\bigcap_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda \quad \text{mit} \quad \Gamma \subset \Lambda \text{ endlich.}$$

Diese neue Familie nennen wir  $\Phi$ . (Falls  $\Gamma = \emptyset$ , sei  $\bigcap_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda = X$ .)

(ii) Bilde beliebige Vereinigungen von Elementen in  $\Phi$  und nenne dieses System  $\mathcal{T}$ .

**Lemma 7.20.** Das Mengensystem  $\mathcal{T}$  aus 7.19, Problem 2 (ii) ist stabil unter endlichen Durchschnitten.

(Beweis: selber oder in ein Topologiebuch schauen.)

**Definition 7.21.**

1. Wir nennen die Topologie, die wir durch den Prozess in 7.19 aus der Familie  $(\varphi_i)_{i \in I}$  erhalten, die *die von  $(\varphi_i)_{i \in I}$  erzeugte Topologie*.
2. Sei im Folgenden  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Wir nennen  $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$  eine *Basis der Topologie*, falls für alle Punkte  $x \in X$  und alle Umgebungen  $U$  von  $x$  ein  $A \in \mathcal{F}$  existiert mit  $x \in A \subset U$ .
3. Sei  $x \in X$ . Wir nennen  $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{T}$  eine *Umgebungsbasis von  $x$* , falls für alle Umgebungen  $U$  von  $x$  ein  $A \in \mathcal{F}_x$  existiert mit  $x \in A \subset U$ .

**Bemerkung:** In der Konstruktion in 7.19 bilden die Mengen

$$\bigcap_{i \in J} \varphi_i^{-1}(W_i) \quad \text{für } J \subset I \text{ endlich und } W_i \subset Y_i \text{ offen}$$

eine Basis der Topologie  $\mathcal{T}$ .

**Proposition 7.22.** Sei  $(\varphi_i)_{i \in I}$  wie in 7.19 und  $\mathcal{T}$  die erzeugte Topologie auf  $X$ . Weiter sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ . Dann gilt:

$$x_n \rightarrow x \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I: \varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(Beweis: selber.)

**Definition 7.23** (Schwache Topologie). Sei  $X$  ein Banachraum. Die *schwache Topologie*  $\mathcal{T}_w$  auf  $X$  ist die von  $(\varphi)_{\varphi \in X'}$  erzeugte Topologie.

**Bemerkung:** Mittels Hahn-Banach kann man zeigen, dass  $(X, \mathcal{T}_w)$  ein Hausdorffraum ist. Außerdem gilt der folgende Satz:

**Satz 7.24.** Sei  $X$  ein Banachraum. Sei für ein Tripel  $(n, z', \varepsilon)$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z' \in (X')^n$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ :

$$U_{n,z',\varepsilon} := \{x \in X \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}: |z'_k(x)| < \varepsilon\}$$

(diese Mengen bilden eine Umgebungsbasis von  $0 \in X$ ). Dann gilt:

$$\mathcal{T}_w = \{A \subset X \mid \forall x \in A \exists (n, z', \varepsilon): x + U_{n,z',\varepsilon} \subset A\}.$$

(Beweis: selber.)

Diese Umgebungen erlauben nur Kontrolle von endlich vielen Koordinaten (anders als bei der starken Topologie, bei der innerhalb eines Balls alle Koordinaten unter Kontrolle sind).

**Bemerkung:** Es ist  $\mathcal{T}_w$  die schwächste Topologie, so dass alle  $x' \in X'$  noch stetig sind. Auf  $X'$  führe folgende Topologie ein, die wir  $\mathcal{T}'_w$  nennen: Für ein Tripel  $(n, z, \varepsilon)$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in X^n$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  setze

$$U_{n,z,\varepsilon} := \{x' \in X' \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}: |x'(z_k)| < \varepsilon\}$$

und

$$\mathcal{T}'_w := \{A \subset X' \mid \forall x' \in A \exists (n, z, \varepsilon): x' + U_{n,z,\varepsilon} \subset A\}.$$

Es gilt:  $X'$  wird mit  $\mathcal{T}'_w$  zu einem topologischer Raum (*schwach-\* Topologie*).

**Satz 7.25** (Satz von Alaoglu). Sei  $X$  ein Banachraum. Dann ist  $\overline{B_1(0)} \subset X'$  kompakt bezüglich der schwach-\* Topologie auf  $X'$ .

**Bemerkung:** Ist  $X$  nicht separabel, so ist „kompakt“ im Allgemeinen nicht dasselbe wie „folgenkompakt“ bezüglich der schwach-\* Topologie.

## 8 Spektrum für kompakte Operatoren

Ziel: Verallgemeinerung der Jordan'schen Normalform auf den unendlich-dimensionalen Fall.

**Definition 8.1** (Kompakter Operator). Seien  $X, Y$  Banachräume über  $\mathbb{K}$ . Dann heißt  $T \in L(X, Y)$  *kompakter (linearer) Operator*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $\overline{T(B_1(0))}$  ist kompakt in  $Y$
- (2)  $\forall M \subset X: M \text{ beschränkt} \implies T(M) \text{ präkompakt in } Y$
- (3) Für jede beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  besitzt  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge.

**Satz:** Die Bedingungen aus Definition 8.1 sind äquivalent.

*Beweis.*

„(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Sei  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $M \subset B_R(0)$ . Dann ist  $\overline{T(B_R(0))}$  nach Voraussetzung kompakt in  $Y$ . Dann ist auch die darin enthaltene abgeschlossene Menge  $\overline{T(M)}$  kompakt und somit ist  $T(M)$  relativ kompakt und damit präkompakt.

„(2)  $\Rightarrow$  (3)“: Sei  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  mit  $\|x_n\| \leq R$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\overline{T(B_R(0))}$ . Aber  $\overline{T(B_R(0))}$  ist nach Voraussetzung präkompakt, also auch relativ kompakt, womit  $\overline{T(B_R(0))}$  kompakt und damit auch folgenkompakt sein muss.

„(3)  $\Rightarrow$  (1)“: Sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\overline{T(B_1(0))}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei dann  $x_n \in B_1(0) \subset X$  mit  $\|y_n - Tx_n\| \leq 1/n$ . Nach Voraussetzung existiert dann eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass  $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert; bezeichne  $y \in Y$  den zugehörigen Grenzwert. Aus der Konstruktion der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgt nun  $y_{n_k} \rightarrow y$  für  $k \rightarrow \infty$ . Damit ist  $\overline{T(B_1(0))}$  folgenkompakt, also auch kompakt. ■

**Definition 8.2.** Für Banachräume  $X, Y$  seien

$$K(X, Y) := \{T \in L(X, Y) \mid T \text{ ist kompakt}\} \quad \text{und} \quad K(X) := K(X, X).$$

In reflexiven Räumen gibt es folgende Charakterisierung kompakter Operatoren:

**Lemma 8.3.** Seien  $X, Y$  Banachräume und sei  $X$  reflexiv. Sei  $T: X \rightarrow Y$  linear. Dann gilt:

$$T \in K(X, Y) \iff T \text{ vollstetig,}$$

wobei  $T$  *vollstetig* ist, falls gilt: Ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  für  $n \rightarrow \infty$ , so gilt  $Tx_n \rightarrow Tx$  stark in  $Y$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da schwach konvergente Folgen nach Lemma 7.6 (5) beschränkt sind, ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Da  $\overline{T(B_1(0))}$  nach Voraussetzung kompakt ist, existiert ein  $y \in Y$  und eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass  $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  stark gegen  $y$  konvergiert. Für  $y' \in Y'$  ist  $z \mapsto y'(Tz)$  eine Abbildung in  $X'$ , also gilt:

$$y'(Tx_{n_k}) \rightarrow y'(Tx) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt  $Tx_{n_k} \rightarrow Tx$  für  $k \rightarrow \infty$ . Da starke Konvergenz auch schwache Konvergenz (gegen denselben Grenzwert) impliziert, gilt  $y = Tx$ . Also gilt  $Tx_{n_k} \rightarrow Tx$  stark für  $k \rightarrow \infty$ . Das gleiche Argument gilt für jede Teilfolge. Daraus folgt, dass die gesamte Folge konvergiert.

„ $\Leftarrow$ “: Aus Vollstetigkeit folgt Stetigkeit. Also gilt  $T \in L(X, Y)$ . Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $X$ . Nach Satz 7.11 existiert dann eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_{n_k} \rightarrow x \in X$  für  $k \rightarrow \infty$ . Da  $T$  nach Voraussetzung vollstetig ist, gilt dann aber

$$Tx_{n_k} \rightarrow Tx \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

also folgt mit der dritten Charakterisierung in Definition 8.1 die Behauptung. ■

**Lemma 8.4.** Seien  $X, Y$  Banachräume.

- (i) Sei  $T \in L(X, Y)$  mit  $\dim R(T) < \infty$ . Dann folgt  $T \in K(X, Y)$ .
- (ii) Sei  $P \in P(X)$  ein Projektor. Dann gilt:

$$P \in K(X) \iff \dim R(P) < \infty.$$

*Beweis.* (i) Mit  $R := \|T\|$  gilt:

$$\overline{T(B_1(0))} \subset \overline{B_R(0)}.$$

Die Teilmenge  $\overline{B_R(0)} \cap R(T)$  ist ein abgeschlossener Ball im endlich dimensionalen Raum  $R(T)$ , also folgt mit Heine-Borel (Satz 7.4), dass sie auch kompakt ist. Daraus folgt die Kompaktheit von  $\overline{T(B_1(0))}$ .

- (ii) „ $\Leftarrow$ “ folgt aus (i).
- „ $\Rightarrow$ “: Es gilt

$$\overline{B_1(0)} \cap R(P) \subset \overline{P(B_1(0))}.$$

Damit ist  $\overline{B_1(0)} \cap R(P)$  kompakt und aus Heine-Borel (Satz 7.4) folgt, dass  $R(P)$  endlich dimensional ist. ■

**Lemma 8.5.** Seien  $X, Y, Z$  Banachräume und  $T_1 \in L(X, Y)$  sowie  $T_2 \in L(Y, Z)$ . Ist dann  $T_1$  oder  $T_2$  kompakt, so ist  $T_2T_1$  kompakt.

*Beweis.* Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $X$ . Da  $T_1$  stetig ist, ist  $(T_1x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt in  $Y$ . Falls  $T_2$  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $(T_2T_1x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Ist  $T_1$  kompakt, so existiert eine konvergente Teilfolge  $(T_1x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Weil  $T_2$  stetig ist, konvergiert dann auch  $(T_2T_1x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . ■

**Definition 8.6** (Spektrum). Sei  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{K}$  und  $T \in L(X)$ .

(i) Die *Resolventenmenge* von  $T$  sei

$$\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid N(\lambda \text{Id} - T) = \{0\} \wedge R(\lambda \text{Id} - T) = X\}.$$

(Im endlich-dimensionalen Fall folgt eine der Bedingungen aus dieser Definition aus der jeweils anderen. Im unendlich-dimensionalen muss dies *nicht* gelten!)

Das *Spektrum* von  $T$  ist

$$\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \varrho(T).$$

Das Spektrum kann zerlegt werden in das *Punktspektrum*

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda \text{Id} - T) \neq \{0\}\},$$

das *kontinuierliche Spektrum*

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda \text{Id} - T) = \{0\} \wedge R(\lambda \text{Id} - T) \neq X \wedge \overline{R(\lambda \text{Id} - T)} = X\}$$

und das *Residualspektrum*

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda \text{Id} - T) = \{0\} \wedge \overline{R(\lambda \text{Id} - T)} \neq X\}.$$

**Bemerkung 8.7.** (i) Es gilt  $\lambda \in \varrho(T)$  genau dann, wenn  $(\lambda \text{Id} - T): X \rightarrow X$  bijektiv ist. Nach dem Satz von der inversen Abbildung (5.10) ist dies äquivalent zur Existenz von

$$R(\lambda, T) := (\lambda \text{Id} - T)^{-1} \in L(X).$$

Wir nennen  $R(\lambda, T)$  *Resolvente* von  $T$  und die Abbildung  $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$  die *Resolventenfunktion* von  $T$ .

(ii) Zu  $\lambda \in \sigma_p(T)$  ist äquivalent: Es gibt ein  $x \in X \setminus \{0\}$  mit  $Tx = \lambda x$ . Dann heißt  $\lambda$  *Eigenwert* und  $x$  *Eigenvektor* zum *Eigenwert*  $\lambda$ .

(iii) Wir nennen  $N(\lambda \text{Id} - T)$  den *Eigenraum* von  $T$  zum *Eigenwert*  $\lambda$ .

(iv) Wir sagen  $Y \subset X$  ist  $T$ -invariant, falls  $T(Y) \subset Y$  gilt. Der Eigenraum zu einem Eigenwert ist stets  $T$ -invariant.

**Satz 8.8.** Sei  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{K}$  und  $T \in L(X)$ . Dann ist  $\varrho(T)$  offen und die Resolventenfunktion  $R(\cdot, T)$  ist eine analytische Abbildung von  $\varrho(T)$  nach  $L(X)$ . Weiterhin gilt für alle  $\lambda \in \varrho(T)$ :

$$\|R(\lambda, T)\|^{-1} \leq \text{dist}(\lambda, \sigma(T)).$$

Dass  $R(\cdot, T)$  analytisch ist, bedeutet dabei: Für alle  $\lambda \in \varrho(T)$  existiert ein  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $B_r(\lambda) \subset \varrho(T)$  und eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L(X)$ , so dass gilt:

$$\forall \mu \in B_r(\lambda): \quad R(\mu, T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\mu - \lambda)^n.$$

*Beweis.* Sei  $\lambda \in \varrho(T)$ . Dann gilt für alle  $\mu \in \mathbb{K}$ :

$$\mu \text{Id} - T = (\lambda \text{Id} - T) \underbrace{(\text{Id} - (\lambda - \mu)R(\lambda, T))}_{=: S(\mu)}.$$

Indem wir die Neumann'sche Reihe (Satz 3.7) benutzen, folgt, dass  $S(\mu)$  invertierbar ist, falls

$$\|(\lambda - \mu)R(\lambda, T)\| < 1 \quad \text{bzw.} \quad |\lambda - \mu| < \|R(\lambda, T)\|^{-1}$$

gilt. Sei  $r := \|R(\lambda, T)\|^{-1}$  und  $\mu \in B_r(\lambda)$ . Nach den obigen Argumenten ist dann  $\mu \text{Id} - T$  invertierbar und damit gilt  $\mu \in \varrho(T)$ . Wir erhalten mit der Reihendarstellung von  $S(\mu)$  aus Satz 3.7:

$$R(\mu, T) = (S(\mu))^{-1} R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (-1)^n R(\lambda, T)^{n+1}.$$

Außerdem gilt  $B_r(\lambda) \subset \varrho(T)$ , woraus  $\text{dist}(\lambda, \sigma(T)) \geq r = \|R(\lambda, T)\|^{-1}$  folgt. ■

**Bemerkung:** Weil  $\varrho(T)$  offen ist, ist  $\sigma(T)$  abgeschlossen.

**Definition 8.9.** Sei  $X$  ein Banachraum und  $T \in L(X)$ . Sei

$$r(T) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Wir nennen  $r(T)$  den *Spektralradius* von  $T$ .

Die Gleichheit in dieser Definition folgt dabei aus dem folgenden Lemma:

**Lemma 8.10.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit

$$0 \leq a_{n+m} \leq a_n a_m$$

für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert  $(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$ .

*Beweis.* Sei  $a := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$  und sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\sqrt[N]{a_N} < a + \varepsilon$  und setze

$$b_\varepsilon := \max\{a_1, \dots, a_N\}.$$

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $r \in \{1, \dots, N\}$  mit  $n = kN + r$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= (a_{kN+r})^{1/n} \leq (a_N^k a_r)^{1/n} \\ &\leq (a + \varepsilon)^{kN/n} b_\varepsilon^{1/n} = (a + \varepsilon)^{1+r/n} a_r^{1/n} \\ &\leq (a + \varepsilon)^{1+N/n} b_\varepsilon^{1/n} \\ &\rightarrow a + \varepsilon \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq a = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$  und daraus folgt die Behauptung. ■

**Satz 8.11.** Sei  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{K}$  und sei  $T \in L(X)$ . Dann gilt:

- (a)  $\forall \lambda \in \sigma(T): |\lambda| \leq r(T)$
- (b) Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  existiert ein  $\lambda \in \sigma(T)$  mit  $|\lambda| = r(T)$ , d. h. es gilt:

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

- (c)  $\sigma(T)$  ist kompakt.
- (d)  $\sigma(T) \neq \emptyset$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

*Beweis.* (c) Sei  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Mithilfe der Neumann'schen Reihe (Satz 3.7) folgt, dass  $\text{Id} - T/\lambda$  invertierbar ist, falls  $\|T/\lambda\| < 1$  bzw.  $|\lambda| > \|T\|$  gilt. Außerdem gilt dann

$$R(\lambda, T) = \lambda^{-1}(\text{Id} - T/\lambda)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n, \quad (*)$$

was wir später benötigen werden. Wir erhalten also

$$s := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \leq \|T\|.$$

Nach Definition gilt  $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \varrho(T)$  und  $\varrho(T)$  ist nach Satz 8.8 offen, also ist  $\sigma(T)$  abgeschlossen. Aus Abgeschlossenheit und Beschränktheit folgt nun mit dem Satz von Heine-Borel für endlich-dimensionale euklidische Räume, dass  $\sigma(T)$  kompakt ist.

- (a) Seien  $\lambda \in \sigma(T)$  und  $m \in \mathbb{N}$  und sei  $s$  wie im Beweis von (c). Es gilt

$$\lambda^m \text{Id} - T^m = (\lambda \text{Id} - T) S_m(T) = S_m(T) (\lambda \text{Id} - T)$$

mit

$$S_m(T) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^{m-1-i} T^i.$$



Wäre nun  $\lambda^m \text{Id} - T^m$  bijektiv, so müsste  $\lambda \text{Id} - T$  nach jeweils einer der obigen Gleichheiten surjektiv und injektiv, d. h. auch bijektiv sein. Da dies nach Voraussetzung nicht der Fall ist, kann also auch  $\lambda^m \text{Id} - T^m$  nicht bijektiv sein. Daraus erhalten wir (mit dem Beweis von (c)):

$$\lambda^m \in \sigma(T^m) \implies |\lambda^m| \leq \|T^m\| \implies |\lambda| \leq \|T^m\|^{1/m}.$$

Dies zeigt:

$$s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = r(T).$$

(d) Gelte  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Wir nehmen an, dass  $\sigma(T) = \emptyset$  gilt. Dann ist die Resolventenfunktion

$$\lambda \mapsto R_\lambda := R(\lambda, T) = (\lambda \text{Id} - T)^{-1}$$

auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert und lokal in eine Potenzreihe entwickelbar (mittels der Neumann'schen Reihe). Sei  $\ell \in (L(X))'$ . Die Funktion  $\lambda \mapsto \ell(R_\lambda)$  hat lokal um  $\lambda \in \mathbb{K}$  die Gestalt

$$\mu \mapsto \ell(R_\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ell(R_\lambda^{n+1}) (\mu - \lambda)^n \quad (**)$$

(vgl. Beweis von Satz 8.8). Die Funktion  $\lambda \mapsto \ell(R_\lambda)$  ist somit analytisch. Sie ist außerdem beschränkt, denn: Für  $|\lambda| > 2\|T\|$  gilt nach (\*)

$$|\ell(R_\lambda)| \leq \|\ell\| |\lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T\|^n}{|\lambda|^n} \leq \|\ell\| \frac{1}{\|T\|}$$

und auf  $\overline{B_{2\|T\|}(0)} \subset \mathbb{C}$  ist sie beschränkt, da sie stetig ist. Aus dem Satz von Liouville folgt: Die Funktion  $\lambda \mapsto \ell(R_\lambda)$  ist konstant. Dies kann aber für  $\lambda = 0$  in (\*\*) nur gelten, falls alle Koeffizienten bis auf den nullten verschwinden. Insbesondere gilt somit:

$$0 = \ell(R_0^2) = \ell((T^2)^{-1}).$$

Da  $\ell \in L(X)'$  beliebig war, folgt nun mithilfe des Satzes von Hahn-Banach (zum Beispiel wie im Beweis von Lemma 7.6 (1))

$$(T^2)^{-1} = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, d. h. die Annahme muss falsch gewesen sein, d. h. es gilt doch  $\sigma(T) \neq \emptyset$ .

(b) Gelte  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Wir zeigen zunächst:

$$s := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = r(T).$$

Aus (a) folgt:  $s \leq r(T)$ . Sei  $\mu \in \mathbb{C}$  mit  $|\mu| > s$  und sei  $\ell \in (L(X))'$ . Daraus, dass  $R(\cdot, T)$  analytisch ist, folgt, dass auch  $\ell \circ R(\cdot, T): \varrho(T) \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch ist. Für  $\tilde{\mu} \in \varrho(T)$  mit  $|\tilde{\mu}| > \|T\|$  wissen wir nach (\*):

$$\ell(R(\tilde{\mu}, T)) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(T^n \cdot (\tilde{\mu})^{-(n+1)}).$$

Wählen wir nun  $\tilde{\mu}$  geeignet (so dass  $\mu \in B_r(\tilde{\mu}) \subset \varrho(T)$  für ein  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt), so folgt mit dem Potenzreihenentwicklungssatz (bzw. aus der Cauchyformel), dass diese Reihe auch für  $\mu$  (statt  $\tilde{\mu}$ ) konvergiert. Dann muss aber  $(\ell(T^n/\mu^{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge in  $\mathbb{C}$  sein, d. h. es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(T^n/\mu^{n+1}) = 0.$$

Weil  $\ell \in L(X)'$  beliebig war, folgt:

$$T^n/\mu^{n+1} \rightharpoonup 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also ist  $(T^n/\mu^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt (Lemma 7.6 (5)), etwa durch  $K \in \mathbb{R}_{>0}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt dann

$$\|T^n\|^{1/n} \leq K^{1/n} |\mu|^{(n+1)/n},$$

woraus

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} K^{1/n} |\mu|^{(n+1)/n} = |\mu|$$

und damit auch  $r(T) \leq s$  folgt. Weil  $\sigma(T)$  nach (c) kompakt und  $|\cdot|$  stetig ist, wird das Supremum in  $r(T) = s = \sup_{\sigma(T)} |\cdot|$  angenommen und damit ist alles gezeigt. ■

### Bemerkungen 8.12.

- (i) Ist  $\dim X < \infty$ , so gilt  $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ .
- (ii) Ist  $\dim X = \infty$  und  $T \in K(X)$ , so gilt  $0 \in \sigma(T)$ . Im Allgemeinen ist 0 aber *kein* Eigenwert.

*Beweis.* (i) Sei  $\lambda \in \sigma(T)$ . Dann ist  $\lambda \text{Id} - T$  nicht bijektiv. Da  $X$  endlich-dimensional ist, folgt, dass  $\lambda \text{Id} - T$  auch nicht injektiv ist. Damit folgt  $\lambda \in \sigma_p(T)$ .

- (ii) Sei  $T \in K(X)$  und  $0 \in \varrho(T)$ . Dann gilt  $T^{-1} \in L(X)$  und nach Lemma 8.5 gilt:

$$\text{Id} = T^{-1}T \in K(X).$$

Heine-Borel (Satz 7.4) liefert:  $\dim X < \infty$ . Dies impliziert, dass  $0 \in \varrho(T)$  nur für  $\dim X < \infty$  möglich ist. ■

**Definition 8.13** (Fredholm-Operator). Seien  $X, Y$  Banachräume und sei  $A \in L(X, Y)$ . Dann heißt  $A$  *Fredholm-Operator*, falls gilt:

- (1)  $\dim N(A) < \infty$
- (2)  $R(A)$  ist abgeschlossen
- (3)  $\text{codim } R(A) < \infty$

Der *Index* von  $A$  ist dann definiert als

$$\operatorname{ind} A := \dim N(A) - \operatorname{codim} R(A).$$

**Definition 8.14** (Kodimension). Sei  $Y$  ein Banachraum.

- (i) Sei  $Z \subset Y$  ein abgeschlossener Unterraum. Wir sagen  $Z$  *besitzt endliche Kodimension*, falls ein Unterraum  $Y_0 \subset Y$  existiert mit  $\dim Y_0 < \infty$  und  $Y = Z \oplus Y_0$ .
- (ii) Die *Kodimension* von  $Z$  ist dann definiert durch  $\operatorname{codim} Z := \dim Y_0$ .

**Lemma 8.15.** Sei  $Y$  ein Banachraum und  $Z \subset Y$  ein abgeschlossener Unterraum. Besitzt  $Z$  endliche Kodimension, so ist  $\operatorname{codim} Z$  eindeutig bestimmt.

*Beweisskizze.* Sei  $Y_0 \subset Y$  ein Unterraum mit  $Y = Z \oplus Y_0$  und  $\dim Y_0 < \infty$ . Nach Voraussetzung ist  $Z$  abgeschlossen und  $Y_0$  ist endlich-dimensional, also auch abgeschlossen. Nach Satz 5.14 existiert also ein Projektor  $P \in P(Y)$  auf  $Y_0$  mit  $Z = N(P)$ .

Sei nun  $Y_1 \subset Y$  ein Unterraum mit  $Z \cap Y_1 = \{0\}$ . Dann ist  $S := P|_{Y_1} : Y_1 \rightarrow Y_0$  linear und injektiv. Daraus folgt:  $Y_1$  ist endlich-dimensional mit  $\dim Y_1 \leq \dim Y_0$  und es gilt Gleichheit genau dann, wenn  $Y = Z \oplus Y_1$ . (Siehe Übungen.)

Ist  $Y = Z \oplus Y_1$ , so tausche die Rollen von  $Y_1$  und  $Y_0$ . Es folgt:  $\dim Y_1 = \dim Y_0$ . (Außerdem ist dann  $S$  bijektiv.)

■

**Bemerkung:** Eine große Klasse von Fredholm-Operatoren ergibt sich aus kompakten Störungen der Identität, d. h.  $A = \operatorname{Id} - T$  für  $T \in K(X)$ .

**Satz 8.16.** Sei  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{K}$  und sei  $T \in K(X)$ . Dann ist  $A := \operatorname{Id} - T$  ein Fredholm-Operator mit Index 0. Genauer ergibt sich dies aus den folgenden Einzelaussagen:

- (1)  $\dim N(A) < \infty$
- (2)  $R(A)$  ist abgeschlossen
- (3)  $N(A) = \{0\} \implies R(A) = X$
- (4)  $R(A) = X \implies N(A) = \{0\}$
- (5)  $\operatorname{codim} R(A) = \dim N(A)$

*Beweis.* (1) Für  $x \in X$  gilt:

$$x \in N(A) \iff Ax = 0 \iff x = Tx.$$

Daher gilt

$$B_1(0) \cap N(A) \subset T(B_1(0)).$$

Weil  $T$  kompakt ist, ist die Einheitskugel in  $N(A)$  also präkompakt. Nach Heine-Borel (Satz 7.4) ist damit  $N(A)$  endlich-dimensional.

- (2) Sei  $x \in \overline{R(A)}$  und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  mit  $Ax_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  schon

$$\|x_n\| \leq 2d_n \quad \text{mit} \quad d_n := \text{dist}(x_n, N(A))$$

gilt, denn: Zu  $n \in \mathbb{N}$  können wir  $a_n \in N(A)$  mit  $\|x_n - a_n\| \leq 2d_n$  wählen und dann  $(x_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  betrachten. Wir zeigen unten, dass  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, also ist auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Wegen  $T \in K(X)$  existieren dann eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $y \in X$  mit

$$Tx_{n_k} \rightarrow y \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Nach Definition von  $A$  und Wahl von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt dann:

$$x_{n_k} = Ax_{n_k} + Tx_{n_k} \rightarrow x + y \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Stetigkeit von  $A$  und Eindeutigkeit des Grenzwerts implizieren  $A(x + y) = x$ , d. h.  $x$  liegt im Bild von  $A$ . Es folgt  $\overline{R(A)} = R(A)$ .

Es bleibt die Beschränktheit von  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu zeigen. Angenommen es gibt eine Teilfolge von  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , welche gegen  $\infty$  konvergiert. (Um die Notation übersichtlich zu halten, bezeichnen wir diese weiterhin mit  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .) Ohne Einschränkung gilt dann  $d_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und wir können somit

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} := (x_n/d_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

setzen. Dann ist  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und somit existiert (wegen  $T \in K(X)$ ) eine Teilfolge  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $y \in X$  mit  $Ty_{n_k} \rightarrow y \in X$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dann gilt

$$y_{n_k} - Ty_{n_k} = Ay_{n_k} = \frac{Ax_{n_k}}{d_{n_k}} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

denn  $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert und  $(d_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  geht gegen unendlich. Aus der Stetigkeit von  $A$  folgt  $Ay = 0$  und damit gilt  $\text{dist}(y, N(A)) = 0$ . Weil  $\text{dist}(\cdot, N(A))$  stetig ist, folgt:

$$1 = \text{dist}(x_{n_k}, N(A))/d_{n_k} = \text{dist}(y_{n_k}, N(A)) \rightarrow \text{dist}(y, N(A)) = 0,$$

ein Widerspruch.

- (3) Sei  $A$  injektiv. Angenommen es existiert ein  $x \in X \setminus R(A)$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt zunächst

$$A^n x \in R(A^n) \setminus R(A^{n+1}),$$

denn: Falls  $A^n x = A^{n+1} y$  für ein  $y \in X$  gilt, so folgt  $A^n(x - Ay) = 0$  und aus der Injektivität von  $A$  folgt dann  $x = Ay \in R(A)$ , was der Wahl von  $x$  widerspricht. Weiter gilt

$$A^n = (\text{Id} - T)^n = \text{Id} - T(\dots)$$

und weil  $T$  kompakt ist, ist nach Lemma 8.5 auch  $T(\dots)$  kompakt. Aus (2) folgt dann, dass  $R(A^n)$  abgeschlossen ist. Aus den bisherigen Überlegungen folgt  $\text{dist}(A^n x, R(A^{n+1})) > 0$ , weswegen wir für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $a_{n+1} \in R(A^{n+1})$  mit

$$0 < \|A^n x - a_{n+1}\| \leq 2 \text{dist}(A^n x, R(A^{n+1}))$$

wählen und

$$y_n := \frac{A^n x - a_{n+1}}{\|A^n x - a_{n+1}\|}$$

setzen können. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt dann

$$\text{dist}(y_n, R(A^{n+1})) \geq \frac{1}{2},$$

denn für alle  $y \in R(A^{n+1})$  gilt

$$\|y_n - y\| = \frac{\|A^n x - (a_{n+1} + \|A^n x - a_{n+1}\| y)\|}{\|A^n x - a_{n+1}\|} \geq \frac{\text{dist}(A^n x, R(A^{n+1}))}{\|A^n x - a_{n+1}\|} \geq \frac{1}{2}.$$

Für  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt dann:

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|y_n - \underbrace{(Ay_n + y_m - Ay_m)}_{\in R(A^{n+1})}\| \geq \frac{1}{2}.$$

Das heißt aber, dass  $(Ty_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keinen Häufungspunkt besitzen kann, im Widerspruch zur Kompaktheit von  $T$ . Also war die Annahme falsch und es gilt doch  $X = R(A)$ .

- (4) Sei  $A$  surjektiv. Angenommen  $A$  ist nicht injektiv. Dann finden wir eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit  $x_1 \in N(A) \setminus \{0\}$  und  $Ax_{n+1} = x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für diese gilt

$$x_{n+1} \in N(A^{n+1}) \setminus N(A^n),$$

denn  $A^{n+1}x_{n+1} = A^n x_n = Ax_1 = 0$  und  $A^n x_{n+1} = A^{n-1}x_n = Ax_2 = x_1 \neq 0$ . Es gilt offensichtlich  $N(A^n) \subset N(A^{n+1})$  und mit dem Satz vom fast orthogonalen Element (7.3) erhalten wir: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein  $y_{n+1} \in N(A^{n+1})$  mit  $\|y_{n+1}\| = 1$  und  $\text{dist}(y_{n+1}, N(A^n)) \geq \frac{1}{2}$ . Für  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n > m$  gilt dann:

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|y_n - \underbrace{(Ay_n + y_m - Ay_m)}_{\in N(A^{n-1})}\| \geq \frac{1}{2},$$

im Widerspruch zur Kompaktheit von  $T$ . Also muss doch  $N(A) = \{0\}$  gelten.

- (5) Sei  $n := \dim N(A)$ . Wir zeigen nun per Induktion über  $n$ , dass  $n = \text{codim } R(A)$  gilt. Für  $n = 0$ , siehe oben. Im Fall  $n \geq 1$ , wähle  $x_0 \in N(A) \setminus \{0\}$  und einen Unterraum  $N_0 \subset N(A)$  mit  $\dim N_0 = n - 1$  und

$$N(A) = \text{span}\{x_0\} \oplus N_0.$$

Nach (2) und (4) gilt:  $R(A)$  ist abgeschlossen und  $R(A) \neq X$ . Sei  $y_0 \in X \setminus R(A)$  und

$$Y_0 := \text{span}\{y_0\} \oplus R(A) \subset X.$$

Nach (dem Beweis von) Korollar 4.16 gibt es ein  $x' \in X'$  mit  $x'(x_0) = 1$  und  $x'|_{N_0} = 0$ . Definiere  $T_0 x := Tx + x'(x)y_0$  und  $A_0 := \text{Id} - T_0$ , also  $A_0 x = Ax - x'(x)y_0$ . Wir schließen:

$$\begin{aligned} x \in N(A_0) &\iff Ax = x'(x)y_0 \iff x \in N(A) \wedge x'(x) = 0 \\ &\iff x \in N_0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt  $R(A_0) = Y_0$ , denn:  $A_0x_0 = -y_0$  und für  $y \in R(A)$  mit  $Ax = y$  für ein  $x \in X$  gilt:

$$A_0(x - x'(x)x_0) = Ax + 0 = y.$$

Weiter ist  $T_0$  kompakt, also gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$$n - 1 = \dim N(A_0) = \operatorname{codim} R(A_0).$$

Es folgt:

$$\operatorname{codim} R(A) = \operatorname{codim} R(A_0) + 1 = n = \dim N(A).$$

■

**Satz 8.17** (Spektralsatz für kompakte Operatoren). Sei  $X$  ein  $\infty$ -dimensionaler Banachraum über  $\mathbb{K}$  und sei  $T \in K(X)$ . Dann gilt:

- (a)  $0 \in \sigma(T)$
- (b)  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  besteht nur aus Eigenwerten, d. h.  $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T)$ .
- (c) Es tritt einer der folgenden Fälle ein:
  - (1)  $\sigma(T) = \{0\}$
  - (2)  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  ist endlich
  - (3)  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  besteht aus einer Folge, die gegen 0 konvergiert
- (d) Jeder Eigenwert verschieden von 0 hat einen endlich-dimensionalen Eigenraum.

*Beweis.* (a) Siehe Bemerkung 8.12 (ii).

- (b) Sei  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ . Angenommen  $\lambda$  ist kein Eigenwert von  $T$ , dann gilt  $N(\operatorname{Id} - T/\lambda) = N(\lambda \operatorname{Id} - T) = \{0\}$ . Satz 8.16 liefert:  $R(\operatorname{Id} - T/\lambda) = X$ . Dies impliziert  $\lambda \in \varrho(T)$ , im Widerspruch zu  $\lambda \in \sigma(T)$ .
- (c) Zu  $\lambda \in \mathbb{K}$  definiere  $A_\lambda := \lambda \operatorname{Id} - T$ . Entweder es gilt einer der ersten beiden Fälle, oder aber es gilt weder  $\sigma(T) = \{0\}$  noch  $|\sigma(T) \setminus \{0\}| < \infty$ . In diesem Fall finden wir aber eine Folge von Eigenwerten  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\sigma(T) \setminus \{0\}$ . Zu  $n \in \mathbb{N}$  wähle  $e_n \in X \setminus \{0\}$  als Eigenvektor zu  $\lambda_n$ ; dann gilt

$$A_{\lambda_n} e_n = 0.$$

Weiter sei  $X_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir behaupten, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\dim X_n = n, \quad \text{d. h. } e_1, \dots, e_n \text{ sind linear unabhängig.}$$

Falls  $e_1, \dots, e_{n-1}$  linear unabhängig und  $e_1, \dots, e_n$  nicht, so gilt für geeignete  $\alpha_k \in \mathbb{K}$ :

$$e_n = \sum_{k < n} \alpha_k e_k.$$

Dann folgt:

$$0 = (\lambda_n \text{Id} - T) e_n = \sum_{k < n} \alpha_k (\lambda_n - \lambda_k) e_k$$

und somit  $\alpha_k = 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Daraus ergibt sich  $e_n = 0$ , was nicht sein kann.

Jetzt wählen wir mit Hilfe des Satzes vom fast orthogonalen Element (7.3) für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in X_n$  mit

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \text{dist}(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$x_n = \alpha_n e_n + \tilde{x}_n$$

für  $\alpha_n \in \mathbb{K}$  und  $\tilde{x}_n \in X_{n-1}$  und damit

$$T(x_n/\lambda_n) = x_n - \frac{1}{\lambda_n} A_{\lambda_n} x_n = x_n - \frac{1}{\lambda_n} A_{\lambda_n} \tilde{x}_n.$$

Weil  $X_{n-1}$  aber  $T$ -invariant ist, gilt  $A_{\lambda_n} \tilde{x}_n \in X_{n-1}$  und für  $m < n$  somit  $T(x_m/\lambda_m) \in X_{n-1}$ . Also erhalten wir für alle  $m < n$ :

$$\|T(x_n/\lambda_n) - T(x_m/\lambda_m)\| = \|x_n - \underbrace{(\dots)}_{\in X_{n-1}}\| \geq \frac{1}{2}.$$

Also kann die Folge  $(T(x_n/\lambda_n))_{n \in \mathbb{N}}$  keinen Häufungspunkt besitzen. Weil aber  $T$  kompakt ist, kann damit  $(x_n/\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine beschränkte Teilfolge enthalten, d. h. es gilt

$$\|x_n/\lambda_n\| \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\|x_n\| = 1$ , also muss  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge sein. Damit ist 0 der einzig mögliche Häufungspunkt von  $\sigma(T) \setminus \{0\}$ . Insbesondere ist  $\sigma(T) \setminus B_r(0)$  endlich für alle  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Damit ist  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  (als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen) abzählbar.

- (d) Dies folgt aus Satz 8.16, denn: Für  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$  ist  $\text{Id} - T/\lambda$  ein Fredholm-Operator mit  $N(\text{Id} - T/\lambda) = N(\lambda \text{Id} - T)$ . ■

**8.18** (Fredholm-Alternative). Sei  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  und  $T \in K(X)$ . Dann gilt die *Fredholm-Alternative*: Entweder ist  $\lambda x - Tx = y$  eindeutig lösbar für alle  $y \in X$ , oder aber  $\lambda x - Tx = 0$  hat nicht-triviale Lösungen (also von 0 verschiedene Lösungen).

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned} \lambda x - Tx = 0 \text{ eindeutig lösbar} &\iff N(\lambda \text{Id} - T) = \{0\} \\ &\iff R(\lambda \text{Id} - T) = X \\ &\iff \lambda x - Tx = y \text{ ist lösbar} \end{aligned}$$
■

## 9 Spektralsatz für kompakte normale Operatoren

Wir erinnern an den Begriff der adjungierten Abbildung: Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und sei  $T \in L(X, Y)$ , so ist  $T' : Y' \rightarrow X'$  gegeben durch  $(T'y')(x) = y'(Tx)$  für alle  $x \in X, y' \in Y'$ . (Siehe auch Definition 5.15.)

Im Folgenden bezeichnet  $J_H$  für einen Hilbertraum  $H$  die Isometrie  $H \rightarrow H'$  aus dem Rieszschen Darstellungssatz (6.5). (*Achtung:* dies ist nicht zu verwechseln mit der Isometrie aus Satz 4.18.)

**Definition 9.1** (Hilbertraum-Adjungierte). Seien  $X, Y$  Hilberträume. Dann heißt der Operator

$$T^* := J_X^{-1} T' J_Y \in L(Y, X)$$

*Hilbertraum-Adjungierte* (von  $T$ ). Sei nun  $X = Y$ . Gilt  $T = T^*$ , so nennen wir  $T$  *selbstadjungiert*. Gilt  $TT^* = T^*T$ , so nennen wir  $T$  *normal*.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightleftharpoons[T^*]{T} & Y \\ J_X \downarrow & & \downarrow J_Y \\ X' & \xleftarrow{T'} & Y' \end{array}$$

**Lemma 9.2.** Seien  $X, Y$  Banachräume und  $T \in L(X, Y)$ . Dann ist  $T^*$  charakterisiert durch folgende Eigenschaft: für alle  $x \in X, y \in Y$  gilt

$$\langle x, T^*y \rangle_X = \langle Tx, y \rangle_Y.$$

*Beweis.* Seien  $x \in X, y \in Y$ . Dann gilt:

$$\langle x, T^*y \rangle_X = \langle x, J_X^{-1} T' J_Y y \rangle_X = (T' J_Y y)(x) = (J_Y y)(Tx) = \langle Tx, y \rangle_Y.$$

■

**Lemma 9.3.** Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{K}$  und  $T \in L(H)$  normal. Ist  $x \in H$  ein Eigenvektor von  $T$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ , so ist  $x$  auch ein Eigenvektor von  $T^*$  zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$ .

*Beweis.* Weil  $T$  normal ist, ist auch  $(\lambda \text{Id} - T)$  normal, denn  $(\lambda \text{Id} - T)^* = \bar{\lambda} \text{Id} - T^*$ , also

$$\begin{aligned} (\lambda \text{Id} - T)^*(\lambda \text{Id} - T) &= |\lambda|^2 \text{Id} - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + T^*T \\ &= |\lambda|^2 \text{Id} - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + TT^* = (\lambda \text{Id} - T)(\lambda \text{Id} - T)^*. \end{aligned}$$



Es gilt weiter  $\|T^*x\| = \|Tx\|$  für alle  $x \in H$ , denn:

$$\langle T^*x, T^*x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \overline{\langle x, T^*Tx \rangle} = \overline{\langle Tx, Tx \rangle} = \langle Tx, Tx \rangle.$$

Wegen  $(\lambda \text{Id} - T)^* = \bar{\lambda} \text{Id} - T^*$ , folgt für  $x \in H$  mit  $Tx = \lambda x$ :

$$0 = \|Tx - \lambda x\| = \|(\lambda \text{Id} - T)^*x\| = \|(\bar{\lambda} \text{Id} - T^*)x\|.$$

Dies zeigt die Behauptung. ■

**Bemerkung:** Im vorangehenden Beweis haben wir gesehen: Ist  $H$  ein Hilbertraum und  $T \in L(H)$  normal, so gilt:

$$\forall x \in H: \quad \|T^*x\| = \|Tx\|.$$

**Lemma 9.4.** Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{C}$  und  $T \in L(H)$  normal. Dann gilt:

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} = \|T\|.$$

*Beweis.* Wir wissen schon, dass

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \|T\|$$

gilt (Satz 8.11). Wir zeigen nun für alle  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\|T^m\| \geq \|T\|^m,$$

woraus dann durch Wurzelziehen und Grenzwertbildung die Behauptung folgt. Für  $m = 1$  ist die Ungleichung klar. Sei  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|T^m x\|^2 &= \langle T^m x, T^m x \rangle = \langle T^{m-1} x, T^* T^m x \rangle \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|T^{m-1} x\| \|T^* T^m x\| = \|T^{m-1} x\| \|T^{m+1} x\| \\ &\leq \|T^{m-1}\| \|T^{m+1}\| \|x\|^2 \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\|T^m\|^2 \leq \|T^{m-1}\| \|T^{m+1}\| \leq \|T\|^{m-1} \|T^{m+1}\|.$$

Mit  $\|T^1\| \geq \|T\|^1$  erhalten wir so induktiv:

$$\|T^{m+1}\| \geq \frac{\|T^m\|^2}{\|T\|^{m-1}} \geq \|T\|^{2m-(m-1)} = \|T\|^{m+1}.$$
■

**Satz 9.5.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $T \in L(H)$ . Dann gilt:

- (a) Ist  $T$  selbstadjungiert und kompakt, so gilt  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .
- (b) Ist  $T$  normal, so haben verschiedene Eigenwerte zueinander orthogonale Eigenvektoren.

*Beweis.* (a) Sei  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ . Dann liefert der Spektralsatz (8.17), dass  $\lambda$  ein Eigenwert sein muss. Also existiert ein  $x \in H \setminus \{0\}$  mit  $Tx = \lambda x$ . Somit folgt:

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Wegen  $x \neq 0$  gilt  $\langle x, x \rangle > 0$  und damit erhalten wir  $\lambda = \bar{\lambda}$ , also muss  $\lambda \in \mathbb{R}$  gelten.

- (b) Seien  $\lambda, \mu \in \sigma(T)$  verschiedene Eigenwerte von  $T$  mit Eigenvektoren  $x$  bzw.  $y$  aus  $H$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \langle x, y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle \\ &= \langle x, T^* y \rangle = \langle x, \bar{\mu} y \rangle = \mu \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Wegen  $\lambda \neq \mu$  muss also  $\langle x, y \rangle = 0$  gelten. ■

**Bemerkung:** Satz 9.5 (a) gilt auch ohne die Voraussetzung, dass  $T$  kompakt ist, ist dann allerdings schwieriger zu beweisen.

**Satz 9.6.** Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{K}$  und  $T \in L(H)$  selbstadjungiert. Dann gilt:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in H, \\ \|x\| \leq 1}} |\langle Tx, x \rangle|.$$

*Beweis.* „ $\geq$ “ folgt aus  $\forall x \in H: |\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \|x\| \|x\|$ .

„ $\leq$ “: Setze  $M := \sup_{x \in H, \|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$ . Seien  $x, y \in H$ . Aus  $T = T^*$  folgt:

$$\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle = 2\langle Tx, y \rangle + 2\langle Ty, x \rangle = 4 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle.$$

Die Parallelogrammidentität (Satz 2.8 (3)) liefert:

$$4 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle \leq M (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Daraus folgt für  $x, y \in H$  mit  $\|x\|, \|y\| \leq 1$ :

$$\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle \leq M.$$

Indem wir  $y$  mit einem skalaren Faktor (aus  $\mathbb{K}$ ) multiplizieren, können wir annehmen, dass  $\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle = |\langle Tx, y \rangle|$  gilt. Für  $Tx \neq 0$  ergibt dies mit  $y = Tx/\|Tx\|$  also

$$M \geq |\langle Tx, y \rangle| = \frac{|\langle Tx, Tx \rangle|}{\|Tx\|} = \|Tx\|.$$

Daraus folgt  $\|T\| \leq M$ . ■

**Korollar 9.7.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $T \in L(H)$  selbstadjungiert. Falls  $T$  außerdem positiv semidefinit ist, d. h. es gilt  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$  für alle  $x \in H$ , so gilt:

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda = \sup_{\substack{x \in H, \\ \|x\| \leq 1}} |\langle Tx, x \rangle|.$$

*Beweis.* Folgt direkt aus Lemma 9.4 und Satz 9.6. ■

**Lemma 9.8.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $T \in L(H)$ .

- (a) Gilt  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und ist  $T$  normal, so existiert ein  $\lambda \in \sigma(T)$  mit  $|\lambda| = \|T\|$ .
- (b) Gilt  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und ist  $T$  selbstadjungiert und kompakt, so ist  $\|T\|$  oder  $-\|T\|$  ein Eigenwert von  $T$ .

*Beweis.* (a) Nach Satz 8.11 existiert ein  $\lambda \in \sigma(T)$  mit

$$|\lambda| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 9.4.

- (b) Nach Satz 9.6 existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\overline{B_1(0)} \subset H$  mit

$$|\langle Tx_n, x_n \rangle| \rightarrow \|T\| \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Gehe im Folgenden ggf. (vermöge der Kompaktheit von  $T$ ) zu Teilfolgen über, um die Existenz der Grenzwerte zu erhalten. Setze

$$\lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Tx_n, x_n \rangle \quad \text{und} \quad y := \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \langle Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n \rangle \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &\leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Daher gilt  $\lambda x_n \rightarrow y$  für  $n \rightarrow \infty$  und damit

$$Ty = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lambda y.$$

Wegen  $|\lambda| = \|T\|$  folgt die Behauptung, falls  $y \neq 0$  gilt. Falls  $y = 0$  gilt, so ist  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge und somit erhalten wir

$$\|T\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle Tx_n, x_n \rangle| = 0,$$

d. h.  $T = 0$  und dafür ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. ■

**Theorem 9.9** (Spektralsatz für kompakte, normale bzw. selbstadjungierte Operatoren). Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{K}$  und  $T \in K(H)$ . Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sei  $T$  außerdem normal und für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sei  $T$  selbstadjungiert. Dann existiert ein (eventuell endliches) Orthonormalsystem  $e_1, e_2, \dots$  sowie eine (eventuell endliche) Nullfolge  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  in  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ , so dass

$$H = N(T) \oplus \overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}}$$

sowie

$$Tx = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

für alle  $x \in H$  gilt. Dabei sind die  $\lambda_k$  die von 0 verschiedenen (aber nicht notwendigerweise unterschiedlichen) Eigenwerte von  $T$  und für alle  $k$  ist  $e_k$  ein Eigenvektor zu  $\lambda_k$ . Weiter gilt:

$$\|T\| = \max_k |\lambda_k|.$$

**Bemerkung:** Vergleiche LinAlg: symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar bezüglich einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

*Beweis.* Sei  $\mu_1, \mu_2, \dots$  die Folge der paarweise verschiedenen Eigenwerte von  $T$ , die nicht verschwinden (dies sind höchstens abzählbar viele nach dem Spektralsatz für kompakte Operatoren 8.17). Sei  $d_i$  die (endliche) Dimension des Eigenraums zum Eigenwert  $\mu_i$ . Definiere nun

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) := (\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{d_1\text{-mal}}, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{d_2\text{-mal}}, \dots).$$

Weil die  $\mu_k$  eine Nullfolge bilden, gilt dies auch für die  $\lambda_k$ . Zu jedem Eigenraum  $N(\mu_i \text{Id} - T)$  wähle eine Orthonormalbasis  $\{e_1^i, \dots, e_{d_i}^i\}$  und definiere

$$(e_1, e_2, e_3, \dots) := (e_1^1, \dots, e_{d_1}^1, e_1^2, \dots, e_{d_2}^2, \dots).$$

Nach Satz 9.5 bilden die  $e_k$  nun ein Orthonormalsystem und es gilt:  $Te_k = \lambda_k e_k$  für alle  $k$ . Mit dem gleichen Argument folgt

$$N(T) \perp e_k$$

für alle  $k$  (da ein Element aus  $N(T) \setminus \{0\}$  Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist). Der Raum

$$H_1 := N(T) \oplus \overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}}$$

ist ein abgeschlossener Unterraum von  $H$ . Es bleibt  $H_1 = H$  zu zeigen. Wir setzen  $H_2 := H_1^\perp$  und behaupten, dass  $H_2$  ein  $T$ -invarianter Unterraum ist. Sei dazu  $y \in H$  mit  $\langle y, e_k \rangle = 0$  für alle  $k$ . Dann gilt

$$\langle Ty, e_k \rangle = \langle y, T^* e_k \rangle = \langle y, \bar{\lambda}_k e_k \rangle = \lambda_k \langle y, e_k \rangle = 0,$$

also  $Ty \perp H_1$ . Analog zeigt man  $Ty \perp N(T)$  für  $y \in N(T)^\perp$ . Damit können wir  $T_2 := T|_{H_2}$  als Operator aus  $K(H_2)$  auffassen. Angenommen  $T_2$  ist nicht der Nulloperator. Dann gilt  $\|T_2\| \neq 0$  und somit sichert Lemma 9.8 die Existenz eines Spektralwerts  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , welcher

nach dem Spektralsatz für kompakte Operatoren (Satz 8.17) ein Eigenwert sein muss, d. h. es gibt außerdem ein  $x \in H_2 \setminus \{0\}$  mit  $T_2x = \lambda x$ . Daraus folgt aber auch  $\lambda \in \sigma(T)$  und somit  $x \in \text{span}\{e_1, e_2, \dots\} \subset H_2^\perp$ . Also ergibt sich

$$x \in H_2 \cap H_2^\perp = \{0\},$$

ein Widerspruch. Die Annahme war also falsch und es gilt doch  $T_2 = 0$ , und daher auch  $H_2 \subset N(T) \subset H_2^\perp$ , also  $H_2 = \{0\}$ . Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung. Sei nun  $x \in H$ . Dann gibt es also ein  $y \in N(T)$ , so dass

$$x = y + \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

gilt (für den rechten Summanden, siehe Satz 6.17). Aus der Stetigkeit von  $T$  folgt:

$$Tx = Ty + \sum_k \langle x, e_k \rangle Te_k = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Im Beweis von Satz 8.11 haben wir gesehen, dass stets  $\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \leq \|T\|$  gilt. Aus Lemma 9.8 folgt, dass dieses Supremum unter den gegebenen Voraussetzungen sowohl im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  als auch im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  angenommen wird. Daraus erhalten wir die letzte Behauptung. ■

## 10 $L^p$ -Räume

**10.1** (Einige Begriffe und Resultate über Maß- und Integrationstheorie, die jeder Bürger wissen sollte). Maßraum,  $\sigma$ -Algebra, Maß, messbare Menge/Funktion.

Sei  $(\Omega, S, \mu)$  ein Maßraum (also  $\Omega$  eine Menge,  $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu$  ein Maß).

**Definition:**  $\Omega$  heißt  $\sigma$ -finit, falls eine Folge  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $S$  existiert, so dass  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  gilt und für alle  $n \in \mathbb{N}$  das Maß von  $\Omega_n$  endlich ist, d.h.  $\mu(\Omega_n) < \infty$ .

**Definition:**

- (i) Die Menge  $L^1(\Omega, \mu)$  (kurz auch  $L^1(\Omega)$  oder nur  $L^1$ ) bezeichnet den Raum aller integrierbaren Funktionen  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\|f\|_{L^1} = \|f\|_1 = \int_{\Omega} |f| d\mu = \int |f|$

**Bemerkung:**

- (i) Identifiziere Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.
- (ii) Wir sagen eine Eigenschaft gilt fast überall (f. ü.), falls eine Nullmenge  $N$  existiert, so dass die betrachtete Eigenschaft für alle  $x \in \Omega \setminus N$  gilt.

**Satz** (Satz von Beppo-Levi/über monotone Konvergenz). Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L^1(\Omega, \mu)$  mit

- (a)  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$  f. ü.
- (b)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n < \infty$ .

Dann konvergiert  $f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  fast überall in  $\Omega$  gegen einen endlichen Grenzwert, den wir mit  $f(x)$  bezeichnen. Es gilt

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

**Satz** (Satz von Lebesgue/über dominierte Konvergenz). Sei  $g \in L^1(\Omega, \mu)$  und sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar sowie  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen. Es gelte  $|f_n| \leq g$  fast überall für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $f_n \rightarrow f$  punktweise fast überall für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt auch  $f, f_n \in L^1(\Omega, \mu)$  (für alle  $n \in \mathbb{N}$ ) und es gilt  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1(\Omega, \mu)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Definition 10.2.** Sei  $p \in [1, \infty)$ . Wir definieren

$$L^p(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

und

$$\|f\|_{L^p} := \|f\|_p := \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

**Bemerkung:** Wir sehen später, dass  $\|f\|_{L^p}$  tatsächlich eine Norm ist.

**Definition 10.3.** Wir definieren

$$L^\infty(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und es existiert ein } c \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } |f(x)| \leq c \text{ f. ü.}\}$$

und

$$\|f\|_{L^\infty} := \|f\|_\infty := \inf \{c \in \mathbb{R}_{>0} \mid |f(x)| \leq c \text{ f. ü.}\}.$$

**Bemerkungen 10.4.**

(i) Für  $\Omega = \mathbb{N}$  und das Zählmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{N}$  gilt  $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mu)$ .

(ii) Für  $f \in L^\infty(\Omega)$  gilt  $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$  f. ü.

*Beweis von (ii).* Sei  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Dann existiert eine Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}_{>0}$  mit

$$c_n \rightarrow \|f\|_\infty \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |f(x)| \leq c_n \quad \text{f. ü.}$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $E_n$  eine Nullmenge mit  $|f(x)| \leq c_n$  für alle  $x \in \Omega \setminus E_n$ . Setze  $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ . Dann ist (bekannterweise) auch  $E$  eine Nullmenge und es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \Omega \setminus E: \quad |f(x)| \leq c_n.$$

Es folgt  $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$  für alle  $x \in \Omega \setminus E$ . ■

**Notation:** Zu  $p \in [1, \infty]$  bezeichne  $p' \in [1, \infty]$  den *konjugierten Exponenten* mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

D. h. es gilt  $p' = p/(p-1)$  für  $p \in (1, \infty)$ ,  $p' = \infty$  für  $p = 1$  und  $p' = 1$  für  $p = \infty$ .

**Theorem 10.5** (Hölder'sche Ungleichung). Sei  $p \in [1, \infty]$ . Für  $f \in L^p(\Omega)$  und  $g \in L^{p'}(\Omega)$  gilt:

$$fg \in L^1(\Omega) \quad \text{und} \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

*Beweisskizze.* Geht analog zum Beweis bei  $\ell^p$ : vgl. Satz 2.14. Ersetze dabei jeweils  $x_k, y_k$  durch  $f(x), g(x)$  und Summen durch Integrale. ■

### Bemerkungen:

- (i) Es gibt eine Erweiterung der Höler'schen Ungleichung: Sei  $k \in \mathbb{N}$ , seien  $p_1, \dots, p_k \in [1, \infty]$  und für  $i \in \{1, \dots, k\}$  sei  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ . Weiter sei  $p \in [1, \infty]$  mit

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}.$$

Dann gilt für  $f := f_1 \cdots f_k$ :

$$f \in L^p(\Omega) \quad \text{und} \quad \|f\|_p \leq \|f\|_{p_1} \cdots \|f\|_{p_k}.$$

- (ii) Insbesondere gilt für  $f \in L^p \cap L^q$  mit  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  auch  $f \in L^r$  für alle  $r \in [p, q]$ . Weiter gilt

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

für

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

Diese Ungleichung nennt man *Interpolationsungleichung*, welche wichtig ist, um Funktionen in  $L^p$ -Räumen zu kontrollieren.

**Satz 10.6.** Sei  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $L^p(\Omega)$  ein Vektorraum und  $\|\cdot\|_{L^p}$  ist eine Norm.

*Beweisskizze.* Die Fälle  $p \in \{1, \infty\}$  sind klar. Sei also  $p \in (1, \infty)$ . Wir gehen vor wie im Fall für  $\ell^p$  (Satz 2.15). (Im Wesentlichen ist die  $\triangle$ -Ungleichung zu zeigen, alles andere ist klar.) ■

**Satz 10.7** (Fischer-Riesz). Sei  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $L^p(\Omega)$  ein Banachraum.

*Beweis.* Fall  $p = \infty$ . Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^\infty$ . Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  existiert ein  $N_k \in \mathbb{N}$  mit

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_{\geq N_k}: \quad \|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}.$$

Also existiert für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Nullmenge  $E_k$  mit

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_{\geq N_k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k: \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Setze dann  $E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ , dann ist auch  $E \subset \Omega$  eine Nullmenge. Da  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  für  $x \in \Omega \setminus E$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  ist, existiert ein  $f(x) \in \mathbb{R}$  mit  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Aus der obigen Ungleichung folgt für  $m \rightarrow \infty$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq N_k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E: \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$



Daraus ergibt sich  $f \in L^\infty(\Omega)$  und  $\|f - f_n\|_\infty \leq 1/k$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq N_k}$ . Daraus folgt

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Fall  $p \in [1, \infty)$ . Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^p(\Omega)$ . Es genügt zu zeigen, dass eine Teilfolge dieser Folge konvergiert. Sei  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge, so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}.$$

Im Folgenden schreiben wir wieder einfach  $f_k$  für  $f_{n_k}$ . Wir behaupten nun, dass  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $L^p(\Omega)$  konvergiert. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Dann gilt  $\|g_n\|_p \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , was aus der obigen Ungleichung und dem Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe folgt. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert ein  $g \in L^p(\Omega)$  mit

$$g_n(x) \rightarrow g(x) \quad \text{f. ü.} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq n \geq 2$  gilt:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq g_m(x) - g_{n-1}(x) \rightarrow 0 \quad \text{f. ü.} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dies zeigt aber, dass  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  f. ü. konvergiert mit Grenzwert  $f(x)$ . Es gilt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g_n(x) \quad \text{f. ü.},$$

insbesondere folgt also:

$$f = \underbrace{f - f_n}_{\in L^p} + \underbrace{f_n}_{\in L^p} \in L^p(\Omega).$$

Der Satz von Lebesgue liefert nun:

$$\|f - f_n\|_p \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

denn:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)|^p &\rightarrow 0 \quad \text{f. ü.} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \\ \text{und } |f - f_n|^p &\leq g^p \in L^1(\Omega) \end{aligned}$$

■

**Satz 10.8.** Sei  $p \in [1, \infty]$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L^p(\Omega)$ . Sei weiter  $f \in L^p(\Omega)$  mit  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann existiert eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und eine Funktion  $h \in L^p(\Omega)$ , so dass gilt:

- (a)  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  f. ü. für  $k \rightarrow \infty$   
 (b)  $\forall k \in \mathbb{N}: |f_{n_k}| \leq h(x)$  f. ü.

*Beweisskizze.* Wähle die Teilfolge wie im vorangehenden Beweis und zeige die gewünschten Aussagen mit ähnlichen Argumenten wie dort ... ■

Das Ziel ist es nun, den Dualraum von  $L^p(\Omega)$  zu beschreiben. Wir brauchen dazu etwas Maßtheorie.

**Definition 10.9.** Sei  $\Omega$  eine Menge und  $S$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ . Eine  $\sigma$ -additive Abbildung  $\mu: S \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *signiertes Maß* und eine  $\sigma$ -additive Abbildung  $\mu: S \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *komplexes Maß*.

**Bemerkungen:**

- (i) Ist  $\mu$  ein signiertes oder komplexes Maß, so gilt  $\mu(\emptyset) = 0$  wegen

$$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset).$$

- (ii) Wir betrachten  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und das Lebesgue-Maß  $\mathcal{L}^d$ . Sei  $f \in L^1(\Omega)$ . Dann definiert

$$\mu: S \rightarrow \mathbb{R}, \quad E \mapsto \int_E f \, d\mathcal{L}^d$$

ein signiertes Maß. Im Gegensatz zu Dichtefunktionen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie kann  $f$  hier auch negative Werte annehmen.

**Definition 10.10.** Sei  $\mu$  ein signiertes oder komplexes Maß auf  $S$ . Für alle  $E \in S$  setze

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(E_k)| \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \text{ aus } S \text{ und} \\ \text{paarweise disjunkt mit } E = \bigcup_{k=1}^n E_k \end{array} \right\}.$$

Dann heißt  $|\mu|$  *Variationsmaß* zu  $\mu$ . Weiter sei  $\|\mu\|_{\text{var}} := |\mu|(\Omega)$  die *Totalvariation* von  $\mu$ . Wir nennen  $\mu$  *beschränkt*, falls  $\|\mu\|_{\text{var}} < \infty$  gilt.

**Bemerkung:** Aus der Definition ergibt sich leicht, dass das Variationsmaß additiv ist.

**Satz 10.11** (Satz von Radon-Nikodym). Sei  $(\Omega, S, \mu)$  ein  $\sigma$ -finites Maßraum und sei  $\nu: S \rightarrow \mathbb{R}$  ein signiertes oder komplexes Maß mit  $\|\nu\|_{\text{var}} < \infty$ . Weiter sei  $\nu$  *absolut stetig* bezüglich  $\mu$ , d. h. es gilt

$$\forall E \in S: \quad \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

Dann gibt es genau eine Funktion  $f \in L^1(\Omega, \mu)$  mit

$$\forall E \in S: \quad \nu(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Einen Beweis findet man beispielsweise im Buch von Alt oder in vielen Büchern zur Maßtheorie; beispielsweise bei Halmos, *Measure Theory*.

**Bemerkung:** In der Situation von Satz 10.11 nennt man die Funktion  $f$  die *Radon-Nikodym-Ableitung von  $\nu$  bezüglich  $\mu$* , welche auch oft mit  $\frac{d\nu}{d\mu}$  bezeichnet wird.

**Beispiel:** Wir betrachten  $\mathcal{L}^d$ , das Lebesgue-Maß, und  $\delta_0$ , das Dirac-Maß bei 0, d. h.

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1, & 0 \in E \\ 0, & 0 \notin E. \end{cases}$$

Dann ist  $\delta_0$  *nicht* absolut stetig bezüglich  $\mathcal{L}^d$ .

**Bemerkung:** Fast alle Aussagen der Integrationstheorie gelten entsprechend für Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Für  $f = f_1 + if_2$  gilt beispielsweise

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f_1 + i \int_{\Omega} f_2$$

und (mit Hilfe der Hölder'schen Ungleichung)

$$\left| \int_{\Omega} f \right| \leq \int_{\Omega} |f|.$$

Für  $p \in [1, \infty]$  seien die Funktionen in  $L^p(\Omega)$  im Folgenden stets  $\mathbb{K}$ -wertig mit  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

**Satz 10.12** (Dualraum von  $L^p(\Omega)$ ). Sei  $(\Omega, S, \mu)$  ein  $\sigma$ -finites Maßraum und sei  $p \in [1, \infty)$  mit konjugiertem Exponenten  $p' \in (1, \infty]$ . Dann ist

$$J: L^{p'}(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))' \\ f \mapsto \left( g \mapsto \int_{\Omega} g \bar{f} \, d\mu \right)$$

ein konjugiert linearer, isometrischer Isomorphismus.

*Beweis.* Aus der Hölder'schen Ungleichung (Theorem 10.5) folgt:

$$\|Jf\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

Jetzt wählen wir  $g$  so, dass  $g\bar{f} = |f|^{p'}$  gilt, d. h. für  $x \in \Omega$  sei  $g(x) := |f|^{p'-2}f$ , falls  $f(x) \neq 0$ , und  $g(x) := 0$  sonst. Dann erhalten wir:

$$(Jf)(g) = \int_{\Omega} |f|^{p'} = \|f\|_p^{p'}.$$

Außerdem gilt

$$\|g\|_p = \left( \int_{\Omega} |g|^p \right)^{1/p} = \|f\|_p^{p'/p}.$$

Damit hat  $g/\|f\|_p^{p'/p} \in L^p(\Omega)$  Norm 1 und es folgt  $\|Jf\| \geq \|f\|_p$ . Insgesamt erhalten wir also:  $J$  ist eine Isometrie und somit insbesondere injektiv.

Wir zeigen nun, dass  $J$  auch surjektiv ist. Sei dazu  $F \in (L^p(\Omega))'$ . Weil der Ausgangsraum  $\sigma$ -finit ist, finden wir eine Folge  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $S$  mit  $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$  und  $\mu(\Omega_n) < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Strategie ist nun, aus  $F$  ein Maß zu bauen, indem wir  $F$  bei charakteristischen Funktionen auswerten. Definiere für alle  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\nu_k: S \rightarrow \mathbb{C}, \quad E \mapsto F(\chi_{E \cap \Omega_k}).$$

Wir zeigen für alle  $k \in \mathbb{N}$ :

- (i)  $\nu_k$  ist  $\sigma$ -additiv,
- (ii)  $\|\nu_k\|_{\text{var}} < \infty$ ,
- (iii)  $\nu_k$  ist absolut stetig bezüglich  $\mu$ .

Zu (i): Dass  $\nu_k$  endlich additiv ist, folgt sofort aus den Eigenschaften charakteristischer Funktionen und der Linearität von  $F$ . Sei nun  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus  $S$  und sei  $E := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ . Sei außerdem  $E'_j := \bigcup_{i=1}^j E_i$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Dann folgt aus der  $\sigma$ -Stetigkeit des Maßes  $\mu$ :

$$\chi_{E'_j \cap \Omega_k} \rightarrow \chi_{E \cap \Omega_k} \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{für } j \rightarrow \infty.$$

Weil  $F$  stetig ist, folgt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu_k(E_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j \nu_k(E_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu_k(E'_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} F(\chi_{E'_j \cap \Omega_k}) = F(\chi_{E \cap \Omega_k}) = \nu_k(E).$$

Zu (ii): Seien  $E_1, \dots, E_\ell \in S$  paarweise disjunkt mit  $\Omega = E_1 \cup \dots \cup E_\ell$ . Ohne Einschränkung sei keine der Menge  $E_1, \dots, E_\ell$  eine Nullmenge bezüglich  $\nu_k$ . Für alle  $i \in \{1, \dots, \ell\}$  sei  $\sigma_i := \nu_k(E_i) / |\nu_k(E_i)|$ . Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{\ell} |\nu_k(E_i)| = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i \nu_k(E_i) = F\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i \chi_{E_i \cap \Omega_k}}_{=:g}\right) \leq \|F\| \|g\|_p < \infty,$$

denn

$$\|g\|_p^p = \int_{\Omega} |g|^p = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{\ell} |\sigma_i|^p \chi_{E_i \cap \Omega_k} = \int_{\Omega} \chi_{\Omega \cap \Omega_k} = \mu(\Omega_k) < \infty.$$

Zu (iii): Sei  $N \in S$  eine Nullmenge bezüglich  $\mu$ . Dann verschwindet  $\chi_{N \cap \Omega_k}$  f. ü. auf  $\Omega$ , d. h.  $\chi_{N \cap \Omega_k} = 0 \in L^p(\Omega)$ . Es folgt:

$$\nu_k(N) = F(0) = 0.$$

Der Satz von Radon-Nikodym (10.11) liefert nun für alle  $k \in \mathbb{N}$  ein  $f_k \in L^1(\Omega)$ , so dass gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall E \in S: \quad \nu_k(E) = \int_E f_k \, d\mu.$$

Es gilt dann für alle  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} f_k &= 0 \quad \mu\text{-f. ü.} \quad \text{auf } \Omega \setminus \Omega_k \quad \text{und} \\ f_{k+1} &= f_k \quad \mu\text{-f. ü.} \quad \text{auf } \Omega_k. \end{aligned}$$

Sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$f(x) := \overline{f_k(x)}, \quad \text{falls } k = \min\{k' \in \mathbb{N} \mid x \in \Omega_{k'}\}.$$

Aus den obigen Eigenschaften der Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  folgt dann:

$$\forall E \in S: \quad F(\chi_E) = \int_E \bar{f} \, d\mu = \int_{\Omega} \chi_E \bar{f} \, d\mu.$$

Außerdem gilt

$$F(g) = \int_{\Omega} g \bar{f} \, d\mu$$

für alle  $g \in L^{\infty}(\Omega)$  mit  $g|_{\Omega \setminus \Omega_k} = 0$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ , denn solche Funktionen lassen sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren (siehe Maßtheorie). Der Raum

$$\{g \in L^{\infty}(\Omega) \mid \exists k \in \mathbb{N}: g|_{\Omega \setminus \Omega_k} = 0\}$$

liegt dicht in  $L^p(\Omega)$ , denn für ein  $g \in L^p(\Omega)$  gilt

$$\chi_{\Omega_k} \chi_{\{|g| \leq m\}} g \rightarrow g \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{für } k, m \rightarrow \infty,$$

wie man sich mithilfe des Satzes über monotone Konvergenz überlegen kann.

Es bleibt zu zeigen:  $f \in L^{p'}(\Omega)$ . Denn dann stimmen die stetigen Funktionen  $F$  und  $J(f)$  auf einem dichten Teilraum von  $L^p(\Omega)$  überein, müssen also schon gleich sein.

Für  $k, m \in \mathbb{N}$  und  $q \in [1, \infty)$  seien

$$\Omega_{km} := \Omega_k \cap \{|f| \leq m\} \quad \text{und} \quad g_{km} := \chi_{\Omega_{km}} |f|^{q-2} f.$$

Dann gilt:

$$\int_{\Omega_{km}} |f|^q \, d\mu = F(g) \leq \|F\| \|g\|_p = \|F\| \left( \int_{\Omega_{km}} |f|^{p(q-1)} \, d\mu \right)^{1/p}. \quad (\star)$$

1. Fall:  $p > 1$ . Wir setzen  $q = p'$  und erhalten mit  $p(q-1) = p(p'-1) = p'$  aus  $(\star)$ :

$$\left( \int_{\Omega} |f|^{p'} \, d\mu \right) \leq \|F\| \left( \int_{\Omega_{km}} |f|^{p'} \, d\mu \right)^{1/p} \quad \text{bzw.} \quad \left( \int_{\Omega_{km}} |f|^{p'} \, d\mu \right)^{1/p'} \leq \|F\|$$

Im Grenzwert  $k, m \rightarrow \infty$  folgt dann aus dem Satz über monotone Konvergenz:

$$\|f\|_{p'} \leq \|F\| \quad \text{und insbesondere} \quad f \in L^{p'}(\Omega)$$

2. Fall:  $p = 1$ . Für alle  $q \in \mathbb{N}$  erhalten wir induktiv aus  $(\star)$ :

$$\int_{\Omega_{km}} |f|^q \, d\mu \leq \|F\| \int_{\Omega_{km}} |f|^{q-1} \, d\mu \leq \|F\|^q \int_{\Omega_{km}} 1 \, d\mu = \|F\|^q \mu(\Omega_{km}).$$

Nun kann man zeigen, dass  $\|f\|_{L^q(\Omega_{km})} \rightarrow \|f\|_{L^\infty(\Omega_{km})}$  für  $q \rightarrow \infty$  gilt. Zusammen mit der obigen Ungleichung folgt daraus

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega_{km})} = \lim_{q \rightarrow \infty} \|f\|_{L^q(\Omega_{km})} \leq \lim_{q \rightarrow \infty} \|F\| (\mu(\Omega_{km}))^{1/q} = \|F\|$$

(falls  $\mu(\Omega_{km}) > 0$ ). Indem wir geeignete Nullmengen bezüglich  $\mu$  betrachten, erhalten wir dann aus  $\|f\|_{L^\infty(\Omega_{km})} \leq \|F\|$  für alle  $k, m \in \mathbb{N}$  auch  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|F\|$  und damit  $f \in L^{p'}(\Omega)$ . ■

### Bemerkungen:

- (i) Für  $p \in [1, \infty)$  hat  $L^p(\mathbb{R}^n)$  den Dualraum  $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ , da  $\mathbb{R}^n$  vermöge  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(0)$  ein  $\sigma$ -finiten Raum ist.
- (ii) Für  $p \in (1, \infty)$  ist die Voraussetzung, dass der Raum  $\sigma$ -finit ist, nicht notwendig. (Siehe beispielsweise Alt.)
- (iii)  $L^1(\Omega)$  und  $(L^\infty(\Omega))'$  sind i. A. nicht isomorph.

**Satz 10.13.** Für  $p \in (1, \infty)$  ist  $L^p(\Omega)$  reflexiv. Es gilt weiter: Ist  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $L^p(\Omega)$ , so gibt es eine Teilfolge  $(f_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$  und ein  $f \in L^p(\Omega)$  mit

$$\forall g \in L^{p'}(\Omega): \quad \int_{\Omega} g f_{k_i} d\mu \rightarrow \int_{\Omega} g f d\mu \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* Die Isometrien

$$J_p: L^p \rightarrow (L^{p'})' \quad \text{und} \quad J_{p'}: L^{p'} \rightarrow (L^p)'$$

aus Satz 10.12 haben die Eigenschaft

$$\forall f \in L^p, g \in L^{p'}: \quad \overline{(J_{p'}g)(f)} = \int_{\Omega} \bar{f}g d\mu = (J_p f)(g).$$

Sei  $f'' \in (L^p)''$ . Dann ist durch

$$g \mapsto f'(g) := \overline{f''(J_{p'}g)}$$

ein Funktional  $f' \in (L^{p'})'$  gegeben. Setze jetzt

$$f := J_p^{-1} f' \in L^p.$$

Für  $g \in L^{p'}$  gilt nun:

$$f'(g) = (J_p f)(g) = \overline{(J_{p'}g)(f)} = \overline{(J_{L^p} f)(J_{p'}g)},$$

wobei  $J_{L^p}: L^p \rightarrow (L^p)''$  die Isometrie aus Satz 4.18 ist. Somit gilt:

$$f''(J_{p'}g) = (J_{L^p} f)(J_{p'}g)$$

für alle  $g \in L^{p'}$ . Da  $J_{p'}$  surjektiv ist, folgt  $f'' = J_{L^p} f$ , womit die Reflexivität von  $L^p$  gezeigt ist. Die zweite Behauptung folgt Satz 7.11 und Satz 10.12. ■

**Bemerkung:** Im reellen Fall (also  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) gilt insbesondere

$$J_{L^p}^{-1} = J_p^{-1}(J_{p'})',$$

wobei  $(J_{p'})': (L^p)'' \rightarrow (L^p)'$  der adjungierte Operator zu  $J_{p'}$  ist (Definition 5.15).

**Bemerkung:** Im Allgemeinen ist  $(L^\infty)'$  „größer“ als  $L^1$ . Man kann  $(L^\infty)'$  als Raum von Maßen interpretieren. Im Allgemeinen ist weder  $L^1$  noch  $L^\infty$  reflexiv.

**Satz 10.14.** (i) Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann ist  $C^0(S)$  separabel.

(ii) Für  $p \in [1, \infty)$  ist  $L^p(\mathbb{R}^n)$  separabel und  $C_0^0(\mathbb{R}^n)$  liegt dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

(iii) Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar und  $\mathcal{L}^n(S) > 0$ . Dann ist  $L^\infty(S)$  nicht separabel.

*Beweis.* (i) Idee: Überdecke  $S$  mit einem  $\varepsilon$ -Gitter. Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Für  $z \in \varepsilon\mathbb{Z}^n$  sei

$$Q_{\varepsilon,z} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid z_i \leq x_i \leq z_i + \varepsilon\}$$

und

$$M_\varepsilon := \{z \in \varepsilon\mathbb{Z}^n \mid Q_{\varepsilon,z} \cap S \neq \emptyset\}.$$

Da  $S$  kompakt ist, besteht  $M_\varepsilon$  stets aus endlich vielen Punkten. Zu  $y \in M_\varepsilon$  wähle  $x_{\varepsilon,y} \in S$  mit

$$\|x - x_{\varepsilon,y}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Zu  $f \in C^0(S)$  definiere

$$g_\varepsilon(y) := f(x_{\varepsilon,y})$$

und setze  $g_\varepsilon$  durch multilineare Interpolation fort, d. h. für  $x = z + \varepsilon \sum_{i=1}^n t_i e_i \in Q_{\varepsilon,z}$  mit  $z \in M_\varepsilon$  und  $t_i \in [0, 1]$  setze

$$g_\varepsilon(x) := \sum_{\gamma \in \{0,1\}^n} \left( \prod_{j, \gamma_j=0} (1 - t_j) \prod_{j, \gamma_j=1} t_j \right) g_\varepsilon(z + \varepsilon \gamma).$$

(In jedem Quader des  $\varepsilon$ -Gitters ist  $g_\varepsilon$  ein Polynom  $n$ -ten Grades in den  $t_j$ . Quader  $Q_{\varepsilon,z_1}, Q_{\varepsilon,z_2}$ , deren Schnittmenge nicht leer ist, liefern auf  $Q_{\varepsilon,z_1} \cap Q_{\varepsilon,z_2}$  dieselbe Funktion; Bew. z. B. per Induktion.) Nun gilt  $g_\varepsilon \in C^0(S)$  und für  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\|g_\varepsilon - f\|_{C^0(S)} \leq \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| \mid x_1, x_2 \in S, \|x_1 - x_2\|_\infty \leq 3\varepsilon\} \rightarrow 0,$$

da  $f$  gleichmäßig stetig auf  $S$  ist. Damit folgt: Die abzählbare Menge

$$\{g_{1/k} \mid k \in \mathbb{N}, \forall y \in M_\varepsilon: g_{1/k}(y) \in \mathbb{Q}\}$$

liegt dicht in  $C^0(S)$ .

- (ii) Nach Analysis III liegt  $C_0^0(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . (Idee: Approximation zunächst durch Treppenfunktionen bezüglich Quadern. Dann approximiere charakteristische Funktionen auf Quadern durch stetige Funktionen.) Es gilt

$$C_0^0(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_0^0(B_n(0)) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^0(\overline{B_n(0)})$$

und für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $C^0(\overline{B_n(0)})$  separabel bezüglich der  $C^0$ -Norm nach dem ersten Teil. Wegen

$$\|g\|_{L^p(\overline{B_n(0)})} \leq (\mathcal{L}^n(B_n(0)))^{1/p} \sup_{\overline{B_n(0)}} |g|$$

ist  $C^0(\overline{B_n(0)})$  auch separabel bezüglich der  $L^p$ -Norm.

- (iii) selbst!

■

Häufig müssen wir Funktionen durch glatte Funktionen approximieren. Dafür brauchen wir die Faltung:

**Definition 10.15** (Faltung). Sei  $p \in [1, \infty]$ , sei  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Dann heißt die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) f(y) \, dy$$

die *Faltung von  $f$  und  $\varphi$*  und wird mit  $\varphi * f$  oder  $f * \varphi$  bezeichnet.

**Lemma 10.16** (Allgemeine Faltungsabschätzung). Sei  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , sei  $K: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  Lebesgue-messbar und sei  $p \in [1, \infty]$ . Dann gilt für

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) K(x, y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) K(x, x-y) \, dy$$

die Ungleichung

$$\|F\|_p \leq \|\varphi\|_1 \sup_{h \in \text{supp}(\varphi)} \|K(\cdot, \cdot - h)\|_p,$$

d. h. falls die rechte Seite endlich ist, so ist

$$y \mapsto \varphi(x-y) K(x, y)$$

in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und es gilt  $F \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .



*Beweis.* Die Fälle  $p \in \{1, \infty\}$  sind einfach. Wir zeigen daher den Fall für  $p \in (1, \infty)$ , wobei  $p'$  den konjugierten Exponenten bezeichne. Dann gelten folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\varphi(y)| |K(x, x-y)|}_{= |\varphi(y)|^{1/p'} (|\varphi(y)|^{1/p} |K(x, x-y)|)} dy \right)^p dx \\
&\stackrel{\text{H}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^{p'/p'} dy \right)^{p/p'} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| |K(x, x-y)|^p dy \right) dx \\
&\stackrel{\text{F}}{=} \|\varphi\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, x-y)|^p dx dy \\
&\leq \|\varphi\|_1^{p/p'+1} \sup_{y \in \text{supp}(\varphi)} \|K(\cdot, \cdot - y)\|_p^p
\end{aligned}$$

Bei H geht dabei die Hölderungleichung ein und bei F der Satz von Fubini. Die Existenz der Integrale rechtfertigt man dabei „von unten nach oben“.

■

**Korollar 10.17** (Faltungsabschätzung). Für  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$  folgt

$$f * \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad \|f * \varphi\|_p \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_p.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 10.16.

■

**Lemma 10.18.** Für  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt:

$$\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \partial^s(\varphi * f) = (\partial^s \varphi) * f.$$

*Beweisskizze.* Sei  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\text{supp } \varphi \subset B_R(0)$ . Dann gilt:

$$\frac{(\varphi * f)(x + he_i) - (\varphi * f)(x)}{h} = \int_{B_{2R}(0)} \underbrace{\frac{\varphi(x + he_i - y) - \varphi(x - y)}{h}}_{\rightarrow \partial_i \varphi(x-y) \text{ glm. in } y \text{ für } h \rightarrow 0} f(y) dy.$$

Mit dem Satz von Lebesgue folgt:

$$(\partial_i(\varphi * f))(x) = \partial_i F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi)(x - y) f(y) dy = ((\partial_i \varphi) * f)(x).$$

Die Aussage über höhere Ableitungen erhält man mit Induktion über  $|s|$ .

■

Das Ziel ist es nun, eine Funktion  $f$  mit anderen Funktionen  $\varphi_\varepsilon$  zu falten, so dass  $\varphi_\varepsilon * f$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $f$  konvergiert. Wenn die  $\varphi_\varepsilon$  gutartig genug sind, hat  $\varphi_\varepsilon * f$  „gute Eigenschaften“. Die Grundidee ist dabei, die  $\varphi_\varepsilon$  so zu bauen, dass sie für  $\varepsilon \rightarrow 0$  wie das Dirac-Maß im Punkt 0 wirken.

**Definition 10.19** (Dirac-Folge). (1) Eine Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  heißt (*allgemeine*) *Dirac-Folge*, falls folgende Bedingungen gelten:

- Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\varphi_k \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \, d\mathcal{L}^n = \|\varphi_k\|_1 = 1$ .
- Für alle  $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt  $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} \varphi_k \, d\mathcal{L}^n \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

(2) Sei  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\varphi \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ . Für  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  definiere  $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

**Bemerkung:** Man rechnet leicht nach: Ist  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge, so ist die Folge  $(\varphi_{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Dirac-Folge. Im Folgenden nennen wir auch eine Familie  $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  eine Dirac-Folge (auch wenn es sich dabei nicht um eine Folge im üblichen Sinne handelt).

**Bemerkung:** Für  $x \in \mathbb{R}^n$  bezeichne im Folgenden  $|x| := \|x\|_2$  die euklidische Norm von  $x$ .

**10.20** (Standardbeispiel für eine Dirac-Folge). Sei  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \psi \subset \mathbb{R}_{\leq 1}$ . Zum Beispiel:

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1} + 1\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Setze dann  $\varphi(x) := \alpha \psi(|x|)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\alpha = \left(\int_{B_1(0)} \psi \circ |\cdot| \, d\mathcal{L}^n\right)^{-1}$ , so dass also  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$  gilt. Es gilt dann

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \text{supp } \varphi \subset \overline{B_1(0)}.$$

Weiter bildet  $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  (gemäß Definition 10.19) eine Dirac-Folge, für die offenbar

$$\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$$

gilt. Diese nennen wir *Standard-Dirac-Folge*.

**Lemma 10.21.**

(1) Sei  $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  eine Standard-Dirac-Folge und sei  $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

$$f * \varphi_\varepsilon \rightarrow f \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{lokal gleichmäßig,}$$

d. h. für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  existiert eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $x$  auf welcher  $((f * \varphi_\varepsilon)|_U)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  gleichmäßig gegen  $f|_U$  konvergiert.

(2) Sei  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Dirac-Folge und  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  für  $p \in [1, \infty)$ . Dann gilt:

$$f * \varphi_k \rightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* (1) Sei  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $B := B_1(\tilde{x})$ . Dann gilt für alle  $x \in B$ :

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_\varepsilon) - f|(x) &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)(f(y) - f(x)) \, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x)) \, dy \right| \\ &\leq \int_{B_\varepsilon(0)} |\varphi_\varepsilon(y)| |f(x-y) - f(x)| \, dy \\ &\leq \sup_{y \in B_\varepsilon(0)} |f(x-y) - f(x)|. \end{aligned}$$

Als stetige Funktion ist  $f$  auf der kompakten Menge  $\overline{B}$  sogar gleichmäßig stetig, d. h. für alle  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert ein  $\delta_\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass gilt:

$$\forall x \in B, y \in B_{\delta_\alpha}(0): \quad |f(x-y) - f(x)| < \alpha.$$

Daraus folgt nun wie gewünscht die gleichmäßige Konvergenz auf  $B$ :

$$\sup_{x \in B} |(f * \varphi_\varepsilon) - f|(x) \leq \sup_{x \in B} \sup_{y \in B_\varepsilon(0)} |f(x-y) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(2) Für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt:

$$\begin{aligned} (f * \varphi_k - f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y)(f(x-y) - f(x)) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{B_\delta(0)} \varphi_k)(y)(f(x-y) - f(x)) \, dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \varphi_k)(y)(f(x-y) - f(x)) \, dy \end{aligned}$$

Lemma 10.16 liefert dann:

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_k - f\|_p &\leq \|\chi_{B_\delta(0)} \varphi_k\|_1 \sup_{h \in B_\delta(0)} \|f(\cdot - h) - f\|_p \\ &\quad + \|\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \varphi_k\|_1 \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \|f(\cdot - h) - f\|_p \\ &\leq \sup_{h \in B_\delta(0)} \|f(\cdot - h) - f\|_p + 2\|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \varphi_k \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sup_{h \in B_\delta(0)} \|f(\cdot - h) - f\|_p \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Die Konvergenzaussage bezüglich  $\delta$  folgt dabei aus dem nächsten Lemma (10.22). ■

**Lemma 10.22** (Stetigkeit im  $L^p$ -Mittel). Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  für  $p \in [1, \infty)$ . Dann gilt:

$$f(\cdot - h) \rightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } |h| \rightarrow 0.$$

*Beweis.* Da  $C_0^0(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  liegt (Satz 10.14 (ii)), gibt es eine Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $C_0^0(\mathbb{R}^n)$  mit  $f_k \rightarrow f$  in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  für  $k \rightarrow \infty$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist  $f_k$  gleichmäßig stetig und es gilt  $f_k(\cdot - h) - f_k \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$  für alle  $h \in \mathbb{R}^n$ , wobei wir den jeweils zugehörigen Träger dieser Funktionen mit  $K_{k,h}$  bezeichnen. Man überlegt sich außerdem leicht, dass für festes  $k \in \mathbb{N}$  und eine beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  auch  $\{\mathcal{L}^n(K_{k,h}) \mid h \in A\}$  in  $\mathbb{R}$  beschränkt ist. Mit diesen Vorüberlegungen erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \|f(\cdot - h) - f\|_p &\leq \|f_k(\cdot - h) - f_k\|_p + \|f - f_k\|_p + \|f(\cdot - h) - f_k(\cdot - h)\|_p \\ &\leq \mathcal{L}^n(K_{k,h})^{1/p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_k(x - h) - f_k(x)| + 2\|f - f_k\|_p \\ &\xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 2\|f - f_k\|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

■

**Satz 10.23.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $p \in [1, \infty)$ . Dann gilt:

$$C_0^\infty(\Omega) \text{ liegt dicht in } L^p(\Omega).$$

*Beweis.* Sei  $f \in L^p(\Omega)$ . Für  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  setze

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\} \cap B_{1/\delta}(0).$$

Dann gilt

$$\chi_{\Omega_\delta} f \rightarrow f \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{für } \delta \rightarrow 0. \quad (*)$$

Dies ergibt sich aus  $\Omega = \bigcup \{\Omega_\delta \mid \delta \in \mathbb{R}_{>0}\}$  und dem Satz über monotone Konvergenz. Sei nun  $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  eine Standard-Dirac-Folge. Wegen Lemma 10.18,  $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$  und der speziellen Wahl der  $\Omega_\delta$  gilt

$$(\chi_{\Omega_\delta} f) * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$$

für alle  $\varepsilon < \delta$ . Wegen

$$(\chi_{\Omega_\delta} f) * \varphi_\varepsilon \rightarrow \chi_{\Omega_\delta} f \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

nach Lemma 10.21 (2) folgt zusammen mit (\*) die Behauptung.

■

Das nächste Ziel ist, eine Charakterisierung von kompakten Mengen in  $C^0(K)$  (für ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^n$ ) und in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  zu finden.

**Satz 10.24** (Arzelà-Ascoli). Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $A \subset C^0(K, \mathbb{R}^m)$ . Dann ist  $A$  genau dann präkompakt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i)  $A$  ist beschränkt, also  $\sup_{f \in A} \|f\|_{C^0(K, \mathbb{R}^n)} < \infty$ .

(ii)  $A$  ist *gleichgradig stetig*, d. h.

$$\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |x - y| \rightarrow 0.$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  und (nach Präkompaktheit)  $A \subset \bigcup_{i=1}^{m_\varepsilon} B_\varepsilon(f_{\varepsilon,i})$ . Dann gilt für jedes  $f \in A$ : Es existiert ein  $i$  mit  $f \in B_\varepsilon(f_{\varepsilon,i})$ . Daraus folgt

$$\sup_{f \in A} \|f\|_{C^0} \leq \varepsilon + \max_{j \in \{1, \dots, m_\varepsilon\}} \|f_{\varepsilon,j}\|_{C^0} < \infty,$$

also (i). Mithilfe der  $\Delta$ -Ungleichung erhalten wir für alle  $f \in A$ ,  $x, y \in K$ :

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\|f - f_{\varepsilon,i}\|_{C^0} + |f_{\varepsilon,i}(x) - f_{\varepsilon,i}(y)|.$$

Daraus folgt:

$$\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \leq 2\varepsilon + \underbrace{\max_{j \in \{1, \dots, m_\varepsilon\}} |f_{\varepsilon,j}(x) - f_{\varepsilon,j}(y)|}_{\rightarrow 0 \text{ für } |x-y| \rightarrow 0},$$

wobei wir die Konvergenz im hinteren Summanden erhalten, da alle  $f_{\varepsilon,i}$  sogar gleichmäßig stetig sind. Da  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  beliebig war, folgt (ii).

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $R := \sup_{f \in A} \|f\|_{C^0}$  und (nach Kompaktheit von  $K$  und  $\overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^m$ )

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(x_i) \subset \mathbb{R}^n, \quad \overline{B_R(0)} \subset \bigcup_{j=1}^{m_\varepsilon} B_\varepsilon(\xi_j) \subset \mathbb{R}^m.$$

Sei  $M_\varepsilon$  die Menge aller Abbildungen  $\{1, \dots, n_\varepsilon\} \rightarrow \{1, \dots, m_\varepsilon\}$  und für  $\tau \in M_\varepsilon$  sei

$$A_\tau := \{f \in A \mid \forall i \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}: |f(x_i) - \xi_{\tau(i)}| \leq \varepsilon\}.$$

Aus der bisherigen Konstruktion ergibt sich, dass für alle  $f \in A$  ein  $\tau(f) \in M_\varepsilon$  existiert mit  $f \in A_{\tau(f)}$ . Es gilt also  $A = \bigcup_{\tau \in M_\varepsilon} A_\tau$ . Wir fixieren außerdem für alle  $\tau \in M$  mit  $A_\tau \neq \emptyset$  ein  $f_\tau \in A_\tau$ . Seien nun  $f \in A$ ,  $\tau := \tau(f)$ ,  $x \in K$  und  $i \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$  mit  $x \in B_\varepsilon(x_i)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(f - f_\tau)(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_\tau(x_i)| + |f_\tau(x) - f_\tau(x_i)| \\ &\leq 2 \underbrace{\sup_{|y_1 - y_2| < \varepsilon} \sup_{f \in A} |f(y_1) - f(y_2)|}_{=: \delta_\varepsilon} + \underbrace{|f(x_i) - \xi_{\tau(i)}| + |f_\tau(x_i) - \xi_{\tau(i)}|}_{\leq 2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\|f - f_\tau\|_{C^0} \leq 2\delta_\varepsilon + 2\varepsilon < 2\delta_\varepsilon + 3\varepsilon.$$

Es folgt:

$$A \subset \bigcup_{\tau \in M} B_{2\delta_\varepsilon + 3\varepsilon}(f_\tau).$$

Weil  $A$  gleichgradig stetig ist, gilt  $\delta_\varepsilon \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Also wird  $2\delta_\varepsilon + 3\varepsilon$  beliebig klein, woraus die Präkompaktheit von  $A$  folgt. ■

**Bemerkung:** Für einen metrischen Raum  $(X, d)$  und eine Teilmenge  $A \subset X$  gilt:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists A_\varepsilon \subset X \text{ präkompakt: } A \subset B_\varepsilon(A_\varepsilon)) \implies A \text{ präkompakt,}$$

wobei

$$B_\varepsilon(A_\varepsilon) := \{x \in X \mid \text{dist}(x, A_\varepsilon) < \varepsilon\}.$$

**Satz 10.25** (Kompakte Mengen in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , Riesz-Fréchet-Kolmogorov). Sei  $p \in [1, \infty)$  und sei  $A \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist  $A$  präkompakt genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\sup_{f \in A} \|f\|_p < \infty$  (Beschränktheit von  $A$ )
- (ii)  $\sup_{f \in A} \|f(\cdot - h) - f\|_p \rightarrow 0$  für  $|h| \rightarrow 0$  (Gleichgradige Stetigkeit im  $L^p$ -Mittel)
- (iii)  $\sup_{f \in A} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))} \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Diese Richtung ist einfach. Nutze, dass die entsprechenden Aussagen für endlich viele  $f$  erfüllt sind, und die Präkompaktheit. (Vgl. Beweis von Satz 10.24.)

« $\Leftarrow$ “: Grundidee: Nutze Faltung und Arzela-Ascoli (Satz 10.24). Sei  $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  eine Standard-Dirac-Folge. Wähle  $R_\varepsilon$  mit  $R_\varepsilon \rightarrow \infty$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Definiere  $T_\varepsilon f := (\chi_{B_\varepsilon} f) * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(B_\varepsilon^+)$ . Sei  $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  eine Standard-Dirac-Folge. Wähle  $(R_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  in  $\mathbb{R}_{>0}$  mit  $R_\varepsilon \rightarrow \infty$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Für  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $f \in A$  definiere  $A_\varepsilon := \{T_\varepsilon f \mid f \in A\}$ .

$$\begin{aligned} B_\varepsilon &:= B_{R_\varepsilon}(0), & B_\varepsilon^+ &:= B_{R_\varepsilon + \varepsilon}(0), \\ T_\varepsilon f &:= (\chi_{B_\varepsilon} f) * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(B_\varepsilon^+), \\ \text{und} & & A_\varepsilon &:= \{T_\varepsilon f \mid f \in A\}. \end{aligned}$$

Mit  $\chi_{B_\varepsilon} = \chi_{\mathbb{R}^n} - \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon}$  erhalten wir für alle  $f \in A$ :

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon f - f\|_p &= \|f * \varphi_\varepsilon - f - (\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} f) * \varphi_\varepsilon\|_p \\ &\leq \sup_{f \in A} (\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p + \|(\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} f) * \varphi_\varepsilon\|_p) \\ &\leq \sup_{f \in A} \left( \sup_{h \in B_\varepsilon(0)} \|f(\cdot - h) - f\|_p + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon)} \right) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{wg. (ii) und (iii),} \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Ungleichung Lemma 10.16 und Korollar 10.17 eingehen. Nach der Bemerkung vor dem Beweis genügt es nun also zu zeigen, dass  $A_\varepsilon$  für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  präkompakt in  $L^p(B_\varepsilon^+)$  ist. Sei  $D_\varepsilon := \overline{B_\varepsilon^+}$ . Für alle  $g \in A_\varepsilon$  gilt

$$\|g\|_{L^p(B_\varepsilon^+)} \leq \mathcal{L}^n(B_\varepsilon^+)^{1/p} \|g\|_{C^0(D_\varepsilon)},$$

also genügt es zu zeigen:  $A_\varepsilon$  ist präkompakt in  $C^0(D_\varepsilon)$ . Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (10.24) können wir äquivalent zeigen:  $A_\varepsilon$  ist beschränkt und gleichgradig stetig. Für alle  $f \in A$  und  $x \in D_\varepsilon$  gilt nach der Hölder'schen Ungleichung und (i):

$$|T_\varepsilon f(x)| \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{p'} \|f\|_p \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{p'} \sup_{g \in A} \|g\|_p < \infty$$

sowie

$$|\nabla(T_\varepsilon f)(x)| = |(\chi_{B_\varepsilon} f) * (\nabla \varphi_\varepsilon)| \leq \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{p'} \sup_{g \in A} \|g\|_p =: C < \infty.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt die Beschränktheit von  $A_\varepsilon$  und aus der zweiten, dass für alle  $f \in A$ ,  $x, y \in D_\varepsilon$  gilt:

$$|(T_\varepsilon f)(x) - (T_\varepsilon f)(y)| \leq \|\nabla(T_\varepsilon f)\|_{C^0(D_\varepsilon)} |x - y| \leq C |x - y|.$$

Daraus folgt, dass  $A_\varepsilon$  gleichgradig stetig ist. ■

# 11 Sobolev-Räume und schwache Form von Randwertproblemen in einer Dimension

**11.1 (Motivation).** Betrachte folgendes Problem: Gegeben sei  $f \in C([a, b])$ . Aufgabe: Finde ein  $u \in C^2([a, b])$  mit

$$\left. \begin{array}{l} -u'' + u = f \quad \text{auf } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{array} \right\} \text{ (Randwertproblem).}$$

Eine solche Funktion  $u$  heißt *starke Lösung*. Moderne Theorie von (partiellen) Differentialgleichungen studiert (zunächst) *schwache Lösungen*.

Betrachten wir dies an einem Beispiel. Multipliziere die Differentialgleichung mit einer Funktion  $\varphi \in C^1([a, b])$  mit  $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$  und integriere partiell:

$$\int_a^b u' \varphi' + \int_a^b u \varphi = \int_a^b f \varphi. \quad (\text{SF})$$

Die Gleichung (SF) ergibt Sinn für  $u \in C^1([a, b])$  oder sogar für  $u$  mit  $u, u' \in L^1([a, b])$  (wobei wir geeignet definieren müssen, wie wir  $u' \in L^1$  für  $u \in L^1$  auffassen wollen). Wir sagen  $u$  ist eine *schwache Lösung*, falls (SF) erfüllt ist für alle  $\varphi \in C^1$  mit  $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ . Dieser Zugang heißt *variational*. Allgemein geht man in folgenden Schritten vor:

Schritt A Mache präzise, was „schwache Lösung“ meint. Dazu brauchen wir den Begriff des *Sobolevraums*.

Schritt B Zeige die Existenz einer schwachen Lösung (nutze Lax-Milgram).

Schritt C Zeige, dass sogar eine (genügend) glatte Lösung (z. B. aus  $C^2$ ) existiert. Dies ist ein Regularitätsresultat.

Schritt D Zeige, dass eine schwache Lösung, die in  $C^2$  liegt, auch eine starke Lösung ist.

Schritt D ist einfach: Angenommen  $u \in C^2([a, b])$ ,  $u(a) = 0 = u(b)$  und (SF) ist erfüllt. Nach partieller Integration in (SF) erhalten wir:

$$\int_a^b (-u'' + u - f) \varphi \, dx = 0$$

für alle  $\varphi \in C^1([a, b])$  mit  $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ . Das Fundamentallemma der Variationsrechnung liefert:

$$-u'' + u - f = 0.$$



Im Folgenden sei  $I := (a, b)$  ein offenes Intervall, wobei  $a = -\infty$  und  $b = \infty$  zugelassen sind. Sei weiter  $p \in [1, \infty]$ .

**Definition 11.2.** (i) Der *Sobolevraum*  $H^{1,p}(I)$  ist definiert durch:

$$H^{1,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I) \mid \exists g \in L^p(I) \forall \varphi \in C_0^\infty(I): \int_I u \varphi' \, dx = - \int_I g \varphi \, dx \right\}.$$

(ii) Wir definieren:  $H^1(I) := H^{1,2}(I)$ .

(iii) Für  $u \in H^{1,p}(I)$  und ein  $g$  wie in der Definition von  $H^{1,p}(I)$  schreiben wir  $u' = g$  und nennen  $u'$  die *schwache Ableitung von  $u$* .

**Bemerkung:** Einige Autoren schreiben auch  $W^{1,p}(I)$  statt  $H^{1,p}(I)$ .

**Bemerkung:** Falls  $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$  und falls  $u' \in L^p(I)$  (wobei  $u'$  die klassische Ableitung bezeichnet), so gilt  $u \in H^{1,p}(I)$  und  $u'$  ist auch die schwache Ableitung.

**Bemerkungen:**

(i) Die schwache Ableitung ist (bis auf Nullmengen) eindeutig. Angenommen  $u'_1, u'_2 \in L^1$  sind schwache Ableitungen. Dann gilt

$$\int_I (u'_1 - u'_2) \varphi \, dx = 0$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty$ . Das Fundamentallemma liefert  $u'_1 - u'_2 = 0$  fast überall.

(ii) Es ist  $H^{1,p}(I)$  mit der Norm

$$\|u\|_{H^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

ein normierter Raum. Der Raum  $H^1(I)$  besitzt das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2} = \int_I (uv + u'v') \, dx.$$

**Beispiel 11.3.** Sei  $I := (-1, 1)$ . Dann rechnet man leicht nach:

(i) Die Funktion  $u(x) := |x|$  gehört zu  $H^{1,p}(I)$  für alle  $p \in [1, \infty]$  und es gilt  $u' = g$  mit

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ -1, & x \in (-1, 0). \end{cases}$$

Allgemein gilt: Eine Funktion, die auf  $\bar{I}$  stetig und stückweise in  $C^1$  ist, liegt auch in  $H^{1,p}(I)$  für  $p \in [1, \infty]$ .

(ii) Die obige Funktion  $g$  liegt *nicht* in  $H^{1,p}(I)$  für alle  $p \in [1, \infty]$ .

**Satz 11.4.** Der Raum  $H^{1,p}(I)$  ist ein Banachraum für alle  $p \in [1, \infty]$ .

*Beweis.* Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $H^{1,p}(I)$ . Dann sind  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folgen in  $L^p$ . Daraus folgt:  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen ein  $u$  in  $L^p$  und  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen ein  $g$  in  $L^p$ . Es gilt

$$\int_I u_n \varphi' = - \int_I u_n \varphi$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(I)$ . Gehe zum Grenzwert über (möglich wegen Hölder), dann ergibt sich:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I): \quad \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi.$$

Also gilt  $u \in H^{1,p}(I)$  mit  $u' = g$  und  $\|u_n - u\|_{H^{1,p}} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . ■

**Definition:**

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid u|_K \in L^1(K) \text{ für eine kompakte Menge } K \subset \Omega\}$$

**Lemma 11.5.** Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}$  mit

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I): \quad \int_I f \varphi' = 0. \quad (\text{EA})$$

Dann existiert ein  $C \in \mathbb{R}$ , so dass  $f \equiv C$  fast überall auf  $I$  gilt.

*Beweis.* Sei  $\psi \in C_0^0(I)$  fest mit  $\int_I \psi = 1$ . Beh.: Für  $w \in C_0^0(I)$  existiert ein  $\varphi \in C_0^1(I)$  mit

$$\varphi' = w - \left( \int_I w \right) \psi =: h.$$

Es ist  $h$  stetig mit kompaktem Träger in  $I$ . Außerdem gilt  $\int_I h = 0$ . Damit hat  $h$  eine eindeutige Stammfunktion mit kompaktem Träger. In (EA) können wir  $C_0^\infty$  durch  $C_0^1$  ersetzen (falte  $C_0^1$ -Funktionen mit Standard-Dirac-Folge, setze gefaltete Funktionen in (EA) ein und gehe zum Grenzwert über). Aus (EA) folgt:

$$\forall w \in C_0^0(I): \quad \int_I f \left( w - \left( \int_I w \right) \psi \right) = 0.$$

Das heißt wir erhalten:

$$\forall w \in C_0^0(I): \quad \int_I \left( f - \left( \int_I f \psi \right) \right) w = 0.$$

Das Fundamentallemma liefert:

$$f = \int_I f \psi \quad \text{f. ü.}$$

Also erfüllt  $C = \int_I f \psi$  die Behauptung. ■

**Lemma 11.6.** Sei  $g \in L^1_{\text{loc}}(I)$ . Für  $y_0 \in I$  fest, setze für  $x \in I$ :

$$v(x) := \int_{y_0}^x g(t) \, dt.$$

Dann gilt  $v \in C^0(I)$  und

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I): \quad \int_I v \varphi' = - \int_I g \varphi.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \int_I v \varphi' &= \int_I \left( \int_{y_0}^x g(t) \, dt \right) \varphi'(x) \, dx \\ &= - \int_a^{y_0} \int_x^{y_0} g(t) \varphi'(x) \, dt \, dx + \int_{y_0}^b \int_{y_0}^x g(t) \varphi'(x) \, dt \, dx \\ &= - \int_a^{y_0} g(t) \int_a^t \varphi'(x) \, dx \, dt + \int_{y_0}^b g(t) \int_t^b \varphi'(x) \, dx \, dt \\ &= - \int_a^b g(t) \varphi(t) \, dt \end{aligned}$$

■

**Theorem 11.7.** Sei  $u \in H^{1,p}(I)$  mit  $p \in [1, \infty]$ . Dann existiert eine Funktion  $\tilde{u} \in C^0(\bar{I})$  mit

$$u = \tilde{u} \quad \text{f. ü. auf } I$$

und

$$\forall x, y \in \bar{I}: \quad \tilde{u}(x) = \tilde{u}(y) + \int_y^x u'(t) \, dt.$$

*Beweis.* Wähle  $y_0 \in I$  und setze  $\bar{u}(x) := \int_{y_0}^x u'(t) \, dt$ . Das vorherige Lemma folgt:

$$\forall \varphi \in C_0^1(I): \quad \int_I \bar{u} \varphi' = - \int_I u' \varphi.$$

Damit folgt:

$$\forall \varphi \in C_0^1(I): \quad \int_I (u - \bar{u}) \varphi' = 0.$$

Lemma 11.5:

$$u - \bar{u} = C \quad \text{f. ü. auf } I$$

Also hat  $\tilde{u}(x) := \bar{u}(x) + C$  die gewünschten Eigenschaften.

■

**Satz 11.8.** Sei  $I = (a, b)$  ein Intervall mit  $a, b \in (-\infty, \infty)$  und sei  $p \in [1, \infty]$ .

(i) Dann existiert eine Konstante  $C \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass für alle  $f \in C^1(I)$  und  $x_0 \in I$  gilt:

$$\|f\|_{C^0} \leq |f(x_0)| + C \|f'\|_{C^p(I)}.$$

(ii) Für alle  $x_1, x_2 \in I$  gilt außerdem

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|^{1/p'} \|f'\|_{L^p(I)},$$

und somit sind die Mengen

$$M_C := \{f \in C^1(I) \mid \|f\|_{H^{1,p}(I)} \leq C\}$$

für  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  kompakt in  $C^0(I)$ .

*Beweis.* Seien  $x_1, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x_2$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(x) \, dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot |f'(x)| \, dx \\ &\stackrel{\text{H}}{\leq} \left( \int_{x_1}^{x_2} 1^{p'} \right)^{1/p'} \left( \int_{x_1}^{x_2} |f'(x)|^p \right)^{1/p} \leq (x_2 - x_1)^{1/p'} \|f'\|_{L^p(I)}. \end{aligned}$$

(Bei H geht dabei die Hölder-Ungleichung ein.) Daraus folgt:

$$|f(x_2)| \leq |f(x_1)| + (b - a)^{1/p'} \|f'\|_{L^p(I)}.$$

Dies zeigt den ersten Teil, und dass  $M_C$  gleichgradig stetig ist; mit dem Satz von Arzela-Ascoli (10.24) folgt dann die zweite Behauptung. ■

**Definition 11.9.** (i) Sei  $p \in [1, \infty]$ . Dann definieren wir  $\mathring{H}^{1,p}(I)$  als den Abschluss von  $C_0^1(I)$  in  $H^{1,p}(I)$  bezüglich der  $H^{1,p}$ -Norm.

(ii) Weiter sei  $\mathring{H}^1(I) := \mathring{H}^{1,2}(I)$ .

(iii) Zusammen mit der Einschränkung der  $H^{1,p}$ -Norm ist  $\mathring{H}^{1,p}(I)$  ein Banachraum.

(iv) Auf  $\mathring{H}^{1,p}(I)$  definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_I (uv + u'v').$$

**Satz 11.10.** Sei  $u \in \mathring{H}^{1,p}(I)$ . Dann gilt  $u|_{\partial I} = 0$ .

**Satz 11.11** (Poincaré-Ungleichung). Sei  $I$  ein beschränktes Intervall. Dann existiert eine Konstante  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$\forall u \in \mathring{H}^{1,p}(I): \quad \|u\|_{\mathring{H}^{1,p}(I)} \leq C \|u\|_{L^p(I)}.$$

Das heißt auf  $\mathring{H}^{1,p}(I)$  ist  $u \mapsto \|u'\|_{L^p(I)}$  eine Norm, die zur  $H^{1,p}$ -Norm äquivalent ist.

*Beweis.* Sei  $u \in \mathring{H}^{1,p}(I)$  mit  $I = (a, b)$ . Da  $u(a) = 0$  gilt, folgt

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(x) \, dx \right| \leq \|u'\|_{L^1}.$$

Also gilt  $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1}$ . Der Rest folgt aus der Höler-Ungleichung. ■

**11.12** (Randwertproblem). Wir betrachten das Problem

$$\left. \begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{auf } I = (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ (RWP)},$$

wobei  $f \in L^2(I)$  bzw.  $f \in C^0(\bar{I})$ .

**Definition:**

- (i) Eine *klassische Lösung* ist eine Funktion  $u \in C^2(\bar{I})$ , die (RWP) erfüllt.
- (ii) Eine *schwache Lösung* von (RWP) ist eine Funktion  $u \in \mathring{H}^{1,2}(I)$ , für die gilt:

$$\forall v \in \mathring{H}^{1,2}(I): \quad \int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv.$$

Nun führe Schritt A–D aus 11.1 durch.

Schritt A: Jede klassische Lösung ist eine schwache Lösung.

Lösung: Dies folgt mittels partieller Integration:

$$0 = \int_I (-u'' + u - f)v - \int_I (u' + u - fv).$$

Schritt B: Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung.

**Satz 11.13.** Sei  $f \in L^2(I)$ . Dann existiert eine schwache Lösung  $u \in \mathring{H}^{1,2}(I)$  von (RWP). Zusätzlich ist  $u$  gegeben durch:

$$\min_{v \in \mathring{H}^{1,2}(I)} \left( \frac{1}{2} \int_I ((v')^2 + v^2) - \int_I fv \right).$$

Das Vorgehen,  $u$  als Minimum zu erhalten, heißt *Dirichletsches Prinzip*.

*Beweis.* Wir wenden den Satz von Lax-Milgram (6.11) auf den Hilbertraum  $\mathring{H}^{1,2}(I)$ , die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_I u'v' + \int_I uv = \langle u, v \rangle_{H^1}$$

und das lineare Funktional  $\varphi(v) = \int_I fv$  an. ■

Schritte C und D: Regularität von schwachen Lösungen und Rückgewinnung von starken Lösungen.

Sei  $f \in L^2(I)$  und  $u \in \mathring{H}^{1,2}(I)$  eine schwache Lösung. Daraus folgt:  $u''$  existiert als schwache Ableitung und  $-u'' = f - u \in L^2(I)$ . D. h.  $u' \in C^0(\bar{I})$  bis auf Nullmengen.

Falls  $f \in C^0(\bar{I})$  gilt, folgt:  $u'' \in C^0(\bar{I})$ . Dass eine schwache Lösung  $u \in C^2(\bar{I})$  auch eine klassische Lösung ist, haben wir uns schon bei 11.1 überlegt.

**Satz 11.14.** Sei  $I = (0, 1)$ . Dann existiert eine Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  und eine Hilbertbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $L^2(I)$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  schon  $e_n \in C^\infty(\bar{I})$  und

$$\begin{aligned} -e_n'' + e_n &= \lambda_n e_n \quad \text{auf } I \\ e_n(0) &= e_n(1) = 0 \end{aligned}$$

gilt. Außerdem gilt:  $\lambda_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Wir nennen die  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Eigenwerte des Differentialoperators  $Au = -u'' + u$  mit Dirichlet-Randbedingungen und die  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind die zugehörigen Eigenfunktionen.

*Beweis.* Zu  $f \in L^2(I)$  existiert eine eindeutige Lösung  $u \in H^{2,2}(I) \cap \mathring{H}^{1,2}(I)$  mit

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{auf } I \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Es sei  $Tf := u$  als Operator  $L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ . D. h.  $Tf$  ist die eindeutige Lösung des obigen Randwertproblems. Wir behaupten, dass  $T$  selbstadjungiert und kompakt ist.

Zunächst zur Kompaktheit: Sei  $f \in L^2$ . Es gilt

$$\int (u')^2 + \int u^2 = \int (-u'' + u)u = \int fu.$$

Somit folgt

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2$$

und daraus

$$\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2} \quad \text{bzw.} \quad \|Tf\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Da die Einbettung  $H^{1,2}(I) \rightarrow C^0(\bar{I})$  kompakt ist, ist auch die Einbettung  $H^{1,2}(I) \rightarrow L^2(I)$  kompakt. Somit ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f &\mapsto Tf \mapsto Tf \\ L^2(\Omega) &\rightarrow \mathring{H}^{1,2}(\Omega) \rightarrow C^2(\Omega) \end{aligned}$$

kompakt.

Jetzt zur Selbstadjungiertheit. Für alle  $f, g \in L^2$  gilt:

$$\int_I (Tf)g = \int_I f Tg.$$

Mit  $u = Tf$  und  $v = Tg$  erhalten wir aus

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \\ -v'' + v &= g \end{aligned}$$

durch Multiplikation mit  $v$  bzw.  $u$ , Integration und Anwendung partieller Integration:

$$\int_I f v = \int_I (u' v' + uv) = \int_I g u.$$

Dies zeigt, dass  $T$  selbstadjungiert ist.

Weiter gilt für alle  $f \in L^2(I)$ :

$$\int_I (Tf)f = \int_I u f = \int_I (u')^2 + \int_I u^2 \geq 0. \quad (*)$$

Also ist  $T$  positiv semidefinit. Außerdem gilt  $N(T) = \{0\}$ , da:

$$Tf = 0 \quad \implies \quad u = 0 \quad \implies \quad f = 0.$$

Wir nutzen nun den Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren und erhalten eine Hilbertbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Eigenvektoren von  $T$  mit Eigenwerten  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Aus  $(*)$  folgt  $\mu_n \geq 0$  und da  $T$  injektiv ist, folgt  $\mu_n \neq 0$ . Außerdem gilt  $\mu_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Schreiben wir  $Te_n = \mu_n e_n$ , so folgt:

$$\begin{aligned} -e_n'' + e_n &= \lambda_n e_n \quad \text{mit } \lambda_n = \mu_n^{-1} \\ e_n(0) &= e_n(1) = 0. \end{aligned}$$

Außerdem folgt  $e_n \in C^2(\bar{I})$ , da  $f = \lambda_n e_n \in C(\bar{I})$ . Durch Iterieren dieses Vorgehens erhalten wir  $u_n \in C^k$ , also  $u_n \in C^\infty$ . ■

Verallgemeinerung:

$$-(pu')' + qu = f, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

das sogenannte *Sturm-Liouville-Problem*. Der Fall

$$p \geq \alpha > 0 \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$$

geht wie oben (inklusive Eigenwert-Theorie).