Universität Regensburg WS 2013/14

Vorlesungsmitschrift (*kein* offizielles Skript)

Funktionalanalysis

Prof. Dr. Harald Garcke

Version vom 26. Oktober 2013

Gesetzt in LaTeX von Johannes Prem

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?

Zum Beispiel von der *Analysis auf Banachräumen* (vollständigen normierten Vektorräumen)

1.1. Auf $\mathbb{R}^n$ definiere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x\|_2 \coloneqq |x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 (Funktionen auf kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$)**.**
Zum Beispiel: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, z. B. $K = [0,1]$.

$$C^0(K) \coloneqq \{f \mid f\colon K \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird Banachraum mit der Norm:

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x \in K} |f(x)| \ < \infty$$

1.3 (Operatoren auf $C^0([0,1])$)**.**
Definiere

$$L\big(C^0([0,1]),\, C^0([0,1])\big) \coloneqq \big\{T\colon C^0([0,1]) \to C^0([0,1]) \;\big|\; T \text{ ist linear und stetig}\big\}$$

Beispiele:

$$(Tf)(x) \coloneqq g(x)\, f(x) \qquad \text{wobei } g \in C^0([0,1])$$

$$(Tf)(x) \coloneqq \sum_{i=1}^n f(x_i)\, L_i(x) \qquad \text{wobei } 0 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le 1$$

$$L_i\colon \text{ Lagrange-Basis-Fkt.: } \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$(Tf)(x) \coloneqq \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y \qquad \text{wobei } K \in C^0\left([0,1]^2\right)$$

Bemerkung: $L\big(C^0([0,1]),\, C^0([0,1])\big)$ wird zu einem Banachraum mit der Operatornorm

$$\|T\|_{L(C^0,C^0)} \coloneqq \sup_{f \ne 0} \frac{\|Tf\|_{C^0}}{\|f\|_{C^0}}$$

1.4. Welche Besonderheiten ergeben sich in unendlich-dimensionalen Räumen?

(1) Problem in ∞-dimensionalen Vektorräumen: Wenig sinnvolle Aussagen ohne Topologie möglich

(2) Für $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear gilt:

$$T \text{ surjektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ injektiv}$$

Im ∞-dim. ist dies i. A. falsch.
Beispiel:

$$C_* := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_k \in \mathbb{R},\ \exists\, \bar{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, \ell > \bar{k}\colon\ x_\ell = 0 \right\}$$

C_* modelliert „Folgen, die irgendwann abbrechen“. Außerdem enthält C_* den $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß.

Definiere die sog. *Shift-Abbildung* wie folgt:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Dann ist T injektiv, aber nicht surjektiv.

(3) Grundproblem der linearen Algebra: Finde Normalformen für lineare Abbildungen.
Ziel: Verallgemeinerung auf ∞-dim. Räume.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Diagonalisierbarkeit}\\ \text{symmetrischer Matrizen}\end{array}\right\} \quad\rightsquigarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Spektralsatz für}\\ \text{kompakte, normale Operatoren}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Jordansche}\\ \text{Normalform}\end{array}\right\} \quad\rightsquigarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Spektralsatz für}\\ \text{kompakte Operatoren}\end{array}\right.$$

(4) Kompaktheit
In ∞-dim. Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel *nicht* kompakt.
Beispiel C_*: Nutze die Norm

$$\|x\|_{C_*} := \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

und die Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (wobei die 1 an der i-ten Stelle steht). Dann gilt:

$$\|e_i\|_{C_*} = 1 \qquad \text{und} \qquad \|e_i - e_k\|_{C_*} = 1 \text{ für } i \neq k$$

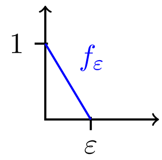
Also hat $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *keine* konvergente Teilfolge, woraus folgt, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist.

(5) Nicht alle Normen sind zueinander äquivalent.
Beispiel: Betrachte auf $C^0([0,1])$ die Normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x}$$

Es gilt $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty$. Aber: Es gibt keine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $f \in C^0([0,1])$ gilt: $\|f\|_\infty \leq c\,\|f\|_{L^2}$. Betrachte dazu:



Es gilt: $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1,\ \|f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Außerdem gilt:

$$\big(C^0([0,1]),\ \|\cdot\|_\infty\big) \text{ ist Banachraum}$$
$$\big(C^0([0,1]),\ \|\cdot\|_{L^2}\big) \text{ ist normierter Vektorraum (aber nicht vollständig)}$$

Funktionalanalysis lässt sich sinnvoll nur in vollständigen Räumen entwickeln. Deshalb werden wir nicht vollständige Räume vervollständigen (siehe 2.18).

2 Grundstrukturen der Funktionalanalysis

2.1 (Topologie)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{T}$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{T}$ *Topologie (auf X)*, falls gilt:

(T1) $\quad \emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$

(T2) $\quad \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$

(T3) $\quad T_1, T_2 \in \mathcal{T} \implies T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Hausdorff-Raum*, falls er zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt:

(T4) $\quad \forall\, x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\ \exists\, U_1, U_2 \in \mathcal{T}\colon\ U_1 \cap U_2 = \emptyset \wedge x_i \in U_i$

Mengen in $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Eine Menge $W \subset X$ mit $x \in W$ für die eine offene Menge U mit $x \in U$ und $U \subset W$ existiert, heißt *Umgebung von x*.

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, so heißt $f\colon X \to Y$ *stetig*, falls die Urbilder offener Mengen stets offen sind. (Formal: $\forall\, U' \in \mathcal{T}_Y\colon\ f^{-1}(U') \in \mathcal{T}_X$)

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig in $x \in X$*, falls

$$f(x) \in V \in \mathcal{T}_Y \quad \implies \quad \exists\, U \in \mathcal{T}_X\colon\ x \in U \subset f^{-1}(V)$$

(d. h. $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von x).

2.2. Ist X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt $(X, \mathcal{T})$ *topologischer Vektorraum*, falls $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist und die Abbildungen

$$\begin{aligned} X \times X \to X, &\quad (x, y) \mapsto x + y \\ \mathbb{K} \times X \to X, &\quad (\alpha, x) \mapsto \alpha\, x \end{aligned}$$

stetig sind. („Algebraische und topologische Struktur sind verträglich“)

2.3 (Metrik)**.** Ein Tupel (X, d) heißt *metrischer Raum*, falls X eine Menge ist und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ folgende Bedingungen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt:

(M1) $\quad d(x, y) \geq 0 \quad$ und $\quad d(x, y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Konvergenz:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls:

$$d(x_k, x_\ell) \to 0 \quad \text{für } k, \ell \to \infty$$

x heißt Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Notation: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ oder: $x_n \to x$ für $n \to \infty$), falls:

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

(X,d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in X besitzt.

Abstand von Mengen $A, B \subset X$:

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Für $A \subset X$ und $x \in X$ definieren wir: $\operatorname{dist}(x,A) := \operatorname{dist}(\{x\}, A)$.

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $A \subset X,\ x \in X$ definieren wir:

$$\begin{aligned} B_r(A) &:= \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x,A) < r\} \\ B_r(x) &:= B_r(\{x\}) \\ \operatorname{diam}(A) &:= \sup\{d(a_1,a_2) \mid a_1, a_2 \in A\} \end{aligned}$$

Wir sagen A ist *beschränkt*, falls $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

2.4 (Topologie von Metriken). Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists\, r \in \mathbb{R}_{>0}\colon\ B_r(x) \subset A\} \quad \text{ist das } \textit{Innere von } A.$$

$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall\, r \in \mathbb{R}_{>0}\colon\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{ist der } \textit{Abschluss von } A.$$

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{ist der } \textit{Rand von } A.$$

Wir sagen, dass A offen ist, falls $A^\circ = A$ gilt, und dass A abgeschlossen ist, falls $\overline{A} = A$ gilt.

Durch die Definition $\mathcal{T} := \{A \subset X \mid A \text{ offen}\}$ wird $(X, \mathcal{T})$ zu einem hausdorffschen topologischen Raum.

2.5 (Fréchet-Metrik). Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $d\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *Fréchet-Metrik*, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

(F1) $d(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x) = 0 \iff x = 0$

(F2) $d(-x) = d(x)$

(F3) $d(x+y) \leq d(x) + d(y)$

Dann ist $(x, y) \mapsto d(x - y)$ eine Metrik auf X.

Beispiel: Fréchet-Metriken auf $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto |x|^\alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha \leq 1$$
$$x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x|}$$

2.6 (Norm)**.** X sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Eine Abbildung $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls folgende Bedingungen für alle $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

(N1) $\|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dann ist $x \mapsto \|x\|$ eine Fréchet-Metrik. Wir nennen X *Banachraum*, falls X mit einer gegebenen Norm vollständig ist.

X ist eine *Banachalgebra*, falls X eine Algebra ist (d. h. es gibt ein Produkt auf X, das dem Assoziativgesetz und Distributivgestz genügt) und $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in X$ gilt.

2.7 (Skalarprodukt)**.** Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

a) $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ heißt *Hermitische Form* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ symmetrische Biliniearform, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrische Sesquilinearform), falls für alle $x, x_1, x_2, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(S2) $\langle \alpha\, x, y\rangle = \alpha\, \langle x, y\rangle$

(S3) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$

(Es folgt: für alle $x \in X$ gilt $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$.)

b) $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ heißt *positiv-semidefinit*, falls

(S4') $\langle x, x\rangle \geq 0$

und *positiv definit*, falls

(S4) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

gilt.

c) $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ heißt *Skalarprodukt*, falls (S1)–(S4) erfüllt sind. Dann ist $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ eine Norm auf X und wir nennen X dann einen *Prä-Hilbertraum*. Falls X zusätzlich vollständig ist, so heißt X *Hilbertraum*

Beispiele:

i) $\mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

ii) $X = C^0(K, \mathbb{R})$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

$$\langle f, g\rangle := \int_K f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

Dann ist $\big(C^0(K), \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ein Prä-Hilbertraum (aber kein Hilbertraum!)

Satz 2.8. Sei $\langle\, \cdot\,, \,\cdot\, \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum X. Dann gelten:

(1) Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU): $\forall\, x, y \in X\colon \quad |\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$. Gleichheit gilt nur, falls y ein Vielfaches von x ist.

(2) Dreiecksungleichung: $\forall\, x, y \in X\colon \quad \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

(3) Parallelogrammidentität: $\forall\, x, y \in X\colon \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Bemerkung: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt aus der CSU für $x, y \in X \setminus \{0\}$:

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \in [-1, 1] \tag{$*$}$$

D. h. es gibt genau ein $\theta \in [0, \pi]$, s. d.

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \cos\theta.$$

Wir interpretieren θ als den Winkel zwischen x und y.

Beweis von Satz 2.8.

(3)

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$

Ersetze y durch $-y$ und addiere beide Gleichungen.

(1) Ersetze in $(*)$ y durch $-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\, y$ (o. E. $y \neq 0$). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &\le \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\, y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\, y \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\,\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\
&= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}
\end{aligned}$$

Es folgt die CSU. In der ersten Zeile gilt bei $\leq$ die Gleichheit genau dann, wenn x ein Vielfaches von y ist.

(3)
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\underbrace{\operatorname{Re}\langle x,y\rangle}_{\leq |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|} \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

■

2.9 (Vergleich von Topologien)**.** Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X. Wir sagen $\mathcal{T}_2$ ist *stärker* (oder *feiner*) als $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_1$ ist *schwächer* (oder *gröber*) als $\mathcal{T}_2$, falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt.

Sind d_1, d_2 zwei Metriken auf X und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ die induzierten Topologien (siehe 2.4), so heißt die Metrik d_1 *stärker (bzw. schwächer)* als d_2, falls $\mathcal{T}_1$ stärker (bzw. schwächer) als $\mathcal{T}_2$ ist. Die Metriken heißen äquivalent, falls $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Entsprechend heißt eine Norm stärker bzw. schwächer als eine zweite, wenn dies für die induzierten Metriken gilt. Analog für Äquivalenz von Normen.

2.10 (Vergleich von Normen)**.** Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann gilt:

(1) $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:
$$\forall\, x \in X: \quad \|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2$$

(2) Die beiden Normen sind genau dann äquivalent, wenn es $c, C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:
$$\forall\, x \in X: \quad c\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\,\|x\|_2$$

Beweis. (1) Es sei $B^i_r(x) = \{x' \in X \mid \|x - x'\|_i < r\}$ und $\mathcal{T}_i$ sei die von $\|\cdot\|_i$ induzierte Topologie.
Sei $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Da $B^1_1(0) \in \mathcal{T}_1$ gilt, ist $B^1_1(0)$ offen bezüglich $\mathcal{T}_1$ und bezüglich $\mathcal{T}_2$. Es liegt 0 im Inneren (bezüglich $\|\cdot\|_2$) von $B^1_1(0)$. Somit gilt $B^2_\varepsilon(0) \subset B^1_1(0)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Daher gilt für $x \in X \setminus \{0\}$:
$$\left\| \frac{\varepsilon\, x}{2\|x\|_2} \right\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \quad \left\| \frac{\varepsilon\, x}{2\,\|x\|_2} \right\|_1 < 1 \qquad \Longrightarrow \quad \|x\|_1 < \frac{2}{\varepsilon}\,\|x\|_2$$

Gilt umgekehrt die Ungleichung in (1) so ist für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$
$$B^2_r(x) \subset B^1_{cr}(x)$$
Sei nun $A \in \mathcal{T}_1$. Dann ist $A = A^\circ$ bezüglich $\mathcal{T}_1$. D. h. zu $x \in A$ existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B^1_\varepsilon(x) \subset A$. Also gilt:
$$B^2_{\varepsilon/c}(x) \subset A$$
Dies zeigt $A \in \mathcal{T}_2$.

(2) Wende den ersten Teil zweimal an.

■

Satz 2.11. Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent. Endlich-dimensionale Vektorräume sind Banachräume. Endlich-dimensionale Unterräume normierter Räume sind abgeschlossen.

Beweis. Sei X ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von $(X, \|\cdot\|)$. Jedem $x \in X$ mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, e_i$ ordnen wir den Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{K}^n$ zu.

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\to X \to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto x \ \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

sind stetig.

Daher nimmt $\|x\|$ auf der kompakten Menge

$$S \coloneqq \{\alpha \mid \|\alpha\|_2 = 1\}$$

ein Maximum M und ein Minimum m an. (Dabei gilt $m > 0$, da $\|x\| > 0$ für alle $x \in S$.) Damit gilt für x mit $\|\alpha(x)\|_2 = 1$

$$m \leq \|x\| \leq M.$$

Für allgemeine $x \neq 0$ gilt

$$\left\| \alpha\left(\frac{x}{\|\alpha(x)\|_2}\right) \right\|_2 = 1 \quad \text{und somit} \quad m \leq \left\| \frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right\| \leq M$$

Dies zeigt die Äquivalenz einer beliebigen Norm zur Norm $x \mapsto \|\alpha(x)\|_2$. Damit sind zwei beliebige Normen äquivalent.

Die Vollständigkeit von X folgt aus der Vollständigkeit von $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$. Die Tatsache, dass endlich-dimensionale Räume abgeschlossen sind, folgt mit Aufgabe 1 von Übungsblatt 2.

■

2.12 (Folgenräume). Wir bezeichnen mit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen über $\mathbb{K}$, d. h.

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \coloneqq \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{K} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Es gilt:

1) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist ein metrischer Raum mit der Fréchet-Metrik

$$\rho(x) \coloneqq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|} \qquad \text{für } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

2) Ist $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} = ((x_i)^k_{i\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und ist $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, so gilt:

$$\rho(x^k - x) \to 0 \text{ für } k \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}\colon\ x_i^k \to x_i \text{ für } k \to \infty.$$

(Vergleiche Aufgabe 2 von Blatt 1.)

3) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist mit dieser Metrik vollständig.

4) Definiere für $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell^p} &:= \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ \in [0,\infty] \quad \text{für } 1 \le p < \infty \\ \|x\|_{\ell^\infty} &:= \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \ \in [0,\infty] \end{aligned}$$

Wir betrachten für $1 \le p \le \infty$ die Mengen

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,\big|\, \|x\|_{\ell^p} < \infty\big\}$$

Diese Räume sind normierte Vektorräume und auch vollständig (also Banachräume). (Beweis, siehe später.) Wenn der Körper $\mathbb{K}$ aus dem Kontext klar ist, lassen wir diesen in der Notation auch weg.

5) Interessante Unterräume von ℓ^∞ sind:

$$\begin{aligned} c &:= \big\{x \in \ell^\infty \,\big|\, \lim_{i\to\infty} x_i \text{ existiert}\big\} \qquad \text{und} \\ c_0 &:= \big\{x \in \ell^\infty \,\big|\, \lim_{i\to\infty} x_i = 0\big\}. \end{aligned}$$

Beide Räume versehen wir mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Es gilt: $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$

6) Der Raum ℓ^2 besitzt das Skalarprodukt

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i \quad \text{für } x, y \in \ell^2$$

Lemma 2.13 (Youngsche Ungleichung)**.** Es seien $p, p' \in (1,\infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$ab \le \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p'}\, b^{p'}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \log(ab) = \log(a) + \log(b) &= \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log(b^{p'}) \\ &\le \log\Big(\frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p'}\, b^{p'}\Big) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichheit folgt daraus, dass der Logarithmus eine konkave Funktion ist. Da außerdem exp monoton ist, folgt hieraus die Behauptung.

∎

Satz 2.14 (Höldersche Ungleichung auf ℓ^p). Es sei $1 \leq p, p' \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^{p'}$ ist $xy \in \ell^1$ (dabei sei für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Produkt definiert als: $xy \coloneqq (x_n\, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) und es gilt:

$$\|xy\|_{\ell^1} \leq \|x\|_{\ell^p} \cdot \|y\|_{\ell^{p'}}.$$

Beweis. Falls $p = \infty$ setzte $p' = 1$ (und umgekehrt). In diesem Fall ist der Beweis einfach. Sei nun $1 < p < \infty$ und $\|x\|_{\ell^p} > 0, \|y\|_{\ell^{p'}} > 0$. Die Youngsche Ungleichung liefert:

$$\frac{|x_k|\; |y_k|}{\|x\|_{\ell^p}\, \|y\|_{\ell^{p'}}} \leq \frac{1}{p}\, \frac{|x_k|^p}{\|x\|_{\ell^p}^p} + \frac{1}{p'}\, \frac{|y_k|^{p'}}{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}}$$

Die Reihe über die Terme der rechten Seite ist eine konvergente Reihe und damit folgt aus dem Majorantenkriterium, dass $xy \in \ell^1$ erfüllt sein muss.

■

Satz 2.15. Der Raum ℓ^p ist für $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum.

Beweis. Die Vollständigkeit von ℓ^1 ist eine Übungsaufgabe. Für ℓ^p folgt dies ähnlich (vergleiche mit dem späteren Beweis über $L^p(\mu)$.) Die Normeigenschaften abgesehn von der $\triangle$-Ungleichung ergeben sich einfach. Wir zeigen die $\triangle$-Ungleichung für $p \in (1, \infty)$. Es seien also $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\, |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|\, |x_k + y_k|^{p-1} \\
&\overset{(\star)}{\leq} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{(p-1)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{(p-1)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}\right)\left(\|x+y\|_{\ell^p}^{p-1}\right)
\end{aligned}$$

Bei $(\star)$ geht die Höldersche Ungleichung ein. Dies zeigt $\|x+y\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}$.

■

2.16 (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen). Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt (also nach Heine-Borel äquivalenterweise kompakt) und Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$, so ist $C^0(K, Y)$ ein Unterraum von $B(K, Y)$. (Vergleiche Aufgabe 1 von Blatt 2.)

Satz: Mit $\|f\|_{C^0} \coloneqq \|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in K} |f(x)|$ wird $C^0(K, Y)$ ein Banachraum.

Beweis. Jedes $f \in C^0(K, Y)$ ist beschränkt, denn: Zu $x \in K$ existiert ein $\delta_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f\big(B_{\delta_x}(x)\big) \subset B_1\big(f(x)\big)$. Da K kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Es folgt:

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_1\big(f(x_i)\big).$$

Die rechte Menge ist beschränkt, also ist auch f beschränkt.

Aufgabe 1 (iv) von Blatt 2 zeigt, dass $B(K,Y)$ ein Banachraum ist. Eine Cauchy-Folge in $C^0(K,Y)$ ist auch eine Cauchy-Folge in $B(K,Y)$. Da $B(K,Y)$ vollständig ist, besitzt jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Sei jetzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^0(K,Y)$ mit Grenzwert f in $B(Y,K)$. Für $x, y \in K$ gilt:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \underbrace{\|f_i(y) - f_i(x)\|}_{\substack{\to 0 \text{ für } y \to x \\ \text{und jedes } i}} + \underbrace{2\|f - f_i\|_\infty}_{\to 0 \text{ für } i \to \infty}$$

Dies beweist $f \in C^0(K,Y)$.

■

2.17 (Räume differenzierbarer Funktionen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} C^m(\overline{\Omega}) \coloneqq \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid\ & f \text{ ist } m\text{-mal stetig diffenzierbar auf } \Omega \text{ und für } s \in \mathbb{N}^n \\ & \text{mit } |s| \leq m \text{ ist } \partial^s f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar } \}. \end{aligned}$$

(Dabei ist s ein Multiindex mit $|s| = s_1 + \cdots + s_n$.)

Satz: Der Raum $C^m(\overline{\Omega})$ ist mit der Norm

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} \coloneqq \sum_{|s|\leq m} \|\partial^s f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$$

ein Banachraum.

Beweis. Wir beweisen die Vollständigkeit von $C^1(\overline{\Omega})$. (Der Fall $m > 1$ folgt induktiv.) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^1(\overline{\Omega})$, so sind $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\partial_i f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $C^0(\overline{\Omega})$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Daher existieren f und g_i in $C^0(\overline{\Omega})$, so dass $f_k \to f$ sowie $\partial_i f_k \to g_i$ gleichmäßig für $k \to \infty$ in $C^0(\overline{\Omega})$. Für $x \in \Omega$ und y nahe x mit $x_t \coloneqq (1-t)x + ty$ folgt aus dem HDI:

$$f_k(x_1) - f_k(x_0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_k(x_t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (y-x)\cdot\nabla f_k(x_t)\,\mathrm{d}t$$

Es folgt (mit $g = (g_1, \ldots, g_n)$):

$$\begin{aligned} \|f_k(y) - f_k(x) - (y-x)\cdot\nabla f_k(x)\| &= \left\| \int_0^1 \big((y-x)\cdot\nabla f_k(x_t) - (y-x)\cdot\nabla f_k(x)\big)\,\mathrm{d}t \right\| \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \int_0^1 \|\nabla f_k(x_t) - \nabla f_k(x)\|\,\mathrm{d}t\,\|y-x\| \\ &\leq \Big(2\|\nabla f_k - g\|_\infty + \sup_{t\in[0,1]} \|g(x_t) - g(x)\|\Big)\,\|y-x\| \end{aligned}$$

Für $k \to \infty$ gilt dann:

$$\|f(y) - f(x) - (y - x) \cdot g(x)\| \leq \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq 1} \|g(x_t) - g(x)\|}_{\to 0 \text{ für } y \to x \text{ wegen Stetigkeit von } g} \|y - x\|$$

Dies bedeutet f ist in x diff'bar mit $\nabla f(x) = g(x)$.

■

2.18 (Vervollständigung). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\tilde{X} := \big\{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\big\}$$

zusammen mit der Äquivalenzrelation

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \tilde{X} \; :\Longleftrightarrow \; \big(d(x_j, y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

Führe Metrik auf $\tilde{X}$ ein: für $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ sei

$$\tilde{d}\big((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}\big) := \lim_{j \to \infty} d(x_j, y_j).$$

Satz:

i) Dann ist $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ein vollständiger metrischer Raum.

ii) Durch $J(x) := (x)_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine injektive Abbildung $J \colon X \to \tilde{X}$ definiert, welche isometrisch ist, d. h. für alle $x, y \in X$ gilt

$$\tilde{d}\big(J(x), J(y)\big) = d(x, y).$$

iii) Es liegt $J(X)$ dicht in $\tilde{X}$.

Beweis. Für $\tilde{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\tilde{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\tilde{X}$ gilt (mithilfe der sog. *Vierecksungleichung*):

$$|d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i)| \leq d(x_j, x_i) + d(y_j, y_i) \to 0 \qquad \text{für } i, j \to \infty.$$

Somit existiert $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{j \to \infty} d(x_j, y_j)$. Für $\tilde{x}^1 = \tilde{x}^2$ und $\tilde{y}^1 = \tilde{y}^2$ in $\tilde{X}$ folgt:

$$|d(x_j^2, y_j^2) - d(x_j^1, y_j^1)| \to 0 \qquad \text{für } i \to \infty.$$

Dies zeigt, dass $\tilde{d}$ wohldefiniert ist. Außerdem gilt:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{x} = \tilde{y},$$

was direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation folgt. Die $\triangle$-Ungleichung und Symmetrie übertragen sich direkt.

Zur Vollständigkeit: Es sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\tilde{X}$, mit $x^k = (x^k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $j_k \in \mathbb{N}$, so dass $d(x^k_i, x^k_j) \leq 1/k$ für alle $i, j \geq j_k$ erfüllt ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
d(x^k_{j_k}, x^\ell_{j_k}) &\leq d(x^k_{j_k}, x^k_j) + d(x^k_j, x^\ell_j) + d(x^\ell_j, x^\ell_{j_\ell}) \\
&\leq \frac{1}{k} + d(x^k_j, x^\ell_j) + \frac{1}{\ell} \qquad \text{für } j \geq j_k, j_\ell \\
&\to \frac{1}{k} + \tilde{d}(x^k, x^\ell) + \frac{1}{\ell} \qquad \text{für } j \to \infty \\
&\to 0 \qquad \text{für } k, \ell \to \infty
\end{aligned}$$

Also ist $x^\infty := (x^\ell_{j_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ in $\tilde{X}$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(x^\ell, x^\infty) \longleftarrow\ & d(x^\ell_k, x^\infty_k) \qquad \text{für } k \to \infty \\
&\leq d(x^\ell_k, x^\ell_{j_\ell}) + d(x^\ell_{j_\ell}, x^k_{j_k}) \\
&\leq \frac{1}{\ell} + d(x^\ell_{j_\ell}, x^k_{j_k}) \qquad \text{für } k \geq j_\ell \\
&\to 0 \qquad \text{für } k, \ell \to \infty
\end{aligned}$$

Es gilt also $x^\ell \to x^\infty$. Da $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in $\tilde{X}$ war, hat also jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Die Aussagen ii) und iii) sind eine einfache Übung.

■

3 Lineare Operatoren

Definition 3.1.

a) Seien X, Y zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Topologien $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$. Wir definieren

$$L(X,Y) \coloneqq \{T\colon X \to Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Elemente in $L(X,Y)$ heißen *lineare Operatoren von X nach Y*. (Für $T \in L(X,Y)$ und $x \in X$ schreiben wir auch oft Tx statt $T(x)$.)

b) Der *Dualraum* von X ist

$$X' \coloneqq L(X, \mathbb{K})$$

und Elemente aus X' nennen wir *lineare Funktionale*.

Beispiele 3.2.

1) Gelte $X = C^2(\overline{\Omega})$ und $Y = C^0(\overline{\Omega})$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte dann $T\colon X \to Y$ mit

$$(Tu)(x) \coloneqq -\Delta u(x)$$

für alle $u \in C^2(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$.

2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $K\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig. Sei dann T für alle $u \in C^0(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$ gegeben durch:

$$(Tu)(x) \coloneqq \int_\Omega K(x,y)\, u(y)\, \mathrm{d}y.$$

Lemma 3.3. Seien X, Y normierte Vektorräume und sei $T\colon X \to Y$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) T ist stetig, also $T \in L(X,Y)$.

(2) T ist stetig in x_0 für ein $x_0 \in X$.

(3) Es gilt für die Operatornorm von T:

$$\|T\|_{L(X,Y)} \coloneqq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} \|Tx\|_Y < \infty$$

(4) Es existiert ein $C \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $\|Tx\|_Y \le C\,\|x\|_X$. (Bemerkung: $C = \|T\|_{L(X,Y)}$ ist die kleinste solche Zahl.)

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): klar.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$T\big(\overline{B_\delta(x_0)}\big) \subset \overline{B_1\big(T(x_0)\big)}$$

erfüllt ist. Für x mit $\|x\|_X \leq 1$ folgt $x_0 + \delta x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ und daraus: $T(x_0 + \delta x) \in \overline{B_1\big(T(x_0)\big)}$, d. h. es gilt:

$$\|T(x_0 + \delta x) - T(x_0)\| \leq 1.$$

Wegen der Linearität von T gilt $T(x_0 + \delta x) - T(x_0) = \delta T(x)$, weshalb wir $T(x) \leq 1/\delta$ bekommen.

(3) $\Longrightarrow$ (4): Für $x \neq 0$ gilt $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$. Daraus folgt:

$$\|Tx\| = \left\| \|x\| \, T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T\| \, \|x\|.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1): Für $x, x_0 \in X$ gilt:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq C \, \|x - x_0\|.$$

Also ist T Lipschitz-stetig und somit auch stetig. ■

Lemma 3.4.

(1) X, Y normierte Räume $\Longrightarrow$ $L(X, Y)$ normiert mit der Operatornorm.

(2) Y Banachraum $\Longrightarrow$ $L(X, Y)$ Banachraum

(3) X Banachraum $\Longrightarrow$ $L(X) := L(X, X)$ Banachalgebra

(4) $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z)$ $\Longrightarrow$ $ST \in L(X, Z)$ mit $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$

Beweis. Zu (1): Wir zeigen nur die $\triangle$-Ungleichung (der Rest ist klar). Es gilt

$$\|T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|) \, \|x\|,$$

woraus folgt:

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Zu (2): Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X, Y)$. Für alle $x \in X$ ist dann $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y. Setzte

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Da Grenzwertbilden linear ist, ist auch L linear. Wir behaupten, dass $T \in L(X, Y)$ und $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to 0$ gelten.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Sei $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$. Wähle $m_0 = m_0(\varepsilon, x) \geq n_0$ mit

$$\|T_{m_0}x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ folgt nun:

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n x - T_{m_0}x\| + \|T_{m_0}x - Tx\| \leq \|T_n - T_m\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Damit folgen nun aber $\|T\| \leq \infty$ sowie $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Zu (3) und (4): Es gilt:

$$\|STx\| \leq \|S\| \, \|Tx\| \leq \|S\| \, \|T\| \, \|x\|.$$

Also gilt allgemein: $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$.

■

Bemerkung 3.5. Es sei $T \in L(X, Y)$ und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X, Y)$ mit $T_k x \to Tx$ für $k \to \infty$ und für alle $x \in X$. Dann folgt i. A. *nicht* $T_k \to T$ in $L(X, Y)$.

Beispiel: $X = c_0$ (Raum der Nullfolgen, siehe 2.12 (5)) mit der Supremumsnorm, $Y = \mathbb{R}$, $T_k x := x_k$. Dann gilt: $\lim_{k\to\infty} T_k x = \lim_{k\to\infty} x_k = 0 =: Tx$. Offensichtlich gilt $\|T_k x\| = 1$ für $x = e_k$. Außerdem gilt $\|T_k x\| = \|x_k\| \leq 1$ für $\|x\| \leq 1$. D. h. $\|T_k\| = 1$, aber $\|T\| = 0$.

Definition 3.6. Für $T \in L(X, Y)$ definieren wir den *Nullraum (Kern) von* T als

$$N(T) := \{x \in X \mid T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\}).$$

Es ist $N(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(X, Y)$.

Weiter sei

$$R(T) := \{Tx \in Y \mid x \in X\} = T(X)$$

der *Bildraum* (engl.: „range“) von T. Es ist $R(T)$ ein linearer Unterraum von Y, i. A. aber nicht abgeschlossen.

Beispiel: $X = C^0([0, 1])$,

$$T\colon X \to X, \quad (Tf)(x) := \int_0^x f(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$
$$R(T) = \{g \in C^1([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

Es gilt $T \in L(X, Y)$ aber $R(T)$ ist nicht abgeschlossen in X, denn:

$$\overline{R(T)} = \{g \in C^0([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

(denn stetige Funktionen können durch C^1-Funktionen in der C^0-Norm approximiert werden, siehe später).

Satz 3.7 (Neumannsche Reihe)**.** Sei X ein Banachraum und sei $A \in L(X)$ mit $\|A\| < 1$. Es bezeichne Id den Identitätsoperator. Dann liegt $(\mathrm{Id} - A)^{-1}$ in $L(X)$ und es gilt:

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Beweis. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n := \sum_{k=0}^{n} A^k \qquad \in L(X).$$

Mit $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ folgt:

$$\begin{aligned} \|B_n x - B_m x\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} A^k x \right\| && \text{für } n > m \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|A\|^k \|x\| \to 0 && \text{für } n, m \to \infty \text{ für alle } x \text{ mit gleichmäßig } \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

Also existiert $B \in L(X)$ mit $B = \lim_{n\to\infty} B_n$. Noch zu zeigen: $B(\mathrm{Id} - A) = \mathrm{Id} = (\mathrm{Id} - A)B$. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} A^k (\mathrm{Id} - A) = \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \mathrm{Id} - A^{n+1} \to \mathrm{Id} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Also:

$$B(\mathrm{Id} - A) = \lim_{n\to\infty} B_n (\mathrm{Id} - A) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id} - A^{n+1}) = \mathrm{Id}$$

■