Universität Regensburg WS 2013/14

Vorlesungsmitschrift (*kein* offizielles Skript)

Funktionalanalysis

Prof. Dr. Harald Garcke

Version vom 5. November 2013

Gesetzt in LaTeX von Johannes Prem

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?

Zum Beispiel von der *Analysis auf Banachräumen* (vollständigen normierten Vektorräumen)

1.1. Auf $\mathbb{R}^n$ definiere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x\|_2 \coloneqq |x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 (Funktionen auf kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$)**.**
Zum Beispiel: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, z. B. $K = [0,1]$.

$$C^0(K) \coloneqq \{f \mid f\colon K \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird Banachraum mit der Norm:

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in K} |f(x)| \; < \infty$$

1.3 (Operatoren auf $C^0([0,1])$)**.**
Definiere

$$L\big(C^0([0,1]),\, C^0([0,1])\big) \coloneqq \big\{T\colon C^0([0,1]) \to C^0([0,1]) \;\big|\; T \text{ ist linear und stetig}\big\}$$

Beispiele:

$$(Tf)(x) \coloneqq g(x)\, f(x) \qquad \text{wobei } g \in C^0([0,1])$$

$$(Tf)(x) \coloneqq \sum_{i=1}^n f(x_i)\, L_i(x) \qquad \text{wobei } 0 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le 1$$

$$L_i\colon \text{ Lagrange-Basis-Fkt.:} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$(Tf)(x) \coloneqq \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y \qquad \text{wobei } K \in C^0\left([0,1]^2\right)$$

Bemerkung: $L\big(C^0([0,1]),\, C^0([0,1])\big)$ wird zu einem Banachraum mit der Operatornorm

$$\|T\|_{L(C^0,C^0)} \coloneqq \sup_{f\neq 0} \frac{\|Tf\|_{C^0}}{\|f\|_{C^0}}$$

1.4. Welche Besonderheiten ergeben sich in unendlich-dimensionalen Räumen?

(1) Problem in ∞-dimensionalen Vektorräumen: Wenig sinnvolle Aussagen ohne Topologie möglich

(2) Für $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear gilt:

$$T \text{ surjektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ injektiv}$$

Im ∞-dim. ist dies i. A. falsch.
Beispiel:

$$c_* := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_k \in \mathbb{R},\ \exists\, \bar{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, \ell > \bar{k}\colon\ x_\ell = 0 \right\}$$

c_* modelliert „Folgen, die irgendwann abbrechen". Außerdem enthält c_* den $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß.

Definiere die sog. *Shift-Abbildung* wie folgt:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Dann ist T injektiv, aber nicht surjektiv.

(3) Grundproblem der linearen Algebra: Finde Normalformen für lineare Abbildungen.
Ziel: Verallgemeinerung auf ∞-dim. Räume.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Diagonalisierbarkeit}\\ \text{symmetrischer Matrizen}\end{array}\right\} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Spektralsatz für}\\ \text{kompakte, normale Operatoren}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Jordansche}\\ \text{Normalform}\end{array}\right\} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Spektralsatz für}\\ \text{kompakte Operatoren}\end{array}\right.$$

(4) Kompaktheit
In ∞-dim. Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel *nicht* kompakt.
Beispiel c_*: Nutze die Norm

$$\|x\|_{c_*} := \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

und die Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (wobei die 1 an der i-ten Stelle steht). Dann gilt:

$$\|e_i\|_{c_*} = 1 \qquad \text{und} \qquad \|e_i - e_k\|_{c_*} = 1 \text{ für } i \neq k$$

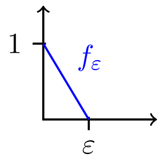
Also hat $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *keine* konvergente Teilfolge, woraus folgt, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist.

(5) Nicht alle Normen sind zueinander äquivalent.
Beispiel: Betrachte auf $C^0([0,1])$ die Normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x}$$

Es gilt $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty$. Aber: Es gibt keine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $f \in C^0([0,1])$ gilt: $\|f\|_\infty \leq c\,\|f\|_{L^2}$. Betrachte dazu:



Es gilt: $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1,\ \|f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Außerdem gilt:

$$\big(C^0([0,1]),\ \|\cdot\|_\infty\big) \text{ ist Banachraum}$$
$$\big(C^0([0,1]),\ \|\cdot\|_{L^2}\big) \text{ ist normierter Vektorraum (aber nicht vollständig)}$$

Funktionalanalysis lässt sich sinnvoll nur in vollständigen Räumen entwickeln. Deshalb werden wir nicht vollständige Räume vervollständigen (siehe 2.18).

2 Grundstrukturen der Funktionalanalysis

2.1 (Topologie)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{T}$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{T}$ *Topologie (auf X)*, falls gilt:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$

(T2) $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$

(T3) $T_1, T_2 \in \mathcal{T} \implies T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Hausdorff-Raum*, falls er zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt:

(T4) $\forall\, x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\ \ \exists\, U_1, U_2 \in \mathcal{T} \colon\ U_1 \cap U_2 = \emptyset \wedge x_i \in U_i$

Mengen in $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Eine Menge $W \subset X$ mit $x \in W$ für die eine offene Menge U mit $x \in U$ und $U \subset W$ existiert, heißt *Umgebung von x*.

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, so heißt $f \colon X \to Y$ *stetig*, falls die Urbilder offener Mengen stets offen sind. (Formal: $\forall\, U' \in \mathcal{T}_Y \colon\ f^{-1}(U') \in \mathcal{T}_X$)

Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *stetig in $x \in X$*, falls

$$f(x) \in V \in \mathcal{T}_Y \quad \implies \quad \exists\, U \in \mathcal{T}_X \colon\ x \in U \subset f^{-1}(V)$$

(d. h. $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von x).

2.2. Ist X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt $(X, \mathcal{T})$ *topologischer Vektorraum*, falls $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist und die Abbildungen

$$\begin{aligned} X \times X \to X, &\quad (x, y) \mapsto x + y \\ \mathbb{K} \times X \to X, &\quad (\alpha, x) \mapsto \alpha\, x \end{aligned}$$

stetig sind. („Algebraische und topologische Struktur sind verträglich“)

2.3 (Metrik)**.** Ein Tupel (X, d) heißt *metrischer Raum*, falls X eine Menge ist und $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ folgende Bedingungen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt:

(M1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Konvergenz:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls:

$$d(x_k, x_\ell) \to 0 \quad \text{für } k, \ell \to \infty$$

x heißt Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Notation: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ oder: $x_n \to x$ für $n \to \infty$), falls:

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

(X,d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in X besitzt.

Abstand von Mengen $A, B \subset X$:

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Für $A \subset X$ und $x \in X$ definieren wir: $\operatorname{dist}(x,A) := \operatorname{dist}(\{x\}, A)$.

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $A \subset X$, $x \in X$ definieren wir:

$$\begin{aligned} B_r(A) &:= \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x,A) < r\} \\ B_r(x) &:= B_r(\{x\}) \\ \operatorname{diam}(A) &:= \sup\{d(a_1,a_2) \mid a_1, a_2 \in A\} \end{aligned}$$

Wir sagen A ist *beschränkt*, falls $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

2.4 (Topologie von Metriken). Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists\, r \in \mathbb{R}_{>0}\colon\ B_r(x) \subset A\} \quad \text{ist das } \textit{Innere von } A.$$

$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall\, r \in \mathbb{R}_{>0}\colon\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{ist der } \textit{Abschluss von } A.$$

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{ist der } \textit{Rand von } A.$$

Wir sagen, dass A offen ist, falls $A^\circ = A$ gilt, und dass A abgeschlossen ist, falls $\overline{A} = A$ gilt.

Durch die Definition $\mathcal{T} := \{A \subset X \mid A \text{ offen}\}$ wird $(X, \mathcal{T})$ zu einem hausdorffschen topologischen Raum.

2.5 (Fréchet-Metrik). Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $d\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *Fréchet-Metrik*, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

(F1) $d(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x) = 0 \iff x = 0$

(F2) $d(-x) = d(x)$

(F3) $d(x+y) \leq d(x) + d(y)$

Dann ist $(x, y) \mapsto d(x - y)$ eine Metrik auf X.

Beispiel: Fréchet-Metriken auf $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto |x|^\alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha \leq 1$$
$$x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x|}$$

2.6 (Norm). X sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Eine Abbildung $\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls folgende Bedingungen für alle $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

(N1) $\|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dann ist $x \mapsto \|x\|$ eine Fréchet-Metrik. Wir nennen X *Banachraum*, falls X mit einer gegebenen Norm vollständig ist.

X ist eine *Banachalgebra*, falls X eine Algebra ist (d. h. es gibt ein Produkt auf X, das dem Assoziativgesetz und Distributivgestz genügt) und $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in X$ gilt.

2.7 (Skalarprodukt). Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

a) $\langle\cdot\,,\cdot\rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ heißt *Hermitische Form* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ symmetrische Biliniearform, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrische Sesquilinearform), falls für alle $x, x_1, x_2, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(S2) $\langle \alpha\, x, y\rangle = \alpha\, \langle x, y\rangle$

(S3) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$

(Es folgt: für alle $x \in X$ gilt $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$.)

b) $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ heißt *positiv-semidefinit*, falls

(S4') $\langle x, x\rangle \geq 0$

und *positiv definit*, falls

(S4) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

gilt.

c) $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ heißt *Skalarprodukt*, falls (S1)–(S4) erfüllt sind. Dann ist $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ eine Norm auf X und wir nennen X dann einen *Prä-Hilbertraum*. Falls X zusätzlich vollständig ist, so heißt X *Hilbertraum*

Beispiele:

i) $\mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

ii) $X = C^0(K,\mathbb{R})$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_K f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

Dann ist $\big(C^0(K), \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ein Prä-Hilbertraum (aber kein Hilbertraum!)

Satz 2.8. Sei $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum X. Dann gelten:

(1) Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU): $\forall\, x, y \in X\colon \quad |\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$.
Gleichheit gilt nur, falls y ein Vielfaches von x ist.

(2) Dreiecksungleichung: $\forall\, x, y \in X\colon \quad \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

(3) Parallelogrammidentität: $\forall\, x, y \in X\colon \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Bemerkung: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt aus der CSU für $x, y \in X \setminus \{0\}$:

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \in [-1, 1] \tag{$*$}$$

D. h. es gibt genau ein $\theta \in [0,\pi]$, s. d.

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \cos\theta.$$

Wir interpretieren θ als den Winkel zwischen x und y.

Beweis von Satz 2.8.

(3)

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

Ersetze y durch $-y$ und addiere beide Gleichungen.

(1) Ersetze in $(*)$ y durch $-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\, y$ (o. E. $y \neq 0$). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}0 &\le \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\, y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\, y \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\,\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\end{aligned}$$

Es folgt die CSU. In der ersten Zeile gilt bei $\leq$ die Gleichheit genau dann, wenn x ein Vielfaches von y ist.

(3)
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\underbrace{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}_{\leq |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|} \leq (\|x\|+\|y\|)^2$$

■

2.9 (Vergleich von Topologien)**.** Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X. Wir sagen $\mathcal{T}_2$ ist *stärker* (oder *feiner*) als $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_1$ ist *schwächer* (oder *gröber*) als $\mathcal{T}_2$, falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt.

Sind d_1, d_2 zwei Metriken auf X und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ die induzierten Topologien (siehe 2.4), so heißt die Metrik d_1 *stärker (bzw. schwächer)* als d_2, falls $\mathcal{T}_1$ stärker (bzw. schwächer) als $\mathcal{T}_2$ ist. Die Metriken heißen äquivalent, falls $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Entsprechend heißt eine Norm stärker bzw. schwächer als eine zweite, wenn dies für die induzierten Metriken gilt. Analog für Äquivalenz von Normen.

2.10 (Vergleich von Normen)**.** Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann gilt:

(1) $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:
$$\forall\, x \in X\colon \quad \|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2$$

(2) Die beiden Normen sind genau dann äquivalent, wenn es $c, C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:
$$\forall\, x \in X\colon \quad c\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\,\|x\|_2$$

Beweis. (1) Es sei $B_r^i(x) = \{x' \in X \mid \|x-x'\|_i < r\}$ und $\mathcal{T}_i$ sei die von $\|\cdot\|_i$ induzierte Topologie.
Sei $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Da $B_1^1(0) \in \mathcal{T}_1$ gilt, ist $B_1^1(0)$ offen bezüglich $\mathcal{T}_1$ und bezüglich $\mathcal{T}_2$. Es liegt 0 im Inneren (bezüglich $\|\cdot\|_2$) von $B_1^1(0)$. Somit gilt $B_\varepsilon^2(0) \subset B_1^1(0)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Daher gilt für $x \in X \setminus \{0\}$:
$$\left\| \frac{\varepsilon\, x}{2\|x\|_2} \right\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \quad \left\| \frac{\varepsilon\, x}{2\,\|x\|_2} \right\|_1 < 1 \qquad \Longrightarrow \quad \|x\|_1 < \frac{2}{\varepsilon}\,\|x\|_2$$
Gilt umgekehrt die Ungleichung in (1) so ist für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$
$$B_r^2(x) \subset B_{cr}^1(x)$$
Sei nun $A \in \mathcal{T}_1$. Dann ist $A = A^\circ$ bezüglich $\mathcal{T}_1$. D. h. zu $x \in A$ existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\varepsilon^1(x) \subset A$. Also gilt:
$$B_{\varepsilon/c}^2(x) \subset A$$
Dies zeigt $A \in \mathcal{T}_2$.

(2) Wende den ersten Teil zweimal an.

∎

Satz 2.11. Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent. Endlich-dimensionale Vektorräume sind Banachräume. Endlich-dimensionale Unterräume normierter Räume sind abgeschlossen.

Beweis. Sei X ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von $(X, \|\cdot\|)$. Jedem $x \in X$ mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, e_i$ ordnen wir den Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{K}^n$ zu.

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\to X \to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto x \ \ \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

sind stetig.

Daher nimmt $\|x\|$ auf der kompakten Menge

$$S := \{\alpha \mid \|\alpha\|_2 = 1\}$$

ein Maximum M und ein Minimum m an. (Dabei gilt $m > 0$, da $\|x\| > 0$ für alle $x \in S$.) Damit gilt für x mit $\|\alpha(x)\|_2 = 1$

$$m \leq \|x\| \leq M.$$

Für allgemeine $x \neq 0$ gilt

$$\left\|\alpha\left(\frac{x}{\|\alpha(x)\|_2}\right)\right\|_2 = 1 \quad \text{und somit} \quad m \leq \left\|\frac{x}{\|\alpha(x)\|_2}\right\| \leq M$$

Dies zeigt die Äquivalenz einer beliebigen Norm zur Norm $x \mapsto \|\alpha(x)\|_2$. Damit sind zwei beliebige Normen äquivalent.

Die Vollständigkeit von X folgt aus der Vollständigkeit von $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$. Die Tatsache, dass endlich-dimensionale Räume abgeschlossen sind, folgt mit Aufgabe 1 von Übungsblatt 2.

∎

2.12 (Folgenräume)**.** Wir bezeichnen mit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen über $\mathbb{K}$, d. h.

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{K} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\right\}$$

Es gilt:

1) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist ein metrischer Raum mit der Fréchet-Metrik

$$\rho(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|} \qquad \text{für } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

2) Ist $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} = ((x_i)^k_{i\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und ist $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, so gilt:

$$\rho(x^k - x) \to 0 \text{ für } k \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}\colon\ x_i^k \to x_i \text{ für } k \to \infty.$$

(Vergleiche Aufgabe 2 von Blatt 1.)

3) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist mit dieser Metrik vollständig.

4) Definiere für $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell^p} &:= \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ \in [0,\infty] \quad \text{für } 1 \le p < \infty \\ \|x\|_{\ell^\infty} &:= \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \ \in [0,\infty] \end{aligned}$$

Wir betrachten für $1 \le p \le \infty$ die Mengen

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ \big|\ \|x\|_{\ell^p} < \infty\big\}$$

Diese Räume sind normierte Vektorräume und auch vollständig (also Banachräume). (Beweis, siehe später.) Wenn der Körper $\mathbb{K}$ aus dem Kontext klar ist, lassen wir diesen in der Notation auch weg.

5) Interessante Unterräume von ℓ^∞ sind:

$$\begin{aligned} c &:= \big\{x \in \ell^\infty \ \big|\ \lim_{i\to\infty} x_i \text{ existiert}\big\} \qquad \text{und} \\ c_0 &:= \big\{x \in \ell^\infty \ \big|\ \lim_{i\to\infty} x_i = 0\big\}. \end{aligned}$$

Beide Räume versehen wir mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Es gilt: $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$

6) Der Raum ℓ^2 besitzt das Skalarprodukt

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i \quad \text{für } x, y \in \ell^2$$

Lemma 2.13 (Youngsche Ungleichung)**.** Es seien $p, p' \in (1,\infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$ab \le \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p'}\, b^{p'}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \log(ab) = \log(a) + \log(b) &= \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(b^{p'}) \\ &\le \log\Big(\frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p'}\, b^{p'}\Big) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichheit folgt daraus, dass der Logarithmus eine konkave Funktion ist. Da außerdem exp monoton ist, folgt hieraus die Behauptung.

∎

Satz 2.14 (Höldersche Ungleichung auf ℓ^p). Es sei $1 \leq p, p' \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^{p'}$ ist $xy \in \ell^1$ (dabei sei für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Produkt definiert als: $xy \coloneqq (x_n\, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) und es gilt:

$$\|xy\|_{\ell^1} \leq \|x\|_{\ell^p} \cdot \|y\|_{\ell^{p'}}.$$

Beweis. Falls $p = \infty$ setzte $p' = 1$ (und umgekehrt). In diesem Fall ist der Beweis einfach. Sei nun $1 < p < \infty$ und $\|x\|_{\ell^p} > 0, \|y\|_{\ell^{p'}} > 0$. Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) liefert:

$$\frac{|x_k|\;|y_k|}{\|x\|_{\ell^p}\,\|y\|_{\ell^{p'}}} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|x_k|^p}{\|x\|_{\ell^p}^p} + \frac{1}{p'}\,\frac{|y_k|^{p'}}{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}}$$

Die Reihe über die Terme der rechten Seite ist eine konvergente Reihe und damit folgt aus dem Majorantenkriterium, dass $xy \in \ell^1$ erfüllt sein muss.

■

Satz 2.15. Der Raum ℓ^p ist für $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum.

Beweis. Die Vollständigkeit von ℓ^1 ist eine Übungsaufgabe. Für ℓ^p folgt dies ähnlich (vergleiche mit dem späteren Beweis über $L^p(\mu)$.) Die Normeigenschaften abgesehn von der $\triangle$-Ungleichung ergeben sich einfach. Wir zeigen die $\triangle$-Ungleichung für $p \in (1, \infty)$. Es seien also $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\,|x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|\,|x_k+y_k|^{p-1} \\
&\overset{(\star)}{\leq} \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{(p-1)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{(p-1)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= (\|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p})\,(\|x+y\|_{\ell^p}^{p-1})
\end{aligned}$$

Bei $(\star)$ geht die Höldersche Ungleichung ein. Dies zeigt $\|x+y\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}$.

■

2.16 (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen). Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt (also nach Heine-Borel äquivalenterweise kompakt) und Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$, so ist $C^0(K, Y)$ ein Unterraum von $B(K, Y)$. (Vergleiche Aufgabe 1 von Blatt 2.)

Satz: Mit $\|f\|_{C^0} \coloneqq \|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in K}|f(x)|$ wird $C^0(K, Y)$ ein Banachraum.

Beweis. Jedes $f \in C^0(K, Y)$ ist beschränkt, denn: Zu $x \in K$ existiert ein $\delta_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f\big(B_{\delta_x}(x)\big) \subset B_1\big(f(x)\big)$. Da K kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Es folgt:

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_1\big(f(x_i)\big).$$

Die rechte Menge ist beschränkt, also ist auch f beschränkt.

Aufgabe 1 (iv) von Blatt 2 zeigt, dass $B(K,Y)$ ein Banachraum ist. Eine Cauchy-Folge in $C^0(K,Y)$ ist auch eine Cauchy-Folge in $B(K,Y)$. Da $B(K,Y)$ vollständig ist, besitzt jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Sei jetzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^0(K,Y)$ mit Grenzwert f in $B(Y,K)$. Für $x,y \in K$ gilt:

$$\|f(y)-f(x)\| \leq \underbrace{\|f_i(y)-f_i(x)\|}_{\substack{\to 0 \text{ für } y\to x\\ \text{und jedes } i}} + \underbrace{2\|f-f_i\|_\infty}_{\to 0 \text{ für } i\to\infty}$$

Dies beweist $f \in C^0(K,Y)$.

■

2.17 (Räume differenzierbarer Funktionen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} C^m(\overline{\Omega}) \coloneqq \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid\ & f \text{ ist } m\text{-mal stetig diffenzierbar auf } \Omega \text{ und für } s \in \mathbb{N}^n \\ & \text{mit } |s| \leq m \text{ ist } \partial^s f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar } \}. \end{aligned}$$

(Dabei ist s ein Multiindex mit $|s| = s_1 + \cdots + s_n$.)

Satz: Der Raum $C^m(\overline{\Omega})$ ist mit der Norm

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} \coloneqq \sum_{|s|\leq m} \|\partial^s f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$$

ein Banachraum.

Beweis. Wir beweisen die Vollständigkeit von $C^1(\overline{\Omega})$. (Der Fall $m > 1$ folgt induktiv.) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^1(\overline{\Omega})$, so sind $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\partial_i f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $C^0(\overline{\Omega})$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$.

Daher existieren f und g_i in $C^0(\overline{\Omega})$, so dass $f_k \to f$ sowie $\partial_i f_k \to g_i$ gleichmäßig für $k \to \infty$ in $C^0(\overline{\Omega})$. Für $x \in \Omega$ und y nahe x mit $x_t \coloneqq (1-t)x + ty$ folgt aus dem HDI:

$$f_k(x_1) - f_k(x_0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_k(x_t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (y-x)\cdot\nabla f_k(x_t)\,\mathrm{d}t$$

Es folgt (mit $g = (g_1,\dots,g_n)$):

$$\begin{aligned} \|f_k(y) - f_k(x) - (y-x)\cdot\nabla f_k(x)\| &= \left\|\int_0^1 \big((y-x)\cdot\nabla f_k(x_t) - (y-x)\cdot\nabla f_k(x)\big)\,\mathrm{d}t\right\| \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \int_0^1 \|\nabla f_k(x_t) - \nabla f_k(x)\|\,\mathrm{d}t\,\|y-x\| \\ &\leq \Big(2\|\nabla f_k - g\|_\infty + \sup_{t\in[0,1]} \|g(x_t)-g(x)\|\Big)\,\|y-x\| \end{aligned}$$

Für $k \to \infty$ gilt dann:

$$\|f(y) - f(x) - (y-x) \cdot g(x)\| \leq \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq 1} \|g(x_t) - g(x)\|}_{\to 0 \text{ für } y \to x \text{ wegen Stetigkeit von } g} \|y - x\|$$

Dies bedeutet f ist in x diff'bar mit $\nabla f(x) = g(x)$.

∎

2.18 (Vervollständigung)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\tilde{X} \coloneqq \left\{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\right\}$$

zusammen mit der Äquivalenzrelation

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \tilde{X} \;:\Longleftrightarrow\; \big(d(x_j, y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

Führe Metrik auf $\tilde{X}$ ein: für $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ sei

$$\tilde{d}\big((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}\big) \coloneqq \lim_{j \to \infty} d(x_j, y_j).$$

Satz:

i) Dann ist $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ein vollständiger metrischer Raum.

ii) Durch $J(x) \coloneqq (x)_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine injektive Abbildung $J \colon X \to \tilde{X}$ definiert, welche isometrisch ist, d. h. für alle $x, y \in X$ gilt

$$\tilde{d}\big(J(x), J(y)\big) = d(x, y).$$

iii) Es liegt $J(X)$ dicht in $\tilde{X}$.

Beweis. Für $\tilde{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\tilde{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\tilde{X}$ gilt (mithilfe der sog. *Vierecksungleichung*):

$$|d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i)| \leq d(x_j, x_i) + d(y_j, y_i) \to 0 \qquad \text{für } i, j \to \infty.$$

Somit existiert $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{j \to \infty} d(x_j, y_j)$. Für $\tilde{x}^1 = \tilde{x}^2$ und $\tilde{y}^1 = \tilde{y}^2$ in $\tilde{X}$ folgt:

$$|d(x_j^2, y_j^2) - d(x_j^1, y_j^1)| \to 0 \qquad \text{für } i \to \infty.$$

Dies zeigt, dass $\tilde{d}$ wohldefiniert ist. Außerdem gilt:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{x} = \tilde{y},$$

was direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation folgt. Die $\triangle$-Ungleichung und Symmetrie übertragen sich direkt.

Zur Vollständigkeit: Es sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\tilde{X}$, mit $x^k = (x^k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $j_k \in \mathbb{N}$, so dass $d(x^k_i, x^k_j) \leq 1/k$ für alle $i, j \geq j_k$ erfüllt ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
d(x^k_{j_k}, x^\ell_{j_k}) &\leq d(x^k_{j_k}, x^k_j) + d(x^k_j, x^\ell_j) + d(x^\ell_j, x^\ell_{j_\ell}) \\
&\leq \frac{1}{k} + d(x^k_j, x^\ell_j) + \frac{1}{\ell} \qquad \text{für } j \geq j_k, j_\ell \\
&\to \frac{1}{k} + \tilde{d}(x^k, x^\ell) + \frac{1}{\ell} \qquad \text{für } j \to \infty \\
&\to 0 \qquad \text{für } k, \ell \to \infty
\end{aligned}$$

Also ist $x^\infty := (x^\ell_{j_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ in $\tilde{X}$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(x^\ell, x^\infty) \longleftarrow\ & d(x^\ell_k, x^\infty_k) \qquad \text{für } k \to \infty \\
&\leq d(x^\ell_k, x^\ell_{j_\ell}) + d(x^\ell_{j_\ell}, x^k_{j_k}) \\
&\leq \frac{1}{\ell} + d(x^\ell_{j_\ell}, x^k_{j_k}) \qquad \text{für } k \geq j_\ell \\
&\to 0 \qquad \text{für } k, \ell \to \infty
\end{aligned}$$

Es gilt also $x^\ell \to x^\infty$. Da $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in $\tilde{X}$ war, hat also jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Die Aussagen ii) und iii) sind eine einfache Übung.

■

3 Lineare Operatoren

Definition 3.1.

(a) Seien X, Y zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Topologien $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$. Wir definieren

$$L(X,Y) \coloneqq \{T\colon X \to Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Elemente in $L(X,Y)$ heißen *lineare Operatoren von X nach Y*. (Für $T \in L(X,Y)$ und $x \in X$ schreiben wir auch oft Tx statt $T(x)$.)

(b) Der *Dualraum* von X ist

$$X' \coloneqq L(X, \mathbb{K})$$

und Elemente aus X' nennen wir *lineare Funktionale*.

Beispiele 3.2.

1) Gelte $X = C^2(\overline{\Omega})$ und $Y = C^0(\overline{\Omega})$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte dann $T\colon X \to Y$ mit

$$(Tu)(x) \coloneqq -\Delta u(x)$$

für alle $u \in C^2(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$.

2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $K\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig. Sei dann T für alle $u \in C^0(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$ gegeben durch:

$$(Tu)(x) \coloneqq \int_\Omega K(x,y)\, u(y)\, \mathrm{d}y.$$

Lemma 3.3. Seien X, Y normierte Vektorräume und sei $T\colon X \to Y$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) T ist stetig, also $T \in L(X,Y)$.

(2) T ist stetig in x_0 für ein $x_0 \in X$.

(3) Es gilt für die Operatornorm von T:

$$\|T\|_{L(X,Y)} \coloneqq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y < \infty$$

(4) Es existiert ein $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $\|Tx\|_Y \leq C\,\|x\|_X$. (Bemerkung: $C = \|T\|_{L(X,Y)}$ ist die kleinste solche Zahl.)

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): klar.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$T\big(\overline{B_\delta(x_0)}\big) \subset \overline{B_1\big(T(x_0)\big)}$$

erfüllt ist. Für x mit $\|x\|_X \leq 1$ folgt $x_0 + \delta x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ und daraus: $T(x_0+\delta x) \in \overline{B_1\big(T(x_0)\big)}$, d. h. es gilt:

$$\|T(x_0 + \delta x) - T(x_0)\| \leq 1.$$

Wegen der Linearität von T gilt $T(x_0 + \delta x) - T(x_0) = \delta T(x)$, weshalb wir $T(x) \leq 1/\delta$ bekommen.

(3) $\Longrightarrow$ (4): Für $x \neq 0$ gilt $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$. Daraus folgt:

$$\|Tx\| = \left\| \|x\| \, T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T\| \, \|x\|.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1): Für $x, x_0 \in X$ gilt:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq C \, \|x - x_0\|.$$

Also ist T Lipschitz-stetig und somit auch stetig.

$\blacksquare$

Lemma 3.4.

(1) X, Y normierte Räume $\Longrightarrow$ $L(X,Y)$ normiert mit der Operatornorm.

(2) Y Banachraum $\Longrightarrow$ $L(X,Y)$ Banachraum

(3) X Banachraum $\Longrightarrow$ $L(X) \coloneqq L(X,X)$ Banachalgebra

(4) $T \in L(X,Y), S \in L(Y,Z)$ $\Longrightarrow$ $ST \in L(X,Z)$ mit $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$

Beweis. Zu (1): Wir zeigen nur die $\triangle$-Ungleichung (der Rest ist klar). Es gilt

$$\|T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|) \, \|x\|,$$

woraus folgt:

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Zu (2): Es sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X,Y)$. Für alle $x \in X$ ist dann $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y. Setzte

$$Tx \coloneqq \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Da Grenzwertbilden linear ist, ist auch L linear. Wir behaupten, dass $T \in L(X,Y)$ und $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to 0$ gelten.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Sei $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$. Wähle $m_0 = m_0(\varepsilon, x) \geq n_0$ mit

$$\|T_{m_0}x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ folgt nun:

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n x - T_{m_0}x\| + \|T_{m_0}x - Tx\| \leq \|T_n - T_m\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Damit folgen nun aber $\|T\| \leq \infty$ sowie $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Zu (3) und (4): Es gilt:

$$\|STx\| \leq \|S\| \, \|Tx\| \leq \|S\| \, \|T\| \, \|x\|.$$

Also gilt allgemein: $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$.

■

Bemerkung 3.5. Es sei $T \in L(X, Y)$ und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X, Y)$ mit $T_k x \to Tx$ für $k \to \infty$ und für alle $x \in X$. Dann folgt i. A. *nicht* $T_k \to T$ in $L(X, Y)$.

Beispiel: $X = c_0$ (Raum der Nullfolgen, siehe 2.12 (5)) mit der Supremumsnorm, $Y = \mathbb{R}$, $T_k x := x_k$. Dann gilt: $\lim_{k\to\infty} T_k x = \lim_{k\to\infty} x_k = 0 =: Tx$. Offensichtlich gilt $\|T_k x\| = 1$ für $x = e_k$. Außerdem gilt $\|T_k x\| = \|x_k\| \leq 1$ für $\|x\| \leq 1$. D. h. $\|T_k\| = 1$, aber $\|T\| = 0$.

Definition 3.6. Für $T \in L(X, Y)$ definieren wir den *Nullraum (Kern) von* T als

$$N(T) := \{x \in X \mid T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\}).$$

Es ist $N(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(X, Y)$.

Weiter sei

$$R(T) := \{Tx \in Y \mid x \in X\} = T(X)$$

der *Bildraum* (engl.: „range") von T. Es ist $R(T)$ ein linearer Unterraum von Y, i. A. aber nicht abgeschlossen.

Beispiel: $X = C^0([0, 1])$,

$$T\colon X \to X, \quad (Tf)(x) := \int_0^x f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$
$$R(T) = \{g \in C^1([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

Es gilt $T \in L(X, Y)$ aber $R(T)$ ist nicht abgeschlossen in X, denn:

$$\overline{R(T)} = \{g \in C^0([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

(denn stetige Funktionen können durch C^1-Funktionen in der C^0-Norm approximiert werden, siehe später).

Satz 3.7 (Neumannsche Reihe). Sei X ein Banachraum und sei $A \in L(X)$ mit $\|A\| < 1$. Es bezeichne Id den Identitätsoperator. Dann liegt $(\mathrm{Id} - A)^{-1}$ in $L(X)$ und es gilt:

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Beweis. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n := \sum_{k=0}^{n} A^k \qquad \in L(X).$$

Mit $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ folgt:

$$\begin{aligned} \|B_n x - B_m x\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} A^k x \right\| \qquad \text{für } n > m \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|A\|^k \|x\| \to 0 \qquad \text{für } n, m \to \infty \text{ für alle } x \text{ mit gleichmäßig } \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

Also existiert $B \in L(X)$ mit $B = \lim_{n\to\infty} B_n$. Noch zu zeigen: $B(\mathrm{Id} - A) = \mathrm{Id} = (\mathrm{Id} - A)B$. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} A^k (\mathrm{Id} - A) = \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \mathrm{Id} - A^{n+1} \to \mathrm{Id} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Also:

$$B(\mathrm{Id} - A) = \lim_{n\to\infty} B_n (\mathrm{Id} - A) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id} - A^{n+1}) = \mathrm{Id}$$

■

3.8 (Invertierbarere Operatoren). Seien X, Y Banachräume. Wir sagen $T \in L(X, Y)$ ist invertierbar, falls T bijektiv ist und $T^{-1} \in L(X, Y)$ gilt.

Satz: :

i) Die Teilmenge $\{T \in L(X, Y) \mid T \text{ invertierbar}\}$ ist offen in $L(X, Y)$.

ii) Es gilt genauer für $T, S \in L(X, Y)$ mit invertierbarem T:

$$\|S\| < \left\|T^{-1}\right\|^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad T - S \text{ invertierbar}$$

Beweis. Es gilt:

$$T - S = T\,(\mathrm{Id}_X - \underbrace{T^{-1}S}_{\in L(X)}).$$

Also folgt mit $\|S\| < \left\|T^{-1}\right\|^{-1}$:

$$\left\|T^{-1}S\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|S\| < 1.$$

Mithilfe der Neumannschen Reihe (Satz 3.7) erhalten wir:

$$(\operatorname{Id} - T^{-1}S) \text{ ist invertierbar.}$$

Also ist auch $T - S$ invertierbar

$\blacksquare$

4 Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen

Problem: Setzte ein Funktional stetig von einem Unterraum auf den gesamten Raum fort.

Bisher wissen wir nicht, ob auf jedem normierten Vektorraum ein (nicht-triviales) stetiges lineares Funktional existiert. Da wir im Folgenden grundlegend das *Zorn'sche Lemma* verwenden, wiederholen kurz dir Voraussetzungen dafür.

Definition 4.1.

i) Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $H \subset M \times M$ definiert eine *Halbordnung* (wir sagen $a \leq b$, falls $(a, b) \in H$ erfüllt ist), wenn für alle $a, b \in M$ gilt:

   a) $a \leq a$

   b) $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

   c) $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$

ii) Eine Teilmenge $K \subset M$ heißt *Kette* (oder *total geordnete Teilmenge*), falls für alle $a, b \in K$ entweder $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

iii) Eine *obere Schranke* einer Teilmenge $K \subset M$ ist ein Element $s \in M$ mit $a \leq s$ für alle $a \in K$. (Achtung: s muss *nicht* in K liegen!)

iv) Wir sagen M ist *induktiv geordnet*, falls jede Kette in M eine obere Schranke besitzt.

v) Ein $m \in K$ heißt *maximales Element von K*, wenn für alle $a \in K$ aus $a \geq m$ schon $a = m$ folgt.

4.2 (Zorn'sches Lemma)**.** Jede induktiv geordnete Menge besitzt (mindestens) ein maximales Element.

Bemerkung: Das Zorn'sche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Satz 4.3 (Satz von Hahn-Banach)**.** Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $Y \subset X$ ein Unterraum. Weiter gelte:

(1) $p \colon X \to \mathbb{R}$ ist sublinear, d. h. für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{und} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

(2) $f\colon Y \to \mathbb{R}$ ist linear.

(3) $f \le p$ auf Y.

Dann existiert eine lineare Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $f \le p$ auf X.

Beweis. Nutze das Zorn'sche Lemma (4.2). Es sei

$$M := \big\{(Z, g) \;\big|\; Y \subset Z \subset X,\ Z \text{ ist Unterraum}, \\ g\colon Z \to \mathbb{R} \text{ ist linear},\ g = f \text{ auf } Y,\ g \le p \text{ auf } Z\,\big\}.$$

Wir definieren eine Halbordnung auf dieser Menge folgendermaßen:

$$(Z_1, g_1) \le (Z_2, g_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad Z_1 \subset Z_2 \wedge g_2|_{Z_1} = g_1.$$

Es ist zunächst zu zeigen, dass es überhaupt ein F gibt, so dass $(X, F) \in M$ gilt. Hierzu brauchen wir folgende Konstruktion:

Sei $(Z, g) \in M, z_0 \in X \setminus Z$. Definiere dann $Z_0 := Z \oplus \operatorname{span}\{z_0\}$. Das Ziel ist es nun, g auf Z_0 fortzusetzen. Ansatz:

$$g_0(z + \alpha z_0) = g(z) + \alpha c$$

für $z \in Z, \alpha \in \mathbb{R}$. Gesucht ist nun ein geeinetes $c \in \mathbb{R}$.

Es muss für alle $z \in Z$ gelten:

$$g(z) + \alpha c \le p(z + \alpha z_0).$$

Für $\alpha = 0$ ist dies klar. Für $\alpha > 0$ haben wir:

$$c \le \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = p\left(\frac{z}{\alpha} + z_0\right) - g\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

und für $\alpha < 0$:

$$c \ge \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = -p\left(-\frac{z}{\alpha} - z_0\right) + g\left(-\frac{z}{\alpha}\right).$$

Gesucht ist nun ein c, so dass

$$\sup_{z' \in Z} \big(g(z') - p(z' - z_0)\big) \le c \le \inf_{z \in Z} \left(p(z + z_0) - g(z)\right) \tag{$\star$}$$

erfüllt ist.

Es gilt für alle $z', z \in Z$:

$$g(z + z') \le p(z + z') = p(z + z_0 + z' - z_0) \le p(z + z_0) + p(z' - z_0).$$

Daraus folgt für alle $z', z \in Z$:

$$g(z') - p(z' - z_0) \le p(z + z_0) - g(z),$$

was wiederum bedeutet, dass wir für c einfach den Wert des Supremums in ($\star$) nehmen können. Somit existiert also ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $(Z_0, g_0) \in M$ gilt. Sei nun $N \subset M$ eine Kette. Definiere dann

$$Z_0 \coloneqq \bigcup_{(Z,g)\in N} Z$$

und

$$g_0 \colon Z_0 \to \mathbb{R}, \quad z_0 \mapsto g(z_0) \text{ falls } z_0 \in Z \text{ mit } (Z, g) \in N.$$

Da N eine Kette ist, ist g_0 tatsächlich wohldefiniert. Es folgt also $(Z_0, g_0) \in M$ und für alle $(Z, g) \in N$ gilt $(Z, g) \leq (Z_0, g_0)$.

Das Zorn'sche Lemma liefert nun: Es existiert ein maximales Element $(Z, g) \in M$. Dann muss schon $Z = X$ gelten, denn: Falls $z_0 \in X \setminus Z$ existiert, konstruiere eine Fortsetzung von g auf $Z \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$ wie oben. Dies liefert einen Widerspruch zur Maximalität von (Z, g). Damit ist der Satz gezeigt.

■

Wir wollen nun den Satz von Hahn-Banach auf den komplexen Fall verallgemeinern. Die Frage ist, wie wir „$f \leq p$“ auf $\mathbb{C}$ umgehen. Dazu betrachten wir die Realteilfunktion $\operatorname{Re} f$ von f.

Lemma 4.4. Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(a) Sei $\ell \colon X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional, d. h.

$$\ell(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \ell(x_1) + \lambda_2 \ell(x_2)$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ x_1, x_2 \in X$. Setzten wir

$$\tilde{\ell}(x) \coloneqq f(x) - i\,\ell(ix),$$

so ist $\tilde{\ell} \colon X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $\ell = \operatorname{Re} \tilde{\ell}$.

(b) Ist $h \colon X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, $\ell = \operatorname{Re} h$ und $\tilde{\ell}$ wie in (a), so ist ℓ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $\tilde{\ell} = h$.

(c) Ist $p \colon X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm (es gelten die Normaxiome bis auf $p(x) = 0 \implies x = 0$) und ist $\ell \colon X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, so gilt:

$$\Big(\forall\, x \in X\colon\ |\ell(x)| \leq p(x)\Big) \iff \Big(\forall\, x \in X\colon\ |\operatorname{Re} \ell(x)| \leq p(x)\Big).$$

(d) Ist X ein normierter Vektorraum und ist $\ell \colon X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung und stetig, so ist $\|\ell\| = \|\operatorname{Re} \ell\|$.

Bemerkung: $\ell \mapsto \operatorname{Re} \ell$ ist also eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{C}$-linearen und den $\mathbb{R}$-linearen, $\mathbb{R}$-wertigen Abbildungen. Im normierten Fall ist die Abbildung sogar eine Isometrie.

Beweis.

(a) Da $x \mapsto ix$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, folgt: $\tilde{\ell}$ ist $\mathbb{R}$-linear. Die Gleichheit $\operatorname{Re}\tilde{\ell} = \ell$ gilt nach Konstruktion. Außerdem gilt:

$$\tilde{\ell}(ix) = \ell(ix) - i\,\ell(i^2x) = \ell(ix) - i\,\ell(-x) = i\,\big(\ell(x) - i\ell(ix)\big) = i\,\tilde{\ell}(x).$$

(b) Natürlich ist $\ell = \operatorname{Re} h$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \operatorname{Re} h(x) + i \operatorname{Im} h(x) = \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re}\big(ih(x)\big) \\ &= \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re} h(ix) = \ell(x) - i\,\ell(ix) = \tilde{\ell}(x) \end{aligned}$$

(c) Wegen $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt die Hinrichtung. Die Rückrichtung ergibt sich wie folgt: Schreibe $\ell(x) = \lambda\,|\ell(x)|$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$|\ell(x)| = \lambda^{-1}\ell(x) = \ell(\lambda^{-1}x) = |\operatorname{Re}\ell(\lambda^{-1}x)| \leq p(\lambda^{-1}x) = p(x).$$

(d) folgt sofort aus (c).

■

Satz 4.5. Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Weiter sei $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear und $\ell\colon U \to \mathbb{C}$ linear mit $\operatorname{Re}\ell(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L\colon X \to \mathbb{C}$ mit $L|_U = \ell$ und $\operatorname{Re} L(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Wende den Satz von Hahn-Banach (4.3) auf das $\mathbb{R}$-lineare Funktional $\operatorname{Re}\ell\colon U \to \mathbb{R}$ an und erhalte eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $F\colon X \to \mathbb{R}$ mit $F|_U = \operatorname{Re}\ell$ und $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Nach Lemma 4.4 ist $F = \operatorname{Re} L$ für ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional $L\colon X \to \mathbb{C}$. Dann ist L eine geeignete Fortsetzung.

■

Satz 4.6. Sei X ein normierter Vektorraum und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Zu jedem stetigen linearen Funktional $u'\colon U \to \mathbb{K}$ existiert ein lineares Funktional $x'\colon X \to \mathbb{K}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|x'\| = \|u'\|$.

Beweis. Sei X zunächst ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Definiere für alle $x \in X$

$$p(x) := \big\|u'\big\|\,\|x\|,$$

womit $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear ist. Der Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) liefert: Es existiert eine lineare Abbildung $x'\colon X \to \mathbb{R}$ mit $x'|_U = u'$ und $x'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Da auch $x'(-x) \leq p(-x) = p(x)$ gilt, folgt

$$\big|x'(x)\big| \leq \big\|u'\big\|\,\|x\| \quad \text{also} \quad \big\|x'\big\| \leq \big\|u'\big\|.$$

Umgekehrt gilt:

$$\|u'\| = \sup_{\substack{u\in U\\ \|u\|\le 1}} |u'(u)| = \sup_{\substack{u\in U\\ \|u\|\le 1}} |x'(u)| \le \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}} |x'(x)| = \|x'\|.$$

Sei X nun ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wir erhalten wie in Satz 4.5 ein lineares Funktional $x'\colon X \to \mathbb{C}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|\operatorname{Re} x'\| = \|u'\|$. Lemma 4.4 (d) liefert dann wie gewünscht $\|\operatorname{Re} x'\| = \|x'\|$. ■

Bemerkung 4.7.

i) Die Fortsetzung im Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) und seinen Folgerungen sind im Allgemeinen *nicht* eindeutig.

ii) Für Operatoren (lineare Abbildungen von X nach Y) ist die Aussage in Satz 4.6 im Allgemeinen falsch.

   Beispiel: Es gibt keinen stetigen linearen Operator $T\colon \ell^\infty \to c_0$, der die Identität $\mathrm{Id}\colon c_0 \to c_0$ fortsetzt.

iii) Es gibt eine eindeutige stetige Fortsetzung, falls der Unterraum U dicht in X liegt.

Definition 4.8. Eine *affine Hyperebene* in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X ist eine Teilmenge $H \subset X$ der Form

$$H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$$

für eine (nicht-trivale) lineare Abbildung $f\colon X \to \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Wir schreiben auch kurz: $H = \{f = \alpha\}$.

Satz 4.9. Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ linear und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn f stetig ist.

Beweis. Es ist klar, dass H abgeschlossen ist, wenn f stetig ist, denn es gilt $f^{-1}(\{\alpha\}) = H$ und $\{\alpha\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Für die Rückrichtung sei H abgeschlossen in X. Dann ist H^c offen und nicht leer. Jetzt sei $x_0 \in H^\mathsf{c}$ mit $f(x_0) \neq \alpha$, o. E. $f(x_0) < \alpha$. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\} \subset H^\mathsf{c}$. (Abbildung 4.2)

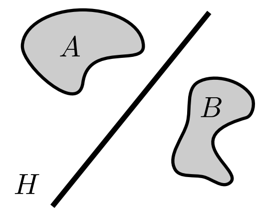


Abbildung 4.1: Zwei Teilmengen A und B eines Vektorraums, getrennt durch eine Hyperebene H (hier eine Gerade im $\mathbb{R}^2$)

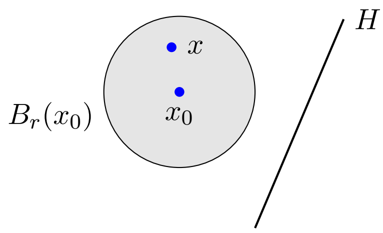


Abbildung 4.2: Hyperebene H und Ball $B_r(x_0)$ um x_0 mit $x \in B_r(x_0)$

Wir behaupten nun, dass dann schon für alle $x \in B_r(x_0)$ die Ungleichung

$$f(x) < \alpha \tag{$*$}$$

gilt. Angenommen dies gilt nicht und es existiert ein $x_1 \in B_r(x_0)$, so dass $f(x_1) > \alpha$ gilt. Das Segment

$$[x_0, x_1] \coloneqq \{x_t \coloneqq (1-t)\, x_0 + t x_1 \mid t \in [0,1]\}$$

ist in $B_r(x_0)$ enthalten (da Bälle in normierten Räumen konvex sind). Somit folgt für alle $t \in [0,1]$:

$$f(x_t) \neq \alpha.$$

Andererseits gilt offenbar

$$f(x_t) = \alpha \quad \text{für} \quad t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Dies ist ein Widerspruch, also muss doch schon $(*)$ gelten. Wir erhalten, dass für alle $z \in B_1(0)$

$$f(\underbrace{x_0 + rz}_{\in B_r(x_0)}) < \alpha$$

gilt, woraus sofort

$$f(z) < \frac{1}{r}\big(\alpha - f(x_0)\big)$$

folgt. Nutze diese Ungleichung für z und $-z$ aus $B_1(0)$, um Folgendes für alle $z \in B_1(0)$ zu erhalten:

$$|f(z)| < \frac{1}{r}\big(\alpha - f(x_0)\big).$$

Insgesamt folgt:

$$\|f\| = \sup_{z \in B_1(0)} |f(z)| \leq \frac{1}{r}\big(\alpha - f(x_0)\big).$$

$\blacksquare$

Definition 4.10. Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen von X. Die Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ *trennt die Mengen A und B*, falls für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha \qquad \text{und} \qquad f(b) \geq \alpha$$

gelten.

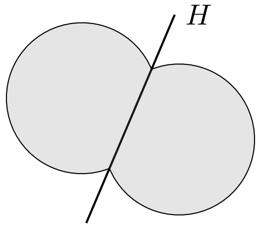


Abbildung 4.3: Zwei *nicht* strikt durch H getrennte Mengen; die Mengen aus Abbildung 4.1 sind hingegen strikt durch H getrennt

Die Hyperebene H *trennt A und B strikt*, falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon \qquad \text{und} \qquad f(b) \geq \alpha + \varepsilon$$

gelten.

Bemerkung 4.11.

i) Geometrisch sagt solch eine Trennung aus, dass A auf der einen Seite von H liegt und B auf der anderen Seite. (Siehe Abbildung 4.1 und Abbildung 4.3.)

ii) Ist X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, so sagen wir, dass A und B durch eine *reelle Hyperebene* getrennt werden, $f\colon X \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Re} f(b) \geq \alpha$$

gelten.

iii) Wir nennen $A \subset X$ konvex, falls für alle $x, y \in A$ auch

$$[x, y] = \{(1-t)\,x + ty \mid t \in [0,1]\} \subset A$$

gilt.

Definition: Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $K \subset X$. Dann ist das *Minkowski-Funktional zu K* definiert durch

$$p(x) := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha}\, x \in K \right\}.$$

Für $K = B_1(0)$ gilt gerade $p(x) = \|x\|$.

Lemma 4.12. Es sei K konvex, offen und $0 \in K$. Dann gilt:

i) Das Minkowski-Funktional p zu K ist sublinear.

ii) Es existiert ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$0 \leq p(x) \leq M \, \|x\|.$$

iii) Zwischen K und p besteht folgender Zusammenhang:

$$K = \{x \in X \mid p(x) < 1\}.$$

Beweis.

i) Seien $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in X$. Dann gilt $p(\lambda x) = \lambda\, p(x)$, denn:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha}\, \lambda x \in K \right\} = \inf \left\{ \alpha' \lambda \;\middle|\; \frac{1}{\alpha' \lambda}\, \lambda x \in K \right\} \\ &= \lambda \inf \left\{ \alpha' \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha'}\, x \in K \right\} = \lambda\, p(x) \end{aligned}$$

Die $\triangle$-Ungleichung zeigen wir später.

ii) Es sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $B_r(0) \subset K$ gilt. Es gilt dann für alle $x \in X$:

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\, \|x\|,$$

denn:

$$\begin{aligned} p(x) &= \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha}\, x \in K \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha}\, x \in B_r(0) \right\} \\ &= \frac{1}{r}\, \|x\| \end{aligned}$$

iii) Es sei $x \in K$. Da K offen ist, folgt $(1 + \varepsilon)\, x \in K$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ klein genug. Dann gilt:

$$p(x) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1.$$

Falls $p(x) < 1$ gilt, muss ein $\alpha \in (0, 1)$ geben, so dass $x/\alpha \in K$ erfüllt ist. Damit gilt:

$$x = \alpha \left(\frac{x}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) \cdot 0 \in K,$$

denn K ist nach Voraussetzung konvex.

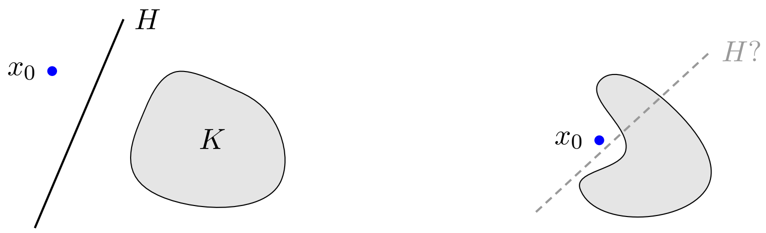


Abbildung 4.4: Links eine konvexe Menge K, getrennt von $\{x_0\}$ durch H; rechts eine nicht konvexe Menge, so dass diese und x_0 nicht durch eine Hyperebene H getrennt werden können

i) Es bleibt die $\triangle$-Ungleichung zu zeigen. Seien $x, y \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Aus dem bisher Gezeigten folgt:

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \; \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in K.$$

Damit gilt also für alle $t \in [0,1]$:

$$\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)\,y}{p(y)+\varepsilon} \in K.$$

Wähle nun $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, dann erhalten wir

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in K \quad \text{und mit (iii) folgt} \quad p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\right) < 1.$$

Es folgt:

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig war, folgt die Behauptung.

■

Lemma 4.13. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $K \subset X$ nicht-leer, offen und konvex. Sei weiter $x_0 \in K^{\mathsf{c}}$. Dann existiert ein $x' \in X'$, so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x_0).$$

Insbesondere trennt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die reelle Hyperebene $\{\operatorname{Re} x' = \operatorname{Re} x'(x_0)\}$ somit $\{x_0\}$ und K.

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung können wir $0 \in K$ annehmen. Sei p das Minkowski-Funktional zu K. Sei weiter $U := \operatorname{span}\{x_0\}$ und $g \colon U \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(tx_0) := t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in U$:

$$g(x) \leq p(x)$$

und für x_0 haben wir $g(x_0) = 1 \leq p(x_0)$, da x_0 nicht in K liegt. (Achtung: tx_0 mit $t < 0$ ist kein Problem, da $g(tx_0) < 0$.)

Wende nun Hahn-Banach (Satz 4.3) an, womit wir ein $x'\colon X \to \mathbb{R}$ erhalten, mit $x'(x) \le p(x)$ für alle $x \in X$ und außerdem $x'|_U = g$. Insbesondere gilt also $x'(x_0) = 1$. Außerdem ist x' stetig (vgl. Lemma 4.12 (ii)). Mit Lemma 4.12 (iii) erhalten wir: für alle $x \in K$ gilt

$$x'(x) < 1.$$

Der komplexe Fall (also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) folgt aus dem Obigen und Lemma 4.4.

■

Satz 4.14 (Satz von Hahn-Banach (erste geometrische Formulierung))**.** Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und disjunkt. Außerdem sei A offen. Dann existiert $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bemerkung: Ist X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so trennt die abgeschlossene Hyperebene $\{x' = \alpha\}$ mit

$$\alpha \in \big[\sup_{a\in A} x'(a), \inf_{b\in B} x'(b)\big]$$

die Mengen A und B.

Beweis. Es sei $C := A - B := \{a - b \mid a \in A,\, b \in B\}$. Dann ist C konvex (leichte Rechnung) und offen, denn:

$$C = \bigcup_{b\in B} \underbrace{(A - \{b\})}_{\text{offen}}.$$

Da A und B disjunkt sind, liegt 0 nicht in C. Aus Lemma 4.13 folgt die Existenz eines $x' \in X'$, welches für alle $x \in C$ die Ungleichung

$$\operatorname{Re} x'(x) < 0 = \operatorname{Re} x'(0)$$

erfüllt. Das heißt, es gilt für alle $a \in A$ und $b \in b$

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < 0 \quad \text{oder äquivalent} \quad \operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b).$$

■

Satz 4.15 (Satz von Hahn-Banach (zweite geometrische Formulierung))**.** Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und disjunkt. Weiter sei A abgeschlossen und B kompakt. Dann exisistiert ein $x' \in X'$ sowie ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $a \in A$ und $b \in B$ die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \le \alpha \le \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon$$

gelten.

Beweis. Es sei $C := A - B$ wie bei Satz 4.14. Damit ist C konvex und abgeschlossen (siehe unten) und es gilt $0 \notin C$. Damit existiert ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(0) \cap C = \emptyset$ gilt. Satz 4.14 liefert: Es existiert ein $x' \in X'$ mit $x' \not\equiv 0$, so dass für alle $a \in A$, $b \in B$ und $z \in B_1(0)$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < \operatorname{Re} x'(rz).$$

Also gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$:

$$\operatorname{Re} x'(a-b) \leq -r\,\|x'\|.$$

Für $\varepsilon r\|x'\|/2 > 0$ ergibt sich, dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon.$$

Wähle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\sup_{a \in A} \big(x'(a) + \varepsilon\big) \leq \alpha \leq \sup_{b \in B} \big(x'(b) - \varepsilon\big)$$

erfüllt ist. Noch zu zeigen: C ist abgeschlossen. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in C mit Grenzwert $c \in X$. Da B kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $b_{n_k} \to b \in B$ für $k \to \infty$. Damit ergibt sich:

$$a_{n_k} = c_{n_k} + b_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} c + b.$$

Da A abgeschlossen ist, folgt $c + b \in A$ und damit $c = (c+b) - b \in A - B = C$.

■

Im Allgemeinen lassen sich konvexe Mengen mit $A \cap B = \emptyset$ nicht trennen. Es gibt Beispiele mit A, B zusätzlich abgeschlossen, in denen Trennungen nicht möglich ist. (Siehe Übungen.)

Korollar 4.16. Sei X ein normierter Vektorraum und $U \subsetneq X$ ein Unterraum. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit $x' \neq 0$ und $x'(U) = \{0\}$.

Beweis. Es sei $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin \overline{U}$. Wende Satz 4.15 auf $A = \overline{U}$ und $B = \{x_0\}$ an. Wir erhalten somit ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < \alpha < \operatorname{Re} x'(x_0)$ für alle $x \in \overline{U}$. Es folgt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \overline{U}$:

$$\operatorname{Re} x'(\lambda x) < \alpha.$$

Also muss schon $\operatorname{Re} x'(x) = 0$ für alle $x \in \overline{U}$ gelten. Wegen $\operatorname{Re} x'(x_0) > \operatorname{Re} x'(x) = 0$ für alle $x \in U$ ist außerdem $x' \neq 0$.

■

Bemerkung 4.17. Korollar 4.16 wird genutzt, um zu zeigen, dass ein Unterraum U dicht in einem umgebenden Raum X liegt. Kann man zeigen, dass für alle $x' \in X'$ aus $x'|_U = 0$ schon $x' = 0$ folgt, so ergibt sich $\overline{U} = X$.

Definition 4.18. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und X' der Dualraum zu X (Definition 3.1 (b)). Dann ist $X'' := (X')'$ der *Bidualraum von X*.

Wir können auf kanonische Weise eine Abbildung $J_X \colon X \to X''$ wie folgt definieren:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} X' \to \mathbb{K} \\ x' \mapsto x'(x) \end{pmatrix}.$$

Dann ist J_X linear und stetig, denn es gilt für alle $x' \in X'$ und alle $x \in X$ die Ungleichung $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$ und damit für alle $x \in X$:

$$\|J_X(x)\| \leq \|x\|. \tag{$*$}$$

Es gilt sogar $\|x\| = \sup_{x' \in X'} |x'(x)|$ für alle $x \in X$.

Sei $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Setze dann das Funktional

$$u' \colon \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto \lambda \, \|x_0\| \quad \text{falls } \lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } x = \lambda x_0$$

normgleich auf X fort. Es gilt dann $\|x'\| = \|u'\| = 1$ und $x'(x) = \|x\|$. Damit ist in $(*)$ sogar Gleichheit gezeigt. Insgesamt folgt:

Satz 4.19. Die Abbildung J_X ist eine (im Allgemeinen nicht surjektive) lineare Isometrie, d. h. für alle $x \in X$ gilt $\|J_X(x)\|_{X''} = \|x\|_X$. (Insbesondere ist J_X als Isometrie stets injektiv.)

Definition 4.20. Ein Banachraum X ist *reflexiv*, wenn J_X surjektiv (also bijektiv) ist.

Bemerkung: Da J_X injektiv ist, kann X mit einem Unterraum von X'' identifiziert werden.

Definition 4.21. Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ ein Unterraum. Wir definieren dann

$$M^\perp := \big\{x' \in X' \mid x'(M) = \{0\}\big\}.$$

Sei $N \subset X'$ ein Unterraum. Dann sei

$$N^\perp := \big\{x \in X \mid \forall\, x' \in N \colon\ x'(x) = 0\big\}.$$

Bemerkung 4.22.

i) Es ist $N^\perp$ eine Teilmenge von X und *nicht* von X''.

ii) Es sind $M^\perp$ und $N^\perp$ abgeschlossene Unterräume.

Satz 4.23. Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ ein Unterraum. Dann gilt

$$\big(M^\perp\big)^\perp = \overline{M}.$$

Sei außerdem $N \subset X'$ ein Unterraum. Dann gilt

$$\big(N^\perp\big)^\perp \supset \overline{N}.$$

(Im Allgemeinen ist diese Inklusion echt.)

Definition 4.24.

i) Es sei E eine Menge und $\varphi \colon E \to (-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung. Wir definieren dann

$$D(\varphi) := \{x \in E \mid \varphi(x) < \infty\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}).$$

ii) Der *Epigraph von* φ ist die Menge

$$\operatorname{epi}(\varphi) \coloneqq \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq \lambda\}.$$

Definition 4.25. Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Abbildung $\varphi\colon E \to (-\infty, \infty]$ ist *unterhalbstetig*, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{\varphi \leq \lambda\} \coloneqq \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \lambda\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \lambda}) \subset E$$

abgeschlossen ist.

Lemma 4.26. Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\varphi\colon E \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Es ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn $\operatorname{epi}(\varphi)$ abgeschlossen in $E \times \mathbb{R}$ (mit der Produkttopologie) ist.

(ii) Es ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn für alle $x \in E$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Umgebung V von x existiert, so dass für alle $y \in V$ gilt: $\varphi(y) \geq \varphi(x) \cdot \varepsilon$.

(iii) Ist φ unterhalbstetig, so gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E$:

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Falls E ein metrischer Raum ist, so gilt auch die Umkehrung.

(iv) Ist $\tilde{\varphi}\colon E \to (-\infty, \infty]$ eine weitere unterhalbstetige Abbildung, so ist auch $\varphi + \tilde{\varphi}$ unterhalbstetig.

(v) Ist $(\varphi_i)_{i\in I}$ eine Familie unterhalbstetiger Abbildungen $E \to (-\infty, \infty]$ mit

$$\varphi(x) = \sup_{i\in I} \varphi_i(x)$$

für alle $x \in E$, so ist auch φ unterhalbstetig.

(vi) Ist E kompakt und φ unterhalbstetig, so existiert ein $x_0 \in E$ mit $\varphi(x_0) = \inf_{x\in E} \varphi(x)$.

Beweis. Siehe Übungen für Teile der Aussagen. Wir beweisen hier nur (vi):

Sei also E kompakt und φ unterhalbstetig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E, für welche $\big(\varphi(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\inf_{x\in E} \varphi(x)$ konvergiert. Weil E kompakt ist, existiert dann eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und wir definieren $x_0 \coloneqq \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Aus (iii) folgt dann:

$$\varphi(x_0) \leq \inf_{x\in E} \varphi(x) \leq \varphi(x_0).$$

■

Definition 4.27. Sei X ein Vektorraum. Eine Funktion $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ ist *konvex*, wenn φ für alle $x, y \in X$ und alle $t \in [0,1]$ die Ungleichung

$$\varphi\big(tx + (1-t)\,y\big) \ \le \ t\,\varphi(x) + (1-t)\,\varphi(y)$$

erfüllt.

Lemma 4.28. Sei X ein Vektorraum.

i) Es ist $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ genau dann konvex, wenn $\operatorname{epi}(\varphi)$ eine konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$ ist.

ii) Ist $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ konvex, so ist die Menge $\{\varphi \le \lambda\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ konvex. (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.)

iii) Sind $\varphi_1, \varphi_2\colon X \to (-\infty, \infty]$ konvex, so auch $\varphi_1 + \varphi_2$.

iv) Ist $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine Familie konvexer Abbildungen $X \to (-\infty, \infty]$, so ist auch

$$\sup_{i \in I} \varphi_i \coloneqq \big(x \mapsto \sup_{i \in I} \varphi_i(x)\big)$$

konvex.

Ab jetzt betrachten wir vornehmlich normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Definition 4.29. Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ eine Funktion mit $D(\varphi) \neq \emptyset$ (d. h. φ ist nicht konstant ∞). Dann ist die *Legendre-Transformation* (oder *konjugierte Funktion*) von φ die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^*\colon X' &\to (-\infty, \infty] \\ f &\mapsto \sup_{x \in X} \big(f(x) - \varphi(x)\big). \end{aligned}$$

Bemerkung 4.30.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Ist $f \in (\mathbb{R}^n)'$, so gibt es genau einen Vektor $y_f \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = x \cdot y \coloneqq \langle x, y \rangle_{\text{eukl}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir identifizieren dann $(\mathbb{R}^n)'$ mit $\mathbb{R}^n$ vermöge

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)' &\longleftrightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\longmapsto y_f \\ (x \mapsto x \cdot y) &\longleftarrow\!\shortmid \ y\,, \end{aligned}$$

und somit gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(x \cdot y - \varphi(x)\big).$$

(ii) Es ist φ^* stets konvex und unterhalbstetig. Dies folgt daraus, dass wir das Supremum betrachten und dass $f \mapsto f(x) - \varphi(x)$ konvex und stetig ist (da affin linear).

(iii) Es gilt für alle $x \in X$ und alle $f \in X'$ die Ungleichung

$$f(x) \leq \varphi(x) + \varphi^*(f),$$

was direkt aus der Definiton von φ^* folgt.

(iv) Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) ist ein Spezialfall von (iii). Seien $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und setze $\varphi(x) := \frac{1}{p} |x|^p$. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\varphi^*(y) = \frac{1}{p'} |y|^{p'}.$$

(Siehe Übungen.)

Theorem 4.31. Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ konkav und unterhalbstetig mit $D(\varphi) \neq \emptyset$. Dann gilt $D(\varphi^*) \neq \emptyset$ und φ ist durch eine affin lineare Funktion beschränkt.

Beweis. Sei $x_0 \in D(\varphi)$ und sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 < \varphi(x_0)$. Wende nun die zweite geometrische Form des Satzes von Hahn-Banach (4.15) auf den Raum $X \times \mathbb{R}$, die abgeschlossene Menge $A := \operatorname{epi}(\varphi)$ und die kompakte Menge $B := \{(x_0, \lambda_0)\}$ an. Die abgeschlossene Hyperebene $H = \{\Phi = \alpha\}$ in $X \times \mathbb{R}$ trennt A und B.

(to be continued . . .)