Universität Regensburg WS 2013/14

Vorlesungsmitschrift

# Funktionalanalysis

Prof. Dr. Harald Garcke

Version vom 17. Oktober 2013

Gesetzt in LaTeX von Johannes Prem

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?

Zum Beispiel von der *Analysis auf Banachräumen* (vollständigen normierten Vektorräumen)

**1.1.** Auf $\mathbb{R}^n$ definiere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\colon \quad \|x\|_2 \coloneqq |x| = \Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

**1.2** (Funktionen auf kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$)**.**
Zum Beispiel: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, z. B. $K = [0,1]$.

$$C^0(K) \coloneqq \{f \mid f\colon K \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird Banachraum mit der Norm:

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in K} |f(x)| \; < \infty$$

**1.3** (Operatoren auf $C^0([0,1])$)**.**
Definiere

$$L\big(C^0([0,1]),\, C^0([0,1])\big) \coloneqq \big\{T\colon C^0([0,1]) \to C^0([0,1]) \;\big|\; T \text{ ist linear und stetig}\big\}$$

Beispiele:

$$(Tf)(x) \coloneqq g(x)\, f(x) \qquad \text{wobei } g \in C^0([0,1])$$

$$(Tf)(x) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x) \qquad \text{wobei } 0 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le 1$$

$$L_i\colon \text{ Lagrange-Basis-Fkt.:} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$(Tf)(x) \coloneqq \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y \qquad \text{wobei } K \in C^0\left([0,1]^2\right)$$

Bemerkung: $L\big(C^0([0,1]),\, C^0([0,1])\big)$ wird zu einem Banachraum mit der Operatornorm

$$\|T\|_{L(C^0,C^0)} \coloneqq \sup_{f\neq 0} \frac{\|Tf\|_{C^0}}{\|f\|_{C^0}}$$

**1.4.** Welche Besonderheiten ergeben sich in unendlich-dimensionalen Räumen?

(1) Problem in $\infty$-dimensionalen Vektorräumen: Wenig sinnvolle Aussagen ohne Topologie möglich

(2) Für $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear gilt:

$$T \text{ surjektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ injektiv}$$

Im $\infty$-dim. ist dies i. A. falsch.
Beispiel:

$$C_* := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_k \in \mathbb{R},\ \exists\, \bar{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, \ell > \bar{k}\colon\ x_\ell = 0 \right\}$$

$C_*$ modelliert „Folgen, die irgendwann abbrechen“. Außerdem enthält $C_*$ den $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß.

Definiere die sog. *Shift-Abbildung* wie folgt:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Dann ist $T$ injektiv, aber nicht surjektiv.

(3) Grundproblem der linearen Algebra: Finde Normalformen für lineare Abbildungen.
Ziel: Verallgemeinerung auf $\infty$-dim. Räume.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Diagonalisierbarkeit}\\ \text{symmetrischer Matrizen}\end{array}\right\} \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Spektralsatz für}\\ \text{kompakte, normale Operatoren}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Jordansche}\\ \text{Normalform}\end{array}\right\} \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Spektralsatz für}\\ \text{kompakte Operatoren}\end{array}\right.$$

(4) Kompaktheit
In $\infty$-dim. Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel *nicht* kompakt.
Beispiel $C_*$: Nutze die Norm

$$\|x\|_{C_*} := \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

und die Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (wobei die 1 an der $i$-ten Stelle steht). Dann gilt:

$$\|e_i\|_{C_*} = 1 \qquad \text{und} \qquad \|e_i - e_k\|_{C_*} = 1 \text{ für } i \neq k$$

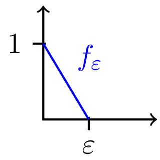
Also hat $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine* konvergente Teilfolge, woraus folgt, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist.

(5) Nicht alle Normen sind zueinander äquivalent.
Beispiel: Betrachte auf $C^0([0,1])$ die Normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x}$$

Es gilt $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty$. Aber: Es gibt keine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $f \in C^0([0,1])$ gilt: $\|f\|_\infty \leq c\,\|f\|_{L^2}$. Betrachte dazu:




Es gilt: $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1,\ \|f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Außerdem gilt:

$\big(C^0([0,1]),\ \|\cdot\|_\infty\big)$ ist Banachraum
$\big(C^0([0,1]),\ \|\cdot\|_{L^2}\big)$ ist normierter Vektorraum (aber nicht vollständig)

Funktionalanalysis lässt sich sinnvoll nur in vollständigen Räumen entwickeln. Deshalb werden wir nicht vollständige Räume vervollständigen.

# 2 Grundlstrukturen der Funktionalanalysis

## 2.1 Topologie

Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{T}$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{T}$ *Topologie (auf $X$)*, falls gilt:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$

(T2) $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$

(T3) $T_1, T_2 \in \mathcal{T} \implies T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Hausdorff-Raum*, falls er zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt:

(T4) $\forall\, x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\ \ \exists\, U_1, U_2 \in \mathcal{T}\colon\ U_1 \cap U_2 = \emptyset \wedge x_i \in U_i$

Mengen in $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Eine Menge $W \subset X$ mit $x \in W$ für die eine offene Menge $U$ mit $x \in U$ und $U \subset W$ existiert, heißt *Umgebung von $x$*.

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, so heißt $f\colon X \to Y$ *stetig*, falls die Urbilder offener Mengen stets offen sind. (Formal: $\forall\, U' \in \mathcal{T}_Y\colon\ f^{-1}(U') \in \mathcal{T}_X$)

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig in $x \in X$*, falls

$$f(x) \in V \in \mathcal{T}_Y \quad \implies \quad \exists\, U \in \mathcal{T}_X\colon\ x \in U \subset f^{-1}(V)$$

(d. h. $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von $x$).

**2.1.** Ist $X$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt $(X, \mathcal{T})$ *topologischer Vektorraum*, falls $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist und die Abbildungen

$$\begin{aligned} X \times X \to X, &\quad (x, y) \mapsto x + y \\ \mathbb{K} \times X \to X, &\quad (\alpha, x) \mapsto \alpha\, x \end{aligned}$$

stetig sind. („Algebraische und topologische Struktur sind verträglich“)

**2.2** (Metrik)**.** Ein Tupel $(X, d)$ heißt *metrischer Raum*, falls $X$ eine Menge ist und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ folgende Bedingungen erfüllt:

(M1) $\forall\, x, y \in X\colon \quad d(x,y) \geq 0 \;$ und $\; d(x,y) = 0 \iff x = y$

(M2) $\forall\, x, y \in X\colon \quad d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $\forall\, x, y, z \in X\colon \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Konvergenz:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls:

$$d(x_k, x_\ell) \to 0 \quad \text{für } k, \ell \to \infty$$

$x$ heißt Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Notation: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ oder: $x_n \to x$ für $n \to \infty$), falls:

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

$(X, d)$ heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in $X$ besitzt.

Abstand von Mengen $A, B \subset X$:

$$\operatorname{dist}(A, B) \coloneqq \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Für $A \subset X$ und $x \in X$ definieren wir: $\operatorname{dist}(x, A) \coloneqq \operatorname{dist}(\{x\}, A)$.

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $A \subset X,\ x \in X$ definieren wir:

$$\begin{aligned} B_r(A) &\coloneqq \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, A) < r\} \\ B_r(x) &\coloneqq B_r(\{x\}) \\ \operatorname{diam}(A) &\coloneqq \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\} \end{aligned}$$

Wir sagen $A$ ist *beschränkt*, falls $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

**2.3** (Topologie von Metriken)**.** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subset X$.

$$A^\circ \coloneqq \{x \in X \mid \exists\, r \in \mathbb{R}_{>0}\colon\ B_r(x) \subset A\} \quad \text{ist das } \textit{Innere von } A.$$

$$\overline{A} \coloneqq \{x \in X \mid \forall\, r \in \mathbb{R}_{>0}\colon\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{ist der } \textit{Abschluss von } A.$$

$$\partial A \coloneqq \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{ist der } \textit{Rand von } A.$$

Wir sagen, dass $A$ offen ist, falls $A^\circ = A$ gilt, und dass $A$ abgeschlossen ist, falls $\overline{A} = A$ gilt.

Durch die Definition $\mathcal{T} \coloneqq \{A \subset X \mid A \text{ offen}\}$ wird $(X, \mathcal{T})$ zu einem hausdorffschen topologischen Raum.