Universität Regensburg WS 2013/14

Vorlesungsmitschrift (*kein* offizielles Skript)

Funktionalanalysis

Prof. Dr. Harald Garcke

Version vom 30. November 2013

Gesetzt in LaTeX von Johannes Prem

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?

Zum Beispiel von der *Analysis auf Banachräumen* (vollständigen normierten Vektorräumen)

1.1. Auf $\mathbb{R}^n$ definiere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x\|_2 \coloneqq |x| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 (Funktionen auf kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$)**.**
Zum Beispiel: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, z. B. $K = [0,1]$.

$$C^0(K) \coloneqq \{f \mid f\colon K \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird Banachraum mit der Norm:

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x \in K} |f(x)| \; < \infty$$

1.3 (Operatoren auf $C^0([0,1])$)**.**
Definiere

$$L\big(C^0([0,1]),\, C^0([0,1])\big) \coloneqq \big\{T\colon C^0([0,1]) \to C^0([0,1]) \;\big|\; T \text{ ist linear und stetig}\big\}$$

Beispiele:

$$(Tf)(x) \coloneqq g(x)\, f(x) \qquad \text{wobei } g \in C^0([0,1])$$

$$(Tf)(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, L_i(x) \qquad \text{wobei } 0 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le 1$$

$$L_i\colon \text{ Lagrange-Basis-Fkt.:} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$(Tf)(x) \coloneqq \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y \qquad \text{wobei } K \in C^0\left([0,1]^2\right)$$

Bemerkung: $L\big(C^0([0,1]),\, C^0([0,1])\big)$ wird zu einem Banachraum mit der Operatornorm

$$\|T\|_{L(C^0,C^0)} \coloneqq \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{C^0}}{\|f\|_{C^0}}$$

1.4. Welche Besonderheiten ergeben sich in unendlich-dimensionalen Räumen?

(1) Problem in ∞-dimensionalen Vektorräumen: Wenig sinnvolle Aussagen ohne Topologie möglich

(2) Für $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear gilt:

$$T \text{ surjektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ injektiv}$$

Im ∞-dim. ist dies i. A. falsch.
Beispiel:

$$c_* := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \,\middle|\, x_k \in \mathbb{R},\ \exists\, \bar{k} \in \mathbb{N}\ \forall\, \ell > \bar{k}\colon\ x_\ell = 0 \right\}$$

c_* modelliert „Folgen, die irgendwann abbrechen". Außerdem enthält c_* den $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß.

Definiere die sog. *Shift-Abbildung* wie folgt:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Dann ist T injektiv, aber nicht surjektiv.

(3) Grundproblem der linearen Algebra: Finde Normalformen für lineare Abbildungen.
Ziel: Verallgemeinerung auf ∞-dim. Räume.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Diagonalisierbarkeit}\\ \text{symmetrischer Matrizen}\end{array}\right\} \quad\rightsquigarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Spektralsatz für}\\ \text{kompakte, normale Operatoren}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Jordansche}\\ \text{Normalform}\end{array}\right\} \quad\rightsquigarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Spektralsatz für}\\ \text{kompakte Operatoren}\end{array}\right.$$

(4) Kompaktheit
In ∞-dim. Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel *nicht* kompakt.
Beispiel c_*: Nutze die Norm

$$\|x\|_{c_*} := \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

und die Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (wobei die 1 an der i-ten Stelle steht). Dann gilt:

$$\|e_i\|_{c_*} = 1 \qquad \text{und} \qquad \|e_i - e_k\|_{c_*} = 1 \text{ für } i \neq k$$

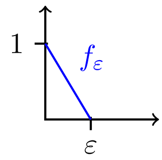
Also hat $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *keine* konvergente Teilfolge, woraus folgt, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist.

(5) Nicht alle Normen sind zueinander äquivalent.
Beispiel: Betrachte auf $C^0([0,1])$ die Normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x}$$

Es gilt $\|f\|_{L^2} \le \|f\|_\infty$. Aber: Es gibt keine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $f \in C^0([0,1])$ gilt: $\|f\|_\infty \le c\,\|f\|_{L^2}$. Betrachte dazu:



Es gilt: $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1,\ \|f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Außerdem gilt:

$$\big(C^0([0,1]),\ \|\cdot\|_\infty\big) \text{ ist Banachraum}$$
$$\big(C^0([0,1]),\ \|\cdot\|_{L^2}\big) \text{ ist normierter Vektorraum (aber nicht vollständig)}$$

Funktionalanalysis lässt sich sinnvoll nur in vollständigen Räumen entwickeln. Deshalb werden wir nicht vollständige Räume vervollständigen (siehe 2.18).

2 Grundstrukturen der Funktionalanalysis

2.1 (Topologie)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{T}$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{T}$ *Topologie (auf X)*, falls gilt:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$

(T2) $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$

(T3) $T_1, T_2 \in \mathcal{T} \implies T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Hausdorff-Raum*, falls er zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt:

(T4) $\forall\, x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\ \ \exists\, U_1, U_2 \in \mathcal{T}\colon\ U_1 \cap U_2 = \emptyset \wedge x_i \in U_i$

Mengen in $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Eine Menge $W \subset X$ mit $x \in W$ für die eine offene Menge U mit $x \in U$ und $U \subset W$ existiert, heißt *Umgebung von x*.

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, so heißt $f\colon X \to Y$ *stetig*, falls die Urbilder offener Mengen stets offen sind. (Formal: $\forall\, U' \in \mathcal{T}_Y\colon\ f^{-1}(U') \in \mathcal{T}_X$)

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig in $x \in X$*, falls

$$f(x) \in V \in \mathcal{T}_Y \qquad \implies \qquad \exists\, U \in \mathcal{T}_X\colon\ x \in U \subset f^{-1}(V)$$

(d. h. $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von x).

2.2. Ist X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt $(X, \mathcal{T})$ *topologischer Vektorraum*, falls $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist und die Abbildungen

$$\begin{aligned} X \times X \to X, &\quad (x, y) \mapsto x + y \\ \mathbb{K} \times X \to X, &\quad (\alpha, x) \mapsto \alpha\, x \end{aligned}$$

stetig sind. („Algebraische und topologische Struktur sind verträglich“)

2.3 (Metrik)**.** Ein Tupel (X, d) heißt *metrischer Raum*, falls X eine Menge ist und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ folgende Bedingungen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt:

(M1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Konvergenz:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls:

$$d(x_k, x_\ell) \to 0 \quad \text{für } k, \ell \to \infty$$

x heißt Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Notation: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ oder: $x_n \to x$ für $n \to \infty$), falls:

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

(X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in X besitzt.

Abstand von Mengen $A, B \subset X$:

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Für $A \subset X$ und $x \in X$ definieren wir: $\operatorname{dist}(x, A) := \operatorname{dist}(\{x\}, A)$.

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $A \subset X$, $x \in X$ definieren wir:

$$\begin{aligned} B_r(A) &:= \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, A) < r\} \\ B_r(x) &:= B_r(\{x\}) \\ \operatorname{diam}(A) &:= \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\} \end{aligned}$$

Wir sagen A ist *beschränkt*, falls $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

2.4 (Topologie von Metriken). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists\, r \in \mathbb{R}_{>0}\colon\ B_r(x) \subset A\} \quad \text{ist das } \textit{Innere von } A.$$

$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall\, r \in \mathbb{R}_{>0}\colon\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{ist der } \textit{Abschluss von } A.$$

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{ist der } \textit{Rand von } A.$$

Wir sagen, dass A offen ist, falls $A^\circ = A$ gilt, und dass A abgeschlossen ist, falls $\overline{A} = A$ gilt.

Durch die Definition $\mathcal{T} := \{A \subset X \mid A \text{ offen}\}$ wird $(X, \mathcal{T})$ zu einem hausdorffschen topologischen Raum.

2.5 (Fréchet-Metrik). Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $d\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *Fréchet-Metrik*, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

(F1) $d(x) \geq 0$ und $d(x) = 0 \iff x = 0$

(F2) $d(-x) = d(x)$

(F3) $d(x+y) \leq d(x) + d(y)$

Dann ist $(x, y) \mapsto d(x - y)$ eine Metrik auf X.

Beispiel: Fréchet-Metriken auf $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto |x|^\alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha \leq 1$$
$$x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x|}$$

2.6 (Norm). X sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Eine Abbildung $\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls folgende Bedingungen für alle $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

(N1) $\|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dann ist $x \mapsto \|x\|$ eine Fréchet-Metrik. Wir nennen X *Banachraum*, falls X mit einer gegebenen Norm vollständig ist.

X ist eine *Banachalgebra*, falls X eine Algebra ist (d. h. es gibt ein Produkt auf X, das dem Assoziativgesetz und Distributivgestz genügt) und $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in X$ gilt.

2.7 (Skalarprodukt). Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) $\langle\, \cdot\, , \cdot\, \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ heißt *Hermitische Form* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrische Sesquilinearform), falls für alle $x, x_1, x_2, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(S2) $\langle \alpha\, x, y \rangle = \alpha\, \langle x, y \rangle$

(S3) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

(Es folgt: für alle $x \in X$ gilt $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$.)

(b) $\langle\, \cdot\, , \cdot\, \rangle$ heißt *positiv semidefinit*, falls

(S4') $\langle x, x \rangle \geq 0$

und *positiv definit*, falls

(S4) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

gilt.

(c) $\langle\, \cdot\, , \cdot\, \rangle$ heißt *Skalarprodukt*, falls (S1)–(S4) erfüllt sind. Dann ist $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf X und wir nennen X dann einen *Prä-Hilbertraum*. Falls X zusätzlich vollständig ist, so heißt X *Hilbertraum*

Beispiele:

i) $\mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

ii) $X = C^0(K, \mathbb{R})$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_K f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

Dann ist $\big(C^0(K), \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ein Prä-Hilbertraum (aber kein Hilbertraum!)

Satz 2.8. Sei $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum X. Dann gelten:

(1) Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU): $\forall\, x, y \in X\colon \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
Gleichheit gilt nur, falls y ein Vielfaches von x ist.

(2) Dreiecksungleichung: $\forall\, x, y \in X\colon \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(3) Parallelogrammidentität: $\forall\, x, y \in X\colon \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Bemerkung: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt aus der CSU für $x, y \in X \setminus \{0\}$:

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \in [-1, 1] \tag{$*$}$$

D. h. es gibt genau ein $\theta \in [0, \pi]$, s. d.

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \cos\theta.$$

Wir interpretieren θ als den Winkel zwischen x und y.

Beweis von Satz 2.8.

(3)

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$

Ersetze y durch $-y$ und addiere beide Gleichungen.

(1) Ersetze in $(*)$ y durch $-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\, y$ (o. E. $y \neq 0$). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\, y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\, y \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\,\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\
&= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}
\end{aligned}$$

Es folgt die CSU. In der ersten Zeile gilt bei $\leq$ die Gleichheit genau dann, wenn x ein Vielfaches von y ist.

(3)
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\underbrace{\operatorname{Re}\langle x,y\rangle}_{\leq |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|} \leq (\|x\|+\|y\|)^2$$

■

2.9 (Vergleich von Topologien). Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X. Wir sagen $\mathcal{T}_2$ ist *stärker* (oder *feiner*) als $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_1$ ist *schwächer* (oder *gröber*) als $\mathcal{T}_2$, falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt.

Sind d_1, d_2 zwei Metriken auf X und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ die induzierten Topologien (siehe 2.4), so heißt die Metrik d_1 *stärker (bzw. schwächer)* als d_2, falls $\mathcal{T}_1$ stärker (bzw. schwächer) als $\mathcal{T}_2$ ist. Die Metriken heißen äquivalent, falls $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Entsprechend heißt eine Norm stärker bzw. schwächer als eine zweite, wenn dies für die induzierten Metriken gilt. Analog für Äquivalenz von Normen.

2.10 (Vergleich von Normen). Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann gilt:

(1) $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:
$$\forall\, x \in X: \quad \|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2$$

(2) Die beiden Normen sind genau dann äquivalent, wenn es $c, C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:
$$\forall\, x \in X: \quad c\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\,\|x\|_2$$

Beweis. (1) Es sei $B_r^i(x) = \{x' \in X \mid \|x - x'\|_i < r\}$ und $\mathcal{T}_i$ sei die von $\|\cdot\|_i$ induzierte Topologie.
Sei $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Da $B_1^1(0) \in \mathcal{T}_1$ gilt, ist $B_1^1(0)$ offen bezüglich $\mathcal{T}_1$ und bezüglich $\mathcal{T}_2$. Es liegt 0 im Inneren (bezüglich $\|\cdot\|_2$) von $B_1^1(0)$. Somit gilt $B_\varepsilon^2(0) \subset B_1^1(0)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Daher gilt für $x \in X \setminus \{0\}$:
$$\left\| \frac{\varepsilon\, x}{2\|x\|_2} \right\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
$$\implies \quad \left\| \frac{\varepsilon\, x}{2\,\|x\|_2} \right\|_1 < 1 \qquad \implies \quad \|x\|_1 < \frac{2}{\varepsilon}\,\|x\|_2$$

Gilt umgekehrt die Ungleichung in (1) so ist für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$
$$B_r^2(x) \subset B_{cr}^1(x)$$

Sei nun $A \in \mathcal{T}_1$. Dann ist $A = A^\circ$ bezüglich $\mathcal{T}_1$. D. h. zu $x \in A$ existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\varepsilon^1(x) \subset A$. Also gilt:
$$B_{\varepsilon/c}^2(x) \subset A$$

Dies zeigt $A \in \mathcal{T}_2$.

(2) Wende den ersten Teil zweimal an.

■

Satz 2.11. Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent. Endlich-dimensionale Vektorräume sind Banachräume. Endlich-dimensionale Unterräume normierter Räume sind abgeschlossen.

Beweis. Sei X ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $(X, \|\cdot\|)$. Jedem $x \in X$ mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, e_i$ ordnen wir den Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\mathsf{t} \in \mathbb{K}^n$ zu.

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\to X \to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto x \ \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

sind stetig.

Daher nimmt $\|x\|$ auf der kompakten Menge

$$S := \{\alpha \mid \|\alpha\|_2 = 1\}$$

ein Maximum M und ein Minimum m an. (Dabei gilt $m > 0$, da $\|x\| > 0$ für alle $x \in S$.) Damit gilt für x mit $\|\alpha(x)\|_2 = 1$

$$m \leq \|x\| \leq M.$$

Für allgemeine $x \neq 0$ gilt

$$\left\| \alpha\left(\frac{x}{\|\alpha(x)\|_2}\right) \right\|_2 = 1 \quad \text{und somit} \quad m \leq \left\| \frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right\| \leq M$$

Dies zeigt die Äquivalenz einer beliebigen Norm zur Norm $x \mapsto \|\alpha(x)\|_2$. Damit sind zwei beliebige Normen äquivalent.

Die Vollständigkeit von X folgt aus der Vollständigkeit von $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$. Die Tatsache, dass endlich-dimensionale Räume abgeschlossen sind, folgt mit Aufgabe 1 von Übungsblatt 2.

■

2.12 (Folgenräume)**.** Wir bezeichnen mit $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ die Menge aller Folgen über $\mathbb{K}$, d. h.

$$\mathbb{K}^\mathbb{N} := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{K} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Es gilt:

1) $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ ist ein metrischer Raum mit der Fréchet-Metrik

$$\varrho(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|} \qquad \text{für } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

2) Ist $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} = ((x_i)^k_{i\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ und ist $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$, so gilt:

$$\varrho(x^k - x) \to 0 \text{ für } k \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}\colon\ x_i^k \to x_i \text{ für } k \to \infty.$$

(Vergleiche Aufgabe 2 von Blatt 1.)

3) $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ ist mit dieser Metrik vollständig.

4) Definiere für $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell^p} &:= \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ \in [0,\infty] \quad \text{für } 1 \le p < \infty \\ \|x\|_{\ell^\infty} &:= \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \ \in [0,\infty] \end{aligned}$$

Wir betrachten für $1 \le p \le \infty$ die Mengen

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \big\{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \ \big|\ \|x\|_{\ell^p} < \infty\big\}$$

Diese Räume sind normierte Vektorräume und auch vollständig (also Banachräume). (Beweis, siehe später.) Wenn der Körper $\mathbb{K}$ aus dem Kontext klar ist, lassen wir diesen in der Notation auch weg.

5) Interessante Unterräume von ℓ^∞ sind:

$$\begin{aligned} c &:= \big\{x \in \ell^\infty \ \big|\ \lim_{i\to\infty} x_i \text{ existiert}\big\} \qquad \text{und} \\ c_0 &:= \big\{x \in \ell^\infty \ \big|\ \lim_{i\to\infty} x_i = 0\big\}. \end{aligned}$$

Beide Räume versehen wir mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Es gilt: $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$

6) Der Raum ℓ^2 besitzt das Skalarprodukt

$$(x,y) := \sum_{i=1}^\infty x_i\, y_i \quad \text{für } x, y \in \ell^2$$

Lemma 2.13 (Youngsche Ungleichung). Es seien $p, p' \in (1,\infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$ab \le \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p'}\, b^{p'}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \log(ab) = \log(a) + \log(b) &= \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log(b^{p'}) \\ &\le \log\Big(\frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p'}\, b^{p'}\Big) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichheit folgt daraus, dass der Logarithmus eine konkave Funktion ist. Da außerdem exp monoton ist, folgt hieraus die Behauptung.

∎

Satz 2.14 (Höldersche Ungleichung auf ℓ^p). Es sei $1 \le p, p' \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^{p'}$ ist $xy \in \ell^1$ (dabei sei für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Produkt definiert als: $xy \coloneqq (x_n\, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) und es gilt:

$$\|xy\|_{\ell^1} \le \|x\|_{\ell^p} \cdot \|y\|_{\ell^{p'}}.$$

Beweis. Falls $p = \infty$ setzte $p' = 1$ (und umgekehrt). In diesem Fall ist der Beweis einfach. Sei nun $1 < p < \infty$ und $\|x\|_{\ell^p} > 0, \|y\|_{\ell^{p'}} > 0$. Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) liefert:

$$\frac{|x_k|\ |y_k|}{\|x\|_{\ell^p}\ \|y\|_{\ell^{p'}}} \le \frac{1}{p}\,\frac{|x_k|^p}{\|x\|_{\ell^p}^p} + \frac{1}{p'}\,\frac{|y_k|^{p'}}{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}}$$

Die Reihe über die Terme der rechten Seite ist eine konvergente Reihe und damit folgt aus dem Majorantenkriterium, dass $xy \in \ell^1$ erfüllt sein muss.

■

Satz 2.15. Der Raum ℓ^p ist für $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum.

Beweis. Die Vollständigkeit von ℓ^1 ist eine Übungsaufgabe. Für ℓ^p folgt dies ähnlich (vergleiche mit dem späteren Beweis über $L^p(\mu)$.) Die Normeigenschaften abgesehn von der $\triangle$-Ungleichung ergeben sich einfach. Wir zeigen die $\triangle$-Ungleichung für $p \in (1,\infty)$. Es seien also $p, p' \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p \le \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\,|x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|\,|x_k+y_k|^{p-1}\\ &\overset{(\star)}{\le} \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{(p-1)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{(p-1)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}\\ &= \left(\|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}\right)\left(\|x+y\|_{\ell^p}^{p-1}\right)\end{aligned}$$

Bei $(\star)$ geht die Höldersche Ungleichung ein. Dies zeigt $\|x+y\|_{\ell^p} \le \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}$.

■

2.16 (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen). Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt (also nach Heine-Borel äquivalenterweise kompakt) und Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$, so ist $C^0(K,Y)$ ein Unterraum von $B(K,Y)$. (Vergleiche Aufgabe 1 von Blatt 2.)

Satz: Mit $\|f\|_{C^0} \coloneqq \|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in K}|f(x)|$ wird $C^0(K,Y)$ ein Banachraum.

Beweis. Jedes $f \in C^0(K,Y)$ ist beschränkt, denn: Zu $x \in K$ existiert ein $\delta_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f\big(B_{\delta_x}(x)\big) \subset B_1\big(f(x)\big)$. Da K kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Es folgt:

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_1\big(f(x_i)\big).$$

Die rechte Menge ist beschränkt, also ist auch f beschränkt.

Aufgabe 1 (iv) von Blatt 2 zeigt, dass $B(K,Y)$ ein Banachraum ist. Eine Cauchy-Folge in $C^0(K,Y)$ ist auch eine Cauchy-Folge in $B(K,Y)$. Da $B(K,Y)$ vollständig ist, besitzt jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Sei jetzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^0(K,Y)$ mit Grenzwert f in $B(Y,K)$. Für $x,y \in K$ gilt:

$$\|f(y)-f(x)\| \le \underbrace{\|f_i(y)-f_i(x)\|}_{\substack{\to 0 \text{ für } y\to x\\ \text{und jedes } i}} + \underbrace{2\|f-f_i\|_\infty}_{\to 0 \text{ für } i\to\infty}$$

Dies beweist $f \in C^0(K,Y)$.

■

2.17 (Räume differenzierbarer Funktionen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} C^m(\overline{\Omega}) \coloneqq \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid\ & f \text{ ist } m\text{-mal stetig diffenzierbar auf } \Omega \text{ und für } s \in \mathbb{N}^n \\ & \text{mit } |s| \le m \text{ ist } \partial^s f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar } \}. \end{aligned}$$

(Dabei ist s ein Multiindex mit $|s| = s_1 + \cdots + s_n$.)

Satz: Der Raum $C^m(\overline{\Omega})$ ist mit der Norm

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} \coloneqq \sum_{|s|\le m} \|\partial^s f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$$

ein Banachraum.

Beweis. Wir beweisen die Vollständigkeit von $C^1(\overline{\Omega})$. (Der Fall $m > 1$ folgt induktiv.) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^1(\overline{\Omega})$, so sind $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\partial_i f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $C^0(\overline{\Omega})$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Daher existieren f und g_i in $C^0(\overline{\Omega})$, so dass $f_k \to f$ sowie $\partial_i f_k \to g_i$ gleichmäßig für $k \to \infty$ in $C^0(\overline{\Omega})$. Für $x \in \Omega$ und y nahe x mit $x_t \coloneqq (1-t)x + ty$ folgt aus dem HDI:

$$f_k(x_1) - f_k(x_0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_k(x_t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (y-x)\cdot\nabla f_k(x_t)\,\mathrm{d}t$$

Es folgt (mit $g = (g_1,\ldots,g_n)$):

$$\begin{aligned} \|f_k(y) - f_k(x) - (y-x)\cdot\nabla f_k(x)\| &= \left\| \int_0^1 \big((y-x)\cdot\nabla f_k(x_t) - (y-x)\cdot\nabla f_k(x)\big)\,\mathrm{d}t \right\| \\ &\overset{\text{CSU}}{\le} \int_0^1 \|\nabla f_k(x_t) - \nabla f_k(x)\|\,\mathrm{d}t\ \|y-x\| \\ &\le \Big(2\|\nabla f_k - g\|_\infty + \sup_{t\in[0,1]} \|g(x_t) - g(x)\|\Big)\ \|y-x\| \end{aligned}$$

Für $k \to \infty$ gilt dann:

$$\|f(y) - f(x) - (y-x) \cdot g(x)\| \leq \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq 1} \|g(x_t) - g(x)\|}_{\to 0 \text{ für } y \to x \text{ wegen Stetigkeit von } g} \|y - x\|$$

Dies bedeutet f ist in x diff'bar mit $\nabla f(x) = g(x)$.

■

2.18 (Vervollständigung). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\tilde{X} := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}$$

zusammen mit der Äquivalenzrelation

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \tilde{X} \;:\Longleftrightarrow\; \big(d(x_j, y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

Führe Metrik auf $\tilde{X}$ ein: für $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ sei

$$\tilde{d}\big((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}\big) := \lim_{j \to \infty} d(x_j, y_j).$$

Satz:

i) Dann ist $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ein vollständiger metrischer Raum.

ii) Durch $J(x) := (x)_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine injektive Abbildung $J\colon X \to \tilde{X}$ definiert, welche isometrisch ist, d. h. für alle $x, y \in X$ gilt

$$\tilde{d}\big(J(x), J(y)\big) = d(x, y).$$

iii) Es liegt $J(X)$ dicht in $\tilde{X}$.

Beweis. Für $\tilde{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\tilde{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\tilde{X}$ gilt (mithilfe der sog. *Vierecksungleichung*):

$$|d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i)| \leq d(x_j, x_i) + d(y_j, y_i) \to 0 \qquad \text{für } i, j \to \infty.$$

Somit existiert $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{j \to \infty} d(x_j, y_j)$. Für $\tilde{x}^1 = \tilde{x}^2$ und $\tilde{y}^1 = \tilde{y}^2$ in $\tilde{X}$ folgt:

$$|d(x_j^2, y_j^2) - d(x_j^1, y_j^1)| \to 0 \qquad \text{für } i \to \infty.$$

Dies zeigt, dass $\tilde{d}$ wohldefiniert ist. Außerdem gilt:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{x} = \tilde{y},$$

was direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation folgt. Die $\triangle$-Ungleichung und Symmetrie übertragen sich direkt.

Zur Vollständigkeit: Es sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\tilde{X}$, mit $x^k = (x^k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $j_k \in \mathbb{N}$, so dass $d(x^k_i, x^k_j) \leq 1/k$ für alle $i, j \geq j_k$ erfüllt ist. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
d(x^k_{j_k}, x^\ell_{j_k}) &\leq d(x^k_{j_k}, x^k_j) + d(x^k_j, x^\ell_j) + d(x^\ell_j, x^\ell_{j_\ell}) \\
&\leq \frac{1}{k} + d(x^k_j, x^\ell_j) + \frac{1}{\ell} \qquad \text{für } j \geq j_k, j_\ell \\
&\to \frac{1}{k} + \tilde{d}(x^k, x^\ell) + \frac{1}{\ell} \qquad \text{für } j \to \infty \\
&\to 0 \qquad \text{für } k, \ell \to \infty
\end{aligned}
$$

Also ist $x^\infty := (x^\ell_{j_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ in $\tilde{X}$ und es gilt:

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}(x^\ell, x^\infty) &\longleftarrow d(x^\ell_k, x^\infty_k) \qquad \text{für } k \to \infty \\
&\leq d(x^\ell_k, x^\ell_{j_\ell}) + d(x^\ell_{j_\ell}, x^k_{j_k}) \\
&\leq \frac{1}{\ell} + d(x^\ell_{j_\ell}, x^k_{j_k}) \qquad \text{für } k \geq j_\ell \\
&\to 0 \qquad \text{für } k, \ell \to \infty
\end{aligned}
$$

Es gilt also $x^\ell \to x^\infty$. Da $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in $\tilde{X}$ war, hat also jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Die Aussagen ii) und iii) sind eine einfache Übung.

■

3 Lineare Operatoren

Definition 3.1.

(a) Seien X, Y zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Topologien $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$. Wir definieren

$$L(X,Y) := \{T\colon X \to Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Elemente in $L(X,Y)$ heißen *lineare Operatoren von X nach Y*. (Für $T \in L(X,Y)$ und $x \in X$ schreiben wir auch oft Tx statt $T(x)$.)

(b) Der *Dualraum* von X ist

$$X' := L(X, \mathbb{K})$$

und Elemente aus X' nennen wir *lineare Funktionale.*

Beispiele 3.2.

1) Gelte $X = C^2(\overline{\Omega})$ und $Y = C^0(\overline{\Omega})$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte dann $T\colon X \to Y$ mit

$$(Tu)(x) := -\Delta u(x)$$

für alle $u \in C^2(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$.

2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $K\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig. Sei dann T für alle $u \in C^0(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$ gegeben durch:

$$(Tu)(x) := \int_\Omega K(x,y)\, u(y)\, \mathrm{d}y.$$

Lemma 3.3. Seien X, Y normierte Vektorräume und sei $T\colon X \to Y$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) T ist stetig, also $T \in L(X,Y)$.

(2) T ist stetig in x_0 für ein $x_0 \in X$.

(3) Es gilt für die Operatornorm von T:

$$\|T\|_{L(X,Y)} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} \|Tx\|_Y < \infty$$

(4) Es existiert ein $C \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $\|Tx\|_Y \le C\,\|x\|_X$. (Bemerkung: $C = \|T\|_{L(X,Y)}$ ist die kleinste solche Zahl.)

Beweis. (1) $\implies$ (2): klar.

(2) $\implies$ (3): Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$T\big(\overline{B_\delta(x_0)}\big) \subset \overline{B_1\big(T(x_0)\big)}$$

erfüllt ist. Für x mit $\|x\|_X \leq 1$ folgt $x_0 + \delta x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ und daraus: $T(x_0+\delta x) \in \overline{B_1\big(T(x_0)\big)}$, d. h. es gilt:

$$\|T(x_0+\delta x) - T(x_0)\| \leq 1.$$

Wegen der Linearität von T gilt $T(x_0+\delta x) - T(x_0) = \delta T(x)$, weshalb wir $T(x) \leq 1/\delta$ bekommen.

(3) $\implies$ (4): Für $x \neq 0$ gilt $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$. Daraus folgt:

$$\|Tx\| = \left\|\|x\|\, T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T\|\,\|x\|.$$

(4) $\implies$ (1): Für $x, x_0 \in X$ gilt:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x-x_0)\| \leq C\,\|x-x_0\|.$$

Also ist T Lipschitz-stetig und somit auch stetig.

■

Lemma 3.4.

(1) X, Y normierte Räume $\implies$ $L(X,Y)$ normiert mit der Operatornorm.

(2) Y Banachraum $\implies$ $L(X,Y)$ Banachraum

(3) X Banachraum $\implies$ $L(X) := L(X,X)$ Banachalgebra

(4) $T \in L(X,Y), S \in L(Y,Z)$ $\implies$ $ST \in L(X,Z)$ mit $\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|$

Beweis. Zu (1): Wir zeigen nur die $\triangle$-Ungleichung (der Rest ist klar). Es gilt

$$\|T_1+T_2)(x)\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|)\,\|x\|,$$

woraus folgt:

$$\|T_1+T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Zu (2): Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X,Y)$. Für alle $x \in X$ ist dann $(T_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y. Setzte

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_nx.$$

Da Grenzwertbilden linear ist, ist auch L linear. Wir behaupten, dass $T \in L(X,Y)$ und $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to 0$ gelten.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Sei $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$. Wähle $m_0 = m_0(\varepsilon, x) \geq n_0$ mit

$$\|T_{m_0}x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ folgt nun:

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n x - T_{m_0}x\| + \|T_{m_0}x - Tx\| \leq \|T_n - T_m\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Damit folgen nun aber $\|T\| \leq \infty$ sowie $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Zu (3) und (4): Es gilt:

$$\|STx\| \leq \|S\| \, \|Tx\| \leq \|S\| \, \|T\| \, \|x\|.$$

Also gilt allgemein: $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$.

■

Bemerkung 3.5. Es sei $T \in L(X, Y)$ und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X, Y)$ mit $T_k x \to Tx$ für $k \to \infty$ und für alle $x \in X$. Dann folgt i. A. *nicht* $T_k \to T$ in $L(X, Y)$.

Beispiel: $X = c_0$ (Raum der Nullfolgen, siehe 2.12 (5)) mit der Supremumsnorm, $Y = \mathbb{R}$, $T_k x := x_k$. Dann gilt: $\lim_{k\to\infty} T_k x = \lim_{k\to\infty} x_k = 0 =: Tx$. Offensichtlich gilt $\|T_k x\| = 1$ für $x = e_k$. Außerdem gilt $\|T_k x\| = \|x_k\| \leq 1$ für $\|x\| \leq 1$. D. h. $\|T_k\| = 1$, aber $\|T\| = 0$.

Definition 3.6. Für $T \in L(X, Y)$ definieren wir den *Nullraum (Kern) von* T als

$$N(T) := \{x \in X \mid T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\}).$$

Es ist $N(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(X, Y)$.

Weiter sei

$$R(T) := \{Tx \in Y \mid x \in X\} = T(X)$$

der *Bildraum* (engl.: „range“) von T. Es ist $R(T)$ ein linearer Unterraum von Y, i. A. aber nicht abgeschlossen.

Beispiel: $X = C^0([0, 1])$,

$$T\colon X \to X, \quad (Tf)(x) := \int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$R(T) = \{g \in C^1([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

Es gilt $T \in L(X, Y)$ aber $R(T)$ ist nicht abgeschlossen in X, denn:

$$\overline{R(T)} = \{g \in C^0([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

(denn stetige Funktionen können durch C^1-Funktionen in der C^0-Norm approximiert werden, siehe später).

Satz 3.7 (Neumannsche Reihe). Sei X ein Banachraum und sei $A \in L(X)$ mit $\|A\| < 1$. Es bezeichne Id den Identitätsoperator. Dann liegt $(\mathrm{Id} - A)^{-1}$ in $L(X)$ und es gilt:

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Beweis. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n := \sum_{k=0}^{n} A^k \qquad \in L(X).$$

Mit $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ folgt:

$$\begin{aligned} \|B_n x - B_m x\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} A^k x \right\| \qquad \text{für } n > m \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|A\|^k \|x\| \to 0 \qquad \text{für } n, m \to \infty \text{ für alle } x \text{ mit gleichmäßig } \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

Also existiert $B \in L(X)$ mit $B = \lim_{n\to\infty} B_n$. Noch zu zeigen: $B(\mathrm{Id} - A) = \mathrm{Id} = (\mathrm{Id} - A)B$. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} A^k (\mathrm{Id} - A) = \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \mathrm{Id} - A^{n+1} \to \mathrm{Id} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Also:

$$B(\mathrm{Id} - A) = \lim_{n\to\infty} B_n (\mathrm{Id} - A) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id} - A^{n+1}) = \mathrm{Id}$$

■

3.8 (Invertierbarere Operatoren). Seien X, Y Banachräume. Wir sagen $T \in L(X, Y)$ ist invertierbar, falls T bijektiv ist und $T^{-1} \in L(X, Y)$ gilt.

Satz: :

i) Die Teilmenge $\{T \in L(X, Y) \mid T \text{ invertierbar}\}$ ist offen in $L(X, Y)$.

ii) Es gilt genauer für $T, S \in L(X, Y)$ mit invertierbarem T:

$$\|S\| < \left\|T^{-1}\right\|^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad T - S \text{ invertierbar}$$

Beweis. Es gilt:

$$T - S = T\,(\mathrm{Id}_X - \underbrace{T^{-1} S}_{\in L(X)}).$$

Also folgt mit $\|S\| < \left\|T^{-1}\right\|^{-1}$:

$$\left\|T^{-1} S\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|S\| < 1.$$

Mithilfe der Neumannschen Reihe (Satz 3.7) erhalten wir:

$$(\operatorname{Id} - T^{-1}S) \text{ ist invertierbar.}$$

Also ist auch $T - S$ invertierbar

$\blacksquare$

4 Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen

Problem: Setzte ein Funktional stetig von einem Unterraum auf den gesamten Raum fort.

Bisher wissen wir nicht, ob auf jedem normierten Vektorraum ein (nicht-triviales) stetiges lineares Funktional existiert. Da wir im Folgenden grundlegend das *Zorn'sche Lemma* verwenden, wiederholen kurz dir Voraussetzungen dafür.

Definition 4.1.

i) Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $H \subset M \times M$ definiert eine *Halbordnung* (wir sagen $a \leq b$, falls $(a, b) \in H$ erfüllt ist), wenn für alle $a, b \in M$ gilt:

   a) $a \leq a$

   b) $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

   c) $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$

ii) Eine Teilmenge $K \subset M$ heißt *Kette* (oder *total geordnete Teilmenge*), falls für alle $a, b \in K$ entweder $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

iii) Eine *obere Schranke* einer Teilmenge $K \subset M$ ist ein Element $s \in M$ mit $a \leq s$ für alle $a \in K$. (Achtung: s muss *nicht* in K liegen!)

iv) Wir sagen M ist *induktiv geordnet*, falls jede Kette in M eine obere Schranke besitzt.

v) Ein $m \in K$ heißt *maximales Element von K*, wenn für alle $a \in K$ aus $a \geq m$ schon $a = m$ folgt.

4.2 (Zorn'sches Lemma)**.** Jede induktiv geordnete Menge besitzt (mindestens) ein maximales Element.

Bemerkung: Das Zorn'sche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Satz 4.3 (Satz von Hahn-Banach)**.** Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $Y \subset X$ ein Unterraum. Weiter gelte:

(1) $p\colon X \to \mathbb{R}$ ist sublinear, d. h. für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{und} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

(2) $f\colon Y \to \mathbb{R}$ ist linear.

(3) $f \le p$ auf Y.

Dann existiert eine lineare Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $f \le p$ auf X.

Beweis. Nutze das Zorn'sche Lemma (4.2). Es sei

$$\begin{aligned} M := \big\{(Z,g) \,\big|\, & Y \subset Z \subset X,\ Z \text{ ist Unterraum}, \\ & g\colon Z \to \mathbb{R} \text{ ist linear},\ g = f \text{ auf } Y,\ g \le p \text{ auf } Z\,\big\}. \end{aligned}$$

Wir definieren eine Halbordnung auf dieser Menge folgendermaßen:

$$(Z_1, g_1) \le (Z_2, g_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad Z_1 \subset Z_2 \wedge g_2|_{Z_1} = g_1.$$

Es ist zunächst zu zeigen, dass es überhaupt ein F gibt, so dass $(X, F) \in M$ gilt. Hierzu brauchen wir folgende Konstruktion:

Sei $(Z, g) \in M, z_0 \in X \setminus Z$. Definiere dann $Z_0 := Z \oplus \operatorname{span}\{z_0\}$. Das Ziel ist es nun, g auf Z_0 fortzusetzen. Ansatz:

$$g_0(z + \alpha z_0) = g(z) + \alpha c$$

für $z \in Z, \alpha \in \mathbb{R}$. Gesucht ist nun ein geeinetes $c \in \mathbb{R}$.

Es muss für alle $z \in Z$ gelten:

$$g(z) + \alpha c \le p(z + \alpha z_0).$$

Für $\alpha = 0$ ist dies klar. Für $\alpha > 0$ haben wir:

$$c \le \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = p\left(\frac{z}{\alpha} + z_0\right) - g\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

und für $\alpha < 0$:

$$c \ge \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = -p\left(-\frac{z}{\alpha} - z_0\right) + g\left(-\frac{z}{\alpha}\right).$$

Gesucht ist nun ein c, so dass

$$\sup_{z' \in Z} \big(g(z') - p(z' - z_0)\big) \le c \le \inf_{z \in Z} \left(p(z + z_0) - g(z)\right) \tag{$\star$}$$

erfüllt ist.

Es gilt für alle $z', z \in Z$:

$$g(z + z') \le p(z + z') = p(z + z_0 + z' - z_0) \le p(z + z_0) + p(z' - z_0).$$

Daraus folgt für alle $z', z \in Z$:

$$g(z') - p(z' - z_0) \le p(z + z_0) - g(z),$$

was wiederum bedeutet, dass wir für c einfach den Wert des Supremums in $(\star)$ nehmen können. Somit existiert also ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $(Z_0, g_0) \in M$ gilt. Sei nun $N \subset M$ eine Kette. Definiere dann

$$Z_0 \coloneqq \bigcup_{(Z,g)\in N} Z$$

und

$$g_0\colon Z_0 \to \mathbb{R}, \quad z_0 \mapsto g(z_0) \text{ falls } z_0 \in Z \text{ mit } (Z,g) \in N.$$

Da N eine Kette ist, ist g_0 tatsächlich wohldefiniert. Es folgt also $(Z_0, g_0) \in M$ und für alle $(Z,g) \in N$ gilt $(Z,g) \leq (Z_0, g_0)$.

Das Zorn'sche Lemma liefert nun: Es existiert ein maximales Element $(Z,g) \in M$. Dann muss schon $Z = X$ gelten, denn: Falls $z_0 \in X \setminus Z$ existiert, konstruiere eine Fortsetzung von g auf $Z \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$ wie oben. Dies liefert einen Widerspruch zur Maximalität von (Z,g). Damit ist der Satz gezeigt.

■

Wir wollen nun den Satz von Hahn-Banach auf den komplexen Fall verallgemeinern. Die Frage ist, wie wir „$f \leq p$" auf $\mathbb{C}$ umgehen. Dazu betrachten wir die Realteilfunktion $\operatorname{Re} f$ von f.

Lemma 4.4. Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(a) Sei $\ell\colon X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional, d. h.

$$\ell(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \ell(x_1) + \lambda_2 \ell(x_2)$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ x_1, x_2 \in X$. Setzten wir

$$\tilde{\ell}(x) \coloneqq f(x) - i\,\ell(ix),$$

so ist $\tilde{\ell}\colon X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $\ell = \operatorname{Re} \tilde{\ell}$.

(b) Ist $h\colon X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, $\ell = \operatorname{Re} h$ und $\tilde{\ell}$ wie in (a), so ist ℓ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $\tilde{\ell} = h$.

(c) Ist $p\colon X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm (es gelten die Normaxiome bis auf $p(x) = 0 \implies x = 0$) und ist $\ell\colon X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, so gilt:

$$\Big(\forall x \in X\colon\ |\ell(x)| \leq p(x)\Big) \iff \Big(\forall x \in X\colon\ |\operatorname{Re} \ell(x)| \leq p(x)\Big).$$

(d) Ist X ein normierter Vektorraum und ist $\ell\colon X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung und stetig, so ist $\|\ell\| = \|\operatorname{Re} \ell\|$.

Bemerkung: $\ell \mapsto \operatorname{Re} \ell$ ist also eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{C}$-linearen und den $\mathbb{R}$-linearen, $\mathbb{R}$-wertigen Abbildungen. Im normierten Fall ist die Abbildung sogar eine Isometrie.

Beweis.

(a) Da $x \mapsto ix$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, folgt: $\tilde{\ell}$ ist $\mathbb{R}$-linear. Die Gleichheit $\operatorname{Re}\tilde{\ell} = \ell$ gilt nach Konstruktion. Außerdem gilt:

$$\tilde{\ell}(ix) = \ell(ix) - i\,\ell(i^2x) = \ell(ix) - i\,\ell(-x) = i\,\big(\ell(x) - i\ell(ix)\big) = i\,\tilde{\ell}(x).$$

(b) Natürlich ist $\ell = \operatorname{Re} h$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \operatorname{Re} h(x) + i\ \operatorname{Im} h(x) = \operatorname{Re} h(x) - i\ \operatorname{Re}\big(ih(x)\big) \\ &= \operatorname{Re} h(x) - i\ \operatorname{Re} h(ix) = \ell(x) - i\,\ell(ix) = \tilde{\ell}(x) \end{aligned}$$

(c) Wegen $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt die Hinrichtung. Die Rückrichtung ergibt sich wie folgt: Schreibe $\ell(x) = \lambda\,|\ell(x)|$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$|\ell(x)| = \lambda^{-1}\ell(x) = \ell(\lambda^{-1}x) = |\operatorname{Re}\ell(\lambda^{-1}x)| \leq p(\lambda^{-1}x) = p(x).$$

(d) folgt sofort aus (c).

■

Satz 4.5. Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Weiter sei $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear und $\ell\colon U \to \mathbb{C}$ linear mit $\operatorname{Re}\ell(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L\colon X \to \mathbb{C}$ mit $L|_U = \ell$ und $\operatorname{Re} L(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Wende den Satz von Hahn-Banach (4.3) auf das $\mathbb{R}$-lineare Funktional $\operatorname{Re}\ell\colon U \to \mathbb{R}$ an und erhalte eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $F\colon X \to \mathbb{R}$ mit $F|_U = \operatorname{Re}\ell$ und $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Nach Lemma 4.4 ist $F = \operatorname{Re} L$ für ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional $L\colon X \to \mathbb{C}$. Dann ist L eine geeignete Fortsetzung.

■

Satz 4.6. Sei X ein normierter Vektorraum und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Zu jedem stetigen linearen Funktional $u'\colon U \to \mathbb{K}$ existiert ein lineares Funktional $x'\colon X \to \mathbb{K}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|x'\| = \|u'\|$.

Beweis. Sei X zunächst ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Definiere für alle $x \in X$

$$p(x) \coloneqq \big\|u'\big\|\,\|x\|,$$

womit $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear ist. Der Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) liefert: Es existiert eine lineare Abbildung $x'\colon X \to \mathbb{R}$ mit $x'|_U = u'$ und $x'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Da auch $x'(-x) \leq p(-x) = p(x)$ gilt, folgt

$$\big|x'(x)\big| \leq \big\|u'\big\|\,\|x\| \quad \text{also} \quad \big\|x'\big\| \leq \big\|u'\big\|.$$

Umgekehrt gilt:

$$\|u'\| = \sup_{\substack{u\in U\\ \|u\|\le 1}} |u'(u)| = \sup_{\substack{u\in U\\ \|u\|\le 1}} |x'(u)| \le \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}} |x'(x)| = \|x'\|.$$

Sei X nun ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wir erhalten wie in Satz 4.5 ein lineares Funktional $x' \colon X \to \mathbb{C}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|\operatorname{Re} x'\| = \|u'\|$. Lemma 4.4 (d) liefert dann wie gewünscht $\|\operatorname{Re} x'\| = \|x'\|$. ∎

Bemerkung 4.7.

i) Die Fortsetzung im Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) und seinen Folgerungen sind im Allgemeinen *nicht* eindeutig.

ii) Für Operatoren (lineare Abbildungen von X nach Y) ist die Aussage in Satz 4.6 im Allgemeinen falsch.

   Beispiel: Es gibt keinen stetigen linearen Operator $T \colon \ell^\infty \to c_0$, der die Identität $\mathrm{Id} \colon c_0 \to c_0$ fortsetzt.

iii) Es gibt eine eindeutige stetige Fortsetzung, falls der Unterraum U dicht in X liegt.

Definition 4.8. Eine *affine Hyperebene* in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X ist eine Teilmenge $H \subset X$ der Form

$$H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$$

für eine (nicht-trivale) lineare Abbildung $f \colon X \to \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Wir schreiben auch kurz: $H = \{f = \alpha\}$.

Satz 4.9. Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $f \colon X \to \mathbb{R}$ linear und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn f stetig ist.

Beweis. Es ist klar, dass H abgeschlossen ist, wenn f stetig ist, denn es gilt $f^{-1}(\{\alpha\}) = H$ und $\{\alpha\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Für die Rückrichtung sei H abgeschlossen in X. Dann ist H^{c} offen und nicht leer. Jetzt sei $x_0 \in H^{\mathsf{c}}$ mit $f(x_0) \neq \alpha$, o. E. $f(x_0) < \alpha$. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\} \subset H^{\mathsf{c}}$. (Abbildung 4.2)

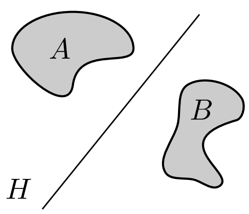


Abbildung 4.1: Zwei Teilmengen A und B eines Vektorraums, getrennt durch eine Hyperebene H (hier eine Gerade im $\mathbb{R}^2$)

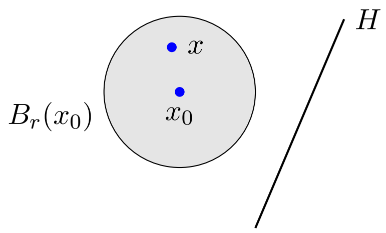


Abbildung 4.2: Hyperebene H und Ball $B_r(x_0)$ um x_0 mit $x \in B_r(x_0)$

Wir behaupten nun, dass dann schon für alle $x \in B_r(x_0)$ die Ungleichung

$$f(x) < \alpha \tag{$*$}$$

gilt. Angenommen dies gilt nicht und es existiert ein $x_1 \in B_r(x_0)$, so dass $f(x_1) > \alpha$ gilt. Das Segment

$$[x_0, x_1] \coloneqq \{x_t \coloneqq (1-t)\,x_0 + tx_1 \mid t \in [0,1]\}$$

ist in $B_r(x_0)$ enthalten (da Bälle in normierten Räumen konvex sind). Somit folgt für alle $t \in [0,1]$:

$$f(x_t) \neq \alpha.$$

Andererseits gilt offenbar

$$f(x_t) = \alpha \quad \text{für} \quad t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Dies ist ein Widerspruch, also muss doch schon ($*$) gelten. Wir erhalten, dass für alle $z \in B_1(0)$

$$f(\underbrace{x_0 + rz}_{\in B_r(x_0)}) < \alpha$$

gilt, woraus sofort

$$f(z) < \frac{1}{r}\big(\alpha - f(x_0)\big)$$

folgt. Nutze diese Ungleichung für z und $-z$ aus $B_1(0)$, um Folgendes für alle $z \in B_1(0)$ zu erhalten:

$$|f(z)| < \frac{1}{r}\big(\alpha - f(x_0)\big).$$

Insgesamt folgt:

$$\|f\| = \sup_{z \in B_1(0)} |f(z)| \leq \frac{1}{r}\big(\alpha - f(x_0)\big).$$

■

Definition 4.10. Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen von X. Die Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ *trennt die Mengen A und B*, falls für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha \qquad \text{und} \qquad f(b) \geq \alpha$$

gelten.

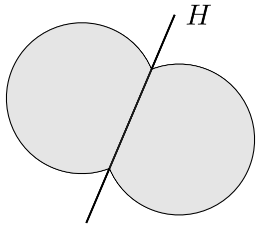


Abbildung 4.3: Zwei *nicht* strikt durch H getrennte Mengen; die Mengen aus Abbildung 4.1 sind hingegen strikt durch H getrennt

Die Hyperebene H *trennt A und B strikt*, falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon \qquad \text{und} \qquad f(b) \geq \alpha + \varepsilon$$

gelten.

Bemerkung 4.11.

i) Geometrisch sagt solch eine Trennung aus, dass A auf der einen Seite von H liegt und B auf der anderen Seite. (Siehe Abbildung 4.1 und Abbildung 4.3.)

ii) Ist X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, so sagen wir, dass A und B durch eine *reelle Hyperebene* getrennt werden, $f\colon X \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Re} f(b) \geq \alpha$$

gelten.

iii) Wir nennen $A \subset X$ konvex, falls für alle $x, y \in A$ auch

$$[x, y] = \{(1-t)\,x + ty \mid t \in [0,1]\} \subset A$$

gilt.

Definition: Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $K \subset X$. Dann ist das *Minkowski-Funktional zu K* definiert durch

$$p(x) := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha}\, x \in K \right\}.$$

Für $K = B_1(0)$ gilt gerade $p(x) = \|x\|$.

Lemma 4.12. Es sei K konvex, offen und $0 \in K$. Dann gilt:

i) Das Minkowski-Funktional p zu K ist sublinear.

ii) Es existiert ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$0 \leq p(x) \leq M\,\|x\|.$$

iii) Zwischen K und p besteht folgender Zusammenhang:

$$K = \{x \in X \mid p(x) < 1\}.$$

Beweis.

i) Seien $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in X$. Dann gilt $p(\lambda x) = \lambda\, p(x)$, denn:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha}\,\lambda x \in K\right\} = \inf\left\{\alpha'\lambda \;\middle|\; \frac{1}{\alpha'\lambda}\,\lambda x \in K\right\} \\ &= \lambda \inf\left\{\alpha' \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha'}\,x \in K\right\} = \lambda\, p(x) \end{aligned}$$

Die $\triangle$-Ungleichung zeigen wir später.

ii) Es sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $B_r(0) \subset K$ gilt. Es gilt dann für alle $x \in X$:

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\,\|x\|,$$

denn:

$$\begin{aligned} p(x) &= \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha}\,x \in K\right\} \\ &\leq \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha}\,x \in B_r(0)\right\} \\ &= \frac{1}{r}\,\|x\| \end{aligned}$$

iii) Es sei $x \in K$. Da K offen ist, folgt $(1+\varepsilon)\,x \in K$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ klein genug. Dann gilt:

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

Falls $p(x) < 1$ gilt, muss ein $\alpha \in (0,1)$ geben, so dass $x/\alpha \in K$ erfüllt ist. Damit gilt:

$$x = \alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) + (1-\alpha)\cdot 0 \in K,$$

denn K ist nach Voraussetzung konvex.

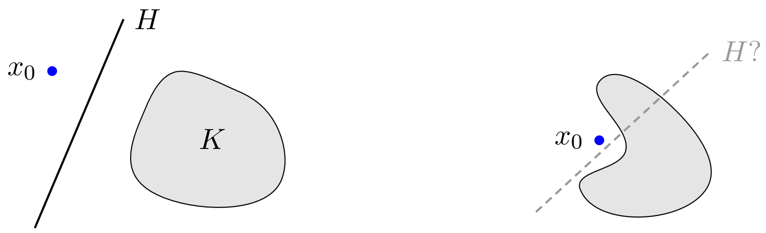


Abbildung 4.4: Links eine konvexe Menge K, getrennt von $\{x_0\}$ durch H; rechts eine nicht konvexe Menge, so dass diese und x_0 nicht durch eine Hyperebene H getrennt werden können

i) Es bleibt die $\triangle$-Ungleichung zu zeigen. Seien $x, y \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Aus dem bisher Gezeigten folgt:

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in K.$$

Damit gilt also für alle $t \in [0,1]$:

$$\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)\,y}{p(y)+\varepsilon} \in K.$$

Wähle nun $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, dann erhalten wir

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in K \quad \text{und mit (iii) folgt} \quad p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\right) < 1.$$

Es folgt:

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig war, folgt die Behauptung.

■

Lemma 4.13. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $K \subset X$ nicht-leer, offen und konvex. Sei weiter $x_0 \in K^\mathsf{c}$. Dann existiert ein $x' \in X'$, so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x_0).$$

Insbesondere trennt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die reelle Hyperebene $\{\operatorname{Re} x' = \operatorname{Re} x'(x_0)\}$ somit $\{x_0\}$ und K.

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung können wir $0 \in K$ annehmen. Sei p das Minkowski-Funktional zu K. Sei weiter $U := \operatorname{span}\{x_0\}$ und $g\colon U \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(tx_0) := t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in U$:

$$g(x) \leq p(x)$$

und für x_0 haben wir $g(x_0) = 1 \leq p(x_0)$, da x_0 nicht in K liegt. (Achtung: tx_0 mit $t < 0$ ist kein Problem, da $g(tx_0) < 0$.)

Wende nun Hahn-Banach (Satz 4.3) an, womit wir ein $x' \colon X \to \mathbb{R}$ erhalten, mit $x'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$ und außerdem $x'|_U = g$. Insbesondere gilt also $x'(x_0) = 1$. Außerdem ist x' stetig (vgl. Lemma 4.12 (ii)). Mit Lemma 4.12 (iii) erhalten wir: für alle $x \in K$ gilt

$$x'(x) < 1.$$

Der komplexe Fall (also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) folgt aus dem Obigen und Lemma 4.4.

■

Satz 4.14 (Satz von Hahn-Banach (erste geometrische Formulierung))**.** Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und disjunkt. Außerdem sei A offen. Dann existiert $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bemerkung: Ist X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so trennt die abgeschlossene Hyperebene $\{x' = \alpha\}$ mit

$$\alpha \in \big[\sup_{a\in A} x'(a), \inf_{b\in B} x'(b)\big]$$

die Mengen A und B.

Beweis. Es sei $C := A - B := \{a - b \mid a \in A,\, b \in B\}$. Dann ist C konvex (leichte Rechnung) und offen, denn:

$$C = \bigcup_{b\in B} \underbrace{(A - \{b\})}_{\text{offen}}.$$

Da A und B disjunkt sind, liegt 0 nicht in C. Aus Lemma 4.13 folgt die Existenz eines $x' \in X'$, welches für alle $x \in C$ die Ungleichung

$$\operatorname{Re} x'(x) < 0 = \operatorname{Re} x'(0)$$

erfüllt. Das heißt, es gilt für alle $a \in A$ und $b \in b$

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < 0 \quad \text{oder äquivalent} \quad \operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b).$$

■

Satz 4.15 (Satz von Hahn-Banach (zweite geometrische Formulierung))**.** Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und disjunkt. Weiter sei A abgeschlossen und B kompakt. Dann exisistiert ein $x' \in X'$ sowie ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $a \in A$ und $b \in B$ die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \alpha \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon$$

gelten.

Beweis. Es sei $C := A - B$ wie bei Satz 4.14. Damit ist C konvex und abgeschlossen (siehe unten) und es gilt $0 \notin C$. Damit existiert ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(0) \cap C = \emptyset$ gilt. Satz 4.14 liefert: Es existiert ein $x' \in X'$ mit $x' \not\equiv 0$, so dass für alle $a \in A$, $b \in B$ und $z \in B_1(0)$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < \operatorname{Re} x'(rz).$$

Also gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$:

$$\operatorname{Re} x'(a-b) \leq -r\,\|x'\|.$$

Für $\varepsilon r\|x'\|/2 > 0$ ergibt sich, dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon.$$

Wähle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\sup_{a\in A}\big(x'(a)+\varepsilon\big) \leq \alpha \leq \sup_{b\in B}\big(x'(b)-\varepsilon\big)$$

erfüllt ist. Noch zu zeigen: C ist abgeschlossen. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in C mit Grenzwert $c \in X$. Da B kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $b_{n_k} \to b \in B$ für $k \to \infty$. Damit ergibt sich:

$$a_{n_k} = c_{n_k} + b_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} c + b.$$

Da A abgeschlossen ist, folgt $c + b \in A$ und damit $c = (c+b) - b \in A - B = C$.

■

Im Allgemeinen lassen sich konvexe Mengen mit $A \cap B = \emptyset$ nicht trennen. Es gibt Beispiele mit A, B zusätzlich abgeschlossen, in denen Trennungen nicht möglich ist. (Siehe Übungen.)

Korollar 4.16. Sei X ein normierter Vektorraum und $U \subsetneq X$ ein Unterraum. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit $x' \neq 0$ und $x'|_U = 0$.

Beweis. Es sei $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin \overline{U}$. Wende Satz 4.15 auf $A = \overline{U}$ und $B = \{x_0\}$ an. Wir erhalten somit ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < \alpha < \operatorname{Re} x'(x_0)$ für alle $x \in \overline{U}$. Es folgt für alle $\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \overline{U}$:

$$\operatorname{Re} x'(\lambda x) < \alpha.$$

Also muss schon $\operatorname{Re} x'(x) = 0$ für alle $x \in \overline{U}$ gelten. Wegen $\operatorname{Re} x'(x_0) > \operatorname{Re} x'(x) = 0$ für alle $x \in U$ ist außerdem $x' \neq 0$.

■

Bemerkung: Korollar 4.16 wird genutzt, um zu zeigen, dass ein Unterraum U dicht in einem umgebenden Raum X liegt. Kann man zeigen, dass für alle $x' \in X'$ aus $x'|_U = 0$ schon $x' = 0$ folgt, so ergibt sich $\overline{U} = X$.

Definition 4.17. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und X' der Dualraum zu X (Definition 3.1 (b)). Dann ist $X'' := (X')'$ der *Bidualraum von X*.

Wir können auf kanonische Weise eine Abbildung $J_X\colon X \to X''$ wie folgt definieren:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} X' \to \mathbb{K} \\ \quad x' \mapsto x'(x) \end{pmatrix}.$$

Dann ist J_X linear und stetig, denn es gilt für alle $x' \in X'$ und alle $x \in X$ die Ungleichung $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$ und damit für alle $x \in X$:

$$\|J_X(x)\| \leq \|x\|. \tag{$*$}$$

Sei

$$\bar{B}_1^{X'} := \overline{B_1^{X'}(0)} = \big\{x' \in X' \bigm| \|x'\| \leq 1\big\}.$$

Dann gilt sogar

$$\|x\| = \sup_{x' \in \bar{B}_1^{X'}} |x'(x)| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sei $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Setze dann das Funktional

$$u' \colon \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto \lambda \|x_0\| \quad \text{falls } \lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } x = \lambda x_0$$

normgleich auf X fort. Es gilt dann $\|x'\| = \|u'\| = 1$ und $x'(x) = \|x\|$. Damit ist in $(*)$ sogar Gleichheit gezeigt. Insgesamt folgt:

Satz 4.18. Die Abbildung J_X ist eine (im Allgemeinen nicht surjektive) lineare Isometrie, d. h. für alle $x \in X$ gilt $\|J_X(x)\|_{X''} = \|x\|_X$. (Insbesondere ist J_X als Isometrie stets injektiv.)

Definition 4.19. Ein Banachraum X ist *reflexiv*, wenn J_X surjektiv (also bijektiv) ist.

Bemerkung: Da J_X injektiv ist, kann X mit einem Unterraum von X'' identifiziert werden.

Definition 4.20. Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein Unterraum und $N \subset X'$ ein Unterraum des Dualraums. Wir definieren dann den *Annihilator von M* als

$$\begin{aligned} M^\perp &:= \big\{x' \in X' \mid \forall\, x \in M \colon\ x'(x) = 0\big\} \\ &= \big\{x' \in X' \bigm| x'|_M = 0\big\} \end{aligned}$$

und den *Annihilator von N* als

$$N^\perp := \big\{x \in X \mid \forall\, x' \in N \colon\ x'(x) = 0\big\}.$$

Bemerkung 4.21.

(i) Es ist $N^\perp$ eine Teilmenge von X und *nicht* von X''.

(ii) Es sind $M^\perp$ und $N^\perp$ abgeschlossene Unterräume.

Satz 4.22. Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ ein Unterraum. Dann gilt

$$\big(M^\perp\big)^\perp = \overline{M}.$$

Sei außerdem $N \subset X'$ ein Unterraum. Dann gilt

$$\big(N^\perp\big)^\perp \supset \overline{N}.$$

(Im Allgemeinen ist diese Inklusion echt.)

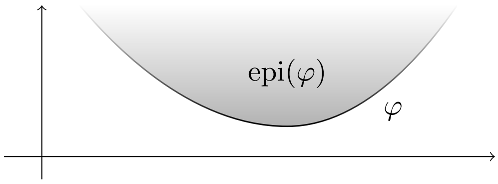


Abbildung 4.5: Epigraph einer Funktion φ

Definition 4.23.

i) Es sei E eine Menge und $\varphi\colon E \to (-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung. Wir definieren dann
$$D(\varphi) := \{x \in E \mid \varphi(x) < \infty\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}).$$

ii) Der *Epigraph von* φ (Abbildung 4.5) ist die Menge
$$\operatorname{epi}(\varphi) := \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq \lambda\}.$$

Definition 4.24. Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Abbildung $\varphi\colon E \to (-\infty, \infty]$ ist *unterhalbstetig*, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Menge
$$\{\varphi \leq \lambda\} := \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \lambda\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \lambda}) \subset E$$
abgeschlossen ist.

Lemma 4.25. Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\varphi\colon E \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Es ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn $\operatorname{epi}(\varphi)$ abgeschlossen in $E \times \mathbb{R}$ (mit der Produkttopologie) ist.

(ii) Es ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn für alle $x \in E$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Umgebung V von x existiert, so dass für alle $y \in V$ gilt: $\varphi(y) \geq \varphi(x) \cdot \varepsilon$.

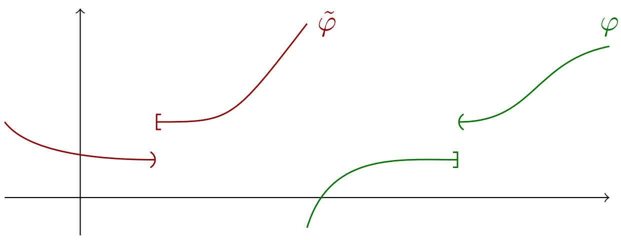


Abbildung 4.6: Die Funktion $\tilde{\varphi}$ ist *nicht* unterhalbstetig, φ schon

(iii) Ist φ unterhalbstetig, so gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E$:

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Falls E ein metrischer Raum ist, so gilt auch die Umkehrung.

(iv) Sind φ und $\tilde{\varphi}\colon E \to (-\infty, \infty]$ unterhalbstetig, so auch $\varphi + \tilde{\varphi}$.

(v) Ist $(\varphi_i)_{i\in I}$ eine Familie unterhalbstetiger Abbildungen $E \to (-\infty, \infty]$ mit

$$\varphi(x) = \sup_{i\in I} \varphi_i(x)$$

für alle $x \in E$, so ist auch φ unterhalbstetig.

(vi) Ist $E \neq \emptyset$ folgenkompakt und φ unterhalbstetig, so nimmt die Funktion φ ihr Minimum an, d. h. es existiert ein $x_0 \in E$ mit $\varphi(x_0) = \inf_{x\in E} \varphi(x)$.

Beweis. Siehe Übungen für Teile der Aussagen. Wir beweisen hier nur (vi):

Sei also E folgenkompakt und nicht leer und sei φ unterhalbstetig. Sei dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E, für welche $\big(\varphi(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\inf_{x\in E} \varphi(x)$ konvergiert. Weil E folgenkompakt ist, existiert dann eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und wir definieren $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Aus (iii) folgt dann:

$$\varphi(x_0) \leq \inf_{x\in E} \varphi(x) \leq \varphi(x_0).$$

(Dies zeigt auch, dass $\inf_{x\in E} \varphi(x) > -\infty$ gelten muss.)

∎

Definition 4.26. Sei X ein Vektorraum. Eine Funktion $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ ist *konvex*, wenn φ für alle $x, y \in X$ und alle $t \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$\varphi\big(tx + (1-t)\,y\big) \;\leq\; t\,\varphi(x) + (1-t)\,\varphi(y)$$

erfüllt. (Abbildung 4.7)

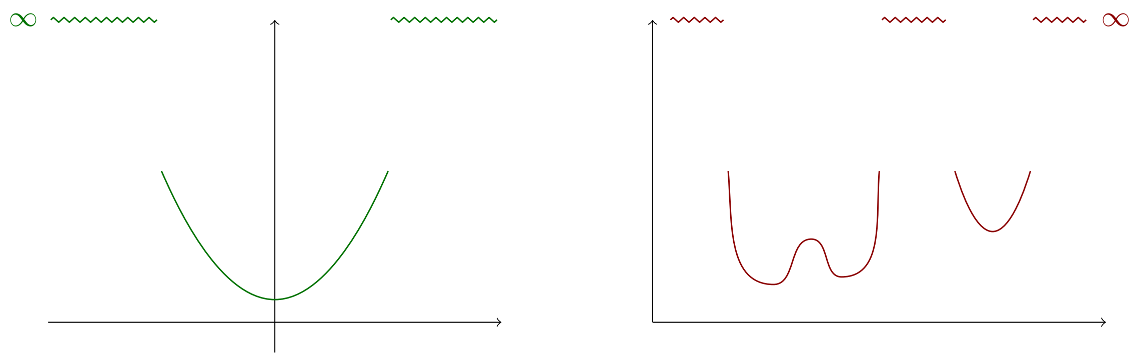


Abbildung 4.7: Konvexe Funktion links und *nicht* konvexe Funktion rechts

Lemma 4.27. Sei X ein Vektorraum.

i) Es ist $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ genau dann konvex, wenn $\operatorname{epi}(\varphi)$ eine konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$ ist.

ii) Ist $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ konvex, so ist die Menge $\{\varphi \leq \lambda\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ konvex. (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.)

iii) Sind $\varphi_1, \varphi_2\colon X \to (-\infty, \infty]$ konvex, so auch $\varphi_1 + \varphi_2$.

iv) Ist $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine Familie konvexer Abbildungen $X \to (-\infty, \infty]$, so ist auch

$$\sup_{i \in I} \varphi_i \coloneqq \bigl(x \mapsto \sup_{i \in I} \varphi_i(x)\bigr)$$

konvex.

Ab jetzt betrachten wir vornehmlich normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Definition 4.28. Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ eine Funktion mit $D(\varphi) \neq \emptyset$ (d. h. φ ist nicht konstant ∞). Dann ist die *Legendre-Transformation* (oder *konjugierte Funktion*) von φ die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^*\colon X' &\to (-\infty, \infty] \\ f &\mapsto \sup_{x \in X} \bigl(f(x) - \varphi(x)\bigr). \end{aligned}$$

Bemerkung 4.29.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Ist $f \in (\mathbb{R}^n)'$, so gibt es genau einen Vektor $y_f \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = x \cdot y \coloneqq \langle x, y \rangle_{\text{eukl}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir identifizieren dann $(\mathbb{R}^n)'$ mit $\mathbb{R}^n$ vermöge

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)' &\longleftrightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\longmapsto y_f \\ (x \mapsto x \cdot y) &\longleftarrow y\,, \end{aligned}$$

und somit gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \bigl(x \cdot y - \varphi(x)\bigr).$$

(ii) Es ist φ^* stets konvex und unterhalbstetig. Dies folgt daraus, dass wir das Supremum betrachten und dass $f \mapsto f(x) - \varphi(x)$ konvex und stetig ist (da affin linear).

(iii) Es gilt für alle $x \in X$ und alle $f \in X'$ die Ungleichung

$$f(x) \leq \varphi(x) + \varphi^*(f),$$

was direkt aus der Definiton von φ^* folgt.

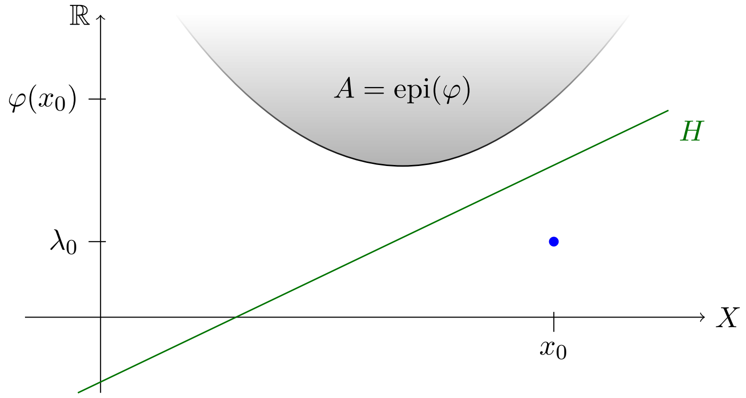


Abbildung 4.8: Skizze zum Beweis von Theorem 4.30

(iv) Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) ist ein Spezialfall von (iii). Seien $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und setze $\varphi(x) := \frac{1}{p} |x|^p$. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\varphi^*(y) = \frac{1}{p'} |y|^{p'}.$$

(Siehe Übungen.)

Theorem 4.30. Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig mit $D(\varphi) \neq \emptyset$. Dann gilt $D(\varphi^*) \neq \emptyset$ und φ ist von unten durch eine affin lineare Funktion beschränkt.

Beweis. Sei $x_0 \in D(\varphi)$ und sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 < \varphi(x_0)$. Wende nun die zweite geometrische Form des Satzes von Hahn-Banach (4.15) auf den Raum $X \times \mathbb{R}$, die abgeschlossene Menge $A := \mathrm{epi}(\varphi)$ und die kompakte Menge $B := \{(x_0, \lambda_0)\}$ an. (Abbildung 4.8) Wir erhalten somit ein stetiges lineares Funktional $\Phi\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass die abgeschlossene Hyperebene $H = \{\Phi = \alpha\} \subset X \times \mathbb{R}$ die Mengen A und B trennt. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Phi\big((x, 0)\big) \end{aligned}$$

ist stetig und es gilt $f \in X'$. Mit $k := \Phi\big((0, 1)\big)$ gilt für alle $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$

$$\Phi\big((x, \lambda)\big) = f(x) + k\lambda.$$

Es gilt weiter $\Phi|_A > \alpha$ und $\Phi|_B < \alpha$. Dann gilt also $f(x_0) + k\lambda_0 < \alpha$ und

$$f(x) + k\lambda > \alpha$$

für alle $(x, \lambda) \in \mathrm{epi}(\varphi)$. Somit erhalten wir für alle $x \in D(\varphi)$:

$$f(x) + k\varphi(x) > \alpha \tag{$\star$}$$

und für den Punkt (x_0, λ_0):

$$f(x_0) + k\varphi(x_0) > \alpha > f(x_0) + k\lambda_0.$$

Dies zeigt $k > 0$ (da $\varphi(x_0) > \lambda_0$ nach Wahl von λ_0). Aus ($\star$) folgt, dass für alle $x \in D(\varphi)$ gilt:

$$-\frac{1}{k} f(x) - \varphi(x) < -\frac{\alpha}{k}.$$

Daraus folgt $\varphi^*\big(-\frac{1}{k} f\big) < \infty$ (nach Definition von φ^*) und damit

$$\varphi(x) > -\frac{1}{k} f(x) + \frac{\alpha}{k},$$

aber gerade das wollten wir zeigen.

■

Wir können auch die Funktion φ^{**} betrachten. Dies wäre eigentlich eine Abbildung von X'' nach $\mathbb{R}$. Wir schränken diese aber auf X ein (unter der Einbettung von X nach X'' vermöge der Isometrie J_X, siehe Definition 4.17 ff.).

Definition 4.31. Es sei $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ mit $D(\varphi) \neq \emptyset$. Wir definieren $\varphi^{**}\colon X \to \mathbb{R}$ für alle $x \in X$ durch

$$\varphi^{**}(x) \coloneqq \sup_{f \in X'} \big(f(x) - \varphi^*(f)\big).$$

Theorem 4.32 (Fenchel-Moreau)**.** Sei $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und $D(\varphi) \neq \emptyset$. Dann gilt $\varphi^{**} = \varphi$.

Beweis. Schritt 1: Wir setzen $\varphi \geq 0$ voraus. Da für alle $x \in X$ und alle $f \in X'$

$$f(x) - \varphi^*(f) \leq \varphi(x)$$

gilt, erhalten wir zunächst $\varphi^{**} \leq \varphi$. Angenommen es existiert ein $x_0 \in X$ mit

$$\varphi^{**}(x_0) < \varphi(x_0)$$

(wobei $\varphi(x_0) = \infty$ möglich ist). Nutze wieder den Satz von Hahn-Banach in der zweiten geometrischen Formulierung (4.15) mit $A = \operatorname{epi}(\varphi)$ abgeschlossen und $B = \{(x_0, \varphi^{**}(x_0)\}$ kompakt. (Vgl. Beweis von Theorem 4.30.) Wir erhalten somit ein $f \in X'$ und $k, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha$ und

$$f(x) + k\lambda > \alpha. \tag{$\diamond$}$$

für alle $(x, \lambda) \in \operatorname{epi}(\varphi)$. Wähle $x \in D(\varphi)$ und betrachte $\lambda \to \infty$ in der letzten Ungleichung. Es folgt $k \geq 0$. Jetzt sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da $\varphi \geq 0$ gilt, folgt aus ($\diamond$), dass für alle $x \in D(\varphi)$ gilt:

$$f(x) + (k + \varepsilon)\,\varphi(x) \geq \alpha.$$

Somit erhalten wir für alle $x \in D(\varphi)$:

$$-\frac{1}{k+\varepsilon} f(x) - \varphi(x) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Dies zeigt:

$$\varphi^*\left(-\frac{f}{k+\varepsilon}\right) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Die Definition von φ^{**} liefert für $\varphi^{**}(x_0)$:

$$\varphi^{**}(x_0) \geq -\frac{f}{k+\varepsilon}(x_0) - \varphi^*\left(-\frac{f}{k+\varepsilon}\right) \geq -\frac{f}{k+\varepsilon}(x_0) + \frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Damit folgt

$$f(x_0) + (k+\varepsilon)\,\varphi^{**}(x_0) \geq \alpha,$$

was aber für $\varepsilon \to 0$ einen Widerspruch zu $f(x_0) + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha$ liefert.

Schritt 2 (allgemeiner Fall): Theorem 4.30 sichert uns $D(\varphi^*) \neq \emptyset$. Wähle dann $f_0 \in D(\varphi^*)$ und setze für alle $x \in X$

$$\bar{\varphi}(x) := \varphi(x) - f_0(x) + \varphi^*(f_0).$$

Es gilt (wie einfache Rechnungen zeigen), dass $\bar{\varphi}$ konvex und unterhalbstetig ist, und wir haben $\bar{\varphi} \geq 0$ (denn $\varphi^*(f_0) \geq f_0(x) - \varphi(x)$ für $x \in X$). Dann gilt nach Schritt 1: $(\bar{\varphi})^{**} = \bar{\varphi}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}(\bar{\varphi})^*(f) &= \sup_{x\in X}\big(f(x) - \bar{\varphi}(x)\big) = \sup_{x\in X}\big(f(x) - \varphi(x) + f_0(x) - \varphi^*(f_0)\big)\\ &= \varphi^*(f+f_0) - \varphi^*(f_0)\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}(\bar{\varphi})^{**} &= \sup_{f\in X'}\big(f(x) - (\bar{\varphi})^*(f)\big) = \sup_{f\in X'}\big(f(x) - \varphi^*(f+f_0) + \varphi^*(f_0)\big)\\ &= \sup_{f\in X'}\big((f+f_0)(x) - \varphi^*(f+f_0) - f_0(x) + \varphi^*(f_0)\big)\\ &= \varphi^{**}(x) - f_0(x) + \varphi^*(f_0).\end{aligned}$$

Da $(\bar{\varphi})^{**} = \bar{\varphi}$ gilt, folgt $\varphi^{**} = \varphi$.

■

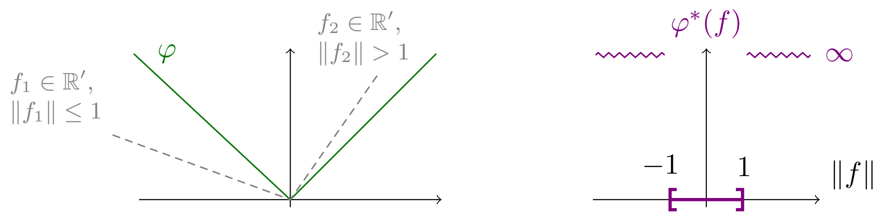


Abbildung 4.9: Beispiel 4.33 (i) für $\varphi(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$ mit zugehörigem φ^*

Beispiele 4.33.

(i) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi(x) := \|x\|$ für alle $x \in X$. Dann gilt:

$$\varphi^*(f) = \sup_{x\in X}\big(f(x) - \varphi(x)\big) = \big(f(x) - \|x\|\big) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \|f\| \le 1 \\ \infty, & \text{falls } \|f\| > 1. \end{cases}$$

Dies erhalten wir wie folgt. Es gilt:

$$\|f\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{f(x)}{\|x\|}.$$

Für $\|f\| > 1$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x)/\|x\| > 1$ und damit $f(x) - \|x\| > 0$. Ersetze nun x durch αx mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ und betrachte $\alpha \to \infty$. Es folgt:

$$\sup_{x\in X} \big(f(x) - \|x\|\big) = \infty.$$

Der andere Fall ergibt sich ähnlich. (Abbildung 4.9) Es folgt mit Theorem 4.32:

$$\|x\| = \varphi(x) = \varphi^{**}(x) = \sup_{f\in X'} \big(f(x) - \varphi^*(f)\big) = \sup_{\substack{f\in X',\\ \|f\|\le 1}} f(x).$$

(ii) Sei X ein normierter Raum und $K \subset X$. Wir definieren die sogenannte *Indikatorfunktion von* K für alle $x \in X$ durch

$$I_K(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in K \\ \infty & \text{falls } x \notin K. \end{cases}$$

(Achtung: dies ist *nicht* die charakteristische Funktion von K.) Einfache Überlegungen liefern: I_K ist genau dann konvex, wenn K konvex ist und I_K ist genau dann unterhalbstetig, wenn K abgeschlossen ist. Die *Trägerfunktion zu* K ist dann definiert durch die konjugierte Funktion $(I_K)^*$ von I_K. Man kann nun folgende Aussagen zeigen:

- Falls $K = M \subset X$ ein Unterraum ist, so gilt:

$$(I_M)^* = I_{M^\perp}, \quad (I_M)^{**} = I_{(M^\perp)^\perp}.$$

- Falls M zusätzlich abgeschlossen ist, so gilt

$$(I_M)^{**} = I_M \quad \text{und somit} \quad \big(M^\perp\big)^\perp = M.$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\emptyset \neq K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ erhalten wir $(I_K)^*$ als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$:

$$(I_K)^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \big(x \cdot y - I_K(x)\big) = \sup_{x\in[a,b]} x \cdot y = \begin{cases} by, & \text{falls } y \ge 0 \\ ay, & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

(Siehe Abbildung 4.10.)

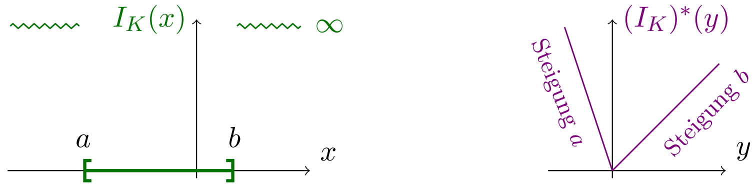


Abbildung 4.10: Beispiel 4.33 (ii) für $K = [a, b]$ mit $a = -3$ und $b = 1$

(iii) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{|x|} = \infty.$$

Dann gilt: In

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \big(x \cdot y - g(x)\big)$$

wird das Supremum für ein endliches $x \in \mathbb{R}$ angenommen (da $x \cdot y - g(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$). Berechne x maximal als Lösung von $y - g'(x) = 0$. Falls g' streng monoton ist, gibt es höchstens eine solche Lösung. Für $y \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$g^*(y) = (g')^{-1}(y)\, y - g\big((g')^{-1}(y)\big).$$

Falls $g \in C^2$ gilt, so können wir folgende Rechnung machen:

$$\begin{aligned}(g^*)'(y) &= (g')^{-1}(y) + \big((g')^{-1}(y)\big)'\, y - g'\big((g')^{-1}(y)\big)\, \big((g')^{-1}(y)\big)' \\ &= (g')^{-1}(y).\end{aligned}$$

Das heißt, dass wir unter geeigneten Voraussetzungen an g die Formel

$$(g^*)'(y) = (g')^{-1}(y)$$

erhalten. In der Theorie erhalten wir dann g^*, indem wir g ableiten, die Umkehrfunktion von g' bestimmen und zu dieser eine Stammfunktion finden.

5 Bairescher Kategoriensatz und seine Konsequenzen

Satz 5.1 (Bairescher Kategoriensatz). Sei (X, d) ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum. Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von in X abgeschlossenen Mengen und gelte

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass das Innere von A_{k_0} nicht leer ist, d. h. so dass $A^\circ_{k_0} \neq \emptyset$ gilt.

Beweis. Angenommen für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $A^\circ_k = \emptyset$. Dann ist für alle offenen, nicht-leeren Teilmengen $U \subset X$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Menge $U \setminus A_k$ offen und nicht leer; insbesondere existiert in dieser Situation ein $x \in X$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, o. E. $\varepsilon \leq 1/k$, mit

$$\overline{B_\varepsilon(x)} \subset (U \setminus A_k).$$

Wir wählen für den ersten Schritt $U = X$ und konstruieren dann auf obige Weise induktiv Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X und $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon_k \leq 1/k \quad \text{und} \quad \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset \big(B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k\big)$$

gilt. Dann ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X, denn: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es nach Konstruktion ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_k \leq \varepsilon$ und für alle $\ell \in \mathbb{N}_{\geq k}$ gilt dann

$$x_\ell \in B_{\varepsilon_k}(x_k).$$

Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Weil für alle $k \in \mathbb{N}$ fast alle Folgenglieder von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im abgeschlossenen ε_k-Ball um x_k liegen, muss dies auch für den Grenzwert x gelten, d h. für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset X \setminus A_k.$$

Es folgt der Widerspruch

$$x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus A_k) = X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset.$$

■

Bemerkung:
Die Vollständigkeit von X ist hier entscheidend. Als Gegenbeispiel betrachte man $X = \mathbb{Q}$.

Satz 5.2 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{F} \subset C^0(X,Y)$. Es gelte für alle $x \in X$:

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty.$$

Dann existieren ein $x_0 \in X$, ein $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass gilt:

$$\forall\, x \in \overline{B_\varepsilon(x_0)} \ \ \forall\, f \in \mathcal{F}\colon \quad \|f(x)\|_Y \leq C.$$

Beweis. Die Menge

$$A_k := \bigcap_{f\in\mathcal{F}} \big\{x \in X \bigm| \|f(x)\|_Y \leq k\big\}$$

ist für alle $k \in \mathbb{N}$ abgeschlossen. Außerdem gibt es nach Voraussetzung für alle $x \in X$ ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt: $\|f(x)\| \leq k$. Also gilt

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Der Bairescher Kategoriensatz (5.1) liefert: es existieren $k_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \subset A_{k_0}.$$

■

Satz 5.3 (Banach-Steinhaus). Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$. Für alle $x \in X$ gelte: $\sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty$. Dann folgt schon

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| < \infty.$$

Beweis. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 5.2) liefert: es gibt $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$\|x - x_0\| \leq \varepsilon_0 \implies \forall\, T \in \mathcal{T}\colon\ \|Tx\| \leq C.$$

Damit folgt, dass für alle $x \in \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)}$ und alle $T \in \mathcal{T}$ gilt:

$$\left\| T\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon_0}\right)\right\| \leq \frac{C + \sup_{\tilde{T}\in\mathcal{T}} \|\tilde{T}x_0\|_Y}{\varepsilon_0} =: C_0.$$

Es folgt $\|T\| \leq C_0$, denn $\frac{x-x_0}{\varepsilon_0}$ nimmt alle Vektoren der Norm kleiner-gleich eins an.

■

Bemerkung 5.4.

(i) Der Satz von Banach-Steinhaus (5.3) liefert das erstaunliche Resultat, dass eine punktweise beschränkte Familie von stetigen linearen Operatoren schon beschränkt in der Operatornorm ist.

(ii) Punktweise Grenzwerte von stetigen Funktionen sind im Allgemeinen nicht stetig. Aus dem Satz von Banach-Steinhaus (5.3) folgt aber, dass dies für lineare Abbildungen doch gilt.

(iii) Ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von linearen Operatoren mit punktweisem Grenzwert T, so gilt im Allgemeinen nicht $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$. Es gilt aber eine etwas schwächere Aussage, siehe Korollar 5.5.

Korollar 5.5. Seien X und Y Banachräume. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X,Y)$, so dass für alle $x \in X$ die Folge $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y konvergiert. Setzen wir

$$Tx \coloneqq \lim_{n\to\infty} T_n x$$

für alle $x \in X$, so gilt:

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$

(b) $T \in L(X,Y)$

(c) $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$

Beweis. Zunächst ist aufgrund der Linearität des Grenzwerts klar, dass auch T linear ist. Aussage (a) folgt unmittelbar aus dem dem Satz von Banach-Steinhaus (5.3). Es existiert somit ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, welches $\|T_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Somit gilt für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|T_n x\| &\leq \|T_n\| \cdot \|x\| \\ &\leq C\,\|x\| \end{aligned}$$

Aus der unteren Ungleichung erhalten wir im Grenzwert $n \to \infty$ für alle $x \in X$ die Ungleichung $\|Tx\| \leq C\,\|x\|$, woraus folgt, dass T stetig ist. Damit ist also (b) gezeigt. Aus der oberen Ungleichung erhalten wir

$$\liminf_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|x\|,$$

und weil $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in X$ konvergiert, gilt für alle $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$ (mithilfe der Stetigkeit der Norm):

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \liminf_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

Daraus folgt (c).

■

Korollar 5.6. Sei Z ein Banachraum über $\mathbb{K}$ und $B \subset Z$ eine Teilmenge von Z. Für alle $f \in Z'$ sei $f(B) \subset \mathbb{K}$ beschränkt. Dann ist B beschränkt in Z.

Beweis. Nutze Banach-Steinhaus (Satz 5.3) mit (in den dortigen Bezeichnern) $X = Z'$, $Y = \mathbb{K}$ und

$$\mathcal{T} = \{J_{Z'}(b) \mid b \in B\} \subset Z''$$

(mit $J_{Z'}$ wie nach Definition 4.17, d. h. für $b \in B$ und $f \in Z'$ gilt $J_{Z'}(b)(f) = f(b)$). Nach Voraussetzung gilt für alle $f \in Z'$:

$$\sup_{b\in B} |J_{Z'}(b)(f)| = \sup_{b\in B} |f(b)| < \infty.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus gilt also:

$$\sup_{b\in B} \|J_{Z'}(b)\| = \sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| < \infty.$$

Nach Satz 4.18 ist J_X aber eine Isometrie, also folgt

$$\sup_{b\in B} \|b\| = \sup_{b\in B} \|J_{Z'}(b)\| < \infty,$$

aber dies bedeutet gerade, dass B in Z beschränkt ist.

■

Bemerkung: Im endlich-dimensionalen besagt dieses Korollar: Eine Menge ist beschränkt, falls die Projektion auf alle Komponenten beschränkt ist. (Das Korollar ist also eine Verallgemeinerung dieser Tatsache.)

Korollar 5.7. Sei Z ein Banachraum über $\mathbb{K}$ und sei $A \subset Z'$ eine Teilmenge des Dualraums. Sei außerdem für alle $x \in Z$ die Menge

$$A(x) := \{f(x) \mid f \in A\}$$

beschränkt in $\mathbb{K}$. Dann ist A beschränkt in Z'.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Banach-Steinhaus (Satz 5.3) mit (in den dortigen Bezeichnern) $X = Z$, $Y = \mathbb{K}$ und $\mathcal{T} = A$.

■

Definition 5.8. Seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist f *offen*, wenn Bilder offener Mengen offen sind, d. h. wenn für alle in X offenen Teilmengen $U \subset X$ auch $f(U)$ offen in Y ist.

Bemerkung: Sind X, Y normierte Räume und ist ist f linear, so ist f genau dann offen, wenn es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$B_\delta(0) \subset f\big(B_1(0)\big).$$

Satz 5.9 (Satz von der offenen Abbildung)**.** Seien X und Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Dann ist T genau dann surjektiv, wenn T offen ist.

Beweis. „$\Leftarrow$": Es existiert also ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$B_\delta(0) \subset T\big(B_1(0)\big).$$

Durch Skalierung erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$B_{k\delta}(0) \subset T\big(B_k(0)\big).$$

Daraus folgt, dass T surjektiv ist.

„$\Rightarrow$": Weil T surjektiv ist, gilt

$$Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\overline{T\big(B_k(0)\big)}}_{=:A_k}.$$

Wir wenden den Bairescher Kategoriensatz (5.1) auf die Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an und erhalten somit $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0},\ y_0 \in Y,\ k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)} \subset \overline{T\big(B_{k_0}(0)\big)}.$$

Sei $y \in \overline{B_{\varepsilon_0}(0)}$, dann gilt $y_0 + y \in \overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)}$. Wähle dann eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B_{k_0}(0)$ mit

$$Tx_n \to y_0 + y \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Sei außerdem $x_0 \in X$ mit $Tx_0 = y_0$. Dann erhalten wir

$$T(x_n - x_0) = Tx_n - y_0 \to y \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Daraus folgt:

$$T\Bigg(\underbrace{\frac{x_n - x_0}{k_0 + \|x_0\|}}_{\in B_1(0)}\Bigg) \to \underbrace{\frac{y}{k_0 + \|x_0\|}}_{\in B_\delta(0)} \qquad \text{für } n \to \infty$$

mit $\delta := \frac{\varepsilon_0}{k_0 + \|x_0\|}$. Das bedeutet aber:

$$B_\delta(0) \subset \overline{T\big(B_1(0)\big)}.$$

Um die Behauptung zu zeigen, benötigen wir diese Inklusion aber ohne den Abschluss auf der rechten Seite. Sei dazu nun $y \in B_\delta(0)$. Dann gibt es ein $x \in B_1(0)$ mit $\|y - Tx\| < \delta/2$. Daraus folgt:

$$2(-Tx + y) \in B_\delta(0).$$

Indem wir $y_1 := y$ setzen, erhalten wir so induktiv Folgen $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $B_\delta(0)$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $B_1(0)$ mit folgender Eigenschaft für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$y_{k+1} = 2(y_k - Tx_k).$$

Es folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$2^{-k} y_{k+1} = 2^{-k+1} y_k - \underbrace{T(2^{-k+1} x_k)}_{=:a_k}$$

oder durch umstellen

$$a_k = 2^{-(k-1)} y_k - 2^{-k} y_{k+1}.$$

Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{k=1}^m a_n$ offenbar eine Teleskopsumme, also gilt:

$$\sum_{k=1}^m a_k = y_1 - 2^{-m} y_{m+1}.$$

Da $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gilt $2^{-m}y_{m+1} \to 0$ für $m \to \infty$. Also erhalten wir:

$$\lim_{m\to\infty} T\Big(\sum_{k=1}^m 2^{-(k-1)} x_k\Big) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m a_k = y_1.$$

Außerdem konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty 2^{-(k-1)} x_k$ in X, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^\infty \|2^{-(k-1)} x_k\| \leq \sum_{k=1}^\infty 2^{-(k-1)} = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

womit man leicht zeigt, dass $\big(\sum_{k=1}^m 2^{-(k-1)} x_k\big)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X ist (und damit auch konvergent, aufgrund der Vollständigkeit von X). Sei also $\tilde{x} := \sum_{k=1}^\infty 2^{-(k-1)} x_k$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von T auch $T(\tilde{x}) = y_1 = y$ und aus der obigen Betrachtung folgt außerdem $\|\tilde{x}\| \leq 2 < 3$. Also gilt $B_\delta(0) \subset T\big(B_3(0)\big)$ und durch Skalierung erhalten wie gewünscht:

$$B_{\delta/3}(0) \subset T\big(B_1(0)\big).$$

■

Satz 5.10 (Satz von der inversen Abbildung)**.** Seien X und Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$ bijektiv. Dann gilt: $T^{-1} \in L(X, Y)$.

Beweis. Weil T surjektiv ist, liefert der Satz von der offenen Abbildung (5.9), dass T offen ist. Daraus folgt unmittelbar, dass T^{-1} stetig ist.

■

Korollar 5.11. Sei X ein Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_{①}$ und $\|\cdot\|_{②}$. Außerdem gebe es ein $C_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichung $\|x\|_{②} \leq C_1 \|x\|_{①}$ gilt. Sei weiter $(X, \|\cdot\|_{①})$ ein Banachraum. Dann gilt: $(X, \|\cdot\|_{②})$ ist genau dann ein Banachraum, wenn es ein $C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $\|x\|_{①} \leq C_2 \|x\|_{②}$ für alle $x \in X$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ ist klar.
„$\Rightarrow$“: Die Identität

$$\mathrm{id}\colon (X, \|\cdot\|_{①}) \to (X, \|\cdot\|_{②})$$

ist stetig und bijektiv. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert:

$$\mathrm{id}^{-1}\colon (X, \|\cdot\|_{②}) \to (X, \|\cdot\|_{①})$$

ist stetig. Daraus erhalten wir eine Konstante C_2 wie gefordert.

■

Satz 5.12 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien X und Y Banachräume, $D(T)$ ein Unterraum von X und sei $T\colon D(T) \to Y$ eine lineare Abbildung. Sei

$$\operatorname{graph}(T) \coloneqq \big\{(x, Tx) \in X \times Y \mid x \in D(T)\big\}$$

der *Graph von T in $X \times Y$*. Dabei wird $X \times Y$ zu einem Banachraum bezüglich folgender Norm:

$$\|\cdot\|\colon X \times Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y) \mapsto \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Dann gilt: Ist $D(T)$ abgeschlossen, so ist $\operatorname{graph}(T)$ genau dann abgeschlossen in $X \times Y$, wenn $T \in L\big(D(T), Y\big)$ gilt.

Beweis. „$\Leftarrow$": klar, denn: Sei $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{graph}(T)$, die in $X \times Y$ konvergiert. Sei $x \in X$ der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt wegen der Stetigkeit von T auch $Tx_n \to Tx$ für $n \to \infty$, aber $(x, Tx) \in \operatorname{graph}(T)$ gilt nach Definition von $\operatorname{graph}(T)$.

„$\Rightarrow$": Da $\operatorname{graph}(T)$ abgeschlossen ist, muss dieser Raum (mit der Einschränkung der Norm von $X \times Y$) ein Banachraum sein. Seien P_X und P_Y die Projektionen $X \times Y \to X$ bzw. $X \times Y \to Y$. Dann sind P_X, P_Y stetig und linear und P_X ist bijektiv von $\operatorname{graph}(T)$ auf $D(T)$. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert:

$$P_X^{-1} \in L\big(D(T), \operatorname{graph}(T)\big).$$

Daraus folgt: $T = P_Y P_X^{-1} \in L\big(D(T), Y\big)$.

■

5.13 (Projektoren). Sei Z ein Vektorraum und $A \subset Z$. Sei weiter X ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein Unterraum.

(1) Eine Abbildung $P\colon Z \to Z$ ist eine *Projektion auf A*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$P(Z) \subset A \quad \text{und} \quad P|_A = \operatorname{Id}_A.$$

Äquivalent kann man fordern:

$$P(Z) = A \quad \text{und} \quad P^2 = P \circ P = P.$$

Es folgt:

$$P\,(\operatorname{Id} - P) = (\operatorname{Id} - P)\,P = 0.$$

Beispiel: orthogonale Projektionen im euklidschen Raum sind Projektionen.

(2) Sei $P\colon X \to Y$ eine lineare Projektion auf Y. Dann gilt $Y = R(P)$ und $\operatorname{Id} = (\operatorname{Id} - P) + P$ und $(\operatorname{Id} - P)$ ist eine Projektion auf $N(P)$. (Zur Definition des Bildraums $R(\,\cdot\,)$ und des Nullraums $N(\,\cdot\,)$, siehe Definition 3.6.)

Es gilt $X = N(P) \oplus R(P) = R(\operatorname{Id} - P) \oplus N(\operatorname{Id} - P)$, $N(P) = R(\operatorname{Id} - P)$ und $R(P) = N(\operatorname{Id} - P)$, denn:

Für $x \in X$ gilt: $x = (x - Px) + Px$ mit $(x - Px) \in N(P)$ und $Px \in R(P)$. Ist $x \in N(P) \cap R(P)$, so gilt $Px = 0$ und $x = Px$, also $x = 0$. Außerdem gelten folgende Äquivalenzen:

$$x \in N(\operatorname{Id} - P) \iff x - Px = 0 \iff x = Px \iff x \in R(P).$$

Also gilt $N(\operatorname{Id} - P) = R(P)$.

(3) Eine Abbildung $P\colon X \to X$ ist ein *Projektor auf* Y, falls P eine stetige lineare Projektion auf Y ist. Es sei

$$\operatorname{Pr}(X) \coloneqq \{P\colon X \to X \mid P \text{ ist Projektor}\}.$$

Falls P ein Projektor ist, so ist klarerweise auch $\operatorname{Id} - P$ ein Projektor und $N(P)$ sowie $R(P) = N(\operatorname{Id} - P)$ sind abgeschlossen.

Satz 5.14 (Satz vom abgeschlossenen Komplement)**.** Sei X ein Banachraum und seien Y und Z Unterräume von X. Außerdem gelte $X = Z \oplus Y$ und Y sei abgeschlossen. Dann gilt: Der Unterraum Z ist genau dann abgeschlossen, wenn es einen stetigen Projektor P auf Y mit $N(P) = Z$ gibt.

Beweis. „$\Leftarrow$“ ist klar, da P stetig ist.

„$\Rightarrow$“: Sei $\tilde{X} \coloneqq Z \times Y$. Definiere

$$T\colon \tilde{X} \to X, \quad (z, y) \mapsto z + y.$$

Dann ist T linear, bijektiv und stetig (wie man mithilfe der $\triangle$-Ungleichung einsieht). Weil Y und Z abgeschlossen sind, ist auch $\tilde{X}$ ein abgeschlossener Unterraum von $X \times X$ und damit ein Banachraum. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert $T^{-1} \in L(X, \tilde{X})$. Sei

$$P\colon X \to Y, \quad z + y \mapsto y \quad (\text{mit } z \in Z \text{ und } y \in Y).$$

Dann ist P eine lineare Projektion auf Y und es gilt $N(P) = Z$. Außerdem ist P stetig, denn es gilt $P = P_Y T^{-1}$, wobei P_Y die Projektion $\tilde{X} \to Y$ auf die zweite Komponente ist. Damit ist P der gesuchte Projektor.

■

Definition 5.15. Seien X und Y normierte Vektorräume und $T \in L(X, Y)$. Dann ist der *adjungierte Operator* T' die Abbildung

$$\begin{aligned} T'\colon Y' &\to X' \\ y' &\mapsto \begin{pmatrix} X \mapsto \mathbb{K} \\ x \mapsto y'(Tx) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Es gilt

$$|(T'y')(x)| = |y'(Tx)| \leq \|y'\| \cdot \|Tx\| \leq \|y'\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

für alle $y' \in Y'$ und alle $x \in X$. Dies zeigt, dass T' wohldefiniert ist ($T'y' \in X'$ für alle $y' \in Y'$) und dass $\|T'y'\| \leq \|y'\| \cdot \|T\|$ gilt. Daraus folgt $T' \in L(Y', X')$.

Beispiel 5.16 (Shift-Operator). Wir betrachten auf ℓ^2 über $\mathbb{R}$ den Shift-Operator

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) \coloneqq (x_2, x_3, \dots).$$

Wir möchten nun T' bestimmen. Später zeigen wir: $(\ell^2)'$ kann mit ℓ^2 identifiziert werden. Jedes $x \in \ell^2$ definiert einen linearen Operator auf ℓ^2 durch $x'(y) = (x, y)_{\ell^2} \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ für alle $y \in \ell^2$. Dies liefert schon $(\ell^2)'$. Wir fordern für $y' \in (\ell^2)'$, dargestellt durch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$y'(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} y_n = \sum_{n=2}^{\infty} x_n \tilde{y}_n \overset{!}{=} (T'y')(x),$$

wobei $\tilde{y}_n = y_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dies zeigt, dass

$$T' \colon Y' \to X', \quad (y_1, y_2, \dots) \mapsto (0, y_1, y_2, \dots)$$

gilt. Dabei haben wir $TT' = \mathrm{Id}$, aber $T'T \neq \mathrm{Id}$.

Satz 5.17. Seien X und Y normierte Räume.

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} {}' \colon L(X,Y) &\to L(Y', X') \\ y &\mapsto y' \end{aligned}$$

ist eine lineare Isometrie.

(ii) Sei Z ein weiterer normierter Raum. Dann gilt für alle $T \in L(X,Y)$ und $S \in L(Y,Z)$ gilt $(ST)' = T'S'$.

Beweis.

(i) Die Linearität rechnet man leicht nach. Sei $T \in L(X,Y)$. Dann gilt für alle $y' \in Y'$

$$\|T'y'\| \leq \|y'\| \cdot \|T\|, \quad \text{woraus} \quad \|T'\| \leq \|T\| \quad \text{folgt.}$$

Dass wir tatsächlich auch Gleichheit haben, sehen wir wie folgt ein (– um die Notation übersichtlicher zu halten, bezeichne $\bar{B}_1^X \coloneqq \overline{B_1^X(0)}$ die abgeschlossene Einheitskugel in X und $\bar{B}_1^{Y'} \coloneqq \overline{B_1^{Y'}(0)}$ diejenige in Y'):

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x\in\bar{B}_1^X} \|Tx\| = \sup_{x\in\bar{B}_1^X} \sup_{y'\in\bar{B}_1^{Y'}} |y'(Tx)| \\ &= \sup_{y'\in\bar{B}_1^{Y'}} \sup_{x\in\bar{B}_1^X} |y'(Tx)| = \sup_{y'\in\bar{B}_1^{Y'}} \|T'y'\| = \|T'\|. \end{aligned}$$

(Die zweite Gleichheit gilt dabei nach Satz 4.18.)

(ii) Seien $T \in L(X,Y), S \in L(Y,Z)$ und $z' \in Z'$ sowie $x \in X$. Dann gilt:

$$\big((ST)'z'\big)(x) = z'(STx) = (S'z')(Tx) = (T'S'z')(x).$$

Es folgt die Behauptung.

■

Mit Hilfe der adjungierten Abbildung können wir die Lösbarkeit von linearen Gleichungen untersuchen. Dazu benötigen wir zunächst einige Hilfsaussagen.

Satz 5.18. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X,Y)$. Dann gilt

$$\overline{R(T)} = \big(N(T')\big)^{\perp}.$$

Beweis. „$\subset$": Sei $x \in X$ und $y := Tx \in R(T)$. Gilt $y' \in N(T')$, so folgt

$$y'(y) = y'(Tx) = \underbrace{(T'y')}_{=0}(x) = 0.$$

Es folgt $R(T) \subset (N(T'))^{\perp}$. Da $N(T')^{\perp}$ abgeschlossen ist (Bemerkung 4.21 (ii)), folgt

$$\overline{R(T)} \subset \big(N(T')\big)^{\perp}.$$

„$\supset$": Setze $U := \overline{R(T)}$. Es sei $y \notin \overline{U} = U$. Zeigen wir nun $y \notin (N(T'))^{\perp}$, so sind wir fertig. Aus Korollar 4.16 erhalten wir ein $y' \in Y'$ mit $Y'|_U = 0$ und $y'(y) \neq 0$. Insbesondere gilt $y'(Tx) = 0$ für alle $x \in X$. Also haben wir sicher $y' \in N(T')$ und wegen $y'(y) \neq 0$ gilt auch $y' \notin (N(T'))^{\perp}$.

■

Korollar 5.19. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X,Y)$. Sei weiter $R(T)$ abgeschlossen und $y \in Y$. Dann ist $Tx = y$ genau dann lösbar, wenn $y'(y) = 0$ für alle $y' \in N(T')$.

Beweis. Die Hinrichtung ist klar. Zur Rückrichtung: Aus $y'(y) = 0$ für alle $y' \in N(T')$ folgt sofort $y \in (N(T'))^{\perp}$ und damit:

$$y \in \big(N(T')\big)^{\perp} = \overline{R(T)} = R(T).$$

■

Bemerkung:

(i) Korollar 5.19 liefert die Existenz einer Lösung durch Bedingungen an den Nullraum von T'.

(ii) Falls T' injektiv ist, brauchen wir im Fall, dass $R(T)$ abgeschlossen ist, *keine* Zusatzbedingungen mehr, denn: Mit $N(T') = \{0\}$ und $R(T)$ abgeschlossen sind die Voraussetzungen aus Korollar 5.19 sicher erfüllt.

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, die Abgeschlossenheit von $R(T)$ zu überprüfen. Wir wollen nun also Kriterien finden, die dies vereinfachen.

Satz 5.20. Sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Unterraum. Dann wird durch

$$X/U \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \hat{x} \mapsto \inf_{y \in \hat{x}} \|y\|$$

eine Norm auf dem Quotientenvektorraum definiert. Ist X vollständig, so auch X/U.

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe.

Lemma 5.21. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Sei weiter $R(T)$ abgeschlossen. Dann existiert ein $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall\, y \in R(T)\ \exists\, x \in X\colon\ Tx = y \wedge \|x\| \leq K\|y\|.$$

Beweis. Sei $\hat{T}$ die lineare und stetige Bijektion, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d] & R(T) \\ X/N(T) \arrow[ur, "\hat{T}"'] & \end{tikzcd}$$

(dabei sei die vertikale Abbildung die kanonische Projektion). Da $R(T)$ abgeschlossener Teilraum des Banachraums Y ist, ist auch $R(T)$ ein Banachraum. Auch $X/N(T)$ ist ein Banachraum, da $N(T)$ abgeschlossen ist. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert, dass $\hat{T}^{-1}$ stetig ist. Also existiert ein $\hat{K} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\|\hat{T}^{-1}y\| \leq \hat{K}\|y\|$. Mit der Definition der Norm auf $X/N(T)$ folgt: Es existiert ein $x \in \hat{T}^{-1}y$ mit $\|x\| \leq (\hat{K}+1)\|y\|$ und da $\hat{T}^{-1}y$ gerade alle $x \in X$ mit $Tx = y$ enthält, folgt die Behauptung.

■

Lemma 5.22. Seien X, Y Banachräume über $\mathbb{K}$ und sei $T \in L(X, Y)$. Weiter sei $K \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $y' \in Y'$ gilt:

$$K\|y'\| \leq \|T'y'\|.$$

Dann ist T offen und insbesondere surjektiv.

Beweis. Es bezeichne $U_\varepsilon := B_\varepsilon^X(0)$ den offenen ε-Ball in X und $V_\varepsilon := B_\varepsilon^Y(0)$ denjenigen in Y. Bei der Betrachtung offener Abbildungen hatten wir schon gesehen, dass es genügt $V_K \subset T(U_1)$ zu zeigen. Wie im Beweis des Satzes von der offenen Abbildung (5.9) genügt es sogar, $V_K \subset \overline{T(U_1)} =: D$ zu zeigen. Sei $y_0 \in V_K$, d. h. $\|y_0\| < K$. Angenommen es gilt $y_0 \notin D$. Dann existiert nach Hahn-Banach in der zweiten geometrischen Formulierung (Satz 4.15) ein $y' \in Y'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} y'(y) \leq \alpha < \operatorname{Re} y'(y_0) \leq |y'(y_0)|$$

für alle $y \in D$. Wegen $0 \in D$ und $y'(0) = 0$ gilt $0 \leq \alpha$. Wegen der echten Ungleichheit in $\alpha < \operatorname{Re} y'(y_0)$ können wir o. E. $\alpha > 0$ annehmen und indem wir y' durch y'/α ersetzen, können wir annehmen, dass $\alpha = 1$ gilt. Weil T linear ist, liegt für alle $y \in D$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$ auch λy in D. Ist also $y \in D$ mit $y'(y) \neq 0$, so gilt auch $y\,|y'(y)|/y'(y) \in D$, und damit folgt:

$$|y'(y)| = y'(y)\frac{|y'(y)|}{y'(y)} = y'\left(y\,\frac{|y'(y)|}{y'(y)}\right) \leq 1.$$

Also gilt für alle $y \in D$ sogar

$$|y'(y)| \leq 1 < |y'(y_0)|.$$

Für alle $x \in U_1$ (und damit $Tx \in D$) gilt somit

$$|y'(Tx)| = |(T'y')(x)| \leq 1,$$

woraus wir $\|T'y'\| \leq 1$ erhalten.

Es folgt
$$1 < |y'(y_0)| \leq \|y'\| \, \|y_0\| \leq K\|y'\| \leq \|T'y'\| \leq 1,$$
ein Widerspruch. Also muss doch $y_0 \in D$ gelten und damit sind wir fertig.

■

Bemerkung: Aus Satz 5.18 und Korollar 5.19 erhalten wir, dass T' genau dann injektiv ist, wenn T dichtes Bild hat. Außerdem folgt aus der Injektivität von T' und abgeschlossenem $R(T)$, dass T surjektiv ist. Obiges Lemma 5.22 verschärft diese Aussage noch.

Satz 5.23 (Satz vom abgeschlossenen Bild)**.** Seien X, Y Banachräume über $\mathbb{K}$ und sei $T \in L(X, Y)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $R(T)$ ist abgeschlossen

(ii) $R(T) = \big(N(T')\big)^\perp$

(iii) $R(T')$ ist abgeschlossen

(iv) $R(T') = \big(N(T)\big)^\perp$

Beweis. „(i)⇔(ii)“ folgt aus Satz 5.18.

„(i)⇒(iv)“: Es gilt stets $R(T') \subset (N(T))^\perp$ (da $T'y'(x) = y'(Tx) = 0$ für alle $x \in N(T)$). Sei $x' \in (N(T))^\perp$. Betrachte dann die Abbildung
$$z' \colon R(T) \to \mathbb{K}, \qquad y \mapsto x'(x) \quad \text{falls } Tx = y.$$
Es ist z' wohldefiniert, denn: für $x_1, x_2 \in X$ mit $Tx_1 = y = Tx_2$ gilt $T(x_1 - x_2) = 0$, also $x_1 - x_2 \in N(T)$, also $x'(x_1 - x_2) = 0$, also $x'(x_1) = x'(x_2)$. Die Abbildung z' ist auch stetig, denn: Aus Lemma 5.21 erhalten wir ein $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass für alle $y \in R(T)$ ein $x \in X$ existiert mit $Tx = y$ und $\|x\| \leq K\|y\|$. Für solche x gilt:
$$|z'(y)| = |x'(x)| \leq \|x'\| \, \|x\| \leq K\|x'\| \, \|y\|.$$
Daraus folgt die Stetigkeit von z'. Wir setzen nun z' mittels Satz 4.6 zu $y' \in Y'$ fort. Dann gilt $x' = T'y'$, denn für alle $x \in X$ gilt
$$x'(x) = z'(Tx) = y'(Tx) = (T'y')(x).$$
Dies zeigt $(N(T))^\perp \subset R(T')$.

„(iv)⇒(iii)“: Klar, da $\big((N(T)\big)^\perp$ stets abgeschlossen ist (Bemerkung 4.21).

„(iii)⇒(i)“: Definiere $Z \coloneqq \overline{R(T)}$ und $S \in L(X, Z)$ durch $Sx \coloneqq Tx$ für alle $x \in X$. Für $y' \in Y'$ und $x \in X$ gilt dann
$$(T'y')(x) = y'(Tx) = y'|_Z(Sx) = \big(S'(y'|_Z)\big)(x).$$

D. h. $T'y' = S'(y'|_Z)$. Dies zeigt $R(T') \subset R(S')$. Ist $S'(z') \in R(S')$, so gilt für jede gemäß Satz 4.6 gewählte Fortsetzung $y' \in Y'$ von $z' \in Z'$ (nach demselben Argument wie oben) $S'z' = T'y'$. Dies zeigt $R(T') = R(S')$. Nach Voraussetzung ist somit $R(S')$ abgeschlossen.

Nach Satz 5.18 gilt $\overline{R(S)} = (N(S'))^\perp$ und da S dichtes Bild hat, folgt, dass S' injektiv ist. Also ist S' eine stetige Bijektion zwischen den Banachräumen Z' und $R(S')$. Aus dem Satz von der inversen Abbildung (5.10) folgt:

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall\, z' \in Z' : \quad C\|z'\| \leq \|S'z'\|.$$

Lemma 5.22 liefert $R(S) = Z$. Damit gilt aber auch $R(T) = Z$ und weil Z nach Definition abgeschlossen ist, hat T somit abgeschlossenes Bild.

■

Bemerkung 5.24. Oft ist es einfacher zu zeigen, dass $R(T')$ abgeschlossen ist, als $R(T)$ zu bestimmen. Dann erhält man mit dem Satz vom abgeschlossenen Bild (5.23) direkt: $R(T)$ abgeschlossen, $R(T) = (N(T'))^\perp$. Man bekommt also Informationen über $R(T)$, indem man T' betrachtet.

Beispiel: Ist T' injektiv, dann folgt $N(T) = \{0\}$ und daraus $R(T) = (N(T'))^\perp = Y$.

6 Hilberträume

Siehe 2.7 (c). Eine wichtige Eigenschaft von Hilberträumen ist, dass stets orthogonale Projektionen auf abgeschlossene, konvexe Teilmengen existieren.

Satz 6.1 (Projektionssatz). Sei H ein Hilbertraum, $K \subset H$ eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Dann existiert für jedes $f \in H$ ein eindeutiges $u \in K$, so dass gilt:

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| = \operatorname{dist}(f, K).$$

Das Element $u \in H$ ist eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$u \in K \quad \text{und für alle } v \in K \text{ gilt} \quad \operatorname{Re}\langle f - u, v - u\rangle \leq 0.$$

Das Element u nennen wir dann *Projektion von f auf K* und wir schreiben dafür $u = \mathrm{P}_K(f)$.

Beweis. Wähle eine Minimalfolge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K für das Infimum $\operatorname{dist}(f, K)$, also mit $d_n := \|f - v_n\| \to \inf_{v\in K} \|f - v\| =: d$. Wir behaupten, dass dann $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schon eine Cauchyfolge sein muss. Dazu wenden wir die Parallelogramm-Identität (Satz 2.8 (3)) auf $f - v_n$ und $f - v_m$ an. Wir erhalten:

$$\|2f - (v_n + v_m)\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2\big(d_n^2 + d_m^2\big).$$

Da K konvex ist, gilt $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$, und es folgt:

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d.$$

Nach Multiplizieren der vorherigen Ungleichung mit $1/4$ folgt somit:

$$\left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\big(d_n^2 + d_m^2\big) - d^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Also ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich eine Cauchy-Folge. Weil K eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raums ist, ist K insbesondere vollständig. Also konvergiert $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K und es gibt ein $v \in K$ mit $v = \lim_{n\to\infty} v_n$. Für dieses gilt dann

$$\|f - v\| = \lim_{n\to\infty} \|f - v_n\| = d = \operatorname{dist}(f, K).$$

Wir zeigen nun, dass die beiden Charakterisierungen aus der Behauptung äquivalent sind. Sei hierzu für $u \in K$ die erste Bedingung erfüllt. Wähle $w \in K$. Dann folgt für $t \in [0, 1]$

$$v = (1 - t)u + tw \in K.$$

Damit erhalten wir für alle $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} & \|f-u\| \leq \|f-(1-t)u+tw\| = \|(f-u)-t(w-u)\| \\ \implies & \|f-u\|^2 \leq \|f-u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle f-u, w-u\rangle + t^2\|w-u\|^2 \\ \implies & 2\operatorname{Re}\langle f-u, w-u\rangle \leq t^2\|w-u\|^2 \end{aligned}$$

Für $t \to 0$ erhalten wir die zweite Charakterisierung. Sei umgekehrt letztere gegeben für $u \in K$. Dann gilt

$$\|w-f\|^2 - \|v-f\|^2 = \|u-f\|^2 - \|v-u+(u-f)\|^2 = 2\operatorname{Re}\langle f-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 \leq 0,$$

woraus die erste Charakterisierung folgt.

Zur Eindeutigkeit: Angenommen $v_1, v_2 \in K$ erfüllen beide die zweite Charakterisierung. Dann gilt für alle $v \in K$

$$\operatorname{Re}\langle f-v_1, v-u_1\rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\langle f-v_2, v-u_2\rangle \leq 0.$$

Wähle in der ersten Ungleichung $v = u_2$, in der zweiten $v = u_1$ und addiere beide Gleichungen. Dann erhalten wir

$$\|u_1-u_2\|^2 = \operatorname{Re}\langle u_1-u_2, v_1-v_2\rangle \leq 0,$$

woraus $u_1 = u_2$ folgt.

■

Bemerkung 6.2. Das Problem im obigen Satz ist ein Minimierungsproblem. Auch in anderen bereits bekannten Problemen wird ein Minimum durch Ungleichungen beschrieben. Betrachte zum Beispiel $F \in C^1([0,1])$ und $F(u) = \min_{v\in[0,1]} F(v)$. Dann gilt $F'(v) = 0$, falls $v \in (0,1)$, $F'(v) \geq 0$, falls $u = 0$ und $F'(v) \leq 0$, falls $u = 1$. Oder zusammengefasst:

$$v \in [0,1] \quad \text{und für alle } v \in [0,1] \text{ gilt} \quad F'(u)(v-u) \geq 0.$$

Satz 6.3. Sei H ein Hilbertraum, $K \subset H$ eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Dann nimmt der Abstand durch die Anwendung von P_K nicht zu, d. h. P_K ist Lipschitz zur Konstante 1, d. h. für alle $f_1, f_2 \in H$ gilt

$$\|\mathrm{P}_K f_1 - \mathrm{P}_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

Beweis. Sei $u_1 \coloneqq \mathrm{P}_K f_1$ und $u_2 \coloneqq \mathrm{P}_K f_2$. Dann gilt für alle $v \in K$:

$$\operatorname{Re}\langle f_1-u_1, v-u_1\rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\langle f_2-u_2, v-u_2\rangle.$$

Wähle einmal $v = u_2$ und einmal $v = u_1$ und erhalte durch Addition:

$$\operatorname{Re}\langle f_2-u_2-f_1+u_1, u_1-u_2\rangle \leq 0.$$

Daraus folgt:

$$\|u_1-u_2\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle f_1-f_2, u_1-u_2\rangle \overset{\text{CSU}}{\leq} \|f_1-f_2\|\,\|u_1-u_2\|.$$

Nach Dividieren durch $\|u_1-u_2\|$ folgt die Behauptung.

■

Korollar 6.4. Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein abgeschlossener Unteraum. Für $f \in H$ ist $\mathrm{P}_M f =: u$ charakterisiert durch: $u \in M$ und $\langle f - u, v\rangle = 0$ für alle $v \in M$. Insbesondere ist P_M ein linearer stetiger Operator.

Beweis. Es gilt $\mathrm{Re}\langle f - u, v - u\rangle \leq 0$ für alle $v \in M$. Sei$\alpha \in \mathbb{K}$ und $w \in M$. Dann gilt auch $v := u + \alpha w \in M$ und damit

$$\mathrm{Re}(\bar{\alpha}\langle f - u, w\rangle) \leq 0.$$

Für $\alpha = \pm\langle f - u, w\rangle$ erhalten wir Ungleichungen, die

$$\langle f - u, w\rangle = 0$$

implizieren. Gilt andererseits $\langle f - u, w\rangle = 0$ für alle $w \in M$, so folgt für alle $v \in M$ schon

$$\mathrm{Re}\langle f - v, v - u\rangle \leq 0,$$

da $v - u \in M$. Die Linearität ist nach der obigen Charakterisierung klar und die Stetigkeit folgt aus Satz 6.3.

■

6.5 (Dualraum eines Hilbertraums). In einem Hilbertraum H können wir durch

$$H \ni u \mapsto \langle u, f\rangle \in \mathbb{K}$$

für jedes $f \in H$ ein lineares Funktional definieren. Der folgende Satz zeigt, dass wir dadurch sogar bereits alle linearen Funktionale erhalten.

Satz: (Riesz'scher Darstellungssatz)
Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$. Dann ist

$$\begin{aligned} J\colon H &\to H' \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} H \to \mathbb{K} \\ y \mapsto \langle y, x\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein isometrischer, konjugiert linearer Isomorphismus. (Dabei bedeutet konjugiert linear, dass $J(\alpha x + y) = \bar{\alpha}J(x) + J(y)$ für alle $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt.)

Beweis. Seien $x, y \in H$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 2.8 (1)) folgt

$$|J(x)(y)| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Daraus folgt $J(x) \in X'$ mit $\|J(x)\| \leq \|x\|$. Wegen $|J(x)(x)| = \|x\|^2$ gilt $\|J(x)\| \geq \|x\|$. Also ist J eine Isometrie und damit insbesondere injektiv. Der wesentliche Schritt ist nun, die Surjektivität von J zu zeigen. Sei dazu $x_0' \in X' \setminus \{0\}$. Wähle P als orthogonale Projektion auf $N(x_0')$ (was ein abgeschlossener Unterraum ist). Wähle $e \in X$ mit $x_0'(e) = 1$ und definiere $x_0 := e - Pe$. Dann gilt $x_0'(x_0) = 1 \neq 0$. Aus dem Projektionssatz (6.1) folgt:

$$\forall\, y \in N(x_0')\colon \quad \langle y, x_0\rangle = 0. \qquad (\star)$$

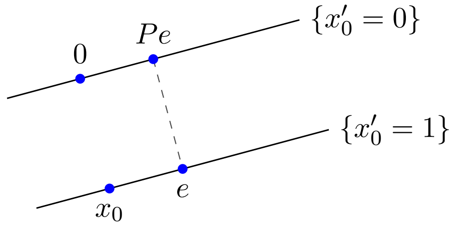


Abbildung 6.1: Situation im Beweis des Riesz'schen Darstellungssatzes

Sei wieder $x \in X$. Dann gilt

$$x = \underbrace{(x - x_0'(x)\, x_0)}_{\in N(x_0')} + x_0'(x)\, x_0$$

und damit wegen $(\star)$:

$$\langle x, x_0 \rangle = \big\langle x_0'(x)\, x_0, x_0 \big\rangle = x_0'(x)\, \|x_0\|^2.$$

Es folgt

$$x_0'(x) = \left\langle x, \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right\rangle = J\left(\frac{x_0}{\|x_0\|^2}\right)(x)$$

und daraus $x' = J\big(x_0/\|x_0\|^2\big)$. Also ist J surjektiv.

■

6.6 (Soll man H mit H' identifizieren?)**.** Der Rieszsche Darstellungssatz erlaubt es uns, H mit H' zu identifizieren. Wir werden dies oft tun, aber nicht immer. Wir wollen eine Situation betrachten, in der man vorsichtig mit einer solchen Identifikation sein sollte:

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ und assoziierter Norm $\|\cdot\|$. Sei nun $V \subset H$ ein linearer Unterraum, der dicht in H liegt. Wir nehmen an, dass V ein Banachraum ist mit Norm $\|\cdot\|_V$. Weiter sei die Inklusion $V \hookrightarrow H$ stetig, d. h. es existiert ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $v \in V$ gilt: $\|v\|_V \leq c\|v\|$.

Ein Beispiel für eine solche Situation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= L^2([0,1]) \\ &= \Big\{v\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} \;\Big|\; \textstyle\int_0^1 (v(x))^2 \,\mathrm{d}x < \infty\Big\} \Big/ \{v \mid v = 0 \text{ fast überall}\} \end{aligned}$$

mit Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$ für $u, v \in H$ und $V = C([0,1])$. Dann existiert eine kanonische Abbildung

$$T\colon H' \to V', \quad x' \mapsto \big(v \mapsto x'(v)\big).$$

Wir sehen einfach ein, dass T stetig und injektiv ist. Nun identifizieren wir H' mit H, geschrieben $H \simeq H'$, und erhalten: $V \subset H \simeq H' \subset V'$ $(\diamond)$, wobei dies alles stetige Injektionen sind. Problematisch wird diese Situation, falls V ein Hilbertraum mit eigenem Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_V$ und $\|\cdot\|_V$ die zugehörige Norm ist. Wir könnten V mit V' identifizieren. Aber was bedeutet dann $(\diamond)$? Wir können also nicht gleichzeitig H mit H' und V mit V' identifizieren. Typischerweise verwendet man dann nur $H \simeq H'$.

Wir betrachten noch ein weiteres Beispiel:

$$H = \ell^2(\mathbb{R}) \quad \text{mit Skalarprodukt} \quad (u,v) \mapsto \langle u,v\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n.$$

Weiter sei

$$V = \Big\{ u \in H \;\Big|\; \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < \infty \Big\},$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto \langle\!\langle u,v \rangle\!\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n v_n.$$

Es gilt $V \subset H$ und die Inklusion $V \hookrightarrow H$ ist stetig. Wir identifizieren H' mit H und V' mit dem Raum

$$V' = \Big\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n^2 < \infty \Big\},$$

indem wir für $f \in V'$, $v \in V$ die Anwendung von f auf v durch $f(v) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n$ erklären (man rechnet leicht mit der Hölderschen Ungleichung nach, dass dies wohldefiniert ist). Dieser Raum ist offenbar echt größer als H. Die Isometrie $J \colon V \to V'$ aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (6.5) ist dann gegeben durch

$$u \mapsto \big(n^2 u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bemerkung 6.7. Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$. Dann ist H reflexiv (Definition 4.19). Sei J der konjugiert lineare Isomorphismus aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (6.5). Es ist zu zeigen, dass J_H (aus Satz 4.18) surjektiv ist. Sei also $x'' \in H''$. Dann ist

$$x' \colon H \to \mathbb{K}, \quad y \mapsto \overline{x''(Jy)}$$

ein Element in H'. Setze $x := J^{-1}x'$. Sei $y' \in H'$ und $y \in H$ mit $Jy = y'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x''(y') &= x''(Jy) = \overline{x'(y)} = \overline{(Jx)(y)} = \overline{\langle y,x\rangle} \\ &= \langle x,y\rangle = (Jy)(x) = y'(x) = (J_H x)(y') \end{aligned}$$

Also gilt $x'' = J_H x$ und damit ist J_H surjektiv.

Bemerkung 6.8. Sei $H \simeq H'$ ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein Unterraum. Dann kann man den Annihilator $M^\perp$ identifizieren mit

$$M^\perp = \big\{ u \in H \mid \forall v \in M \colon \ \langle v,u\rangle = 0 \big\}.$$

Außerdem gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$. Wenn M abgeschlossen ist, so gilt $M + M^\perp = H$.

Definition 6.9. Sei H ein Hilbertraum. Wir nennen eine Sesquilinearform a auf H stetig, wenn es ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass gilt:

$$\forall\, u, v \in H: \quad |a(u,v)| \leq C\,\|u\|\,\|v\|.$$

Wir nennen a *koerziv*, wenn ein $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, so dass gilt:

$$\forall\, u \in H: \quad \operatorname{Re} a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Für den Beweis des folgenden Theorems benötigen wir den Banach'schen Fixpunktsatz:
Satz: Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $S\colon X \to X$ eine (strikte) Kontraktion. Dann besitzt S genau einen Fixpunkt.

Theorem 6.10 (Stampacchia)**.** Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $a\colon H \times H \to \mathbb{K}$ eine stetige, koerzive Sesquilinearform. Weiter sei $K \subset H$ nicht leer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es für alle $\varphi \in H'$ genau ein $u \in K$, so dass gilt:

$$\forall\, v \in K: \quad \operatorname{Re} a(v-u,u) \geq \operatorname{Re} \varphi(v-u). \tag{$\star$}$$

Ist a außerdem symmetrisch, so ist das Element $u \in H$ eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$u \in K \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\, a(u,u) - \operatorname{Re}\varphi(u) = \min_{v \in K} \left(\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - \operatorname{Re}\varphi(v)\right).$$

Bemerkung:
Ist a eine positiv semidefinite Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum H, so ist die Abbildung $v \mapsto a(v,v)$ konvex. Falls a sogar positiv definit ist, ist diese Abbildung strikt konvex. In der Regel besitzen strikt konvexe Funktionen mit $f(x) \to \infty$ für $\|x\| \to \infty$ ein eindeutiges Minimum.

Satz 6.11 (Lax-Milgram)**.** Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $a\colon H \times H \to \mathbb{K}$ eine stetige, koerzive Sesquilinearform. Dann gibt es für jedes $\varphi \in H'$ genau ein $u \in H$, so dass gilt:

$$\forall\, v \in H: \quad \operatorname{Re} a(v,u) = \operatorname{Re}\varphi(v). \tag{$\star\star$}$$

Ist a außerdem symmetrisch, so ist das Element $u \in H$ eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$\frac{1}{2}\, a(u,u) - \operatorname{Re}\varphi(u) = \min_{v \in H} \left(\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - \operatorname{Re}\varphi(v)\right).$$

Beweis. Sei $\varphi \in H'$ und $w \in H$. Wählen wir $K = H$ im Theorem von Stampacchia (6.10), so erhalten wir ein $u \in H$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall\, v \in H: \quad \operatorname{Re} a(v-u,u) \geq \operatorname{Re}\varphi(v-u).$$

Also erhalten wir für $\pm w + u \in H$ zwei Ungleichungen, die zusammen

$$\operatorname{Re} a(w,u) = \operatorname{Re} \varphi(w)$$

implizieren. Es folgt die Behauptung.

$\blacksquare$

Bemerkung 6.12.

(i) Der Satz von Lax-Milgram (6.11) kann zur Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen genutzt werden.

(ii) Sei a symmetrisch und sei $F\colon H \to \mathbb{R},\ v \mapsto \frac{1}{2}a(v,v) - \operatorname{Re}\varphi(v)$. Dann bedeutet $(\star\star)$, dass für das Minimum „$F'(u) = 0$" gilt. Betrachte dazu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u+tv)|_{t=0}$.

Es gilt

$$F(u+tv) = \frac{1}{2}\big(a(u,u) + ta(u,v) + ta(v,u) + t^2 a(v,v)\big) - \operatorname{Re}\varphi(u) - t\operatorname{Re}\varphi(v),$$

also erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u+tv) = \operatorname{Re} a(u,v) + ta(v,v) - \operatorname{Re}\varphi(v).$$

Definition 6.13. Sei H ein Hilbertraum und $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Unterräumen von H. Dann nennen wir H die *Hilbertsumme von* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls

(a) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise orthogonal ist, d. h. $\langle u, v\rangle = 0$ für alle $u \in E_n$, $v \in E_m$ mit $n \neq m$, und

(b) der lineare Raum $\operatorname{span}\big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big)$ ist dicht in H.

In diesem Fall schreiben wir

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Satz 6.14. Sei H ein Hilbertraum und gelte $H = \bigoplus_{n=1}^\infty E_n$ für eine Folge abgeschlossener Unterräume $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $u \in H$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n := \mathrm{P}_{E_n}(u)$ sowie $S_n := \sum_{k=1}^n u_k$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n = u$$

(wofür wir auch die Notation $\sum_{k=1}^\infty u_k = u$ verwenden) und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2,$$

die sogenannte *Bessel-Parseval-Identität.*

Für den Beweis benötigen wir zunächst eine Hilfsaussage.

Lemma 6.15. Sei H ein Hilbertraum und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge paarweise orthogonaler Vektoren in H (d. h. für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $\langle v_n, v_m\rangle = 0$). Gelte außerdem $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|^2 < \infty$. Sei $S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} v_k$. Dann existiert der Grenzwert $S \coloneqq \lim_{n\to\infty} S_n$ und es gilt

$$\|S\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|v_k\|^2.$$

Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n > 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|S_m - S_{n-1}\|^2 &= \Big\|\sum_{k=n}^{m} v_k\Big\|^2 = \Big\langle \sum_{k=n}^{m} v_k,\ \sum_{\ell=n}^{m} v_\ell \Big\rangle \\ &= \sum_{k=n}^{m} \sum_{\ell=n}^{m} \langle v_k, v_\ell\rangle = \sum_{k=n}^{m} \|v_k\|^2\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Da H vollständig ist, existiert also auch ein Grenzwert $S \coloneqq \lim_{n\to\infty} S_n$. Außerdem folgt aus der obigen Rechnung

$$\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2,$$

woraus für $n \to \infty$ die zweite Behauptung folgt.

∎

Beweis von Satz 6.14. Aus Korollar 6.4 folgt:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, v \in E_n\colon \quad \langle u - u_n, v\rangle = 0.$$

Insbesondere erhalten wir daraus $\langle u, u_n\rangle = \|u_n\|^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt also:

$$\langle u, S_m\rangle = \sum_{n=1}^{m} \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2.$$

(Für die zweite Gleichheit, vergleiche Beweis von Lemma 6.15.) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 2.8 (1)) liefert

$$\|S_m\|^2 \leq \|u\|\, \|S_m\|,$$

woraus $\|S_m\| \leq \|u\|$ folgt. Dies zeigt:

$$\sum_{n=1}^{m} \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$ und wir können Lemma 6.15 anwenden. Wir erhalten die Existenz des Grenzwerts $S \coloneqq \lim_{n\to\infty} S_n$. Wir wollen nun S bestimmen (zunächst ohne die Dichtheit von $\operatorname{span}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big)$ vorauszusetzen). Sei $F \coloneqq \operatorname{span}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big)$. Wir behaupten

$$S = \mathrm{P}_{\overline{F}}\, u. \tag{$**$}$$

Sei $m \in \mathbb{N},\ v \in E_m$ und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle u - S_n, v\rangle = \Big\langle u - \sum_{k=1}^{n} u_k, v \Big\rangle &= \langle u, v\rangle - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\langle u_k, v\rangle}_{=0 \text{ für } k \neq m} \\ &= \langle u, v\rangle - \langle u_m, v\rangle = \langle u - u_m, v\rangle = 0.\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts $\langle u - S, v\rangle = 0$. Es folgt $\langle u - S, \tilde{v}\rangle = 0$ für alle $\tilde{v} \in F$. Dies impliziert (erneut wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts)

$$\forall\, \tilde{v} \in \overline{F}\colon \quad \langle u - S, \tilde{v}\rangle = 0.$$

Wegen $S_n \in F$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $S \in \overline{F}$. Mithilfe von (6.4) folgt nun $(**)$. Wir benutzen nun zusätzlich, dass F dicht in H liegt, also $\overline{F} = H$. Dann ergibt $(**)$ direkt $S = u$. Gehen wir in $\sum_{n=1}^{m} \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2$ zum Grenzwert $m \to \infty$ über, so folgt die Bessel-Parseval-Identität.

■

Definition 6.16 (Schauder-Basis)**.** Sei X ein normierter Raum und $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann nennen wir $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Schauder-Basis von X, falls gilt: Für alle $x \in X$ existiert eine eindeutige Folge $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ mit

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k \to x \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Definition: (Orthonormalbasis) Sei H ein Prä-Hilbertraum und $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H. Dann nennen wir $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Orthonormalbasis* (oder *Hilbertbasis*), falls $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis ist und $\langle e_m, e_n\rangle = \delta_{mn}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt (mit dem Kroneckerdelta δ).

Satz 6.17. Sei H ein Prä-Hilbertraum und $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem, d. h. für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\langle e_m, e_n\rangle = \delta_{mn}$. Dann sind äquivalent:

(1) $\operatorname{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in H

(2) $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Schauder-Basis

(3) $\forall\, x \in H\colon \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\, e_k$

(4) $\forall\, x, y \in H\colon \quad \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle y, e_k\rangle}$ (Parseval-Identität)

(5) $\forall\, x \in H\colon \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ (Vollständigkeitsrelation)

Falls eine dieser Bedinungen gilt, ist $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ also eine Hilbertbasis.

Beweis. „(1)$\Rightarrow$(3)“: Nutze Satz 6.14 (in den dortigen Bezeichnern) mit $E_n = \operatorname{span}\{e_n\}$. Es gilt dann $u_n = \alpha_n e_n$ mit $\alpha_n = \langle e_n, u\rangle$. Das heißt:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, u\rangle\, e_k$$

(folgt aus der Orthogonalität der Projektion). Also folgt $S_n \to u$ für $n \to \infty$. Aus 6.14 folgt dann die Behauptung.

„(3) ⇒ (2)“: Wir müssen die Eindeutigkeit der Koeffizienten zeigen. Wegen der Linearität reicht es, den Fall $x = 0$ zu betrachten. Gilt

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

so folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts:

$$0 = \Big\langle \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_\ell \Big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle e_k, e_\ell \rangle = \alpha_\ell.$$

„(2) ⇒ (1)“ folgt aus der Definition der Schauder-Basis.

„(3) ⇒ (4)“: Aus der Stetigkeit des Skalarprodukts erhalten wir:

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{\ell=1}^{n} \langle y, e_\ell \rangle e_\ell \Big\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_\ell \rangle} \underbrace{\langle e_k, e_\ell \rangle}_{\delta_{k\ell}}.$$

„(4) ⇒ (5)“ ist klar.

„(5) ⇒ (3)“:

$$\begin{aligned} \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \Big\|^2 &\le \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty \end{aligned}$$

■