

Vorlesungsmitschrift (*kein* offizielles Skript)

Funktionalanalysis

Prof. Dr. Harald Garcke

Version vom 6. November 2013

Gesetzt in L^AT_EX von Johannes Prem

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?	1
2	Grundstrukturen der Funktionalanalysis	4
3	Lineare Operatoren	15
4	Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen	20

1 Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?

Zum Beispiel von der *Analysis auf Banachräumen* (vollständigen normierten Vektorräumen)

1.1. Auf \mathbb{R}^n definiere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_2 := |x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 (Funktionen auf kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n).

Zum Beispiel: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, z. B. $K = [0, 1]$.

$$C^0(K) := \{f \mid f: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird Banachraum mit der Norm:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty$$

1.3 (Operatoren auf $C^0([0, 1])$).

Definiere

$$L(C^0([0, 1]), C^0([0, 1])) := \{T: C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]) \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

Beispiele:

$$(Tf)(x) := g(x) f(x) \quad \text{wobei } g \in C^0([0, 1])$$

$$(Tf)(x) := \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) \quad \text{wobei } 0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$$

$$L_i: \text{Lagrange-Basis-Fkt.: } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y) \, dy \quad \text{wobei } K \in C^0([0, 1]^2)$$

Bemerkung: $L(C^0([0, 1]), C^0([0, 1]))$ wird zu einem Banachraum mit der Operatornorm

$$\|T\|_{L(C^0, C^0)} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{C^0}}{\|f\|_{C^0}}$$

1.4. Welche Besonderheiten ergeben sich in unendlich-dimensionalen Räumen?

- (1) Problem in ∞ -dimensionalen Vektorräumen: Wenig sinnvolle Aussagen ohne Topologie möglich
- (2) Für $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear gilt:

$$T \text{ surjektiv} \iff T \text{ injektiv}$$

Im ∞ -dim. ist dies i. A. falsch.

Beispiel:

$$c_* := \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}, \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall \ell > \bar{k}: x_\ell = 0\}$$

c_* modelliert „Folgen, die irgendwann abbrechen“. Außerdem enthält c_* den \mathbb{R}^n für $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß.

Definiere die sog. *Shift-Abbildung* wie folgt:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Dann ist T injektiv, aber nicht surjektiv.

- (3) Grundproblem der linearen Algebra: Finde Normalformen für lineare Abbildungen.
Ziel: Verallgemeinerung auf ∞ -dim. Räume.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Diagonalisierbarkeit} \\ \text{symmetrischer Matrizen} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spektralsatz für} \\ \text{kompakte, normale Operatoren} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Jordansche} \\ \text{Normalform} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spektralsatz für} \\ \text{kompakte Operatoren} \end{array} \right.$$

- (4) Kompaktheit

In ∞ -dim. Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel *nicht* kompakt.

Beispiel c_* : Nutze die Norm

$$\|x\|_{c_*} := \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

und die Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (wobei die 1 an der i -ten Stelle steht). Dann gilt:

$$\|e_i\|_{c_*} = 1 \quad \text{und} \quad \|e_i - e_k\|_{c_*} = 1 \text{ für } i \neq k$$

Also hat $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *keine* konvergente Teilfolge, woraus folgt, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist.

- (5) Nicht alle Normen sind zueinander äquivalent.

Beispiel: Betrachte auf $C^0([0, 1])$ die Normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}$$

Es gilt $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty$. Aber: Es gibt keine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $f \in C^0([0, 1])$ gilt: $\|f\|_\infty \leq c \|f\|_{L^2}$. Betrachte dazu:



Es gilt: $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1$, $\|f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Außerdem gilt:

$(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum

$(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2})$ ist normierter Vektorraum (aber nicht vollständig)

Funktionalanalysis lässt sich sinnvoll nur in vollständigen Räumen entwickeln. Deshalb werden wir nicht vollständige Räume vervollständigen (siehe 2.18).

2 Grundstrukturen der Funktionalanalysis

2.1 (Topologie). Sei X eine Menge, \mathcal{T} ein System von Teilmengen. Dann heißt \mathcal{T} *Topologie (auf X)*, falls gilt:

$$(T1) \quad \emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$$

$$(T2) \quad \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$$

$$(T3) \quad T_1, T_2 \in \mathcal{T} \implies T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$$

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *Hausdorff-Raum*, falls er zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt:

$$(T4) \quad \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad \exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}: U_1 \cap U_2 = \emptyset \wedge x_i \in U_i$$

Mengen in \mathcal{T} heißen *offene Mengen*. Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Eine Menge $W \subset X$ mit $x \in W$ für die eine offene Menge U mit $x \in U$ und $U \subset W$ existiert, heißt *Umgebung von x* .

Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume, so heißt $f: X \rightarrow Y$ *stetig*, falls die Urbilder offener Mengen stets offen sind. (Formal: $\forall U' \in \mathcal{T}_Y: f^{-1}(U') \in \mathcal{T}_X$)

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *stetig in $x \in X$* , falls

$$f(x) \in V \in \mathcal{T}_Y \implies \exists U \in \mathcal{T}_X: x \in U \subset f^{-1}(V)$$

(d. h. $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von x).

2.2. Ist X ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt (X, \mathcal{T}) *topologischer Vektorraum*, falls (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum ist und die Abbildungen

$$X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$\mathbb{K} \times X \rightarrow X, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

stetig sind. („Algebraische und topologische Struktur sind verträglich“)

2.3 (Metrik). Ein Tupel (X, d) heißt *metrischer Raum*, falls X eine Menge ist und $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Bedingungen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt:

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Konvergenz:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls:

$$d(x_k, x_\ell) \rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty$$

x heißt Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (Notation: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder: $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$), falls:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

(X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in X besitzt.

Abstand von Mengen $A, B \subset X$:

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Für $A \subset X$ und $x \in X$ definieren wir: $\text{dist}(x, A) := \text{dist}(\{x\}, A)$.

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $A \subset X$, $x \in X$ definieren wir:

$$B_r(A) := \{x \in X \mid \text{dist}(x, A) < r\}$$

$$B_r(x) := B_r(\{x\})$$

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

Wir sagen A ist *beschränkt*, falls $\text{diam}(A) < \infty$.

2.4 (Topologie von Metriken). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \subset A\} \quad \text{ist das Innere von } A.$$

$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{ist der Abschluss von } A.$$

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{ist der Rand von } A.$$

Wir sagen, dass A offen ist, falls $A^\circ = A$ gilt, und dass A abgeschlossen ist, falls $\overline{A} = A$ gilt.

Durch die Definition $\mathcal{T} := \{A \subset X \mid A \text{ offen}\}$ wird (X, \mathcal{T}) zu einem hausdorffschen topologischen Raum.

2.5 (Fréchet-Metrik). Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $d: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Fréchet-Metrik*, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$(F1) \quad d(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x) = 0 \iff x = 0$$

$$(F2) \quad d(-x) = d(x)$$

$$(F3) \quad d(x + y) \leq d(x) + d(y)$$

Dann ist $(x, y) \mapsto d(x - y)$ eine Metrik auf X .

Beispiel: Fréchet-Metriken auf \mathbb{R} :

$$x \mapsto |x|^\alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha \leq 1$$

$$x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x|}$$

2.6 (Norm). X sei ein \mathbb{K} -Vektorraum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls folgende Bedingungen für alle $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dann ist $x \mapsto \|x\|$ eine Fréchet-Metrik. Wir nennen X *Banachraum*, falls X mit einer gegebenen Norm vollständig ist.

X ist eine *Banachalgebra*, falls X eine Algebra ist (d. h. es gibt ein Produkt auf X , das dem Assoziativgesetz und Distributivgesetz genügt) und $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in X$ gilt.

2.7 (Skalarprodukt). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum.

- a) $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *Hermitesche Form* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrische Sesquilinearform), falls für alle $x, x_1, x_2, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(S1) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(S2) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$(S3) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

(Es folgt: für alle $x \in X$ gilt $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$.)

- b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *positiv-semidefinit*, falls

$$(S4') \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

und *positiv definit*, falls

$$(S4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

gilt.

- c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *Skalarprodukt*, falls (S1)–(S4) erfüllt sind. Dann ist $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf X und wir nennen X dann einen *Prä-Hilbertraum*. Falls X zusätzlich vollständig ist, so heißt X *Hilbertraum*.

Beispiele:

i) \mathbb{R}^n mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

ii) $X = C^0(K, \mathbb{R})$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

$$\langle f, g \rangle := \int_K f(x) g(x) \, dx$$

Dann ist $(C^0(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum (aber kein Hilbertraum!)

Satz 2.8. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum X . Dann gelten:

- (1) Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU): $\forall x, y \in X: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
Gleichheit gilt nur, falls y ein Vielfaches von x ist.
- (2) Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in X: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (3) Parallelogrammidentität: $\forall x, y \in X: \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Bemerkung: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt aus der CSU für $x, y \in X \setminus \{0\}$:

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \in [-1, 1] \quad (*)$$

D. h. es gibt genau ein $\theta \in [0, \pi]$, s. d.

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \cos \theta.$$

Wir interpretieren θ als den Winkel zwischen x und y .

Beweis von Satz 2.8.

(3)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Ersetze y durch $-y$ und addiere beide Gleichungen.

(1) Ersetze in (*) y durch $-\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$ (o. E. $y \neq 0$). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

Es folgt die CSU. In der ersten Zeile gilt bei \leq die Gleichheit genau dann, wenn x ein Vielfaches von y ist.

(3)

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \underbrace{\operatorname{Re}\langle x, y \rangle}_{\leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|} \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

■

2.9 (Vergleich von Topologien). Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X . Wir sagen \mathcal{T}_2 ist *stärker* (oder *feiner*) als \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_1 ist *schwächer* (oder *gröber*) als \mathcal{T}_2 , falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt.

Sind d_1, d_2 zwei Metriken auf X und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ die induzierten Topologien (siehe 2.4), so heißt die Metrik d_1 *stärker* (bzw. *schwächer*) als d_2 , falls \mathcal{T}_1 stärker (bzw. schwächer) als \mathcal{T}_2 ist. Die Metriken heißen äquivalent, falls $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Entsprechend heißt eine Norm stärker bzw. schwächer als eine zweite, wenn dies für die induzierten Metriken gilt. Analog für Äquivalenz von Normen.

2.10 (Vergleich von Normen). Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X . Dann gilt:

(1) $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:

$$\forall x \in X: \|x\|_1 \leq c \|x\|_2$$

(2) Die beiden Normen sind genau dann äquivalent, wenn es $c, C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:

$$\forall x \in X: c \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2$$

Beweis. (1) Es sei $B_r^i(x) = \{x' \in X \mid \|x - x'\|_i < r\}$ und \mathcal{T}_i sei die von $\|\cdot\|_i$ induzierte Topologie.

Sei $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Da $B_1^1(0) \in \mathcal{T}_1$ gilt, ist $B_1^1(0)$ offen bezüglich \mathcal{T}_1 und bezüglich \mathcal{T}_2 . Es liegt 0 im Inneren (bezüglich $\|\cdot\|_2$) von $B_1^1(0)$. Somit gilt $B_\varepsilon^2(0) \subset B_1^1(0)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Daher gilt für $x \in X \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varepsilon x}{2\|x\|_2} \right\|_2 &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ \implies \left\| \frac{\varepsilon x}{2\|x\|_2} \right\|_1 &< 1 \implies \|x\|_1 < \frac{2}{\varepsilon} \|x\|_2 \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt die Ungleichung in (1) so ist für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$B_r^2(x) \subset B_{cr}^1(x)$$

Sei nun $A \in \mathcal{T}_1$. Dann ist $A = A^\circ$ bezüglich \mathcal{T}_1 . D.h. zu $x \in A$ existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\varepsilon^1(x) \subset A$. Also gilt:

$$B_{\varepsilon/c}^2(x) \subset A$$

Dies zeigt $A \in \mathcal{T}_2$.

(2) Wende den ersten Teil zweimal an.

■

Satz 2.11. Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent. Endlich-dimensionale Vektorräume sind Banachräume. Endlich-dimensionale Unterräume normierter Räume sind abgeschlossen.

Beweis. Sei X ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von $(X, \|\cdot\|)$. Jedem $x \in X$ mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ordnen wir den Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{K}^n$ zu.

Die Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^n &\rightarrow X \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto x \mapsto \|x\|\end{aligned}$$

sind stetig.

Daher nimmt $\|x\|$ auf der kompakten Menge

$$S := \{\alpha \mid \|\alpha\|_2 = 1\}$$

ein Maximum M und ein Minimum m an. (Dabei gilt $m > 0$, da $\|x\| > 0$ für alle $x \in S$.)
Damit gilt für x mit $\|\alpha(x)\|_2 = 1$

$$m \leq \|x\| \leq M.$$

Für allgemeine $x \neq 0$ gilt

$$\left\| \alpha \left(\frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right) \right\|_2 = 1 \quad \text{und somit} \quad m \leq \left\| \frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right\| \leq M$$

Dies zeigt die Äquivalenz einer beliebigen Norm zur Norm $x \mapsto \|\alpha(x)\|_2$. Damit sind zwei beliebige Normen äquivalent.

Die Vollständigkeit von X folgt aus der Vollständigkeit von $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$. Die Tatsache, dass endlich-dimensionale Räume abgeschlossen sind, folgt mit Aufgabe 1 von Übungsblatt 2.

■

2.12 (Folgenräume). Wir bezeichnen mit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen über \mathbb{K} , d. h.

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Es gilt:

1) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist ein metrischer Raum mit der Fréchet-Metrik

$$\rho(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|} \quad \text{für } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

2) Ist $(x^k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_i)^k_{i \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und ist $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, so gilt:

$$\rho(x^k - x) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \iff \forall i \in \mathbb{N}: x_i^k \rightarrow x_i \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

(Vergleiche Aufgabe 2 von Blatt 1.)

3) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist mit dieser Metrik vollständig.

4) Definiere für $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty] \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \in [0, \infty]$$

Wir betrachten für $1 \leq p \leq \infty$ die Mengen

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_{\ell^p} < \infty\}$$

Diese Räume sind normierte Vektorräume und auch vollständig (also Banachräume). (Beweis, siehe später.) Wenn der Körper \mathbb{K} aus dem Kontext klar ist, lassen wir diesen in der Notation auch weg.

5) Interessante Unterräume von ℓ^∞ sind:

$$c := \{x \in \ell^\infty \mid \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \text{ existiert}\} \quad \text{und}$$

$$c_0 := \{x \in \ell^\infty \mid \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0\}.$$

Beide Räume versehen wir mit der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm. Es gilt: $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$

6) Der Raum ℓ^2 besitzt das Skalarprodukt

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{für } x, y \in \ell^2$$

Lemma 2.13 (Youngsche Ungleichung). Es seien $p, p' \in (1, \infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \log(ab) &= \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(b^{p'}) \\ &\leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichheit folgt daraus, dass der Logarithmus eine konkave Funktion ist. Da außerdem \exp monoton ist, folgt hieraus die Behauptung. ■

Satz 2.14 (Höldersche Ungleichung auf ℓ^p). Es sei $1 \leq p, p' \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^{p'}$ ist $xy \in \ell^1$ (dabei sei für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das Produkt definiert als: $xy := (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$) und es gilt:

$$\|xy\|_{\ell^1} \leq \|x\|_{\ell^p} \cdot \|y\|_{\ell^{p'}}.$$

Beweis. Falls $p = \infty$ setze $p' = 1$ (und umgekehrt). In diesem Fall ist der Beweis einfach. Sei nun $1 < p < \infty$ und $\|x\|_{\ell^p} > 0, \|y\|_{\ell^{p'}} > 0$. Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) liefert:

$$\frac{|x_k| |y_k|}{\|x\|_{\ell^p} \|y\|_{\ell^{p'}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_{\ell^p}^p} + \frac{1}{p'} \frac{|y_k|^{p'}}{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}}$$

Die Reihe über die Terme der rechten Seite ist eine konvergente Reihe und damit folgt aus dem Majorantenkriterium, dass $xy \in \ell^1$ erfüllt sein muss. ■

Satz 2.15. Der Raum ℓ^p ist für $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum.

Beweis. Die Vollständigkeit von ℓ^1 ist eine Übungsaufgabe. Für ℓ^p folgt dies ähnlich (vergleiche mit dem späteren Beweis über $L^p(\mu)$.) Die Normeigenschaften abgesehen von der Δ -Ungleichung ergeben sich einfach. Wir zeigen die Δ -Ungleichung für $p \in (1, \infty)$. Es seien also $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= (\|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}) (\|x + y\|_{\ell^p}^{p-1}) \end{aligned}$$

Bei $(*)$ geht die Höldersche Ungleichung ein. Dies zeigt $\|x + y\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}$. ■

2.16 (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen). Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt (also nach Heine-Borel äquivalenterweise kompakt) und Y ein Banachraum über \mathbb{K} , so ist $C^0(K, Y)$ ein Unterraum von $B(K, Y)$. (Vergleiche Aufgabe 1 von Blatt 2.)

Satz: Mit $\|f\|_{C^0} := \|f\|_{\infty} := \sup_{x \in K} |f(x)|$ wird $C^0(K, Y)$ ein Banachraum.

Beweis. Jedes $f \in C^0(K, Y)$ ist beschränkt, denn: Zu $x \in K$ existiert ein $\delta_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(B_{\delta_x}(x)) \subset B_1(f(x))$. Da K kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Es folgt:

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^m B_1(f(x_i)).$$

Die rechte Menge ist beschränkt, also ist auch f beschränkt.

Aufgabe 1 (iv) von Blatt 2 zeigt, dass $B(K, Y)$ ein Banachraum ist. Eine Cauchy-Folge in $C^0(K, Y)$ ist auch eine Cauchy-Folge in $B(K, Y)$. Da $B(K, Y)$ vollständig ist, besitzt jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Sei jetzt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^0(K, Y)$ mit Grenzwert f in $B(Y, K)$. Für $x, y \in K$ gilt:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \underbrace{\|f_i(y) - f_i(x)\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x \text{ und jedes } i} + 2 \underbrace{\|f - f_i\|_\infty}_{\rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty}$$

Dies beweist $f \in C^0(K, Y)$. ■

2.17 (Räume differenzierbarer Funktionen). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir:

$$C^m(\overline{\Omega}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } m\text{-mal stetig diffenzierbar auf } \Omega \text{ und für } s \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |s| \leq m \text{ ist } \partial^s f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar}\}.$$

(Dabei ist s ein Multiindex mit $|s| = s_1 + \dots + s_n$.)

Satz: Der Raum $C^m(\overline{\Omega})$ ist mit der Norm

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$$

ein Banachraum.

Beweis. Wir beweisen die Vollständigkeit von $C^1(\overline{\Omega})$. (Der Fall $m > 1$ folgt induktiv.) Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^1(\overline{\Omega})$, so sind $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\partial_i f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $C^0(\overline{\Omega})$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Daher existieren f und g_i in $C^0(\overline{\Omega})$, so dass $f_k \rightarrow f$ sowie $\partial_i f_k \rightarrow g_i$ gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$ in $C^0(\overline{\Omega})$. Für $x \in \Omega$ und y nahe x mit $x_t := (1-t)x + ty$ folgt aus dem HDI:

$$f_k(x_1) - f_k(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_k(x_t) dt = \int_0^1 (y - x) \cdot \nabla f_k(x_t) dt$$

Es folgt (mit $g = (g_1, \dots, g_n)$):

$$\begin{aligned} \|f_k(y) - f_k(x) - (y - x) \cdot \nabla f_k(x)\| &= \left\| \int_0^1 ((y - x) \cdot \nabla f_k(x_t) - (y - x) \cdot \nabla f_k(x)) dt \right\| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_0^1 \|\nabla f_k(x_t) - \nabla f_k(x)\| dt \|y - x\| \\ &\leq \left(2\|\nabla f_k - g\|_\infty + \sup_{t \in [0,1]} \|g(x_t) - g(x)\| \right) \|y - x\| \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ gilt dann:

$$\|f(y) - f(x) - (y - x) \cdot g(x)\| \leq \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq 1} \|g(x_t) - g(x)\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x \text{ wegen Stetigkeit von } g} \|y - x\|$$

Dies bedeutet f ist in x diff'bar mit $\nabla f(x) = g(x)$. ■

2.18 (Vervollständigung). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\tilde{X} := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}$$

zusammen mit der Äquivalenzrelation

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \tilde{X} : \Longleftrightarrow (d(x_j, y_j))_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

Führe Metrik auf \tilde{X} ein: für $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ sei

$$\tilde{d}((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) := \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, y_j).$$

Satz:

- i) Dann ist (\tilde{X}, \tilde{d}) ein vollständiger metrischer Raum.
- ii) Durch $J(x) := (x)_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine injektive Abbildung $J: X \rightarrow \tilde{X}$ definiert, welche isometrisch ist, d. h. für alle $x, y \in X$ gilt

$$\tilde{d}(J(x), J(y)) = d(x, y).$$

- iii) Es liegt $J(X)$ dicht in \tilde{X} .

Beweis. Für $\tilde{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\tilde{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \tilde{X} gilt (mithilfe der sog. *Vierecksungleichung*):

$$|d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i)| \leq d(x_j, x_i) + d(y_j, y_i) \rightarrow 0 \quad \text{für } i, j \rightarrow \infty.$$

Somit existiert $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, y_j)$. Für $\tilde{x}^1 = \tilde{x}^2$ und $\tilde{y}^1 = \tilde{y}^2$ in \tilde{X} folgt:

$$|d(x_j^2, y_j^2) - d(x_j^1, y_j^1)| \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Dies zeigt, dass \tilde{d} wohldefiniert ist. Außerdem gilt:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{x} = \tilde{y},$$

was direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation folgt. Die \triangle -Ungleichung und Symmetrie übertragen sich direkt.

Zur Vollständigkeit: Es sei $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \tilde{X} , mit $x^k = (x_j^k)_{j \in \mathbb{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $j_k \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_i^k, x_j^k) \leq 1/k$ für alle $i, j \geq j_k$ erfüllt ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_{j_k}^k, x_{j_\ell}^\ell) &\leq d(x_{j_k}^k, x_{j_j}^k) + d(x_{j_j}^k, x_{j_j}^\ell) + d(x_{j_j}^\ell, x_{j_\ell}^\ell) \\ &\leq \frac{1}{k} + d(x_j^k, x_j^\ell) + \frac{1}{\ell} \quad \text{für } j \geq j_k, j_\ell \\ &\rightarrow \frac{1}{k} + \tilde{d}(x^k, x^\ell) + \frac{1}{\ell} \quad \text{für } j \rightarrow \infty \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also ist $x^\infty := (x_{j_\ell}^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ in \tilde{X} und es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x^\ell, x^\infty) &\leftarrow d(x_k^\ell, x_k^\infty) \quad \text{für } k \rightarrow \infty \\ &\leq d(x_k^\ell, x_{j_\ell}^\ell) + d(x_{j_\ell}^\ell, x_{j_\ell}^k) \\ &\leq \frac{1}{\ell} + d(x_{j_\ell}^\ell, x_{j_k}^k) \quad \text{für } k \geq j_\ell \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Es gilt also $x^\ell \rightarrow x^\infty$. Da $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in \tilde{X} war, hat also jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Die Aussagen ii) und iii) sind eine einfache Übung. ■

3 Lineare Operatoren

Definition 3.1.

- (a) Seien X, Y zwei \mathbb{K} -Vektorräume mit Topologien $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$. Wir definieren

$$L(X, Y) := \{T: X \rightarrow Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Elemente in $L(X, Y)$ heißen *lineare Operatoren von X nach Y* . (Für $T \in L(X, Y)$ und $x \in X$ schreiben wir auch oft Tx statt $T(x)$.)

- (b) Der *Dualraum* von X ist

$$X' := L(X, \mathbb{K})$$

und Elemente aus X' nennen wir *lineare Funktionale*.

Beispiele 3.2.

- 1) Gelte $X = C^2(\overline{\Omega})$ und $Y = C^0(\overline{\Omega})$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte dann $T: X \rightarrow Y$ mit

$$(Tu)(x) := -\Delta u(x)$$

für alle $u \in C^2(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$.

- 2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $K: \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei dann T für alle $u \in C^0(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$ gegeben durch:

$$(Tu)(x) := \int_{\overline{\Omega}} K(x, y) u(y) \, dy.$$

Lemma 3.3. Seien X, Y normierte Vektorräume und sei $T: X \rightarrow Y$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) T ist stetig, also $T \in L(X, Y)$.
- (2) T ist stetig in x_0 für ein $x_0 \in X$.
- (3) Es gilt für die Operatornorm von T :

$$\|T\|_{L(X, Y)} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y < \infty$$

- (4) Es existiert ein $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X$. (Bemerkung: $C = \|T\|_{L(X, Y)}$ ist die kleinste solche Zahl.)

Beweis. (1) \implies (2): klar.

(2) \implies (3): Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$T(\overline{B_\delta(x_0)}) \subset \overline{B_1(T(x_0))}$$

erfüllt ist. Für x mit $\|x\|_X \leq 1$ folgt $x_0 + \delta x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ und daraus: $T(x_0 + \delta x) \in \overline{B_1(T(x_0))}$, d. h. es gilt:

$$\|T(x_0 + \delta x) - T(x_0)\| \leq 1.$$

Wegen der Linearität von T gilt $T(x_0 + \delta x) - T(x_0) = \delta T(x)$, weshalb wir $\|T(x)\| \leq 1/\delta$ bekommen.

(3) \implies (4): Für $x \neq 0$ gilt $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$. Daraus folgt:

$$\|Tx\| = \left\| \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|T\| \|x\|.$$

(4) \implies (1): Für $x, x_0 \in X$ gilt:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq C \|x - x_0\|.$$

Also ist T Lipschitz-stetig und somit auch stetig. ■

Lemma 3.4.

(1) X, Y normierte Räume $\implies L(X, Y)$ normiert mit der Operatornorm.

(2) Y Banachraum $\implies L(X, Y)$ Banachraum

(3) X Banachraum $\implies L(X) := L(X, X)$ Banachalgebra

(4) $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z) \implies ST \in L(X, Z)$ mit $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$

Beweis. Zu (1): Wir zeigen nur die Δ -Ungleichung (der Rest ist klar). Es gilt

$$\|(T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\|,$$

woraus folgt:

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Zu (2): Es sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X, Y)$. Für alle $x \in X$ ist dann $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y . Setzte

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x.$$

Da Grenzwertbilden linear ist, ist auch L linear. Wir behaupten, dass $T \in L(X, Y)$ und $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gelten.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Sei $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$. Wähle $m_0 = m_0(\varepsilon, x) \geq n_0$ mit

$$\|T_{m_0}x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ folgt nun:

$$\|T_nx - Tx\| \leq \|T_nx - T_{m_0}x\| + \|T_{m_0}x - Tx\| \leq \|T_n - T_{m_0}\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Damit folgen nun aber $\|T\| \leq \infty$ sowie $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Zu (3) und (4): Es gilt:

$$\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|.$$

Also gilt allgemein: $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$. ■

Bemerkung 3.5. Es sei $T \in L(X, Y)$ und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X, Y)$ mit $T_kx \rightarrow Tx$ für $k \rightarrow \infty$ und für alle $x \in X$. Dann folgt i. A. *nicht* $T_k \rightarrow T$ in $L(X, Y)$.

Beispiel: $X = c_0$ (Raum der Nullfolgen, siehe 2.12 (5)) mit der Supremumsnorm, $Y = \mathbb{R}$, $T_kx := x_k$. Dann gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} T_kx = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 =: Tx$. Offensichtlich gilt $\|T_kx\| = 1$ für $x = e_k$. Außerdem gilt $\|T_kx\| = \|x_k\| \leq 1$ für $\|x\| \leq 1$. D. h. $\|T_k\| = 1$, aber $\|T\| = 0$.

Definition 3.6. Für $T \in L(X, Y)$ definieren wir den *Nullraum (Kern) von T* als

$$N(T) := \{x \in X \mid T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\}).$$

Es ist $N(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(X, Y)$.

Weiter sei

$$R(T) := \{Tx \in Y \mid x \in X\} = T(X)$$

der *Bildraum* (engl.: „range“) von T . Es ist $R(T)$ ein linearer Unterraum von Y , i. A. aber nicht abgeschlossen.

Beispiel: $X = C^0([0, 1])$,

$$T: X \rightarrow X, \quad (Tf)(x) := \int_0^x f(\xi) \, d\xi$$

$$R(T) = \{g \in C^1([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

Es gilt $T \in L(X, Y)$ aber $R(T)$ ist nicht abgeschlossen in X , denn:

$$\overline{R(T)} = \{g \in C^0([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

(denn stetige Funktionen können durch C^1 -Funktionen in der C^0 -Norm approximiert werden, siehe später).

Satz 3.7 (Neumannsche Reihe). Sei X ein Banachraum und sei $A \in L(X)$ mit $\|A\| < 1$. Es bezeichne Id den Identitätsoperator. Dann liegt $(\text{Id} - A)^{-1}$ in $L(X)$ und es gilt:

$$(\text{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Beweis. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n := \sum_{k=0}^n A^k \in L(X).$$

Mit $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ folgt:

$$\begin{aligned} \|B_n x - B_m x\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n A^k x \right\| \quad \text{für } n > m \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \|A\|^k \|x\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty \text{ für alle } x \text{ mit gleichmäßig } \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

Also existiert $B \in L(X)$ mit $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$. Noch zu zeigen: $B(\text{Id} - A) = \text{Id} = (\text{Id} - A)B$. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n A^k (\text{Id} - A) = \sum_{k=0}^n (A^k - A^{k+1}) = \text{Id} - A^{n+1} \rightarrow \text{Id} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also:

$$B(\text{Id} - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n (\text{Id} - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Id} - A^{n+1}) = \text{Id}$$

■

3.8 (Invertierbare Operatoren). Seien X, Y Banachräume. Wir sagen $T \in L(X, Y)$ ist invertierbar, falls T bijektiv ist und $T^{-1} \in L(X, Y)$ gilt.

Satz:

- i) Die Teilmenge $\{T \in L(X, Y) \mid T \text{ invertierbar}\}$ ist offen in $L(X, Y)$.
- ii) Es gilt genauer für $T, S \in L(X, Y)$ mit invertierbarem T :

$$\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1} \implies T - S \text{ invertierbar}$$

Beweis. Es gilt:

$$T - S = T(\text{Id}_X - \underbrace{T^{-1}S}_{\in L(X)}).$$

Also folgt mit $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$:

$$\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\| \|S\| < 1.$$

Mithilfe der Neumannschen Reihe (Satz 3.7) erhalten wir:

$(\text{Id} - T^{-1}S)$ ist invertierbar.

Also ist auch $T - S$ invertierbar

■

4 Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen

Problem: Setze ein Funktional stetig von einem Unterraum auf den gesamten Raum fort.

Bisher wissen wir nicht, ob auf jedem normierten Vektorraum ein (nicht-triviales) stetiges lineares Funktional existiert. Da wir im Folgenden grundlegend das *Zorn'sche Lemma* verwenden, wiederholen kurz die Voraussetzungen dafür.

Definition 4.1.

i) Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $H \subset M \times M$ definiert eine *Halbordnung* (wir sagen $a \leq b$, falls $(a, b) \in H$ erfüllt ist), wenn für alle $a, b \in M$ gilt:

a) $a \leq a$

b) $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

c) $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$

ii) Eine Teilmenge $K \subset M$ heißt *Kette* (oder *total geordnete Teilmenge*), falls für alle $a, b \in K$ entweder $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

iii) Eine *obere Schranke* einer Teilmenge $K \subset M$ ist ein Element $s \in M$ mit $a \leq s$ für alle $a \in K$. (Achtung: s muss *nicht* in K liegen!)

iv) Wir sagen M ist *induktiv geordnet*, falls jede Kette in M eine obere Schranke besitzt.

v) Ein $m \in K$ heißt *maximales Element von K* , wenn für alle $a \in K$ aus $a \geq m$ schon $a = m$ folgt.

4.2 (Zorn'sches Lemma). Jede induktiv geordnete Menge besitzt (mindestens) ein maximales Element.

Bemerkung: Das Zorn'sche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Satz 4.3 (Satz von Hahn-Banach). Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum und $Y \subset X$ ein Unterraum. Weiter gelte:

(1) $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist sublinear, d. h. für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{und} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

(2) $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear.

(3) $f \leq p$ auf Y .

Dann existiert eine lineare Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq p$ auf X .

Beweis. Nutze das Zorn'sche Lemma (4.2). Es sei

$$M := \{(Z, g) \mid Y \subset Z \subset X, Z \text{ ist Unterraum}, \\ g: Z \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist linear, } g = f \text{ auf } Y, g \leq p \text{ auf } Z\}.$$

Wir definieren eine Halbordnung auf dieser Menge folgendermaßen:

$$(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad Z_1 \subset Z_2 \wedge g_2|_{Z_1} = g_1.$$

Es ist zunächst zu zeigen, dass es überhaupt ein F gibt, so dass $(X, F) \in M$ gilt. Hierzu brauchen wir folgende Konstruktion:

Sei $(Z, g) \in M, z_0 \in X \setminus Z$. Definiere dann $Z_0 := Z \oplus \text{span}\{z_0\}$. Das Ziel ist es nun, g auf Z_0 fortzusetzen. Ansatz:

$$g_0(z + \alpha z_0) = g(z) + \alpha c$$

für $z \in Z, \alpha \in \mathbb{R}$. Gesucht ist nun ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$.

Es muss für alle $z \in Z$ gelten:

$$g(z) + \alpha c \leq p(z + \alpha z_0).$$

Für $\alpha = 0$ ist dies klar. Für $\alpha > 0$ haben wir:

$$c \leq \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = p\left(\frac{z}{\alpha} + z_0\right) - g\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

und für $\alpha < 0$:

$$c \geq \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = -p\left(-\frac{z}{\alpha} - z_0\right) + g\left(-\frac{z}{\alpha}\right).$$

Gesucht ist nun ein c , so dass

$$\sup_{z' \in Z} (g(z') - p(z' - z_0)) \leq c \leq \inf_{z \in Z} (p(z + z_0) - g(z)) \quad (\star)$$

erfüllt ist.

Es gilt für alle $z', z \in Z$:

$$g(z + z') \leq p(z + z') = p(z + z_0 + z' - z_0) \leq p(z + z_0) + p(z' - z_0).$$

Daraus folgt für alle $z', z \in Z$:

$$g(z') - p(z' - z_0) \leq p(z + z_0) - g(z),$$

was wiederum bedeutet, dass wir für c einfach den Wert des Supremums in (\star) nehmen können. Somit existiert also ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $(Z_0, g_0) \in M$ gilt. Sei nun $N \subset M$ eine Kette. Definiere dann

$$Z_0 := \bigcup_{(Z,g) \in N} Z$$

und

$$g_0: Z_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z_0 \mapsto g(z_0) \text{ falls } z_0 \in Z \text{ mit } (Z, g) \in N.$$

Da N eine Kette ist, ist g_0 tatsächlich wohldefiniert. Es folgt also $(Z_0, g_0) \in M$ und für alle $(Z, g) \in N$ gilt $(Z, g) \leq (Z_0, g_0)$.

Das Zorn'sche Lemma liefert nun: Es existiert ein maximales Element $(Z, g) \in M$. Dann muss schon $Z = X$ gelten, denn: Falls $z_0 \in X \setminus Z$ existiert, konstruiere eine Fortsetzung von g auf $Z \oplus \text{span}\{z_0\}$ wie oben. Dies liefert einen Widerspruch zur Maximalität von (Z, g) . Damit ist der Satz gezeigt. ■

Wir wollen nun den Satz von Hahn-Banach auf den komplexen Fall verallgemeinern. Die Frage ist, wie wir „ $f \leq p$ “ auf \mathbb{C} umgehen. Dazu betrachten wir die Realteilstfunktion $\text{Re } f$ von f .

Lemma 4.4. Sei X ein \mathbb{C} -Vektorraum.

(a) Sei $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$ ein \mathbb{R} -lineares Funktional, d. h.

$$\ell(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \ell(x_1) + \lambda_2 \ell(x_2)$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$. Setzen wir

$$\tilde{\ell}(x) := f(x) - i \ell(ix),$$

so ist $\tilde{\ell}: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung mit $\ell = \text{Re } \tilde{\ell}$.

(b) Ist $h: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, $\ell = \text{Re } h$ und $\tilde{\ell}$ wie in (a), so ist ℓ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung mit $\tilde{\ell} = h$.

(c) Ist $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm (es gelten die Normaxiome bis auf $p(x) = 0 \implies x = 0$) und ist $\ell: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, so gilt:

$$\left(\forall x \in X: |\ell(x)| \leq p(x) \right) \iff \left(\forall x \in X: |\text{Re } \ell(x)| \leq p(x) \right).$$

(d) Ist X ein normierter Vektorraum und ist $\ell: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung und stetig, so ist $\|\ell\| = \|\text{Re } \ell\|$.

Bemerkung: $\ell \mapsto \text{Re } \ell$ ist also eine bijektive \mathbb{R} -lineare Abbildung zwischen den \mathbb{C} -linearen und den \mathbb{R} -linearen, \mathbb{R} -wertigen Abbildungen. Im normierten Fall ist die Abbildung sogar eine Isometrie.

Beweis.

- (a) Da $x \mapsto ix$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung ist, folgt: $\tilde{\ell}$ ist \mathbb{R} -linear. Die Gleichheit $\operatorname{Re} \tilde{\ell} = \ell$ gilt nach Konstruktion. Außerdem gilt:

$$\tilde{\ell}(ix) = \ell(ix) - i\ell(i^2x) = \ell(ix) - i\ell(-x) = i(\ell(x) - i\ell(ix)) = i\tilde{\ell}(x).$$

- (b) Natürlich ist $\ell = \operatorname{Re} h$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \operatorname{Re} h(x) + i \operatorname{Im} h(x) = \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re}(ih(x)) \\ &= \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re} h(ix) = \ell(x) - i\ell(ix) = \tilde{\ell}(x) \end{aligned}$$

- (c) Wegen $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt die Hinrichtung. Die Rückrichtung ergibt sich wie folgt: Schreibe $\ell(x) = \lambda |\ell(x)|$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$|\ell(x)| = \lambda^{-1} \ell(x) = \ell(\lambda^{-1}x) = |\operatorname{Re} \ell(\lambda^{-1}x)| \leq p(\lambda^{-1}x) = p(x).$$

- (d) folgt sofort aus (c). ■

Satz 4.5. Sei X ein \mathbb{C} -Vektorraum und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Weiter sei $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear und $\ell: U \rightarrow \mathbb{C}$ linear mit $\operatorname{Re} \ell(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L: X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $L|_U = \ell$ und $\operatorname{Re} L(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Wende den Satz von Hahn-Banach (4.3) auf das \mathbb{R} -lineare Funktional $\operatorname{Re} \ell: U \rightarrow \mathbb{R}$ an und erhalte eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_U = \operatorname{Re} \ell$ und $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Nach Lemma 4.4 ist $F = \operatorname{Re} L$ für ein \mathbb{C} -lineares Funktional $L: X \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist L eine geeignete Fortsetzung. ■

Satz 4.6. Sei X ein normierter Vektorraum und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Zu jedem stetigen linearen Funktional $u': U \rightarrow \mathbb{K}$ existiert ein lineares Funktional $x': X \rightarrow \mathbb{K}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|x'\| = \|u'\|$.

Beweis. Sei X zunächst ein \mathbb{R} -Vektorraum. Definiere für alle $x \in X$

$$p(x) := \|u'\| \|x\|,$$

womit $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear ist. Der Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) liefert: Es existiert eine lineare Abbildung $x': X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x'|_U = u'$ und $x'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Da auch $x'(-x) \leq p(-x) = p(x)$ gilt, folgt

$$|x'(x)| \leq \|u'\| \|x\| \quad \text{also} \quad \|x'\| \leq \|u'\|.$$

Umgekehrt gilt:

$$\|u'\| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |u'(u)| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |x'(u)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |x'(x)| = \|x'\|.$$

Sei X nun ein \mathbb{C} -Vektorraum. Wir erhalten wie in Satz 4.5 ein lineares Funktional $x': X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|\operatorname{Re} x'\| = \|u'\|$. Lemma 4.4 (d) liefert dann wie gewünscht $\|x'\| = \|u'\|$. ■

Bemerkung 4.7.

- i) Die Fortsetzung im Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) und seinen Folgerungen sind im Allgemeinen *nicht* eindeutig.
- ii) Für Operatoren (lineare Abbildungen von X nach Y) ist die Aussage in Satz 4.6 im Allgemeinen falsch.

Beispiel: Es gibt keinen stetigen linearen Operator $T: \ell^\infty \rightarrow c_0$, der die Identität $\operatorname{Id}: c_0 \rightarrow c_0$ fortsetzt.

- iii) Es gibt eine eindeutige stetige Fortsetzung, falls der Unterraum U dicht in X liegt.

Definition 4.8. Eine *affine Hyperebene* in einem \mathbb{K} -Vektorraum X ist eine Teilmenge $H \subset X$ der Form

$$H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$$

für eine (nicht-triviale) lineare Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Wir schreiben auch kurz: $H = \{f = \alpha\}$.

Satz 4.9. Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum, sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ linear und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn f stetig ist.

Beweis. Es ist klar, dass H abgeschlossen ist, wenn f stetig ist, denn es gilt $f^{-1}(\{\alpha\}) = H$ und $\{\alpha\}$ ist abgeschlossen in \mathbb{R} . Für die Rückrichtung sei H abgeschlossen in X . Dann ist H^c offen und nicht leer. Jetzt sei $x_0 \in H^c$ mit $f(x_0) \neq \alpha$, o. E. $f(x_0) < \alpha$. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\} \subset H^c$. (Abbildung 4.2)

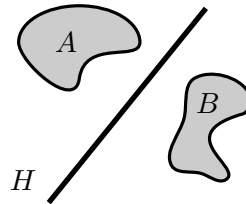


Abbildung 4.1: Zwei Teilmengen A und B eines Vektorraums, getrennt durch eine Hyperebene H (hier eine Gerade im \mathbb{R}^2)



Abbildung 4.2: Hyperebene H und Ball $B_r(x_0)$ um x_0 mit $x \in B_r(x_0)$

Wir behaupten nun, dass dann schon für alle $x \in B_r(x_0)$ die Ungleichung

$$f(x) < \alpha \quad (*)$$

gilt. Angenommen dies gilt nicht und es existiert ein $x_1 \in B_r(x_0)$, so dass $f(x_1) > \alpha$ gilt. Das Segment

$$[x_0, x_1] := \{x_t := (1-t)x_0 + tx_1 \mid t \in [0, 1]\}$$

ist in $B_r(x_0)$ enthalten (da Bälle in normierten Räumen konvex sind). Somit folgt für alle $t \in [0, 1]$:

$$f(x_t) \neq \alpha.$$

Andererseits gilt offenbar

$$f(x_t) = \alpha \quad \text{für} \quad t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Dies ist ein Widerspruch, also muss doch schon $(*)$ gelten. Wir erhalten, dass für alle $z \in B_1(0)$

$$\underbrace{f(x_0 + rz)}_{\in B_r(x_0)} < \alpha$$

gilt, woraus sofort

$$f(z) < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0))$$

folgt. Nutze diese Ungleichung für z und $-z$ aus $B_1(0)$, um Folgendes für alle $z \in B_1(0)$ zu erhalten:

$$|f(z)| < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0)).$$

Insgesamt folgt:

$$\|f\| = \sup_{z \in B_1(0)} |f(z)| \leq \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0)).$$

■

Definition 4.10. Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum und seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen von X . Die Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ trennt die Mengen A und B , falls für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha \quad \text{und} \quad f(b) \geq \alpha$$

gelten.



Abbildung 4.3: Zwei *nicht* strikt durch H getrennte Mengen; die Mengen aus Abbildung 4.1 sind hingegen strikt durch H getrennt

Die Hyperebene H *trennt* A und B *strikt*, falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon \quad \text{und} \quad f(b) \geq \alpha + \varepsilon$$

gelten.

Bemerkung 4.11.

- i) Geometrisch sagt solch eine Trennung aus, dass A auf der einen Seite von H liegt und B auf der anderen Seite. (Siehe Abbildung 4.1 und Abbildung 4.3.)
- ii) Ist X ein \mathbb{C} -Vektorraum, so sagen wir, dass A und B durch eine *reelle Hyperebene* getrennt werden, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} f(b) \geq \alpha$$

gelten.

- iii) Wir nennen $A \subset X$ konvex, falls für alle $x, y \in A$ auch

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\} \subset A$$

gilt.

Definition: Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und $K \subset X$. Dann ist das *Minkowski-Funktional* zu K definiert durch

$$p(x) := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in K \right\}.$$

Für $K = B_1(0)$ gilt gerade $p(x) = \|x\|$.

Lemma 4.12. Es sei K konvex, offen und $0 \in K$. Dann gilt:

- i) Das Minkowski-Funktional p zu K ist sublinear.
- ii) Es existiert ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$0 \leq p(x) \leq M \|x\|.$$

- iii) Zwischen K und p besteht folgender Zusammenhang:

$$K = \{x \in X \mid p(x) < 1\}.$$

Beweis.

- i) Seien $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in X$. Dann gilt $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, denn:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} \lambda x \in K \right\} = \inf \left\{ \alpha' \lambda \mid \frac{1}{\alpha' \lambda} \lambda x \in K \right\} \\ &= \lambda \inf \left\{ \alpha' \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha'} x \in K \right\} = \lambda p(x) \end{aligned}$$

Die \triangle -Ungleichung zeigen wir später.

- ii) Es sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $B_r(0) \subset K$ gilt. Es gilt dann für alle $x \in X$:

$$p(x) \leq \frac{1}{r} \|x\|,$$

denn:

$$\begin{aligned} p(x) &= \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in K \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in B_r(0) \right\} \\ &= \frac{1}{r} \|x\| \end{aligned}$$

- iii) Es sei $x \in K$. Da K offen ist, folgt $(1 + \varepsilon)x \in K$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ klein genug. Dann gilt:

$$p(x) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1.$$

Falls $p(x) < 1$ gilt, muss ein $\alpha \in (0, 1)$ geben, so dass $x/\alpha \in K$ erfüllt ist. Damit gilt:

$$x = \alpha \left(\frac{x}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) \cdot 0 \in K,$$

denn K ist nach Voraussetzung konvex.



Abbildung 4.4: Links eine konvexe Menge K , getrennt von $\{x_0\}$ durch H ; rechts eine nicht konvexe Menge, so dass diese und x_0 nicht durch eine Hyperebene H getrennt werden können

- i) Es bleibt die \triangle -Ungleichung zu zeigen. Seien $x, y \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Aus dem bisher Gezeigten folgt:

$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon}, \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in K.$$

Damit gilt also für alle $t \in [0, 1]$:

$$\frac{tx}{p(x) + \varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y) + \varepsilon} \in K.$$

Wähle nun $t = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$, dann erhalten wir

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in K \quad \text{und mit (iii) folgt} \quad p\left(\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}\right) < 1.$$

Es folgt:

$$p(x + y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Lemma 4.13. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und sei $K \subset X$ nicht-leer, offen und konvex. Sei weiter $x_0 \in K^\circ$. Dann existiert ein $x' \in X'$, so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x_0).$$

Insbesondere trennt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die reelle Hyperebene $\{\operatorname{Re} x' = \operatorname{Re} x'(x_0)\}$ somit $\{x_0\}$ und K .

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung können wir $0 \in K$ annehmen. Sei p das Minkowski-Funktional zu K . Sei weiter $U := \operatorname{span}\{x_0\}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(tx_0) := t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in U$:

$$g(x) \leq p(x)$$

und für x_0 haben wir $g(x_0) = 1 \leq p(x_0)$, da x_0 nicht in K liegt. (Achtung: tx_0 mit $t < 0$ ist kein Problem, da $g(tx_0) < 0$.)

Wende nun Hahn-Banach (Satz 4.3) an, womit wir ein $x': X \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten, mit $x'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$ und außerdem $x'|_U = g$. Insbesondere gilt also $x'(x_0) = 1$. Außerdem ist x' stetig (vgl. Lemma 4.12 (ii)). Mit Lemma 4.12 (iii) erhalten wir: für alle $x \in K$ gilt

$$x'(x) < 1.$$

Der komplexe Fall (also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) folgt aus dem Obigen und Lemma 4.4. ■

Satz 4.14 (Satz von Hahn-Banach (erste geometrische Formulierung)). Sei X ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und seien $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und disjunkt. Außerdem sei A offen. Dann existiert $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bemerkung: Ist X ein \mathbb{R} -Vektorraum, so trennt die abgeschlossene Hyperebene $\{x' = \alpha\}$ mit

$$\alpha \in \left[\sup_{a \in A} x'(a), \inf_{b \in B} x'(b) \right]$$

die Mengen A und B .

Beweis. Es sei $C := A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$. Dann ist C konvex (leichte Rechnung) und offen, denn:

$$C = \bigcup_{b \in B} \underbrace{(A - \{b\})}_{\text{offen}}.$$

Da A und B disjunkt sind, liegt 0 nicht in C . Aus Lemma 4.13 folgt die Existenz eines $x' \in X'$, welches für alle $x \in C$ die Ungleichung

$$\operatorname{Re} x'(x) < 0 = \operatorname{Re} x'(0)$$

erfüllt. Das heißt, es gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < 0 \quad \text{oder äquivalent} \quad \operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b).$$
■

Satz 4.15 (Satz von Hahn-Banach (zweite geometrische Formulierung)). Sei X ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und seien $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und disjunkt. Weiter sei A abgeschlossen und B kompakt. Dann existiert ein $x' \in X'$ sowie ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $a \in A$ und $b \in B$ die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \alpha \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon$$

gelten.

Beweis. Es sei $C := A - B$ wie bei Satz 4.14. Damit ist C konvex und abgeschlossen (siehe unten) und es gilt $0 \notin C$. Damit existiert ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(0) \cap C = \emptyset$ gilt. Satz 4.14 liefert: Es existiert ein $x' \in X'$ mit $x' \neq 0$, so dass für alle $a \in A$, $b \in B$ und $z \in B_1(0)$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < \operatorname{Re} x'(rz).$$

Also gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$:

$$\operatorname{Re} x'(a - b) \leq -r \|x'\|.$$

Für $\varepsilon r \|x'\|/2 > 0$ ergibt sich, dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon.$$

Wähle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\sup_{a \in A} (x'(a) + \varepsilon) \leq \alpha \leq \sup_{b \in B} (x'(b) - \varepsilon)$$

erfüllt ist. Noch zu zeigen: C ist abgeschlossen. Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in C mit Grenzwert $c \in X$. Da B kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit $b_{n_k} \rightarrow b \in B$ für $k \rightarrow \infty$. Damit ergibt sich:

$$a_{n_k} = c_{n_k} + b_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c + b.$$

Da A abgeschlossen ist, folgt $c + b \in A$ und damit $c = (c + b) - b \in A - B = C$. ■

Im Allgemeinen lassen sich konvexe Mengen mit $A \cap B = \emptyset$ nicht trennen. Es gibt Beispiele mit A, B zusätzlich abgeschlossen, in denen Trennungen nicht möglich ist. (Siehe Übungen.)

Korollar 4.16. Sei X ein normierter Vektorraum und $U \subsetneq X$ ein Unterraum. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit $x' \neq 0$ und $x'(U) = \{0\}$.

Beweis. Es sei $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin \overline{U}$. Wende Satz 4.15 auf $A = \overline{U}$ und $B = \{x_0\}$ an. Wir erhalten somit ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < \alpha < \operatorname{Re} x'(x_0)$ für alle $x \in \overline{U}$. Es folgt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \overline{U}$:

$$\operatorname{Re} x'(\lambda x) < \alpha.$$

Also muss schon $\operatorname{Re} x'(x) = 0$ für alle $x \in \overline{U}$ gelten. Wegen $\operatorname{Re} x'(x_0) > \operatorname{Re} x'(x) = 0$ für alle $x \in U$ ist außerdem $x' \neq 0$. ■

Bemerkung: Korollar 4.16 wird genutzt, um zu zeigen, dass ein Unterraum U dicht in einem umgebenden Raum X liegt. Kann man zeigen, dass für alle $x' \in X'$ aus $x'|_U = 0$ schon $x' = 0$ folgt, so ergibt sich $\overline{U} = X$.

Definition 4.17. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und X' der Dualraum zu X (Definition 3.1 (b)). Dann ist $X'' := (X')'$ der *Bidualraum* von X .

Wir können auf kanonische Weise eine Abbildung $J_X: X \rightarrow X''$ wie folgt definieren:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} X' \rightarrow \mathbb{K} \\ x' \mapsto x'(x) \end{pmatrix}.$$

Dann ist J_X linear und stetig, denn es gilt für alle $x' \in X'$ und alle $x \in X$ die Ungleichung $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$ und damit für alle $x \in X$:

$$\|J_X(x)\| \leq \|x\|. \quad (*)$$

Es gilt sogar $\|x\| = \sup_{x' \in X'} |x'(x)|$ für alle $x \in X$.

Sei $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Setze dann das Funktional

$$u': \text{span}\{x_0\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \lambda \|x_0\| \quad \text{falls } \lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } x = \lambda x_0$$

normgleich auf X fort. Es gilt dann $\|x'\| = \|u'\| = 1$ und $x'(x) = \|x\|$. Damit ist in $(*)$ sogar Gleichheit gezeigt. Insgesamt folgt:

Satz 4.18. Die Abbildung J_X ist eine (im Allgemeinen nicht surjektive) lineare Isometrie, d. h. für alle $x \in X$ gilt $\|J_X(x)\|_{X''} = \|x\|_X$. (Insbesondere ist J_X als Isometrie stets injektiv.)

Definition 4.19. Ein Banachraum X ist *reflexiv*, wenn J_X surjektiv (also bijektiv) ist.

Bemerkung: Da J_X injektiv ist, kann X mit einem Unterraum von X'' identifiziert werden.

Definition 4.20. Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein Unterraum und $N \subset X'$ ein Unterraum des Dualraums. Wir definieren dann den *Annihilator von M* als

$$M^\perp := \{x' \in X' \mid \forall x \in M: x'(x) = 0\}$$

und den *Annihilator von N* als

$$N^\perp := \{x \in X \mid \forall x' \in N: x'(x) = 0\}.$$

Bemerkung 4.21.

- i) Es ist N^\perp eine Teilmenge von X und *nicht* von X'' .
- ii) Es sind M^\perp und N^\perp abgeschlossene Unterräume.

Satz 4.22. Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ ein Unterraum. Dann gilt

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M}.$$

Sei außerdem $N \subset X'$ ein Unterraum. Dann gilt

$$(N^\perp)^\perp \supset \overline{N}.$$

(Im Allgemeinen ist diese Inklusion echt.)

Definition 4.23.

- i) Es sei E eine Menge und $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung. Wir definieren dann

$$D(\varphi) := \{x \in E \mid \varphi(x) < \infty\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}).$$

- ii) Der *Epigraph* von φ ist die Menge

$$\text{epi}(\varphi) := \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq \lambda\}.$$

Definition 4.24. Sei (E, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Abbildung $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ ist *unterhalbstetig*, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{\varphi \leq \lambda\} := \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \lambda\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \lambda}) \subset E$$

abgeschlossen ist.

Lemma 4.25. Sei (E, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Es ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn $\text{epi}(\varphi)$ abgeschlossen in $E \times \mathbb{R}$ (mit der Produkttopologie) ist.
- (ii) Es ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn für alle $x \in E$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Umgebung V von x existiert, so dass für alle $y \in V$ gilt: $\varphi(y) \geq \varphi(x) \cdot \varepsilon$.
- (iii) Ist φ unterhalbstetig, so gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in E$:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Falls E ein metrischer Raum ist, so gilt auch die Umkehrung.

- (iv) Ist $\tilde{\varphi}: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine weitere unterhalbstetige Abbildung, so ist auch $\varphi + \tilde{\varphi}$ unterhalbstetig.
- (v) Ist $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine Familie unterhalbstetiger Abbildungen $E \rightarrow (-\infty, \infty]$ mit

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$$

für alle $x \in E$, so ist auch φ unterhalbstetig.

- (vi) Ist E kompakt und φ unterhalbstetig, so existiert ein $x_0 \in E$ mit $\varphi(x_0) = \inf_{x \in E} \varphi(x)$.

Beweis. Siehe Übungen für Teile der Aussagen. Wir beweisen hier nur (vi):

Sei also E kompakt und φ unterhalbstetig. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in E , für welche $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\inf_{x \in E} \varphi(x)$ konvergiert. Weil E kompakt ist, existiert dann eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und wir definieren $x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Aus (iii) folgt dann:

$$\varphi(x_0) \leq \inf_{x \in E} \varphi(x) \leq \varphi(x_0).$$

■

Definition 4.26. Sei X ein Vektorraum. Eine Funktion $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ ist *konvex*, wenn φ für alle $x, y \in X$ und alle $t \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

erfüllt.

Lemma 4.27. Sei X ein Vektorraum.

- i) Es ist $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ genau dann konvex, wenn $\text{epi}(\varphi)$ eine konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$ ist.
- ii) Ist $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex, so ist die Menge $\{\varphi \leq \lambda\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ konvex. (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.)
- iii) Sind $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex, so auch $\varphi_1 + \varphi_2$.
- iv) Ist $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine Familie konvexer Abbildungen $X \rightarrow (-\infty, \infty]$, so ist auch

$$\sup_{i \in I} \varphi_i := \left(x \mapsto \sup_{i \in I} \varphi_i(x) \right)$$

konvex.

Ab jetzt betrachten wir vornehmlich normierte \mathbb{R} -Vektorräume.

Definition 4.28. Sei X ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und sei $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Funktion mit $D(\varphi) \neq \emptyset$ (d. h. φ ist nicht konstant ∞). Dann ist die *Legendre-Transformation* (oder *konjugierte Funktion*) von φ die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^*: X' &\rightarrow (-\infty, \infty] \\ f &\mapsto \sup_{x \in X} (f(x) - \varphi(x)). \end{aligned}$$

Bemerkung 4.29.

- (i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Ist $f \in (\mathbb{R}^n)'$, so gibt es genau einen Vektor $y_f \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = x \cdot y := \langle x, y \rangle_{\text{eukl}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir identifizieren dann $(\mathbb{R}^n)'$ mit \mathbb{R}^n vermöge

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)' &\longleftrightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\longmapsto y_f \\ (x \mapsto x \cdot y) &\longleftarrow y, \end{aligned}$$

und somit gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x \cdot y - \varphi(x)).$$

- (ii) Es ist φ^* stets konvex und unterhalbstetig. Dies folgt daraus, dass wir das Supremum betrachten und dass $f \mapsto f(x) - \varphi(x)$ konvex und stetig ist (da affin linear).
- (iii) Es gilt für alle $x \in X$ und alle $f \in X'$ die Ungleichung

$$f(x) \leq \varphi(x) + \varphi^*(f),$$

was direkt aus der Definition von φ^* folgt.

- (iv) Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) ist ein Spezialfall von (iii). Seien $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und setze $\varphi(x) := \frac{1}{p} |x|^p$. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\varphi^*(y) = \frac{1}{p'} |y|^{p'}.$$

(Siehe Übungen.)

Theorem 4.30. Sei X ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konkav und unterhalbstetig mit $D(\varphi) \neq \emptyset$. Dann gilt $D(\varphi^*) \neq \emptyset$ und φ ist durch eine affin lineare Funktion beschränkt.

Beweis. Sei $x_0 \in D(\varphi)$ und sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 < \varphi(x_0)$. Wende nun die zweite geometrische Form des Satzes von Hahn-Banach (4.15) auf den Raum $X \times \mathbb{R}$, die abgeschlossene Menge $A := \text{epi}(\varphi)$ und die kompakte Menge $B := \{(x_0, \lambda_0)\}$ an. Die abgeschlossene Hyperebene $H = \{\Phi = \alpha\}$ in $X \times \mathbb{R}$ trennt A und B .

(to be continued ...)