

Vorlesungsmitschrift (*kein* offizielles Skript)

Funktionalanalysis

Prof. Dr. Harald Garcke

Version vom 4. April 2014

Gesetzt in L^AT_EX von Johannes Prem

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?	1
2	Grundstrukturen der Funktionalanalysis	4
3	Lineare Operatoren	15
4	Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen	20
5	Bairescher Kategoriensatz und seine Konsequenzen	40
6	Hilberträume	53
7	Schwache Konvergenz	67
8	Spektrum für kompakte Operatoren	81
9	Spektralsatz für kompakte normale Operatoren	93
10	L^p -Räume	99
11	Sobolev-Räume und schwache Form von Randwertproblemen in einer Dimension	116

1 Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?

Zum Beispiel von der *Analysis auf Banachräumen* (vollständigen normierten Vektorräumen)

1.1. Auf \mathbb{R}^n definiere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x\|_2 := |x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 (Funktionen auf kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n).

Zum Beispiel: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, z. B. $K = [0, 1]$.

$$C^0(K) := \{f \mid f: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird Banachraum mit der Norm:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty$$

1.3 (Operatoren auf $C^0([0, 1])$).

Definiere

$$L(C^0([0, 1]), C^0([0, 1])) := \{T: C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]) \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

Beispiele:

$$(Tf)(x) := g(x) f(x) \quad \text{wobei } g \in C^0([0, 1])$$

$$(Tf)(x) := \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) \quad \text{wobei } 0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$$

$$L_i: \text{Lagrange-Basis-Fkt.: } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y) \, dy \quad \text{wobei } K \in C^0([0, 1]^2)$$

Bemerkung: $L(C^0([0, 1]), C^0([0, 1]))$ wird zu einem Banachraum mit der Operatornorm

$$\|T\|_{L(C^0, C^0)} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{C^0}}{\|f\|_{C^0}}$$

1.4. Welche Besonderheiten ergeben sich in unendlich-dimensionalen Räumen?

- (1) Problem in ∞ -dimensionalen Vektorräumen: Wenig sinnvolle Aussagen ohne Topologie möglich
- (2) Für $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear gilt:

$$T \text{ surjektiv} \iff T \text{ injektiv}$$

Im ∞ -dim. ist dies i. A. falsch.

Beispiel:

$$c_* := \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}, \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall \ell > \bar{k}: x_\ell = 0\}$$

c_* modelliert „Folgen, die irgendwann abbrechen“. Außerdem enthält c_* den \mathbb{R}^n für $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß.

Definiere die sog. *Shift-Abbildung* wie folgt:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Dann ist T injektiv, aber nicht surjektiv.

- (3) Grundproblem der linearen Algebra: Finde Normalformen für lineare Abbildungen.

Ziel: Verallgemeinerung auf ∞ -dim. Räume.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Diagonalisierbarkeit} \\ \text{symmetrischer Matrizen} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spektralsatz für} \\ \text{kompakte, normale Operatoren} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Jordansche} \\ \text{Normalform} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spektralsatz für} \\ \text{kompakte Operatoren} \end{array} \right.$$

- (4) Kompaktheit

In ∞ -dim. Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel *nicht* kompakt.

Beispiel c_* : Nutze die Norm

$$\|x\|_{c_*} := \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

und die Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (wobei die 1 an der i -ten Stelle steht). Dann gilt:

$$\|e_i\|_{c_*} = 1 \quad \text{und} \quad \|e_i - e_k\|_{c_*} = 1 \text{ für } i \neq k$$

Also hat $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *keine* konvergente Teilfolge, woraus folgt, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist.

- (5) Nicht alle Normen sind zueinander äquivalent.

Beispiel: Betrachte auf $C^0([0, 1])$ die Normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}$$

Es gilt $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty$. Aber: Es gibt keine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $f \in C^0([0, 1])$ gilt: $\|f\|_\infty \leq c \|f\|_{L^2}$. Betrachte dazu:



Es gilt: $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1$, $\|f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Außerdem gilt:

$(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum

$(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2})$ ist normierter Vektorraum (aber nicht vollständig)

Funktionalanalysis lässt sich sinnvoll nur in vollständigen Räumen entwickeln. Deshalb werden wir nicht vollständige Räume vervollständigen (siehe 2.18).

2 Grundstrukturen der Funktionalanalysis

2.1 (Topologie). Sei X eine Menge, \mathcal{T} ein System von Teilmengen. Dann heißt \mathcal{T} *Topologie (auf X)*, falls gilt:

$$(T1) \quad \emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$$

$$(T2) \quad \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$$

$$(T3) \quad T_1, T_2 \in \mathcal{T} \implies T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$$

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *Hausdorff-Raum*, falls er zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt:

$$(T4) \quad \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}: U_1 \cap U_2 = \emptyset \wedge x_i \in U_i$$

Mengen in \mathcal{T} heißen *offene Mengen*. Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Eine Menge $W \subset X$ mit $x \in W$ für die eine offene Menge U mit $x \in U$ und $U \subset W$ existiert, heißt *Umgebung von x* .

Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume, so heißt $f: X \rightarrow Y$ *stetig*, falls die Urbilder offener Mengen stets offen sind. (Formal: $\forall U' \in \mathcal{T}_Y: f^{-1}(U') \in \mathcal{T}_X$)

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *stetig in $x \in X$* , falls

$$f(x) \in V \in \mathcal{T}_Y \implies \exists U \in \mathcal{T}_X: x \in U \subset f^{-1}(V)$$

(d. h. $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von x).

2.2. Ist X ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt (X, \mathcal{T}) *topologischer Vektorraum*, falls (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum ist und die Abbildungen

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow X, & (x, y) &\mapsto x + y \\ \mathbb{K} \times X &\rightarrow X, & (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

stetig sind. („Algebraische und topologische Struktur sind verträglich“)

2.3 (Metrik). Ein Tupel (X, d) heißt *metrischer Raum*, falls X eine Menge ist und $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Bedingungen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt:

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Konvergenz:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls:

$$d(x_k, x_\ell) \rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty$$

x heißt Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (Notation: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder: $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$), falls:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

(X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in X besitzt.

Abstand von Mengen $A, B \subset X$:

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Für $A \subset X$ und $x \in X$ definieren wir: $\text{dist}(x, A) := \text{dist}(\{x\}, A)$.

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $A \subset X$, $x \in X$ definieren wir:

$$B_r(A) := \{x \in X \mid \text{dist}(x, A) < r\}$$

$$B_r(x) := B_r(\{x\})$$

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

Wir sagen A ist *beschränkt*, falls $\text{diam}(A) < \infty$.

2.4 (Topologie von Metriken). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \subset A\} \quad \text{ist das Innere von } A.$$

$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{ist der Abschluss von } A.$$

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{ist der Rand von } A.$$

Wir sagen, dass A offen ist, falls $A^\circ = A$ gilt, und dass A abgeschlossen ist, falls $\overline{A} = A$ gilt.

Durch die Definition $\mathcal{T} := \{A \subset X \mid A \text{ offen}\}$ wird (X, \mathcal{T}) zu einem hausdorffschen topologischen Raum.

2.5 (Fréchet-Metrik). Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $d: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Fréchet-Metrik*, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$(F1) \quad d(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x) = 0 \iff x = 0$$

$$(F2) \quad d(-x) = d(x)$$

$$(F3) \quad d(x + y) \leq d(x) + d(y)$$

Dann ist $(x, y) \mapsto d(x - y)$ eine Metrik auf X .

Beispiel: Fréchet-Metriken auf \mathbb{R} :

$$x \mapsto |x|^\alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha \leq 1$$

$$x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x|}$$

2.6 (Norm). X sei ein \mathbb{K} -Vektorraum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls folgende Bedingungen für alle $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dann ist $x \mapsto \|x\|$ eine Fréchet-Metrik. Wir nennen X *Banachraum*, falls X mit einer gegebenen Norm vollständig ist.

X ist eine *Banachalgebra*, falls X eine Algebra ist (d. h. es gibt ein Produkt auf X , das dem Assoziativgesetz und Distributivgesetz genügt) und $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in X$ gilt.

2.7 (Skalarprodukt). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum.

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *Hermitesche Form* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrische Sesquilinearform), falls für alle $x, x_1, x_2, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(S1) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(S2) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$(S3) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

(Es folgt: für alle $x \in X$ gilt $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$.)

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *positiv semidefinit*, falls

$$(S4') \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

und *positiv definit*, falls

$$(S4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

gilt.

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *Skalarprodukt*, falls (S1)–(S4) erfüllt sind. Dann ist $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf X und wir nennen X dann einen *Prä-Hilbertraum*. Falls X zusätzlich vollständig ist, so heißt X *Hilbertraum*.

Beispiele:

i) \mathbb{R}^n mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

ii) $X = C^0(K, \mathbb{R})$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

$$\langle f, g \rangle := \int_K f(x) g(x) \, dx$$

Dann ist $(C^0(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum (aber kein Hilbertraum!)

Satz 2.8. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum X . Dann gelten:

- (1) Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU): $\forall x, y \in X: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
Gleichheit gilt nur, falls y ein Vielfaches von x ist.
- (2) Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in X: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (3) Parallelogrammidentität: $\forall x, y \in X: \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Bemerkung: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt aus der CSU für $x, y \in X \setminus \{0\}$:

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \in [-1, 1] \quad (*)$$

D. h. es gibt genau ein $\theta \in [0, \pi]$, s. d.

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \cos \theta.$$

Wir interpretieren θ als den Winkel zwischen x und y .

Beweis von Satz 2.8.

(3)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Ersetze y durch $-y$ und addiere beide Gleichungen.

(1) Ersetze in (*) y durch $-\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$ (o. E. $y \neq 0$). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

Es folgt die CSU. In der ersten Zeile gilt bei \leq die Gleichheit genau dann, wenn x ein Vielfaches von y ist.

(2)

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \underbrace{\operatorname{Re}\langle x, y \rangle}_{\leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|} \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

■

2.9 (Vergleich von Topologien). Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X . Wir sagen \mathcal{T}_2 ist *stärker* (oder *feiner*) als \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_1 ist *schwächer* (oder *gröber*) als \mathcal{T}_2 , falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt.

Sind d_1, d_2 zwei Metriken auf X und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ die induzierten Topologien (siehe 2.4), so heißt die Metrik d_1 *stärker* (bzw. *schwächer*) als d_2 , falls \mathcal{T}_1 stärker (bzw. schwächer) als \mathcal{T}_2 ist. Die Metriken heißen äquivalent, falls $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Entsprechend heißt eine Norm stärker bzw. schwächer als eine zweite, wenn dies für die induzierten Metriken gilt. Analog für Äquivalenz von Normen.

2.10 (Vergleich von Normen). Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X . Dann gilt:

(1) $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:

$$\forall x \in X: \|x\|_1 \leq c \|x\|_2$$

(2) Die beiden Normen sind genau dann äquivalent, wenn es $c, C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:

$$\forall x \in X: c \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2$$

Beweis. (1) Es sei $B_r^i(x) = \{x' \in X \mid \|x - x'\|_i < r\}$ und \mathcal{T}_i sei die von $\|\cdot\|_i$ induzierte Topologie.

Sei $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Da $B_1^1(0) \in \mathcal{T}_1$ gilt, ist $B_1^1(0)$ offen bezüglich \mathcal{T}_1 und bezüglich \mathcal{T}_2 . Es liegt 0 im Inneren (bezüglich $\|\cdot\|_2$) von $B_1^1(0)$. Somit gilt $B_\varepsilon^2(0) \subset B_1^1(0)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Daher gilt für $x \in X \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varepsilon x}{2\|x\|_2} \right\|_2 &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ \implies \left\| \frac{\varepsilon x}{2\|x\|_2} \right\|_1 &< 1 \implies \|x\|_1 < \frac{2}{\varepsilon} \|x\|_2 \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt die Ungleichung in (1) so ist für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$B_r^2(x) \subset B_{cr}^1(x)$$

Sei nun $A \in \mathcal{T}_1$. Dann ist $A = A^\circ$ bezüglich \mathcal{T}_1 . D.h. zu $x \in A$ existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\varepsilon^1(x) \subset A$. Also gilt:

$$B_{\varepsilon/c}^2(x) \subset A$$

Dies zeigt $A \in \mathcal{T}_2$.

(2) Wende den ersten Teil zweimal an.

■

Satz 2.11. Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent. Endlich-dimensionale Vektorräume sind Banachräume. Endlich-dimensionale Unterräume normierter Räume sind abgeschlossen.

Beweis. Sei X ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von $(X, \|\cdot\|)$. Jedem $x \in X$ mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ordnen wir den Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{K}^n$ zu.

Die Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^n &\rightarrow X \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto x \mapsto \|x\|\end{aligned}$$

sind stetig.

Daher nimmt $\|x\|$ auf der kompakten Menge

$$S := \{\alpha \mid \|\alpha\|_2 = 1\}$$

ein Maximum M und ein Minimum m an. (Dabei gilt $m > 0$, da $\|x\| > 0$ für alle $x \in S$.)
Damit gilt für x mit $\|\alpha(x)\|_2 = 1$

$$m \leq \|x\| \leq M.$$

Für allgemeine $x \neq 0$ gilt

$$\left\| \alpha \left(\frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right) \right\|_2 = 1 \quad \text{und somit} \quad m \leq \left\| \frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right\| \leq M$$

Dies zeigt die Äquivalenz einer beliebigen Norm zur Norm $x \mapsto \|\alpha(x)\|_2$. Damit sind zwei beliebige Normen äquivalent.

Die Vollständigkeit von X folgt aus der Vollständigkeit von $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$. Die Tatsache, dass endlich-dimensionale Räume abgeschlossen sind, folgt mit Aufgabe 1 von Übungsblatt 2.

■

2.12 (Folgenräume). Wir bezeichnen mit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen über \mathbb{K} , d. h.

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Es gilt:

1) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist ein metrischer Raum mit der Fréchet-Metrik

$$\varrho(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|} \quad \text{für } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

2) Ist $(x^k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_i)^k_{i \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und ist $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, so gilt:

$$\varrho(x^k - x) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \iff \forall i \in \mathbb{N}: x_i^k \rightarrow x_i \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

(Vergleiche Aufgabe 2 von Blatt 1.)

3) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist mit dieser Metrik vollständig.

4) Definiere für $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty] \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \in [0, \infty]$$

Wir betrachten für $1 \leq p \leq \infty$ die Mengen

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_{\ell^p} < \infty\}$$

Diese Räume sind normierte Vektorräume und auch vollständig (also Banachräume). (Beweis, siehe später.) Wenn der Körper \mathbb{K} aus dem Kontext klar ist, lassen wir diesen in der Notation auch weg.

5) Interessante Unterräume von ℓ^∞ sind:

$$c := \{x \in \ell^\infty \mid \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \text{ existiert}\} \quad \text{und}$$

$$c_0 := \{x \in \ell^\infty \mid \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0\}.$$

Beide Räume versehen wir mit der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm. Es gilt: $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$

6) Der Raum ℓ^2 besitzt das Skalarprodukt

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{für } x, y \in \ell^2$$

Lemma 2.13 (Youngsche Ungleichung). Es seien $p, p' \in (1, \infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \log(ab) &= \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(b^{p'}) \\ &\leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichheit folgt daraus, dass der Logarithmus eine konkave Funktion ist. Da außerdem \exp monoton ist, folgt hieraus die Behauptung. ■

Satz 2.14 (Höldersche Ungleichung auf ℓ^p). Es sei $1 \leq p, p' \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^{p'}$ ist $xy \in \ell^1$ (dabei sei für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das Produkt definiert als: $xy := (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$) und es gilt:

$$\|xy\|_{\ell^1} \leq \|x\|_{\ell^p} \cdot \|y\|_{\ell^{p'}}.$$

Beweis. Falls $p = \infty$ setze $p' = 1$ (und umgekehrt). In diesem Fall ist der Beweis einfach. Sei nun $1 < p < \infty$ und $\|x\|_{\ell^p} > 0, \|y\|_{\ell^{p'}} > 0$. Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) liefert:

$$\frac{|x_k| |y_k|}{\|x\|_{\ell^p} \|y\|_{\ell^{p'}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_{\ell^p}^p} + \frac{1}{p'} \frac{|y_k|^{p'}}{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}}$$

Die Reihe über die Terme der rechten Seite ist eine konvergente Reihe und damit folgt aus dem Majorantenkriterium, dass $xy \in \ell^1$ erfüllt sein muss. ■

Satz 2.15. Der Raum ℓ^p ist für $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum.

Beweis. Die Vollständigkeit von ℓ^1 ist eine Übungsaufgabe. Für ℓ^p folgt dies ähnlich (vergleiche mit dem späteren Beweis über $L^p(\mu)$.) Die Normeigenschaften abgesehen von der Δ -Ungleichung ergeben sich einfach. Wir zeigen die Δ -Ungleichung für $p \in (1, \infty)$. Es seien also $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= (\|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}) (\|x + y\|_{\ell^p}^{p-1}) \end{aligned}$$

Bei $(*)$ geht die Höldersche Ungleichung ein. Dies zeigt $\|x + y\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}$. ■

2.16 (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen). Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt (also nach Heine-Borel äquivalenterweise kompakt) und Y ein Banachraum über \mathbb{K} , so ist $C^0(K, Y)$ ein Unterraum von $B(K, Y)$. (Vergleiche Aufgabe 1 von Blatt 2.)

Satz: Mit $\|f\|_{C^0} := \|f\|_{\infty} := \sup_{x \in K} |f(x)|$ wird $C^0(K, Y)$ ein Banachraum.

Beweis. Jedes $f \in C^0(K, Y)$ ist beschränkt, denn: Zu $x \in K$ existiert ein $\delta_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(B_{\delta_x}(x)) \subset B_1(f(x))$. Da K kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Es folgt:

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^m B_1(f(x_i)).$$

Die rechte Menge ist beschränkt, also ist auch f beschränkt.

Aufgabe 1 (iv) von Blatt 2 zeigt, dass $B(K, Y)$ ein Banachraum ist. Eine Cauchy-Folge in $C^0(K, Y)$ ist auch eine Cauchy-Folge in $B(K, Y)$. Da $B(K, Y)$ vollständig ist, besitzt jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Sei jetzt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^0(K, Y)$ mit Grenzwert f in $B(Y, K)$. Für $x, y \in K$ gilt:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \underbrace{\|f_i(y) - f_i(x)\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x \text{ und jedes } i} + 2 \underbrace{\|f - f_i\|_\infty}_{\rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty}$$

Dies beweist $f \in C^0(K, Y)$. ■

2.17 (Räume differenzierbarer Funktionen). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir:

$$C^m(\overline{\Omega}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } m\text{-mal stetig diffenzierbar auf } \Omega \text{ und für } s \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |s| \leq m \text{ ist } \partial^s f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar}\}.$$

(Dabei ist s ein Multiindex mit $|s| = s_1 + \dots + s_n$.)

Satz: Der Raum $C^m(\overline{\Omega})$ ist mit der Norm

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$$

ein Banachraum.

Beweis. Wir beweisen die Vollständigkeit von $C^1(\overline{\Omega})$. (Der Fall $m > 1$ folgt induktiv.) Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^1(\overline{\Omega})$, so sind $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\partial_i f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $C^0(\overline{\Omega})$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Daher existieren f und g_i in $C^0(\overline{\Omega})$, so dass $f_k \rightarrow f$ sowie $\partial_i f_k \rightarrow g_i$ gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$ in $C^0(\overline{\Omega})$. Für $x \in \Omega$ und y nahe x mit $x_t := (1-t)x + ty$ folgt aus dem HDI:

$$f_k(x_1) - f_k(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_k(x_t) dt = \int_0^1 (y - x) \cdot \nabla f_k(x_t) dt$$

Es folgt (mit $g = (g_1, \dots, g_n)$):

$$\begin{aligned} \|f_k(y) - f_k(x) - (y - x) \cdot \nabla f_k(x)\| &= \left\| \int_0^1 ((y - x) \cdot \nabla f_k(x_t) - (y - x) \cdot \nabla f_k(x)) dt \right\| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_0^1 \|\nabla f_k(x_t) - \nabla f_k(x)\| dt \|y - x\| \\ &\leq \left(2\|\nabla f_k - g\|_\infty + \sup_{t \in [0,1]} \|g(x_t) - g(x)\| \right) \|y - x\| \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ gilt dann:

$$\|f(y) - f(x) - (y - x) \cdot g(x)\| \leq \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq 1} \|g(x_t) - g(x)\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x \text{ wegen Stetigkeit von } g} \|y - x\|$$

Dies bedeutet f ist in x diff'bar mit $\nabla f(x) = g(x)$. ■

2.18 (Vervollständigung). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\tilde{X} := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}$$

zusammen mit der Äquivalenzrelation

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \tilde{X} : \Longleftrightarrow (d(x_j, y_j))_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

Führe Metrik auf \tilde{X} ein: für $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ sei

$$\tilde{d}((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) := \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, y_j).$$

Satz:

- i) Dann ist (\tilde{X}, \tilde{d}) ein vollständiger metrischer Raum.
- ii) Durch $J(x) := (x)_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine injektive Abbildung $J: X \rightarrow \tilde{X}$ definiert, welche isometrisch ist, d. h. für alle $x, y \in X$ gilt

$$\tilde{d}(J(x), J(y)) = d(x, y).$$

- iii) Es liegt $J(X)$ dicht in \tilde{X} .

Beweis. Für $\tilde{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\tilde{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \tilde{X} gilt (mithilfe der sog. *Vierecksungleichung*):

$$|d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i)| \leq d(x_j, x_i) + d(y_j, y_i) \rightarrow 0 \quad \text{für } i, j \rightarrow \infty.$$

Somit existiert $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, y_j)$. Für $\tilde{x}^1 = \tilde{x}^2$ und $\tilde{y}^1 = \tilde{y}^2$ in \tilde{X} folgt:

$$|d(x_j^2, y_j^2) - d(x_j^1, y_j^1)| \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Dies zeigt, dass \tilde{d} wohldefiniert ist. Außerdem gilt:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{x} = \tilde{y},$$

was direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation folgt. Die \triangle -Ungleichung und Symmetrie übertragen sich direkt.

Zur Vollständigkeit: Es sei $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \tilde{X} , mit $x^k = (x_j^k)_{j \in \mathbb{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $j_k \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_i^k, x_j^k) \leq 1/k$ für alle $i, j \geq j_k$ erfüllt ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_{j_k}^k, x_{j_\ell}^\ell) &\leq d(x_{j_k}^k, x_{j_j}^k) + d(x_{j_j}^k, x_{j_j}^\ell) + d(x_{j_j}^\ell, x_{j_\ell}^\ell) \\ &\leq \frac{1}{k} + d(x_j^k, x_j^\ell) + \frac{1}{\ell} \quad \text{für } j \geq j_k, j_\ell \\ &\rightarrow \frac{1}{k} + \tilde{d}(x^k, x^\ell) + \frac{1}{\ell} \quad \text{für } j \rightarrow \infty \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also ist $x^\infty := (x_{j_\ell}^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ in \tilde{X} und es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x^\ell, x^\infty) &\leftarrow d(x_k^\ell, x_k^\infty) \quad \text{für } k \rightarrow \infty \\ &\leq d(x_k^\ell, x_{j_\ell}^\ell) + d(x_{j_\ell}^\ell, x_{j_\ell}^k) \\ &\leq \frac{1}{\ell} + d(x_{j_\ell}^\ell, x_{j_k}^k) \quad \text{für } k \geq j_\ell \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Es gilt also $x^\ell \rightarrow x^\infty$. Da $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in \tilde{X} war, hat also jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Die Aussagen ii) und iii) sind eine einfache Übung. ■

3 Lineare Operatoren

Definition 3.1.

- (a) Seien X, Y zwei \mathbb{K} -Vektorräume mit Topologien $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$. Wir definieren

$$L(X, Y) := \{T: X \rightarrow Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Elemente in $L(X, Y)$ heißen *lineare Operatoren von X nach Y* . (Für $T \in L(X, Y)$ und $x \in X$ schreiben wir auch oft Tx statt $T(x)$.)

- (b) Der *Dualraum* von X ist

$$X' := L(X, \mathbb{K})$$

und Elemente aus X' nennen wir *lineare Funktionale*.

Beispiele 3.2.

- 1) Gelte $X = C^2(\overline{\Omega})$ und $Y = C^0(\overline{\Omega})$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte dann $T: X \rightarrow Y$ mit

$$(Tu)(x) := -\Delta u(x)$$

für alle $u \in C^2(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$.

- 2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $K: \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei dann T für alle $u \in C^0(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$ gegeben durch:

$$(Tu)(x) := \int_{\overline{\Omega}} K(x, y) u(y) \, dy.$$

Lemma 3.3. Seien X, Y normierte Vektorräume und sei $T: X \rightarrow Y$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) T ist stetig, also $T \in L(X, Y)$.
- (2) T ist stetig in x_0 für ein $x_0 \in X$.
- (3) Es gilt für die Operatornorm von T :

$$\|T\|_{L(X, Y)} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y < \infty$$

- (4) Es existiert ein $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X$. (Bemerkung: $C = \|T\|_{L(X, Y)}$ ist die kleinste solche Zahl.)

Beweis. (1) \implies (2): klar.

(2) \implies (3): Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$T(\overline{B_\delta(x_0)}) \subset \overline{B_1(T(x_0))}$$

erfüllt ist. Für x mit $\|x\|_X \leq 1$ folgt $x_0 + \delta x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ und daraus: $T(x_0 + \delta x) \in \overline{B_1(T(x_0))}$, d. h. es gilt:

$$\|T(x_0 + \delta x) - T(x_0)\| \leq 1.$$

Wegen der Linearität von T gilt $T(x_0 + \delta x) - T(x_0) = \delta T(x)$, weshalb wir $\|T(x)\| \leq 1/\delta$ bekommen.

(3) \implies (4): Für $x \neq 0$ gilt $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$. Daraus folgt:

$$\|Tx\| = \left\| \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|T\| \|x\|.$$

(4) \implies (1): Für $x, x_0 \in X$ gilt:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq C \|x - x_0\|.$$

Also ist T Lipschitz-stetig und somit auch stetig. ■

Lemma 3.4.

(1) X, Y normierte Räume $\implies L(X, Y)$ normiert mit der Operatornorm.

(2) Y Banachraum $\implies L(X, Y)$ Banachraum

(3) X Banachraum $\implies L(X) := L(X, X)$ Banachalgebra

(4) $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z) \implies ST \in L(X, Z)$ mit $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$

Beweis. Zu (1): Wir zeigen nur die Δ -Ungleichung (der Rest ist klar). Es gilt

$$\|(T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\|,$$

woraus folgt:

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Zu (2): Es sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X, Y)$. Für alle $x \in X$ ist dann $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y . Setze

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x.$$

Da Grenzwertbilden linear ist, ist auch T linear. Wir behaupten, dass $T \in L(X, Y)$ und $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gelten.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Sei $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$. Wähle $m_0 = m_0(\varepsilon, x) \geq n_0$ mit

$$\|T_{m_0}x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ folgt nun:

$$\|T_nx - Tx\| \leq \|T_nx - T_{m_0}x\| + \|T_{m_0}x - Tx\| \leq \|T_n - T_{m_0}\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Damit folgen nun aber $\|T\| \leq \infty$ sowie $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Zu (3) und (4): Es gilt:

$$\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|.$$

Also gilt allgemein: $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$. ■

Bemerkung 3.5. Es sei $T \in L(X, Y)$ und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X, Y)$ mit $T_kx \rightarrow Tx$ für $k \rightarrow \infty$ und für alle $x \in X$. Dann folgt i. A. *nicht* $T_k \rightarrow T$ in $L(X, Y)$.

Beispiel: $X = c_0$ (Raum der Nullfolgen, siehe 2.12 (5)) mit der Supremumsnorm, $Y = \mathbb{R}$, $T_kx := x_k$. Dann gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} T_kx = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 =: Tx$. Offensichtlich gilt $\|T_kx\| = 1$ für $x = e_k$. Außerdem gilt $\|T_kx\| = \|x_k\| \leq 1$ für $\|x\| \leq 1$. D. h. $\|T_k\| = 1$, aber $\|T\| = 0$.

Definition 3.6. Für $T \in L(X, Y)$ definieren wir den *Nullraum (Kern) von T* als

$$N(T) := \{x \in X \mid T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\}).$$

Es ist $N(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(X, Y)$.

Weiter sei

$$R(T) := \{Tx \in Y \mid x \in X\} = T(X)$$

der *Bildraum* (engl.: „range“) von T . Es ist $R(T)$ ein linearer Unterraum von Y , i. A. aber nicht abgeschlossen.

Beispiel: $X = C^0([0, 1])$,

$$T: X \rightarrow X, \quad (Tf)(x) := \int_0^x f(\xi) \, d\xi$$

$$R(T) = \{g \in C^1([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

Es gilt $T \in L(X, Y)$ aber $R(T)$ ist nicht abgeschlossen in X , denn:

$$\overline{R(T)} = \{g \in C^0([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

(denn stetige Funktionen können durch C^1 -Funktionen in der C^0 -Norm approximiert werden, siehe später).

Satz 3.7 (Neumannsche Reihe). Sei X ein Banachraum und sei $A \in L(X)$ mit $\|A\| < 1$. Es bezeichne Id den Identitätsoperator. Dann liegt $(\text{Id} - A)^{-1}$ in $L(X)$ und es gilt:

$$(\text{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Beweis. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n := \sum_{k=0}^n A^k \in L(X).$$

Mit $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ folgt:

$$\begin{aligned} \|B_n x - B_m x\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n A^k x \right\| \quad \text{für } n > m \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \|A\|^k \|x\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty \text{ für alle } x \text{ mit gleichmäßig } \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

Also existiert $B \in L(X)$ mit $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$. Noch zu zeigen: $B(\text{Id} - A) = \text{Id} = (\text{Id} - A)B$. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n A^k (\text{Id} - A) = \sum_{k=0}^n (A^k - A^{k+1}) = \text{Id} - A^{n+1} \rightarrow \text{Id} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also:

$$B(\text{Id} - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n (\text{Id} - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Id} - A^{n+1}) = \text{Id}$$

■

3.8 (Invertierbare Operatoren). Seien X, Y Banachräume. Wir sagen $T \in L(X, Y)$ ist invertierbar, falls T bijektiv ist und $T^{-1} \in L(Y, X)$ gilt.

Satz:

- i) Die Teilmenge $\{T \in L(X, Y) \mid T \text{ invertierbar}\}$ ist offen in $L(X, Y)$.
- ii) Es gilt genauer für $T, S \in L(X, Y)$ mit invertierbarem T :

$$\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1} \implies T - S \text{ invertierbar}$$

Beweis. Es gilt:

$$T - S = T(\text{Id}_X - \underbrace{T^{-1}S}_{\in L(X)}).$$

Also folgt mit $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$:

$$\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\| \|S\| < 1.$$

Mithilfe der Neumannschen Reihe (Satz 3.7) erhalten wir:

$(\text{Id} - T^{-1}S)$ ist invertierbar.

Also ist auch $T - S$ invertierbar

■

4 Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen

Problem: Setze ein Funktional stetig von einem Unterraum auf den gesamten Raum fort.

Bisher wissen wir nicht, ob auf jedem normierten Vektorraum ein (nicht-triviales) stetiges lineares Funktional existiert. Da wir im Folgenden grundlegend das *Zorn'sche Lemma* verwenden, wiederholen kurz die Voraussetzungen dafür.

Definition 4.1.

i) Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $H \subset M \times M$ definiert eine *Halbordnung* (wir sagen $a \leq b$, falls $(a, b) \in H$ erfüllt ist), wenn für alle $a, b \in M$ gilt:

a) $a \leq a$

b) $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

c) $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$

ii) Eine Teilmenge $K \subset M$ heißt *Kette* (oder *total geordnete Teilmenge*), falls für alle $a, b \in K$ entweder $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

iii) Eine *obere Schranke* einer Teilmenge $K \subset M$ ist ein Element $s \in M$ mit $a \leq s$ für alle $a \in K$. (Achtung: s muss *nicht* in K liegen!)

iv) Wir sagen M ist *induktiv geordnet*, falls jede Kette in M eine obere Schranke besitzt.

v) Ein $m \in K$ heißt *maximales Element von K* , wenn für alle $a \in K$ aus $a \geq m$ schon $a = m$ folgt.

4.2 (Zorn'sches Lemma). Jede induktiv geordnete Menge besitzt (mindestens) ein maximales Element.

Bemerkung: Das Zorn'sche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Satz 4.3 (Satz von Hahn-Banach). Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum und $Y \subset X$ ein Unterraum. Weiter gelte:

(1) $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist sublinear, d. h. für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{und} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

(2) $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear.

(3) $f \leq p$ auf Y .

Dann existiert eine lineare Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq p$ auf X .

Beweis. Nutze das Zorn'sche Lemma (4.2). Es sei

$$M := \{(Z, g) \mid Y \subset Z \subset X, Z \text{ ist Unterraum}, \\ g: Z \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist linear, } g = f \text{ auf } Y, g \leq p \text{ auf } Z\}.$$

Wir definieren eine Halbordnung auf dieser Menge folgendermaßen:

$$(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad Z_1 \subset Z_2 \wedge g_2|_{Z_1} = g_1.$$

Es ist zunächst zu zeigen, dass es überhaupt ein F gibt, so dass $(X, F) \in M$ gilt. Hierzu brauchen wir folgende Konstruktion:

Sei $(Z, g) \in M, z_0 \in X \setminus Z$. Definiere dann $Z_0 := Z \oplus \text{span}\{z_0\}$. Das Ziel ist es nun, g auf Z_0 fortzusetzen. Ansatz:

$$g_0(z + \alpha z_0) = g(z) + \alpha c$$

für $z \in Z, \alpha \in \mathbb{R}$. Gesucht ist nun ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$.

Es muss für alle $z \in Z$ gelten:

$$g(z) + \alpha c \leq p(z + \alpha z_0).$$

Für $\alpha = 0$ ist dies klar. Für $\alpha > 0$ haben wir:

$$c \leq \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = p\left(\frac{z}{\alpha} + z_0\right) - g\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

und für $\alpha < 0$:

$$c \geq \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = -p\left(-\frac{z}{\alpha} - z_0\right) + g\left(-\frac{z}{\alpha}\right).$$

Gesucht ist nun ein c , so dass

$$\sup_{z' \in Z} (g(z') - p(z' - z_0)) \leq c \leq \inf_{z \in Z} (p(z + z_0) - g(z)) \quad (\star)$$

erfüllt ist.

Es gilt für alle $z', z \in Z$:

$$g(z + z') \leq p(z + z') = p(z + z_0 + z' - z_0) \leq p(z + z_0) + p(z' - z_0).$$

Daraus folgt für alle $z', z \in Z$:

$$g(z') - p(z' - z_0) \leq p(z + z_0) - g(z),$$

was wiederum bedeutet, dass wir für c einfach den Wert des Supremums in (\star) nehmen können. Somit existiert also ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $(Z_0, g_0) \in M$ gilt. Sei nun $N \subset M$ eine Kette. Definiere dann

$$Z_0 := \bigcup_{(Z,g) \in N} Z$$

und

$$g_0: Z_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z_0 \mapsto g(z_0) \text{ falls } z_0 \in Z \text{ mit } (Z, g) \in N.$$

Da N eine Kette ist, ist g_0 tatsächlich wohldefiniert. Es folgt also $(Z_0, g_0) \in M$ und für alle $(Z, g) \in N$ gilt $(Z, g) \leq (Z_0, g_0)$.

Das Zorn'sche Lemma liefert nun: Es existiert ein maximales Element $(Z, g) \in M$. Dann muss schon $Z = X$ gelten, denn: Falls $z_0 \in X \setminus Z$ existiert, konstruiere eine Fortsetzung von g auf $Z \oplus \text{span}\{z_0\}$ wie oben. Dies liefert einen Widerspruch zur Maximalität von (Z, g) . Damit ist der Satz gezeigt. ■

Wir wollen nun den Satz von Hahn-Banach auf den komplexen Fall verallgemeinern. Die Frage ist, wie wir „ $f \leq p$ “ auf \mathbb{C} umgehen. Dazu betrachten wir die Realteilstfunktion $\text{Re } f$ von f .

Lemma 4.4. Sei X ein \mathbb{C} -Vektorraum.

(a) Sei $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$ ein \mathbb{R} -lineares Funktional, d. h.

$$\ell(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \ell(x_1) + \lambda_2 \ell(x_2)$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$. Setzen wir

$$\tilde{\ell}(x) := \ell(x) - i \ell(ix),$$

so ist $\tilde{\ell}: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung mit $\ell = \text{Re } \tilde{\ell}$.

(b) Ist $h: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, $\ell = \text{Re } h$ und $\tilde{\ell}$ wie in (a), so ist ℓ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung mit $\tilde{\ell} = h$.

(c) Ist $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm (es gelten die Normaxiome bis auf $p(x) = 0 \implies x = 0$) und ist $\ell: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, so gilt:

$$\left(\forall x \in X: |\ell(x)| \leq p(x) \right) \iff \left(\forall x \in X: |\text{Re } \ell(x)| \leq p(x) \right).$$

(d) Ist X ein normierter Vektorraum und ist $\ell: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung und stetig, so ist $\|\ell\| = \|\text{Re } \ell\|$.

Bemerkung: $\ell \mapsto \text{Re } \ell$ ist also eine bijektive \mathbb{R} -lineare Abbildung zwischen den \mathbb{C} -linearen und den \mathbb{R} -linearen, \mathbb{R} -wertigen Abbildungen. Im normierten Fall ist die Abbildung sogar eine Isometrie.

Beweis.

- (a) Da $x \mapsto ix$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung ist, folgt: $\tilde{\ell}$ ist \mathbb{R} -linear. Die Gleichheit $\operatorname{Re} \tilde{\ell} = \ell$ gilt nach Konstruktion. Außerdem gilt:

$$\tilde{\ell}(ix) = \ell(ix) - i\ell(i^2x) = \ell(ix) - i\ell(-x) = i(\ell(x) - i\ell(ix)) = i\tilde{\ell}(x).$$

- (b) Natürlich ist $\ell = \operatorname{Re} h$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \operatorname{Re} h(x) + i \operatorname{Im} h(x) = \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re}(ih(x)) \\ &= \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re} h(ix) = \ell(x) - i\ell(ix) = \tilde{\ell}(x) \end{aligned}$$

- (c) Wegen $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt die Hinrichtung. Die Rückrichtung ergibt sich wie folgt: Schreibe $\ell(x) = \lambda |\ell(x)|$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$|\ell(x)| = \lambda^{-1} \ell(x) = \ell(\lambda^{-1}x) = |\operatorname{Re} \ell(\lambda^{-1}x)| \leq p(\lambda^{-1}x) = p(x).$$

- (d) folgt sofort aus (c). ■

Satz 4.5. Sei X ein \mathbb{C} -Vektorraum und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Weiter sei $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear und $\ell: U \rightarrow \mathbb{C}$ linear mit $\operatorname{Re} \ell(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L: X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $L|_U = \ell$ und $\operatorname{Re} L(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Wende den Satz von Hahn-Banach (4.3) auf das \mathbb{R} -lineare Funktional $\operatorname{Re} \ell: U \rightarrow \mathbb{R}$ an und erhalte eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_U = \operatorname{Re} \ell$ und $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Nach Lemma 4.4 ist $F = \operatorname{Re} L$ für ein \mathbb{C} -lineares Funktional $L: X \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist L eine geeignete Fortsetzung. ■

Satz 4.6. Sei X ein normierter Vektorraum und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Zu jedem stetigen linearen Funktional $u': U \rightarrow \mathbb{K}$ existiert ein lineares Funktional $x': X \rightarrow \mathbb{K}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|x'\| = \|u'\|$.

Beweis. Sei X zunächst ein \mathbb{R} -Vektorraum. Definiere für alle $x \in X$

$$p(x) := \|u'\| \|x\|,$$

womit $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear ist. Der Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) liefert: Es existiert eine lineare Abbildung $x': X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x'|_U = u'$ und $x'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Da auch $x'(-x) \leq p(-x) = p(x)$ gilt, folgt

$$|x'(x)| \leq \|u'\| \|x\| \quad \text{also} \quad \|x'\| \leq \|u'\|.$$

Umgekehrt gilt:

$$\|u'\| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |u'(u)| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |x'(u)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |x'(x)| = \|x'\|.$$

Sei X nun ein \mathbb{C} -Vektorraum. Wir erhalten wie in Satz 4.5 ein lineares Funktional $x': X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|\operatorname{Re} x'\| = \|u'\|$. Lemma 4.4 (d) liefert dann wie gewünscht $\|x'\| = \|u'\|$. ■

Bemerkung 4.7.

- i) Die Fortsetzungen im Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) und seinen Folgerungen sind im Allgemeinen *nicht* eindeutig.
- ii) Für Operatoren (lineare Abbildungen von X nach Y) ist die Aussage in Satz 4.6 im Allgemeinen falsch.

Beispiel: Es gibt keinen stetigen linearen Operator $T: \ell^\infty \rightarrow c_0$, der die Identität $\operatorname{Id}: c_0 \rightarrow c_0$ fortsetzt.

- iii) Es gibt eine eindeutige stetige Fortsetzung, falls der Unterraum U dicht in X liegt.

Definition 4.8. Eine *affine Hyperebene* in einem \mathbb{K} -Vektorraum X ist eine Teilmenge $H \subset X$ der Form

$$H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$$

für eine (nicht-triviale) lineare Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Wir schreiben auch kurz: $H = \{f = \alpha\}$.

Satz 4.9. Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum, sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ linear und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn f stetig ist.

Beweis. Es ist klar, dass H abgeschlossen ist, wenn f stetig ist, denn es gilt $f^{-1}(\{\alpha\}) = H$ und $\{\alpha\}$ ist abgeschlossen in \mathbb{R} . Für die Rückrichtung sei H abgeschlossen in X . Dann ist H^c offen und nicht leer. Jetzt sei $x_0 \in H^c$ mit $f(x_0) \neq \alpha$, o. E. $f(x_0) < \alpha$. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\} \subset H^c$. (Abbildung 4.2)



Abbildung 4.1: Zwei Teilmengen A und B eines Vektorraums, getrennt durch eine Hyperebene H (hier eine Gerade im \mathbb{R}^2)



Abbildung 4.2: Hyperebene H und Ball $B_r(x_0)$ um x_0 mit $x \in B_r(x_0)$

Wir behaupten nun, dass dann schon für alle $x \in B_r(x_0)$ die Ungleichung

$$f(x) < \alpha \quad (*)$$

gilt. Angenommen dies gilt nicht und es existiert ein $x_1 \in B_r(x_0)$, so dass $f(x_1) > \alpha$ gilt. Das Segment

$$[x_0, x_1] := \{x_t := (1-t)x_0 + tx_1 \mid t \in [0, 1]\}$$

ist in $B_r(x_0)$ enthalten (da Bälle in normierten Räumen konvex sind). Somit folgt für alle $t \in [0, 1]$:

$$f(x_t) \neq \alpha.$$

Andererseits gilt offenbar

$$f(x_t) = \alpha \quad \text{für} \quad t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Dies ist ein Widerspruch, also muss doch schon $(*)$ gelten. Wir erhalten, dass für alle $z \in B_1(0)$

$$\underbrace{f(x_0 + rz)}_{\in B_r(x_0)} < \alpha$$

gilt, woraus sofort

$$f(z) < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0))$$

folgt. Nutze diese Ungleichung für z und $-z$ aus $B_1(0)$, um Folgendes für alle $z \in B_1(0)$ zu erhalten:

$$|f(z)| < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0)).$$

Insgesamt folgt:

$$\|f\| = \sup_{z \in B_1(0)} |f(z)| \leq \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0)).$$

■

Definition 4.10. Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum und seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen von X . Die Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ trennt die Mengen A und B , falls für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha \quad \text{und} \quad f(b) \geq \alpha$$

gelten.



Abbildung 4.3: Zwei *nicht* strikt durch H getrennte Mengen; die Mengen aus Abbildung 4.1 sind hingegen strikt durch H getrennt

Die Hyperebene H *trennt* A und B *strikt*, falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon \quad \text{und} \quad f(b) \geq \alpha + \varepsilon$$

gelten.

Bemerkung 4.11.

- i) Geometrisch sagt solch eine Trennung aus, dass A auf der einen Seite von H liegt und B auf der anderen Seite. (Siehe Abbildung 4.1 und Abbildung 4.3.)
- ii) Ist X ein \mathbb{C} -Vektorraum, so sagen wir, dass A und B durch eine *reelle Hyperebene* getrennt werden, falls $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ linear und $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} f(b) \geq \alpha$$

gelten.

- iii) Wir nennen $A \subset X$ konvex, falls für alle $x, y \in A$ auch

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\} \subset A$$

gilt.

Definition: Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und $K \subset X$. Dann ist das *Minkowski-Funktional* zu K definiert durch

$$p(x) := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in K \right\}.$$

Für $K = B_1(0)$ gilt gerade $p(x) = \|x\|$.

Lemma 4.12. Es sei K konvex, offen und $0 \in K$. Dann gilt:

- i) Das Minkowski-Funktional p zu K ist sublinear.
- ii) Es existiert ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$0 \leq p(x) \leq M \|x\|.$$

- iii) Zwischen K und p besteht folgender Zusammenhang:

$$K = \{x \in X \mid p(x) < 1\}.$$

Beweis.

- i) Seien $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in X$. Dann gilt $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, denn:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} \lambda x \in K \right\} = \inf \left\{ \alpha' \lambda \mid \frac{1}{\alpha' \lambda} \lambda x \in K \right\} \\ &= \lambda \inf \left\{ \alpha' \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha'} x \in K \right\} = \lambda p(x) \end{aligned}$$

Die \triangle -Ungleichung zeigen wir später.

- ii) Es sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $B_r(0) \subset K$ gilt. Es gilt dann für alle $x \in X$:

$$p(x) \leq \frac{1}{r} \|x\|,$$

denn:

$$\begin{aligned} p(x) &= \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in K \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in B_r(0) \right\} \\ &= \frac{1}{r} \|x\| \end{aligned}$$

- iii) Es sei $x \in K$. Da K offen ist, folgt $(1 + \varepsilon)x \in K$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ klein genug. Dann gilt:

$$p(x) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1.$$

Falls $p(x) < 1$ gilt, muss ein $\alpha \in (0, 1)$ geben, so dass $x/\alpha \in K$ erfüllt ist. Damit gilt:

$$x = \alpha \left(\frac{x}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) \cdot 0 \in K,$$

denn K ist nach Voraussetzung konvex.



Abbildung 4.4: Links eine konvexe Menge K , getrennt von $\{x_0\}$ durch H ; rechts eine nicht konvexe Menge, so dass diese und x_0 nicht durch eine Hyperebene H getrennt werden können

- i) Es bleibt die \triangle -Ungleichung zu zeigen. Seien $x, y \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Aus dem bisher Gezeigten folgt:

$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon}, \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in K.$$

Damit gilt also für alle $t \in [0, 1]$:

$$\frac{tx}{p(x) + \varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y) + \varepsilon} \in K.$$

Wähle nun $t = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$, dann erhalten wir

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in K \quad \text{und mit (iii) folgt} \quad p\left(\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}\right) < 1.$$

Es folgt:

$$p(x + y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Lemma 4.13. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und sei $K \subset X$ nicht-leer, offen und konvex. Sei weiter $x_0 \in K^\circ$. Dann existiert ein $x' \in X'$, so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x_0).$$

Insbesondere trennt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die reelle Hyperebene $\{\operatorname{Re} x' = \operatorname{Re} x'(x_0)\}$ somit $\{x_0\}$ und K .

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung können wir $0 \in K$ annehmen. Sei p das Minkowski-Funktional zu K . Sei weiter $U := \operatorname{span}\{x_0\}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(tx_0) := t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in U$:

$$g(x) \leq p(x)$$

und für x_0 haben wir $g(x_0) = 1 \leq p(x_0)$, da x_0 nicht in K liegt. (Achtung: tx_0 mit $t < 0$ ist kein Problem, da $g(tx_0) < 0$.)

Wende nun Hahn-Banach (Satz 4.3) an, womit wir ein $x': X \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten, mit $x'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$ und außerdem $x'|_U = g$. Insbesondere gilt also $x'(x_0) = 1$. Außerdem ist x' stetig (vgl. Lemma 4.12 (ii)). Mit Lemma 4.12 (iii) erhalten wir: für alle $x \in K$ gilt

$$x'(x) < 1.$$

Der komplexe Fall (also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) folgt aus dem Obigen und Lemma 4.4. ■

Satz 4.14 (Satz von Hahn-Banach (erste geometrische Formulierung)). Sei X ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und seien $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und disjunkt. Außerdem sei A offen. Dann existiert $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bemerkung: Ist X ein \mathbb{R} -Vektorraum, so trennt die abgeschlossene Hyperebene $\{x' = \alpha\}$ mit

$$\alpha \in \left[\sup_{a \in A} x'(a), \inf_{b \in B} x'(b) \right]$$

die Mengen A und B .

Beweis. Es sei $C := A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$. Dann ist C konvex (leichte Rechnung) und offen, denn:

$$C = \bigcup_{b \in B} \underbrace{(A - \{b\})}_{\text{offen}}.$$

Da A und B disjunkt sind, liegt 0 nicht in C . Aus Lemma 4.13 folgt die Existenz eines $x' \in X'$, welches für alle $x \in C$ die Ungleichung

$$\operatorname{Re} x'(x) < 0 = \operatorname{Re} x'(0)$$

erfüllt. Das heißt, es gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < 0 \quad \text{oder äquivalent} \quad \operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b).$$
■

Satz 4.15 (Satz von Hahn-Banach (zweite geometrische Formulierung)). Sei X ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und seien $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und disjunkt. Weiter sei A abgeschlossen und B kompakt. Dann existiert ein $x' \in X'$ sowie ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $a \in A$ und $b \in B$ die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \alpha \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon$$

gelten.

Beweis. Es sei $C := A - B$ wie bei Satz 4.14. Damit ist C konvex und abgeschlossen (siehe unten) und es gilt $0 \notin C$. Damit existiert ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(0) \cap C = \emptyset$ gilt. Satz 4.14 liefert: Es existiert ein $x' \in X'$ mit $x' \neq 0$, so dass für alle $a \in A$, $b \in B$ und $z \in B_1(0)$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < \operatorname{Re} x'(rz).$$

Also gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$:

$$\operatorname{Re} x'(a - b) \leq -r \|x'\|.$$

Für $\varepsilon r \|x'\|/2 > 0$ ergibt sich, dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon.$$

Wähle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\sup_{a \in A} (x'(a) + \varepsilon) \leq \alpha \leq \sup_{b \in B} (x'(b) - \varepsilon)$$

erfüllt ist. Noch zu zeigen: C ist abgeschlossen. Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in C mit Grenzwert $c \in X$. Da B kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit $b_{n_k} \rightarrow b \in B$ für $k \rightarrow \infty$. Damit ergibt sich:

$$a_{n_k} = c_{n_k} + b_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c + b.$$

Da A abgeschlossen ist, folgt $c + b \in A$ und damit $c = (c + b) - b \in A - B = C$. ■

Im Allgemeinen lassen sich konvexe Mengen mit $A \cap B = \emptyset$ nicht trennen. Es gibt Beispiele mit A, B zusätzlich abgeschlossen, in denen Trennungen nicht möglich ist. (Siehe Übungen.)

Korollar 4.16. Sei X ein normierter Vektorraum und $U \subset X$ ein Unterraum mit $\overline{U} \neq X$. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit $x' \neq 0$ und $x'|_U = 0$.

Beweis. Es sei $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin \overline{U}$. Wende Satz 4.15 auf $A = \overline{U}$ und $B = \{x_0\}$ an. Wir erhalten somit ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < \alpha < \operatorname{Re} x'(x_0)$ für alle $x \in \overline{U}$. Es folgt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \overline{U}$:

$$\operatorname{Re} x'(\lambda x) < \alpha.$$

Also muss schon $\operatorname{Re} x'(x) = 0$ für alle $x \in \overline{U}$ gelten. Wegen $\operatorname{Re} x'(x_0) > \operatorname{Re} x'(x) = 0$ für alle $x \in U$ ist außerdem $x' \neq 0$. ■

Bemerkung: Korollar 4.16 wird genutzt, um zu zeigen, dass ein Unterraum U dicht in einem umgebenden Raum X liegt. Kann man zeigen, dass für alle $x' \in X'$ aus $x'|_U = 0$ schon $x' = 0$ folgt, so ergibt sich $\overline{U} = X$.

Definition 4.17. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und X' der Dualraum zu X (Definition 3.1 (b)). Dann ist $X'' := (X')'$ der *Bidualraum* von X .

Wir können auf kanonische Weise eine Abbildung $J_X: X \rightarrow X''$ wie folgt definieren:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} X' \rightarrow \mathbb{K} \\ x' \mapsto x'(x) \end{pmatrix}.$$

Dann ist J_X linear und stetig, denn es gilt für alle $x' \in X'$ und alle $x \in X$ die Ungleichung $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$ und damit für alle $x \in X$:

$$\|J_X(x)\| \leq \|x\|. \quad (*)$$

Sei

$$\bar{B}_1^{X'} := \overline{B_1^{X'}(0)} = \{x' \in X' \mid \|x'\| \leq 1\}.$$

Dann gilt sogar

$$\|x\| = \sup_{x' \in \bar{B}_1^{X'}} |x'(x)| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sei $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Setze dann das Funktional

$$u': \text{span}\{x_0\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \lambda \|x_0\| \quad \text{falls } \lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } x = \lambda x_0$$

normgleich auf X fort. Es gilt dann $\|x'\| = \|u'\| = 1$ und $x'(x_0) = \|x_0\|$. Damit ist in $(*)$ sogar Gleichheit gezeigt. Insgesamt folgt:

Satz 4.18. Die Abbildung J_X ist eine (im Allgemeinen nicht surjektive) lineare Isometrie, d. h. für alle $x \in X$ gilt $\|J_X(x)\|_{X''} = \|x\|_X$. (Insbesondere ist J_X als Isometrie stets injektiv.)

Definition 4.19. Ein Banachraum X ist *reflexiv*, wenn J_X surjektiv (also bijektiv) ist.

Bemerkung: Da J_X injektiv ist, kann X mit einem Unterraum von X'' identifiziert werden.

Definition 4.20. Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein Unterraum und $N \subset X'$ ein Unterraum des Dualraums. Wir definieren dann den *Annihilator von M* als

$$\begin{aligned} M^\perp &:= \{x' \in X' \mid \forall x \in M: x'(x) = 0\} \\ &= \{x' \in X' \mid x'|_M = 0\} \end{aligned}$$

und den *Annihilator von N* als

$$N^\perp := \{x \in X \mid \forall x' \in N: x'(x) = 0\}.$$

Bemerkung 4.21.

- (i) Es ist N^\perp eine Teilmenge von X und *nicht* von X'' .
- (ii) Es sind M^\perp und N^\perp abgeschlossene Unterräume.

Satz 4.22. Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ ein Unterraum. Dann gilt

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M}.$$

Sei außerdem $N \subset X'$ ein Unterraum. Dann gilt

$$(N^\perp)^\perp \supset \overline{N}.$$

(Im Allgemeinen ist diese Inklusion echt.)

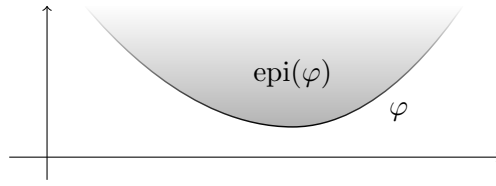


Abbildung 4.5: Epigraph einer Funktion φ

Definition 4.23.

- i) Es sei E eine Menge und $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung. Wir definieren dann

$$D(\varphi) := \{x \in E \mid \varphi(x) < \infty\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}).$$

- ii) Der *Epigraph* von φ (Abbildung 4.5) ist die Menge

$$\text{epi}(\varphi) := \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq \lambda\}.$$

Definition 4.24. Sei (E, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Abbildung $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ ist *unterhalbstetig*, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{\varphi \leq \lambda\} := \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \lambda\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \lambda}) \subset E$$

abgeschlossen ist.

Lemma 4.25. Sei (E, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Es ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn $\text{epi}(\varphi)$ abgeschlossen in $E \times \mathbb{R}$ (mit der Produkttopologie) ist.
- (ii) Es ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn für alle $x \in E$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Umgebung V von x existiert, so dass für alle $y \in V$ gilt: $\varphi(y) \geq \varphi(x) \cdot \varepsilon$.



Abbildung 4.6: Die Funktion $\tilde{\varphi}$ ist *nicht* unterhalbstetig, φ schon

(iii) Ist φ unterhalbstetig, so gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in E$:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Falls E ein metrischer Raum ist, so gilt auch die Umkehrung.

(iv) Sind φ und $\tilde{\varphi}: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ unterhalbstetig, so auch $\varphi + \tilde{\varphi}$.

(v) Ist $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine Familie unterhalbstetiger Abbildungen $E \rightarrow (-\infty, \infty]$ mit

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$$

für alle $x \in E$, so ist auch φ unterhalbstetig.

(vi) Ist $E \neq \emptyset$ folgenkompakt und φ unterhalbstetig, so nimmt die Funktion φ ihr Minimum an, d. h. es existiert ein $x_0 \in E$ mit $\varphi(x_0) = \inf_{x \in E} \varphi(x)$.

Beweis. Siehe Übungen für Teile der Aussagen. Wir beweisen hier nur (vi):

Sei also E folgenkompakt und nicht leer und sei φ unterhalbstetig. Sei dann $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in E , für welche $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\inf_{x \in E} \varphi(x)$ konvergiert. Weil E folgenkompakt ist, existiert dann eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und wir definieren $x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Aus (iii) folgt dann:

$$\varphi(x_0) \leq \inf_{x \in E} \varphi(x) \leq \varphi(x_0).$$

(Dies zeigt auch, dass $\inf_{x \in E} \varphi(x) > -\infty$ gelten muss.)

■

Definition 4.26. Sei X ein Vektorraum. Eine Funktion $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ ist *konvex*, wenn φ für alle $x, y \in X$ und alle $t \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

erfüllt. (Abbildung 4.7)

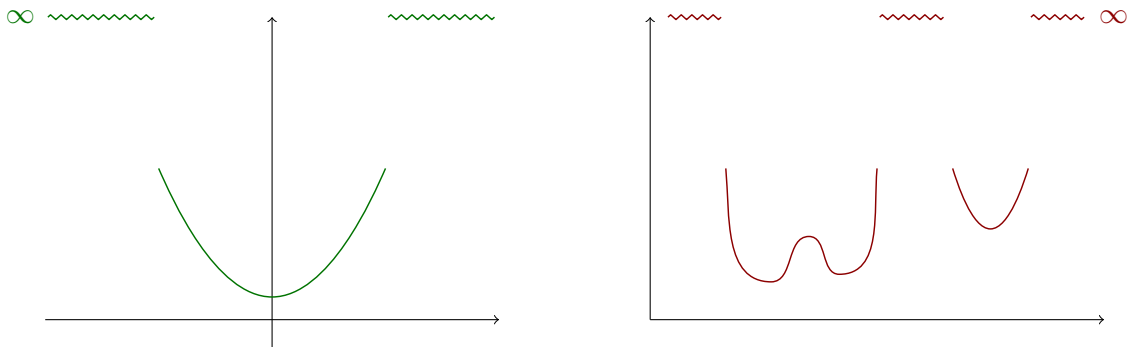


Abbildung 4.7: Konvexe Funktion links und *nicht* konvexe Funktion rechts

Lemma 4.27. Sei X ein Vektorraum.

- (i) Es ist $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ genau dann konvex, wenn $\text{epi}(\varphi)$ eine konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$ ist.
- (ii) Ist $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex, so ist die Menge $\{\varphi \leq \lambda\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ konvex. (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.)
- (iii) Sind $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex, so auch $\varphi_1 + \varphi_2$.
- (iv) Ist $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine Familie konvexer Abbildungen $X \rightarrow (-\infty, \infty]$, so ist auch

$$\sup_{i \in I} \varphi_i := \left(x \mapsto \sup_{i \in I} \varphi_i(x) \right)$$

konvex.

Ab jetzt betrachten wir vornehmlich normierte \mathbb{R} -Vektorräume.

Definition 4.28. Sei X ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und sei $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Funktion mit $D(\varphi) \neq \emptyset$ (d. h. φ ist nicht konstant ∞). Dann ist die *Legendre-Transformation* (oder *konjugierte Funktion*) von φ die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^*: X' &\rightarrow (-\infty, \infty] \\ f &\mapsto \sup_{x \in X} (f(x) - \varphi(x)). \end{aligned}$$

Bemerkung 4.29.

- (i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Ist $f \in (\mathbb{R}^n)'$, so gibt es genau einen Vektor $y_f \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = x \cdot y := \langle x, y \rangle_{\text{eukl}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir identifizieren dann $(\mathbb{R}^n)'$ mit \mathbb{R}^n vermöge

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)' &\longleftrightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\longmapsto y_f \\ (x \mapsto x \cdot y) &\longleftarrow y, \end{aligned}$$

und somit gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x \cdot y - \varphi(x)).$$

- (ii) Es ist φ^* stets konvex und unterhalbstetig. Dies folgt daraus, dass wir das Supremum betrachten und dass $f \mapsto f(x) - \varphi(x)$ konvex und stetig ist (da affin linear).
- (iii) Es gilt für alle $x \in X$ und alle $f \in X'$ die Ungleichung

$$f(x) \leq \varphi(x) + \varphi^*(f),$$

was direkt aus der Definition von φ^* folgt.

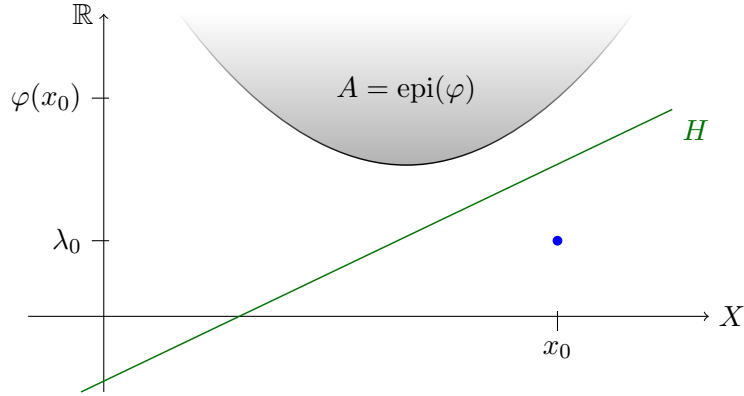


Abbildung 4.8: Skizze zum Beweis von Theorem 4.30

- (iv) Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) ist ein Spezialfall von (iii). Seien $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und setze $\varphi(x) := \frac{1}{p} |x|^p$. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\varphi^*(y) = \frac{1}{p'} |y|^{p'}.$$

(Siehe Übungen.)

Theorem 4.30. Sei X ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig mit $D(\varphi) \neq \emptyset$. Dann gilt $D(\varphi^*) \neq \emptyset$ und φ ist von unten durch eine affin lineare Funktion beschränkt.

Beweis. Sei $x_0 \in D(\varphi)$ und sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 < \varphi(x_0)$. Wende nun die zweite geometrische Form des Satzes von Hahn-Banach (4.15) auf den Raum $X \times \mathbb{R}$, die abgeschlossene Menge $A := \text{epi}(\varphi)$ und die kompakte Menge $B := \{(x_0, \lambda_0)\}$ an. (Abbildung 4.8) Wir erhalten somit ein stetiges lineares Funktional $\Phi: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass die abgeschlossene Hyperebene $H = \{\Phi = \alpha\} \subset X \times \mathbb{R}$ die Mengen A und B trennt. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Phi((x, 0)) \end{aligned}$$

ist stetig und es gilt $f \in X'$. Mit $k := \Phi((0, 1))$ gilt für alle $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$

$$\Phi((x, \lambda)) = f(x) + k\lambda.$$

Es gilt weiter $\Phi|_A > \alpha$ und $\Phi|_B < \alpha$. Dann gilt also $f(x_0) + k\lambda_0 < \alpha$ und

$$f(x) + k\lambda > \alpha$$

für alle $(x, \lambda) \in \text{epi}(\varphi)$. Somit erhalten wir für alle $x \in D(\varphi)$:

$$f(x) + k\varphi(x) > \alpha \tag{*}$$

und für den Punkt (x_0, λ_0) :

$$f(x_0) + k\varphi(x_0) > \alpha > f(x_0) + k\lambda_0.$$

Dies zeigt $k > 0$ (da $\varphi(x_0) > \lambda_0$ nach Wahl von λ_0). Aus (\star) folgt, dass für alle $x \in D(\varphi)$ gilt:

$$-\frac{1}{k}f(x) - \varphi(x) < -\frac{\alpha}{k}.$$

Daraus folgt $\varphi^*(-\frac{1}{k}f) < \infty$ (nach Definition von φ^*) und damit

$$\varphi(x) > -\frac{1}{k}f(x) + \frac{\alpha}{k},$$

aber gerade das wollten wir zeigen. ■

Wir können auch die Funktion φ^{**} betrachten. Dies wäre eigentlich eine Abbildung von X'' nach \mathbb{R} . Wir schränken diese aber auf X ein (unter der Einbettung von X nach X'' vermöge der Isometrie J_X , siehe Definition 4.17 ff.).

Definition 4.31. Es sei $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ mit $D(\varphi) \neq \emptyset$. Wir definieren $\varphi^{**}: X \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in X$ durch

$$\varphi^{**}(x) := \sup_{f \in X'} (f(x) - \varphi^*(f)).$$

Theorem 4.32 (Fenchel-Moreau). Sei $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und $D(\varphi) \neq \emptyset$. Dann gilt $\varphi^{**} = \varphi$.

Beweis. Schritt 1: Wir setzen $\varphi \geq 0$ voraus. Da für alle $x \in X$ und alle $f \in X'$

$$f(x) - \varphi^*(f) \leq \varphi(x)$$

gilt, erhalten wir zunächst $\varphi^{**} \leq \varphi$. Angenommen es existiert ein $x_0 \in X$ mit

$$\varphi^{**}(x_0) < \varphi(x_0)$$

(wobei $\varphi(x_0) = \infty$ möglich ist). Nutze wieder den Satz von Hahn-Banach in der zweiten geometrischen Formulierung (4.15) mit $A = \text{epi}(\varphi)$ abgeschlossen und $B = \{(x_0, \varphi^{**}(x_0))\}$ kompakt. (Vgl. Beweis von Theorem 4.30.) Wir erhalten somit ein $f \in X'$ und $k, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha$ und

$$f(x) + k\lambda > \alpha. \tag{\diamond}$$

für alle $(x, \lambda) \in \text{epi}(\varphi)$. Wähle $x \in D(\varphi)$ und betrachte $\lambda \rightarrow \infty$ in der letzten Ungleichung. Es folgt $k \geq 0$. Jetzt sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da $\varphi \geq 0$ gilt, folgt aus (\diamond) , dass für alle $x \in D(\varphi)$ gilt:

$$f(x) + (k + \varepsilon)\varphi(x) \geq \alpha.$$

Somit erhalten wir für alle $x \in D(\varphi)$:

$$-\frac{1}{k+\varepsilon} f(x) - \varphi(x) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Dies zeigt:

$$\varphi^* \left(-\frac{f}{k+\varepsilon} \right) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Die Definition von φ^{**} liefert für $\varphi^{**}(x_0)$:

$$\varphi^{**}(x_0) \geq -\frac{f}{k+\varepsilon}(x_0) - \varphi^* \left(-\frac{f}{k+\varepsilon} \right) \geq -\frac{f}{k+\varepsilon}(x_0) + \frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Damit folgt

$$f(x_0) + (k+\varepsilon) \varphi^{**}(x_0) \geq \alpha,$$

was aber für $\varepsilon \rightarrow 0$ einen Widerspruch zu $f(x_0) + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha$ liefert.

Schritt 2 (allgemeiner Fall): Theorem 4.30 sichert uns $D(\varphi^*) \neq \emptyset$. Wähle dann $f_0 \in D(\varphi^*)$ und setze für alle $x \in X$

$$\bar{\varphi}(x) := \varphi(x) - f_0(x) + \varphi^*(f_0).$$

Es gilt (wie einfache Rechnungen zeigen), dass $\bar{\varphi}$ konvex und unterhalbstetig ist, und wir haben $\bar{\varphi} \geq 0$ (denn $\varphi^*(f_0) \geq f_0(x) - \varphi(x)$ für $x \in X$). Dann gilt nach Schritt 1: $(\bar{\varphi})^{**} = \bar{\varphi}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} (\bar{\varphi})^*(f) &= \sup_{x \in X} (f(x) - \bar{\varphi}(x)) = \sup_{x \in X} (f(x) - \varphi(x) + f_0(x) - \varphi^*(f_0)) \\ &= \varphi^*(f + f_0) - \varphi^*(f_0) \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} (\bar{\varphi})^{**} &= \sup_{f \in X'} (f(x) - (\bar{\varphi})^*(f)) = \sup_{f \in X'} (f(x) - \varphi^*(f + f_0) + \varphi^*(f_0)) \\ &= \sup_{f \in X'} ((f + f_0)(x) - \varphi^*(f + f_0) - f_0(x) + \varphi^*(f_0)) \\ &= \varphi^{**}(x) - f_0(x) + \varphi^*(f_0). \end{aligned}$$

Da $(\bar{\varphi})^{**} = \bar{\varphi}$ gilt, folgt $\varphi^{**} = \varphi$. ■



Abbildung 4.9: Beispiel 4.33 (i) für $\varphi(x) = |x|$ auf \mathbb{R} mit zugehörigem φ^*

Beispiele 4.33.

(i) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $\varphi(x) := \|x\|$ für alle $x \in X$. Dann gilt:

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in X} (f(x) - \varphi(x)) = (f(x) - \|x\|) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \|f\| \leq 1 \\ \infty, & \text{falls } \|f\| > 1. \end{cases}$$

Dies erhalten wir wie folgt. Es gilt:

$$\|f\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{f(x)}{\|x\|}.$$

Für $\|f\| > 1$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x)/\|x\| > 1$ und damit $f(x) - \|x\| > 0$. Ersetze nun x durch αx mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ und betrachte $\alpha \rightarrow \infty$. Es folgt:

$$\sup_{x \in X} (f(x) - \|x\|) = \infty.$$

Der andere Fall ergibt sich ähnlich. (Abbildung 4.9) Es folgt mit Theorem 4.32:

$$\|x\| = \varphi(x) = \varphi^{**}(x) = \sup_{f \in X'} (f(x) - \varphi^*(f)) = \sup_{\substack{f \in X', \\ \|f\| \leq 1}} f(x).$$

(ii) Sei X ein normierter Raum und $K \subset X$. Wir definieren die sogenannte *Indikatorfunktion* von K für alle $x \in X$ durch

$$I_K(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in K \\ \infty & \text{falls } x \notin K. \end{cases}$$

(Achtung: dies ist *nicht* die charakteristische Funktion von K .) Einfache Überlegungen liefern: I_K ist genau dann konvex, wenn K konvex ist und I_K ist genau dann unterhalbstetig, wenn K abgeschlossen ist. Die *Trägerfunktion* zu K ist dann definiert durch die konjugierte Funktion $(I_K)^*$ von I_K . Man kann nun folgende Aussagen zeigen:

– Falls $K = M \subset X$ ein Unterraum ist, so gilt:

$$(I_M)^* = I_{M^\perp}, \quad (I_M)^{**} = I_{(M^\perp)^\perp}.$$

– Falls M zusätzlich abgeschlossen ist, so gilt

$$(I_M)^{**} = I_M \quad \text{und somit} \quad (M^\perp)^\perp = M.$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\emptyset \neq K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ erhalten wir $(I_K)^*$ als Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} :

$$(I_K)^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (x \cdot y - I_K(x)) = \sup_{x \in [a, b]} x \cdot y = \begin{cases} by, & \text{falls } y \geq 0 \\ ay, & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

(Siehe Abbildung 4.10.)



Abbildung 4.10: Beispiel 4.33 (ii) für $K = [a, b]$ mit $a = -3$ und $b = 1$

(iii) Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{|x|} = \infty.$$

Dann gilt: In

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \cdot y - g(x))$$

wird das Supremum für ein endliches $x \in \mathbb{R}$ angenommen (da $x \cdot y - g(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$). Berechne x maximal als Lösung von $y - g'(x) = 0$. Falls g' streng monoton ist, gibt es höchstens eine solche Lösung. Für $y \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$g^*(y) = (g')^{-1}(y) y - g((g')^{-1}(y)).$$

Falls $g \in C^2$ gilt, so können wir folgende Rechnung machen:

$$\begin{aligned} (g^*)'(y) &= (g')^{-1}(y) + ((g')^{-1}(y))' y - g'((g')^{-1}(y)) ((g')^{-1}(y))' \\ &= (g')^{-1}(y). \end{aligned}$$

Das heißt, dass wir unter geeigneten Voraussetzungen an g die Formel

$$(g^*)'(y) = (g')^{-1}(y)$$

erhalten. In der Theorie erhalten wir dann g^* , indem wir g ableiten, die Umkehrfunktion von g' bestimmen und zu dieser eine Stammfunktion finden.

5 Bairescher Kategoriensatz und seine Konsequenzen

Satz 5.1 (Bairescher Kategoriensatz). Sei (X, d) ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum. Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von in X abgeschlossenen Mengen und gelte

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass das Innere von A_{k_0} nicht leer ist, d. h. so dass $A_{k_0}^\circ \neq \emptyset$ gilt.

Beweis. Angenommen für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $A_k^\circ = \emptyset$. Dann ist für alle offenen, nicht-leeren Teilmengen $U \subset X$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Menge $U \setminus A_k$ offen und nicht leer; insbesondere existiert in dieser Situation ein $x \in X$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, o. E. $\varepsilon \leq 1/k$, mit

$$\overline{B_\varepsilon(x)} \subset (U \setminus A_k).$$

Wir wählen für den ersten Schritt $U = X$ und konstruieren dann auf obige Weise induktiv Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X und $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon_k \leq 1/k \quad \text{und} \quad \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset (B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k)$$

gilt. Dann ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X , denn: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es nach Konstruktion ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_k \leq \varepsilon$ und für alle $\ell \in \mathbb{N}_{\geq k}$ gilt dann

$$x_\ell \in B_{\varepsilon_k}(x_k).$$

Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Weil für alle $k \in \mathbb{N}$ fast alle Folgenglieder von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im abgeschlossenen ε_k -Ball um x_k liegen, muss dies auch für den Grenzwert x gelten, d. h. für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset X \setminus A_k.$$

Es folgt der Widerspruch

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (X \setminus A_k) = X \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset. \quad \blacksquare$$

Bemerkung:

Die Vollständigkeit von X ist hier entscheidend. Als Gegenbeispiel betrachte man $X = \mathbb{Q}$.

Satz 5.2 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$. Es gelte für alle $x \in X$:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty.$$

Dann existieren ein $x_0 \in X$, ein $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass gilt:

$$\forall x \in \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \quad \forall f \in \mathcal{F}: \quad \|f(x)\|_Y \leq C.$$

Beweis. Die Menge

$$A_k := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{x \in X \mid \|f(x)\|_Y \leq k\}$$

ist für alle $k \in \mathbb{N}$ abgeschlossen. Außerdem gibt es nach Voraussetzung für alle $x \in X$ ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt: $\|f(x)\| \leq k$. Also gilt

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Der Bairesche Kategoriensatz (5.1) liefert: es existieren $k_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \subset A_{k_0}.$$

■

Satz 5.3 (Banach-Steinhaus). Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subset L(X, Y)$. Für alle $x \in X$ gelte: $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty$. Dann folgt schon

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty.$$

Beweis. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 5.2) liefert: es gibt $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$\|x - x_0\| \leq \varepsilon_0 \implies \forall T \in \mathcal{T}: \|Tx\| \leq C.$$

Damit folgt, dass für alle $x \in \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)}$ und alle $T \in \mathcal{T}$ gilt:

$$\left\| T \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon_0} \right) \right\| \leq \frac{C + \sup_{\tilde{T} \in \mathcal{T}} \|\tilde{T}x_0\|_Y}{\varepsilon_0} =: C_0.$$

Es folgt $\|T\| \leq C_0$, denn $\frac{x - x_0}{\varepsilon_0}$ nimmt alle Vektoren der Norm kleiner-gleich eins an.

■

Bemerkung 5.4.

- (i) Der Satz von Banach-Steinhaus (5.3) liefert das erstaunliche Resultat, dass eine punktweise beschränkte Familie von stetigen linearen Operatoren schon beschränkt in der Operatornorm ist.

- (ii) Punktweise Grenzwerte von stetigen Funktionen sind im Allgemeinen nicht stetig. Aus dem Satz von Banach-Steinhaus (5.3) folgt aber, dass dies für lineare Abbildungen doch gilt.
- (iii) Ist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von linearen Operatoren mit punktweisem Grenzwert T , so gilt im Allgemeinen nicht $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Es gilt aber eine etwas schwächere Aussage, siehe Korollar 5.5.

Korollar 5.5. Seien X und Y Banachräume. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X, Y)$, so dass für alle $x \in X$ die Folge $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y konvergiert. Setzen wir

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$$

für alle $x \in X$, so gilt:

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$
- (b) $T \in L(X, Y)$
- (c) $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$

Beweis. Zunächst ist aufgrund der Linearität des Grenzwerts klar, dass auch T linear ist. Aussage (a) folgt unmittelbar aus dem Satz von Banach-Steinhaus (5.3). Es existiert somit ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, welches $\|T_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Somit gilt für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|T_n x\| &\leq \|T_n\| \cdot \|x\| \\ &\leq C \|x\| \end{aligned}$$

Aus der unteren Ungleichung erhalten wir im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ für alle $x \in X$ die Ungleichung $\|Tx\| \leq C \|x\|$, woraus folgt, dass T stetig ist. Damit ist also (b) gezeigt. Aus der oberen Ungleichung erhalten wir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\|,$$

und weil $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $x \in X$ konvergiert, gilt für alle $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$ (mithilfe der Stetigkeit der Norm):

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|.$$

Daraus folgt (c). ■

Korollar 5.6. Sei Z ein Banachraum über \mathbb{K} und $B \subset Z$ eine Teilmenge von Z . Für alle $f \in Z'$ sei $f(B) \subset \mathbb{K}$ beschränkt. Dann ist B beschränkt in Z .

Beweis. Nutze Banach-Steinhaus (Satz 5.3) mit (in den dortigen Bezeichnern) $X = Z'$, $Y = \mathbb{K}$ und

$$\mathcal{T} = \{J_{Z'}(b) \mid b \in B\} \subset Z''$$

(mit $J_{Z'}$ wie nach Definition 4.17, d. h. für $b \in B$ und $f \in Z'$ gilt $J_{Z'}(b)(f) = f(b)$). Nach Voraussetzung gilt für alle $f \in Z'$:

$$\sup_{b \in B} |J_{Z'}(b)(f)| = \sup_{b \in B} |f(b)| < \infty.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus gilt also:

$$\sup_{b \in B} \|J_{Z'}(b)\| = \sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty.$$

Nach Satz 4.18 ist J_X aber eine Isometrie, also folgt

$$\sup_{b \in B} \|b\| = \sup_{b \in B} \|J_{Z'}(b)\| < \infty,$$

aber dies bedeutet gerade, dass B in Z beschränkt ist. ■

Bemerkung: Im endlich-dimensionalen besagt dieses Korollar: Eine Menge ist beschränkt, falls die Projektion auf alle Komponenten beschränkt ist. (Das Korollar ist also eine Verallgemeinerung dieser Tatsache.)

Korollar 5.7. Sei Z ein Banachraum über \mathbb{K} und sei $A \subset Z'$ eine Teilmenge des Dualraums. Sei außerdem für alle $x \in Z$ die Menge

$$A(x) := \{f(x) \mid f \in A\}$$

beschränkt in \mathbb{K} . Dann ist A beschränkt in Z' .

Beweis. Folgt unmittelbar aus Banach-Steinhaus (Satz 5.3) mit (in den dortigen Bezeichnern) $X = Z$, $Y = \mathbb{K}$ und $\mathcal{T} = A$. ■

Definition 5.8. Seien X, Y topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist f *offen*, wenn Bilder offener Mengen offen sind, d. h. wenn für alle in X offenen Teilmengen $U \subset X$ auch $f(U)$ offen in Y ist.

Bemerkung: Sind X, Y normierte Räume und ist f linear, so ist f genau dann offen, wenn es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$B_\delta(0) \subset f(B_1(0)).$$

Satz 5.9 (Satz von der offenen Abbildung). Seien X und Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Dann ist T genau dann surjektiv, wenn T offen ist.

Beweis. „ \Leftarrow “: Es existiert also ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$B_\delta(0) \subset T(B_1(0)).$$

Durch Skalierung erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$B_{k\delta}(0) \subset T(B_k(0)).$$

Daraus folgt, dass T surjektiv ist.

„ \Rightarrow “: Weil T surjektiv ist, gilt

$$Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\overline{T(B_k(0))}}_{=: A_k}.$$

Wir wenden den Bairescher Kategoriensatz (5.1) auf die Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ an und erhalten somit $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, $y_0 \in Y$, $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)} \subset \overline{T(B_{k_0}(0))}.$$

Sei $y \in \overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)}$, dann gilt $y_0 + y \in \overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)}$. Wähle dann eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $B_{k_0}(0)$ mit

$$Tx_n \rightarrow y_0 + y \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Sei außerdem $x_0 \in X$ mit $Tx_0 = y_0$. Dann erhalten wir

$$T(x_n - x_0) = Tx_n - y_0 \rightarrow y \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt:

$$T\left(\underbrace{\frac{x_n - x_0}{k_0 + \|x_0\|}}_{\in B_1(0)}\right) \rightarrow \underbrace{\frac{y}{k_0 + \|x_0\|}}_{\in B_\delta(0)} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

mit $\delta := \frac{\varepsilon_0}{k_0 + \|x_0\|}$. Das bedeutet aber:

$$B_\delta(0) \subset \overline{T(B_1(0))}.$$

Um die Behauptung zu zeigen, benötigen wir diese Inklusion aber ohne den Abschluss auf der rechten Seite. Sei dazu nun $y \in B_\delta(0)$. Dann gibt es ein $x \in B_1(0)$ mit $\|y - Tx\| < \delta/2$. Daraus folgt:

$$2(-Tx + y) \in B_\delta(0).$$

Indem wir $y_1 := y$ setzen, erhalten wir so induktiv Folgen $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $B_\delta(0)$ und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $B_1(0)$ mit folgender Eigenschaft für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$y_{k+1} = 2(y_k - Tx_k).$$

Es folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$2^{-k}y_{k+1} = 2^{-k+1}y_k - \underbrace{T(2^{-k+1}x_k)}_{=: a_k}$$

oder durch umstellen

$$a_k = 2^{-(k-1)}y_k - 2^{-k}y_{k+1}.$$

Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{k=1}^m a_k$ offenbar eine Teleskopsumme, also gilt:

$$\sum_{k=1}^m a_k = y_1 - 2^{-m} y_{m+1}.$$

Da $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gilt $2^{-m} y_{m+1} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$. Also erhalten wir:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T\left(\sum_{k=1}^m 2^{-(k-1)} x_k\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_k = y_1.$$

Außerdem konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} x_k$ in X , denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|2^{-(k-1)} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

womit man leicht zeigt, dass $(\sum_{k=1}^m 2^{-(k-1)} x_k)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X ist (und damit auch konvergent, aufgrund der Vollständigkeit von X). Sei also $\tilde{x} := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} x_k$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von T auch $T(\tilde{x}) = y_1 = y$ und aus der obigen Betrachtung folgt außerdem $\|\tilde{x}\| \leq 2 < 3$. Also gilt $B_{\delta}(0) \subset T(B_3(0))$ und durch Skalierung erhalten wir wie gewünscht:

$$B_{\delta/3}(0) \subset T(B_1(0)).$$

■

Satz 5.10 (Satz von der inversen Abbildung). Seien X und Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$ bijektiv. Dann gilt: $T^{-1} \in L(Y, X)$.

Beweis. Weil T surjektiv ist, liefert der Satz von der offenen Abbildung (5.9), dass T offen ist. Daraus folgt unmittelbar, dass T^{-1} stetig ist.

■

Korollar 5.11. Sei X ein Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_{\textcircled{1}}$ und $\|\cdot\|_{\textcircled{2}}$. Außerdem gebe es ein $C_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichung $\|x\|_{\textcircled{2}} \leq C_1 \|x\|_{\textcircled{1}}$ gilt. Sei weiter $(X, \|\cdot\|_{\textcircled{1}})$ ein Banachraum. Dann gilt: $(X, \|\cdot\|_{\textcircled{2}})$ ist genau dann ein Banachraum, wenn es ein $C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $\|x\|_{\textcircled{1}} \leq C_2 \|x\|_{\textcircled{2}}$ für alle $x \in X$.

Beweis. „ \Leftarrow “ ist klar.

„ \Rightarrow “: Die Identität

$$\text{id}: (X, \|\cdot\|_{\textcircled{1}}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_{\textcircled{2}})$$

ist stetig und bijektiv. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert:

$$\text{id}^{-1}: (X, \|\cdot\|_{\textcircled{2}}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_{\textcircled{1}})$$

ist stetig. Daraus erhalten wir eine Konstante C_2 wie gefordert.

■

Satz 5.12 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien X und Y Banachräume, $D(T)$ ein Unterraum von X und sei $T: D(T) \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Sei

$$\text{graph}(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y \mid x \in D(T)\}$$

der Graph von T in $X \times Y$. Dabei wird $X \times Y$ zu einem Banachraum bezüglich folgender Norm:

$$\|\cdot\|: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y) \mapsto \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Dann gilt: Ist $D(T)$ abgeschlossen, so ist $\text{graph}(T)$ genau dann abgeschlossen in $X \times Y$, wenn $T \in L(D(T), Y)$ gilt.

Beweis. „ \Leftarrow “: klar, denn: Sei $(x_n, Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\text{graph}(T)$, die in $X \times Y$ konvergiert. Sei $x \in X$ der Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so gilt wegen der Stetigkeit von T auch $Tx_n \rightarrow Tx$ für $n \rightarrow \infty$, aber $(x, Tx) \in \text{graph}(T)$ gilt nach Definition von $\text{graph}(T)$.

„ \Rightarrow “: Da $\text{graph}(T)$ abgeschlossen ist, muss dieser Raum (mit der Einschränkung der Norm von $X \times Y$) ein Banachraum sein. Seien P_X und P_Y die Projektionen $X \times Y \rightarrow X$ bzw. $X \times Y \rightarrow Y$. Dann sind P_X, P_Y stetig und linear und P_X ist bijektiv von $\text{graph}(T)$ auf $D(T)$. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert:

$$P_X^{-1} \in L(D(T), \text{graph}(T)).$$

Daraus folgt: $T = P_Y P_X^{-1} \in L(D(T), Y)$. ■

5.13 (Projektoren). Sei Z ein Vektorraum und $A \subset Z$. Sei weiter X ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein Unterraum.

- (1) Eine Abbildung $P: Z \rightarrow Z$ ist eine *Projektion auf A* , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$P(Z) \subset A \quad \text{und} \quad P|_A = \text{Id}_A.$$

Äquivalent kann man fordern:

$$P(Z) = A \quad \text{und} \quad P^2 = P \circ P = P.$$

Es folgt:

$$P(\text{Id} - P) = (\text{Id} - P)P = 0.$$

Beispiel: orthogonale Projektionen im euklidischen Raum sind Projektionen.

- (2) Sei $P: X \rightarrow Y$ eine lineare Projektion auf Y . Dann gilt $Y = R(P)$ und $\text{Id} = (\text{Id} - P) + P$ und $(\text{Id} - P)$ ist eine Projektion auf $N(P)$. (Zur Definition des Bildraums $R(\cdot)$ und des Nullraums $N(\cdot)$, siehe Definition 3.6.)

Es gilt $X = N(P) \oplus R(P) = R(\text{Id} - P) \oplus N(\text{Id} - P)$, $N(P) = R(\text{Id} - P)$ und $R(P) = N(\text{Id} - P)$, denn:

Für $x \in X$ gilt: $x = (x - Px) + Px$ mit $(x - Px) \in N(P)$ und $Px \in R(P)$. Ist $x \in N(P) \cap R(P)$, so gilt $Px = 0$ und $x = Px$, also $x = 0$. Außerdem gelten folgende Äquivalenzen:

$$x \in N(\text{Id} - P) \iff x - Px = 0 \iff x = Px \iff x \in R(P).$$

Also gilt $N(\text{Id} - P) = R(P)$.

- (3) Eine Abbildung $P: X \rightarrow X$ ist ein *Projektor auf Y* , falls P eine stetige lineare Projektion auf Y ist. Es sei

$$\text{Pr}(X) := \{P: X \rightarrow X \mid P \text{ ist Projektor}\}.$$

Falls P ein Projektor ist, so ist klarerweise auch $\text{Id} - P$ ein Projektor und $N(P)$ sowie $R(P) = N(\text{Id} - P)$ sind abgeschlossen.

Satz 5.14 (Satz vom abgeschlossenen Komplement). Sei X ein Banachraum und seien Y und Z Unterräume von X . Außerdem gelte $X = Z \oplus Y$ und Y sei abgeschlossen. Dann gilt: Der Unterraum Z ist genau dann abgeschlossen, wenn es einen stetigen Projektor P auf Y mit $N(P) = Z$ gibt.

Beweis. „ \Leftarrow “ ist klar, da P stetig ist.

„ \Rightarrow “: Sei $\tilde{X} := Z \times Y$. Definiere

$$T: \tilde{X} \rightarrow X, \quad (z, y) \mapsto z + y.$$

Dann ist T linear, bijektiv und stetig (wie man mithilfe der Δ -Ungleichung einsieht). Weil Y und Z abgeschlossen sind, ist auch \tilde{X} ein abgeschlossener Unterraum von $X \times X$ und damit ein Banachraum. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert $T^{-1} \in L(X, \tilde{X})$. Sei

$$P: X \rightarrow Y, \quad z + y \mapsto y \quad (\text{mit } z \in Z \text{ und } y \in Y).$$

Dann ist P eine lineare Projektion auf Y und es gilt $N(P) = Z$. Außerdem ist P stetig, denn es gilt $P = P_Y T^{-1}$, wobei P_Y die Projektion $\tilde{X} \rightarrow Y$ auf die zweite Komponente ist. Damit ist P der gesuchte Projektor. ■

Definition 5.15. Seien X und Y normierte Vektorräume und $T \in L(X, Y)$. Dann ist der *adjungierte Operator T'* die Abbildung

$$T': Y' \rightarrow X' \\ y' \mapsto \begin{pmatrix} X \mapsto \mathbb{K} \\ x \mapsto y'(Tx) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Es gilt

$$|(T'y')(x)| = |y'(Tx)| \leq \|y'\| \cdot \|Tx\| \leq \|y'\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

für alle $y' \in Y'$ und alle $x \in X$. Dies zeigt, dass T' wohldefiniert ist ($T'y' \in X'$ für alle $y' \in Y'$) und dass $\|T'y'\| \leq \|y'\| \cdot \|T\|$ gilt. Daraus folgt $T' \in L(Y', X')$.

Beispiel 5.16 (Shift-Operator). Wir betrachten auf ℓ^2 über \mathbb{R} den Shift-Operator

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, \dots).$$

Wir möchten nun T' bestimmen. Später zeigen wir: $(\ell^2)'$ kann mit ℓ^2 identifiziert werden. Jedes $x \in \ell^2$ definiert einen linearen Operator auf ℓ^2 durch $x'(y) = (x, y)_{\ell^2} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ für alle $y \in \ell^2$. Dies liefert schon $(\ell^2)'$. Wir fordern für $y' \in (\ell^2)'$, dargestellt durch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$y'(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} y_n = \sum_{n=2}^{\infty} x_n \tilde{y}_n \stackrel{!}{=} (T' y')(x),$$

wobei $\tilde{y}_n = y_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dies zeigt, dass

$$T': Y' \rightarrow X', \quad (y_1, y_2, \dots) \mapsto (0, y_1, y_2, \dots)$$

gilt. Dabei haben wir $TT' = \text{Id}$, aber $T'T \neq \text{Id}$.

Satz 5.17. Seien X und Y normierte Räume.

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} ' : L(X, Y) &\rightarrow L(Y', X') \\ y &\mapsto y' \end{aligned}$$

ist eine lineare Isometrie.

(ii) Sei Z ein weiterer normierter Raum. Für alle $T \in L(X, Y)$ und $S \in L(Y, Z)$ gilt

$$(ST)' = T' S'.$$

Beweis.

(i) Die Linearität rechnet man leicht nach. Sei $T \in L(X, Y)$. Dann gilt für alle $y' \in Y'$

$$\|T' y'\| \leq \|y'\| \cdot \|T\|, \quad \text{woraus} \quad \|T'\| \leq \|T\| \quad \text{folgt.}$$

Dass wir tatsächlich auch Gleichheit haben, sehen wir wie folgt ein (– um die Notation übersichtlicher zu halten, bezeichne $\bar{B}_1^X := \overline{B_1^X(0)}$ die abgeschlossene Einheitskugel in X und $\bar{B}_1^{Y'} := \overline{B_1^{Y'}(0)}$ diejenige in Y'):

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in \bar{B}_1^X} \|Tx\| = \sup_{x \in \bar{B}_1^X} \sup_{y' \in \bar{B}_1^{Y'}} |y'(Tx)| \\ &= \sup_{y' \in \bar{B}_1^{Y'}} \sup_{x \in \bar{B}_1^X} |y'(Tx)| = \sup_{y' \in \bar{B}_1^{Y'}} \|T' y'\| = \|T'\|. \end{aligned}$$

(Die zweite Gleichheit gilt dabei nach Satz 4.18.)

(ii) Seien $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$ und $z' \in Z'$ sowie $x \in X$. Dann gilt:

$$((ST)' z')(x) = z'(STx) = (S' z')(Tx) = (T' S' z')(x).$$

Es folgt die Behauptung. ■

Mit Hilfe der adjungierten Abbildung können wir die Lösbarkeit von linearen Gleichungen untersuchen. Dazu benötigen wir zunächst einige Hilfsaussagen.

Satz 5.18. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Dann gilt

$$\overline{R(T)} = (N(T'))^\perp.$$

Beweis. „ \subset “: Sei $x \in X$ und $y := Tx \in R(T)$. Gilt $y' \in N(T')$, so folgt

$$y'(y) = y'(Tx) = \underbrace{(T'y')(x)}_{=0} = 0.$$

Es folgt $R(T) \subset (N(T'))^\perp$. Da $N(T')^\perp$ abgeschlossen ist (Bemerkung 4.21 (ii)), folgt

$$\overline{R(T)} \subset (N(T'))^\perp.$$

„ \supset “: Setze $U := \overline{R(T)}$. Es sei $y \notin U$. Zeigen wir nun $y \notin (N(T'))^\perp$, so sind wir fertig. Aus Korollar 4.16 erhalten wir ein $y' \in Y'$ mit $y'|_U = 0$ und $y'(y) \neq 0$. Insbesondere gilt $y'(Tx) = 0$ für alle $x \in X$. Also haben wir sicher $y' \in N(T')$ und wegen $y'(y) \neq 0$ gilt auch $y' \notin (N(T'))^\perp$. ■

Korollar 5.19. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Sei weiter $R(T)$ abgeschlossen und $y \in Y$. Dann ist $Tx = y$ genau dann lösbar, wenn $y'(y) = 0$ für alle $y' \in N(T')$.

Beweis. Die Hinrichtung ist klar. Zur Rückrichtung: Aus $y'(y) = 0$ für alle $y' \in N(T')$ folgt sofort $y \in (N(T'))^\perp$ und damit:

$$y \in (N(T'))^\perp = \overline{R(T)} = R(T).$$

■

Bemerkung:

- (i) Korollar 5.19 liefert die Existenz einer Lösung durch Bedingungen an den Nullraum von T' .
- (ii) Falls T' injektiv ist, brauchen wir im Fall, dass $R(T)$ abgeschlossen ist, *keine* Zusatzbedingungen mehr, denn: Mit $N(T') = \{0\}$ und $R(T)$ abgeschlossen sind die Voraussetzungen aus Korollar 5.19 sicher erfüllt.

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, die Abgeschlossenheit von $R(T)$ zu überprüfen. Wir wollen nun also Kriterien finden, die dies vereinfachen.

Satz 5.20. Sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Unterraum. Dann wird durch

$$X/U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \hat{x} \mapsto \inf_{y \in \hat{x}} \|y\|$$

eine Norm auf dem Quotientenvektorraum definiert. Ist X vollständig, so auch X/U .

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe.

Lemma 5.21. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Sei weiter $R(T)$ abgeschlossen. Dann existiert ein $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall y \in R(T) \exists x \in X: Tx = y \wedge \|x\| \leq K\|y\|.$$

Beweis. Sei \hat{T} die lineare und stetige Bijektion, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & R(T) \\ \downarrow & \nearrow \hat{T} & \\ X/N(T) & & \end{array}$$

(dabei sei die vertikale Abbildung die kanonische Projektion). Da $R(T)$ abgeschlossener Teilraum des Banachraums Y ist, ist auch $R(T)$ ein Banachraum. Auch $X/N(T)$ ist ein Banachraum, da $N(T)$ abgeschlossen ist. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert, dass \hat{T}^{-1} stetig ist. Also existiert ein $\hat{K} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\|\hat{T}^{-1}y\| \leq \hat{K}\|y\|$. Mit der Definition der Norm auf $X/N(T)$ folgt: Es existiert ein $x \in \hat{T}^{-1}y$ mit $\|x\| \leq (\hat{K} + 1)\|y\|$ und da $\hat{T}^{-1}y$ gerade alle $x \in X$ mit $Tx = y$ enthält, folgt die Behauptung. ■

Lemma 5.22. Seien X, Y Banachräume über \mathbb{K} und sei $T \in L(X, Y)$. Weiter sei $K \in \mathbb{R}_{> 0}$, so dass für alle $y' \in Y'$ gilt:

$$K\|y'\| \leq \|T'y'\|.$$

Dann ist T offen und insbesondere surjektiv.

Beweis. Es bezeichne $U_\varepsilon := B_\varepsilon^X(0)$ den offenen ε -Ball in X und $V_\varepsilon := B_\varepsilon^Y(0)$ denjenigen in Y . Bei der Betrachtung offener Abbildungen hatten wir schon gesehen, dass es genügt $V_K \subset T(U_1)$ zu zeigen. Wie im Beweis des Satzes von der offenen Abbildung (5.9) genügt es sogar, $V_K \subset \overline{T(U_1)} =: D$ zu zeigen. Sei $y_0 \in V_K$, d. h. $\|y_0\| < K$. Angenommen es gilt $y_0 \notin D$. Dann existiert nach Hahn-Banach in der zweiten geometrischen Formulierung (Satz 4.15) ein $y' \in Y'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} y'(y) \leq \alpha < \operatorname{Re} y'(y_0) \leq |y'(y_0)|$$

für alle $y \in D$. Wegen $0 \in D$ und $y'(0) = 0$ gilt $0 \leq \alpha$. Wegen der echten Ungleichheit in $\alpha < \operatorname{Re} y'(y_0)$ können wir o. E. $\alpha > 0$ annehmen und indem wir y' durch y'/α ersetzen, können wir annehmen, dass $\alpha = 1$ gilt. Weil T linear ist, liegt für alle $y \in D$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$ auch λy in D . Ist also $y \in D$ mit $y'(y) \neq 0$, so gilt auch $y|y'(y)|/y'(y) \in D$, und damit folgt:

$$|y'(y)| = y'(y) \frac{|y'(y)|}{y'(y)} = y' \left(y \frac{|y'(y)|}{y'(y)} \right) \leq 1.$$

Also gilt für alle $y \in D$ sogar

$$|y'(y)| \leq 1 < |y'(y_0)|.$$

Für alle $x \in U_1$ (und damit $Tx \in D$) gilt somit

$$|y'(Tx)| = |(T'y')(x)| \leq 1,$$

woraus wir $\|T'y'\| \leq 1$ erhalten.

Es folgt

$$1 < |y'(y_0)| \leq \|y'\| \|y_0\| \leq K \|y'\| \leq \|T'y'\| \leq 1,$$

ein Widerspruch. Also muss doch $y_0 \in D$ gelten und damit sind wir fertig. ■

Bemerkung: Aus Satz 5.18 und Korollar 5.19 erhalten wir, dass T' genau dann injektiv ist, wenn T dichtes Bild hat. Außerdem folgt aus der Injektivität von T' und abgeschlossenem $R(T)$, dass T surjektiv ist. Obiges Lemma 5.22 verschärft diese Aussage noch.

Satz 5.23 (Satz vom abgeschlossenen Bild). Seien X, Y Banachräume über \mathbb{K} und sei $T \in L(X, Y)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $R(T)$ ist abgeschlossen

(ii) $R(T) = (N(T'))^\perp$

(iii) $R(T')$ ist abgeschlossen

(iv) $R(T') = (N(T))^\perp$

Beweis. „(i) \Leftrightarrow (ii)“ folgt aus Satz 5.18.

„(i) \Rightarrow (iv)“: Es gilt stets $R(T') \subset (N(T))^\perp$ (da $T'y'(x) = y'(Tx) = 0$ für alle $x \in N(T)$). Sei $x' \in (N(T))^\perp$. Betrachte dann die Abbildung

$$z': R(T) \rightarrow \mathbb{K}, \quad y \mapsto x'(x) \quad \text{falls } Tx = y.$$

Es ist z' wohldefiniert, denn: für $x_1, x_2 \in X$ mit $Tx_1 = y = Tx_2$ gilt $T(x_1 - x_2) = 0$, also $x_1 - x_2 \in N(T)$, also $x'(x_1 - x_2) = 0$, also $x'(x_1) = x'(x_2)$. Die Abbildung z' ist auch stetig, denn: Aus Lemma 5.21 erhalten wir ein $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass für alle $y \in R(T)$ ein $x \in X$ existiert mit $Tx = y$ und $\|x\| \leq K\|y\|$. Für solche x gilt:

$$|z'(y)| = |x'(x)| \leq \|x'\| \|x\| \leq K \|x'\| \|y\|.$$

Daraus folgt die Stetigkeit von z' . Wir setzen nun z' mittels Satz 4.6 zu $y' \in Y'$ fort. Dann gilt $x' = T'y'$, denn für alle $x \in X$ gilt

$$x'(x) = z'(Tx) = y'(Tx) = (T'y')(x).$$

Dies zeigt $(N(T))^\perp \subset R(T')$.

„(iv) \Rightarrow (iii)“: Klar, da $((N(T))^\perp)^\perp$ stets abgeschlossen ist (Bemerkung 4.21).

„(iii) \Rightarrow (i)“: Definiere $Z := \overline{R(T)}$ und $S \in L(X, Z)$ durch $Sx := Tx$ für alle $x \in X$. Für $y' \in Y'$ und $x \in X$ gilt dann

$$(T'y')(x) = y'(Tx) = y'|_Z(Sx) = (S'(y'|_Z))(x).$$

D. h. $T'y' = S'(y'|_Z)$. Dies zeigt $R(T') \subset R(S')$. Ist $S'(z') \in R(S')$, so gilt für jede gemäß Satz 4.6 gewählte Fortsetzung $y' \in Y'$ von $z' \in Z'$ (nach demselben Argument wie oben) $S'z' = T'y'$. Dies zeigt $R(T') = R(S')$. Nach Voraussetzung ist somit $R(S')$ abgeschlossen.

Nach Satz 5.18 gilt $\overline{R(S)} = (N(S'))^\perp$ und da S dichtes Bild hat, folgt, dass S' injektiv ist. Also ist S' eine stetige Bijektion zwischen den Banachräumen Z' und $R(S')$. Aus dem Satz von der inversen Abbildung (5.10) folgt:

$$\exists C \in \mathbb{R}_{>0} \forall z' \in Z': \quad C\|z'\| \leq \|S'z'\|.$$

Lemma 5.22 liefert $R(S) = Z$. Damit gilt aber auch $R(T) = Z$ und weil Z nach Definition abgeschlossen ist, hat T somit abgeschlossenes Bild. ■

Bemerkung 5.24. Oft ist es einfacher zu zeigen, dass $R(T')$ abgeschlossen ist, als $R(T)$ zu bestimmen. Dann erhält man mit dem Satz vom abgeschlossenen Bild (5.23) direkt: $R(T)$ abgeschlossen, $R(T) = (N(T'))^\perp$. Man bekommt also Informationen über $R(T)$, indem man T' betrachtet.

Beispiel: Ist T' injektiv, dann folgt $N(T) = \{0\}$ und daraus $R(T) = (N(T'))^\perp = Y$.

6 Hilberträume

Siehe 2.7 (c). Eine wichtige Eigenschaft von Hilberträumen ist, dass stets orthogonale Projektionen auf abgeschlossene, konvexe Teilmengen existieren.

Satz 6.1 (Projektionssatz). Sei H ein Hilbertraum, $K \subset H$ eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Dann existiert für jedes $f \in H$ ein eindeutiges $u \in K$, so dass gilt:

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| = \text{dist}(f, K).$$

Das Element $u \in H$ ist eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$u \in K \quad \text{und für alle } v \in K \text{ gilt} \quad \text{Re}\langle f - u, v - u \rangle \leq 0.$$

Das Element u nennen wir dann *Projektion von f auf K* und wir schreiben dafür $u = P_K(f)$.

Beweis. Wähle eine Minimalfolge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K für das Infimum $\text{dist}(f, K)$, also mit $d_n := \|f - v_n\| \rightarrow \inf_{v \in K} \|f - v\| =: d$. Wir behaupten, dass dann $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schon eine Cauchyfolge sein muss. Dazu wenden wir die Parallelogramm-Identität (Satz 2.8 (3)) auf $f - v_n$ und $f - v_m$ an. Wir erhalten:

$$\|2f - (v_n + v_m)\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2(d_n^2 + d_m^2).$$

Da K konvex ist, gilt $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$, und es folgt:

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d.$$

Nach Multiplizieren der vorherigen Ungleichung mit 1/4 folgt somit:

$$\left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tatsächlich eine Cauchy-Folge. Weil K eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raums ist, ist K insbesondere vollständig. Also konvergiert $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K und es gibt ein $v \in K$ mit $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Für dieses gilt dann

$$\|f - v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\| = d = \text{dist}(f, K).$$

Wir zeigen nun, dass die beiden Charakterisierungen aus der Behauptung äquivalent sind. Sei hierzu für $u \in K$ die erste Bedingung erfüllt. Wähle $w \in K$. Dann folgt für $t \in [0, 1]$

$$v = (1 - t)u + tw \in K.$$

Damit erhalten wir für alle $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \|f - u\| &\leq \|f - (1 - t)u + tw\| = \|(f - u) - t(w - u)\| \\ \implies \|f - u\|^2 &\leq \|f - u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle f - u, w - u \rangle + t^2\|w - u\|^2 \\ \implies 2\operatorname{Re}\langle f - u, w - u \rangle &\leq t^2\|w - u\|^2 \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow 0$ erhalten wir die zweite Charakterisierung. Sei umgekehrt letztere gegeben für $u \in K$. Dann gilt

$$\|u - f\|^2 - \|v - f\|^2 = \|u - f\|^2 - \|v - u + (u - f)\|^2 = 2\operatorname{Re}\langle f - u, v - u \rangle - \|u - v\|^2 \leq 0,$$

woraus die erste Charakterisierung folgt.

Zur Eindeutigkeit: Angenommen $u_1, u_2 \in K$ erfüllen beide die zweite Charakterisierung. Dann gilt für alle $v \in K$

$$\operatorname{Re}\langle f - v_1, v - u_1 \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\langle f - v_2, v - u_2 \rangle \leq 0.$$

Wähle in der ersten Ungleichung $v = u_2$, in der zweiten $v = u_1$ und addiere beide Gleichungen. Dann erhalten wir

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \operatorname{Re}\langle u_1 - u_2, v_1 - v_2 \rangle \leq 0,$$

woraus $u_1 = u_2$ folgt. ■

Bemerkung 6.2. Das Problem im obigen Satz ist ein Minimierungsproblem. Auch in anderen bereits bekannten Problemen wird ein Minimum durch Ungleichungen beschrieben. Betrachte zum Beispiel $F \in C^1([0, 1])$ und $F(u) = \min_{v \in [0, 1]} F(v)$. Dann gilt $F'(u) = 0$, falls $u \in (0, 1)$, $F'(u) \geq 0$, falls $u = 0$ und $F'(u) \leq 0$, falls $u = 1$. Oder zusammengefasst:

$$u \in [0, 1] \quad \text{und für alle } v \in [0, 1] \text{ gilt} \quad F'(u)(v - u) \geq 0.$$

Satz 6.3. Sei H ein Hilbertraum, $K \subset H$ eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Dann nimmt der Abstand durch die Anwendung von P_K nicht zu, d. h. P_K ist Lipschitz zur Konstante 1, d. h. für alle $f_1, f_2 \in H$ gilt

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

Beweis. Sei $u_1 := P_K f_1$ und $u_2 := P_K f_2$. Dann gilt für alle $v \in K$:

$$\operatorname{Re}\langle f_1 - u_1, v - u_1 \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\langle f_2 - u_2, v - u_2 \rangle \leq 0.$$

Wähle einmal $v = u_2$ und einmal $v = u_1$ und erhalte durch Addition:

$$\operatorname{Re}\langle f_2 - u_2 - f_1 + u_1, u_1 - u_2 \rangle \leq 0.$$

Daraus folgt:

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|f_1 - f_2\| \|u_1 - u_2\|.$$

Nach Dividieren durch $\|u_1 - u_2\|$ folgt die Behauptung. ■

Korollar 6.4. Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum. Für $f \in H$ ist $P_M f =: u$ charakterisiert durch: $u \in M$ und $\langle f - u, v \rangle = 0$ für alle $v \in M$. Insbesondere ist P_M ein linearer stetiger Operator.

Beweis. Es gilt $\operatorname{Re}\langle f - u, v - u \rangle \leq 0$ für alle $v \in M$. Sei $w \in M$. Dann gilt auch $v = u + \langle f - u, w \rangle w \in M$ und damit

$$|\langle f - u, w \rangle|^2 = \operatorname{Re}(\overline{\langle f - u, w \rangle} \langle f - u, w \rangle) \leq 0,$$

woraus wie gewünscht

$$\langle f - u, w \rangle = 0$$

folgt. Gilt andererseits $\langle f - u, w \rangle = 0$ für alle $w \in M$, so folgt für alle $v \in M$ schon

$$\operatorname{Re}\langle f - v, v - u \rangle \leq 0,$$

da $v - u \in M$. Die Linearität ist nach der obigen Charakterisierung klar und die Stetigkeit folgt aus Satz 6.3. ■

6.5 (Dualraum eines Hilbertraums). In einem Hilbertraum H können wir durch

$$H \ni u \mapsto \langle u, f \rangle \in \mathbb{K}$$

für jedes $f \in H$ ein lineares Funktional definieren. Der folgende Satz zeigt, dass wir dadurch sogar bereits alle linearen Funktionale erhalten.

Satz: (Riesz'scher Darstellungssatz)

Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} . Dann ist

$$J: H \rightarrow H'$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} H \rightarrow \mathbb{K} \\ y \mapsto \langle y, x \rangle \end{pmatrix}$$

ein isometrischer, konjugiert linearer Isomorphismus. (Dabei bedeutet konjugiert linear, dass $J(\alpha x + y) = \bar{\alpha}J(x) + J(y)$ für alle $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt.)

Beweis. Seien $x, y \in H$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 2.8 (1)) folgt

$$|J(x)(y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Daraus folgt $J(x) \in X'$ mit $\|J(x)\| \leq \|x\|$. Wegen $|J(x)(x)| = \|x\|^2$ gilt $\|J(x)\| \geq \|x\|$. Also ist J eine Isometrie und damit insbesondere injektiv. Der wesentliche Schritt ist nun, die Surjektivität von J zu zeigen. Sei dazu $x'_0 \in X' \setminus \{0\}$. Wähle P als orthogonale Projektion auf $N(x'_0)$ (was ein abgeschlossener Unterraum ist). Wähle $e \in X$ mit $x'_0(e) = 1$ und definiere $x_0 := e - Pe$. Dann gilt $x'_0(x_0) = 1 \neq 0$. Aus dem Projektionssatz (6.1) folgt:

$$\forall y \in N(x'_0): \quad \langle y, x_0 \rangle = 0. \quad (\star)$$



Abbildung 6.1: Situation im Beweis des Riesz'schen Darstellungssatzes

Sei wieder $x \in X$. Dann gilt

$$x = \underbrace{(x - x'_0(x) x_0)}_{\in N(x'_0)} + x'_0(x) x_0$$

und damit wegen (\star) :

$$\langle x, x_0 \rangle = \langle x'_0(x) x_0, x_0 \rangle = x'_0(x) \|x_0\|^2.$$

Es folgt

$$x'_0(x) = \left\langle x, \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right\rangle = J\left(\frac{x_0}{\|x_0\|^2}\right)(x)$$

und daraus $x' = J(x_0/\|x_0\|^2)$. Also ist J surjektiv. ■

6.6 (Soll man H mit H' identifizieren?). Der Riesz'sche Darstellungssatz erlaubt es uns, H mit H' zu identifizieren. Wir werden dies oft tun, aber nicht immer. Wir wollen eine Situation betrachten, in der man vorsichtig mit einer solchen Identifikation sein sollte:

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und assoziierter Norm $\|\cdot\|$. Sei nun $V \subset H$ ein linearer Unterraum, der dicht in H liegt. Wir nehmen an, dass V ein Banachraum ist mit Norm $\|\cdot\|_V$. Weiter sei die Inklusion $V \hookrightarrow H$ stetig, d. h. es existiert ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $v \in V$ gilt: $\|v\|_V \leq c\|v\|$.

Ein Beispiel für eine solche Situation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= L^2([0, 1]) \\ &= \{v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} \mid \int_0^1 (v(x))^2 dx < \infty\} / \{v \mid v = 0 \text{ fast überall}\} \end{aligned}$$

mit Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x) v(x) dx$ für $u, v \in H$ und $V = C([0, 1])$. Dann existiert eine kanonische Abbildung

$$T: H' \rightarrow V', \quad x' \mapsto (v \mapsto x'(v)).$$

Wir sehen einfach ein, dass T stetig und injektiv ist. Nun identifizieren wir H' mit H , geschrieben $H \simeq H'$, und erhalten: $V \subset H \simeq H' \subset V'$ (\diamond), wobei dies alles stetige Injektionen sind. Problematisch wird diese Situation, falls V ein Hilbertraum mit eigenem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $\|\cdot\|_V$ die zugehörige Norm ist. Wir könnten V mit V' identifizieren. Aber was bedeutet dann (\diamond)? Wir können also nicht gleichzeitig H mit H' und V mit V' identifizieren. Typischerweise verwendet man dann nur $H \simeq H'$.

Wir betrachten noch ein weiteres Beispiel:

$$H = \ell^2(\mathbb{R}) \quad \text{mit Skalarprodukt} \quad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n.$$

Weiter sei

$$V = \left\{ u \in H \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < \infty \right\},$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle\langle u, v \rangle\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n v_n.$$

Es gilt $V \subset H$ und die Inklusion $V \hookrightarrow H$ ist stetig. Wir identifizieren H' mit H und V' mit dem Raum

$$V' = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n^2 < \infty \right\},$$

indem wir für $f \in V'$, $v \in V$ die Anwendung von f auf v durch $f(v) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n$ erklären (man rechnet leicht mit der Hölderschen Ungleichung nach, dass dies wohldefiniert ist). Dieser Raum ist offenbar echt größer als H . Die Isometrie $J: V \rightarrow V'$ aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (6.5) ist dann gegeben durch

$$u \mapsto (n^2 u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Bemerkung 6.7. Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} . Dann ist H reflexiv (Definition 4.19). Sei J der konjugiert lineare Isomorphismus aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (6.5). Es ist zu zeigen, dass J_H (aus Satz 4.18) surjektiv ist. Sei also $x'' \in H''$. Dann ist

$$x': H \rightarrow \mathbb{K}, \quad y \mapsto \overline{x''(Jy)}$$

ein Element in H' . Setze $x := J^{-1}x'$. Sei $y' \in H'$ und $y \in H$ mit $Jy = y'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x''(y') &= x''(Jy) = \overline{x'(y)} = \overline{(Jx)(y)} = \overline{\langle y, x \rangle} \\ &= \langle x, y \rangle = (Jy)(x) = y'(x) = (J_H x)(y') \end{aligned}$$

Also gilt $x'' = J_H x$ und damit ist J_H surjektiv.

Bemerkung 6.8. Sei $H \simeq H'$ ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein Unterraum. Dann kann man den Annihilator M^\perp identifizieren mit

$$M^\perp = \{ u \in H \mid \forall v \in M: \langle v, u \rangle = 0 \}.$$

Außerdem gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$. Wenn M abgeschlossen ist, so gilt $M + M^\perp = H$.

Definition 6.9. Sei H ein Hilbertraum. Wir nennen eine Sesquilinearform a auf H stetig, wenn es ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass gilt:

$$\forall u, v \in H: \quad |a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|.$$

Wir nennen a *koerziv*, wenn ein $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, so dass gilt:

$$\forall u \in H: \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Für den Beweis des folgenden Theorems benötigen wir den Banach'schen Fixpunktsatz:

Satz: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $S: X \rightarrow X$ eine (strikte) Kontraktion. Dann besitzt S genau einen Fixpunkt.

Theorem 6.10 (Stampacchia). Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $a: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ eine stetige, koerzive Sesquilinearform. Weiter sei $K \subset H$ nicht leer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es für alle $\varphi \in H'$ genau ein $u \in K$, so dass gilt:

$$\forall v \in K: \quad \operatorname{Re} a(v - u, u) \geq \operatorname{Re} \varphi(v - u). \quad (\star)$$

Ist a außerdem symmetrisch, so ist das Element $u \in H$ eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$u \in K \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} a(u, u) - \operatorname{Re} \varphi(u) = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v) \right).$$

Beweis. Sei $\varphi \in H'$ gegeben. Riez (6.5) liefert: es gibt genau ein $f \in H$, so dass für alle $v \in H$ schon $\varphi(v) = \langle v, f \rangle$ gilt. Andererseits ist für $u \in H$ die Abbildung

$$v \mapsto a(v, u)$$

ein Element in H' . Also erhalten wir erneut mit Riesz: Es existiert genau ein $Au \in H$, so dass für alle $v \in H$ gilt:

$$a(v, u) = \langle v, Au \rangle.$$

Seien $C, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ entsprechende Konstanten für a wie in Definition 6.9. Dann gilt:

$$\|Au\| \leq \|a(\cdot, u)\| \leq C \|u\|.$$

Da a und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im zweiten Argument konjugiert linear sind, folgt, dass A linear ist. Somit ergibt sich:

$$A \in L(H) \quad \text{und} \quad \|A\| \leq C.$$

Außerdem gilt für alle $u \in H$:

$$\operatorname{Re} \langle u, Au \rangle = \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Die Eigenschaft (\star) aus der Behauptung ist äquivalent zu:

$$\forall v \in K: \quad \operatorname{Re} \langle v - u, Au \rangle \geq \operatorname{Re} \langle v - u, f \rangle.$$

Für $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$ ist dies wiederum äquivalent zu:

$$\forall v \in K: \quad \operatorname{Re}\langle v - u, \varrho f - \varrho Au + u - u \rangle \leq 0.$$

Aus dem Projektionssatz (6.1) folgt, dass dies äquivalent dazu ist, ein $u \in K$ zu finden mit

$$u = P_K(\varrho f - \varrho Au + u).$$

Definiere für $v \in K$:

$$S(v) := P_K(\varrho f - \varrho Av + v).$$

Satz 6.3 liefert: für alle $v_1, v_2 \in K$ gilt:

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq \|(v_1 - v_2) - \varrho(Av_1 - Av_2)\|.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \|Sv_1 - Sv_2\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\underbrace{\varrho \operatorname{Re}\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle}_{\geq \alpha \|v_1 - v_2\|^2} + \varrho^2 \|Av_1 - Av_2\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2 \underbrace{\left(1 - 2\varrho\alpha + \varrho^2 C^2\right)}_{< 1 \text{ für } \varrho \in (0, 2\alpha/C^2)} \end{aligned}$$

Für ϱ klein genug ist S also eine Kontraktion und damit liefert der Banach'sche Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen Fixpunkts. Nach den vorherigen Überlegungen ist dieser dann die eindeutige Lösung von (\star) .

Sei nun a symmetrisch. Dann definiert $(u, v) \mapsto a(u, v)$ ein Skalarprodukt auf H . Die zugehörige Norm $u \mapsto \sqrt{a(u, u)}$ ist äquivalent zur Norm $u \mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ (was man leicht aus den Voraussetzungen an a folgern kann). Also ist H auch ein Hilbertraum bezüglich des von a gegebenen Skalarprodukts. Der Riesz'sche Darstellungssatz (6.5) liefert: Für alle $\varphi \in H'$ gibt es ein eindeutiges $g \in H$ mit $\varphi = a(\cdot, g)$. Damit ist (\star) aber äquivalent dazu, ein $u \in K$ zu finden, welches folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\forall v \in K: \quad \operatorname{Re} a(v - u, g - u) \leq 0.$$

Das heißt aber, dass u die Projektion von g auf K bezüglich des durch a gegebenen Skalarprodukts ist. Der Projektionssatz (6.1) liefert dann, dass dies äquivalent ist zu

$$u \in K \quad \text{und} \quad \sqrt{a(g - u, g - u)} = \min_{v \in K} \sqrt{a(g - v, g - v)},$$

was offenbar genau dann der Fall ist, wenn u die Funktion

$$v \mapsto a(g - v, g - v) = a(v, v) - 2 \operatorname{Re} a(v, g) + a(g, g) = a(v, v) - 2 \operatorname{Re} \varphi(v) + a(g, g)$$

auf K minimiert, oder äquivalent die Funktion

$$v \mapsto \frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v).$$

■

Bemerkung:

Ist a eine positiv semidefinite Bilinearform auf einem \mathbb{R} -Vektorraum H , so ist die Abbildung $v \mapsto a(v, v)$ konvex. Falls a sogar positiv definit ist, ist diese Abbildung strikt konvex. In der Regel besitzen strikt konvexe Funktionen mit $f(x) \rightarrow \infty$ für $\|x\| \rightarrow \infty$ ein eindeutiges Minimum.

Satz 6.11 (Lax-Milgram). Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $a: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ eine stetige, koerzive Sesquilinearform. Dann gibt es für jedes $\varphi \in H'$ genau ein $u \in H$, so dass gilt:

$$\forall v \in H: \quad \operatorname{Re} a(v, u) = \operatorname{Re} \varphi(v). \quad (\star\star)$$

Ist a außerdem symmetrisch, so ist das Element $u \in H$ eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \operatorname{Re} \varphi(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v) \right).$$

Beweis. Sei $\varphi \in H'$ und $w \in H$. Wählen wir $K = H$ im Theorem von Stampacchia (6.10), so erhalten wir ein $u \in H$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall v \in H: \quad \operatorname{Re} a(v - u, u) \geq \operatorname{Re} \varphi(v - u).$$

Also erhalten wir für $\pm w + u \in H$ zwei Ungleichungen, die zusammen

$$\operatorname{Re} a(w, u) = \operatorname{Re} \varphi(w)$$

implizieren. Es folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 6.12.

- (i) Der Satz von Lax-Milgram (6.11) kann zur Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen genutzt werden.
- (ii) Sei a symmetrisch und sei $F: H \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v)$. Dann bedeutet $(\star\star)$, dass für das Minimum „ $F'(u) = 0$ “ gilt. Betrachte dazu $\frac{d}{dt} F(u + tv)|_{t=0}$.

Es gilt

$$F(u + tv) = \frac{1}{2} (a(u, u) + ta(u, v) + ta(v, u) + t^2 a(v, v)) - \operatorname{Re} \varphi(u) - t \operatorname{Re} \varphi(v),$$

also erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} F(u + tv) = \operatorname{Re} a(u, v) + ta(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v).$$

Definition 6.13. Sei H ein Hilbertraum und $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Unterräumen von H . Dann nennen wir H die *Hilbertsumme* von $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls

- (a) $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise orthogonal ist, d. h. $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $u \in E_n$, $v \in E_m$ mit $n \neq m$, und
- (b) der lineare Raum $\operatorname{span}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ ist dicht in H .

In diesem Fall schreiben wir

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Satz 6.14. Sei H ein Hilbertraum und gelte $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$ für eine Folge abgeschlossener Unterräume $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei $u \in H$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n := P_{E_n}(u)$ sowie $S_n := \sum_{k=1}^n u_k$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u$$

(wofür wir auch die Notation $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u$ verwenden) und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2,$$

die sogenannte *Bessel-Parseval-Identität*.

Für den Beweis benötigen wir zunächst eine Hilfsaussage.

Lemma 6.15. Sei H ein Hilbertraum und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise orthogonaler Vektoren in H (d. h. für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $\langle v_n, v_m \rangle = 0$). Gelte außerdem $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|^2 < \infty$. Sei $S_n := \sum_{k=1}^n v_k$. Dann existiert der Grenzwert $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ und es gilt

$$\|S\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2.$$

Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n > 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|S_m - S_{n-1}\|^2 &= \left\| \sum_{k=n}^m v_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=n}^m v_k, \sum_{\ell=n}^m v_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=n}^m \sum_{\ell=n}^m \langle v_k, v_\ell \rangle = \sum_{k=n}^m \|v_k\|^2 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Da H vollständig ist, existiert also auch ein Grenzwert $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Außerdem folgt aus der obigen Rechnung

$$\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2,$$

woraus für $n \rightarrow \infty$ die zweite Behauptung folgt. ■

Beweis von Satz 6.14. Aus Korollar 6.4 folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall v \in E_n: \quad \langle u - u_n, v \rangle = 0.$$

Insbesondere erhalten wir daraus $\langle u, u_n \rangle = \|u_n\|^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt also:

$$\langle u, S_m \rangle = \sum_{n=1}^m \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2.$$

(Für die zweite Gleichheit, vergleiche Beweis von Lemma 6.15.) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 2.8 (1)) liefert

$$\|S_m\|^2 \leq \|u\| \|S_m\|,$$

woraus $\|S_m\| \leq \|u\|$ folgt. Dies zeigt:

$$\sum_{n=1}^m \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$ und wir können Lemma 6.15 anwenden. Wir erhalten die Existenz des Grenzwerts $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Wir wollen nun S bestimmen (zunächst ohne die Dichtheit von $\text{span}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ vorauszusetzen). Sei $F := \text{span}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$. Wir behaupten

$$S = P_{\overline{F}} u. \quad (**)$$

Sei $m \in \mathbb{N}$, $v \in E_m$ und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle u - S_n, v \rangle &= \left\langle u - \sum_{k=1}^n u_k, v \right\rangle = \langle u, v \rangle - \sum_{k=1}^n \underbrace{\langle u_k, v \rangle}_{=0 \text{ für } k \neq m} \\ &= \langle u, v \rangle - \langle u_m, v \rangle = \langle u - u_m, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts $\langle u - S, v \rangle = 0$. Es folgt $\langle u - S, \tilde{v} \rangle = 0$ für alle $\tilde{v} \in F$. Dies impliziert (erneut wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts)

$$\forall \tilde{v} \in \overline{F}: \quad \langle u - S, \tilde{v} \rangle = 0.$$

Wegen $S_n \in F$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $S \in \overline{F}$. Mithilfe von (6.4) folgt nun (**). Wir benutzen nun zusätzlich, dass F dicht in H liegt, also $\overline{F} = H$. Dann ergibt (**) direkt $S = u$. Gehen wir in $\sum_{n=1}^m \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2$ zum Grenzwert $m \rightarrow \infty$ über, so folgt die Bessel-Parseval-Identität. ■

Definition 6.16 (Schauder-Basis). Sei X ein normierter Raum und $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Dann nennen wir $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Schauder-Basis von X , falls gilt: Für alle $x \in X$ existiert eine eindeutige Folge $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} mit

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \rightarrow x \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Definition: (Orthonormalbasis) Sei H ein Prä-Hilbertraum und $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H . Dann nennen wir $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine *Orthonormalbasis* (oder *Hilbertbasis*), falls $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis ist und $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt (mit dem Kroneckerdelta δ).

Satz 6.17. Sei H ein Prä-Hilbertraum und $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem, d. h. für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$. Dann sind äquivalent:

- (1) $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in H
- (2) $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Schauder-Basis
- (3) $\forall x \in H: \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$
- (4) $\forall x, y \in H: \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}$ (Parseval-Identität)
- (5) $\forall x \in H: \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ (Vollständigkeitsrelation)

Falls eine dieser Bedingungen gilt, ist $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ also eine Hilbertbasis.

Beweis. „(1) \Rightarrow (3)“: Nutze Satz 6.14 (in den dortigen Bezeichnern) mit $E_n = \text{span}\{e_n\}$. Es gilt dann $u_n = \alpha_n e_n$ mit $\alpha_n = \langle e_n, u \rangle$. Das heißt:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \langle e_k, u \rangle e_k$$

(folgt aus der Orthogonalität der Projektion). Also folgt $S_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$. Aus 6.14 folgt dann die Behauptung.

„(3) \Rightarrow (2)“: Wir müssen die Eindeutigkeit der Koeffizienten zeigen. Wegen der Linearität reicht es, den Fall $x = 0$ zu betrachten. Gilt

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

so folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts:

$$0 = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle e_k, e_\ell \rangle = \alpha_\ell.$$

„(2) \Rightarrow (1)“ folgt aus der Definition der Schauder-Basis.

„(3) \Rightarrow (4)“: Aus der Stetigkeit des Skalarprodukts erhalten wir:

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{\ell=1}^n \langle y, e_\ell \rangle e_\ell \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_\ell \rangle} \underbrace{\langle e_k, e_\ell \rangle}_{\delta_{k\ell}}.$$

„(4) \Rightarrow (5)“ ist klar.

„(5) \Rightarrow (3)“:

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 &\leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

■

Definition 6.18 (separabel). Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Beispiele:

- (a) \mathbb{R} ist separabel, da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht liegt.
- (b) $C^0([a, b])$ mit der Supremumsnorm ist separabel, da die Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht liegen. (Weierstraßscher Approximationssatz)
- (c) $\ell^2(\mathbb{R})$ ist separabel, da die abzählbaren Folgen aus $\ell^2(\mathbb{Q})$ dicht liegt (vgl. Beweis von Lemma 6.19).

Lemma 6.19. Sei X ein unendlich-dimensionaler normierter Raum. Dann sind äquivalent:

- (1) X ist separabel
- (2) Es gibt eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlich-dimensionaler Unterräume von X mit folgenden Eigenschaften: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $X_n \subset X_{n+1}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ liegt dicht in X .
- (3) Es gibt eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlich-dimensionaler Unterräumen von X mit folgenden Eigenschaften: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $E_n \cap E_m = \{0\}$ und

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} E_k := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E_1 \oplus \cdots \oplus E_k)$$

liegt dicht in X .

- (4) Es gibt eine linear unabhängige Menge $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ von Vektoren aus X , so dass $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in X liegt.

Beweis. „(1) \Rightarrow (2)“: Sei $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X . Definiere $X_n := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann erfüllt die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die geforderten Bedingungen.

„(2) \Rightarrow (3)“: Sei $E_1 := X_1$ und $n \in \mathbb{N}$. Da X_{n+1} endlich-dimensional ist, gibt es einen Teilraum $E_{n+1} \subset X_{n+1}$ mit $X_{n+1} = X_n \oplus E_{n+1}$. Wir erhalten so eine Folge von Unterräumen $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt $X_n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ und nach Voraussetzung liegt aber $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ dicht in X .

„(3) \Rightarrow (4)“: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $(e_{n,j})_{j \in \{1, \dots, \dim E_n\}}$ eine Basis von E_n . Setze

$$X_n := E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = \text{span}\{e_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \dim E_i\}.$$

Dann gilt

$$\text{span}\{e_{i,j} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq \dim E_i\} = \text{span}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\right)$$

und nach Voraussetzung liegt die rechte Menge dicht in X . Also ist

$$\{e_{i,j} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq \dim E_i\}$$

die gesuchte linear unabhängige Menge.

„(4) \Rightarrow (1)“: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$A_n := \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}: \alpha_k \in \mathbb{K} \cap \mathbb{Q}(i) \right\}$$

abzählbar (wobei $\mathbb{Q}(i) = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$) mit

$$\overline{A_n} = \text{span}\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

Da abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen wieder abzählbar sind, liefert die Teilmenge $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ von X die Behauptung. ■

Satz 6.20. Für jeden unendlich-dimensionalen Hilbertraum H über \mathbb{K} ist äquivalent:

- (1) H ist separabel
- (2) H besitzt eine Hilbertbasis

Weiter gilt: Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so ist H isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{K})$.

Beweis. „(1) \Rightarrow (2)“: Sei $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in Lemma 6.19 (4) und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $H_n := \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Definiere induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$ Elemente \hat{e}_n durch

$$\begin{aligned} \tilde{e}_n &:= e_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_n, \tilde{e}_k \rangle \tilde{e}_k \in H_n \setminus H_{n-1} \\ \hat{e}_n &:= \frac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|}. \end{aligned}$$

Dann gilt $\hat{e}_n \in H_n \cap H_{n-1}^\perp$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $(\hat{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. Wegen $\text{span}\{\hat{e}_k \mid 1 \leq k \leq n\} = H_n$ folgt:

$$\text{span}\{\hat{e}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ liegt dicht in } H.$$

Nach Satz 6.17 ist damit $\{\hat{e}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Hilbertbasis und es gilt $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \hat{e}_k \rangle \hat{e}_k$ für alle $x \in H$. Die Abbildung

$$J: H \rightarrow \ell^2(\mathbb{K}), \quad x \mapsto (\langle x, \hat{e}_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$$

erfüllt dann $\langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in H$ wieder nach Satz 6.17. Außerdem ist J linear und bijektiv.

„(2) \Rightarrow (1)“ folgt aus Lemma 6.19, da $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ existiert mit $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in H . ■

Bemerkung: Auf $\ell^2(\mathbb{K})$ ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} := ((\delta_{kn})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Hilbertbasis. (Dabei ist δ das Kroneckerdelta, also hat für $n \in \mathbb{N}$ der Vektor e_n nur in der n -ten Komponente den Eintrag 1, ansonsten 0.)

Es bildet $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. Außerdem liegt $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in ℓ^2 . Sei $x \in \ell^2$ und sei

$$x^{(k)} := (x_1, \dots, x_k, 0, \dots) = \sum_{i=1}^k x_i e_i.$$

Dann gilt:

$$\|x^{(k)} - x\|^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} x_i^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Bemerkung: Die Tatsache, dass alle separablen Hilberträume isometrisch isomorph zu ℓ^2 sind, könnte dazu verführen, nur noch ℓ^2 zu betrachten. Viele Operatoren zwischen separablen Hilberträumen haben aber eine komplizierte Struktur, wenn man sie in ℓ^2 ausdrückt. Fazit: Oft ist es besser, doch direkt mit dem entsprechenden Hilbertraum zu arbeiten.

7 Schwache Konvergenz

Zur Erinnerung: Im \mathbb{R}^n kann man aus jeder beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge auswählen. Außerdem gilt für Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ der *Satz von Heine-Borel*: K ist genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist. Beides ist in unendlich-dimensionalen Banachräumen i. A. nicht mehr gegeben. Wir versuchen, Ersatz dafür zu finden.

Definition 7.1. (i) Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d. h. falls A folgende Eigenschaft besitzt: Ist I eine Menge und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen in X mit $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

(ii) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A *präkompakt*, falls für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ endlich viele $x_1, \dots, x_n \in X$ existieren mit $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

Bemerkung: Man kann Definition 7.1 (ii) dahingehend verschärfen, dass die Mittelpunkte x_1, \dots, x_n der ε -Kugeln in A liegen müssen. Dies ist äquivalent zur obigen Definition.

Satz 7.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) A ist kompakt
- (2) A ist folgenkompakt, d. h. jede Folge in A besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A .
- (3) A ist präkompakt und $(A, d|_A)$ ist vollständig.

Beweis. „(1) \Rightarrow (2)“: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A . Besitzt A keinen Häufungspunkt so gibt es für alle $y \in A$ ein $r_y \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$N_y := \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in B_{r_y}(y) \cap A\}$$

endlich ist. Weil $(B_{r_y}(y))_{y \in A}$ eine offene Überdeckung von A bildet und A kompakt ist, gibt es $y_1, \dots, y_n \in A$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_{y_i}}(y_i)$. Damit wäre $\mathbb{N} \subset \bigcup_{i=1}^n N_{y_i}$ endlich. Widerspruch.

„(2) \Rightarrow (3)“: Jede Cauchy-Folge in A besitzt wegen der Folgenkompaktheit von A eine konvergente Teilfolge. Da aber eine Cauchyfolge mit konvergenter Teilfolge schon selbst konvergiert

(gegen den Grenzwert der Teilfolge), ist A also vollständig. Zur Präkompaktheit: Falls es für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ keine endliche ε -Überdeckung von A gibt, wähle induktiv

$$x_{k+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x_i).$$

Damit hätte $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt, im Widerspruch zur Folgenkompaktheit von A .

„(3) \Rightarrow (1)“: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Angenommen $(U_i)_{i \in I}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung von A . Wähle zunächst endlich viele $y_1, \dots, y_\ell \in X$, so dass $A \subset \bigcup_{j=1}^\ell B_{1/2}(y_j)$ gilt (was wegen der Präkompaktheit von A möglich ist). Dann gibt es ein $B_{1/2}(y_j)$, so dass $B_{1/2}(y_j) \cap A$ nicht von endlich vielen U_i überdeckt wird. Wähle dann $x_1 := y_j$. Falls nun x_n schon definiert ist, so gehen wir analog vor: Seien $y_1^n, \dots, y_{\ell_n}^n \in X$, so dass

$$B_{1/2^n}(x_n) \cap A \subset A \subset \bigcup_{j=1}^{\ell_n} B_{1/2^{n+1}}(y_j^n)$$

gilt. Weil nach Konstruktion $B_{1/2^n}(x_n) \cap A$ nicht von endlich vielen U_i überdeckt wird, muss es ein $B_{1/2^{n+1}}(y_j^n)$ geben, das $B_{1/2^n}(x_n) \cap A$ nicht-trivial schneidet und das nicht von endlich vielen U_i überdeckt wird. Setze dann $x_{n+1} := y_j^n$. Somit erhalten wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $A_n := B_{1/2^{n+1}}(x_{n+1}) \cap B_{1/2^n}(x_n) \cap A \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle dann $z_n \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dies liefert eine Cauchy-Folge in A , was aus

$$d(z_n, z_{n+1}) \leq d(z_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, z_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Da A vollständig ist, folgt: Es gibt ein $z \in A$ mit $z_n \rightarrow z$ für $n \rightarrow \infty$. Weil $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von A ist, gibt es also ein $i_0 \in I$ mit $z \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist, gibt es ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_R(z)$ komplett in U_{i_0} enthalten ist. Weil $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen z konvergiert und nach Wahl von z_n für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $d(x_n, z_n) < 1/2^n$ gilt, finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$B_{1/2^N}(x_N) \subset B_R(z) \subset U_{i_0}.$$

Damit wird aber $B_{1/2^N}(x_N) \cap A$ von U_{i_0} überdeckt, was nach Konstruktion ausgeschlossen war. Also muss es doch eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i \in I}$ geben. ■

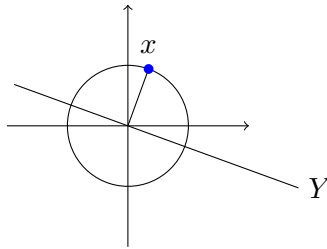


Abbildung 7.1: Maximaler Abstand zwischen Gerade und Einheitssphäre

Satz 7.3 (Fast orthogonales Element). Sei X ein normierter Raum und $Y \subsetneq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Weiter sei $\theta \in (0, 1)$ oder, falls X ein Hilbertraum ist, $\theta \in (0, 1]$. Dann gibt es ein $x_\theta \in X$ mit (s. Abbildung 7.1)

$$\|x_\theta\| = 1 \quad \text{und} \quad \theta \leq \text{dist}(x_\theta, Y) \leq 1.$$

Beweis. Sei zunächst $\theta \in (0, 1)$. Wähle $x \in X \setminus Y$. Da Y abgeschlossen ist, gilt $\text{dist}(x, Y) > 0$. Es gibt daher ein $y_\theta \in Y$ mit

$$\|x - y_\theta\| \leq \frac{1}{\theta} \text{dist}(x, Y).$$

Setze nun

$$x_\theta := \frac{x - y_\theta}{\|x - y_\theta\|}.$$

Dann gilt für alle $y \in Y$

$$\|x_\theta - y\| = \frac{1}{\|x - y_\theta\|} \|x - (y_\theta + \|x - y_\theta\| y)\|,$$

woraus folgt:

$$\|x_\theta - y\| \geq \frac{\text{dist}(x, Y)}{\frac{1}{\theta} \text{dist}(x, Y)} = \theta.$$

Falls X ein Hilbertraum und $\theta = 1$ ist, so wähle $y_1 = P_Y(x)$. ■

Satz 7.4 (Heine-Borel). Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:

$$\overline{B_1(0)} \text{ kompakt} \iff \dim X < \infty.$$

Beweis. „ \Leftarrow “: Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von X . Zu $x \in X$ bezeichne $\alpha(x)$ den eindeutigen Vektor in \mathbb{K}^n , für den $x = \sum_{i=1}^n \alpha(x)_i e_i$ gilt. Da alle Normen äquivalent sind, genügt es, die Kompaktheit von $\overline{B_1(0)}$ in folgender Norm zu zeigen: für $\alpha \in \mathbb{K}^n$ und $x \in X$ sei

$$\|\alpha\|_{\max} := \max_i |\alpha_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_{\max} := \|\alpha(x)\|_{\max}.$$

Nun gilt:

$$\overline{B_1(0)} \subset \bigcup_{\substack{z \in \mathbb{Z}^n, \\ \|z\|_{\max} \leq m}} B_{2/m} \left(\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{m} e_i \right).$$

Damit ist $\overline{B_1(0)}$ präkompakt und da in endlich-dimensionalen Räumen abgeschlossene Teilmengen auch vollständig sind, folgt mit Satz 7.2 die Behauptung.

„ \Rightarrow “: Sei $\varepsilon \in (0, 1)$ und

$$\overline{B_1(0)} \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(x_i)$$

für geeignete $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_{n_\varepsilon} \in X$. Dann ist

$$Y := \text{span}\{x_1, \dots, x_{n_\varepsilon}\}$$

ein abgeschlossener Unterraum (da endlich-dimensional). Angenommen $Y \subsetneq X$. Dann liefert Satz 7.3 ein x_ε mit $\|x_\varepsilon\| = 1$ und $\varepsilon \leq \text{dist}(x_\varepsilon, Y)$. Dann folgt aber $x \in \overline{B_1(0)}$ und damit muss es ein $i_0 \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$ geben, so dass $x \in B_\varepsilon(x_{i_0})$ gilt. Somit erhalten wir folgenden Widerspruch:

$$\varepsilon \leq \text{dist}(x_\varepsilon, Y) \leq \|x_{i_0} - x_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Also war die Annahme falsch und es muss doch schon $Y = X$ und damit $\dim X \leq n_\varepsilon < \infty$ gelten. ■

Definition 7.5 (Schwache Konvergenz). Sei X ein Banachraum.

1. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X *konvergiert schwach gegen* $x \in X$, falls gilt:

$$\forall x' \in X': \quad x'(x_n) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Notation: $x_n \rightarrow x$ schwach in X für $n \rightarrow \infty$, oder $x_n \rightharpoonup x$ in X für $n \rightarrow \infty$.

2. Eine Folge $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X' *konvergiert schwach-* gegen* $x' \in X'$, falls gilt:

$$\forall x \in X: \quad x'_n(x) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(Dies entspricht gerade punktwaiser Konvergenz von x' .) Notation: $x'_n \rightarrow x'$ schwach-* in X' für $n \rightarrow \infty$, oder $x'_n \xrightarrow{*} x'$ in X' für $n \rightarrow \infty$.

3. Eine Teilmenge $M \subset X$ (bzw. $M \subset X'$) heißt *schwach* (bzw. *schwach-**) *folgenkompakt*, falls jede Folge in M eine schwach (bzw. schwach-*) konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in M liegt.

Bemerkungen:

- (i) Falls $x_n \rightarrow x$ in X für $n \rightarrow \infty$ (bezüglich Normkonvergenz) gilt, so sagen wir zur besseren Unterscheidung auch: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert *stark* gegen x . Die Topologie, die X von der Norm erhält, nennen wir auch *starke Topologie*.
- (ii) Die schwache Konvergenz kann als schwach-* Konvergenz im Bidualraum aufgefasst werden.

$$\begin{aligned} x_n \rightharpoonup x \quad \text{für } n \rightarrow \infty &\iff \forall x' \in X': \quad x'(x_n) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \\ &\iff \forall x' \in X': \quad (J_X x_n)(x') \rightarrow (J_X x)(x') \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Frage: Welche Konvergenz in X' ist stärker? Schwache Konvergenz oder schwach-* Konvergenz?

$$\begin{aligned} x'_n \rightharpoonup x' & \text{ bedeutet } \forall x'' \in X'': x''(x'_n) \rightarrow x''(x') \\ x'_n \xrightarrow{*} x' & \text{ bedeutet } \forall x \in X: x'_n(x) \rightarrow x'(x) \end{aligned}$$

Es gilt $x'' = J_X x$ für gewisse $x'' \in X''$ (und geeignetes $x \in X$), aber i. A. ist J_X nicht surjektiv (d. h. es gibt „mehr x'' als $J_X x$ “). Also verlangt $x'_n \rightharpoonup x'$ mehr als $x'_n \xrightarrow{*} x'$. Damit ist schwach-* Konvergenz im Allgemeinen schwächer als schwache Konvergenz (d. h. es gibt mehr konvergente Folgen bezüglich schwach-* Konvergenz als bezüglich schwacher Konvergenz).

Lemma 7.6. Sei X ein Banachraum. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) Der schwache Limes und der schwach-* Limes sind eindeutig bestimmt.
- (2) Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.
- (3) Aus $x'_n \rightarrow x'$ schwach-* in X' für $n \rightarrow \infty$ folgt:

$$\|x'\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x'_n\|.$$

- (4) Aus $x_n \rightarrow x$ schwach in X für $n \rightarrow \infty$ folgt:

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

(Dies zeigt, dass die Norm unterhalbstetig ist bezüglich schwacher Konvergenz.)

- (5) Schwach und schwach-* konvergente Folgen sind (bezüglich der Norm) beschränkt.
- (6) Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in X bzw. X' und seien $x \in X$ und $x' \in X'$. Sind für $n \rightarrow \infty$ die Bedingungen

$$x_n \rightarrow x \text{ stark} \quad \text{und} \quad x'_n \xrightarrow{*} x'$$

oder die Bedingungen

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{und} \quad x'_n \rightarrow x' \text{ stark}$$

erfüllt, so folgt:

$$x'_n(x_n) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. (1) Punktweise Grenzwerte sind eindeutig, also auch der schwach-* Grenzwert. Angenommen x, y sind schwache Grenzwerte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt für alle $x' \in X'$:

$$x'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x'(x_n) = x'(y).$$

Also folgt $x'(x - y) = 0$ für alle $x' \in X'$. Daraus erhalten wir:

$$0 = \sup_{x' \in X'} \|x'(x - y)\| \geq \|J_X(x - y)\| = \|x - y\|,$$

also $\|x - y\| = 0$ und damit muss schon $x = y$ gelten.

- (2) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , die stark gegen $x \in X$ konvergiert. Dann gilt $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Damit folgt für alle $x' \in X'$:

$$|x'(x_n) - x'(x)| = |x'(x_n - x)| \leq \|x'\| \|x - x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dies entspricht schwacher Konvergenz.

- (3) Sei $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X' mit $x'_n \xrightarrow{*} x' \in X'$ für $n \rightarrow \infty$. Für alle $x \in X$ gilt

$$|x'_n(x)| \leq \|x'_n\| \|x\|$$

und durch Bilden des \liminf erhalten wir somit:

$$|x'(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x'_n(x)| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |x'_n(x)| \leq \|x\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x'_n\|.$$

Es folgt:

$$\|x'\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x'_n\|.$$

- (4) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \rightarrow x \in X$ für $n \rightarrow \infty$. Für $x = 0$ gilt die Behauptung offenbar, also sei nun o. E. $x \neq 0$. Dann gilt für alle $x' \in X'$ (mit analogen Argumenten wie zuvor):

$$|x'(x)| \leq \|x'\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Wir wählen ein $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$ und $x'(x) = \|x\|$ (vgl. Konstruktion direkt vor Satz 4.18) und erhalten so die Behauptung.

- (5) Sei $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X' mit $x'_n \xrightarrow{*} x'$ in X' für $n \rightarrow \infty$. Für alle $x \in X$ ist dann $(x'_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente, also beschränkte Folge, d. h. es gilt:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x'_n(x)| < \infty.$$

Banach-Steinhaus (Satz 5.3) liefert:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x'_n\| < \infty.$$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \rightarrow x$ in X für $n \rightarrow \infty$, so gilt

$$J_X x_n \xrightarrow{*} J_X x \quad \text{in } X'' \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Nach dem vorherigen Absatz ist also $(J_X x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X'' beschränkt und da J_X eine Isometrie ist, folgt: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt in X .

- (6) Seien die ersten beiden Bedingungen aus der Behauptung erfüllt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |x'(x) - x'_n(x_n)| &= |x'(x) - x'_n(x) + x'_n(x) - x'_n(x_n)| \\ &\leq \underbrace{|x'(x) - x'_n(x)|}_{\rightarrow 0, \text{ da } x'_n \xrightarrow{*} x'} + \underbrace{\|x - x_n\| \|x'_n\|}_{\rightarrow 0, \text{ da } x_n \rightarrow x \text{ stark und } (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt nach (5)}} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Sind die zweiten Bedingungen erfüllt, so gilt mit einem analogen Argument:

$$\begin{aligned} |x'(x) - x'_n(x_n)| &\leq \underbrace{|x'(x) - x'(x_n)|}_{\rightarrow 0, \text{ da } x_n \rightarrow x} + \underbrace{\|x' - x'_n\| \|x_n\|}_{\rightarrow 0, \text{ da } x'_n \rightarrow x' \text{ stark und } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt nach (5)}} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 7.7.

(i) In einem Hilbertraum H gilt:

$$x_n \rightarrow x \iff \forall y \in H: \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle.$$

Dies gilt, da wir H' isometrisch isomorph mit H identifizieren können.

(ii) Schwache Konvergenz ist eine Verallgemeinerung der Konvergenz in allen Koordinatenrichtungen. Ersetze „Koordinaten von x “ durch $x'(x)$ für Funktionale $x' \in X'$.

Satz 7.8. Sei X ein separabler Banachraum über \mathbb{K} . Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$ in X' schwach-* folgenkompakt.

Beweis. Sei $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X und sei $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X' mit $\|x'_k\| \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x'_k(x_n))_{k \in \mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine beschränkte Folge in \mathbb{K} . Nach dem Diagonalverfahren gibt es eine Teilfolge $(x'_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, so dass $(x'_{k_i}(x_n))_{i \in \mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert. Setze dann für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$x'(x_n) := \lim_{i \rightarrow \infty} x'_{k_i}(x_n).$$

Wir setzen x' linear fort auf $Y := \text{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für alle $y \in Y$ gilt dann

$$|x'(y)| = \lim_{i \rightarrow \infty} |x'_{k_i}(y)| \leq \|y\|,$$

woraus folgt, dass x' auf Y gleichmäßig stetig ist und sich somit eindeutig auf $\overline{Y} = X$ fortsetzen lässt. Folglich ist $x' \in X'$ mit $\|x'\| \leq 1$. Sei $x \in X$ und $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Y , die gegen x konvergiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(x' - x'_{k_i})(x)| &\leq |(x' - x'_{k_i})(y_j)| + \|x' - x'_{k_i}\| \|x - y_j\| \\ &\leq |(x' - x'_{k_i})(y_j)| + 2\|x - y_j\| \\ &\xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\text{nach Konstr.}} 0 + 2\|x - y_j\| \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Da x beliebig war, folgt wie gewünscht:

$$\forall x \in X: \quad x'_{k_i}(x) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

■

Wir hätten gerne die analoge Aussage von Satz 7.8 für $\overline{B_1(0)} \subset X$ und schwache Konvergenz. Dafür brauchen wir Reflexivität und einige Aussagen über reflexive Räume.

Lemma 7.9. Sei X ein Banachraum. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) Ist X reflexiv und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum, so ist Y reflexiv.
- (2) Sei Y ein weiterer Banachraum und gelte $X \cong Y$ mittels des Operators $T \in L(X, Y)$ (mit $T^{-1} \in L(Y, X)$). Dann ist X genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.
- (3) Es ist X genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.

Beweis. (1) Sei o. E. $Y \neq X$ und sei $y'' \in Y''$. Dann definieren wir $x'' \in X''$ durch

$$x''(x') := y''(x'|_Y).$$

Sei $x := J_X^{-1}x'' \in X$. Für alle $x' \in X'$ mit $x'|_Y = 0$ gilt

$$0 = x''(x') = (J_X x)(x') = x'(x)$$

und somit folgt $x \in Y$ aus (dem Beweis von) Korollar 4.16. Sei $y' \in Y'$ und sei $x' \in X'$ eine Hahn-Banach-Fortsetzung von y' (Satz 4.6). Dann gilt

$$y''(y') = y''(x'|_Y) = x''(x') = x'(x) = y'(x) = (J_Y x)(y').$$

Es folgt $J_Y x = y''$ und somit ist J_Y surjektiv, also Y reflexiv.

- (2) Aus Symmetriegründen genügt es, eine Richtung zu zeigen. Sei X reflexiv und $y'' \in Y''$. Definiere $x'' \in X''$ durch

$$x''(x') := y''(x' \circ T^{-1}).$$

Für $y' \in Y'$ gilt dann

$$y''(y') = x''(y' \circ T) = (y' \circ T)(J_X^{-1}x'') = y'(T J_X^{-1}x'') = J_Y(T J_X^{-1}x'')(y'),$$

also folgt $y'' = J_Y(T J_X^{-1}x'')$ und damit ist J_Y surjektiv, d. h. Y reflexiv.

- (3) „ \Rightarrow “: Sei X reflexiv. Ist $x''' \in X'''$, so gilt $x''' \circ J_X \in X'$. Für alle $x'' \in X''$ gilt:

$$x'''(x'') = (x''' \circ J_X)(J_X^{-1}x'') = x''(x''' \circ J_X) = J_{X'}(x''' \circ J_X)(x'').$$

Also folgt $x''' = J_{X'}(x''' \circ J_X)$ und damit ist $J_{X'}$ surjektiv.

„ \Leftarrow “: Sei X' reflexiv. Nach dem gerade Gezeigten ist X'' reflexiv. Weil J_X eine Isometrie ist, muss $J_X(X) \subset X''$ ein abgeschlossener Unterraum sein. Mit (1) folgt, dass $J_X(X)$ reflexiv ist, und mit (2) die Reflexivität von X .

■

Lemma 7.10. Sei X ein Banachraum. Dann gilt:

$$X' \text{ separabel} \implies X \text{ separabel}$$

Beweis. Sei $\{x'_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in X' . Wähle nun für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in X$ mit $\|x_k\| = 1$ und $x'_k(x_k) \geq \frac{1}{2} \|x'_k\|$. Definiere dann

$$Y := \overline{\text{span}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

Sei $x' \in X'$ mit $x'|_Y = 0$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\|x' - x'_k\| \geq |(x' - x'_k)(x_k)| = |x'_k(x_k)| \geq \frac{1}{2} \|x'_k\| \geq \frac{1}{2} (\|x'\| - \|x'_k - x'\|).$$

Daraus folgt

$$\|x'\| \leq 3 \inf_{k \in \mathbb{N}} \|x' - x'_k\| = 0,$$

da $\{x'_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht liegt in X' . Mittels Korollar 4.16 folgt $X = Y$. ■

Achtung, die Umkehrung von Lemma 7.10 gilt im Allgemeinen nicht!

Satz 7.11. Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.

Beweis. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{B_1(0)}$ und

$$Y := \overline{\text{span}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

Dann ist Y offenbar separabel. Da Y ein abgeschlossener Unterraum des reflexiven Banachraums X ist, erhalten wir mit Lemma 7.9 (1), dass auch Y reflexiv ist. Also ist $Y'' = J_Y(Y)$ separabel. Nach Lemma 7.10 ist damit auch Y' separabel. Da $\overline{B_1(0)} \subset (Y')'$ schwach-* folgenkompakt ist (Satz 7.8), existiert eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ und ein $y'' \in Y''$ mit

$$J_Y x_{k_i} \rightarrow y'' \quad \text{schwach-* in } Y'' \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Für $x := J_Y^{-1} y''$ gilt also $J_Y x_{k_i} \xrightarrow{*} J_Y x$ für $i \rightarrow \infty$. Somit gilt für alle $y' \in Y'$:

$$y'(x_{k_i}) = (J_Y x_{k_i})(y') \rightarrow (J_Y x)(y') = y'(x) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Es folgt $x_{k_i} \rightarrow x$ schwach in Y für $i \rightarrow \infty$ und damit auch

$$x_{k_i} \rightarrow x \quad \text{schwach in } X \quad \text{für } i \rightarrow \infty. \quad \text{■}$$

Satz 7.12 (Anwendung auf Hilberträume). Sei H ein Hilbertraum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in H . Dann existiert eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ und ein $x \in H$, so dass für alle $y \in H$ gilt:

$$\langle x_{k_i}, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Beweis. Nach Bemerkung 6.7 ist H reflexiv. Nach Satz 7.11 sind abgeschlossene Kugeln also schwach folgenkompakt. Das heißt, es existieren eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ und ein $x \in H$ mit:

$$\forall x' \in X': \quad x'(x_{k_i}) \rightarrow x'(x) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Mit dem Rieszschen Darstellungssatz (6.5) erhalten wir:

$$\forall y \in H \exists x'_y \in H': \quad \langle \cdot, y \rangle = x'_y$$

Dies impliziert:

$$\forall y \in H: \quad \langle x_{k_i}, y \rangle = x'_y(x_{k_i}) \rightarrow x'_y(x) = \langle x, y \rangle \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

■

Satz 7.13. Sei H ein Hilbertraum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H . Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_k \rightarrow x \quad \text{stark in } H & \quad \text{für } k \rightarrow \infty \\ \iff x_k \rightarrow x \quad \text{schwach in } H \quad \text{und} \quad \|x_k\| \rightarrow \|x\| & \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Beweis. „ \Rightarrow “ ist klar.

„ \Leftarrow “: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|x_k\|^2 &= \|x - x + x_k\|^2 = \langle x - x + x_k, x - x + x_k \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x_k - x, x \rangle + \|x_k - x\|^2. \end{aligned}$$

Wegen $x_k \rightharpoonup x$ für $k \rightarrow \infty$ gilt $\langle x_k - x, x \rangle \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Es folgt

$$\|x - x_k\| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

■

Satz 7.14. Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ abgeschlossen und konvex. Dann ist M schwach folgenabgeschlossen, das heißt: Ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $x_k \rightharpoonup x$ schwach in X für $k \rightarrow \infty$, so ist auch $x \in M$.

Beweis. Sei o. E. M nicht leer und sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $x_k \rightharpoonup x \in X$ für $k \rightarrow \infty$. Angenommen $x \notin M$. Dann liefert der Satz von Hahn-Banach in der zweiten geometrischen Formulierung (4.15) die Existenz eines $x' \in X'$ und eines $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha < \operatorname{Re} x'(x) \quad \text{und} \quad \forall y \in M: \operatorname{Re} x'(y) \leq \alpha.$$

Nach Voraussetzung gilt $x_k \rightharpoonup x$ für $k \rightarrow \infty$, also folgt

$$\operatorname{Re} x'(x_k) \rightarrow \operatorname{Re} x'(x) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Wegen $x_k \in M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann aber

$$\operatorname{Re} x'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} x'(x_k) \leq \alpha,$$

im Widerspruch zu $\operatorname{Re} x'(x) > \alpha$.

■

Lemma 7.15 (Lemma von Mazur). Sei X ein normierter Raum und sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_k \rightarrow x$ schwach in X für $k \rightarrow \infty$. Dann gilt:

$$x \in \overline{\text{conv}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

(Dabei sei $\text{conv}(A)$ für eine Teilmenge $A \subset X$ die *konvexe Hülle von A in X* , d. h. die kleinste konvexe Teilmenge von X , die A enthält.)

Beweis. Setze

$$M := \text{conv}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist M konvex und damit auch \overline{M} . Aus Satz 7.14 folgt, dass \overline{M} schwach folgenabgeschlossen ist und da $x_k \in M \subset \overline{M}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, erhalten wir die Behauptung. ■

Definition 7.16. Sei X ein Banachraum und

$$\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$$

eine Abbildung. Dann heißt φ *schwach unterhalbstetig*, falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $x_n \rightarrow x$ schwach für $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

Satz 7.17. Sei X ein Banachraum und

$$\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$$

konvex und unterhalbstetig in der starken Topologie. Dann ist φ schwach unterhalbstetig.

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$A_\lambda := \{y \in X \mid \varphi(y) \leq \lambda\}$$

konvex (Lemma 4.27 (ii)) und abgeschlossen. Aus Satz 7.14 folgt, dass A_λ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ schwach folgenabgeschlossen ist. Seien

$$L := \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \quad \text{und} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}.$$

(Ein ähnliches Argument wie das folgende zeigt auch $-\infty < L$.) Dann sind unendlich viele Folgenglieder von $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ kleiner als $L + \varepsilon$ und damit liegen unendlich viele Folgenglieder von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A_{L+\varepsilon}$. Wir können also eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auswählen, so dass alle Folgenglieder dieser Teilfolge in $A_{L+\varepsilon}$ liegen. Weil $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen x konvergiert, muss dies auch für $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gelten. Da $A_{L+\varepsilon}$ schwach folgenabgeschlossen ist, folgt $x \in A_{L+\varepsilon}$. Weil dies für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, erhalten wir

$$x \in \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}} A_{L+\varepsilon} = A_L,$$

also $\varphi(x) \leq L = \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)$ wie gewünscht. Damit ist φ unterhalbstetig. ■

Bemerkung: Der Satz gilt auch für

$$\varphi: M \rightarrow (-\infty, \infty]$$

mit konvexem und abgeschlossenem $M \subset X$. (Setze z. B. φ durch ∞ auf X fort.)

Satz 7.18. Sei X ein reflexiver Banachraum und $M \subset X$ nicht leer, konvex und abgeschlossen. Weiter sei

$$\varphi: M \rightarrow (-\infty, \infty]$$

konvex und unterhalbstetig mit $D(\varphi) \neq \emptyset$ und, falls M nicht beschränkt ist:

$$\lim_{\substack{x \in M, \\ \|x\| \rightarrow \infty}} \varphi(x) = \infty,$$

wobei wir dies wie folgt auffassen:

$$\forall K \in \mathbb{R}_{>0} \exists R \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in M: \|x\| > R \implies \varphi(x) \geq K.$$

Dann nimmt φ sein Minimum an, d. h. es existiert ein $x_0 \in M$, so dass $\varphi(x_0) = \min_M \varphi$ gilt.

Beweis. Sei $m := \inf_M \varphi$. Es gilt $m < \infty$ (da $D(\varphi) \neq \emptyset$). Nun sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\varphi(x_k) \rightarrow m$ für $k \rightarrow \infty$. Nach Voraussetzung ist aber M beschränkt oder es gilt $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$, also muss $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt sein. Weil X reflexiv ist, gibt es also nach Satz 7.11 eine schwach konvergente Teilfolge von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Sei $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ solch eine Teilfolge mit Grenzwert x . Da M nach Satz 7.14 schwach folgenabgeschlossen ist, folgt $x \in M$. Nach Satz 7.17 ist φ schwach unterhalbstetig, also gilt:

$$\varphi(x) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \varphi(x_{k_i}) = m.$$

Wegen $x \in M$ gilt dann also

$$\varphi(x) = \inf_M \varphi.$$

■

7.19 (Initialtopologie). Sei X eine Menge und $(Y_i)_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Weiter sei $(\varphi_i: X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen. Wir betrachten:

Problem 1: Konstruiere eine Topologie auf X , so dass für alle $i \in I$ die Abbildung φ_i stetig ist. Falls möglich, finde eine Topologie \mathcal{T} , die aus wenigen offenen Mengen besteht (\mathcal{T} soll also „ökonomisch“ sein).

Bemerkung:

- (i) Wir können immer die diskrete Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ wählen, aber dies ist nicht sehr ökonomisch.
- (ii) Für alle $i \in I$ muss natürlich gelten:

$$W_i \subset Y_i \text{ offen} \implies \varphi_i^{-1}(W_i) \in \mathcal{T},$$

da sonst φ_i nicht stetig wäre. Fassen wir alle diese Mengen zusammen, so erhalten wir ein Mengensystem $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Problem 2: Ist X eine Menge und $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein System von Teilmengen von X , so finde die kleinste Topologie \mathcal{T} auf X , so dass U_λ offen ist für alle $\lambda \in \Lambda$.

Wir müssen ein System von Mengen finden, das stabil ist unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen.

Wir benutzen folgendes Vorgehen:

(i) Bilde endliche Schnitte

$$\bigcap_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda \quad \text{mit} \quad \Gamma \subset \Lambda \text{ endlich.}$$

Diese neue Familie nennen wir Φ . (Falls $\Gamma = \emptyset$, sei $\bigcap_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda = X$.)

(ii) Bilde beliebige Vereinigungen von Elementen in Φ und nenne dieses System \mathcal{T} .

Lemma 7.20. Das Mengensystem \mathcal{T} aus 7.19, Problem 2 (ii) ist stabil unter endlichen Durchschnitten.

(Beweis: selber oder in ein Topologiebuch schauen.)

Definition 7.21.

1. Wir nennen die Topologie, die wir durch den Prozess in 7.19 aus der Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ erhalten, die *die von $(\varphi_i)_{i \in I}$ erzeugte Topologie*.
2. Sei im Folgenden (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Wir nennen $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ eine *Basis der Topologie*, falls für alle Punkte $x \in X$ und alle Umgebungen U von x ein $A \in \mathcal{F}$ existiert mit $x \in A \subset U$.
3. Sei $x \in X$. Wir nennen $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{T}$ eine *Umgebungsbasis von x* , falls für alle Umgebungen U von x ein $A \in \mathcal{F}_x$ existiert mit $x \in A \subset U$.

Bemerkung: In der Konstruktion in 7.19 bilden die Mengen

$$\bigcap_{i \in J} \varphi_i^{-1}(W_i) \quad \text{für } J \subset I \text{ endlich und } W_i \subset Y_i \text{ offen}$$

eine Basis der Topologie \mathcal{T} .

Proposition 7.22. Sei $(\varphi_i)_{i \in I}$ wie in 7.19 und \mathcal{T} die erzeugte Topologie auf X . Weiter sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Dann gilt:

$$x_n \rightarrow x \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I: \varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(Beweis: selber.)

Definition 7.23 (Schwache Topologie). Sei X ein Banachraum. Die *schwache Topologie* \mathcal{T}_w auf X ist die von $(\varphi)_{\varphi \in X'}$ erzeugte Topologie.

Bemerkung: Mittels Hahn-Banach kann man zeigen, dass (X, \mathcal{T}_w) ein Hausdorffraum ist. Außerdem gilt der folgende Satz:

Satz 7.24. Sei X ein Banachraum. Sei für ein Tripel (n, z', ε) mit $n \in \mathbb{N}$, $z' \in (X')^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$U_{n,z',\varepsilon} := \{x \in X \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}: |z'_k(x)| < \varepsilon\}$$

(diese Mengen bilden eine Umgebungsbasis von $0 \in X$). Dann gilt:

$$\mathcal{T}_w = \{A \subset X \mid \forall x \in A \exists (n, z', \varepsilon): x + U_{n,z',\varepsilon} \subset A\}.$$

(Beweis: selber.)

Diese Umgebungen erlauben nur Kontrolle von endlich vielen Koordinaten (anders als bei der starken Topologie, bei der innerhalb eines Balls alle Koordinaten unter Kontrolle sind).

Bemerkung: Es ist \mathcal{T}_w die schwächste Topologie, so dass alle $x' \in X'$ noch stetig sind. Auf X' führe folgende Topologie ein, die wir \mathcal{T}'_w nennen: Für ein Tripel (n, z, ε) mit $n \in \mathbb{N}$, $z \in X^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ setze

$$U_{n,z,\varepsilon} := \{x' \in X' \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}: |x'(z_k)| < \varepsilon\}$$

und

$$\mathcal{T}'_w := \{A \subset X' \mid \forall x' \in A \exists (n, z, \varepsilon): x' + U_{n,z,\varepsilon} \subset A\}.$$

Es gilt: X' wird mit \mathcal{T}'_w zu einem topologischer Raum (*schwach-* Topologie*).

Satz 7.25 (Satz von Alaoglu). Sei X ein Banachraum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subset X'$ kompakt bezüglich der schwach-* Topologie auf X' .

Bemerkung: Ist X nicht separabel, so ist „kompakt“ im Allgemeinen nicht dasselbe wie „folgenkompakt“ bezüglich der schwach-* Topologie.

8 Spektrum für kompakte Operatoren

Ziel: Verallgemeinerung der Jordan'schen Normalform auf den unendlich-dimensionalen Fall.

Definition 8.1 (Kompakter Operator). Seien X, Y Banachräume über \mathbb{K} . Dann heißt $T \in L(X, Y)$ *kompakter (linearer) Operator*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (1) $\overline{T(B_1(0))}$ ist kompakt in Y
- (2) $\forall M \subset X: M \text{ beschränkt} \implies T(M) \text{ präkompakt in } Y$
- (3) Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X besitzt $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Satz: Die Bedingungen aus Definition 8.1 sind äquivalent.

Beweis.

„(1) \Rightarrow (2)“: Sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und $M \subset B_R(0)$. Dann ist $\overline{T(B_R(0))}$ nach Voraussetzung kompakt in Y . Dann ist auch die darin enthaltene abgeschlossene Menge $\overline{T(M)}$ kompakt und somit ist $T(M)$ relativ kompakt und damit präkompakt.

„(2) \Rightarrow (3)“: Sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\|x_n\| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{T(B_R(0))}$. Aber $\overline{T(B_R(0))}$ ist nach Voraussetzung präkompakt, also auch relativ kompakt, womit $\overline{T(B_R(0))}$ kompakt und damit auch folgenkompakt sein muss.

„(3) \Rightarrow (1)“: Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{T(B_1(0))}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei dann $x_n \in B_1(0) \subset X$ mit $\|y_n - Tx_n\| \leq 1/n$. Nach Voraussetzung existiert dann eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, so dass $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert; bezeichne $y \in Y$ den zugehörigen Grenzwert. Aus der Konstruktion der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt nun $y_{n_k} \rightarrow y$ für $k \rightarrow \infty$. Damit ist $\overline{T(B_1(0))}$ folgenkompakt, also auch kompakt. ■

Definition 8.2. Für Banachräume X, Y seien

$$K(X, Y) := \{T \in L(X, Y) \mid T \text{ ist kompakt}\} \quad \text{und} \quad K(X) := K(X, X).$$

In reflexiven Räumen gibt es folgende Charakterisierung kompakter Operatoren:

Lemma 8.3. Seien X, Y Banachräume und sei X reflexiv. Sei $T: X \rightarrow Y$ linear. Dann gilt:

$$T \in K(X, Y) \iff T \text{ vollstetig,}$$

wobei T *vollstetig* ist, falls gilt: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \rightarrow x$ in X für $n \rightarrow \infty$, so gilt $Tx_n \rightarrow Tx$ stark in Y für $n \rightarrow \infty$.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Da schwach konvergente Folgen nach Lemma 7.6 (5) beschränkt sind, ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Da $\overline{T(B_1(0))}$ nach Voraussetzung kompakt ist, existiert ein $y \in Y$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, so dass $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ stark gegen y konvergiert. Für $y' \in Y'$ ist $z \mapsto y'(Tz)$ eine Abbildung in X' , also gilt:

$$y'(Tx_{n_k}) \rightarrow y'(Tx) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt $Tx_{n_k} \rightarrow Tx$ für $k \rightarrow \infty$. Da starke Konvergenz auch schwache Konvergenz (gegen denselben Grenzwert) impliziert, gilt $y = Tx$. Also gilt $Tx_{n_k} \rightarrow Tx$ stark für $k \rightarrow \infty$. Das gleiche Argument gilt für jede Teilfolge. Daraus folgt, dass die gesamte Folge konvergiert.

„ \Leftarrow “: Aus Vollstetigkeit folgt Stetigkeit. Also gilt $T \in L(X, Y)$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X . Nach Satz 7.11 existiert dann eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \rightarrow x \in X$ für $k \rightarrow \infty$. Da T nach Voraussetzung vollstetig ist, gilt dann aber

$$Tx_{n_k} \rightarrow Tx \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

also folgt mit der dritten Charakterisierung in Definition 8.1 die Behauptung. ■

Lemma 8.4. Seien X, Y Banachräume.

- (i) Sei $T \in L(X, Y)$ mit $\dim R(T) < \infty$. Dann folgt $T \in K(X, Y)$.
- (ii) Sei $P \in P(X)$ ein Projektor. Dann gilt:

$$P \in K(X) \iff \dim R(P) < \infty.$$

Beweis. (i) Mit $R := \|T\|$ gilt:

$$\overline{T(B_1(0))} \subset \overline{B_R(0)}.$$

Die Teilmenge $\overline{B_R(0)} \cap R(T)$ ist ein abgeschlossener Ball im endlich dimensionalen Raum $R(T)$, also folgt mit Heine-Borel (Satz 7.4), dass sie auch kompakt ist. Daraus folgt die Kompaktheit von $\overline{T(B_1(0))}$.

- (ii) „ \Leftarrow “ folgt aus (i).
- „ \Rightarrow “: Es gilt

$$\overline{B_1(0)} \cap R(P) \subset \overline{P(B_1(0))}.$$

Damit ist $\overline{B_1(0)} \cap R(P)$ kompakt und aus Heine-Borel (Satz 7.4) folgt, dass $R(P)$ endlich dimensional ist. ■

Lemma 8.5. Seien X, Y, Z Banachräume und $T_1 \in L(X, Y)$ sowie $T_2 \in L(Y, Z)$. Ist dann T_1 oder T_2 kompakt, so ist $T_2 T_1$ kompakt.

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X . Da T_1 stetig ist, ist $(T_1 x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt in Y . Falls T_2 kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(T_2 T_1 x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Ist T_1 kompakt, so existiert eine konvergente Teilfolge $(T_1 x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Weil T_2 stetig ist, konvergiert dann auch $(T_2 T_1 x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. ■

Definition 8.6 (Spektrum). Sei X ein Banachraum über \mathbb{K} und $T \in L(X)$.

(i) Die *Resolventenmenge* von T sei

$$\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid N(\lambda \text{Id} - T) = \{0\} \wedge R(\lambda \text{Id} - T) = X\}.$$

(Im endlich-dimensionalen Fall folgt eine der Bedingungen aus dieser Definition aus der jeweils anderen. Im unendlich-dimensionalen muss dies *nicht* gelten!)

Das *Spektrum* von T ist

$$\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \varrho(T).$$

Das Spektrum kann zerlegt werden in das *Punktspektrum*

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda \text{Id} - T) \neq \{0\}\},$$

das *kontinuierliche Spektrum*

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda \text{Id} - T) = \{0\} \wedge R(\lambda \text{Id} - T) \neq X \wedge \overline{R(\lambda \text{Id} - T)} = X\}$$

und das *Residualspektrum*

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda \text{Id} - T) = \{0\} \wedge \overline{R(\lambda \text{Id} - T)} \neq X\}.$$

Bemerkung 8.7. (i) Es gilt $\lambda \in \varrho(T)$ genau dann, wenn $(\lambda \text{Id} - T): X \rightarrow X$ bijektiv ist. Nach dem Satz von der inversen Abbildung (5.10) ist dies äquivalent zur Existenz von

$$R(\lambda, T) := (\lambda \text{Id} - T)^{-1} \in L(X).$$

Wir nennen $R(\lambda, T)$ *Resolvente* von T und die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ die *Resolventenfunktion* von T .

(ii) Zu $\lambda \in \sigma_p(T)$ ist äquivalent: Es gibt ein $x \in X \setminus \{0\}$ mit $Tx = \lambda x$. Dann heißt λ *Eigenwert* und x *Eigenvektor* zum *Eigenwert* λ .

(iii) Wir nennen $N(\lambda \text{Id} - T)$ den *Eigenraum* von T zum *Eigenwert* λ .

(iv) Wir sagen $Y \subset X$ ist *T-invariant*, falls $T(Y) \subset Y$ gilt. Der Eigenraum zu einem Eigenwert ist stets *T-invariant*.

Satz 8.8. Sei X ein Banachraum über \mathbb{K} und $T \in L(X)$. Dann ist $\varrho(T)$ offen und die Resolventenfunktion $R(\cdot, T)$ ist eine analytische Abbildung von $\varrho(T)$ nach $L(X)$. Weiterhin gilt für alle $\lambda \in \varrho(T)$:

$$\|R(\lambda, T)\|^{-1} \leq \text{dist}(\lambda, \sigma(T)).$$

Dass $R(\cdot, T)$ analytisch ist, bedeutet dabei: Für alle $\lambda \in \varrho(T)$ existiert ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_r(\lambda) \subset \varrho(T)$ und eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L(X)$, so dass gilt:

$$\forall \mu \in B_r(\lambda): \quad R(\mu, T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\mu - \lambda)^n.$$

Beweis. Sei $\lambda \in \varrho(T)$. Dann gilt für alle $\mu \in \mathbb{K}$:

$$\mu \text{Id} - T = (\lambda \text{Id} - T) \underbrace{(\text{Id} - (\lambda - \mu)R(\lambda, T))}_{=: S(\mu)}.$$

Indem wir die Neumann'sche Reihe (Satz 3.7) benutzen, folgt, dass $S(\mu)$ invertierbar ist, falls

$$\|(\lambda - \mu)R(\lambda, T)\| < 1 \quad \text{bzw.} \quad |\lambda - \mu| < \|R(\lambda, T)\|^{-1}$$

gilt. Sei $r := \|R(\lambda, T)\|^{-1}$ und $\mu \in B_r(\lambda)$. Nach den obigen Argumenten ist dann $\mu \text{Id} - T$ invertierbar und damit gilt $\mu \in \varrho(T)$. Wir erhalten mit der Reihendarstellung von $S(\mu)$ aus Satz 3.7:

$$R(\mu, T) = (S(\mu))^{-1} R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (-1)^n R(\lambda, T)^{n+1}.$$

Außerdem gilt $B_r(\lambda) \subset \varrho(T)$, woraus $\text{dist}(\lambda, \sigma(T)) \geq r = \|R(\lambda, T)\|^{-1}$ folgt. ■

Bemerkung: Weil $\varrho(T)$ offen ist, ist $\sigma(T)$ abgeschlossen.

Definition 8.9. Sei X ein Banachraum und $T \in L(X)$. Sei

$$r(T) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Wir nennen $r(T)$ den *Spektralradius* von T .

Die Gleichheit in dieser Definition folgt dabei aus dem folgenden Lemma:

Lemma 8.10. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} mit

$$0 \leq a_{n+m} \leq a_n a_m$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$.

Beweis. Sei $a := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$ und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[N]{a_N} < a + \varepsilon$ und setze

$$b_\varepsilon := \max\{a_1, \dots, a_N\}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $k \in \mathbb{N}$ und $r \in \{1, \dots, N\}$ mit $n = kN + r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= (a_{kN+r})^{1/n} \leq (a_N^k a_r)^{1/n} \\ &\leq (a + \varepsilon)^{kN/n} b_\varepsilon^{1/n} = (a + \varepsilon)^{1+r/n} a_r^{1/n} \\ &\leq (a + \varepsilon)^{1+N/n} b_\varepsilon^{1/n} \\ &\rightarrow a + \varepsilon \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq a = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$ und daraus folgt die Behauptung. ■

Satz 8.11. Sei X ein Banachraum über \mathbb{K} und sei $T \in L(X)$. Dann gilt:

- (a) $\forall \lambda \in \sigma(T): |\lambda| \leq r(T)$
- (b) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existiert ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T)$, d. h. es gilt:

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

- (c) $\sigma(T)$ ist kompakt.
- (d) $\sigma(T) \neq \emptyset$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Beweis. (c) Sei $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Mithilfe der Neumann'schen Reihe (Satz 3.7) folgt, dass $\text{Id} - T/\lambda$ invertierbar ist, falls $\|T/\lambda\| < 1$ bzw. $|\lambda| > \|T\|$ gilt. Außerdem gilt dann

$$R(\lambda, T) = \lambda^{-1}(\text{Id} - T/\lambda)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n, \quad (*)$$

was wir später benötigen werden. Wir erhalten also

$$s := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \leq \|T\|.$$

Nach Definition gilt $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \varrho(T)$ und $\varrho(T)$ ist nach Satz 8.8 offen, also ist $\sigma(T)$ abgeschlossen. Aus Abgeschlossenheit und Beschränktheit folgt nun mit dem Satz von Heine-Borel für endlich-dimensionale euklidische Räume, dass $\sigma(T)$ kompakt ist.

- (a) Seien $\lambda \in \sigma(T)$ und $m \in \mathbb{N}$ und sei s wie im Beweis von (c). Es gilt

$$\lambda^m \text{Id} - T^m = (\lambda \text{Id} - T) S_m(T) = S_m(T) (\lambda \text{Id} - T)$$

mit

$$S_m(T) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^{m-1-i} T^i.$$

Wäre nun $\lambda^m \text{Id} - T^m$ bijektiv, so müsste $\lambda \text{Id} - T$ nach jeweils einer der obigen Gleichheiten surjektiv und injektiv, d. h. auch bijektiv sein. Da dies nach Voraussetzung nicht der Fall ist, kann also auch $\lambda^m \text{Id} - T^m$ nicht bijektiv sein. Daraus erhalten wir (mit dem Beweis von (c)):

$$\lambda^m \in \sigma(T^m) \implies |\lambda^m| \leq \|T^m\| \implies |\lambda| \leq \|T^m\|^{1/m}.$$

Dies zeigt:

$$s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = r(T).$$

(d) Gelte $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir nehmen an, dass $\sigma(T) = \emptyset$ gilt. Dann ist die Resolventenfunktion

$$\lambda \mapsto R_\lambda := R(\lambda, T) = (\lambda \text{Id} - T)^{-1}$$

auf ganz \mathbb{C} definiert und lokal in eine Potenzreihe entwickelbar (mittels der Neumann'schen Reihe). Sei $\ell \in (L(X))'$. Die Funktion $\lambda \mapsto \ell(R_\lambda)$ hat lokal um $\lambda \in \mathbb{K}$ die Gestalt

$$\mu \mapsto \ell(R_\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ell(R_\lambda^{n+1}) (\mu - \lambda)^n \quad (**)$$

(vgl. Beweis von Satz 8.8). Die Funktion $\lambda \mapsto \ell(R_\lambda)$ ist somit analytisch. Sie ist außerdem beschränkt, denn: Für $|\lambda| > 2\|T\|$ gilt nach (*)

$$|\ell(R_\lambda)| \leq \|\ell\| |\lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T\|^n}{|\lambda|^n} \leq \|\ell\| \frac{1}{\|T\|}$$

und auf $\overline{B_{2\|T\|}(0)} \subset \mathbb{C}$ ist sie beschränkt, da sie stetig ist. Aus dem Satz von Liouville folgt: Die Funktion $\lambda \mapsto \ell(R_\lambda)$ ist konstant. Dies kann aber für $\lambda = 0$ in (**) nur gelten, falls alle Koeffizienten bis auf den nullten verschwinden. Insbesondere gilt somit:

$$0 = \ell(R_0^2) = \ell((T^2)^{-1}).$$

Da $\ell \in (L(X))'$ beliebig war, folgt nun mithilfe des Satzes von Hahn-Banach (zum Beispiel wie im Beweis von Lemma 7.6 (1))

$$(T^2)^{-1} = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, d. h. die Annahme muss falsch gewesen sein, d. h. es gilt doch $\sigma(T) \neq \emptyset$.

(b) Gelte $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir zeigen zunächst:

$$s := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = r(T).$$

Aus (a) folgt: $s \leq r(T)$. Sei $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| > s$ und sei $\ell \in (L(X))'$. Daraus, dass $R(\cdot, T)$ analytisch ist, folgt, dass auch $\ell \circ R(\cdot, T): \varrho(T) \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch ist. Für $\tilde{\mu} \in \varrho(T)$ mit $|\tilde{\mu}| > \|T\|$ wissen wir nach (*):

$$\ell(R(\tilde{\mu}, T)) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(T^n \cdot (\tilde{\mu})^{-(n+1)}).$$

Wählen wir nun $\tilde{\mu}$ geeignet (so dass $\mu \in B_r(\tilde{\mu}) \subset \varrho(T)$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt), so folgt mit dem Potenzreihenentwicklungssatz (bzw. aus der Cauchyformel), dass diese Reihe auch für μ (statt $\tilde{\mu}$) konvergiert. Dann muss aber $(\ell(T^n/\mu^{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in \mathbb{C} sein, d. h. es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(T^n/\mu^{n+1}) = 0.$$

Weil $\ell \in L(X)'$ beliebig war, folgt:

$$T^n/\mu^{n+1} \rightharpoonup 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also ist $(T^n/\mu^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt (Lemma 7.6 (5)), etwa durch $K \in \mathbb{R}_{>0}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\|T^n\|^{1/n} \leq K^{1/n} |\mu|^{(n+1)/n},$$

woraus

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} K^{1/n} |\mu|^{(n+1)/n} = |\mu|$$

und damit auch $r(T) \leq s$ folgt. Weil $\sigma(T)$ nach (c) kompakt und $|\cdot|$ stetig ist, wird das Supremum in $r(T) = s = \sup_{\sigma(T)} |\cdot|$ angenommen und damit ist alles gezeigt. ■

Bemerkungen 8.12.

- (i) Ist $\dim X < \infty$, so gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.
- (ii) Ist $\dim X = \infty$ und $T \in K(X)$, so gilt $0 \in \sigma(T)$. Im Allgemeinen ist 0 aber *kein* Eigenwert.

Beweis. (i) Sei $\lambda \in \sigma(T)$. Dann ist $\lambda \text{Id} - T$ nicht bijektiv. Da X endlich-dimensional ist, folgt, dass $\lambda \text{Id} - T$ auch nicht injektiv ist. Damit folgt $\lambda \in \sigma_p(T)$.

- (ii) Sei $T \in K(X)$ und $0 \in \varrho(T)$. Dann gilt $T^{-1} \in L(X)$ und nach Lemma 8.5 gilt:

$$\text{Id} = T^{-1}T \in K(X).$$

Heine-Borel (Satz 7.4) liefert: $\dim X < \infty$. Dies impliziert, dass $0 \in \varrho(T)$ nur für $\dim X < \infty$ möglich ist. ■

Definition 8.13 (Fredholm-Operator). Seien X, Y Banachräume und sei $A \in L(X, Y)$. Dann heißt A *Fredholm-Operator*, falls gilt:

- (1) $\dim N(A) < \infty$
- (2) $R(A)$ ist abgeschlossen
- (3) $\text{codim } R(A) < \infty$

Der *Index von A* ist dann definiert als

$$\text{ind } A := \dim N(A) - \text{codim } R(A).$$

Definition 8.14 (Kodimension). Sei Y ein Banachraum.

- (i) Sei $Z \subset Y$ ein abgeschlossener Unterraum. Wir sagen Z *besitzt endliche Kodimension*, falls ein Unterraum $Y_0 \subset Y$ existiert mit $\dim Y_0 < \infty$ und $Y = Z \oplus Y_0$.
- (ii) Die *Kodimension von Z* ist dann definiert durch $\text{codim } Z := \dim Y_0$.

Lemma 8.15. Sei Y ein Banachraum und $Z \subset Y$ ein abgeschlossener Unterraum. Besitzt Z endliche Kodimension, so ist $\text{codim } Z$ eindeutig bestimmt.

Beweisskizze. Sei $Y_0 \subset Y$ ein Unterraum mit $Y = Z \oplus Y_0$ und $\dim Y_0 < \infty$. Nach Voraussetzung ist Z abgeschlossen und Y_0 ist endlich-dimensional, also auch abgeschlossen. Nach Satz 5.14 existiert also ein Projektor $P \in P(Y)$ auf Y_0 mit $Z = N(P)$.

Sei nun $Y_1 \subset Y$ ein Unterraum mit $Z \cap Y_1 = \{0\}$. Dann ist $S := P|_{Y_1} : Y_1 \rightarrow Y_0$ linear und injektiv. Daraus folgt: Y_1 ist endlich-dimensional mit $\dim Y_1 \leq \dim Y_0$ und es gilt Gleichheit genau dann, wenn $Y = Z \oplus Y_1$. (Siehe Übungen.)

Ist $Y = Z \oplus Y_1$, so tausche die Rollen von Y_1 und Y_0 . Es folgt: $\dim Y_1 = \dim Y_0$. (Außerdem ist dann S bijektiv.)

■

Bemerkung: Eine große Klasse von Fredholm-Operatoren ergibt sich aus kompakten Störungen der Identität, d. h. $A = \text{Id} - T$ für $T \in K(X)$.

Satz 8.16. Sei X ein Banachraum über \mathbb{K} und sei $T \in K(X)$. Dann ist $A := \text{Id} - T$ ein Fredholm-Operator mit Index 0. Genauer ergibt sich dies aus den folgenden Einzelaussagen:

- (1) $\dim N(A) < \infty$
- (2) $R(A)$ ist abgeschlossen
- (3) $N(A) = \{0\} \implies R(A) = X$
- (4) $R(A) = X \implies N(A) = \{0\}$
- (5) $\text{codim } R(A) = \dim N(A)$

Beweis. (1) Für $x \in X$ gilt:

$$x \in N(A) \iff Ax = 0 \iff x = Tx.$$

Daher gilt

$$B_1(0) \cap N(A) \subset T(B_1(0)).$$

Weil T kompakt ist, ist die Einheitskugel in $N(A)$ also präkompakt. Nach Heine-Borel (Satz 7.4) ist damit $N(A)$ endlich-dimensional.

- (2) Sei $x \in \overline{R(A)}$ und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $Ax_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ schon

$$\|x_n\| \leq 2d_n \quad \text{mit} \quad d_n := \text{dist}(x_n, N(A))$$

gilt, denn: Zu $n \in \mathbb{N}$ können wir $a_n \in N(A)$ mit $\|x_n - a_n\| \leq 2d_n$ wählen und dann $(x_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ betrachten. Wir zeigen unten, dass $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, also ist auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Wegen $T \in K(X)$ existieren dann eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und ein $y \in X$ mit

$$Tx_{n_k} \rightarrow y \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Nach Definition von A und Wahl von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt dann:

$$x_{n_k} = Ax_{n_k} + Tx_{n_k} \rightarrow x + y \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Stetigkeit von A und Eindeutigkeit des Grenzwerts implizieren $A(x + y) = x$, d. h. x liegt im Bild von A . Es folgt $\overline{R(A)} = R(A)$.

Es bleibt die Beschränktheit von $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu zeigen. Angenommen es gibt eine Teilfolge von $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche gegen ∞ konvergiert. (Um die Notation übersichtlich zu halten, bezeichnen wir diese weiterhin mit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.) Ohne Einschränkung gilt dann $d_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir können somit

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} := (x_n/d_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

setzen. Dann ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und somit existiert (wegen $T \in K(X)$) eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und ein $y \in X$ mit $Ty_{n_k} \rightarrow y \in X$ für $k \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$y_{n_k} - Ty_{n_k} = Ay_{n_k} = \frac{Ax_{n_k}}{d_{n_k}} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

denn $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und $(d_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ geht gegen unendlich. Aus der Stetigkeit von A folgt $Ay = 0$ und damit gilt $\text{dist}(y, N(A)) = 0$. Weil $\text{dist}(\cdot, N(A))$ stetig ist, folgt:

$$1 = \text{dist}(x_{n_k}, N(A))/d_{n_k} = \text{dist}(y_{n_k}, N(A)) \rightarrow \text{dist}(y, N(A)) = 0,$$

ein Widerspruch.

- (3) Sei A injektiv. Angenommen es existiert ein $x \in X \setminus R(A)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt zunächst

$$A^n x \in R(A^n) \setminus R(A^{n+1}),$$

denn: Falls $A^n x = A^{n+1} y$ für ein $y \in X$ gilt, so folgt $A^n(x - Ay) = 0$ und aus der Injektivität von A folgt dann $x = Ay \in R(A)$, was der Wahl von x widerspricht. Weiter gilt

$$A^n = (\text{Id} - T)^n = \text{Id} - T(\dots)$$

und weil T kompakt ist, ist nach Lemma 8.5 auch $T(\dots)$ kompakt. Aus (2) folgt dann, dass $R(A^n)$ abgeschlossen ist. Aus den bisherigen Überlegungen folgt $\text{dist}(A^n x, R(A^{n+1})) > 0$, weswegen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $a_{n+1} \in R(A^{n+1})$ mit

$$0 < \|A^n x - a_{n+1}\| \leq 2 \text{dist}(A^n x, R(A^{n+1}))$$

wählen und

$$y_n := \frac{A^n x - a_{n+1}}{\|A^n x - a_{n+1}\|}$$

setzen können. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\text{dist}(y_n, R(A^{n+1})) \geq \frac{1}{2},$$

denn für alle $y \in R(A^{n+1})$ gilt

$$\|y_n - y\| = \frac{\|A^n x - (a_{n+1} + \|A^n x - a_{n+1}\| y)\|}{\|A^n x - a_{n+1}\|} \geq \frac{\text{dist}(A^n x, R(A^{n+1}))}{\|A^n x - a_{n+1}\|} \geq \frac{1}{2}.$$

Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt dann:

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|y_n - \underbrace{(Ay_n + y_m - Ay_m)}_{\in R(A^{n+1})}\| \geq \frac{1}{2}.$$

Das heißt aber, dass $(Ty_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzen kann, im Widerspruch zur Kompaktheit von T . Also war die Annahme falsch und es gilt doch $X = R(A)$.

- (4) Sei A surjektiv. Angenommen A ist nicht injektiv. Dann finden wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $x_1 \in N(A) \setminus \{0\}$ und $Ax_{n+1} = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für diese gilt

$$x_{n+1} \in N(A^{n+1}) \setminus N(A^n),$$

denn $A^{n+1}x_{n+1} = A^n x_n = Ax_1 = 0$ und $A^n x_{n+1} = A^{n-1}x_n = Ax_2 = x_1 \neq 0$. Es gilt offensichtlich $N(A^n) \subset N(A^{n+1})$ und mit dem Satz vom fast orthogonalen Element (7.3) erhalten wir: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $y_{n+1} \in N(A^{n+1})$ mit $\|y_{n+1}\| = 1$ und $\text{dist}(y_{n+1}, N(A^n)) \geq \frac{1}{2}$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt dann:

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|y_n - \underbrace{(Ay_n + y_m - Ay_m)}_{\in N(A^{n-1})}\| \geq \frac{1}{2},$$

im Widerspruch zur Kompaktheit von T . Also muss doch $N(A) = \{0\}$ gelten.

- (5) Sei $n := \dim N(A)$. Wir zeigen nun per Induktion über n , dass $n = \text{codim } R(A)$ gilt. Für $n = 0$, siehe oben. Im Fall $n \geq 1$, wähle $x_0 \in N(A) \setminus \{0\}$ und einen Unterraum $N_0 \subset N(A)$ mit $\dim N_0 = n - 1$ und

$$N(A) = \text{span}\{x_0\} \oplus N_0.$$

Nach (2) und (4) gilt: $R(A)$ ist abgeschlossen und $R(A) \neq X$. Sei $y_0 \in X \setminus R(A)$ und

$$Y_0 := \text{span}\{y_0\} \oplus R(A) \subset X.$$

Nach (dem Beweis von) Korollar 4.16 gibt es ein $x' \in X'$ mit $x'(x_0) = 1$ und $x'|_{N_0} = 0$. Definiere $T_0 x := Tx + x'(x)y_0$ und $A_0 := \text{Id} - T_0$, also $A_0 x = Ax - x'(x)y_0$. Wir schließen:

$$\begin{aligned} x \in N(A_0) &\iff Ax = x'(x)y_0 \iff x \in N(A) \wedge x'(x) = 0 \\ &\iff x \in N_0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt $R(A_0) = Y_0$, denn: $A_0x_0 = -y_0$ und für $y \in R(A)$ mit $Ax = y$ für ein $x \in X$ gilt:

$$A_0(x - x'(x)x_0) = Ax + 0 = y.$$

Weiter ist T_0 kompakt, also gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$$n - 1 = \dim N(A_0) = \operatorname{codim} R(A_0).$$

Es folgt:

$$\operatorname{codim} R(A) = \operatorname{codim} R(A_0) + 1 = n = \dim N(A).$$

■

Satz 8.17 (Spektralsatz für kompakte Operatoren). Sei X ein ∞ -dimensionaler Banachraum über \mathbb{K} und sei $T \in K(X)$. Dann gilt:

- (a) $0 \in \sigma(T)$
- (b) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ besteht nur aus Eigenwerten, d. h. $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T)$.
- (c) Es tritt einer der folgenden Fälle ein:
 - (1) $\sigma(T) = \{0\}$
 - (2) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ ist endlich
 - (3) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ besteht aus einer Folge, die gegen 0 konvergiert
- (d) Jeder Eigenwert verschieden von 0 hat einen endlich-dimensionalen Eigenraum.

Beweis. (a) Siehe Bemerkung 8.12 (ii).

- (b) Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Angenommen λ ist kein Eigenwert von T , dann gilt $N(\operatorname{Id} - T/\lambda) = N(\lambda \operatorname{Id} - T) = \{0\}$. Satz 8.16 liefert: $R(\operatorname{Id} - T/\lambda) = X$. Dies impliziert $\lambda \in \varrho(T)$, im Widerspruch zu $\lambda \in \sigma(T)$.
- (c) Zu $\lambda \in \mathbb{K}$ definiere $A_\lambda := \lambda \operatorname{Id} - T$. Entweder es gilt einer der ersten beiden Fälle, oder aber es gilt weder $\sigma(T) = \{0\}$ noch $|\sigma(T) \setminus \{0\}| < \infty$. In diesem Fall finden wir aber eine Folge von Eigenwerten $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\sigma(T) \setminus \{0\}$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $e_n \in X \setminus \{0\}$ als Eigenvektor zu λ_n ; dann gilt

$$A_{\lambda_n} e_n = 0.$$

Weiter sei $X_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir behaupten, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\dim X_n = n, \quad \text{d. h. } e_1, \dots, e_n \text{ sind linear unabhängig.}$$

Falls e_1, \dots, e_{n-1} linear unabhängig und e_1, \dots, e_n nicht, so gilt für geeignete $\alpha_k \in \mathbb{K}$:

$$e_n = \sum_{k < n} \alpha_k e_k.$$

Dann folgt:

$$0 = (\lambda_n \text{Id} - T) e_n = \sum_{k < n} \alpha_k (\lambda_n - \lambda_k) e_k$$

und somit $\alpha_k = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Daraus ergibt sich $e_n = 0$, was nicht sein kann.

Jetzt wählen wir mit Hilfe des Satzes vom fast orthogonalen Element (7.3) für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X_n$ mit

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \text{dist}(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$x_n = \alpha_n e_n + \tilde{x}_n$$

für $\alpha_n \in \mathbb{K}$ und $\tilde{x}_n \in X_{n-1}$ und damit

$$T(x_n/\lambda_n) = x_n - \frac{1}{\lambda_n} A_{\lambda_n} x_n = x_n - \frac{1}{\lambda_n} A_{\lambda_n} \tilde{x}_n.$$

Weil X_{n-1} aber T -invariant ist, gilt $A_{\lambda_n} \tilde{x}_n \in X_{n-1}$ und für $m < n$ somit $T(x_m/\lambda_m) \in X_{n-1}$. Also erhalten wir für alle $m < n$:

$$\|T(x_n/\lambda_n) - T(x_m/\lambda_m)\| = \|x_n - \underbrace{(\dots)}_{\in X_{n-1}}\| \geq \frac{1}{2}.$$

Also kann die Folge $(T(x_n/\lambda_n))_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzen. Weil aber T kompakt ist, kann damit $(x_n/\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine beschränkte Teilfolge enthalten, d. h. es gilt

$$\|x_n/\lambda_n\| \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|x_n\| = 1$, also muss $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein. Damit ist 0 der einzig mögliche Häufungspunkt von $\sigma(T) \setminus \{0\}$. Insbesondere ist $\sigma(T) \setminus B_r(0)$ endlich für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Damit ist $\sigma(T) \setminus \{0\}$ (als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen) abzählbar.

- (d) Dies folgt aus Satz 8.16, denn: Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist $\text{Id} - T/\lambda$ ein Fredholm-Operator mit $N(\text{Id} - T/\lambda) = N(\lambda \text{Id} - T)$. ■

8.18 (Fredholm-Alternative). Sei $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $T \in K(X)$. Dann gilt die *Fredholm-Alternative*: Entweder ist $\lambda x - Tx = y$ eindeutig lösbar für alle $y \in X$, oder aber $\lambda x - Tx = 0$ hat nicht-triviale Lösungen (also von 0 verschiedene Lösungen).

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lambda x - Tx = 0 \text{ eindeutig lösbar} &\iff N(\lambda \text{Id} - T) = \{0\} \\ &\iff R(\lambda \text{Id} - T) = X \\ &\iff \lambda x - Tx = y \text{ ist lösbar} \end{aligned}$$
■

9 Spektralsatz für kompakte normale Operatoren

Wir erinnern an den Begriff der adjungierten Abbildung: Seien X und Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$, so ist $T' : Y' \rightarrow X'$ gegeben durch $(T'y')(x) = y'(Tx)$ für alle $x \in X, y' \in Y'$. (Siehe auch Definition 5.15.)

Im Folgenden bezeichnet J_H für einen Hilbertraum H die Isometrie $H \rightarrow H'$ aus dem Rieszschen Darstellungssatz (6.5). (*Achtung:* dies ist nicht zu verwechseln mit der Isometrie aus Satz 4.18.)

Definition 9.1 (Hilbertraum-Adjungierte). Seien X, Y Hilberträume. Dann heißt der Operator

$$T^* := J_X^{-1} T' J_Y \in L(Y, X)$$

Hilbertraum-Adjungierte (von T). Sei nun $X = Y$. Gilt $T = T^*$, so nennen wir T *selbstadjungiert*. Gilt $TT^* = T^*T$, so nennen wir T *normal*.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightleftharpoons[T^*]{T} & Y \\ J_X \downarrow & & \downarrow J_Y \\ X' & \xleftarrow{T'} & Y' \end{array}$$

Lemma 9.2. Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Dann ist T^* charakterisiert durch folgende Eigenschaft: für alle $x \in X, y \in Y$ gilt

$$\langle x, T^*y \rangle_X = \langle Tx, y \rangle_Y.$$

Beweis. Seien $x \in X, y \in Y$. Dann gilt:

$$\langle x, T^*y \rangle_X = \langle x, J_X^{-1} T' J_Y y \rangle_X = (T' J_Y y)(x) = (J_Y y)(Tx) = \langle Tx, y \rangle_Y.$$

■

Lemma 9.3. Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $T \in L(H)$ normal. Ist $x \in H$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist x auch ein Eigenvektor von T^* zum Eigenwert $\bar{\lambda}$.

Beweis. Weil T normal ist, ist auch $(\lambda \text{Id} - T)$ normal, denn $(\lambda \text{Id} - T)^* = \bar{\lambda} \text{Id} - T^*$, also

$$\begin{aligned} (\lambda \text{Id} - T)^*(\lambda \text{Id} - T) &= |\lambda|^2 \text{Id} - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + T^*T \\ &= |\lambda|^2 \text{Id} - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + TT^* = (\lambda \text{Id} - T)(\lambda \text{Id} - T)^*. \end{aligned}$$

Es gilt weiter $\|T^*x\| = \|Tx\|$ für alle $x \in H$, denn:

$$\langle T^*x, T^*x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \overline{\langle x, T^*Tx \rangle} = \overline{\langle Tx, Tx \rangle} = \langle Tx, Tx \rangle.$$

Wegen $(\lambda \text{Id} - T)^* = \bar{\lambda} \text{Id} - T^*$, folgt für $x \in H$ mit $Tx = \lambda x$:

$$0 = \|Tx - \lambda x\| = \|(\lambda \text{Id} - T)^*x\| = \|(\bar{\lambda} \text{Id} - T^*)x\|.$$

Dies zeigt die Behauptung. ■

Bemerkung: Im vorangehenden Beweis haben wir gesehen: Ist H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ normal, so gilt:

$$\forall x \in H: \quad \|T^*x\| = \|Tx\|.$$

Lemma 9.4. Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{C} und $T \in L(H)$ normal. Dann gilt:

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} = \|T\|.$$

Beweis. Wir wissen schon, dass

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \|T\|$$

gilt (Satz 8.11). Wir zeigen nun für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\|T^m\| \geq \|T\|^m,$$

woraus dann durch Wurzelziehen und Grenzwertbildung die Behauptung folgt. Für $m = 1$ ist die Ungleichung klar. Sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|T^m x\|^2 &= \langle T^m x, T^m x \rangle = \langle T^{m-1} x, T^* T^m x \rangle \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|T^{m-1} x\| \|T^* T^m x\| = \|T^{m-1} x\| \|T^{m+1} x\| \\ &\leq \|T^{m-1}\| \|T^{m+1}\| \|x\|^2 \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\|T^m\|^2 \leq \|T^{m-1}\| \|T^{m+1}\| \leq \|T\|^{m-1} \|T^{m+1}\|.$$

Mit $\|T^1\| \geq \|T\|^1$ erhalten wir so induktiv:

$$\|T^{m+1}\| \geq \frac{\|T^m\|^2}{\|T\|^{m-1}} \geq \|T\|^{2m-(m-1)} = \|T\|^{m+1}.$$
■

Satz 9.5. Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Dann gilt:

- (a) Ist T selbstadjungiert und kompakt, so gilt $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.
- (b) Ist T normal, so haben verschiedene Eigenwerte zueinander orthogonale Eigenvektoren.

Beweis. (a) Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Dann liefert der Spektralsatz (8.17), dass λ ein Eigenwert sein muss. Also existiert ein $x \in H \setminus \{0\}$ mit $Tx = \lambda x$. Somit folgt:

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Wegen $x \neq 0$ gilt $\langle x, x \rangle > 0$ und damit erhalten wir $\lambda = \bar{\lambda}$, also muss $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten.

- (b) Seien $\lambda, \mu \in \sigma(T)$ verschiedene Eigenwerte von T mit Eigenvektoren x bzw. y aus H . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \langle x, y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle \\ &= \langle x, T^* y \rangle = \langle x, \bar{\mu} y \rangle = \mu \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ muss also $\langle x, y \rangle = 0$ gelten. ■

Bemerkung: Satz 9.5 (a) gilt auch ohne die Voraussetzung, dass T kompakt ist, ist dann allerdings schwieriger zu beweisen.

Satz 9.6. Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in H, \\ \|x\| \leq 1}} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Beweis. „ \geq “ folgt aus $\forall x \in H: |\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \|x\| \|x\|$.

„ \leq “: Setze $M := \sup_{x \in H, \|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$. Seien $x, y \in H$. Aus $T = T^*$ folgt:

$$\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle = 2\langle Tx, y \rangle + 2\langle Ty, x \rangle = 4 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle.$$

Die Parallelogrammidentität (Satz 2.8 (3)) liefert:

$$4 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle \leq M (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Daraus folgt für $x, y \in H$ mit $\|x\|, \|y\| \leq 1$:

$$\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle \leq M.$$

Indem wir y mit einem skalaren Faktor (aus \mathbb{K}) multiplizieren, können wir annehmen, dass $\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle = |\langle Tx, y \rangle|$ gilt. Für $Tx \neq 0$ ergibt dies mit $y = Tx/\|Tx\|$ also

$$M \geq |\langle Tx, y \rangle| = \frac{|\langle Tx, Tx \rangle|}{\|Tx\|} = \|Tx\|.$$

Daraus folgt $\|T\| \leq M$. ■

Korollar 9.7. Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Falls T außerdem positiv semidefinit ist, d. h. es gilt $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in H$, so gilt:

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda = \sup_{\substack{x \in H, \\ \|x\| \leq 1}} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 9.4 und Satz 9.6. ■

Lemma 9.8. Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$.

- (a) Gilt $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und ist T normal, so existiert ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = \|T\|$.
- (b) Gilt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und ist T selbstadjungiert und kompakt, so ist $\|T\|$ oder $-\|T\|$ ein Eigenwert von T .

Beweis. (a) Nach Satz 8.11 existiert ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit

$$|\lambda| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 9.4.

- (b) Nach Satz 9.6 existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{B_1(0)} \subset H$ mit

$$|\langle Tx_n, x_n \rangle| \rightarrow \|T\| \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Gehe im Folgenden ggf. (vermöge der Kompaktheit von T) zu Teilfolgen über, um die Existenz der Grenzwerte zu erhalten. Setze

$$\lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Tx_n, x_n \rangle \quad \text{und} \quad y := \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \langle Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n \rangle \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &\leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Daher gilt $\lambda x_n \rightarrow y$ für $n \rightarrow \infty$ und damit

$$Ty = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lambda y.$$

Wegen $|\lambda| = \|T\|$ folgt die Behauptung, falls $y \neq 0$ gilt. Falls $y = 0$ gilt, so ist $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und somit erhalten wir

$$\|T\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle Tx_n, x_n \rangle| = 0,$$

d. h. $T = 0$ und dafür ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. ■

Theorem 9.9 (Spektralsatz für kompakte, normale bzw. selbstadjungierte Operatoren). Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $T \in K(H)$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei T außerdem normal und für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei T selbstadjungiert. Dann existiert ein (eventuell endliches) Orthonormalsystem e_1, e_2, \dots sowie eine (eventuell endliche) Nullfolge $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ in $\mathbb{K} \setminus \{0\}$, so dass

$$H = N(T) \oplus \overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}}$$

sowie

$$Tx = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

für alle $x \in H$ gilt. Dabei sind die λ_k die von 0 verschiedenen (aber nicht notwendigerweise unterschiedlichen) Eigenwerte von T und für alle k ist e_k ein Eigenvektor zu λ_k . Weiter gilt:

$$\|T\| = \max_k |\lambda_k|.$$

Bemerkung: Vergleiche LinAlg: symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar bezüglich einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Beweis. Sei μ_1, μ_2, \dots die Folge der paarweise verschiedenen Eigenwerte von T , die nicht verschwinden (dies sind höchstens abzählbar viele nach dem Spektralsatz für kompakte Operatoren 8.17). Sei d_i die (endliche) Dimension des Eigenraums zum Eigenwert μ_i . Definiere nun

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) := (\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{d_1\text{-mal}}, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{d_2\text{-mal}}, \dots).$$

Weil die μ_k eine Nullfolge bilden, gilt dies auch für die λ_k . Zu jedem Eigenraum $N(\mu_i \text{Id} - T)$ wähle eine Orthonormalbasis $\{e_1^i, \dots, e_{d_i}^i\}$ und definiere

$$(e_1, e_2, e_3, \dots) := (e_1^1, \dots, e_{d_1}^1, e_1^2, \dots, e_{d_2}^2, \dots).$$

Nach Satz 9.5 bilden die e_k nun ein Orthonormalsystem und es gilt: $Te_k = \lambda_k e_k$ für alle k . Mit dem gleichen Argument folgt

$$N(T) \perp e_k$$

für alle k (da ein Element aus $N(T) \setminus \{0\}$ Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist). Der Raum

$$H_1 := N(T) \oplus \overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}}$$

ist ein abgeschlossener Unterraum von H . Es bleibt $H_1 = H$ zu zeigen. Wir setzen $H_2 := H_1^\perp$ und behaupten, dass H_2 ein T -invarianter Unterraum ist. Sei dazu $y \in H$ mit $\langle y, e_k \rangle = 0$ für alle k . Dann gilt

$$\langle Ty, e_k \rangle = \langle y, T^* e_k \rangle = \langle y, \bar{\lambda}_k e_k \rangle = \lambda_k \langle y, e_k \rangle = 0,$$

also $Ty \perp H_1$. Analog zeigt man $Ty \perp N(T)$ für $y \in N(T)^\perp$. Damit können wir $T_2 := T|_{H_2}$ als Operator aus $K(H_2)$ auffassen. Angenommen T_2 ist nicht der Nulloperator. Dann gilt $\|T_2\| \neq 0$ und somit sichert Lemma 9.8 die Existenz eines Spektralwerts $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, welcher

nach dem Spektralsatz für kompakte Operatoren (Satz 8.17) ein Eigenwert sein muss, d. h. es gibt außerdem ein $x \in H_2 \setminus \{0\}$ mit $T_2x = \lambda x$. Daraus folgt aber auch $\lambda \in \sigma(T)$ und somit $x \in \text{span}\{e_1, e_2, \dots\} \subset H_2^\perp$. Also ergibt sich

$$x \in H_2 \cap H_2^\perp = \{0\},$$

ein Widerspruch. Die Annahme war also falsch und es gilt doch $T_2 = 0$, und daher auch $H_2 \subset N(T) \subset H_2^\perp$, also $H_2 = \{0\}$. Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung. Sei nun $x \in H$. Dann gibt es also ein $y \in N(T)$, so dass

$$x = y + \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

gilt (für den rechten Summanden, siehe Satz 6.17). Aus der Stetigkeit von T folgt:

$$Tx = Ty + \sum_k \langle x, e_k \rangle Te_k = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Im Beweis von Satz 8.11 haben wir gesehen, dass stets $\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \leq \|T\|$ gilt. Aus Lemma 9.8 folgt, dass dieses Supremum unter den gegebenen Voraussetzungen sowohl im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ als auch im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ angenommen wird. Daraus erhalten wir die letzte Behauptung. ■

10 L^p -Räume

10.1 (Einige Begriffe und Resultate über Maß- und Integrationstheorie, die jeder Bürger wissen sollte). Maßraum, σ -Algebra, Maß, messbare Menge/Funktion.

Sei (Ω, S, μ) ein Maßraum (also Ω eine Menge, $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra und μ ein Maß).

Definition: Ω heißt σ -finit, falls eine Folge $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in S existiert, so dass $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ gilt und für alle $n \in \mathbb{N}$ das Maß von Ω_n endlich ist, d.h. $\mu(\Omega_n) < \infty$.

Definition:

- (i) Die Menge $L^1(\Omega, \mu)$ (kurz auch $L^1(\Omega)$ oder nur L^1) bezeichnet den Raum aller integrierbaren Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
- (ii) $\|f\|_{L^1} = \|f\|_1 = \int_{\Omega} |f| d\mu = \int |f|$

Bemerkung:

- (i) Identifiziere Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.
- (ii) Wir sagen eine Eigenschaft gilt fast überall (f. ü.), falls eine Nullmenge N existiert, so dass die betrachtete Eigenschaft für alle $x \in \Omega \setminus N$ gilt.

Satz (Satz von Beppo-Levi/über monotone Konvergenz). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\Omega, \mu)$ mit

- (a) $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$ f. ü.
- (b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n < \infty$.

Dann konvergiert $f_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ fast überall in Ω gegen einen endlichen Grenzwert, den wir mit $f(x)$ bezeichnen. Es gilt

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Satz (Satz von Lebesgue/über dominierte Konvergenz). Sei $g \in L^1(\Omega, \mu)$ und sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar sowie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen. Es gelte $|f_n| \leq g$ fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \rightarrow f$ punktweise fast überall für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt auch $f, f_n \in L^1(\Omega, \mu)$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) und es gilt $f_n \rightarrow f$ in $L^1(\Omega, \mu)$ für $n \rightarrow \infty$.

Definition 10.2. Sei $p \in [1, \infty)$. Wir definieren

$$L^p(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

und

$$\|f\|_{L^p} := \|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Bemerkung: Wir sehen später, dass $\|f\|_{L^p}$ tatsächlich eine Norm ist.

Definition 10.3. Wir definieren

$$L^\infty(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und es existiert ein } c \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } |f(x)| \leq c \text{ f. ü.}\}$$

und

$$\|f\|_{L^\infty} := \|f\|_\infty := \inf \{c \in \mathbb{R}_{>0} \mid |f(x)| \leq c \text{ f. ü.}\}.$$

Bemerkungen 10.4.

- (i) Für $\Omega = \mathbb{N}$ und das Zählmaß μ auf \mathbb{N} gilt $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mu)$.
- (ii) Für $f \in L^\infty(\Omega)$ gilt $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ f. ü.

Beweis von (ii). Sei $f \in L^\infty(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ mit

$$c_n \rightarrow \|f\|_\infty \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |f(x)| \leq c_n \quad \text{f. ü.}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei E_n eine Nullmenge mit $|f(x)| \leq c_n$ für alle $x \in \Omega \setminus E_n$. Setze $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Dann ist (bekannterweise) auch E eine Nullmenge und es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \Omega \setminus E: \quad |f(x)| \leq c_n.$$

Es folgt $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ für alle $x \in \Omega \setminus E$. ■

Notation: Zu $p \in [1, \infty]$ bezeichne $p' \in [1, \infty]$ den *konjugierten Exponenten* mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

D. h. es gilt $p' = p/(p-1)$ für $p \in (1, \infty)$, $p' = \infty$ für $p = 1$ und $p' = 1$ für $p = \infty$.

Theorem 10.5 (Hölder'sche Ungleichung). Sei $p \in [1, \infty]$. Für $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^{p'}(\Omega)$ gilt:

$$fg \in L^1(\Omega) \quad \text{und} \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Beweisskizze. Geht analog zum Beweis bei ℓ^p : vgl. Satz 2.14. Ersetze dabei jeweils x_k, y_k durch $f(x), g(x)$ und Summen durch Integrale. ■

Bemerkungen:

- (i) Es gibt eine Erweiterung der Höler'schen Ungleichung: Sei $k \in \mathbb{N}$, seien $p_1, \dots, p_k \in [1, \infty]$ und für $i \in \{1, \dots, k\}$ sei $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$. Weiter sei $p \in [1, \infty]$ mit

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}.$$

Dann gilt für $f := f_1 \cdots f_k$:

$$f \in L^p(\Omega) \quad \text{und} \quad \|f\|_p \leq \|f\|_{p_1} \cdots \|f\|_{p_k}.$$

- (ii) Insbesondere gilt für $f \in L^p \cap L^q$ mit $1 \leq p \leq q \leq \infty$ auch $f \in L^r$ für alle $r \in [p, q]$. Weiter gilt

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

für

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

Diese Ungleichung nennt man *Interpolationsungleichung*, welche wichtig ist, um Funktionen in L^p -Räumen zu kontrollieren.

Satz 10.6. Sei $p \in [1, \infty]$. Dann ist $L^p(\Omega)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_{L^p}$ ist eine Norm.

Beweisskizze. Die Fälle $p \in \{1, \infty\}$ sind klar. Sei also $p \in (1, \infty)$. Wir gehen vor wie im Fall für ℓ^p (Satz 2.15). (Im Wesentlichen ist die \triangle -Ungleichung zu zeigen, alles andere ist klar.) ■

Satz 10.7 (Fischer-Riesz). Sei $p \in [1, \infty]$. Dann ist $L^p(\Omega)$ ein Banachraum.

Beweis. Fall $p = \infty$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in L^∞ . Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_{\geq N_k}: \quad \|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}.$$

Also existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge E_k mit

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_{\geq N_k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k: \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Setze dann $E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$, dann ist auch $E \subset \Omega$ eine Nullmenge. Da $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für $x \in \Omega \setminus E$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} ist, existiert ein $f(x) \in \mathbb{R}$ mit $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für $n \rightarrow \infty$. Aus der obigen Ungleichung folgt für $m \rightarrow \infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq N_k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E: \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Daraus ergibt sich $f \in L^\infty(\Omega)$ und $\|f - f_n\|_\infty \leq 1/k$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N_k}$. Daraus folgt

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Fall $p \in [1, \infty)$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Es genügt zu zeigen, dass eine Teilfolge dieser Folge konvergiert. Sei $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}.$$

Im Folgenden schreiben wir wieder einfach f_k für f_{n_k} . Wir behaupten nun, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$ konvergiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Dann gilt $\|g_n\|_p \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was aus der obigen Ungleichung und dem Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe folgt. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert ein $g \in L^p(\Omega)$ mit

$$g_n(x) \rightarrow g(x) \quad \text{f. ü.} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq g(x) - g_{n-1}(x) \rightarrow 0 \quad \text{f. ü.} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dies zeigt aber, dass $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ f. ü. konvergiert mit Grenzwert $f(x)$. Es gilt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{f. ü.},$$

insbesondere folgt also:

$$f = \underbrace{f - f_n}_{\in L^p} + \underbrace{f_n}_{\in L^p} \in L^p(\Omega).$$

Der Satz von Lebesgue liefert nun:

$$\|f - f_n\|_p \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

denn:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)|^p &\rightarrow 0 \quad \text{f. ü.} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \\ \text{und } |f - f_n|^p &\leq g^p \in L^1(\Omega) \end{aligned}$$

■

Satz 10.8. Sei $p \in [1, \infty]$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\Omega)$. Sei weiter $f \in L^p(\Omega)$ mit $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und eine Funktion $h \in L^p(\Omega)$, so dass gilt:

- (a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ f. ü. für $k \rightarrow \infty$
 (b) $\forall k \in \mathbb{N}: |f_{n_k}| \leq h(x)$ f. ü.

Beweisskizze. Wähle die Teilfolge wie im vorangehenden Beweis und zeige die gewünschten Aussagen mit ähnlichen Argumenten wie dort ... ■

Das Ziel ist es nun, den Dualraum von $L^p(\Omega)$ zu beschreiben. Wir brauchen dazu etwas Maßtheorie.

Definition 10.9. Sei Ω eine Menge und S eine σ -Algebra auf Ω . Eine σ -additive Abbildung $\mu: S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *signiertes Maß* und eine σ -additive Abbildung $\mu: S \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplexes Maß*.

Bemerkungen:

- (i) Ist μ ein signiertes oder komplexes Maß, so gilt $\mu(\emptyset) = 0$ wegen

$$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset).$$

- (ii) Wir betrachten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und das Lebesgue-Maß \mathcal{L}^d . Sei $f \in L^1(\Omega)$. Dann definiert

$$\mu: S \rightarrow \mathbb{R}, \quad E \mapsto \int_E f \, d\mathcal{L}^d$$

ein signiertes Maß. Im Gegensatz zu Dichtefunktionen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie kann f hier auch negative Werte annehmen.

Definition 10.10. Sei μ ein signiertes oder komplexes Maß auf S . Für alle $E \in S$ setze

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(E_k)| \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \text{ aus } S \text{ und} \\ \text{paarweise disjunkt mit } E = \bigcup_{k=1}^n E_k \end{array} \right\}.$$

Dann heißt $|\mu|$ *Variationsmaß* zu μ . Weiter sei $\|\mu\|_{\text{var}} := |\mu|(\Omega)$ die *Totalvariation* von μ . Wir nennen μ *beschränkt*, falls $\|\mu\|_{\text{var}} < \infty$ gilt.

Bemerkung: Aus der Definition ergibt sich leicht, dass das Variationsmaß additiv ist.

Satz 10.11 (Satz von Radon-Nikodym). Sei (Ω, S, μ) ein σ -finites Maßraum und sei $\nu: S \rightarrow \mathbb{R}$ ein signiertes oder komplexes Maß mit $\|\nu\|_{\text{var}} < \infty$. Weiter sei ν *absolut stetig* bezüglich μ , d. h. es gilt

$$\forall E \in S: \quad \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

Dann gibt es genau eine Funktion $f \in L^1(\Omega, \mu)$ mit

$$\forall E \in S: \quad \nu(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Einen Beweis findet man beispielsweise im Buch von Alt oder in vielen Büchern zur Maßtheorie; beispielsweise bei Halmos, *Measure Theory*.

Bemerkung: In der Situation von Satz 10.11 nennt man die Funktion f die *Radon-Nikodym-Ableitung von ν bezüglich μ* , welche auch oft mit $\frac{d\nu}{d\mu}$ bezeichnet wird.

Beispiel: Wir betrachten \mathcal{L}^d , das Lebesgue-Maß, und δ_0 , das Dirac-Maß bei 0, d. h.

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1, & 0 \in E \\ 0, & 0 \notin E. \end{cases}$$

Dann ist δ_0 *nicht* absolut stetig bezüglich \mathcal{L}^d .

Bemerkung: Fast alle Aussagen der Integrationstheorie gelten entsprechend für Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Für $f = f_1 + if_2$ gilt beispielsweise

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f_1 + i \int_{\Omega} f_2$$

und (mit Hilfe der Hölder'schen Ungleichung)

$$\left| \int_{\Omega} f \right| \leq \int_{\Omega} |f|.$$

Für $p \in [1, \infty]$ seien die Funktionen in $L^p(\Omega)$ im Folgenden stets \mathbb{K} -wertig mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Satz 10.12 (Dualraum von $L^p(\Omega)$). Sei (Ω, S, μ) ein σ -finites Maßraum und sei $p \in [1, \infty)$ mit konjugiertem Exponenten $p' \in (1, \infty]$. Dann ist

$$J: L^{p'}(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))' \\ f \mapsto \left(g \mapsto \int_{\Omega} g \bar{f} \, d\mu \right)$$

ein konjugiert linearer, isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Aus der Hölder'schen Ungleichung (Theorem 10.5) folgt:

$$\|Jf\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

Jetzt wählen wir g so, dass $g\bar{f} = |f|^{p'}$ gilt, d. h. für $x \in \Omega$ sei $g(x) := |f|^{p'-2}f$, falls $f(x) \neq 0$, und $g(x) := 0$ sonst. Dann erhalten wir:

$$(Jf)(g) = \int_{\Omega} |f|^{p'} = \|f\|_p^{p'}.$$

Außerdem gilt

$$\|g\|_p = \left(\int_{\Omega} |g|^p \right)^{1/p} = \|f\|_p^{p'/p}.$$

Damit hat $g/\|f\|_p^{p'/p} \in L^p(\Omega)$ Norm 1 und es folgt $\|Jf\| \geq \|f\|_p$. Insgesamt erhalten wir also: J ist eine Isometrie und somit insbesondere injektiv.

Wir zeigen nun, dass J auch surjektiv ist. Sei dazu $F \in (L^p(\Omega))'$. Weil der Ausgangsraum σ -finit ist, finden wir eine Folge $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in S mit $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ und $\mu(\Omega_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Strategie ist nun, aus F ein Maß zu bauen, indem wir F bei charakteristischen Funktionen auswerten. Definiere für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\nu_k: S \rightarrow \mathbb{C}, \quad E \mapsto F(\chi_{E \cap \Omega_k}).$$

Wir zeigen für alle $k \in \mathbb{N}$:

- (i) ν_k ist σ -additiv,
- (ii) $\|\nu_k\|_{\text{var}} < \infty$,
- (iii) ν_k ist absolut stetig bezüglich μ .

Zu (i): Dass ν_k endlich additiv ist, folgt sofort aus den Eigenschaften charakteristischer Funktionen und der Linearität von F . Sei nun $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus S und sei $E := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$. Sei außerdem $E'_j := \bigcup_{i=1}^j E_i$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus der σ -Stetigkeit des Maßes μ :

$$\chi_{E'_j \cap \Omega_k} \rightarrow \chi_{E \cap \Omega_k} \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{für } j \rightarrow \infty.$$

Weil F stetig ist, folgt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu_k(E_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j \nu_k(E_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu_k(E'_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} F(\chi_{E'_j \cap \Omega_k}) = F(\chi_{E \cap \Omega_k}) = \nu_k(E).$$

Zu (ii): Seien $E_1, \dots, E_\ell \in S$ paarweise disjunkt mit $\Omega = E_1 \cup \dots \cup E_\ell$. Ohne Einschränkung sei keine der Menge E_1, \dots, E_ℓ eine Nullmenge bezüglich ν_k . Für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$ sei $\sigma_i := \nu_k(E_i) / |\nu_k(E_i)|$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{\ell} |\nu_k(E_i)| = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i \nu_k(E_i) = F\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i \chi_{E_i \cap \Omega_k}}_{=:g}\right) \leq \|F\| \|g\|_p < \infty,$$

denn

$$\|g\|_p^p = \int_{\Omega} |g|^p = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{\ell} |\sigma_i|^p \chi_{E_i \cap \Omega_k} = \int_{\Omega} \chi_{\Omega \cap \Omega_k} = \mu(\Omega_k) < \infty.$$

Zu (iii): Sei $N \in S$ eine Nullmenge bezüglich μ . Dann verschwindet $\chi_{N \cap \Omega_k}$ f. ü. auf Ω , d. h. $\chi_{N \cap \Omega_k} = 0 \in L^p(\Omega)$. Es folgt:

$$\nu_k(N) = F(0) = 0.$$

Der Satz von Radon-Nikodym (10.11) liefert nun für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $f_k \in L^1(\Omega)$, so dass gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall E \in S: \quad \nu_k(E) = \int_E f_k \, d\mu.$$

Es gilt dann für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_k &= 0 \quad \mu\text{-f. ü.} \quad \text{auf } \Omega \setminus \Omega_k \quad \text{und} \\ f_{k+1} &= f_k \quad \mu\text{-f. ü.} \quad \text{auf } \Omega_k. \end{aligned}$$

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x) := \overline{f_k(x)}, \quad \text{falls } k = \min\{k' \in \mathbb{N} \mid x \in \Omega_{k'}\}.$$

Aus den obigen Eigenschaften der Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ folgt dann:

$$\forall E \in S: \quad F(\chi_E) = \int_E \bar{f} \, d\mu = \int_{\Omega} \chi_E \bar{f} \, d\mu.$$

Außerdem gilt

$$F(g) = \int_{\Omega} g \bar{f} \, d\mu$$

für alle $g \in L^{\infty}(\Omega)$ mit $g|_{\Omega \setminus \Omega_k} = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$, denn solche Funktionen lassen sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren (siehe Maßtheorie). Der Raum

$$\{g \in L^{\infty}(\Omega) \mid \exists k \in \mathbb{N}: g|_{\Omega \setminus \Omega_k} = 0\}$$

liegt dicht in $L^p(\Omega)$, denn für ein $g \in L^p(\Omega)$ gilt

$$\chi_{\Omega_k} \chi_{\{|g| \leq m\}} g \rightarrow g \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{für } k, m \rightarrow \infty,$$

wie man sich mithilfe des Satzes über monotone Konvergenz überlegen kann.

Es bleibt zu zeigen: $f \in L^{p'}(\Omega)$. Denn dann stimmen die stetigen Funktionen F und $J(f)$ auf einem dichten Teilraum von $L^p(\Omega)$ überein, müssen also schon gleich sein.

Für $k, m \in \mathbb{N}$ und $q \in [1, \infty)$ seien

$$\Omega_{km} := \Omega_k \cap \{|f| \leq m\} \quad \text{und} \quad g_{km} := \chi_{\Omega_{km}} |f|^{q-2} f.$$

Dann gilt:

$$\int_{\Omega_{km}} |f|^q \, d\mu = F(g) \leq \|F\| \|g\|_p = \|F\| \left(\int_{\Omega_{km}} |f|^{p(q-1)} \, d\mu \right)^{1/p}. \quad (\star)$$

1. Fall: $p > 1$. Wir setzen $q = p'$ und erhalten mit $p(q-1) = p(p'-1) = p'$ aus (\star) :

$$\left(\int_{\Omega} |f|^{p'} \, d\mu \right) \leq \|F\| \left(\int_{\Omega_{km}} |f|^{p'} \, d\mu \right)^{1/p} \quad \text{bzw.} \quad \left(\int_{\Omega_{km}} |f|^{p'} \, d\mu \right)^{1/p'} \leq \|F\|$$

Im Grenzwert $k, m \rightarrow \infty$ folgt dann aus dem Satz über monotone Konvergenz:

$$\|f\|_{p'} \leq \|F\| \quad \text{und insbesondere} \quad f \in L^{p'}(\Omega)$$

2. Fall: $p = 1$. Für alle $q \in \mathbb{N}$ erhalten wir induktiv aus (\star) :

$$\int_{\Omega_{km}} |f|^q \, d\mu \leq \|F\| \int_{\Omega_{km}} |f|^{q-1} \, d\mu \leq \|F\|^q \int_{\Omega_{km}} 1 \, d\mu = \|F\|^q \mu(\Omega_{km}).$$

Nun kann man zeigen, dass $\|f\|_{L^q(\Omega_{km})} \rightarrow \|f\|_{L^\infty(\Omega_{km})}$ für $q \rightarrow \infty$ gilt. Zusammen mit der obigen Ungleichung folgt daraus

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega_{km})} = \lim_{q \rightarrow \infty} \|f\|_{L^q(\Omega_{km})} \leq \lim_{q \rightarrow \infty} \|F\| (\mu(\Omega_{km}))^{1/q} = \|F\|$$

(falls $\mu(\Omega_{km}) > 0$). Indem wir geeignete Nullmengen bezüglich μ betrachten, erhalten wir dann aus $\|f\|_{L^\infty(\Omega_{km})} \leq \|F\|$ für alle $k, m \in \mathbb{N}$ auch $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|F\|$ und damit $f \in L^{p'}(\Omega)$. ■

Bemerkungen:

- (i) Für $p \in [1, \infty)$ hat $L^p(\mathbb{R}^n)$ den Dualraum $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, da \mathbb{R}^n vermöge $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(0)$ ein σ -finiten Raum ist.
- (ii) Für $p \in (1, \infty)$ ist die Voraussetzung, dass der Raum σ -finit ist, nicht notwendig. (Siehe beispielsweise Alt.)
- (iii) $L^1(\Omega)$ und $(L^\infty(\Omega))'$ sind i. A. nicht isomorph.

Satz 10.13. Für $p \in (1, \infty)$ ist $L^p(\Omega)$ reflexiv. Es gilt weiter: Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $L^p(\Omega)$, so gibt es eine Teilfolge $(f_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ und ein $f \in L^p(\Omega)$ mit

$$\forall g \in L^{p'}(\Omega): \quad \int_{\Omega} g f_{k_i} d\mu \rightarrow \int_{\Omega} g f d\mu \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Beweis. Die Isometrien

$$J_p: L^p \rightarrow (L^{p'})' \quad \text{und} \quad J_{p'}: L^{p'} \rightarrow (L^p)'$$

aus Satz 10.12 haben die Eigenschaft

$$\forall f \in L^p, g \in L^{p'}: \quad \overline{(J_{p'}g)(f)} = \int_{\Omega} \bar{f}g d\mu = (J_p f)(g).$$

Sei $f'' \in (L^p)''$. Dann ist durch

$$g \mapsto f'(g) := \overline{f''(J_{p'}g)}$$

ein Funktional $f' \in (L^{p'})'$ gegeben. Setze jetzt

$$f := J_p^{-1} f' \in L^p.$$

Für $g \in L^{p'}$ gilt nun:

$$f'(g) = (J_p f)(g) = \overline{(J_{p'}g)(f)} = \overline{(J_{L^p} f)(J_{p'}g)},$$

wobei $J_{L^p}: L^p \rightarrow (L^p)''$ die Isometrie aus Satz 4.18 ist. Somit gilt:

$$f''(J_{p'}g) = (J_{L^p} f)(J_{p'}g)$$

für alle $g \in L^{p'}$. Da $J_{p'}$ surjektiv ist, folgt $f'' = J_{L^p} f$, womit die Reflexivität von L^p gezeigt ist. Die zweite Behauptung folgt Satz 7.11 und Satz 10.12. ■

Bemerkung: Im reellen Fall (also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) gilt insbesondere

$$J_{L^p}^{-1} = J_p^{-1}(J_{p'})',$$

wobei $(J_{p'})': (L^p)'' \rightarrow (L^{p'})'$ der adjungierte Operator zu $J_{p'}$ ist (Definition 5.15).

Bemerkung: Im Allgemeinen ist $(L^\infty)'$ „größer“ als L^1 . Man kann $(L^\infty)'$ als Raum von Maßen interpretieren. Im Allgemeinen ist weder L^1 noch L^∞ reflexiv.

Satz 10.14. (i) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist $C^0(S)$ separabel.

(ii) Für $p \in [1, \infty)$ ist $L^p(\mathbb{R}^n)$ separabel und $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $\mathcal{L}^n(S) > 0$. Dann ist $L^\infty(S)$ nicht separabel.

Beweis. (i) Idee: Überdecke S mit einem ε -Gitter. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Für $z \in \varepsilon\mathbb{Z}^n$ sei

$$Q_{\varepsilon,z} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid z_i \leq x_i \leq z_i + \varepsilon\}$$

und

$$M_\varepsilon := \{z \in \varepsilon\mathbb{Z}^n \mid Q_{\varepsilon,z} \cap S \neq \emptyset\}.$$

Da S kompakt ist, besteht M_ε stets aus endlich vielen Punkten. Zu $y \in M_\varepsilon$ wähle $x_{\varepsilon,y} \in S$ mit

$$\|x - x_{\varepsilon,y}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Zu $f \in C^0(S)$ definiere

$$g_\varepsilon(y) := f(x_{\varepsilon,y})$$

und setze g_ε durch multilineare Interpolation fort, d. h. für $x = z + \varepsilon \sum_{i=1}^n t_i e_i \in Q_{\varepsilon,z}$ mit $z \in M_\varepsilon$ und $t_i \in [0, 1]$ setze

$$g_\varepsilon(x) := \sum_{\gamma \in \{0,1\}^n} \left(\prod_{j, \gamma_j=0} (1 - t_j) \prod_{j, \gamma_j=1} t_j \right) g_\varepsilon(z + \varepsilon \gamma).$$

(In jedem Quader des ε -Gitters ist g_ε ein Polynom n -ten Grades in den t_j . Quader $Q_{\varepsilon,z_1}, Q_{\varepsilon,z_2}$, deren Schnittmenge nicht leer ist, liefern auf $Q_{\varepsilon,z_1} \cap Q_{\varepsilon,z_2}$ dieselbe Funktion; Bew. z. B. per Induktion.) Nun gilt $g_\varepsilon \in C^0(S)$ und für $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\|g_\varepsilon - f\|_{C^0(S)} \leq \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| \mid x_1, x_2 \in S, \|x_1 - x_2\|_\infty \leq 3\varepsilon\} \rightarrow 0,$$

da f gleichmäßig stetig auf S ist. Damit folgt: Die abzählbare Menge

$$\{g_{1/k} \mid k \in \mathbb{N}, \forall y \in M_\varepsilon: g_{1/k}(y) \in \mathbb{Q}\}$$

liegt dicht in $C^0(S)$.

- (ii) Nach Analysis III liegt $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$. (Idee: Approximation zunächst durch Treppenfunktionen bezüglich Quadern. Dann approximiere charakteristische Funktionen auf Quadern durch stetige Funktionen.) Es gilt

$$C_0^0(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_0^0(B_n(0)) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^0(\overline{B_n(0)})$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $C^0(\overline{B_n(0)})$ separabel bezüglich der C^0 -Norm nach dem ersten Teil. Wegen

$$\|g\|_{L^p(\overline{B_n(0)})} \leq (\mathcal{L}^n(B_n(0)))^{1/p} \sup_{\overline{B_n(0)}} |g|$$

ist $C^0(\overline{B_n(0)})$ auch separabel bezüglich der L^p -Norm.

- (iii) selbst!

■

Häufig müssen wir Funktionen durch glatte Funktionen approximieren. Dafür brauchen wir die Faltung:

Definition 10.15 (Faltung). Sei $p \in [1, \infty]$, sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) f(y) \, dy$$

die *Faltung von f und φ* und wird mit $\varphi * f$ oder $f * \varphi$ bezeichnet.

Lemma 10.16 (Allgemeine Faltungsabschätzung). Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sei $K: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ Lebesgue-messbar und sei $p \in [1, \infty]$. Dann gilt für

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) K(x, y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) K(x, x-y) \, dy$$

die Ungleichung

$$\|F\|_p \leq \|\varphi\|_1 \sup_{h \in \text{supp}(\varphi)} \|K(\cdot, \cdot - h)\|_p,$$

d. h. falls die rechte Seite endlich ist, so ist

$$y \mapsto \varphi(x-y) K(x, y)$$

in $L^1(\mathbb{R}^n)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und es gilt $F \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Die Fälle $p \in \{1, \infty\}$ sind einfach. Wir zeigen daher den Fall für $p \in (1, \infty)$, wobei p' den konjugierten Exponenten bezeichne. Dann gelten folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\varphi(y)| |K(x, x-y)|}_{= |\varphi(y)|^{1/p'} (|\varphi(y)|^{1/p} |K(x, x-y)|)} dy \right)^p dx \\
&\stackrel{\text{H}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^{p'/p'} dy \right)^{p/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| |K(x, x-y)|^p dy \right) dx \\
&\stackrel{\text{F}}{=} \|\varphi\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, x-y)|^p dx dy \\
&\leq \|\varphi\|_1^{p/p'+1} \sup_{y \in \text{supp}(\varphi)} \|K(\cdot, \cdot - y)\|_p^p
\end{aligned}$$

Bei H geht dabei die Hölderungleichung ein und bei F der Satz von Fubini. Die Existenz der Integrale rechtfertigt man dabei „von unten nach oben“.

■

Korollar 10.17 (Faltungsabschätzung). Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt

$$f * \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad \|f * \varphi\|_p \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_p.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 10.16.

■

Lemma 10.18. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \partial^s(\varphi * f) = (\partial^s \varphi) * f.$$

Beweisskizze. Sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\text{supp } \varphi \subset B_R(0)$. Dann gilt:

$$\frac{(\varphi * f)(x + he_i) - (\varphi * f)(x)}{h} = \int_{B_{2R}(0)} \underbrace{\frac{\varphi(x + he_i - y) - \varphi(x - y)}{h}}_{\rightarrow \partial_i \varphi(x-y) \text{ glm. in } y \text{ für } h \rightarrow 0} f(y) dy.$$

Mit dem Satz von Lebesgue folgt:

$$(\partial_i(\varphi * f))(x) = \partial_i F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi)(x - y) f(y) dy = ((\partial_i \varphi) * f)(x).$$

Die Aussage über höhere Ableitungen erhält man mit Induktion über $|s|$.

■

Das Ziel ist es nun, eine Funktion f mit anderen Funktionen φ_ε zu falten, so dass $\varphi_\varepsilon * f$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen f konvergiert. Wenn die φ_ε gutartig genug sind, hat $\varphi_\varepsilon * f$ „gute Eigenschaften“. Die Grundidee ist dabei, die φ_ε so zu bauen, dass sie für $\varepsilon \rightarrow 0$ wie das Dirac-Maß im Punkt 0 wirken.

Definition 10.19 (Dirac-Folge). (1) Eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt (*allgemeine*) *Dirac-Folge*, falls folgende Bedingungen gelten:

- Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_k \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \, d\mathcal{L}^n = \|\varphi_k\|_1 = 1$.
- Für alle $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} \varphi_k \, d\mathcal{L}^n \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

(2) Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ definiere $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Bemerkung: Man rechnet leicht nach: Ist $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist die Folge $(\varphi_{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Dirac-Folge. Im Folgenden nennen wir auch eine Familie $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$ eine Dirac-Folge (auch wenn es sich dabei nicht um eine Folge im üblichen Sinne handelt).

Bemerkung: Für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne im Folgenden $|x| := \|x\|_2$ die euklidische Norm von x .

10.20 (Standardbeispiel für eine Dirac-Folge). Sei $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\text{supp } \psi \subset \mathbb{R}_{\leq 1}$. Zum Beispiel:

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1} + 1\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Setze dann $\varphi(x) := \alpha \psi(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\alpha = \left(\int_{B_1(0)} \psi \circ |\cdot| \, d\mathcal{L}^n\right)^{-1}$, so dass also $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ gilt. Es gilt dann

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \text{supp } \varphi \subset \overline{B_1(0)}.$$

Weiter bildet $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$ (gemäß Definition 10.19) eine Dirac-Folge, für die offenbar

$$\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$$

gilt. Diese nennen wir *Standard-Dirac-Folge*.

Lemma 10.21.

(1) Sei $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$ eine Standard-Dirac-Folge und sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$f * \varphi_\varepsilon \rightarrow f \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{lokal gleichmäßig,}$$

d. h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x auf welcher $((f * \varphi_\varepsilon)|_U)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$ gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert.

(2) Sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Dirac-Folge und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $p \in [1, \infty)$. Dann gilt:

$$f * \varphi_k \rightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Beweis. (1) Sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und $B := B_1(\tilde{x})$. Dann gilt für alle $x \in B$:

$$\begin{aligned} |((f * \varphi_\varepsilon) - f)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)(f(y) - f(x)) \, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x)) \, dy \right| \\ &\leq \int_{B_\varepsilon(0)} |\varphi_\varepsilon(y)| |f(x-y) - f(x)| \, dy \\ &\leq \sup_{y \in B_\varepsilon(0)} |f(x-y) - f(x)|. \end{aligned}$$

Als stetige Funktion ist f auf der kompakten Menge \overline{B} sogar gleichmäßig stetig, d. h. für alle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $\delta_\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass gilt:

$$\forall x \in B, y \in B_{\delta_\alpha}(0): \quad |f(x-y) - f(x)| < \alpha.$$

Daraus folgt nun wie gewünscht die gleichmäßige Konvergenz auf B :

$$\sup_{x \in B} |((f * \varphi_\varepsilon) - f)(x)| \leq \sup_{x \in B} \sup_{y \in B_\varepsilon(0)} |f(x-y) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(2) Für alle $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$\begin{aligned} (f * \varphi_k - f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y)(f(x-y) - f(x)) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{B_\delta(0)} \varphi_k)(y)(f(x-y) - f(x)) \, dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \varphi_k)(y)(f(x-y) - f(x)) \, dy \end{aligned}$$

Lemma 10.16 liefert dann:

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_k - f\|_p &\leq \|\chi_{B_\delta(0)} \varphi_k\|_1 \sup_{h \in B_\delta(0)} \|f(\cdot - h) - f\|_p \\ &\quad + \|\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \varphi_k\|_1 \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \|f(\cdot - h) - f\|_p \\ &\leq \sup_{h \in B_\delta(0)} \|f(\cdot - h) - f\|_p + 2\|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \varphi_k \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sup_{h \in B_\delta(0)} \|f(\cdot - h) - f\|_p \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Die Konvergenzaussage bezüglich δ folgt dabei aus dem nächsten Lemma (10.22). ■

Lemma 10.22 (Stetigkeit im L^p -Mittel). Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $p \in [1, \infty)$. Dann gilt:

$$f(\cdot - h) \rightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } |h| \rightarrow 0.$$

Beweis. Da $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt (Satz 10.14 (ii)), gibt es eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \rightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $k \rightarrow \infty$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist f_k gleichmäßig stetig und es gilt $f_k(\cdot - h) - f_k \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$, wobei wir den jeweils zugehörigen Träger dieser Funktionen mit $K_{k,h}$ bezeichnen. Man überlegt sich außerdem leicht, dass für festes $k \in \mathbb{N}$ und eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ auch $\{\mathcal{L}^n(K_{k,h}) \mid h \in A\}$ in \mathbb{R} beschränkt ist. Mit diesen Vorüberlegungen erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \|f(\cdot - h) - f\|_p &\leq \|f_k(\cdot - h) - f_k\|_p + \|f - f_k\|_p + \|f(\cdot - h) - f_k(\cdot - h)\|_p \\ &\leq \mathcal{L}^n(K_{k,h})^{1/p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_k(x - h) - f_k(x)| + 2\|f - f_k\|_p \\ &\xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 2\|f - f_k\|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

■

Satz 10.23. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt:

$$C_0^\infty(\Omega) \text{ liegt dicht in } L^p(\Omega).$$

Beweis. Sei $f \in L^p(\Omega)$. Für $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ setze

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\} \cap B_{1/\delta}(0).$$

Dann gilt

$$\chi_{\Omega_\delta} f \rightarrow f \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{für } \delta \rightarrow 0. \quad (*)$$

Dies ergibt sich aus $\Omega = \bigcup \{\Omega_\delta \mid \delta \in \mathbb{R}_{>0}\}$ und dem Satz über monotone Konvergenz. Sei nun $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$ eine Standard-Dirac-Folge. Wegen Lemma 10.18, $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$ und der speziellen Wahl der Ω_δ gilt

$$(\chi_{\Omega_\delta} f) * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$$

für alle $\varepsilon < \delta$. Wegen

$$(\chi_{\Omega_\delta} f) * \varphi_\varepsilon \rightarrow \chi_{\Omega_\delta} f \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

nach Lemma 10.21 (2) folgt zusammen mit (*) die Behauptung.

■

Das nächste Ziel ist, eine Charakterisierung von kompakten Mengen in $C^0(K)$ (für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$) und in $L^p(\mathbb{R}^n)$ zu finden.

Satz 10.24 (Arzelà-Ascoli). Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $A \subset C^0(K, \mathbb{R}^m)$. Dann ist A genau dann präkompakt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) A ist beschränkt, also $\sup_{f \in A} \|f\|_{C^0(K, \mathbb{R}^n)} < \infty$.

(ii) A ist *gleichgradig stetig*, d. h.

$$\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |x - y| \rightarrow 0.$$

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und (nach Präkompaktheit) $A \subset \bigcup_{i=1}^{m_\varepsilon} B_\varepsilon(f_{\varepsilon,i})$. Dann gilt für jedes $f \in A$: Es existiert ein i mit $f \in B_\varepsilon(f_{\varepsilon,i})$. Daraus folgt

$$\sup_{f \in A} \|f\|_{C^0} \leq \varepsilon + \max_{j \in \{1, \dots, m_\varepsilon\}} \|f_{\varepsilon,j}\|_{C^0} < \infty,$$

also (i). Mithilfe der Δ -Ungleichung erhalten wir für alle $f \in A$, $x, y \in K$:

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\|f - f_{\varepsilon,i}\|_{C^0} + |f_{\varepsilon,i}(x) - f_{\varepsilon,i}(y)|.$$

Daraus folgt:

$$\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \leq 2\varepsilon + \underbrace{\max_{j \in \{1, \dots, m_\varepsilon\}} |f_{\varepsilon,j}(x) - f_{\varepsilon,j}(y)|}_{\rightarrow 0 \text{ für } |x-y| \rightarrow 0},$$

wobei wir die Konvergenz im hinteren Summanden erhalten, da alle $f_{\varepsilon,i}$ sogar gleichmäßig stetig sind. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig war, folgt (ii).

„ \Leftarrow “: Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $R := \sup_{f \in A} \|f\|_{C^0}$ und (nach Kompaktheit von K und $\overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^m$)

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(x_i) \subset \mathbb{R}^n, \quad \overline{B_R(0)} \subset \bigcup_{j=1}^{m_\varepsilon} B_\varepsilon(\xi_j) \subset \mathbb{R}^m.$$

Sei M_ε die Menge aller Abbildungen $\{1, \dots, n_\varepsilon\} \rightarrow \{1, \dots, m_\varepsilon\}$ und für $\tau \in M_\varepsilon$ sei

$$A_\tau := \{f \in A \mid \forall i \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}: |f(x_i) - \xi_{\tau(i)}| \leq \varepsilon\}.$$

Aus der bisherigen Konstruktion ergibt sich, dass für alle $f \in A$ ein $\tau(f) \in M_\varepsilon$ existiert mit $f \in A_{\tau(f)}$. Es gilt also $A = \bigcup_{\tau \in M_\varepsilon} A_\tau$. Wir fixieren außerdem für alle $\tau \in M$ mit $A_\tau \neq \emptyset$ ein $f_\tau \in A_\tau$. Seien nun $f \in A$, $\tau := \tau(f)$, $x \in K$ und $i \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$ mit $x \in B_\varepsilon(x_i)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(f - f_\tau)(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_\tau(x_i)| + |f_\tau(x) - f_\tau(x_i)| \\ &\leq 2 \underbrace{\sup_{|y_1 - y_2| < \varepsilon} \sup_{f \in A} |f(y_1) - f(y_2)|}_{=: \delta_\varepsilon} + \underbrace{|f(x_i) - \xi_{\tau(i)}| + |f_\tau(x_i) - \xi_{\tau(i)}|}_{\leq 2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\|f - f_\tau\|_{C^0} \leq 2\delta_\varepsilon + 2\varepsilon < 2\delta_\varepsilon + 3\varepsilon.$$

Es folgt:

$$A \subset \bigcup_{\tau \in M} B_{2\delta_\varepsilon + 3\varepsilon}(f_\tau).$$

Weil A gleichgradig stetig ist, gilt $\delta_\varepsilon \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Also wird $2\delta_\varepsilon + 3\varepsilon$ beliebig klein, woraus die Präkompaktheit von A folgt. ■

Bemerkung: Für einen metrischen Raum (X, d) und eine Teilmenge $A \subset X$ gilt:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists A_\varepsilon \subset X \text{ präkompakt: } A \subset B_\varepsilon(A_\varepsilon)) \implies A \text{ präkompakt,}$$

wobei

$$B_\varepsilon(A_\varepsilon) := \{x \in X \mid \text{dist}(x, A_\varepsilon) < \varepsilon\}.$$

Satz 10.25 (Kompakte Mengen in $L^p(\mathbb{R}^n)$, Riesz-Fréchet-Kolmogorov). Sei $p \in [1, \infty)$ und sei $A \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist A präkompakt genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $\sup_{f \in A} \|f\|_p < \infty$ (Beschränktheit von A)
- (ii) $\sup_{f \in A} \|f(\cdot - h) - f\|_p \rightarrow 0$ für $|h| \rightarrow 0$ (Gleichgradige Stetigkeit im L^p -Mittel)
- (iii) $\sup_{f \in A} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))} \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$.

Beweis. „ \Rightarrow “: Diese Richtung ist einfach. Nutze, dass die entsprechenden Aussagen für endlich viele f erfüllt sind, und die Präkompaktheit. (Vgl. Beweis von Satz 10.24.)

„ \Leftarrow “: Sei $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$ eine Standard-Dirac-Folge. Wähle $(R_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $R_\varepsilon \rightarrow \infty$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f \in A$ definiere

$$\begin{aligned} B_\varepsilon &:= B_{R_\varepsilon}(0), & B_\varepsilon^+ &:= B_{R_\varepsilon + \varepsilon}(0), \\ T_\varepsilon f &:= (\chi_{B_\varepsilon} f) * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(B_\varepsilon^+), \\ \text{und} \quad A_\varepsilon &:= \{T_\varepsilon f \mid f \in A\}. \end{aligned}$$

Mit $\chi_{B_\varepsilon} = \chi_{\mathbb{R}^n} - \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon}$ erhalten wir für alle $f \in A$:

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon f - f\|_p &= \|f * \varphi_\varepsilon - f - (\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} f) * \varphi_\varepsilon\|_p \\ &\leq \sup_{f \in A} (\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p + \|(\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} f) * \varphi_\varepsilon\|_p) \\ &\leq \sup_{f \in A} \left(\sup_{h \in B_\varepsilon(0)} \|f(\cdot - h) - f\|_p + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon)} \right) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{wg. (ii) und (iii),} \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Ungleichung Lemma 10.16 und Korollar 10.17 eingehen. Nach der Bemerkung vor dem Beweis genügt es nun also zu zeigen, dass A_ε für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ präkompakt in $L^p(B_\varepsilon^+)$ ist. Sei $D_\varepsilon := \overline{B_\varepsilon^+}$. Für alle $g \in A_\varepsilon$ gilt

$$\|g\|_{L^p(B_\varepsilon^+)} \leq \mathcal{L}^n(B_\varepsilon^+)^{1/p} \|g\|_{C^0(D_\varepsilon)},$$

also genügt es zu zeigen: A_ε ist präkompakt in $C^0(D_\varepsilon)$. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (10.24) können wir äquivalent zeigen: A_ε ist beschränkt und gleichgradig stetig. Für alle $f \in A$ und $x \in D_\varepsilon$ gilt nach der Hölder'schen Ungleichung und (i):

$$|T_\varepsilon f(x)| \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{p'} \|f\|_p \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{p'} \sup_{g \in A} \|g\|_p < \infty$$

sowie

$$|\nabla(T_\varepsilon f)(x)| = |(\chi_{B_\varepsilon} f) * (\nabla \varphi_\varepsilon)| \leq \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{p'} \sup_{g \in A} \|g\|_p =: C < \infty.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt die Beschränktheit von A_ε und aus der zweiten, dass für alle $f \in A$, $x, y \in D_\varepsilon$ gilt:

$$|(T_\varepsilon f)(x) - (T_\varepsilon f)(y)| \leq \|\nabla(T_\varepsilon f)\|_{C^0(D_\varepsilon)} |x - y| \leq C |x - y|.$$

Daraus folgt, dass A_ε gleichgradig stetig ist. ■

11 Sobolev-Räume und schwache Form von Randwertproblemen in einer Dimension

11.1 (Motivation). Betrachte folgendes Problem: Gegeben sei $f \in C([a, b])$. Aufgabe: Finde ein $u \in C^2([a, b])$ mit

$$\left. \begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{auf } [a, b] \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ (Randwertproblem).}$$

Eine solche Funktion u heißt *starke Lösung*. Moderne Theorie von (partiellen) Differentialgleichungen studiert (zunächst) *schwache Lösungen*.

Betrachten wir dies an einem Beispiel. Multipliziere die Differentialgleichung mit einer Funktion $\varphi \in C^1([a, b])$ mit $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ und integriere partiell:

$$\int_a^b u' \varphi' + \int_a^b u \varphi = \int_a^b f \varphi. \quad (\text{SF})$$

Die Gleichung (SF) ergibt Sinn für $u \in C^1([a, b])$ oder sogar für u mit $u, u' \in L^1([a, b])$ (wobei wir geeignet definieren müssen, wie wir $u' \in L^1$ für $u \in L^1$ auffassen wollen). Wir sagen u ist eine *schwache Lösung*, falls (SF) erfüllt ist für alle $\varphi \in C^1$ mit $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$. Dieser Zugang heißt *variational*. Allgemein geht man in folgenden Schritten vor:

Schritt A Mache präzise, was „schwache Lösung“ meint. Dazu brauchen wir den Begriff des *Sobolevraums*.

Schritt B Zeige die Existenz einer schwachen Lösung (nutze Lax-Milgram).

Schritt C Zeige, dass sogar eine (genügend) glatte Lösung (z. B. aus C^2) existiert. Dies ist ein Regularitätsresultat.

Schritt D Zeige, dass eine schwache Lösung, die in C^2 liegt, auch eine starke Lösung ist.

Schritt D ist einfach: Angenommen $u \in C^2([a, b])$, $u(a) = 0 = u(b)$ und (SF) ist erfüllt. Nach partieller Integration in (SF) erhalten wir:

$$\int_a^b (-u'' + u - f) \varphi \, dx = 0$$

für alle $\varphi \in C^1([a, b])$ mit $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$. Das Fundamentallema der Variationsrechnung liefert:

$$-u'' + u - f = 0.$$

Im Folgenden sei $I := (a, b)$ ein offenes Intervall, wobei $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen sind. Sei weiter $p \in [1, \infty]$.

Definition 11.2. (i) Der *Sobolevraum* $H^{1,p}(I)$ ist definiert durch:

$$H^{1,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I) \mid \exists g \in L^p(I) \forall \varphi \in C_0^\infty(I): \int_I u \varphi' \, dx = - \int_I g \varphi \, dx \right\}.$$

(ii) Wir definieren: $H^1(I) := H^{1,2}(I)$.

(iii) Für $u \in H^{1,p}(I)$ und ein g wie in der Definition von $H^{1,p}(I)$ schreiben wir $u' = g$ und nennen u' die *schwache Ableitung von u* .

Bemerkung: Einige Autoren schreiben auch $W^{1,p}(I)$ statt $H^{1,p}(I)$.

Bemerkung: Falls $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ und falls $u' \in L^p(I)$ (wobei u' die klassische Ableitung bezeichnet), so gilt $u \in H^{1,p}(I)$ und u' ist auch die schwache Ableitung.

Bemerkungen:

(i) Die schwache Ableitung ist (bis auf Nullmengen) eindeutig. Angenommen $u'_1, u'_2 \in L^1$ sind schwache Ableitungen. Dann gilt

$$\int_I (u'_1 - u'_2) \varphi \, dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$. Das Fundamentallemma liefert $u'_1 - u'_2 = 0$ fast überall.

(ii) Es ist $H^{1,p}(I)$ mit der Norm

$$\|u\|_{H^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

ein normierter Raum. Der Raum $H^1(I)$ besitzt das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2} = \int_I (uv + u'v') \, dx.$$

Beispiel 11.3. Sei $I := (-1, 1)$. Dann rechnet man leicht nach:

(i) Die Funktion $u(x) := |x|$ gehört zu $H^{1,p}(I)$ für alle $p \in [1, \infty]$ und es gilt $u' = g$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ -1, & x \in (-1, 0). \end{cases}$$

Allgemein gilt: Eine Funktion, die auf \bar{I} stetig und stückweise in C^1 ist, liegt auch in $H^{1,p}(I)$ für $p \in [1, \infty]$.

(ii) Die obige Funktion g liegt *nicht* in $H^{1,p}(I)$ für alle $p \in [1, \infty]$.

Satz 11.4. Der Raum $H^{1,p}(I)$ ist ein Banachraum für alle $p \in [1, \infty]$.

Beweis. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H^{1,p}(I)$. Dann sind $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in L^p . Daraus folgt: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein u in L^p und $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein g in L^p . Es gilt

$$\int_I u_n \varphi' = - \int_I u_n \varphi$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Gehe zum Grenzwert über (möglich wegen Hölder), dann ergibt sich:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I): \quad \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi.$$

Also gilt $u \in H^{1,p}(I)$ mit $u' = g$ und $\|u_n - u\|_{H^{1,p}} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. ■

Definition:

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid u|_K \in L^1(K) \text{ für eine kompakte Menge } K \subset \Omega\}$$

Lemma 11.5. Sei $f \in L^1_{\text{loc}}$ mit

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I): \quad \int_I f \varphi' = 0. \quad (\text{EA})$$

Dann existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $f \equiv C$ fast überall auf I gilt.

Beweis. Sei $\psi \in C_0^0(I)$ fest mit $\int_I \psi = 1$. Beh.: Für $w \in C_0^0(I)$ existiert ein $\varphi \in C_0^1(I)$ mit

$$\varphi' = w - \left(\int_I w \right) \psi =: h.$$

Es ist h stetig mit kompaktem Träger in I . Außerdem gilt $\int_I h = 0$. Damit hat h eine eindeutige Stammfunktion mit kompaktem Träger. In (EA) können wir C_0^∞ durch C_0^1 ersetzen (falte C_0^1 -Funktionen mit Standard-Dirac-Folge, setze gefaltete Funktionen in (EA) ein und gehe zum Grenzwert über). Aus (EA) folgt:

$$\forall w \in C_0^0(I): \quad \int_I f \left(w - \left(\int_I w \right) \psi \right) = 0.$$

Das heißt wir erhalten:

$$\forall w \in C_0^0(I): \quad \int_I \left(f - \left(\int_I f \psi \right) \right) w = 0.$$

Das Fundamentallemma liefert:

$$f = \int_I f \psi \quad \text{f. ü.}$$

Also erfüllt $C = \int_I f \psi$ die Behauptung. ■

Lemma 11.6. Sei $g \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Für $y_0 \in I$ fest, setze für $x \in I$:

$$v(x) := \int_{y_0}^x g(t) \, dt.$$

Dann gilt $v \in C^0(I)$ und

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I): \quad \int_I v \varphi' = - \int_I g \varphi.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_I v \varphi' &= \int_I \left(\int_{y_0}^x g(t) \, dt \right) \varphi'(x) \, dx \\ &= - \int_a^{y_0} \int_x^{y_0} g(t) \varphi'(x) \, dt \, dx + \int_{y_0}^b \int_{y_0}^x g(t) \varphi'(x) \, dt \, dx \\ &= - \int_a^{y_0} g(t) \int_a^t \varphi'(x) \, dx \, dt + \int_{y_0}^b g(t) \int_t^b \varphi'(x) \, dx \, dt \\ &= - \int_a^b g(t) \varphi(t) \, dt \end{aligned}$$

■

Theorem 11.7. Sei $u \in H^{1,p}(I)$ mit $p \in [1, \infty]$. Dann existiert eine Funktion $\tilde{u} \in C^0(\bar{I})$ mit

$$u = \tilde{u} \quad \text{f. ü. auf } I$$

und

$$\forall x, y \in \bar{I}: \quad \tilde{u}(x) = \tilde{u}(y) + \int_y^x u'(t) \, dt.$$

Beweis. Wähle $y_0 \in I$ und setze $\bar{u}(x) := \int_{y_0}^x u'(t) \, dt$. Das vorherige Lemma folgt:

$$\forall \varphi \in C_0^1(I): \quad \int_I \bar{u} \varphi' = - \int_I u' \varphi.$$

Damit folgt:

$$\forall \varphi \in C_0^1(I): \quad \int_I (u - \bar{u}) \varphi' = 0.$$

Lemma 11.5:

$$u - \bar{u} = C \quad \text{f. ü. auf } I$$

Also hat $\tilde{u}(x) := \bar{u}(x) + C$ die gewünschten Eigenschaften.

■

Satz 11.8. Sei $I = (a, b)$ ein Intervall mit $a, b \in (-\infty, \infty)$ und sei $p \in [1, \infty]$.

(i) Dann existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $f \in C^1(I)$ und $x_0 \in I$ gilt:

$$\|f\|_{C^0} \leq |f(x_0)| + C \|f'\|_{C^p(I)}.$$

(ii) Für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt außerdem

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|^{1/p'} \|f'\|_{L^p(I)},$$

und somit sind die Mengen

$$M_C := \{f \in C^1(I) \mid \|f\|_{H^{1,p}(I)} \leq C\}$$

für $C \in \mathbb{R}_{>0}$ kompakt in $C^0(I)$.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(x) \, dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot |f'(x)| \, dx \\ &\stackrel{\text{H}}{\leq} \left(\int_{x_1}^{x_2} 1^{p'} \right)^{1/p'} \left(\int_{x_1}^{x_2} |f'(x)|^p \right)^{1/p} \leq (x_2 - x_1)^{1/p'} \|f'\|_{L^p(I)}. \end{aligned}$$

(Bei H geht dabei die Hölder-Ungleichung ein.) Daraus folgt:

$$|f(x_2)| \leq |f(x_1)| + (b - a)^{1/p'} \|f'\|_{L^p(I)}.$$

Dies zeigt den ersten Teil, und dass M_C gleichgradig stetig ist; mit dem Satz von Arzela-Ascoli (10.24) folgt dann die zweite Behauptung. ■

Definition 11.9. (i) Sei $p \in [1, \infty]$. Dann definieren wir $\mathring{H}^{1,p}(I)$ als den Abschluss von $C_0^1(I)$ in $H^{1,p}(I)$ bezüglich der $H^{1,p}$ -Norm.

(ii) Weiter sei $\mathring{H}^1(I) := \mathring{H}^{1,2}(I)$.

(iii) Zusammen mit der Einschränkung der $H^{1,p}$ -Norm ist $\mathring{H}^{1,p}(I)$ ein Banachraum.

(iv) Auf $\mathring{H}^{1,p}(I)$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_I (uv + u'v').$$

Satz 11.10. Sei $u \in \mathring{H}^{1,p}(I)$. Dann gilt $u|_{\partial I} = 0$.

Satz 11.11 (Poincaré-Ungleichung). Sei I ein beschränktes Intervall. Dann existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\forall u \in \mathring{H}^{1,p}(I): \quad \|u\|_{\mathring{H}^{1,p}(I)} \leq C \|u\|_{L^p(I)}.$$

Das heißt auf $\mathring{H}^{1,p}(I)$ ist $u \mapsto \|u\|_{L^p(I)}$ eine Norm, die zur $H^{1,p}$ -Norm äquivalent ist.

Beweis. Sei $u \in \mathring{H}^{1,p}(I)$ mit $I = (a, b)$. Da $u(a) = 0$ gilt, folgt

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(x) \, dx \right| \leq \|u'\|_{L^1}.$$

Also gilt $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1}$. Der Rest folgt aus der Höler-Ungleichung. ■

11.12 (Randwertproblem). Wir betrachten das Problem

$$\left. \begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{auf } I = (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ (RWP),}$$

wobei $f \in L^2(I)$ bzw. $f \in C^0(\bar{I})$.

Definition:

- (i) Eine *klassische Lösung* ist eine Funktion $u \in C^2(\bar{I})$, die (RWP) erfüllt.
- (ii) Eine *schwache Lösung* von (RWP) ist eine Funktion $u \in \mathring{H}^{1,2}(I)$, für die gilt:

$$\forall v \in \mathring{H}^{1,2}(I): \quad \int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv.$$

Nun führe Schritt A–D aus 11.1 durch.

Schritt A: Jede klassische Lösung ist eine schwache Lösung.

Lösung: Dies folgt mittels partieller Integration:

$$0 = \int_I (-u'' + u - f)v - \int_I (u' + u - fv).$$

Schritt B: Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung.

Satz 11.13. Sei $f \in L^2(I)$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in \mathring{H}^{1,2}(I)$ von (RWP). Zusätzlich ist u gegeben durch:

$$\min_{v \in \mathring{H}^{1,2}(I)} \left(\frac{1}{2} \int_I ((v')^2 + v^2) - \int_I fv \right).$$

Das Vorgehen, u als Minimum zu erhalten, heißt *Dirichletsches Prinzip*.

Beweis. Wir wenden den Satz von Lax-Milgram (6.11) auf den Hilbertraum $\mathring{H}^{1,2}(I)$, die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_I u'v' + \int_I uv = \langle u, v \rangle_{H^1}$$

und das lineare Funktional $\varphi(v) = \int_I fv$ an. ■

Schritte C und D: Regularität von schwachen Lösungen und Rückgewinnung von starken Lösungen.

Sei $f \in L^2(I)$ und $u \in \mathring{H}^{1,2}(I)$ eine schwache Lösung. Daraus folgt: u'' existiert als schwache Ableitung und $-u'' = f - u \in L^2(I)$. D. h. $u' \in C^0(\bar{I})$ bis auf Nullmengen.

Falls $f \in C^0(\bar{I})$ gilt, folgt: $u'' \in C^0(\bar{I})$. Dass eine schwache Lösung $u \in C^2(\bar{I})$ auch eine klassische Lösung ist, haben wir uns schon bei 11.1 überlegt.

Satz 11.14. Sei $I = (0, 1)$. Dann existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} und eine Hilbertbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $L^2(I)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ schon $e_n \in C^\infty(\bar{I})$ und

$$\begin{aligned} -e_n'' + e_n &= \lambda_n e_n \quad \text{auf } I \\ e_n(0) &= e_n(1) = 0 \end{aligned}$$

gilt. Außerdem gilt: $\lambda_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Wir nennen die $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Eigenwerte des Differentialoperators $Au = -u'' + u$ mit Dirichlet-Randbedingungen und die $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind die zugehörigen Eigenfunktionen.

Beweis. Zu $f \in L^2(I)$ existiert eine eindeutige Lösung $u \in H^{2,2}(I) \cap \mathring{H}^{1,2}(I)$ mit

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{auf } I \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Es sei $Tf := u$ als Operator $L^2(I) \rightarrow L^2(I)$. D. h. Tf ist die eindeutige Lösung des obigen Randwertproblems. Wir behaupten, dass T selbstadjungiert und kompakt ist.

Zunächst zur Kompaktheit: Sei $f \in L^2$. Es gilt

$$\int (u')^2 + \int u^2 = \int (-u'' + u)u = \int fu.$$

Somit folgt

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2$$

und daraus

$$\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2} \quad \text{bzw.} \quad \|Tf\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Da die Einbettung $H^{1,2}(I) \rightarrow C^0(\bar{I})$ kompakt ist, ist auch die Einbettung $H^{1,2}(I) \rightarrow L^2(I)$ kompakt. Somit ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f &\mapsto Tf \mapsto Tf \\ L^2(\Omega) &\rightarrow \mathring{H}^{1,2}(\Omega) \rightarrow C^2(\Omega) \end{aligned}$$

kompakt.

Jetzt zur Selbstadjungiertheit. Für alle $f, g \in L^2$ gilt:

$$\int_I (Tf)g = \int_I f Tg.$$

Mit $u = Tf$ und $v = Tg$ erhalten wir aus

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \\ -v'' + v &= g \end{aligned}$$

durch Multiplikation mit v bzw. u , Integration und Anwendung partieller Integration:

$$\int_I f v = \int_I (u' v' + uv) = \int_I g u.$$

Dies zeigt, dass T selbstadjungiert ist.

Weiter gilt für alle $f \in L^2(I)$:

$$\int_I (Tf)f = \int_I u f = \int_I (u')^2 + \int_I u^2 \geq 0. \quad (*)$$

Also ist T positiv semidefinit. Außerdem gilt $N(T) = \{0\}$, da:

$$Tf = 0 \quad \implies \quad u = 0 \quad \implies \quad f = 0.$$

Wir nutzen nun den Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren und erhalten eine Hilbertbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Eigenvektoren von T mit Eigenwerten $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aus $(*)$ folgt $\mu_n \geq 0$ und da T injektiv ist, folgt $\mu_n \neq 0$. Außerdem gilt $\mu_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Schreiben wir $Te_n = \mu_n e_n$, so folgt:

$$\begin{aligned} -e_n'' + e_n &= \lambda_n e_n \quad \text{mit } \lambda_n = \mu_n^{-1} \\ e_n(0) &= e_n(1) = 0. \end{aligned}$$

Außerdem folgt $e_n \in C^2(\bar{I})$, da $f = \lambda_n e_n \in C(\bar{I})$. Durch Iterieren dieses Vorgehens erhalten wir $u_n \in C^k$, also $u_n \in C^\infty$. ■

Verallgemeinerung:

$$-(pu')' + qu = f, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

das sogenannte *Sturm-Liouville-Problem*. Der Fall

$$p \geq \alpha > 0 \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$$

geht wie oben (inklusive Eigenwert-Theorie).