

Vorlesungsmitschrift (*kein* offizielles Skript)

Funktionalanalysis

Prof. Dr. Harald Garcke

Version vom 2. Dezember 2013

Gesetzt in L^AT_EX von Johannes Prem

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?	1
2	Grundstrukturen der Funktionalanalysis	4
3	Lineare Operatoren	15
4	Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen	20
5	Bairescher Kategoriensatz und seine Konsequenzen	40
6	Hilberträume	53
7	Schwache Konvergenz	65

1 Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?

Zum Beispiel von der *Analysis auf Banachräumen* (vollständigen normierten Vektorräumen)

1.1. Auf \mathbb{R}^n definiere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x\|_2 := |x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 (Funktionen auf kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n).

Zum Beispiel: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, z. B. $K = [0, 1]$.

$$C^0(K) := \{f \mid f: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird Banachraum mit der Norm:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty$$

1.3 (Operatoren auf $C^0([0, 1])$).

Definiere

$$L(C^0([0, 1]), C^0([0, 1])) := \{T: C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]) \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

Beispiele:

$$(Tf)(x) := g(x) f(x) \quad \text{wobei } g \in C^0([0, 1])$$

$$(Tf)(x) := \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) \quad \text{wobei } 0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$$

$$L_i: \text{Lagrange-Basis-Fkt.: } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y) \, dy \quad \text{wobei } K \in C^0([0, 1]^2)$$

Bemerkung: $L(C^0([0, 1]), C^0([0, 1]))$ wird zu einem Banachraum mit der Operatornorm

$$\|T\|_{L(C^0, C^0)} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{C^0}}{\|f\|_{C^0}}$$

1.4. Welche Besonderheiten ergeben sich in unendlich-dimensionalen Räumen?

- (1) Problem in ∞ -dimensionalen Vektorräumen: Wenig sinnvolle Aussagen ohne Topologie möglich
- (2) Für $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear gilt:

$$T \text{ surjektiv} \iff T \text{ injektiv}$$

Im ∞ -dim. ist dies i. A. falsch.

Beispiel:

$$c_* := \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}, \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall \ell > \bar{k}: x_\ell = 0\}$$

c_* modelliert „Folgen, die irgendwann abbrechen“. Außerdem enthält c_* den \mathbb{R}^n für $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß.

Definiere die sog. *Shift-Abbildung* wie folgt:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Dann ist T injektiv, aber nicht surjektiv.

- (3) Grundproblem der linearen Algebra: Finde Normalformen für lineare Abbildungen.

Ziel: Verallgemeinerung auf ∞ -dim. Räume.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Diagonalisierbarkeit} \\ \text{symmetrischer Matrizen} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spektralsatz für} \\ \text{kompakte, normale Operatoren} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Jordansche} \\ \text{Normalform} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spektralsatz für} \\ \text{kompakte Operatoren} \end{array} \right.$$

- (4) Kompaktheit

In ∞ -dim. Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel *nicht* kompakt.

Beispiel c_* : Nutze die Norm

$$\|x\|_{c_*} := \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

und die Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (wobei die 1 an der i -ten Stelle steht). Dann gilt:

$$\|e_i\|_{c_*} = 1 \quad \text{und} \quad \|e_i - e_k\|_{c_*} = 1 \text{ für } i \neq k$$

Also hat $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *keine* konvergente Teilfolge, woraus folgt, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist.

- (5) Nicht alle Normen sind zueinander äquivalent.

Beispiel: Betrachte auf $C^0([0, 1])$ die Normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}$$

Es gilt $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty$. Aber: Es gibt keine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $f \in C^0([0, 1])$ gilt: $\|f\|_\infty \leq c \|f\|_{L^2}$. Betrachte dazu:



Es gilt: $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1$, $\|f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Außerdem gilt:

$(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum

$(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2})$ ist normierter Vektorraum (aber nicht vollständig)

Funktionalanalysis lässt sich sinnvoll nur in vollständigen Räumen entwickeln. Deshalb werden wir nicht vollständige Räume vervollständigen (siehe 2.18).

2 Grundstrukturen der Funktionalanalysis

2.1 (Topologie). Sei X eine Menge, \mathcal{T} ein System von Teilmengen. Dann heißt \mathcal{T} *Topologie (auf X)*, falls gilt:

$$(T1) \quad \emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$$

$$(T2) \quad \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$$

$$(T3) \quad T_1, T_2 \in \mathcal{T} \implies T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$$

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *Hausdorff-Raum*, falls er zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt:

$$(T4) \quad \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad \exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}: U_1 \cap U_2 = \emptyset \wedge x_i \in U_i$$

Mengen in \mathcal{T} heißen *offene Mengen*. Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Eine Menge $W \subset X$ mit $x \in W$ für die eine offene Menge U mit $x \in U$ und $U \subset W$ existiert, heißt *Umgebung von x* .

Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume, so heißt $f: X \rightarrow Y$ *stetig*, falls die Urbilder offener Mengen stets offen sind. (Formal: $\forall U' \in \mathcal{T}_Y: f^{-1}(U') \in \mathcal{T}_X$)

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *stetig in $x \in X$* , falls

$$f(x) \in V \in \mathcal{T}_Y \implies \exists U \in \mathcal{T}_X: x \in U \subset f^{-1}(V)$$

(d. h. $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von x).

2.2. Ist X ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt (X, \mathcal{T}) *topologischer Vektorraum*, falls (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum ist und die Abbildungen

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow X, & (x, y) &\mapsto x + y \\ \mathbb{K} \times X &\rightarrow X, & (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

stetig sind. („Algebraische und topologische Struktur sind verträglich“)

2.3 (Metrik). Ein Tupel (X, d) heißt *metrischer Raum*, falls X eine Menge ist und $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Bedingungen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt:

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Konvergenz:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls:

$$d(x_k, x_\ell) \rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty$$

x heißt Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (Notation: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder: $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$), falls:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

(X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in X besitzt.

Abstand von Mengen $A, B \subset X$:

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Für $A \subset X$ und $x \in X$ definieren wir: $\text{dist}(x, A) := \text{dist}(\{x\}, A)$.

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $A \subset X$, $x \in X$ definieren wir:

$$B_r(A) := \{x \in X \mid \text{dist}(x, A) < r\}$$

$$B_r(x) := B_r(\{x\})$$

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

Wir sagen A ist *beschränkt*, falls $\text{diam}(A) < \infty$.

2.4 (Topologie von Metriken). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \subset A\} \quad \text{ist das Innere von } A.$$

$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{ist der Abschluss von } A.$$

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{ist der Rand von } A.$$

Wir sagen, dass A offen ist, falls $A^\circ = A$ gilt, und dass A abgeschlossen ist, falls $\overline{A} = A$ gilt.

Durch die Definition $\mathcal{T} := \{A \subset X \mid A \text{ offen}\}$ wird (X, \mathcal{T}) zu einem hausdorffschen topologischen Raum.

2.5 (Fréchet-Metrik). Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $d: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Fréchet-Metrik*, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$(F1) \quad d(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x) = 0 \iff x = 0$$

$$(F2) \quad d(-x) = d(x)$$

$$(F3) \quad d(x + y) \leq d(x) + d(y)$$

Dann ist $(x, y) \mapsto d(x - y)$ eine Metrik auf X .

Beispiel: Fréchet-Metriken auf \mathbb{R} :

$$x \mapsto |x|^\alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha \leq 1$$

$$x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x|}$$

2.6 (Norm). X sei ein \mathbb{K} -Vektorraum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls folgende Bedingungen für alle $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dann ist $x \mapsto \|x\|$ eine Fréchet-Metrik. Wir nennen X *Banachraum*, falls X mit einer gegebenen Norm vollständig ist.

X ist eine *Banachalgebra*, falls X eine Algebra ist (d. h. es gibt ein Produkt auf X , das dem Assoziativgesetz und Distributivgesetz genügt) und $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in X$ gilt.

2.7 (Skalarprodukt). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum.

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *Hermitesche Form* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrische Sesquilinearform), falls für alle $x, x_1, x_2, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(S1) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(S2) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$(S3) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

(Es folgt: für alle $x \in X$ gilt $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$.)

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *positiv semidefinit*, falls

$$(S4') \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

und *positiv definit*, falls

$$(S4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

gilt.

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *Skalarprodukt*, falls (S1)–(S4) erfüllt sind. Dann ist $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf X und wir nennen X dann einen *Prä-Hilbertraum*. Falls X zusätzlich vollständig ist, so heißt X *Hilbertraum*.

Beispiele:

i) \mathbb{R}^n mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

ii) $X = C^0(K, \mathbb{R})$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

$$\langle f, g \rangle := \int_K f(x) g(x) \, dx$$

Dann ist $(C^0(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum (aber kein Hilbertraum!)

Satz 2.8. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum X . Dann gelten:

- (1) Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU): $\forall x, y \in X: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
Gleichheit gilt nur, falls y ein Vielfaches von x ist.
- (2) Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in X: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (3) Parallelogrammidentität: $\forall x, y \in X: \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Bemerkung: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt aus der CSU für $x, y \in X \setminus \{0\}$:

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \in [-1, 1] \quad (*)$$

D. h. es gibt genau ein $\theta \in [0, \pi]$, s. d.

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \cos \theta.$$

Wir interpretieren θ als den Winkel zwischen x und y .

Beweis von Satz 2.8.

(3)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Ersetze y durch $-y$ und addiere beide Gleichungen.

(1) Ersetze in (*) y durch $-\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$ (o. E. $y \neq 0$). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

Es folgt die CSU. In der ersten Zeile gilt bei \leq die Gleichheit genau dann, wenn x ein Vielfaches von y ist.

(3)

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \underbrace{\operatorname{Re}\langle x, y \rangle}_{\leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|} \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

■

2.9 (Vergleich von Topologien). Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X . Wir sagen \mathcal{T}_2 ist *stärker* (oder *feiner*) als \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_1 ist *schwächer* (oder *gröber*) als \mathcal{T}_2 , falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt.

Sind d_1, d_2 zwei Metriken auf X und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ die induzierten Topologien (siehe 2.4), so heißt die Metrik d_1 *stärker* (bzw. *schwächer*) als d_2 , falls \mathcal{T}_1 stärker (bzw. schwächer) als \mathcal{T}_2 ist. Die Metriken heißen äquivalent, falls $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Entsprechend heißt eine Norm stärker bzw. schwächer als eine zweite, wenn dies für die induzierten Metriken gilt. Analog für Äquivalenz von Normen.

2.10 (Vergleich von Normen). Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X . Dann gilt:

(1) $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:

$$\forall x \in X: \quad \|x\|_1 \leq c \|x\|_2$$

(2) Die beiden Normen sind genau dann äquivalent, wenn es $c, C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:

$$\forall x \in X: \quad c \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2$$

Beweis. (1) Es sei $B_r^i(x) = \{x' \in X \mid \|x - x'\|_i < r\}$ und \mathcal{T}_i sei die von $\|\cdot\|_i$ induzierte Topologie.

Sei $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Da $B_1^1(0) \in \mathcal{T}_1$ gilt, ist $B_1^1(0)$ offen bezüglich \mathcal{T}_1 und bezüglich \mathcal{T}_2 . Es liegt 0 im Inneren (bezüglich $\|\cdot\|_2$) von $B_1^1(0)$. Somit gilt $B_\varepsilon^2(0) \subset B_1^1(0)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Daher gilt für $x \in X \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varepsilon x}{2\|x\|_2} \right\|_2 &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ \implies \left\| \frac{\varepsilon x}{2\|x\|_2} \right\|_1 &< 1 \implies \|x\|_1 < \frac{2}{\varepsilon} \|x\|_2 \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt die Ungleichung in (1) so ist für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$B_r^2(x) \subset B_{cr}^1(x)$$

Sei nun $A \in \mathcal{T}_1$. Dann ist $A = A^\circ$ bezüglich \mathcal{T}_1 . D.h. zu $x \in A$ existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\varepsilon^1(x) \subset A$. Also gilt:

$$B_{\varepsilon/c}^2(x) \subset A$$

Dies zeigt $A \in \mathcal{T}_2$.

(2) Wende den ersten Teil zweimal an.

■

Satz 2.11. Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent. Endlich-dimensionale Vektorräume sind Banachräume. Endlich-dimensionale Unterräume normierter Räume sind abgeschlossen.

Beweis. Sei X ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von $(X, \|\cdot\|)$. Jedem $x \in X$ mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ordnen wir den Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{K}^n$ zu.

Die Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^n &\rightarrow X \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto x \mapsto \|x\|\end{aligned}$$

sind stetig.

Daher nimmt $\|x\|$ auf der kompakten Menge

$$S := \{\alpha \mid \|\alpha\|_2 = 1\}$$

ein Maximum M und ein Minimum m an. (Dabei gilt $m > 0$, da $\|x\| > 0$ für alle $x \in S$.) Damit gilt für x mit $\|\alpha(x)\|_2 = 1$

$$m \leq \|x\| \leq M.$$

Für allgemeine $x \neq 0$ gilt

$$\left\| \alpha \left(\frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right) \right\|_2 = 1 \quad \text{und somit} \quad m \leq \left\| \frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right\| \leq M$$

Dies zeigt die Äquivalenz einer beliebigen Norm zur Norm $x \mapsto \|\alpha(x)\|_2$. Damit sind zwei beliebige Normen äquivalent.

Die Vollständigkeit von X folgt aus der Vollständigkeit von $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$. Die Tatsache, dass endlich-dimensionale Räume abgeschlossen sind, folgt mit Aufgabe 1 von Übungsblatt 2.

■

2.12 (Folgenräume). Wir bezeichnen mit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen über \mathbb{K} , d. h.

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Es gilt:

1) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist ein metrischer Raum mit der Fréchet-Metrik

$$\varrho(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|} \quad \text{für } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

2) Ist $(x^k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_i)^k_{i \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und ist $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, so gilt:

$$\varrho(x^k - x) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \iff \forall i \in \mathbb{N}: x_i^k \rightarrow x_i \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

(Vergleiche Aufgabe 2 von Blatt 1.)

3) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist mit dieser Metrik vollständig.

4) Definiere für $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty] \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \in [0, \infty]$$

Wir betrachten für $1 \leq p \leq \infty$ die Mengen

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_{\ell^p} < \infty\}$$

Diese Räume sind normierte Vektorräume und auch vollständig (also Banachräume). (Beweis, siehe später.) Wenn der Körper \mathbb{K} aus dem Kontext klar ist, lassen wir diesen in der Notation auch weg.

5) Interessante Unterräume von ℓ^∞ sind:

$$c := \{x \in \ell^\infty \mid \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \text{ existiert}\} \quad \text{und}$$

$$c_0 := \{x \in \ell^\infty \mid \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0\}.$$

Beide Räume versehen wir mit der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm. Es gilt: $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$

6) Der Raum ℓ^2 besitzt das Skalarprodukt

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{für } x, y \in \ell^2$$

Lemma 2.13 (Youngsche Ungleichung). Es seien $p, p' \in (1, \infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \log(ab) &= \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(b^{p'}) \\ &\leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichheit folgt daraus, dass der Logarithmus eine konkave Funktion ist. Da außerdem \exp monoton ist, folgt hieraus die Behauptung. ■

Satz 2.14 (Höldersche Ungleichung auf ℓ^p). Es sei $1 \leq p, p' \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^{p'}$ ist $xy \in \ell^1$ (dabei sei für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das Produkt definiert als: $xy := (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$) und es gilt:

$$\|xy\|_{\ell^1} \leq \|x\|_{\ell^p} \cdot \|y\|_{\ell^{p'}}.$$

Beweis. Falls $p = \infty$ setze $p' = 1$ (und umgekehrt). In diesem Fall ist der Beweis einfach. Sei nun $1 < p < \infty$ und $\|x\|_{\ell^p} > 0, \|y\|_{\ell^{p'}} > 0$. Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) liefert:

$$\frac{|x_k| |y_k|}{\|x\|_{\ell^p} \|y\|_{\ell^{p'}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_{\ell^p}^p} + \frac{1}{p'} \frac{|y_k|^{p'}}{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}}$$

Die Reihe über die Terme der rechten Seite ist eine konvergente Reihe und damit folgt aus dem Majorantenkriterium, dass $xy \in \ell^1$ erfüllt sein muss. ■

Satz 2.15. Der Raum ℓ^p ist für $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum.

Beweis. Die Vollständigkeit von ℓ^1 ist eine Übungsaufgabe. Für ℓ^p folgt dies ähnlich (vergleiche mit dem späteren Beweis über $L^p(\mu)$.) Die Normeigenschaften abgesehen von der Δ -Ungleichung ergeben sich einfach. Wir zeigen die Δ -Ungleichung für $p \in (1, \infty)$. Es seien also $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{(p-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}) (\|x + y\|_{\ell^p}^{p-1}) \end{aligned}$$

Bei $(*)$ geht die Höldersche Ungleichung ein. Dies zeigt $\|x + y\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}$. ■

2.16 (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen). Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt (also nach Heine-Borel äquivalenterweise kompakt) und Y ein Banachraum über \mathbb{K} , so ist $C^0(K, Y)$ ein Unterraum von $B(K, Y)$. (Vergleiche Aufgabe 1 von Blatt 2.)

Satz: Mit $\|f\|_{C^0} := \|f\|_{\infty} := \sup_{x \in K} |f(x)|$ wird $C^0(K, Y)$ ein Banachraum.

Beweis. Jedes $f \in C^0(K, Y)$ ist beschränkt, denn: Zu $x \in K$ existiert ein $\delta_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(B_{\delta_x}(x)) \subset B_1(f(x))$. Da K kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Es folgt:

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^m B_1(f(x_i)).$$

Die rechte Menge ist beschränkt, also ist auch f beschränkt.

Aufgabe 1 (iv) von Blatt 2 zeigt, dass $B(K, Y)$ ein Banachraum ist. Eine Cauchy-Folge in $C^0(K, Y)$ ist auch eine Cauchy-Folge in $B(K, Y)$. Da $B(K, Y)$ vollständig ist, besitzt jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Sei jetzt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^0(K, Y)$ mit Grenzwert f in $B(Y, K)$. Für $x, y \in K$ gilt:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \underbrace{\|f_i(y) - f_i(x)\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x \text{ und jedes } i} + 2 \underbrace{\|f - f_i\|_\infty}_{\rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty}$$

Dies beweist $f \in C^0(K, Y)$. ■

2.17 (Räume differenzierbarer Funktionen). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir:

$$C^m(\overline{\Omega}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } m\text{-mal stetig diffenzierbar auf } \Omega \text{ und für } s \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |s| \leq m \text{ ist } \partial^s f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar}\}.$$

(Dabei ist s ein Multiindex mit $|s| = s_1 + \dots + s_n$.)

Satz: Der Raum $C^m(\overline{\Omega})$ ist mit der Norm

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$$

ein Banachraum.

Beweis. Wir beweisen die Vollständigkeit von $C^1(\overline{\Omega})$. (Der Fall $m > 1$ folgt induktiv.) Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^1(\overline{\Omega})$, so sind $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\partial_i f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $C^0(\overline{\Omega})$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Daher existieren f und g_i in $C^0(\overline{\Omega})$, so dass $f_k \rightarrow f$ sowie $\partial_i f_k \rightarrow g_i$ gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$ in $C^0(\overline{\Omega})$. Für $x \in \Omega$ und y nahe x mit $x_t := (1-t)x + ty$ folgt aus dem HDI:

$$f_k(x_1) - f_k(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_k(x_t) dt = \int_0^1 (y - x) \cdot \nabla f_k(x_t) dt$$

Es folgt (mit $g = (g_1, \dots, g_n)$):

$$\begin{aligned} \|f_k(y) - f_k(x) - (y - x) \cdot \nabla f_k(x)\| &= \left\| \int_0^1 ((y - x) \cdot \nabla f_k(x_t) - (y - x) \cdot \nabla f_k(x)) dt \right\| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_0^1 \|\nabla f_k(x_t) - \nabla f_k(x)\| dt \|y - x\| \\ &\leq \left(2\|\nabla f_k - g\|_\infty + \sup_{t \in [0,1]} \|g(x_t) - g(x)\| \right) \|y - x\| \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ gilt dann:

$$\|f(y) - f(x) - (y - x) \cdot g(x)\| \leq \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq 1} \|g(x_t) - g(x)\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x \text{ wegen Stetigkeit von } g} \|y - x\|$$

Dies bedeutet f ist in x diff'bar mit $\nabla f(x) = g(x)$. ■

2.18 (Vervollständigung). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\tilde{X} := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}$$

zusammen mit der Äquivalenzrelation

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \tilde{X} \iff (d(x_j, y_j))_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

Führe Metrik auf \tilde{X} ein: für $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ sei

$$\tilde{d}((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) := \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, y_j).$$

Satz:

- i) Dann ist (\tilde{X}, \tilde{d}) ein vollständiger metrischer Raum.
- ii) Durch $J(x) := (x)_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine injektive Abbildung $J: X \rightarrow \tilde{X}$ definiert, welche isometrisch ist, d. h. für alle $x, y \in X$ gilt

$$\tilde{d}(J(x), J(y)) = d(x, y).$$

- iii) Es liegt $J(X)$ dicht in \tilde{X} .

Beweis. Für $\tilde{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\tilde{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \tilde{X} gilt (mithilfe der sog. *Vierecksungleichung*):

$$|d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i)| \leq d(x_j, x_i) + d(y_j, y_i) \rightarrow 0 \quad \text{für } i, j \rightarrow \infty.$$

Somit existiert $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, y_j)$. Für $\tilde{x}^1 = \tilde{x}^2$ und $\tilde{y}^1 = \tilde{y}^2$ in \tilde{X} folgt:

$$|d(x_j^2, y_j^2) - d(x_j^1, y_j^1)| \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Dies zeigt, dass \tilde{d} wohldefiniert ist. Außerdem gilt:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \iff \tilde{x} = \tilde{y},$$

was direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation folgt. Die \triangle -Ungleichung und Symmetrie übertragen sich direkt.

Zur Vollständigkeit: Es sei $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \tilde{X} , mit $x^k = (x_j^k)_{j \in \mathbb{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $j_k \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_i^k, x_j^k) \leq 1/k$ für alle $i, j \geq j_k$ erfüllt ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_{j_k}^k, x_{j_\ell}^\ell) &\leq d(x_{j_k}^k, x_{j_j}^k) + d(x_{j_j}^k, x_{j_j}^\ell) + d(x_{j_j}^\ell, x_{j_\ell}^\ell) \\ &\leq \frac{1}{k} + d(x_j^k, x_j^\ell) + \frac{1}{\ell} \quad \text{für } j \geq j_k, j_\ell \\ &\rightarrow \frac{1}{k} + \tilde{d}(x^k, x^\ell) + \frac{1}{\ell} \quad \text{für } j \rightarrow \infty \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also ist $x^\infty := (x_{j_\ell}^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ in \tilde{X} und es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x^\ell, x^\infty) &\leftarrow d(x_k^\ell, x_k^\infty) \quad \text{für } k \rightarrow \infty \\ &\leq d(x_k^\ell, x_{j_\ell}^\ell) + d(x_{j_\ell}^\ell, x_{j_\ell}^k) \\ &\leq \frac{1}{\ell} + d(x_{j_\ell}^\ell, x_{j_k}^k) \quad \text{für } k \geq j_\ell \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Es gilt also $x^\ell \rightarrow x^\infty$. Da $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in \tilde{X} war, hat also jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Die Aussagen ii) und iii) sind eine einfache Übung. ■

3 Lineare Operatoren

Definition 3.1.

- (a) Seien X, Y zwei \mathbb{K} -Vektorräume mit Topologien $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$. Wir definieren

$$L(X, Y) := \{T: X \rightarrow Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Elemente in $L(X, Y)$ heißen *lineare Operatoren von X nach Y* . (Für $T \in L(X, Y)$ und $x \in X$ schreiben wir auch oft Tx statt $T(x)$.)

- (b) Der *Dualraum* von X ist

$$X' := L(X, \mathbb{K})$$

und Elemente aus X' nennen wir *lineare Funktionale*.

Beispiele 3.2.

- 1) Gelte $X = C^2(\overline{\Omega})$ und $Y = C^0(\overline{\Omega})$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte dann $T: X \rightarrow Y$ mit

$$(Tu)(x) := -\Delta u(x)$$

für alle $u \in C^2(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$.

- 2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $K: \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei dann T für alle $u \in C^0(\overline{\Omega}), x \in \overline{\Omega}$ gegeben durch:

$$(Tu)(x) := \int_{\overline{\Omega}} K(x, y) u(y) \, dy.$$

Lemma 3.3. Seien X, Y normierte Vektorräume und sei $T: X \rightarrow Y$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) T ist stetig, also $T \in L(X, Y)$.
- (2) T ist stetig in x_0 für ein $x_0 \in X$.
- (3) Es gilt für die Operatornorm von T :

$$\|T\|_{L(X, Y)} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y < \infty$$

- (4) Es existiert ein $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X$. (Bemerkung: $C = \|T\|_{L(X, Y)}$ ist die kleinste solche Zahl.)

Beweis. (1) \implies (2): klar.

(2) \implies (3): Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$T(\overline{B_\delta(x_0)}) \subset \overline{B_1(T(x_0))}$$

erfüllt ist. Für x mit $\|x\|_X \leq 1$ folgt $x_0 + \delta x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ und daraus: $T(x_0 + \delta x) \in \overline{B_1(T(x_0))}$, d. h. es gilt:

$$\|T(x_0 + \delta x) - T(x_0)\| \leq 1.$$

Wegen der Linearität von T gilt $T(x_0 + \delta x) - T(x_0) = \delta T(x)$, weshalb wir $\|T(x)\| \leq 1/\delta$ bekommen.

(3) \implies (4): Für $x \neq 0$ gilt $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$. Daraus folgt:

$$\|Tx\| = \left\| \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|T\| \|x\|.$$

(4) \implies (1): Für $x, x_0 \in X$ gilt:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq C \|x - x_0\|.$$

Also ist T Lipschitz-stetig und somit auch stetig. ■

Lemma 3.4.

(1) X, Y normierte Räume $\implies L(X, Y)$ normiert mit der Operatornorm.

(2) Y Banachraum $\implies L(X, Y)$ Banachraum

(3) X Banachraum $\implies L(X) := L(X, X)$ Banachalgebra

(4) $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z) \implies ST \in L(X, Z)$ mit $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$

Beweis. Zu (1): Wir zeigen nur die Δ -Ungleichung (der Rest ist klar). Es gilt

$$\|(T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\|,$$

woraus folgt:

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Zu (2): Es sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X, Y)$. Für alle $x \in X$ ist dann $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y . Setzte

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x.$$

Da Grenzwertbilden linear ist, ist auch L linear. Wir behaupten, dass $T \in L(X, Y)$ und $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gelten.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Sei $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$. Wähle $m_0 = m_0(\varepsilon, x) \geq n_0$ mit

$$\|T_{m_0}x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ folgt nun:

$$\|T_nx - Tx\| \leq \|T_nx - T_{m_0}x\| + \|T_{m_0}x - Tx\| \leq \|T_n - T_{m_0}\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Damit folgen nun aber $\|T\| \leq \infty$ sowie $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Zu (3) und (4): Es gilt:

$$\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|.$$

Also gilt allgemein: $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$. ■

Bemerkung 3.5. Es sei $T \in L(X, Y)$ und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X, Y)$ mit $T_kx \rightarrow Tx$ für $k \rightarrow \infty$ und für alle $x \in X$. Dann folgt i. A. *nicht* $T_k \rightarrow T$ in $L(X, Y)$.

Beispiel: $X = c_0$ (Raum der Nullfolgen, siehe 2.12 (5)) mit der Supremumsnorm, $Y = \mathbb{R}$, $T_kx := x_k$. Dann gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} T_kx = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 =: Tx$. Offensichtlich gilt $\|T_kx\| = 1$ für $x = e_k$. Außerdem gilt $\|T_kx\| = \|x_k\| \leq 1$ für $\|x\| \leq 1$. D. h. $\|T_k\| = 1$, aber $\|T\| = 0$.

Definition 3.6. Für $T \in L(X, Y)$ definieren wir den *Nullraum (Kern) von T* als

$$N(T) := \{x \in X \mid T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\}).$$

Es ist $N(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(X, Y)$.

Weiter sei

$$R(T) := \{Tx \in Y \mid x \in X\} = T(X)$$

der *Bildraum* (engl.: „range“) von T . Es ist $R(T)$ ein linearer Unterraum von Y , i. A. aber nicht abgeschlossen.

Beispiel: $X = C^0([0, 1])$,

$$T: X \rightarrow X, \quad (Tf)(x) := \int_0^x f(\xi) \, d\xi$$

$$R(T) = \{g \in C^1([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

Es gilt $T \in L(X, Y)$ aber $R(T)$ ist nicht abgeschlossen in X , denn:

$$\overline{R(T)} = \{g \in C^0([0, 1]) \mid g(0) = 0\}$$

(denn stetige Funktionen können durch C^1 -Funktionen in der C^0 -Norm approximiert werden, siehe später).

Satz 3.7 (Neumannsche Reihe). Sei X ein Banachraum und sei $A \in L(X)$ mit $\|A\| < 1$. Es bezeichne Id den Identitätsoperator. Dann liegt $(\text{Id} - A)^{-1}$ in $L(X)$ und es gilt:

$$(\text{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Beweis. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n := \sum_{k=0}^n A^k \in L(X).$$

Mit $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ folgt:

$$\begin{aligned} \|B_n x - B_m x\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n A^k x \right\| \quad \text{für } n > m \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \|A\|^k \|x\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty \text{ für alle } x \text{ mit gleichmäßig } \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

Also existiert $B \in L(X)$ mit $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$. Noch zu zeigen: $B(\text{Id} - A) = \text{Id} = (\text{Id} - A)B$. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n A^k (\text{Id} - A) = \sum_{k=0}^n (A^k - A^{k+1}) = \text{Id} - A^{n+1} \rightarrow \text{Id} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also:

$$B(\text{Id} - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n (\text{Id} - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Id} - A^{n+1}) = \text{Id}$$

■

3.8 (Invertierbare Operatoren). Seien X, Y Banachräume. Wir sagen $T \in L(X, Y)$ ist invertierbar, falls T bijektiv ist und $T^{-1} \in L(Y, X)$ gilt.

Satz:

- i) Die Teilmenge $\{T \in L(X, Y) \mid T \text{ invertierbar}\}$ ist offen in $L(X, Y)$.
- ii) Es gilt genauer für $T, S \in L(X, Y)$ mit invertierbarem T :

$$\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1} \implies T - S \text{ invertierbar}$$

Beweis. Es gilt:

$$T - S = T(\text{Id}_X - \underbrace{T^{-1}S}_{\in L(X)}).$$

Also folgt mit $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$:

$$\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\| \|S\| < 1.$$

Mithilfe der Neumannschen Reihe (Satz 3.7) erhalten wir:

$(\text{Id} - T^{-1}S)$ ist invertierbar.

Also ist auch $T - S$ invertierbar

■

4 Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen

Problem: Setze ein Funktional stetig von einem Unterraum auf den gesamten Raum fort.

Bisher wissen wir nicht, ob auf jedem normierten Vektorraum ein (nicht-triviales) stetiges lineares Funktional existiert. Da wir im Folgenden grundlegend das *Zorn'sche Lemma* verwenden, wiederholen kurz die Voraussetzungen dafür.

Definition 4.1.

i) Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $H \subset M \times M$ definiert eine *Halbordnung* (wir sagen $a \leq b$, falls $(a, b) \in H$ erfüllt ist), wenn für alle $a, b \in M$ gilt:

a) $a \leq a$

b) $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

c) $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$

ii) Eine Teilmenge $K \subset M$ heißt *Kette* (oder *total geordnete Teilmenge*), falls für alle $a, b \in K$ entweder $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

iii) Eine *obere Schranke* einer Teilmenge $K \subset M$ ist ein Element $s \in M$ mit $a \leq s$ für alle $a \in K$. (Achtung: s muss *nicht* in K liegen!)

iv) Wir sagen M ist *induktiv geordnet*, falls jede Kette in M eine obere Schranke besitzt.

v) Ein $m \in K$ heißt *maximales Element von K* , wenn für alle $a \in K$ aus $a \geq m$ schon $a = m$ folgt.

4.2 (Zorn'sches Lemma). Jede induktiv geordnete Menge besitzt (mindestens) ein maximales Element.

Bemerkung: Das Zorn'sche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Satz 4.3 (Satz von Hahn-Banach). Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum und $Y \subset X$ ein Unterraum. Weiter gelte:

(1) $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist sublinear, d. h. für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{und} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

(2) $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear.

(3) $f \leq p$ auf Y .

Dann existiert eine lineare Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq p$ auf X .

Beweis. Nutze das Zorn'sche Lemma (4.2). Es sei

$$M := \{(Z, g) \mid Y \subset Z \subset X, Z \text{ ist Unterraum}, \\ g: Z \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist linear, } g = f \text{ auf } Y, g \leq p \text{ auf } Z\}.$$

Wir definieren eine Halbordnung auf dieser Menge folgendermaßen:

$$(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad Z_1 \subset Z_2 \wedge g_2|_{Z_1} = g_1.$$

Es ist zunächst zu zeigen, dass es überhaupt ein F gibt, so dass $(X, F) \in M$ gilt. Hierzu brauchen wir folgende Konstruktion:

Sei $(Z, g) \in M, z_0 \in X \setminus Z$. Definiere dann $Z_0 := Z \oplus \text{span}\{z_0\}$. Das Ziel ist es nun, g auf Z_0 fortzusetzen. Ansatz:

$$g_0(z + \alpha z_0) = g(z) + \alpha c$$

für $z \in Z, \alpha \in \mathbb{R}$. Gesucht ist nun ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$.

Es muss für alle $z \in Z$ gelten:

$$g(z) + \alpha c \leq p(z + \alpha z_0).$$

Für $\alpha = 0$ ist dies klar. Für $\alpha > 0$ haben wir:

$$c \leq \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = p\left(\frac{z}{\alpha} + z_0\right) - g\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

und für $\alpha < 0$:

$$c \geq \frac{p(z + \alpha z_0) - g(z)}{\alpha} = -p\left(-\frac{z}{\alpha} - z_0\right) + g\left(-\frac{z}{\alpha}\right).$$

Gesucht ist nun ein c , so dass

$$\sup_{z' \in Z} (g(z') - p(z' - z_0)) \leq c \leq \inf_{z \in Z} (p(z + z_0) - g(z)) \quad (\star)$$

erfüllt ist.

Es gilt für alle $z', z \in Z$:

$$g(z + z') \leq p(z + z') = p(z + z_0 + z' - z_0) \leq p(z + z_0) + p(z' - z_0).$$

Daraus folgt für alle $z', z \in Z$:

$$g(z') - p(z' - z_0) \leq p(z + z_0) - g(z),$$

was wiederum bedeutet, dass wir für c einfach den Wert des Supremums in (\star) nehmen können. Somit existiert also ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $(Z_0, g_0) \in M$ gilt. Sei nun $N \subset M$ eine Kette. Definiere dann

$$Z_0 := \bigcup_{(Z,g) \in N} Z$$

und

$$g_0: Z_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z_0 \mapsto g(z_0) \text{ falls } z_0 \in Z \text{ mit } (Z, g) \in N.$$

Da N eine Kette ist, ist g_0 tatsächlich wohldefiniert. Es folgt also $(Z_0, g_0) \in M$ und für alle $(Z, g) \in N$ gilt $(Z, g) \leq (Z_0, g_0)$.

Das Zorn'sche Lemma liefert nun: Es existiert ein maximales Element $(Z, g) \in M$. Dann muss schon $Z = X$ gelten, denn: Falls $z_0 \in X \setminus Z$ existiert, konstruiere eine Fortsetzung von g auf $Z \oplus \text{span}\{z_0\}$ wie oben. Dies liefert einen Widerspruch zur Maximalität von (Z, g) . Damit ist der Satz gezeigt. ■

Wir wollen nun den Satz von Hahn-Banach auf den komplexen Fall verallgemeinern. Die Frage ist, wie wir „ $f \leq p$ “ auf \mathbb{C} umgehen. Dazu betrachten wir die Realteilfunktion $\text{Re } f$ von f .

Lemma 4.4. Sei X ein \mathbb{C} -Vektorraum.

(a) Sei $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$ ein \mathbb{R} -lineares Funktional, d. h.

$$\ell(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \ell(x_1) + \lambda_2 \ell(x_2)$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$. Setzen wir

$$\tilde{\ell}(x) := f(x) - i \ell(ix),$$

so ist $\tilde{\ell}: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung mit $\ell = \text{Re } \tilde{\ell}$.

(b) Ist $h: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, $\ell = \text{Re } h$ und $\tilde{\ell}$ wie in (a), so ist ℓ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung mit $\tilde{\ell} = h$.

(c) Ist $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm (es gelten die Normaxiome bis auf $p(x) = 0 \implies x = 0$) und ist $\ell: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, so gilt:

$$\left(\forall x \in X: |\ell(x)| \leq p(x) \right) \iff \left(\forall x \in X: |\text{Re } \ell(x)| \leq p(x) \right).$$

(d) Ist X ein normierter Vektorraum und ist $\ell: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung und stetig, so ist $\|\ell\| = \|\text{Re } \ell\|$.

Bemerkung: $\ell \mapsto \text{Re } \ell$ ist also eine bijektive \mathbb{R} -lineare Abbildung zwischen den \mathbb{C} -linearen und den \mathbb{R} -linearen, \mathbb{R} -wertigen Abbildungen. Im normierten Fall ist die Abbildung sogar eine Isometrie.

Beweis.

- (a) Da $x \mapsto ix$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung ist, folgt: $\tilde{\ell}$ ist \mathbb{R} -linear. Die Gleichheit $\operatorname{Re} \tilde{\ell} = \ell$ gilt nach Konstruktion. Außerdem gilt:

$$\tilde{\ell}(ix) = \ell(ix) - i\ell(i^2x) = \ell(ix) - i\ell(-x) = i(\ell(x) - i\ell(ix)) = i\tilde{\ell}(x).$$

- (b) Natürlich ist $\ell = \operatorname{Re} h$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \operatorname{Re} h(x) + i \operatorname{Im} h(x) = \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re}(ih(x)) \\ &= \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re} h(ix) = \ell(x) - i\ell(ix) = \tilde{\ell}(x) \end{aligned}$$

- (c) Wegen $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt die Hinrichtung. Die Rückrichtung ergibt sich wie folgt: Schreibe $\ell(x) = \lambda |\ell(x)|$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$|\ell(x)| = \lambda^{-1} \ell(x) = \ell(\lambda^{-1}x) = |\operatorname{Re} \ell(\lambda^{-1}x)| \leq p(\lambda^{-1}x) = p(x).$$

- (d) folgt sofort aus (c). ■

Satz 4.5. Sei X ein \mathbb{C} -Vektorraum und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Weiter sei $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear und $\ell: U \rightarrow \mathbb{C}$ linear mit $\operatorname{Re} \ell(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L: X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $L|_U = \ell$ und $\operatorname{Re} L(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Wende den Satz von Hahn-Banach (4.3) auf das \mathbb{R} -lineare Funktional $\operatorname{Re} \ell: U \rightarrow \mathbb{R}$ an und erhalte eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_U = \operatorname{Re} \ell$ und $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Nach Lemma 4.4 ist $F = \operatorname{Re} L$ für ein \mathbb{C} -lineares Funktional $L: X \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist L eine geeignete Fortsetzung. ■

Satz 4.6. Sei X ein normierter Vektorraum und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Zu jedem stetigen linearen Funktional $u': U \rightarrow \mathbb{K}$ existiert ein lineares Funktional $x': X \rightarrow \mathbb{K}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|x'\| = \|u'\|$.

Beweis. Sei X zunächst ein \mathbb{R} -Vektorraum. Definiere für alle $x \in X$

$$p(x) := \|u'\| \|x\|,$$

womit $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear ist. Der Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) liefert: Es existiert eine lineare Abbildung $x': X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x'|_U = u'$ und $x'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Da auch $x'(-x) \leq p(-x) = p(x)$ gilt, folgt

$$|x'(x)| \leq \|u'\| \|x\| \quad \text{also} \quad \|x'\| \leq \|u'\|.$$

Umgekehrt gilt:

$$\|u'\| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |u'(u)| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |x'(u)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |x'(x)| = \|x'\|.$$

Sei X nun ein \mathbb{C} -Vektorraum. Wir erhalten wie in Satz 4.5 ein lineares Funktional $x': X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|\operatorname{Re} x'\| = \|u'\|$. Lemma 4.4 (d) liefert dann wie gewünscht $\|x'\| = \|u'\|$. ■

Bemerkung 4.7.

- i) Die Fortsetzung im Satz von Hahn-Banach (Satz 4.3) und seinen Folgerungen sind im Allgemeinen *nicht* eindeutig.
- ii) Für Operatoren (lineare Abbildungen von X nach Y) ist die Aussage in Satz 4.6 im Allgemeinen falsch.

Beispiel: Es gibt keinen stetigen linearen Operator $T: \ell^\infty \rightarrow c_0$, der die Identität $\operatorname{Id}: c_0 \rightarrow c_0$ fortsetzt.

- iii) Es gibt eine eindeutige stetige Fortsetzung, falls der Unterraum U dicht in X liegt.

Definition 4.8. Eine *affine Hyperebene* in einem \mathbb{K} -Vektorraum X ist eine Teilmenge $H \subset X$ der Form

$$H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$$

für eine (nicht-triviale) lineare Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Wir schreiben auch kurz: $H = \{f = \alpha\}$.

Satz 4.9. Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum, sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ linear und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn f stetig ist.

Beweis. Es ist klar, dass H abgeschlossen ist, wenn f stetig ist, denn es gilt $f^{-1}(\{\alpha\}) = H$ und $\{\alpha\}$ ist abgeschlossen in \mathbb{R} . Für die Rückrichtung sei H abgeschlossen in X . Dann ist H^c offen und nicht leer. Jetzt sei $x_0 \in H^c$ mit $f(x_0) \neq \alpha$, o. E. $f(x_0) < \alpha$. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\} \subset H^c$. (Abbildung 4.2)



Abbildung 4.1: Zwei Teilmengen A und B eines Vektorraums, getrennt durch eine Hyperebene H (hier eine Gerade im \mathbb{R}^2)



Abbildung 4.2: Hyperebene H und Ball $B_r(x_0)$ um x_0 mit $x \in B_r(x_0)$

Wir behaupten nun, dass dann schon für alle $x \in B_r(x_0)$ die Ungleichung

$$f(x) < \alpha \quad (*)$$

gilt. Angenommen dies gilt nicht und es existiert ein $x_1 \in B_r(x_0)$, so dass $f(x_1) > \alpha$ gilt. Das Segment

$$[x_0, x_1] := \{x_t := (1-t)x_0 + tx_1 \mid t \in [0, 1]\}$$

ist in $B_r(x_0)$ enthalten (da Bälle in normierten Räumen konvex sind). Somit folgt für alle $t \in [0, 1]$:

$$f(x_t) \neq \alpha.$$

Andererseits gilt offenbar

$$f(x_t) = \alpha \quad \text{für} \quad t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Dies ist ein Widerspruch, also muss doch schon $(*)$ gelten. Wir erhalten, dass für alle $z \in B_1(0)$

$$\underbrace{f(x_0 + rz)}_{\in B_r(x_0)} < \alpha$$

gilt, woraus sofort

$$f(z) < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0))$$

folgt. Nutze diese Ungleichung für z und $-z$ aus $B_1(0)$, um Folgendes für alle $z \in B_1(0)$ zu erhalten:

$$|f(z)| < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0)).$$

Insgesamt folgt:

$$\|f\| = \sup_{z \in B_1(0)} |f(z)| \leq \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0)).$$

■

Definition 4.10. Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum und seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen von X . Die Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ trennt die Mengen A und B , falls für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha \quad \text{und} \quad f(b) \geq \alpha$$

gelten.



Abbildung 4.3: Zwei *nicht* strikt durch H getrennte Mengen; die Mengen aus Abbildung 4.1 sind hingegen strikt durch H getrennt

Die Hyperebene H *trennt* A und B *strikt*, falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon \quad \text{und} \quad f(b) \geq \alpha + \varepsilon$$

gelten.

Bemerkung 4.11.

- i) Geometrisch sagt solch eine Trennung aus, dass A auf der einen Seite von H liegt und B auf der anderen Seite. (Siehe Abbildung 4.1 und Abbildung 4.3.)
- ii) Ist X ein \mathbb{C} -Vektorraum, so sagen wir, dass A und B durch eine *reelle Hyperebene* getrennt werden, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} f(b) \geq \alpha$$

gelten.

- iii) Wir nennen $A \subset X$ konvex, falls für alle $x, y \in A$ auch

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\} \subset A$$

gilt.

Definition: Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und $K \subset X$. Dann ist das *Minkowski-Funktional* zu K definiert durch

$$p(x) := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in K \right\}.$$

Für $K = B_1(0)$ gilt gerade $p(x) = \|x\|$.

Lemma 4.12. Es sei K konvex, offen und $0 \in K$. Dann gilt:

- i) Das Minkowski-Funktional p zu K ist sublinear.
- ii) Es existiert ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$0 \leq p(x) \leq M \|x\|.$$

- iii) Zwischen K und p besteht folgender Zusammenhang:

$$K = \{x \in X \mid p(x) < 1\}.$$

Beweis.

- i) Seien $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in X$. Dann gilt $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, denn:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} \lambda x \in K \right\} = \inf \left\{ \alpha' \lambda \mid \frac{1}{\alpha' \lambda} \lambda x \in K \right\} \\ &= \lambda \inf \left\{ \alpha' \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha'} x \in K \right\} = \lambda p(x) \end{aligned}$$

Die \triangle -Ungleichung zeigen wir später.

- ii) Es sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $B_r(0) \subset K$ gilt. Es gilt dann für alle $x \in X$:

$$p(x) \leq \frac{1}{r} \|x\|,$$

denn:

$$\begin{aligned} p(x) &= \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in K \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \frac{1}{\alpha} x \in B_r(0) \right\} \\ &= \frac{1}{r} \|x\| \end{aligned}$$

- iii) Es sei $x \in K$. Da K offen ist, folgt $(1 + \varepsilon)x \in K$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ klein genug. Dann gilt:

$$p(x) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1.$$

Falls $p(x) < 1$ gilt, muss ein $\alpha \in (0, 1)$ geben, so dass $x/\alpha \in K$ erfüllt ist. Damit gilt:

$$x = \alpha \left(\frac{x}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) \cdot 0 \in K,$$

denn K ist nach Voraussetzung konvex.



Abbildung 4.4: Links eine konvexe Menge K , getrennt von $\{x_0\}$ durch H ; rechts eine nicht konvexe Menge, so dass diese und x_0 nicht durch eine Hyperebene H getrennt werden können

- i) Es bleibt die \triangle -Ungleichung zu zeigen. Seien $x, y \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Aus dem bisher Gezeigten folgt:

$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon}, \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in K.$$

Damit gilt also für alle $t \in [0, 1]$:

$$\frac{tx}{p(x) + \varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y) + \varepsilon} \in K.$$

Wähle nun $t = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$, dann erhalten wir

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in K \quad \text{und mit (iii) folgt} \quad p\left(\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}\right) < 1.$$

Es folgt:

$$p(x + y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Lemma 4.13. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und sei $K \subset X$ nicht-leer, offen und konvex. Sei weiter $x_0 \in K^\circ$. Dann existiert ein $x' \in X'$, so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x_0).$$

Insbesondere trennt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die reelle Hyperebene $\{\operatorname{Re} x' = \operatorname{Re} x'(x_0)\}$ somit $\{x_0\}$ und K .

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung können wir $0 \in K$ annehmen. Sei p das Minkowski-Funktional zu K . Sei weiter $U := \operatorname{span}\{x_0\}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(tx_0) := t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in U$:

$$g(x) \leq p(x)$$

und für x_0 haben wir $g(x_0) = 1 \leq p(x_0)$, da x_0 nicht in K liegt. (Achtung: tx_0 mit $t < 0$ ist kein Problem, da $g(tx_0) < 0$.)

Wende nun Hahn-Banach (Satz 4.3) an, womit wir ein $x': X \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten, mit $x'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$ und außerdem $x'|_U = g$. Insbesondere gilt also $x'(x_0) = 1$. Außerdem ist x' stetig (vgl. Lemma 4.12 (ii)). Mit Lemma 4.12 (iii) erhalten wir: für alle $x \in K$ gilt

$$x'(x) < 1.$$

Der komplexe Fall (also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) folgt aus dem Obigen und Lemma 4.4. ■

Satz 4.14 (Satz von Hahn-Banach (erste geometrische Formulierung)). Sei X ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und seien $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und disjunkt. Außerdem sei A offen. Dann existiert $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bemerkung: Ist X ein \mathbb{R} -Vektorraum, so trennt die abgeschlossene Hyperebene $\{x' = \alpha\}$ mit

$$\alpha \in \left[\sup_{a \in A} x'(a), \inf_{b \in B} x'(b) \right]$$

die Mengen A und B .

Beweis. Es sei $C := A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$. Dann ist C konvex (leichte Rechnung) und offen, denn:

$$C = \bigcup_{b \in B} \underbrace{(A - \{b\})}_{\text{offen}}.$$

Da A und B disjunkt sind, liegt 0 nicht in C . Aus Lemma 4.13 folgt die Existenz eines $x' \in X'$, welches für alle $x \in C$ die Ungleichung

$$\operatorname{Re} x'(x) < 0 = \operatorname{Re} x'(0)$$

erfüllt. Das heißt, es gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < 0 \quad \text{oder äquivalent} \quad \operatorname{Re} x'(a) < \operatorname{Re} x'(b).$$
■

Satz 4.15 (Satz von Hahn-Banach (zweite geometrische Formulierung)). Sei X ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und seien $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und disjunkt. Weiter sei A abgeschlossen und B kompakt. Dann existiert ein $x' \in X'$ sowie ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $a \in A$ und $b \in B$ die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \alpha \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon$$

gelten.

Beweis. Es sei $C := A - B$ wie bei Satz 4.14. Damit ist C konvex und abgeschlossen (siehe unten) und es gilt $0 \notin C$. Damit existiert ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_r(0) \cap C = \emptyset$ gilt. Satz 4.14 liefert: Es existiert ein $x' \in X'$ mit $x' \neq 0$, so dass für alle $a \in A$, $b \in B$ und $z \in B_1(0)$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a - b) < \operatorname{Re} x'(rz).$$

Also gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$:

$$\operatorname{Re} x'(a - b) \leq -r \|x'\|.$$

Für $\varepsilon r \|x'\|/2 > 0$ ergibt sich, dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt:

$$\operatorname{Re} x'(a) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(b) - \varepsilon.$$

Wähle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\sup_{a \in A} (x'(a) + \varepsilon) \leq \alpha \leq \sup_{b \in B} (x'(b) - \varepsilon)$$

erfüllt ist. Noch zu zeigen: C ist abgeschlossen. Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in C mit Grenzwert $c \in X$. Da B kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit $b_{n_k} \rightarrow b \in B$ für $k \rightarrow \infty$. Damit ergibt sich:

$$a_{n_k} = c_{n_k} + b_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c + b.$$

Da A abgeschlossen ist, folgt $c + b \in A$ und damit $c = (c + b) - b \in A - B = C$. ■

Im Allgemeinen lassen sich konvexe Mengen mit $A \cap B = \emptyset$ nicht trennen. Es gibt Beispiele mit A, B zusätzlich abgeschlossen, in denen Trennungen nicht möglich ist. (Siehe Übungen.)

Korollar 4.16. Sei X ein normierter Vektorraum und $U \subsetneq X$ ein Unterraum. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit $x' \neq 0$ und $x'|_U = 0$.

Beweis. Es sei $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin \overline{U}$. Wende Satz 4.15 auf $A = \overline{U}$ und $B = \{x_0\}$ an. Wir erhalten somit ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < \alpha < \operatorname{Re} x'(x_0)$ für alle $x \in \overline{U}$. Es folgt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \overline{U}$:

$$\operatorname{Re} x'(\lambda x) < \alpha.$$

Also muss schon $\operatorname{Re} x'(x) = 0$ für alle $x \in \overline{U}$ gelten. Wegen $\operatorname{Re} x'(x_0) > \operatorname{Re} x'(x) = 0$ für alle $x \in U$ ist außerdem $x' \neq 0$. ■

Bemerkung: Korollar 4.16 wird genutzt, um zu zeigen, dass ein Unterraum U dicht in einem umgebenden Raum X liegt. Kann man zeigen, dass für alle $x' \in X'$ aus $x'|_U = 0$ schon $x' = 0$ folgt, so ergibt sich $\overline{U} = X$.

Definition 4.17. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und X' der Dualraum zu X (Definition 3.1 (b)). Dann ist $X'' := (X')'$ der *Bidualraum* von X .

Wir können auf kanonische Weise eine Abbildung $J_X: X \rightarrow X''$ wie folgt definieren:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} X' \rightarrow \mathbb{K} \\ x' \mapsto x'(x) \end{pmatrix}.$$

Dann ist J_X linear und stetig, denn es gilt für alle $x' \in X'$ und alle $x \in X$ die Ungleichung $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$ und damit für alle $x \in X$:

$$\|J_X(x)\| \leq \|x\|. \quad (*)$$

Sei

$$\bar{B}_1^{X'} := \overline{B_1^{X'}(0)} = \{x' \in X' \mid \|x'\| \leq 1\}.$$

Dann gilt sogar

$$\|x\| = \sup_{x' \in \bar{B}_1^{X'}} |x'(x)| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sei $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Setze dann das Funktional

$$u': \text{span}\{x_0\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \lambda \|x_0\| \quad \text{falls } \lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } x = \lambda x_0$$

normgleich auf X fort. Es gilt dann $\|x'\| = \|u'\| = 1$ und $x'(x) = \|x\|$. Damit ist in $(*)$ sogar Gleichheit gezeigt. Insgesamt folgt:

Satz 4.18. Die Abbildung J_X ist eine (im Allgemeinen nicht surjektive) lineare Isometrie, d. h. für alle $x \in X$ gilt $\|J_X(x)\|_{X''} = \|x\|_X$. (Insbesondere ist J_X als Isometrie stets injektiv.)

Definition 4.19. Ein Banachraum X ist *reflexiv*, wenn J_X surjektiv (also bijektiv) ist.

Bemerkung: Da J_X injektiv ist, kann X mit einem Unterraum von X'' identifiziert werden.

Definition 4.20. Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein Unterraum und $N \subset X'$ ein Unterraum des Dualraums. Wir definieren dann den *Annihilator von M* als

$$\begin{aligned} M^\perp &:= \{x' \in X' \mid \forall x \in M: x'(x) = 0\} \\ &= \{x' \in X' \mid x'|_M = 0\} \end{aligned}$$

und den *Annihilator von N* als

$$N^\perp := \{x \in X \mid \forall x' \in N: x'(x) = 0\}.$$

Bemerkung 4.21.

- (i) Es ist N^\perp eine Teilmenge von X und *nicht* von X'' .
- (ii) Es sind M^\perp und N^\perp abgeschlossene Unterräume.

Satz 4.22. Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ ein Unterraum. Dann gilt

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M}.$$

Sei außerdem $N \subset X'$ ein Unterraum. Dann gilt

$$(N^\perp)^\perp \supset \overline{N}.$$

(Im Allgemeinen ist diese Inklusion echt.)



Abbildung 4.5: Epigraph einer Funktion φ

Definition 4.23.

- i) Es sei E eine Menge und $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung. Wir definieren dann

$$D(\varphi) := \{x \in E \mid \varphi(x) < \infty\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}).$$

- ii) Der *Epigraph* von φ (Abbildung 4.5) ist die Menge

$$\text{epi}(\varphi) := \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq \lambda\}.$$

Definition 4.24. Sei (E, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Abbildung $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ ist *unterhalbstetig*, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{\varphi \leq \lambda\} := \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \lambda\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \lambda}) \subset E$$

abgeschlossen ist.

Lemma 4.25. Sei (E, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $\varphi: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Es ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn $\text{epi}(\varphi)$ abgeschlossen in $E \times \mathbb{R}$ (mit der Produkttopologie) ist.
- (ii) Es ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn für alle $x \in E$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Umgebung V von x existiert, so dass für alle $y \in V$ gilt: $\varphi(y) \geq \varphi(x) \cdot \varepsilon$.



Abbildung 4.6: Die Funktion $\tilde{\varphi}$ ist *nicht* unterhalbstetig, φ schon

(iii) Ist φ unterhalbstetig, so gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in E$:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Falls E ein metrischer Raum ist, so gilt auch die Umkehrung.

(iv) Sind φ und $\tilde{\varphi}: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ unterhalbstetig, so auch $\varphi + \tilde{\varphi}$.

(v) Ist $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine Familie unterhalbstetiger Abbildungen $E \rightarrow (-\infty, \infty]$ mit

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$$

für alle $x \in E$, so ist auch φ unterhalbstetig.

(vi) Ist $E \neq \emptyset$ folgenkompakt und φ unterhalbstetig, so nimmt die Funktion φ ihr Minimum an, d. h. es existiert ein $x_0 \in E$ mit $\varphi(x_0) = \inf_{x \in E} \varphi(x)$.

Beweis. Siehe Übungen für Teile der Aussagen. Wir beweisen hier nur (vi):

Sei also E folgenkompakt und nicht leer und sei φ unterhalbstetig. Sei dann $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in E , für welche $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\inf_{x \in E} \varphi(x)$ konvergiert. Weil E folgenkompakt ist, existiert dann eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und wir definieren $x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Aus (iii) folgt dann:

$$\varphi(x_0) \leq \inf_{x \in E} \varphi(x) \leq \varphi(x_0).$$

(Dies zeigt auch, dass $\inf_{x \in E} \varphi(x) > -\infty$ gelten muss.)

■

Definition 4.26. Sei X ein Vektorraum. Eine Funktion $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ ist *konvex*, wenn φ für alle $x, y \in X$ und alle $t \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

erfüllt. (Abbildung 4.7)

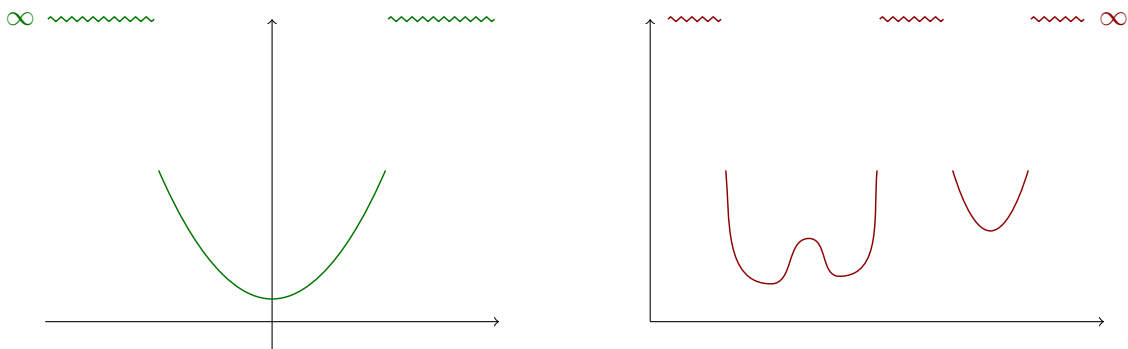


Abbildung 4.7: Konvexe Funktion links und *nicht* konvexe Funktion rechts

Lemma 4.27. Sei X ein Vektorraum.

- i) Es ist $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ genau dann konvex, wenn $\text{epi}(\varphi)$ eine konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$ ist.
- ii) Ist $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex, so ist die Menge $\{\varphi \leq \lambda\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ konvex. (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.)
- iii) Sind $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex, so auch $\varphi_1 + \varphi_2$.
- iv) Ist $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine Familie konvexer Abbildungen $X \rightarrow (-\infty, \infty]$, so ist auch

$$\sup_{i \in I} \varphi_i := \left(x \mapsto \sup_{i \in I} \varphi_i(x) \right)$$

konvex.

Ab jetzt betrachten wir vornehmlich normierte \mathbb{R} -Vektorräume.

Definition 4.28. Sei X ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und sei $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Funktion mit $D(\varphi) \neq \emptyset$ (d. h. φ ist nicht konstant ∞). Dann ist die *Legendre-Transformation* (oder *konjugierte Funktion*) von φ die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^*: X' &\rightarrow (-\infty, \infty] \\ f &\mapsto \sup_{x \in X} (f(x) - \varphi(x)). \end{aligned}$$

Bemerkung 4.29.

- (i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Ist $f \in (\mathbb{R}^n)'$, so gibt es genau einen Vektor $y_f \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = x \cdot y := \langle x, y \rangle_{\text{eukl}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir identifizieren dann $(\mathbb{R}^n)'$ mit \mathbb{R}^n vermöge

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)' &\longleftrightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\longmapsto y_f \\ (x \mapsto x \cdot y) &\longleftarrow y, \end{aligned}$$

und somit gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x \cdot y - \varphi(x)).$$

- (ii) Es ist φ^* stets konvex und unterhalbstetig. Dies folgt daraus, dass wir das Supremum betrachten und dass $f \mapsto f(x) - \varphi(x)$ konvex und stetig ist (da affin linear).
- (iii) Es gilt für alle $x \in X$ und alle $f \in X'$ die Ungleichung

$$f(x) \leq \varphi(x) + \varphi^*(f),$$

was direkt aus der Definition von φ^* folgt.

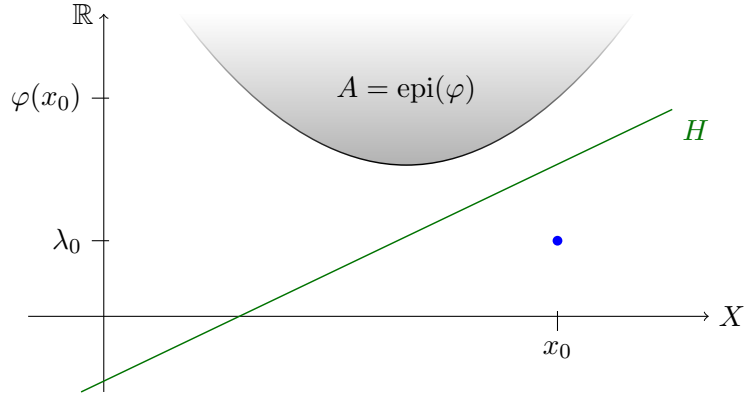


Abbildung 4.8: Skizze zum Beweis von Theorem 4.30

- (iv) Die Youngsche Ungleichung (Lemma 2.13) ist ein Spezialfall von (iii). Seien $p, p' \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und setze $\varphi(x) := \frac{1}{p} |x|^p$. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\varphi^*(y) = \frac{1}{p'} |y|^{p'}.$$

(Siehe Übungen.)

Theorem 4.30. Sei X ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig mit $D(\varphi) \neq \emptyset$. Dann gilt $D(\varphi^*) \neq \emptyset$ und φ ist von unten durch eine affin lineare Funktion beschränkt.

Beweis. Sei $x_0 \in D(\varphi)$ und sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 < \varphi(x_0)$. Wende nun die zweite geometrische Form des Satzes von Hahn-Banach (4.15) auf den Raum $X \times \mathbb{R}$, die abgeschlossene Menge $A := \text{epi}(\varphi)$ und die kompakte Menge $B := \{(x_0, \lambda_0)\}$ an. (Abbildung 4.8) Wir erhalten somit ein stetiges lineares Funktional $\Phi: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass die abgeschlossene Hyperebene $H = \{\Phi = \alpha\} \subset X \times \mathbb{R}$ die Mengen A und B trennt. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Phi((x, 0)) \end{aligned}$$

ist stetig und es gilt $f \in X'$. Mit $k := \Phi((0, 1))$ gilt für alle $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$

$$\Phi((x, \lambda)) = f(x) + k\lambda.$$

Es gilt weiter $\Phi|_A > \alpha$ und $\Phi|_B < \alpha$. Dann gilt also $f(x_0) + k\lambda_0 < \alpha$ und

$$f(x) + k\lambda > \alpha$$

für alle $(x, \lambda) \in \text{epi}(\varphi)$. Somit erhalten wir für alle $x \in D(\varphi)$:

$$f(x) + k\varphi(x) > \alpha \tag{*}$$

und für den Punkt (x_0, λ_0) :

$$f(x_0) + k\varphi(x_0) > \alpha > f(x_0) + k\lambda_0.$$

Dies zeigt $k > 0$ (da $\varphi(x_0) > \lambda_0$ nach Wahl von λ_0). Aus (\star) folgt, dass für alle $x \in D(\varphi)$ gilt:

$$-\frac{1}{k}f(x) - \varphi(x) < -\frac{\alpha}{k}.$$

Daraus folgt $\varphi^*(-\frac{1}{k}f) < \infty$ (nach Definition von φ^*) und damit

$$\varphi(x) > -\frac{1}{k}f(x) + \frac{\alpha}{k},$$

aber gerade das wollten wir zeigen. ■

Wir können auch die Funktion φ^{**} betrachten. Dies wäre eigentlich eine Abbildung von X'' nach \mathbb{R} . Wir schränken diese aber auf X ein (unter der Einbettung von X nach X'' vermöge der Isometrie J_X , siehe Definition 4.17 ff.).

Definition 4.31. Es sei $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ mit $D(\varphi) \neq \emptyset$. Wir definieren $\varphi^{**}: X \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in X$ durch

$$\varphi^{**}(x) := \sup_{f \in X'} (f(x) - \varphi^*(f)).$$

Theorem 4.32 (Fenchel-Moreau). Sei $\varphi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und $D(\varphi) \neq \emptyset$. Dann gilt $\varphi^{**} = \varphi$.

Beweis. Schritt 1: Wir setzen $\varphi \geq 0$ voraus. Da für alle $x \in X$ und alle $f \in X'$

$$f(x) - \varphi^*(f) \leq \varphi(x)$$

gilt, erhalten wir zunächst $\varphi^{**} \leq \varphi$. Angenommen es existiert ein $x_0 \in X$ mit

$$\varphi^{**}(x_0) < \varphi(x_0)$$

(wobei $\varphi(x_0) = \infty$ möglich ist). Nutze wieder den Satz von Hahn-Banach in der zweiten geometrischen Formulierung (4.15) mit $A = \text{epi}(\varphi)$ abgeschlossen und $B = \{(x_0, \varphi^{**}(x_0))\}$ kompakt. (Vgl. Beweis von Theorem 4.30.) Wir erhalten somit ein $f \in X'$ und $k, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha$ und

$$f(x) + k\lambda > \alpha. \tag{\diamond}$$

für alle $(x, \lambda) \in \text{epi}(\varphi)$. Wähle $x \in D(\varphi)$ und betrachte $\lambda \rightarrow \infty$ in der letzten Ungleichung. Es folgt $k \geq 0$. Jetzt sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da $\varphi \geq 0$ gilt, folgt aus (\diamond) , dass für alle $x \in D(\varphi)$ gilt:

$$f(x) + (k + \varepsilon)\varphi(x) \geq \alpha.$$

Somit erhalten wir für alle $x \in D(\varphi)$:

$$-\frac{1}{k+\varepsilon} f(x) - \varphi(x) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Dies zeigt:

$$\varphi^* \left(-\frac{f}{k+\varepsilon} \right) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Die Definition von φ^{**} liefert für $\varphi^{**}(x_0)$:

$$\varphi^{**}(x_0) \geq -\frac{f}{k+\varepsilon}(x_0) - \varphi^* \left(-\frac{f}{k+\varepsilon} \right) \geq -\frac{f}{k+\varepsilon}(x_0) + \frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Damit folgt

$$f(x_0) + (k+\varepsilon) \varphi^{**}(x_0) \geq \alpha,$$

was aber für $\varepsilon \rightarrow 0$ einen Widerspruch zu $f(x_0) + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha$ liefert.

Schritt 2 (allgemeiner Fall): Theorem 4.30 sichert uns $D(\varphi^*) \neq \emptyset$. Wähle dann $f_0 \in D(\varphi^*)$ und setze für alle $x \in X$

$$\bar{\varphi}(x) := \varphi(x) - f_0(x) + \varphi^*(f_0).$$

Es gilt (wie einfache Rechnungen zeigen), dass $\bar{\varphi}$ konvex und unterhalbstetig ist, und wir haben $\bar{\varphi} \geq 0$ (denn $\varphi^*(f_0) \geq f_0(x) - \varphi(x)$ für $x \in X$). Dann gilt nach Schritt 1: $(\bar{\varphi})^{**} = \bar{\varphi}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} (\bar{\varphi})^*(f) &= \sup_{x \in X} (f(x) - \bar{\varphi}(x)) = \sup_{x \in X} (f(x) - \varphi(x) + f_0(x) - \varphi^*(f_0)) \\ &= \varphi^*(f + f_0) - \varphi^*(f_0) \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} (\bar{\varphi})^{**} &= \sup_{f \in X'} (f(x) - (\bar{\varphi})^*(f)) = \sup_{f \in X'} (f(x) - \varphi^*(f + f_0) + \varphi^*(f_0)) \\ &= \sup_{f \in X'} ((f + f_0)(x) - \varphi^*(f + f_0) - f_0(x) + \varphi^*(f_0)) \\ &= \varphi^{**}(x) - f_0(x) + \varphi^*(f_0). \end{aligned}$$

Da $(\bar{\varphi})^{**} = \bar{\varphi}$ gilt, folgt $\varphi^{**} = \varphi$. ■



Abbildung 4.9: Beispiel 4.33 (i) für $\varphi(x) = |x|$ auf \mathbb{R} mit zugehörigem φ^*

Beispiele 4.33.

(i) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $\varphi(x) := \|x\|$ für alle $x \in X$. Dann gilt:

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in X} (f(x) - \varphi(x)) = (f(x) - \|x\|) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \|f\| \leq 1 \\ \infty, & \text{falls } \|f\| > 1. \end{cases}$$

Dies erhalten wir wie folgt. Es gilt:

$$\|f\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{f(x)}{\|x\|}.$$

Für $\|f\| > 1$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x)/\|x\| > 1$ und damit $f(x) - \|x\| > 0$. Ersetze nun x durch αx mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ und betrachte $\alpha \rightarrow \infty$. Es folgt:

$$\sup_{x \in X} (f(x) - \|x\|) = \infty.$$

Der andere Fall ergibt sich ähnlich. (Abbildung 4.9) Es folgt mit Theorem 4.32:

$$\|x\| = \varphi(x) = \varphi^{**}(x) = \sup_{f \in X'} (f(x) - \varphi^*(f)) = \sup_{\substack{f \in X', \\ \|f\| \leq 1}} f(x).$$

(ii) Sei X ein normierter Raum und $K \subset X$. Wir definieren die sogenannte *Indikatorfunktion* von K für alle $x \in X$ durch

$$I_K(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in K \\ \infty & \text{falls } x \notin K. \end{cases}$$

(Achtung: dies ist *nicht* die charakteristische Funktion von K .) Einfache Überlegungen liefern: I_K ist genau dann konvex, wenn K konvex ist und I_K ist genau dann unterhalbstetig, wenn K abgeschlossen ist. Die *Trägerfunktion* zu K ist dann definiert durch die konjugierte Funktion $(I_K)^*$ von I_K . Man kann nun folgende Aussagen zeigen:

– Falls $K = M \subset X$ ein Unterraum ist, so gilt:

$$(I_M)^* = I_{M^\perp}, \quad (I_M)^{**} = I_{(M^\perp)^\perp}.$$

– Falls M zusätzlich abgeschlossen ist, so gilt

$$(I_M)^{**} = I_M \quad \text{und somit} \quad (M^\perp)^\perp = M.$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\emptyset \neq K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ erhalten wir $(I_K)^*$ als Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} :

$$(I_K)^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (x \cdot y - I_K(x)) = \sup_{x \in [a, b]} x \cdot y = \begin{cases} by, & \text{falls } y \geq 0 \\ ay, & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

(Siehe Abbildung 4.10.)



Abbildung 4.10: Beispiel 4.33 (ii) für $K = [a, b]$ mit $a = -3$ und $b = 1$

(iii) Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{|x|} = \infty.$$

Dann gilt: In

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \cdot y - g(x))$$

wird das Supremum für ein endliches $x \in \mathbb{R}$ angenommen (da $x \cdot y - g(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$). Berechne x maximal als Lösung von $y - g'(x) = 0$. Falls g' streng monoton ist, gibt es höchstens eine solche Lösung. Für $y \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$g^*(y) = (g')^{-1}(y) y - g((g')^{-1}(y)).$$

Falls $g \in C^2$ gilt, so können wir folgende Rechnung machen:

$$\begin{aligned} (g^*)'(y) &= (g')^{-1}(y) + ((g')^{-1}(y))' y - g'((g')^{-1}(y)) ((g')^{-1}(y))' \\ &= (g')^{-1}(y). \end{aligned}$$

Das heißt, dass wir unter geeigneten Voraussetzungen an g die Formel

$$(g^*)'(y) = (g')^{-1}(y)$$

erhalten. In der Theorie erhalten wir dann g^* , indem wir g ableiten, die Umkehrfunktion von g' bestimmen und zu dieser eine Stammfunktion finden.

5 Bairescher Kategoriensatz und seine Konsequenzen

Satz 5.1 (Bairescher Kategoriensatz). Sei (X, d) ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum. Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von in X abgeschlossenen Mengen und gelte

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass das Innere von A_{k_0} nicht leer ist, d. h. so dass $A_{k_0}^\circ \neq \emptyset$ gilt.

Beweis. Angenommen für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $A_k^\circ = \emptyset$. Dann ist für alle offenen, nicht-leeren Teilmengen $U \subset X$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Menge $U \setminus A_k$ offen und nicht leer; insbesondere existiert in dieser Situation ein $x \in X$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, o. E. $\varepsilon \leq 1/k$, mit

$$\overline{B_\varepsilon(x)} \subset (U \setminus A_k).$$

Wir wählen für den ersten Schritt $U = X$ und konstruieren dann auf obige Weise induktiv Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X und $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon_k \leq 1/k \quad \text{und} \quad \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset (B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k)$$

gilt. Dann ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X , denn: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es nach Konstruktion ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_k \leq \varepsilon$ und für alle $\ell \in \mathbb{N}_{\geq k}$ gilt dann

$$x_\ell \in B_{\varepsilon_k}(x_k).$$

Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Weil für alle $k \in \mathbb{N}$ fast alle Folgenglieder von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im abgeschlossenen ε_k -Ball um x_k liegen, muss dies auch für den Grenzwert x gelten, d. h. für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset X \setminus A_k.$$

Es folgt der Widerspruch

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (X \setminus A_k) = X \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset. \quad \blacksquare$$

Bemerkung:

Die Vollständigkeit von X ist hier entscheidend. Als Gegenbeispiel betrachte man $X = \mathbb{Q}$.

Satz 5.2 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$. Es gelte für alle $x \in X$:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty.$$

Dann existieren ein $x_0 \in X$, ein $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass gilt:

$$\forall x \in \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \quad \forall f \in \mathcal{F}: \quad \|f(x)\|_Y \leq C.$$

Beweis. Die Menge

$$A_k := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{x \in X \mid \|f(x)\|_Y \leq k\}$$

ist für alle $k \in \mathbb{N}$ abgeschlossen. Außerdem gibt es nach Voraussetzung für alle $x \in X$ ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt: $\|f(x)\| \leq k$. Also gilt

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Der Bairesche Kategoriensatz (5.1) liefert: es existieren $k_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \subset A_{k_0}.$$

■

Satz 5.3 (Banach-Steinhaus). Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subset L(X, Y)$. Für alle $x \in X$ gelte: $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty$. Dann folgt schon

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty.$$

Beweis. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 5.2) liefert: es gibt $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$\|x - x_0\| \leq \varepsilon_0 \implies \forall T \in \mathcal{T}: \|Tx\| \leq C.$$

Damit folgt, dass für alle $x \in \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)}$ und alle $T \in \mathcal{T}$ gilt:

$$\left\| T \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon_0} \right) \right\| \leq \frac{C + \sup_{\tilde{T} \in \mathcal{T}} \|\tilde{T}x_0\|_Y}{\varepsilon_0} =: C_0.$$

Es folgt $\|T\| \leq C_0$, denn $\frac{x - x_0}{\varepsilon_0}$ nimmt alle Vektoren der Norm kleiner-gleich eins an.

■

Bemerkung 5.4.

- (i) Der Satz von Banach-Steinhaus (5.3) liefert das erstaunliche Resultat, dass eine punktweise beschränkte Familie von stetigen linearen Operatoren schon beschränkt in der Operatornorm ist.

- (ii) Punktweise Grenzwerte von stetigen Funktionen sind im Allgemeinen nicht stetig. Aus dem Satz von Banach-Steinhaus (5.3) folgt aber, dass dies für lineare Abbildungen doch gilt.
- (iii) Ist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von linearen Operatoren mit punktwisem Grenzwert T , so gilt im Allgemeinen nicht $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Es gilt aber eine etwas schwächere Aussage, siehe Korollar 5.5.

Korollar 5.5. Seien X und Y Banachräume. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X, Y)$, so dass für alle $x \in X$ die Folge $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y konvergiert. Setzen wir

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$$

für alle $x \in X$, so gilt:

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$
- (b) $T \in L(X, Y)$
- (c) $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$

Beweis. Zunächst ist aufgrund der Linearität des Grenzwerts klar, dass auch T linear ist. Aussage (a) folgt unmittelbar aus dem Satz von Banach-Steinhaus (5.3). Es existiert somit ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, welches $\|T_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Somit gilt für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|T_n x\| &\leq \|T_n\| \cdot \|x\| \\ &\leq C \|x\| \end{aligned}$$

Aus der unteren Ungleichung erhalten wir im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ für alle $x \in X$ die Ungleichung $\|Tx\| \leq C \|x\|$, woraus folgt, dass T stetig ist. Damit ist also (b) gezeigt. Aus der oberen Ungleichung erhalten wir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\|,$$

und weil $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $x \in X$ konvergiert, gilt für alle $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$ (mithilfe der Stetigkeit der Norm):

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|.$$

Daraus folgt (c). ■

Korollar 5.6. Sei Z ein Banachraum über \mathbb{K} und $B \subset Z$ eine Teilmenge von Z . Für alle $f \in Z'$ sei $f(B) \subset \mathbb{K}$ beschränkt. Dann ist B beschränkt in Z .

Beweis. Nutze Banach-Steinhaus (Satz 5.3) mit (in den dortigen Bezeichnern) $X = Z'$, $Y = \mathbb{K}$ und

$$\mathcal{T} = \{J_{Z'}(b) \mid b \in B\} \subset Z''$$

(mit $J_{Z'}$ wie nach Definition 4.17, d. h. für $b \in B$ und $f \in Z'$ gilt $J_{Z'}(b)(f) = f(b)$). Nach Voraussetzung gilt für alle $f \in Z'$:

$$\sup_{b \in B} |J_{Z'}(b)(f)| = \sup_{b \in B} |f(b)| < \infty.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus gilt also:

$$\sup_{b \in B} \|J_{Z'}(b)\| = \sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty.$$

Nach Satz 4.18 ist J_X aber eine Isometrie, also folgt

$$\sup_{b \in B} \|b\| = \sup_{b \in B} \|J_{Z'}(b)\| < \infty,$$

aber dies bedeutet gerade, dass B in Z beschränkt ist. ■

Bemerkung: Im endlich-dimensionalen besagt dieses Korollar: Eine Menge ist beschränkt, falls die Projektion auf alle Komponenten beschränkt ist. (Das Korollar ist also eine Verallgemeinerung dieser Tatsache.)

Korollar 5.7. Sei Z ein Banachraum über \mathbb{K} und sei $A \subset Z'$ eine Teilmenge des Dualraums. Sei außerdem für alle $x \in Z$ die Menge

$$A(x) := \{f(x) \mid f \in A\}$$

beschränkt in \mathbb{K} . Dann ist A beschränkt in Z' .

Beweis. Folgt unmittelbar aus Banach-Steinhaus (Satz 5.3) mit (in den dortigen Bezeichnern) $X = Z$, $Y = \mathbb{K}$ und $\mathcal{T} = A$. ■

Definition 5.8. Seien X, Y topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist f *offen*, wenn Bilder offener Mengen offen sind, d. h. wenn für alle in X offenen Teilmengen $U \subset X$ auch $f(U)$ offen in Y ist.

Bemerkung: Sind X, Y normierte Räume und ist f linear, so ist f genau dann offen, wenn es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$B_\delta(0) \subset f(B_1(0)).$$

Satz 5.9 (Satz von der offenen Abbildung). Seien X und Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Dann ist T genau dann surjektiv, wenn T offen ist.

Beweis. „ \Leftarrow “: Es existiert also ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$B_\delta(0) \subset T(B_1(0)).$$

Durch Skalierung erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$B_{k\delta}(0) \subset T(B_k(0)).$$

Daraus folgt, dass T surjektiv ist.

„ \Rightarrow “: Weil T surjektiv ist, gilt

$$Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\overline{T(B_k(0))}}_{=: A_k}.$$

Wir wenden den Bairescher Kategoriensatz (5.1) auf die Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ an und erhalten somit $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, $y_0 \in Y$, $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)} \subset \overline{T(B_{k_0}(0))}.$$

Sei $y \in \overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)}$, dann gilt $y_0 + y \in \overline{B_{\varepsilon_0}(y_0)}$. Wähle dann eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $B_{k_0}(0)$ mit

$$Tx_n \rightarrow y_0 + y \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Sei außerdem $x_0 \in X$ mit $Tx_0 = y_0$. Dann erhalten wir

$$T(x_n - x_0) = Tx_n - y_0 \rightarrow y \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt:

$$T\left(\underbrace{\frac{x_n - x_0}{k_0 + \|x_0\|}}_{\in B_1(0)}\right) \rightarrow \underbrace{\frac{y}{k_0 + \|x_0\|}}_{\in B_\delta(0)} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

mit $\delta := \frac{\varepsilon_0}{k_0 + \|x_0\|}$. Das bedeutet aber:

$$B_\delta(0) \subset \overline{T(B_1(0))}.$$

Um die Behauptung zu zeigen, benötigen wir diese Inklusion aber ohne den Abschluss auf der rechten Seite. Sei dazu nun $y \in B_\delta(0)$. Dann gibt es ein $x \in B_1(0)$ mit $\|y - Tx\| < \delta/2$. Daraus folgt:

$$2(-Tx + y) \in B_\delta(0).$$

Indem wir $y_1 := y$ setzen, erhalten wir so induktiv Folgen $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $B_\delta(0)$ und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $B_1(0)$ mit folgender Eigenschaft für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$y_{k+1} = 2(y_k - Tx_k).$$

Es folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$2^{-k}y_{k+1} = 2^{-k+1}y_k - \underbrace{T(2^{-k+1}x_k)}_{=: a_k}$$

oder durch umstellen

$$a_k = 2^{-(k-1)}y_k - 2^{-k}y_{k+1}.$$

Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{k=1}^m a_k$ offenbar eine Teleskopsumme, also gilt:

$$\sum_{k=1}^m a_k = y_1 - 2^{-m} y_{m+1}.$$

Da $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gilt $2^{-m} y_{m+1} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$. Also erhalten wir:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T\left(\sum_{k=1}^m 2^{-(k-1)} x_k\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_k = y_1.$$

Außerdem konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} x_k$ in X , denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|2^{-(k-1)} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

womit man leicht zeigt, dass $(\sum_{k=1}^m 2^{-(k-1)} x_k)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X ist (und damit auch konvergent, aufgrund der Vollständigkeit von X). Sei also $\tilde{x} := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} x_k$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von T auch $T(\tilde{x}) = y_1 = y$ und aus der obigen Betrachtung folgt außerdem $\|\tilde{x}\| \leq 2 < 3$. Also gilt $B_{\delta}(0) \subset T(B_3(0))$ und durch Skalierung erhalten wir wie gewünscht:

$$B_{\delta/3}(0) \subset T(B_1(0)).$$

■

Satz 5.10 (Satz von der inversen Abbildung). Seien X und Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$ bijektiv. Dann gilt: $T^{-1} \in L(Y, X)$.

Beweis. Weil T surjektiv ist, liefert der Satz von der offenen Abbildung (5.9), dass T offen ist. Daraus folgt unmittelbar, dass T^{-1} stetig ist.

■

Korollar 5.11. Sei X ein Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_{\textcircled{1}}$ und $\|\cdot\|_{\textcircled{2}}$. Außerdem gebe es ein $C_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichung $\|x\|_{\textcircled{2}} \leq C_1 \|x\|_{\textcircled{1}}$ gilt. Sei weiter $(X, \|\cdot\|_{\textcircled{1}})$ ein Banachraum. Dann gilt: $(X, \|\cdot\|_{\textcircled{2}})$ ist genau dann ein Banachraum, wenn es ein $C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $\|x\|_{\textcircled{1}} \leq C_2 \|x\|_{\textcircled{2}}$ für alle $x \in X$.

Beweis. „ \Leftarrow “ ist klar.

„ \Rightarrow “: Die Identität

$$\text{id}: (X, \|\cdot\|_{\textcircled{1}}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_{\textcircled{2}})$$

ist stetig und bijektiv. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert:

$$\text{id}^{-1}: (X, \|\cdot\|_{\textcircled{2}}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_{\textcircled{1}})$$

ist stetig. Daraus erhalten wir eine Konstante C_2 wie gefordert.

■

Satz 5.12 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien X und Y Banachräume, $D(T)$ ein Unterraum von X und sei $T: D(T) \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Sei

$$\text{graph}(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y \mid x \in D(T)\}$$

der Graph von T in $X \times Y$. Dabei wird $X \times Y$ zu einem Banachraum bezüglich folgender Norm:

$$\|\cdot\|: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y) \mapsto \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Dann gilt: Ist $D(T)$ abgeschlossen, so ist $\text{graph}(T)$ genau dann abgeschlossen in $X \times Y$, wenn $T \in L(D(T), Y)$ gilt.

Beweis. „ \Leftarrow “: klar, denn: Sei $(x_n, Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\text{graph}(T)$, die in $X \times Y$ konvergiert. Sei $x \in X$ der Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so gilt wegen der Stetigkeit von T auch $Tx_n \rightarrow Tx$ für $n \rightarrow \infty$, aber $(x, Tx) \in \text{graph}(T)$ gilt nach Definition von $\text{graph}(T)$.

„ \Rightarrow “: Da $\text{graph}(T)$ abgeschlossen ist, muss dieser Raum (mit der Einschränkung der Norm von $X \times Y$) ein Banachraum sein. Seien P_X und P_Y die Projektionen $X \times Y \rightarrow X$ bzw. $X \times Y \rightarrow Y$. Dann sind P_X, P_Y stetig und linear und P_X ist bijektiv von $\text{graph}(T)$ auf $D(T)$. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert:

$$P_X^{-1} \in L(D(T), \text{graph}(T)).$$

Daraus folgt: $T = P_Y P_X^{-1} \in L(D(T), Y)$. ■

5.13 (Projektoren). Sei Z ein Vektorraum und $A \subset Z$. Sei weiter X ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein Unterraum.

- (1) Eine Abbildung $P: Z \rightarrow Z$ ist eine *Projektion auf A* , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$P(Z) \subset A \quad \text{und} \quad P|_A = \text{Id}_A.$$

Äquivalent kann man fordern:

$$P(Z) = A \quad \text{und} \quad P^2 = P \circ P = P.$$

Es folgt:

$$P(\text{Id} - P) = (\text{Id} - P)P = 0.$$

Beispiel: orthogonale Projektionen im euklidischen Raum sind Projektionen.

- (2) Sei $P: X \rightarrow Y$ eine lineare Projektion auf Y . Dann gilt $Y = R(P)$ und $\text{Id} = (\text{Id} - P) + P$ und $(\text{Id} - P)$ ist eine Projektion auf $N(P)$. (Zur Definition des Bildraums $R(\cdot)$ und des Nullraums $N(\cdot)$, siehe Definition 3.6.)

Es gilt $X = N(P) \oplus R(P) = R(\text{Id} - P) \oplus N(\text{Id} - P)$, $N(P) = R(\text{Id} - P)$ und $R(P) = N(\text{Id} - P)$, denn:

Für $x \in X$ gilt: $x = (x - Px) + Px$ mit $(x - Px) \in N(P)$ und $Px \in R(P)$. Ist $x \in N(P) \cap R(P)$, so gilt $Px = 0$ und $x = Px$, also $x = 0$. Außerdem gelten folgende Äquivalenzen:

$$x \in N(\text{Id} - P) \iff x - Px = 0 \iff x = Px \iff x \in R(P).$$

Also gilt $N(\text{Id} - P) = R(P)$.

- (3) Eine Abbildung $P: X \rightarrow X$ ist ein *Projektor auf Y* , falls P eine stetige lineare Projektion auf Y ist. Es sei

$$\text{Pr}(X) := \{P: X \rightarrow X \mid P \text{ ist Projektor}\}.$$

Falls P ein Projektor ist, so ist klarerweise auch $\text{Id} - P$ ein Projektor und $N(P)$ sowie $R(P) = N(\text{Id} - P)$ sind abgeschlossen.

Satz 5.14 (Satz vom abgeschlossenen Komplement). Sei X ein Banachraum und seien Y und Z Unterräume von X . Außerdem gelte $X = Z \oplus Y$ und Y sei abgeschlossen. Dann gilt: Der Unterraum Z ist genau dann abgeschlossen, wenn es einen stetigen Projektor P auf Y mit $N(P) = Z$ gibt.

Beweis. „ \Leftarrow “ ist klar, da P stetig ist.

„ \Rightarrow “: Sei $\tilde{X} := Z \times Y$. Definiere

$$T: \tilde{X} \rightarrow X, \quad (z, y) \mapsto z + y.$$

Dann ist T linear, bijektiv und stetig (wie man mithilfe der Δ -Ungleichung einsieht). Weil Y und Z abgeschlossen sind, ist auch \tilde{X} ein abgeschlossener Unterraum von $X \times X$ und damit ein Banachraum. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert $T^{-1} \in L(X, \tilde{X})$. Sei

$$P: X \rightarrow Y, \quad z + y \mapsto y \quad (\text{mit } z \in Z \text{ und } y \in Y).$$

Dann ist P eine lineare Projektion auf Y und es gilt $N(P) = Z$. Außerdem ist P stetig, denn es gilt $P = P_Y T^{-1}$, wobei P_Y die Projektion $\tilde{X} \rightarrow Y$ auf die zweite Komponente ist. Damit ist P der gesuchte Projektor. ■

Definition 5.15. Seien X und Y normierte Vektorräume und $T \in L(X, Y)$. Dann ist der *adjungierte Operator T'* die Abbildung

$$T': Y' \rightarrow X' \\ y' \mapsto \begin{pmatrix} X \mapsto \mathbb{K} \\ x \mapsto y'(Tx) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Es gilt

$$|(T'y')(x)| = |y'(Tx)| \leq \|y'\| \cdot \|Tx\| \leq \|y'\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

für alle $y' \in Y'$ und alle $x \in X$. Dies zeigt, dass T' wohldefiniert ist ($T'y' \in X'$ für alle $y' \in Y'$) und dass $\|T'y'\| \leq \|y'\| \cdot \|T\|$ gilt. Daraus folgt $T' \in L(Y', X')$.

Beispiel 5.16 (Shift-Operator). Wir betrachten auf ℓ^2 über \mathbb{R} den Shift-Operator

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, \dots).$$

Wir möchten nun T' bestimmen. Später zeigen wir: $(\ell^2)'$ kann mit ℓ^2 identifiziert werden. Jedes $x \in \ell^2$ definiert einen linearen Operator auf ℓ^2 durch $x'(y) = (x, y)_{\ell^2} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ für alle $y \in \ell^2$. Dies liefert schon $(\ell^2)'$. Wir fordern für $y' \in (\ell^2)'$, dargestellt durch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$y'(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} y_n = \sum_{n=2}^{\infty} x_n \tilde{y}_n \stackrel{!}{=} (T' y')(x),$$

wobei $\tilde{y}_n = y_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dies zeigt, dass

$$T': Y' \rightarrow X', \quad (y_1, y_2, \dots) \mapsto (0, y_1, y_2, \dots)$$

gilt. Dabei haben wir $TT' = \text{Id}$, aber $T'T \neq \text{Id}$.

Satz 5.17. Seien X und Y normierte Räume.

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} ' : L(X, Y) &\rightarrow L(Y', X') \\ y &\mapsto y' \end{aligned}$$

ist eine lineare Isometrie.

(ii) Sei Z ein weiterer normierter Raum. Dann gilt für alle $T \in L(X, Y)$ und $S \in L(Y, Z)$ gilt $(ST)' = T'S'$.

Beweis.

(i) Die Linearität rechnet man leicht nach. Sei $T \in L(X, Y)$. Dann gilt für alle $y' \in Y'$

$$\|T'y'\| \leq \|y'\| \cdot \|T\|, \quad \text{woraus} \quad \|T'\| \leq \|T\| \quad \text{folgt.}$$

Dass wir tatsächlich auch Gleichheit haben, sehen wir wie folgt ein (– um die Notation übersichtlicher zu halten, bezeichne $\bar{B}_1^X := \overline{B_1^X(0)}$ die abgeschlossene Einheitskugel in X und $\bar{B}_1^{Y'} := \overline{B_1^{Y'}(0)}$ diejenige in Y'):

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in \bar{B}_1^X} \|Tx\| = \sup_{x \in \bar{B}_1^X} \sup_{y' \in \bar{B}_1^{Y'}} |y'(Tx)| \\ &= \sup_{y' \in \bar{B}_1^{Y'}} \sup_{x \in \bar{B}_1^X} |y'(Tx)| = \sup_{y' \in \bar{B}_1^{Y'}} \|T'y'\| = \|T'\|. \end{aligned}$$

(Die zweite Gleichheit gilt dabei nach Satz 4.18.)

(ii) Seien $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$ und $z' \in Z'$ sowie $x \in X$. Dann gilt:

$$((ST)'z')(x) = z'(STx) = (S'z')(Tx) = (T'S'z')(x).$$

Es folgt die Behauptung. ■

Mit Hilfe der adjungierten Abbildung können wir die Lösbarkeit von linearen Gleichungen untersuchen. Dazu benötigen wir zunächst einige Hilfsaussagen.

Satz 5.18. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Dann gilt

$$\overline{R(T)} = (N(T'))^\perp.$$

Beweis. „ \subset “: Sei $x \in X$ und $y := Tx \in R(T)$. Gilt $y' \in N(T')$, so folgt

$$y'(y) = y'(Tx) = \underbrace{(T'y')(x)}_{=0} = 0.$$

Es folgt $R(T) \subset (N(T'))^\perp$. Da $N(T')^\perp$ abgeschlossen ist (Bemerkung 4.21 (ii)), folgt

$$\overline{R(T)} \subset (N(T'))^\perp.$$

„ \supset “: Setze $U := \overline{R(T)}$. Es sei $y \notin U$. Zeigen wir nun $y \notin (N(T'))^\perp$, so sind wir fertig. Aus Korollar 4.16 erhalten wir ein $y' \in Y'$ mit $y'|_U = 0$ und $y'(y) \neq 0$. Insbesondere gilt $y'(Tx) = 0$ für alle $x \in X$. Also haben wir sicher $y' \in N(T')$ und wegen $y'(y) \neq 0$ gilt auch $y' \notin (N(T'))^\perp$. ■

Korollar 5.19. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Sei weiter $R(T)$ abgeschlossen und $y \in Y$. Dann ist $Tx = y$ genau dann lösbar, wenn $y'(y) = 0$ für alle $y' \in N(T')$.

Beweis. Die Hinrichtung ist klar. Zur Rückrichtung: Aus $y'(y) = 0$ für alle $y' \in N(T')$ folgt sofort $y \in (N(T'))^\perp$ und damit:

$$y \in (N(T'))^\perp = \overline{R(T)} = R(T).$$

■

Bemerkung:

- (i) Korollar 5.19 liefert die Existenz einer Lösung durch Bedingungen an den Nullraum von T' .
- (ii) Falls T' injektiv ist, brauchen wir im Fall, dass $R(T)$ abgeschlossen ist, *keine* Zusatzbedingungen mehr, denn: Mit $N(T') = \{0\}$ und $R(T)$ abgeschlossen sind die Voraussetzungen aus Korollar 5.19 sicher erfüllt.

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, die Abgeschlossenheit von $R(T)$ zu überprüfen. Wir wollen nun also Kriterien finden, die dies vereinfachen.

Satz 5.20. Sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Unterraum. Dann wird durch

$$X/U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \hat{x} \mapsto \inf_{y \in \hat{x}} \|y\|$$

eine Norm auf dem Quotientenvektorraum definiert. Ist X vollständig, so auch X/U .

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe.

Lemma 5.21. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Sei weiter $R(T)$ abgeschlossen. Dann existiert ein $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall y \in R(T) \exists x \in X: Tx = y \wedge \|x\| \leq K\|y\|.$$

Beweis. Sei \hat{T} die lineare und stetige Bijektion, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & R(T) \\ \downarrow & \nearrow \hat{T} & \\ X/N(T) & & \end{array}$$

(dabei sei die vertikale Abbildung die kanonische Projektion). Da $R(T)$ abgeschlossener Teilraum des Banachraums Y ist, ist auch $R(T)$ ein Banachraum. Auch $X/N(T)$ ist ein Banachraum, da $N(T)$ abgeschlossen ist. Der Satz von der inversen Abbildung (5.10) liefert, dass \hat{T}^{-1} stetig ist. Also existiert ein $\hat{K} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\|\hat{T}^{-1}y\| \leq \hat{K}\|y\|$. Mit der Definition der Norm auf $X/N(T)$ folgt: Es existiert ein $x \in \hat{T}^{-1}y$ mit $\|x\| \leq (\hat{K} + 1)\|y\|$ und da $\hat{T}^{-1}y$ gerade alle $x \in X$ mit $Tx = y$ enthält, folgt die Behauptung. ■

Lemma 5.22. Seien X, Y Banachräume über \mathbb{K} und sei $T \in L(X, Y)$. Weiter sei $K \in \mathbb{R}_{> 0}$, so dass für alle $y' \in Y'$ gilt:

$$K\|y'\| \leq \|T'y'\|.$$

Dann ist T offen und insbesondere surjektiv.

Beweis. Es bezeichne $U_\varepsilon := B_\varepsilon^X(0)$ den offenen ε -Ball in X und $V_\varepsilon := B_\varepsilon^Y(0)$ denjenigen in Y . Bei der Betrachtung offener Abbildungen hatten wir schon gesehen, dass es genügt $V_K \subset T(U_1)$ zu zeigen. Wie im Beweis des Satzes von der offenen Abbildung (5.9) genügt es sogar, $V_K \subset \overline{T(U_1)} =: D$ zu zeigen. Sei $y_0 \in V_K$, d. h. $\|y_0\| < K$. Angenommen es gilt $y_0 \notin D$. Dann existiert nach Hahn-Banach in der zweiten geometrischen Formulierung (Satz 4.15) ein $y' \in Y'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} y'(y) \leq \alpha < \operatorname{Re} y'(y_0) \leq |y'(y_0)|$$

für alle $y \in D$. Wegen $0 \in D$ und $y'(0) = 0$ gilt $0 \leq \alpha$. Wegen der echten Ungleichheit in $\alpha < \operatorname{Re} y'(y_0)$ können wir o. E. $\alpha > 0$ annehmen und indem wir y' durch y'/α ersetzen, können wir annehmen, dass $\alpha = 1$ gilt. Weil T linear ist, liegt für alle $y \in D$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$ auch λy in D . Ist also $y \in D$ mit $y'(y) \neq 0$, so gilt auch $y|y'(y)|/y'(y) \in D$, und damit folgt:

$$|y'(y)| = y'(y) \frac{|y'(y)|}{y'(y)} = y' \left(y \frac{|y'(y)|}{y'(y)} \right) \leq 1.$$

Also gilt für alle $y \in D$ sogar

$$|y'(y)| \leq 1 < |y'(y_0)|.$$

Für alle $x \in U_1$ (und damit $Tx \in D$) gilt somit

$$|y'(Tx)| = |(T'y')(x)| \leq 1,$$

woraus wir $\|T'y'\| \leq 1$ erhalten.

Es folgt

$$1 < |y'(y_0)| \leq \|y'\| \|y_0\| \leq K \|y'\| \leq \|T'y'\| \leq 1,$$

ein Widerspruch. Also muss doch $y_0 \in D$ gelten und damit sind wir fertig. ■

Bemerkung: Aus Satz 5.18 und Korollar 5.19 erhalten wir, dass T' genau dann injektiv ist, wenn T dichtes Bild hat. Außerdem folgt aus der Injektivität von T' und abgeschlossenem $R(T)$, dass T surjektiv ist. Obiges Lemma 5.22 verschärft diese Aussage noch.

Satz 5.23 (Satz vom abgeschlossenen Bild). Seien X, Y Banachräume über \mathbb{K} und sei $T \in L(X, Y)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $R(T)$ ist abgeschlossen

(ii) $R(T) = (N(T'))^\perp$

(iii) $R(T')$ ist abgeschlossen

(iv) $R(T') = (N(T))^\perp$

Beweis. „(i) \Leftrightarrow (ii)“ folgt aus Satz 5.18.

„(i) \Rightarrow (iv)“: Es gilt stets $R(T') \subset (N(T))^\perp$ (da $T'y'(x) = y'(Tx) = 0$ für alle $x \in N(T)$). Sei $x' \in (N(T))^\perp$. Betrachte dann die Abbildung

$$z': R(T) \rightarrow \mathbb{K}, \quad y \mapsto x'(x) \quad \text{falls } Tx = y.$$

Es ist z' wohldefiniert, denn: für $x_1, x_2 \in X$ mit $Tx_1 = y = Tx_2$ gilt $T(x_1 - x_2) = 0$, also $x_1 - x_2 \in N(T)$, also $x'(x_1 - x_2) = 0$, also $x'(x_1) = x'(x_2)$. Die Abbildung z' ist auch stetig, denn: Aus Lemma 5.21 erhalten wir ein $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass für alle $y \in R(T)$ ein $x \in X$ existiert mit $Tx = y$ und $\|x\| \leq K\|y\|$. Für solche x gilt:

$$|z'(y)| = |x'(x)| \leq \|x'\| \|x\| \leq K \|x'\| \|y\|.$$

Daraus folgt die Stetigkeit von z' . Wir setzen nun z' mittels Satz 4.6 zu $y' \in Y'$ fort. Dann gilt $x' = T'y'$, denn für alle $x \in X$ gilt

$$x'(x) = z'(Tx) = y'(Tx) = (T'y')(x).$$

Dies zeigt $(N(T))^\perp \subset R(T')$.

„(iv) \Rightarrow (iii)“: Klar, da $((N(T))^\perp)^\perp$ stets abgeschlossen ist (Bemerkung 4.21).

„(iii) \Rightarrow (i)“: Definiere $Z := \overline{R(T)}$ und $S \in L(X, Z)$ durch $Sx := Tx$ für alle $x \in X$. Für $y' \in Y'$ und $x \in X$ gilt dann

$$(T'y')(x) = y'(Tx) = y'|_Z(Sx) = (S'(y'|_Z))(x).$$

D. h. $T'y' = S'(y'|_Z)$. Dies zeigt $R(T') \subset R(S')$. Ist $S'(z') \in R(S')$, so gilt für jede gemäß Satz 4.6 gewählte Fortsetzung $y' \in Y'$ von $z' \in Z'$ (nach demselben Argument wie oben) $S'z' = T'y'$. Dies zeigt $R(T') = R(S')$. Nach Voraussetzung ist somit $R(S')$ abgeschlossen.

Nach Satz 5.18 gilt $\overline{R(S)} = (N(S'))^\perp$ und da S dichtes Bild hat, folgt, dass S' injektiv ist. Also ist S' eine stetige Bijektion zwischen den Banachräumen Z' und $R(S')$. Aus dem Satz von der inversen Abbildung (5.10) folgt:

$$\exists C \in \mathbb{R}_{>0} \forall z' \in Z': \quad C\|z'\| \leq \|S'z'\|.$$

Lemma 5.22 liefert $R(S) = Z$. Damit gilt aber auch $R(T) = Z$ und weil Z nach Definition abgeschlossen ist, hat T somit abgeschlossenes Bild. ■

Bemerkung 5.24. Oft ist es einfacher zu zeigen, dass $R(T')$ abgeschlossen ist, als $R(T)$ zu bestimmen. Dann erhält man mit dem Satz vom abgeschlossenen Bild (5.23) direkt: $R(T)$ abgeschlossen, $R(T) = (N(T'))^\perp$. Man bekommt also Informationen über $R(T)$, indem man T' betrachtet.

Beispiel: Ist T' injektiv, dann folgt $N(T) = \{0\}$ und daraus $R(T) = (N(T'))^\perp = Y$.

6 Hilberträume

Siehe 2.7 (c). Eine wichtige Eigenschaft von Hilberträumen ist, dass stets orthogonale Projektionen auf abgeschlossene, konvexe Teilmengen existieren.

Satz 6.1 (Projektionssatz). Sei H ein Hilbertraum, $K \subset H$ eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Dann existiert für jedes $f \in H$ ein eindeutiges $u \in K$, so dass gilt:

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| = \text{dist}(f, K).$$

Das Element $u \in H$ ist eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$u \in K \quad \text{und für alle } v \in K \text{ gilt} \quad \text{Re}\langle f - u, v - u \rangle \leq 0.$$

Das Element u nennen wir dann *Projektion von f auf K* und wir schreiben dafür $u = P_K(f)$.

Beweis. Wähle eine Minimalfolge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K für das Infimum $\text{dist}(f, K)$, also mit $d_n := \|f - v_n\| \rightarrow \inf_{v \in K} \|f - v\| =: d$. Wir behaupten, dass dann $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schon eine Cauchyfolge sein muss. Dazu wenden wir die Parallelogramm-Identität (Satz 2.8 (3)) auf $f - v_n$ und $f - v_m$ an. Wir erhalten:

$$\|2f - (v_n + v_m)\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2(d_n^2 + d_m^2).$$

Da K konvex ist, gilt $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$, und es folgt:

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d.$$

Nach Multiplizieren der vorherigen Ungleichung mit 1/4 folgt somit:

$$\left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tatsächlich eine Cauchy-Folge. Weil K eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raums ist, ist K insbesondere vollständig. Also konvergiert $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K und es gibt ein $v \in K$ mit $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Für dieses gilt dann

$$\|f - v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\| = d = \text{dist}(f, K).$$

Wir zeigen nun, dass die beiden Charakterisierungen aus der Behauptung äquivalent sind. Sei hierzu für $u \in K$ die erste Bedingung erfüllt. Wähle $w \in K$. Dann folgt für $t \in [0, 1]$

$$v = (1 - t)u + tw \in K.$$

Damit erhalten wir für alle $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \|f - u\| &\leq \|f - (1 - t)u + tw\| = \|(f - u) - t(w - u)\| \\ \implies \|f - u\|^2 &\leq \|f - u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle f - u, w - u \rangle + t^2\|w - u\|^2 \\ \implies 2\operatorname{Re}\langle f - u, w - u \rangle &\leq t^2\|w - u\|^2 \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow 0$ erhalten wir die zweite Charakterisierung. Sei umgekehrt letztere gegeben für $u \in K$. Dann gilt

$$\|w - f\|^2 - \|v - f\|^2 = \|u - f\|^2 - \|v - u + (u - f)\|^2 = 2\operatorname{Re}\langle f - u, v - u \rangle - \|u - v\|^2 \leq 0,$$

woraus die erste Charakterisierung folgt.

Zur Eindeutigkeit: Angenommen $v_1, v_2 \in K$ erfüllen beide die zweite Charakterisierung. Dann gilt für alle $v \in K$

$$\operatorname{Re}\langle f - v_1, v - u_1 \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\langle f - v_2, v - u_2 \rangle \leq 0.$$

Wähle in der ersten Ungleichung $v = u_2$, in der zweiten $v = u_1$ und addiere beide Gleichungen. Dann erhalten wir

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \operatorname{Re}\langle u_1 - u_2, v_1 - v_2 \rangle \leq 0,$$

woraus $u_1 = u_2$ folgt. ■

Bemerkung 6.2. Das Problem im obigen Satz ist ein Minimierungsproblem. Auch in anderen bereits bekannten Problemen wird ein Minimum durch Ungleichungen beschrieben. Betrachte zum Beispiel $F \in C^1([0, 1])$ und $F(u) = \min_{v \in [0, 1]} F(v)$. Dann gilt $F'(v) = 0$, falls $v \in (0, 1)$, $F'(v) \geq 0$, falls $u = 0$ und $F'(v) \leq 0$, falls $u = 1$. Oder zusammengefasst:

$$v \in [0, 1] \quad \text{und für alle } v \in [0, 1] \text{ gilt} \quad F'(u)(v - u) \geq 0.$$

Satz 6.3. Sei H ein Hilbertraum, $K \subset H$ eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Dann nimmt der Abstand durch die Anwendung von P_K nicht zu, d. h. P_K ist Lipschitz zur Konstante 1, d. h. für alle $f_1, f_2 \in H$ gilt

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

Beweis. Sei $u_1 := P_K f_1$ und $u_2 := P_K f_2$. Dann gilt für alle $v \in K$:

$$\operatorname{Re}\langle f_1 - u_1, v - u_1 \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\langle f_2 - u_2, v - u_2 \rangle.$$

Wähle einmal $v = u_2$ und einmal $v = u_1$ und erhalte durch Addition:

$$\operatorname{Re}\langle f_2 - u_2 - f_1 + u_1, u_1 - u_2 \rangle \leq 0.$$

Daraus folgt:

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|f_1 - f_2\| \|u_1 - u_2\|.$$

Nach Dividieren durch $\|u_1 - u_2\|$ folgt die Behauptung. ■

Korollar 6.4. Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum. Für $f \in H$ ist $P_M f =: u$ charakterisiert durch: $u \in M$ und $\langle f - u, v \rangle = 0$ für alle $v \in M$. Insbesondere ist P_M ein linearer stetiger Operator.

Beweis. Es gilt $\operatorname{Re}\langle f - u, v - u \rangle \leq 0$ für alle $v \in M$. Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und $w \in M$. Dann gilt auch $v := u + \alpha w \in M$ und damit

$$\operatorname{Re}(\bar{\alpha}\langle f - u, w \rangle) \leq 0.$$

Für $\alpha = \pm\langle f - u, w \rangle$ erhalten wir Ungleichungen, die

$$\langle f - u, w \rangle = 0$$

implizieren. Gilt andererseits $\langle f - u, w \rangle = 0$ für alle $w \in M$, so folgt für alle $v \in M$ schon

$$\operatorname{Re}\langle f - v, v - u \rangle \leq 0,$$

da $v - u \in M$. Die Linearität ist nach der obigen Charakterisierung klar und die Stetigkeit folgt aus Satz 6.3. ■

6.5 (Dualraum eines Hilbertraums). In einem Hilbertraum H können wir durch

$$H \ni u \mapsto \langle u, f \rangle \in \mathbb{K}$$

für jedes $f \in H$ ein lineares Funktional definieren. Der folgende Satz zeigt, dass wir dadurch sogar bereits alle linearen Funktionale erhalten.

Satz: (Riesz'scher Darstellungssatz)

Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} . Dann ist

$$J: H \rightarrow H'$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} H \rightarrow \mathbb{K} \\ y \mapsto \langle y, x \rangle \end{pmatrix}$$

ein isometrischer, konjugiert linearer Isomorphismus. (Dabei bedeutet konjugiert linear, dass $J(\alpha x + y) = \bar{\alpha}J(x) + J(y)$ für alle $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt.)

Beweis. Seien $x, y \in H$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 2.8 (1)) folgt

$$|J(x)(y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Daraus folgt $J(x) \in X'$ mit $\|J(x)\| \leq \|x\|$. Wegen $|J(x)(x)| = \|x\|^2$ gilt $\|J(x)\| \geq \|x\|$. Also ist J eine Isometrie und damit insbesondere injektiv. Der wesentliche Schritt ist nun, die Surjektivität von J zu zeigen. Sei dazu $x'_0 \in X' \setminus \{0\}$. Wähle P als orthogonale Projektion auf $N(x'_0)$ (was ein abgeschlossener Unterraum ist). Wähle $e \in X$ mit $x'_0(e) = 1$ und definiere $x_0 := e - Pe$. Dann gilt $x'_0(x_0) = 1 \neq 0$. Aus dem Projektionssatz (6.1) folgt:

$$\forall y \in N(x'_0): \quad \langle y, x_0 \rangle = 0. \quad (\star)$$



Abbildung 6.1: Situation im Beweis des Riesz'schen Darstellungssatzes

Sei wieder $x \in X$. Dann gilt

$$x = \underbrace{(x - x'_0(x) x_0)}_{\in N(x'_0)} + x'_0(x) x_0$$

und damit wegen (\star) :

$$\langle x, x_0 \rangle = \langle x'_0(x) x_0, x_0 \rangle = x'_0(x) \|x_0\|^2.$$

Es folgt

$$x'_0(x) = \left\langle x, \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right\rangle = J\left(\frac{x_0}{\|x_0\|^2}\right)(x)$$

und daraus $x' = J(x_0/\|x_0\|^2)$. Also ist J surjektiv. ■

6.6 (Soll man H mit H' identifizieren?). Der Riesz'sche Darstellungssatz erlaubt es uns, H mit H' zu identifizieren. Wir werden dies oft tun, aber nicht immer. Wir wollen eine Situation betrachten, in der man vorsichtig mit einer solchen Identifikation sein sollte:

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und assoziierter Norm $\|\cdot\|$. Sei nun $V \subset H$ ein linearer Unterraum, der dicht in H liegt. Wir nehmen an, dass V ein Banachraum ist mit Norm $\|\cdot\|_V$. Weiter sei die Inklusion $V \hookrightarrow H$ stetig, d. h. es existiert ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $v \in V$ gilt: $\|v\|_V \leq c\|v\|$.

Ein Beispiel für eine solche Situation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= L^2([0, 1]) \\ &= \{v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} \mid \int_0^1 (v(x))^2 dx < \infty\} / \{v \mid v = 0 \text{ fast überall}\} \end{aligned}$$

mit Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x) v(x) dx$ für $u, v \in H$ und $V = C([0, 1])$. Dann existiert eine kanonische Abbildung

$$T: H' \rightarrow V', \quad x' \mapsto (v \mapsto x'(v)).$$

Wir sehen einfach ein, dass T stetig und injektiv ist. Nun identifizieren wir H' mit H , geschrieben $H \simeq H'$, und erhalten: $V \subset H \simeq H' \subset V'$ (\diamond), wobei dies alles stetige Injektionen sind. Problematisch wird diese Situation, falls V ein Hilbertraum mit eigenem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $\|\cdot\|_V$ die zugehörige Norm ist. Wir könnten V mit V' identifizieren. Aber was bedeutet dann (\diamond)? Wir können also nicht gleichzeitig H mit H' und V mit V' identifizieren. Typischerweise verwendet man dann nur $H \simeq H'$.

Wir betrachten noch ein weiteres Beispiel:

$$H = \ell^2(\mathbb{R}) \quad \text{mit Skalarprodukt} \quad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n.$$

Weiter sei

$$V = \left\{ u \in H \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < \infty \right\},$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle\langle u, v \rangle\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n v_n.$$

Es gilt $V \subset H$ und die Inklusion $V \hookrightarrow H$ ist stetig. Wir identifizieren H' mit H und V' mit dem Raum

$$V' = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n^2 < \infty \right\},$$

indem wir für $f \in V'$, $v \in V$ die Anwendung von f auf v durch $f(v) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n$ erklären (man rechnet leicht mit der Hölderschen Ungleichung nach, dass dies wohldefiniert ist). Dieser Raum ist offenbar echt größer als H . Die Isometrie $J: V \rightarrow V'$ aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (6.5) ist dann gegeben durch

$$u \mapsto (n^2 u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Bemerkung 6.7. Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} . Dann ist H reflexiv (Definition 4.19). Sei J der konjugiert lineare Isomorphismus aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (6.5). Es ist zu zeigen, dass J_H (aus Satz 4.18) surjektiv ist. Sei also $x'' \in H''$. Dann ist

$$x': H \rightarrow \mathbb{K}, \quad y \mapsto \overline{x''(Jy)}$$

ein Element in H' . Setze $x := J^{-1}x'$. Sei $y' \in H'$ und $y \in H$ mit $Jy = y'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x''(y') &= x''(Jy) = \overline{x'(y)} = \overline{(Jx)(y)} = \overline{\langle y, x \rangle} \\ &= \langle x, y \rangle = (Jy)(x) = y'(x) = (J_H x)(y') \end{aligned}$$

Also gilt $x'' = J_H x$ und damit ist J_H surjektiv.

Bemerkung 6.8. Sei $H \simeq H'$ ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein Unterraum. Dann kann man den Annihilator M^\perp identifizieren mit

$$M^\perp = \{ u \in H \mid \forall v \in M: \langle v, u \rangle = 0 \}.$$

Außerdem gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$. Wenn M abgeschlossen ist, so gilt $M + M^\perp = H$.

Definition 6.9. Sei H ein Hilbertraum. Wir nennen eine Sesquilinearform a auf H stetig, wenn es ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass gilt:

$$\forall u, v \in H: |a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|.$$

Wir nennen a *koerziv*, wenn ein $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, so dass gilt:

$$\forall u \in H: \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Für den Beweis des folgenden Theorems benötigen wir den Banach'schen Fixpunktsatz:

Satz: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $S: X \rightarrow X$ eine (strikte) Kontraktion. Dann besitzt S genau einen Fixpunkt.

Theorem 6.10 (Stampacchia). Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $a: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ eine stetige, koerzive Sesquilinearform. Weiter sei $K \subset H$ nicht leer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es für alle $\varphi \in H'$ genau ein $u \in K$, so dass gilt:

$$\forall v \in K: \operatorname{Re} a(v - u, u) \geq \operatorname{Re} \varphi(v - u). \quad (\star)$$

Ist a außerdem symmetrisch, so ist das Element $u \in H$ eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$u \in K \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} a(u, u) - \operatorname{Re} \varphi(u) = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v) \right).$$

Bemerkung:

Ist a eine positiv semidefinite Bilinearform auf einem \mathbb{R} -Vektorraum H , so ist die Abbildung $v \mapsto a(v, v)$ konvex. Falls a sogar positiv definit ist, ist diese Abbildung strikt konvex. In der Regel besitzen strikt konvexe Funktionen mit $f(x) \rightarrow \infty$ für $\|x\| \rightarrow \infty$ ein eindeutiges Minimum.

Satz 6.11 (Lax-Milgram). Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $a: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ eine stetige, koerzive Sesquilinearform. Dann gibt es für jedes $\varphi \in H'$ genau ein $u \in H$, so dass gilt:

$$\forall v \in H: \operatorname{Re} a(v, u) = \operatorname{Re} \varphi(v). \quad (\star\star)$$

Ist a außerdem symmetrisch, so ist das Element $u \in H$ eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \operatorname{Re} \varphi(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v) \right).$$

Beweis. Sei $\varphi \in H'$ und $w \in H$. Wählen wir $K = H$ im Theorem von Stampacchia (6.10), so erhalten wir ein $u \in H$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall v \in H: \operatorname{Re} a(v - u, u) \geq \operatorname{Re} \varphi(v - u).$$

Also erhalten wir für $\pm w + u \in H$ zwei Ungleichungen, die zusammen

$$\operatorname{Re} a(w, u) = \operatorname{Re} \varphi(w)$$

implizieren. Es folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 6.12.

- (i) Der Satz von Lax-Milgram (6.11) kann zur Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen genutzt werden.
- (ii) Sei a symmetrisch und sei $F: H \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v)$. Dann bedeutet $(\star\star)$, dass für das Minimum „ $F'(u) = 0$ “ gilt. Betrachte dazu $\frac{d}{dt}F(u + tv)|_{t=0}$.

Es gilt

$$F(u + tv) = \frac{1}{2}(a(u, u) + ta(u, v) + ta(v, u) + t^2a(v, v)) - \operatorname{Re} \varphi(u) - t \operatorname{Re} \varphi(v),$$

also erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}F(u + tv) = \operatorname{Re} a(u, v) + ta(v, v) - \operatorname{Re} \varphi(v).$$

Definition 6.13. Sei H ein Hilbertraum und $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Unterräumen von H . Dann nennen wir H die *Hilbertsumme* von $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls

- (a) $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise orthogonal ist, d. h. $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $u \in E_n$, $v \in E_m$ mit $n \neq m$, und
- (b) der lineare Raum $\operatorname{span}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ ist dicht in H .

In diesem Fall schreiben wir

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Satz 6.14. Sei H ein Hilbertraum und gelte $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$ für eine Folge abgeschlossener Unterräume $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei $u \in H$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n := P_{E_n}(u)$ sowie $S_n := \sum_{k=1}^n u_k$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u$$

(wofür wir auch die Notation $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u$ verwenden) und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2,$$

die sogenannte *Bessel-Parseval-Identität*.

Für den Beweis benötigen wir zunächst eine Hilfsaussage.

Lemma 6.15. Sei H ein Hilbertraum und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge paarweise orthogonaler Vektoren in H (d. h. für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $\langle v_n, v_m \rangle = 0$). Gelte außerdem $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|^2 < \infty$. Sei $S_n := \sum_{k=1}^n v_k$. Dann existiert der Grenzwert $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ und es gilt

$$\|S\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2.$$

Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n > 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|S_m - S_{n-1}\|^2 &= \left\| \sum_{k=n}^m v_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=n}^m v_k, \sum_{\ell=n}^m v_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=n}^m \sum_{\ell=n}^m \langle v_k, v_\ell \rangle = \sum_{k=n}^m \|v_k\|^2 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Da H vollständig ist, existiert also auch ein Grenzwert $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Außerdem folgt aus der obigen Rechnung

$$\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2,$$

woraus für $n \rightarrow \infty$ die zweite Behauptung folgt. ■

Beweis von Satz 6.14. Aus Korollar 6.4 folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall v \in E_n: \quad \langle u - u_n, v \rangle = 0.$$

Insbesondere erhalten wir daraus $\langle u, u_n \rangle = \|u_n\|^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt also:

$$\langle u, S_m \rangle = \sum_{n=1}^m \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2.$$

(Für die zweite Gleichheit, vergleiche Beweis von Lemma 6.15.) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 2.8 (1)) liefert

$$\|S_m\|^2 \leq \|u\| \|S_m\|,$$

woraus $\|S_m\| \leq \|u\|$ folgt. Dies zeigt:

$$\sum_{n=1}^m \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$ und wir können Lemma 6.15 anwenden. Wir erhalten die Existenz des Grenzwerts $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Wir wollen nun S bestimmen (zunächst ohne die Dichtheit von $\text{span}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ vorauszusetzen). Sei $F := \text{span}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$. Wir behaupten

$$S = P_{\overline{F}} u. \quad (**)$$

Sei $m \in \mathbb{N}$, $v \in E_m$ und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle u - S_n, v \rangle &= \left\langle u - \sum_{k=1}^n u_k, v \right\rangle = \langle u, v \rangle - \sum_{k=1}^n \underbrace{\langle u_k, v \rangle}_{=0 \text{ für } k \neq m} \\ &= \langle u, v \rangle - \langle u_m, v \rangle = \langle u - u_m, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts $\langle u - S, v \rangle = 0$. Es folgt $\langle u - S, \tilde{v} \rangle = 0$ für alle $\tilde{v} \in F$. Dies impliziert (erneut wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts)

$$\forall \tilde{v} \in \overline{F}: \quad \langle u - S, \tilde{v} \rangle = 0.$$

Wegen $S_n \in F$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $S \in \overline{F}$. Mithilfe von (6.4) folgt nun (**). Wir benutzen nun zusätzlich, dass F dicht in H liegt, also $\overline{F} = H$. Dann ergibt (**) direkt $S = u$. Gehen wir in $\sum_{n=1}^m \|u_n\|^2 = \|S_m\|^2$ zum Grenzwert $m \rightarrow \infty$ über, so folgt die Bessel-Parseval-Identität. ■

Definition 6.16 (Schauder-Basis). Sei X ein normierter Raum und $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Dann nennen wir $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Schauder-Basis von X , falls gilt: Für alle $x \in X$ existiert eine eindeutige Folge $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} mit

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \rightarrow x \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Definition: (Orthonormalbasis) Sei H ein Prä-Hilbertraum und $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H . Dann nennen wir $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine *Orthonormalbasis* (oder *Hilbertbasis*), falls $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis ist und $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt (mit dem Kroneckerdelta δ).

Satz 6.17. Sei H ein Prä-Hilbertraum und $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem, d. h. für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$. Dann sind äquivalent:

- (1) $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in H
- (2) $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Schauder-Basis
- (3) $\forall x \in H: \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$
- (4) $\forall x, y \in H: \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}$ (Parseval-Identität)
- (5) $\forall x \in H: \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ (Vollständigkeitsrelation)

Falls eine dieser Bedingungen gilt, ist $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ also eine Hilbertbasis.

Beweis. „(1) \Rightarrow (3)“: Nutze Satz 6.14 (in den dortigen Bezeichnern) mit $E_n = \text{span}\{e_n\}$. Es gilt dann $u_n = \alpha_n e_n$ mit $\alpha_n = \langle e_n, u \rangle$. Das heißt:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \langle e_k, u \rangle e_k$$

(folgt aus der Orthogonalität der Projektion). Also folgt $S_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$. Aus 6.14 folgt dann die Behauptung.

„(3) \Rightarrow (2)“: Wir müssen die Eindeutigkeit der Koeffizienten zeigen. Wegen der Linearität reicht es, den Fall $x = 0$ zu betrachten. Gilt

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

so folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts:

$$0 = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle e_k, e_\ell \rangle = \alpha_\ell.$$

„(2) \Rightarrow (1)“ folgt aus der Definition der Schauder-Basis.

„(3) \Rightarrow (4)“: Aus der Stetigkeit des Skalarprodukts erhalten wir:

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{\ell=1}^n \langle y, e_\ell \rangle e_\ell \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_\ell \rangle} \underbrace{\langle e_k, e_\ell \rangle}_{\delta_{k\ell}}.$$

„(4) \Rightarrow (5)“ ist klar.

„(5) \Rightarrow (3)“:

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 &\leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

■

Definition 6.18 (separabel). Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Beispiele 6.19.

- (a) \mathbb{R} ist separabel, da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht liegt.
- (b) $C^0([a, b])$ mit der Supremumsnorm ist separabel, da die Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht liegen. (Weierstraßscher Approximationssatz)
- (c) $\ell^2(\mathbb{R})$ ist separabel, da die abzählbaren Folgen aus $\ell^2(\mathbb{Q})$ dicht liegt (vgl. Beweis von Lemma 6.20).

Lemma 6.20. Sei X ein unendlich-dimensionaler normierter Raum. Dann sind äquivalent:

- (1) X ist separabel
- (2) Es gibt eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlich-dimensionaler Unterräume von X mit folgenden Eigenschaften: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $X_n \subset X_{n+1}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ liegt dicht in X .
- (3) Es gibt eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlich-dimensionaler Unterräumen von X mit folgenden Eigenschaften: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $E_n \cap E_m = \{0\}$ und

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} E_k := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E_1 \oplus \cdots \oplus E_k)$$

liegt dicht in X .

- (4) Es gibt eine linear unabhängige Menge $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ von Vektoren aus X , so dass $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in X liegt.

Beweis. „(1) \Rightarrow (2)“: Sei $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X . Definiere $X_n := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann erfüllt die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die geforderten Bedingungen.

„(2) \Rightarrow (3)“: Sei $E_1 := X_1$ und $n \in \mathbb{N}$. Da X_{n+1} endlich-dimensional ist, gibt es einen Teilraum $E_{n+1} \subset X_{n+1}$ mit $X_{n+1} = X_n \oplus E_{n+1}$. Wir erhalten so eine Folge von Unterräumen $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt $X_n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ und nach Voraussetzung liegt aber $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ dicht in X .

„(3) \Rightarrow (4)“: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $(e_{n,j})_{j \in \{1, \dots, \dim E_n\}}$ eine Basis von E_n . Setze

$$X_n := E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = \text{span}\{e_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \dim E_i\}.$$

Dann gilt

$$\text{span}\{e_{i,j} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq \dim E_i\} = \text{span}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\right)$$

und nach Voraussetzung liegt die rechte Menge dicht in X . Also ist

$$\{e_{i,j} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq \dim E_i\}$$

die gesuchte linear unabhängige Menge.

„(4) \Rightarrow (1)“: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$A_n := \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}: \alpha_k \in \mathbb{K} \cap \mathbb{Q}(i) \right\}$$

abzählbar (wobei $\mathbb{Q}(i) = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$) mit

$$\overline{A_n} = \text{span}\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

Da abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen wieder abzählbar sind, liefert die Teilmenge $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ von X die Behauptung. ■

Satz 6.21. Für jeden unendlich-dimensionalen Hilbertraum H über \mathbb{K} ist äquivalent:

- (1) H ist separabel
- (2) H besitzt eine Hilbertbasis

Weiter gilt: Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so ist H isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{K})$.

Bemerkung: Auf $\ell^2(\mathbb{K})$ ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} := ((\delta_{kn})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Hilbertbasis. (Dabei ist δ das Kroneckerdelta, also hat für $n \in \mathbb{N}$ der Vektor e_n nur in der n -ten Komponente den Eintrag 1, ansonsten 0.)

Es bildet $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. Außerdem liegt $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in ℓ^2 . Sei $x \in \ell^2$ und sei

$$x^{(k)} := (x_1, \dots, x_k, 0, \dots) = \sum_{i=1}^k x_i e_i.$$

Dann gilt:

$$\|x^{(k)} - x\|^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} x_i^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Bemerkung: Die Tatsache, dass alle separablen Hilberträume isometrisch isomorph zu ℓ^2 sind, könnte dazu verführen, nur noch ℓ^2 zu betrachten. Viele Operatoren zwischen separablen Hilberträumen haben aber eine komplizierte Struktur, wenn man sie in ℓ^2 ausdrückt. Fazit: Oft ist es besser, doch direkt mit dem entsprechenden Hilbertraum zu arbeiten.

7 Schwache Konvergenz

Zur Erinnerung: Im \mathbb{R}^n kann man aus jeder beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge auswählen. Außerdem gilt für Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ der *Satz von Heine-Borel*: K ist genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist. Beides ist in unendlich-dimensionalen Banachräumen i. A. nicht mehr gegeben. Wir versuchen, Ersatz dafür zu finden.

Definition 7.1. (i) Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d. h. falls A folgende Eigenschaft besitzt: Ist I eine Menge und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen in X mit $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

(ii) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A *präkompakt*, falls für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ endlich viele $x_1, \dots, x_n \in A$ existieren mit $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

Satz 7.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) A ist kompakt
- (2) A ist folgenkompakt, d. h. jede Folge in A besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A .
- (3) A ist präkompakt und $(A, d|_A)$ ist vollständig.