

Vorlesungsmitschrift (*kein* offizielles Skript)

Funktionalanalysis

Prof. Dr. Harald Garcke

Version vom 18. Oktober 2013

Gesetzt in L^AT_EX von Johannes Prem

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?	1
2	Grundstrukturen der Funktionalanalysis	4

1 Einführung: Wovon handelt die Funktionalanalysis?

Zum Beispiel von der *Analysis auf Banachräumen* (vollständigen normierten Vektorräumen)

1.1. Auf \mathbb{R}^n definiere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x\|_2 := |x| = \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 (Funktionen auf kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n).

Zum Beispiel: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, z. B. $K = [0, 1]$.

$$C^0(K) := \{f \mid f: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird Banachraum mit der Norm:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty$$

1.3 (Operatoren auf $C^0([0, 1])$).

Definiere

$$L(C^0([0, 1]), C^0([0, 1])) := \{T: C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]) \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

Beispiele:

$$(Tf)(x) := g(x) f(x) \quad \text{wobei } g \in C^0([0, 1])$$

$$(Tf)(x) := \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad \text{wobei } 0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$$

$$L_i: \text{ Lagrange-Basis-Fkt.: } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y) \, dy \quad \text{wobei } K \in C^0([0, 1]^2)$$

Bemerkung: $L(C^0([0, 1]), C^0([0, 1]))$ wird zu einem Banachraum mit der Operatornorm

$$\|T\|_{L(C^0, C^0)} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{C^0}}{\|f\|_{C^0}}$$

1.4. Welche Besonderheiten ergeben sich in unendlich-dimensionalen Räumen?

- (1) Problem in ∞ -dimensionalen Vektorräumen: Wenig sinnvolle Aussagen ohne Topologie möglich
- (2) Für $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear gilt:

$$T \text{ surjektiv} \iff T \text{ injektiv}$$

Im ∞ -dim. ist dies i. A. falsch.

Beispiel:

$$C_* := \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}, \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall \ell > \bar{k}: x_\ell = 0\}$$

C_* modelliert „Folgen, die irgendwann abbrechen“. Außerdem enthält C_* den \mathbb{R}^n für $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß.

Definiere die sog. *Shift-Abbildung* wie folgt:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Dann ist T injektiv, aber nicht surjektiv.

- (3) Grundproblem der linearen Algebra: Finde Normalformen für lineare Abbildungen.
Ziel: Verallgemeinerung auf ∞ -dim. Räume.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Diagonalisierbarkeit} \\ \text{symmetrischer Matrizen} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spektralsatz für} \\ \text{kompakte, normale Operatoren} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Jordansche} \\ \text{Normalform} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spektralsatz für} \\ \text{kompakte Operatoren} \end{array} \right.$$

- (4) Kompaktheit

In ∞ -dim. Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel *nicht* kompakt.

Beispiel C_* : Nutze die Norm

$$\|x\|_{C_*} := \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

und die Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (wobei die 1 an der i -ten Stelle steht). Dann gilt:

$$\|e_i\|_{C_*} = 1 \quad \text{und} \quad \|e_i - e_k\|_{C_*} = 1 \text{ für } i \neq k$$

Also hat $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *keine* konvergente Teilfolge, woraus folgt, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist.

- (5) Nicht alle Normen sind zueinander äquivalent.

Beispiel: Betrachte auf $C^0([0, 1])$ die Normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}$$

Es gilt $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty$. Aber: Es gibt keine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $f \in C^0([0, 1])$ gilt: $\|f\|_\infty \leq c \|f\|_{L^2}$. Betrachte dazu:



Es gilt: $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1$, $\|f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Außerdem gilt:

$(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum

$(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2})$ ist normierter Vektorraum (aber nicht vollständig)

Funktionalanalysis lässt sich sinnvoll nur in vollständigen Räumen entwickeln. Deshalb werden wir nicht vollständige Räume vervollständigen.

2 Grundstrukturen der Funktionalanalysis

2.1 (Topologie). Sei X eine Menge, \mathcal{T} ein System von Teilmengen. Dann heißt \mathcal{T} *Topologie (auf X)*, falls gilt:

$$(T1) \quad \emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$$

$$(T2) \quad \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$$

$$(T3) \quad T_1, T_2 \in \mathcal{T} \implies T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$$

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *Hausdorff-Raum*, falls er zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt:

$$(T4) \quad \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad \exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}: U_1 \cap U_2 = \emptyset \wedge x_i \in U_i$$

Mengen in \mathcal{T} heißen *offene Mengen*. Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Eine Menge $W \subset X$ mit $x \in W$ für die eine offene Menge U mit $x \in U$ und $U \subset W$ existiert, heißt *Umgebung von x* .

Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume, so heißt $f: X \rightarrow Y$ *stetig*, falls die Urbilder offener Mengen stets offen sind. (Formal: $\forall U' \in \mathcal{T}_Y: f^{-1}(U') \in \mathcal{T}_X$)

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *stetig in $x \in X$* , falls

$$f(x) \in V \in \mathcal{T}_Y \implies \exists U \in \mathcal{T}_X: x \in U \subset f^{-1}(V)$$

(d. h. $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von x).

2.2. Ist X ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt (X, \mathcal{T}) *topologischer Vektorraum*, falls (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum ist und die Abbildungen

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow X, & (x, y) &\mapsto x + y \\ \mathbb{K} \times X &\rightarrow X, & (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

stetig sind. („Algebraische und topologische Struktur sind verträglich“)

2.3 (Metrik). Ein Tupel (X, d) heißt *metrischer Raum*, falls X eine Menge ist und $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Bedingungen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt:

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Konvergenz:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls:

$$d(x_k, x_\ell) \rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty$$

x heißt Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (Notation: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder: $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$), falls:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

(X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in X besitzt.

Abstand von Mengen $A, B \subset X$:

$$\text{dist}(A, B) := \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Für $A \subset X$ und $x \in X$ definieren wir: $\text{dist}(x, A) := \text{dist}(\{x\}, A)$.

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $A \subset X$, $x \in X$ definieren wir:

$$B_r(A) := \{x \in X \mid \text{dist}(x, A) < r\}$$

$$B_r(x) := B_r(\{x\})$$

$$\text{diam}(A) := \sup \{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

Wir sagen A ist *beschränkt*, falls $\text{diam}(A) < \infty$.

2.4 (Topologie von Metriken). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \subset A\} \quad \text{ist das Innere von } A.$$

$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{ist der Abschluss von } A.$$

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{ist der Rand von } A.$$

Wir sagen, dass A offen ist, falls $A^\circ = A$ gilt, und dass A abgeschlossen ist, falls $\overline{A} = A$ gilt.

Durch die Definition $\mathcal{T} := \{A \subset X \mid A \text{ offen}\}$ wird (X, \mathcal{T}) zu einem hausdorffschen topologischen Raum.

2.5 (Fréchet-Metrik). Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $d: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Fréchet-Metrik*, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$(F1) \quad d(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x) = 0 \iff x = 0$$

$$(F2) \quad d(-x) = d(x)$$

$$(F3) \quad d(x + y) \leq d(x) + d(y)$$

Dann ist $(x, y) \mapsto d(x - y)$ eine Metrik auf X .

Beispiel: Fréchet-Metriken auf \mathbb{R} :

$$x \mapsto |x|^\alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha \leq 1$$

$$x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x|}$$

2.6 (Norm). X sei ein \mathbb{K} -Vektorraum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls folgende Bedingungen für alle $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dann ist $x \mapsto \|x\|$ eine Fréchet-Metrik. Wir nennen X *Banachraum*, falls X mit einer gegebenen Norm vollständig ist.

X ist eine *Banachalgebra*, falls X eine Algebra ist (d. h. es gibt ein Produkt auf X , das dem Assoziativgesetz und Distributivgesetz genügt) und $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in X$ gilt.

2.7 (Skalarprodukt). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum.

a) $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *Hermitesche Form* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrische Sesquilinearform), falls für alle $x, x_1, x_2, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(S1) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(S2) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$(S3) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

(Es folgt: für alle $x \in X$ gilt $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$.)

b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *positiv-semidefinit*, falls

$$(S4') \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

und *positiv definit*, falls

$$(S4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

gilt.

c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *Skalarprodukt*, falls (S1)–(S4) erfüllt sind. Dann ist $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf X und wir nennen X dann einen *Prä-Hilbertraum*. Falls X zusätzlich vollständig ist, so heißt X *Hilbertraum*.

Beispiele:

i) \mathbb{R}^n mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

ii) $X = C^0(K, \mathbb{R})$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

$$\langle f, g \rangle := \int_K f(x) g(x) \, dx$$

Dann ist $(C^0(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum (aber kein Hilbertraum!)

Satz 2.8. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum X . Dann gelten:

- (1) Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU): $\forall x, y \in X: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
Gleichheit gilt nur, falls y ein Vielfaches von x ist.
- (2) Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in X: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (3) Parallelogrammidentität: $\forall x, y \in X: \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Bemerkung: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt aus der CSU für $x, y \in X \setminus \{0\}$:

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \in [-1, 1] \quad (*)$$

D. h. es gibt genau ein $\theta \in [0, \pi]$, s. d.

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \cos \theta.$$

Wir interpretieren θ als den Winkel zwischen x und y .

Beweis von Satz 2.8.

(3)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Ersetze y durch $-y$ und addiere beide Gleichungen.

(1) Ersetze in (*) y durch $-\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$ (o. E. $y \neq 0$). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

Es folgt die CSU. In der ersten Zeile gilt bei \leq die Gleichheit genau dann, wenn x ein Vielfaches von y ist.

(3)

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \underbrace{\operatorname{Re}\langle x, y \rangle}_{\leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|} \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

■

2.9 (Vergleich von Topologien). Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X . Wir sagen \mathcal{T}_2 ist *stärker* (oder *feiner*) als \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_1 ist *schwächer* (oder *gröber*) als \mathcal{T}_2 , falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt.

Sind d_1, d_2 zwei Metriken auf X und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ die induzierten Topologien (siehe 2.4), so heißt die Metrik d_1 *stärker* (bzw. *schwächer*) als d_2 , falls \mathcal{T}_1 stärker (bzw. schwächer) als \mathcal{T}_2 ist. Die Metriken heißen äquivalent, falls $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Entsprechend heißt eine Norm stärker bzw. schwächer als eine zweite, wenn dies für die induzierten Metriken gilt. Analog für Äquivalenz von Normen.

2.10 (Vergleich von Normen). Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X . Dann gilt:

(1) $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:

$$\forall x \in X: \quad \|x\|_1 \leq c \|x\|_2$$

(2) Die beiden Normen sind genau dann äquivalent, wenn es $c, C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit:

$$\forall x \in X: \quad c \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2$$

Beweis. (1) Es sei $B_r^i(x) = \{x' \in X \mid \|x - x'\|_i < r\}$ und \mathcal{T}_i sei die von $\|\cdot\|_i$ induzierte Topologie.

Sei $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Da $B_1^1(0) \in \mathcal{T}_1$ gilt, ist $B_1^1(0)$ offen bezüglich \mathcal{T}_1 und bezüglich \mathcal{T}_2 . Es liegt 0 im Inneren (bezüglich $\|\cdot\|_2$) von $B_1^1(0)$. Somit gilt $B_\varepsilon^2(0) \subset B_1^1(0)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Daher gilt für $x \in X \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varepsilon x}{2\|x\|_2} \right\|_2 &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ \implies \left\| \frac{\varepsilon x}{2\|x\|_2} \right\|_1 &< 1 \implies \|x\|_1 < \frac{2}{\varepsilon} \|x\|_2 \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt die Ungleichung in (1) so ist für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$B_r^2(x) \subset B_{cr}^1(x)$$

Sei nun $A \in \mathcal{T}_1$. Dann ist $A = A^\circ$ bezüglich \mathcal{T}_1 . D.h. zu $x \in A$ existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $B_\varepsilon^1(x) \subset A$. Also gilt:

$$B_{\varepsilon/c}^2(x) \subset A$$

Dies zeigt $A \in \mathcal{T}_2$.

(2) Wende den ersten Teil zweimal an.

■

Satz 2.11. Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent. Endlich-dimensionale Vektorräume sind Banachräume. Endlich-dimensionale Unterräume normierter Räume sind abgeschlossen.

Beweis. Sei X ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von $(X, \|\cdot\|)$. Jedem $x \in X$ mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ordnen wir den Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{K}^n$ zu.

Die Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^n &\rightarrow X \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto x \mapsto \|x\|\end{aligned}$$

sind stetig.

Daher nimmt $\|x\|$ auf der kompakten Menge

$$S := \{\alpha \mid \|\alpha\|_2 = 1\}$$

ein Maximum M und ein Minimum m an. (Dabei gilt $m > 0$, da $\|x\| > 0$ für alle $x \in S$.)
Damit gilt für x mit $\|\alpha(x)\|_2 = 1$

$$m \leq \|x\| \leq M.$$

Für allgemeine $x \neq 0$ gilt

$$\left\| \alpha \left(\frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right) \right\|_2 = 1 \quad \text{und somit} \quad m \leq \left\| \frac{x}{\|\alpha(x)\|_2} \right\| \leq M$$

Dies zeigt die Äquivalenz einer beliebigen Norm zur Norm $x \mapsto \|\alpha(x)\|_2$. Damit sind zwei beliebige Normen äquivalent.

■