Nr. 4

$$f(x) = x + \ln(x) - 2$$

$$X = [1,2]$$

a) $f(x)$ ist stetig $\forall x \in [1,2]$

$f(1) = -1 < 0$ $\Rightarrow$ es existiert min eine Nullstelle von $f(x)$ in $[1,2]$

$f(2) = \ln(2) > 0$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in [1,2]$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist streng Monoton steigend in $[1,2]$

$\Rightarrow$ $f(x)$ hat genau eine Nullstelle in $[1,2]$

$$\phi(x) = \frac{3 - \ln(x)}{1 + \frac{1}{x}} \qquad \phi'(x) = -\frac{x + \ln(x) - 2}{(x+1)^2}$$

$\forall x \in [0,1] \Rightarrow \phi(x) \in [1,2]$

$$\phi(0) = \frac{3 - \ln(1)}{2} = \frac{3}{2} \in [1,2]$$

$$\phi(1) = \frac{3 - \ln(2)}{3/2} = \frac{6 - 2\ln(2)}{3} = 2 - \frac{2}{3}\ln(2) \in [1,2]$$

$$f(x) = x + \ln(x) - 2$$
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

x lokale Extrema $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = \phi(x) \Rightarrow x, \phi(x) \in [0,1]$

Kontraktionszahl:

$$\alpha \leq \max_{x \in [1,2]} \left(\left| -\frac{x + \ln(x) - 2}{(x+1)^2} \right| \right) = \frac{\max_{x \in [1,2]}(|z(x)|)}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\max(|z(x)|) = \max_{x \in [1,2]} \left(|-x - \ln(x) + 2| \right) = \max_{x \in [1,2]} \left(|z(1)|, |z(2)| \right) = 1$$

$$z(1) = -1 - 0 + 2 = 1$$

$$z(2) = -2 - \ln(2) + 2 = -\ln(2)$$

$$z'(x) = -1 - 1/x < 0 \quad \forall x \in [1,2]$$