Nr. 4

$f(x) = x + \ln(x) - 2$

$X = [1,2]$

a) $f(x)$ ist stetig $\forall x \in [1,2]$

$f(1) = -1 < 0$ $\Rightarrow$ es existiert min. eine Nullstelle von $f(x)$ in $[1,2]$

$f(2) = \ln(2) > 0$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \; \forall x \in [1,2]$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist streng Monoton steigend in $[1,2]$

$\Rightarrow$ $f(x)$ hat genau eine Nullstelle in $[1,2]$

$\phi(x) = \frac{3 - \ln(x)}{1 + \frac{1}{x}}$ $\qquad \phi'(x) = -\frac{x + \ln(x) - 2}{(x+1)^2}$

$\forall x \in [1,2] \Rightarrow \phi(x) \in [1,2]$

$\phi(0) = \frac{3 - \ln(1)}{2} = \frac{3}{2} \in [1,2]$

$\phi(1) = \frac{3 - \ln(2)}{3/2} = \frac{6 - 2\ln(2)}{3} = 2 - \frac{3}{2}\ln(2) \in [1,2]$

$f(x) = x + \ln(x) - 2$
$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$
$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

$\nexists$ lokale Extrema $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = \phi(x) \Rightarrow x, \phi(x) \in [1,2]$

Kontraktionszahl:

$\alpha \leq \max_{x \in [1,2]} \left( \left| -\frac{x + \ln(x) - 2}{(x+1)^2} \right| \right) = \frac{\max_{x \in [1,2]}(|z(x)|)}{4} = \frac{1}{4}$

$\max(|z(x)|) = \max_{x \in [1,2]} \left( |-x - \ln(x) + 2| \right) = \max_{x \in [1,2]} \left( |z(1)|, |z(2)| \right) = 1$

$z(1) = -1 - 0 + 2 = 1$

$z(2) = -2 - \ln(2) + 2 = -\ln(2)$

$z'(x) = -1 - \frac{1}{x} < 0 \; \forall x \in [1,2]$