Nr. 2

a) $\hat{A} = A + uv^T$

$\Leftrightarrow \quad \hat{A} = A(1 + (A^{-1}u)v^T)$

$\Leftrightarrow \quad \hat{A} = A(1 + v^T A^{-1} u)$

Da $\det(\hat{A}) = 0$ sein muss ($\hat{A}$ ist singulär) gilt weiter:

$\det(\hat{A}) = \det(A) \cdot \det(1 + v^T A^{-1} u)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{0}{\det(A)} = \det(1 + v^T A^{-1} u)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 1 + v^T A^{-1} u$ //

b) Es muss gelten:

$\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = I$

Zunächst:

$$
\begin{aligned}
\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1} &= (A + uv^T)(A^{-1} - \alpha A^{-1} u v^T A^{-1}) \\
&= AA^{-1} + uv^T A^{-1} - \alpha(AA^{-1} u v^T A^{-1} + uv^T A^{-1} u v^T A^{-1}) \\
&= I + uv^T A^{-1} - \alpha(uv^T A^{-1} + uv^T A^{-1} u v^T A^{-1}) \\
&= I + uv^T A^{-1} - \alpha(uv^T A^{-1}(1 + v^T A^{-1} u)) \\
&= I + uv^T A^{-1} - \alpha uv^T A^{-1} \frac{1}{\alpha} \\
&= 1 + uv^T A^{-1} - uv^T A^{-1} \\
&= 1 \quad //
\end{aligned}
$$

Analog gilt $\hat{A}^{-1} \cdot \hat{A} = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{A}^{-1} = (A^{-1} - \alpha A^{-1} u v^T A^{-1})$ mit $\alpha = \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u}$