Nr. 2 Für den Fixpunkt $x = \phi(x)$ gilt $f(x) = 0$. Nach Satz 163 sollen möglichst viele Ableitungen von $\phi(x)$ im Fixpunkt $f = \phi(f)$ gleich Null sein.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\phi'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$\phi''(x) = \frac{(f'(x))^3 f''(x) + f(x)(f'(x))^2 f'''(x) - 2f(x)\,f'(x)\,(f''(x))^2}{(f'(x))^4}$$

$$= \frac{(f'(x))^2 f''(x) + f(x)\,f'(x)\,f'''(x) - 2f(x)(f''(x))^2}{(f'(x))^3}$$

$$\phi'''(x) = \frac{6f(x)(f''(x))^3 + 2(f'(x))^3 f'''(x) + (f'(x))^2\left(f(x)f''''(x) - 3(f''(x))^2\right) - 6f(x)\,f'''(x)\,f'(x)\,f''(x)}{(f'(x))^4}$$

Da man $m=3$ (Kubisch) gefordert ist, muss $\phi'(f) = \phi''(f) = 0$ und $\phi'''(f) \neq 0$ gelten.
Mit $f(f) = 0$, $f'(f) = a \neq 0$ und $f''(f) \neq 0$ folgt:

$$\phi'(f) = \frac{0 \cdot 0}{a^2} = 0$$

$$\phi''(f) = \frac{a^2 \cdot 0 + 0 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot 0^2}{a^3} = 0 \quad \text{wobei } f'''(f) = b$$

$$\phi'''(f) = \frac{6 \cdot a \cdot 0^3 + 2a^3 b + a^2(0 \cdot c - 3 \cdot 0^2) - 6 \cdot a \cdot b \cdot 0 \cdot 0}{a^4} \quad \text{wobei } f''''(f) = c$$

$$= \frac{2a^3 b}{a^4} = \frac{2b}{a} \neq 0$$

Im allgemeinen Fall.

$\Rightarrow$ Da $\phi'(f) = \phi''(f) = 0$ und $\phi'''(f) \neq 0$ ist das Newton-Verfahren für $f(x)$ im allgemeinen kubisch ($m=3$).