APUNTE DE SUCESIONES Y SERIES

PATRICIO CUMSILLE

1. Sucesiones

1.1. Introducción. En esta sección estudiaremos las sucesiones, que corresponden a un tipo de funciones de particular importancia en la ingeniería y ciencias. En efecto, ellas aparecen naturalmente en los métodos numéricos bajo la forma de procesos iterativos, ampliamente utilizados en la resolución de problemas no lineales, tales como ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, entre otros. Asimismo, ellas jugaron un rol clave en el desarrollo moderno del análisis real, siendo un objeto fundamental para sentar las bases de la representación de funciones en series, según veremos a lo largo de este apunte.

Consideremos el proceso iterativo siguiente:

1. Escoger un número real $x_0 \neq 0$, de manera arbitraria.
2. Conocido el valor de x_n, calcular el número real x_{n+1} mediante la fórmula:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}\ , \tag{1.1}$$

   partiendo de $n = 0$.

A modo de ejemplo, escojamos $x_0 = 0,3$ y calculemos los primeros 10 números $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{10}$ usando la fórmula (1.1):

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0}\ , \quad x_2 = \frac{x_1^2 + 2}{2x_1}\ , \quad x_3 = \frac{x_2^2 + 2}{2x_2}\ , \ldots$$

Los resultados se muestran en la Tabla 1 con 15 decimales para apreciar las diferencias:

3,483333333333333	2,028748006379586	1,507288843700003	1,417087267711754
1,414216476160609	1,414213562376097	1,414213562373095	1,414213562373095
1,414213562373095	1,414213562373095		

Tabla 1. Primeros 10 valores de x_n generados mediante (1.1)

Observando la Tabla 1 anterior, vemos que $|x_8 - x_7| = 2,220446049250313e - 16$ ($2,22\ldots$ con 16 ceros hacia la izquierda, lo cual ya se considera como numéricamente cero) y que $|x_9 - x_8| = |x_{10} - x_9| = 0$. Esto es un efecto de redondeo, pero como veremos más adelante se tiene realmente que $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Esta tendencia se mantiene si continuarámos calculando $x_{11}, x_{12}, \ldots$, lo cual implica que el proceso iterativo genera valores decrecientes que se *"aproximan"* hacia cierto número real (no es díficil convencerse que este número real es $\sqrt{2} \approx 1,414213562373095$). Un poco más adelante diremos que la sucesión (x_n) *"converge"* a $\sqrt{2}$; ver Fig. 1.

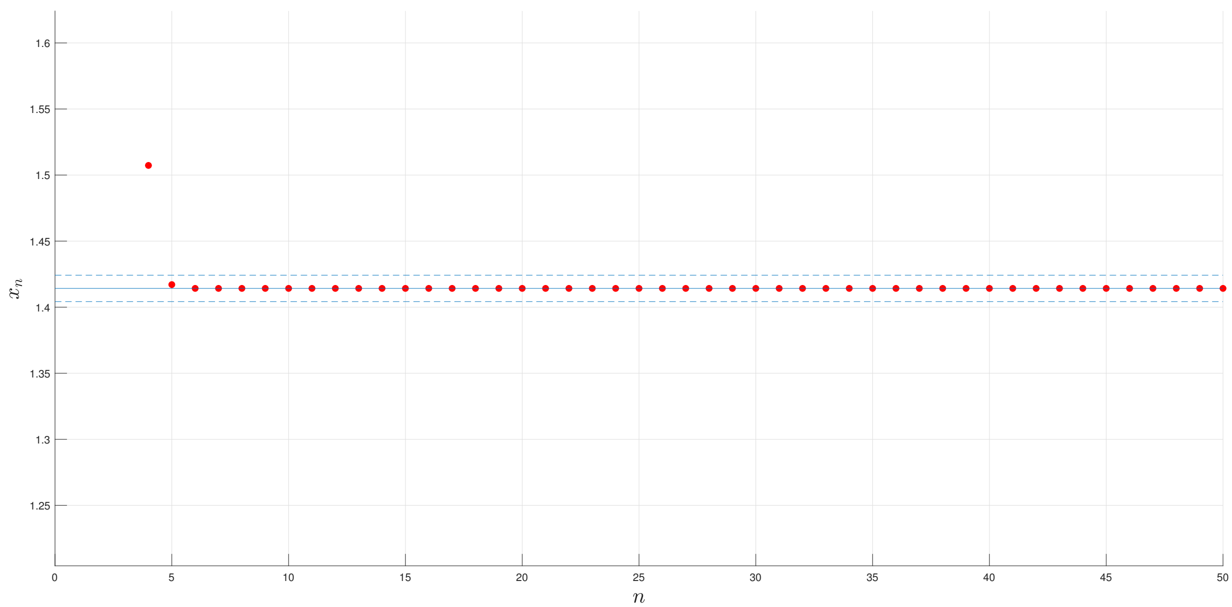


FIGURA 1. Gráfico bidimensional de la sucesión (x_n) definida por $x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}$

En la Figura 1, se aprecia claramente que los valores de x_n, generados por la fórmula (1.1), representados por puntos, se *"aproximan"* hacia el número $\ell = \sqrt{2}$ (línea horizontal continua). De hecho, las líneas horizontales representan una banda de centro ℓ y ancho 2ε con $\varepsilon = 0,01$, cuyo objetivo es visualizar que a partir de cierto término, todos los puntos de la sucesión (x_n) están dentro de la banda, indicando la precisión de la aproximación de ℓ con los valores de x_n (aproximación de un número irracional mediante racionales). Esto se verá en detalle en la próxima sección.

1.2. Concepto de Convergencia de Sucesiones. En esta sección formalizaremos el concepto de convergencia de sucesiones, para lo cual previamente definiremos lo que es una sucesión.

Definición 1.1. Sucesión.

Una *sucesión de números reales*, o simplemente *sucesión*, es una función cuyo dominio es un subconjunto infinito de números naturales (o todo el conjunto de números naturales) a valores en los números reales.

Se denota

$$\begin{array}{rccl} x: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & x(n) = x_n \end{array}$$

donde D es un subconjunto infinito de números naturales, incluyendo el caso en que $D = \mathbb{N}$, donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de todos los números naturales partiendo desde 0 (por convención).

Nota 1.1. El hecho que el dominio sea un conjunto infinito de números naturales es para diferenciar una sucesión de una secuencia numérica, la cual corresponde a una colección finita de números reales, mientras que una sucesión es una colección infinita.

Nota 1.2. Según la notación usual de funciones, deberíamos escribir $x(n)$, sin embargo, para sucesiones se acostumbra escribir x_n en su lugar, el cual se denomina *término $n-$ésimo de la sucesión*, o *término general de la sucesión*. Notemos que esta notación es independiente de si disponemos o no de una fórmula explícita para calcular x_n. Por ejemplo, en (1.1) no se conoce en forma explícita x_n en función de n, a pesar de que se puede calcular.

Notación 1.1. Para diferenciar las sucesiones de las funciones usuales, se denotan las sucesiones como

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

o más simplemente como (x_n) o $\{x_n\}$. Adicionalmente, si el dominio de una sucesión (x_n) fuera el conjunto de todos los números naturales mayores o iguales que n_0, es decir,

$$D = \{n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots\},$$

entonces podemos denotar la sucesión como $(x_n)_{n\geq n_0}$ o $\{x_n\}_{n\geq n_0}$.

Ejemplo 1.1. Los números x_n generados mediante la fórmula (1.1) partiendo de $x_0 \neq 0$, definen una sucesión y se tiene que x_n está definido para todo $n \in \mathbb{N}$ (su dominio es $D = \mathbb{N}$).

Ejemplo 1.2. (x_n) definida por $x_n = 1/n$ para todo $n \geq 1$, es una sucesión cuyo dominio es $D = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Podemos anotar también $(x_n)_{n\geq 1}$. A diferencia de la sucesión definida por (1.1), el término $n-$ésimo de la sucesión es conocido explícitamente en función de n.

Ejemplo 1.3. Contraejemplo.
$x_n = \sqrt{5-n}$ *no es una sucesión*, ya que x_n no está bien definido (como número real) a partir de $n = 6$. En efecto, $\{x_n\}_{n=0}^{5} = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$ corresponde a la secuencia numérica $\sqrt{5},\ 2,\ \sqrt{3},\ \sqrt{2},\ 1,\ 0$.

Nota 1.3. No confundir una sucesión con su recorrido.
La sucesión $x_n = (-1)^n$, es decir, la sucesión $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1, \cdots$ tiene como recorrido el conjunto $\{-1, 1\}$ (solamente toma dos valores). Sin embargo, (x_n) tiene infinitos términos, a pesar de que éstos se repitan (para todo n par $x_n = 1$ y para todo n impar $x_n = -1$, por ejemplo, $x_{1000} = 1$, $x_{2001} = -1$, etc.)

Como vimos en la introducción, la sucesión (x_n) del ejemplo 1.1, definida por la fórmula (1.1), es *"convergente"* a $\sqrt{2}$ (figura 1). Asimismo, es evidente que la sucesión del ejemplo 1.2 es *"convergente"* a 0. A continuación definiremos lo que esto significa.

Definición 1.2. Convergencia de una sucesión (definición informal).
Diremos que una sucesión (x_n) converge al número $\ell \in \mathbb{R}$ si para todo intervalo $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ a partir del cual todos los términos de la sucesión están dentro de dicho intervalo.

Nota 1.4.

- Solamente los primeros N términos de la sucesión podrían estar fuera del intervalo.
- Para aplicar la definición anterior a una determinada sucesión, debemos conocer a priori el valor de su límite. Este no es el caso de las sucesiones definidas mediante fórmulas del tipo (1.1).

Ejemplo 1.4.

1. La sucesión (x_n) definida por (1.1) converge a $\sqrt{2}$; Fig. 1 ($\varepsilon = 0,01$).

   En los siguientes ejemplos, mostramos gráficamente la convergencia para $\varepsilon = 0,1$ y $0,01$. Recordar que la banda de centro ℓ y ancho 2ε representan la precisión de la aproximación de ℓ por los números (x_n).
2. La sucesión alternante $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge a 0; Fig. 2.
3. La sucesión $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$ también converge a 0 con un patrón periódico amortigüado; Fig. 3.

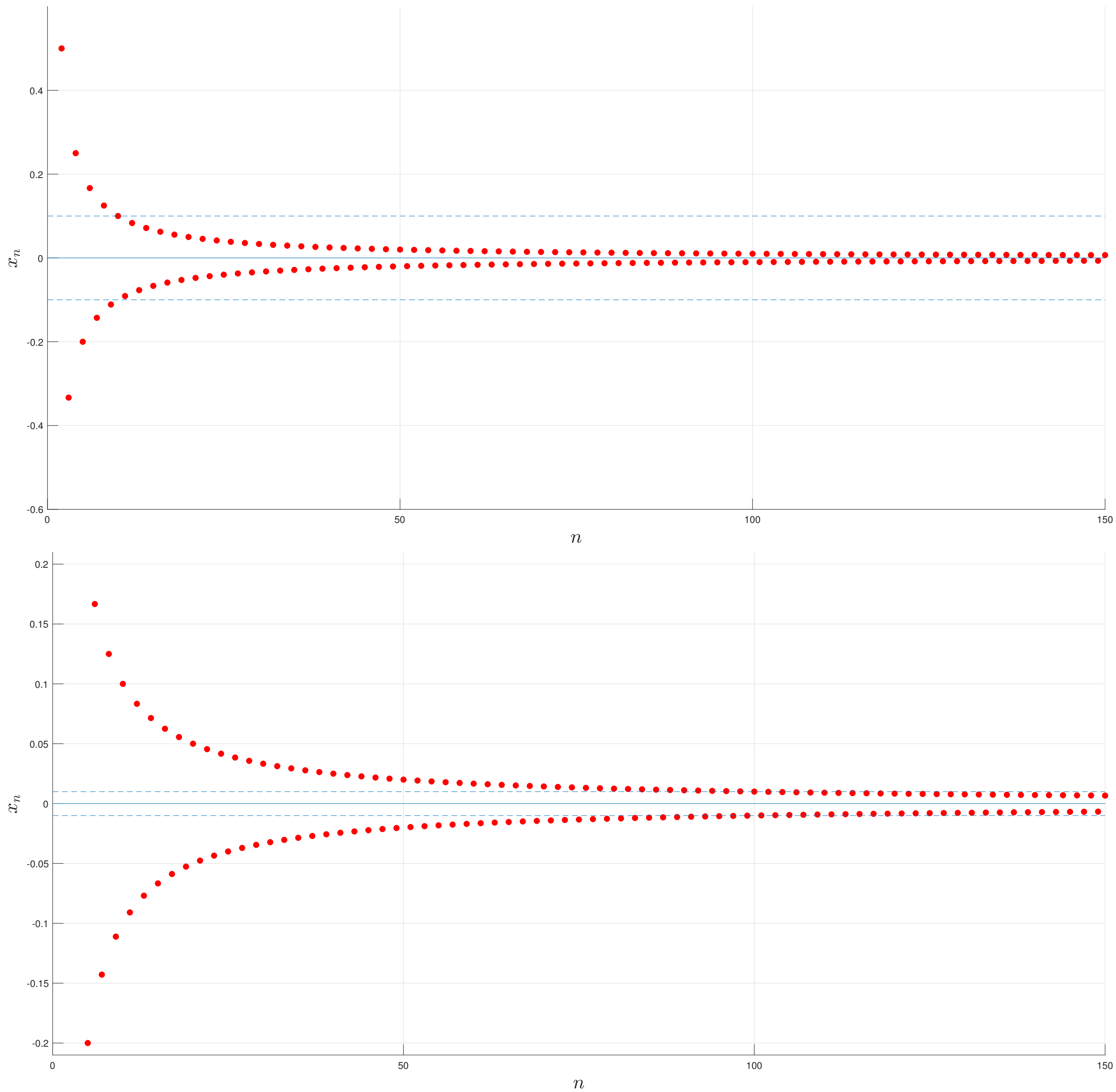
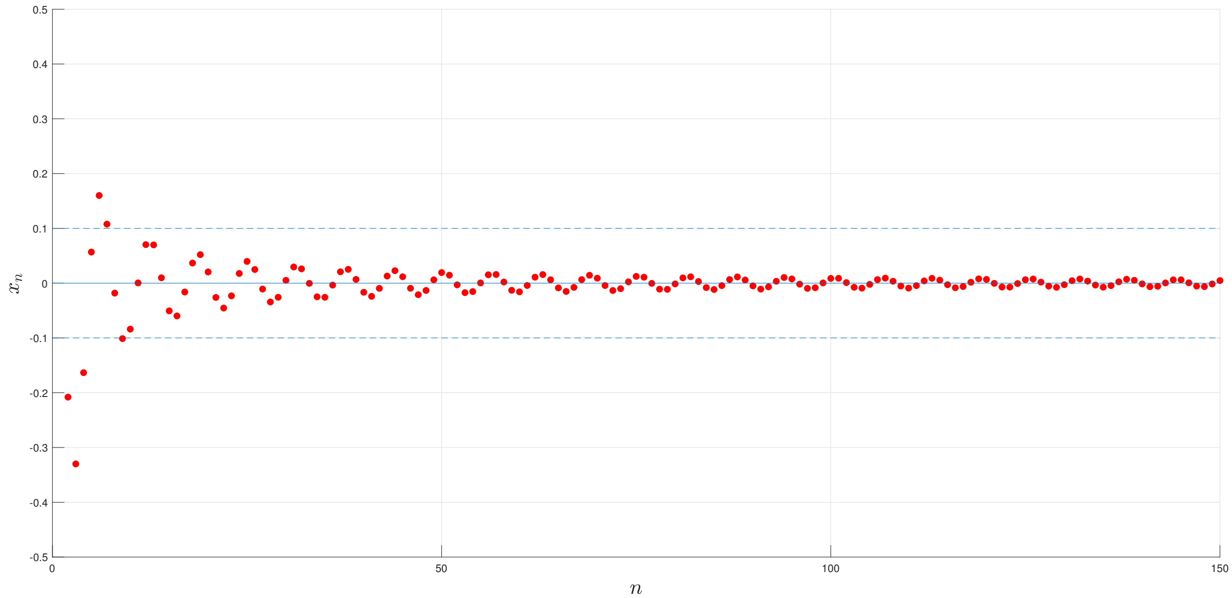


FIGURA 2. Gráfico bidimensional de $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

En cualquier caso, sería gráficamente difícil apreciar las bandas de ancho demasiado pequeño (ε muy pequeño). Por esa razón, se hace necesario un análisis algebraico detallado, ver ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.5. La sucesión $x_n = 1/n$ del ejemplo 1.2 converge a $\ell = 0$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y consideremos el intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Probemos que existe N tal que sólo los primeros N términos de



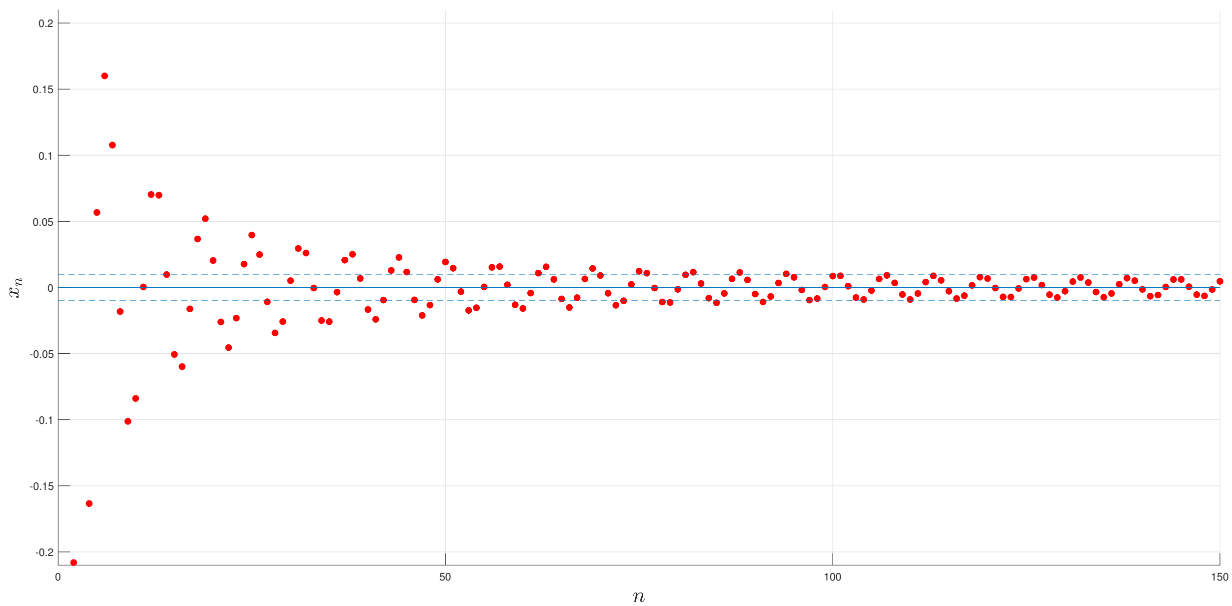


FIGURA 3. Gráfico bidimensional de $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$

la sucesión quedan afuera del intervalo, o en otras palabras, todo el resto queda dentro, es decir:

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall n \geq N)\, \frac{1}{n} \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \tag{1.2}$$

Para probar lo anterior, hay que determinar algún N que lo verifique. Para ello, suponiendo que existe N, impongamos que $(\forall n \geq N)\ \frac{1}{n} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, y desarrollemos esto:

$$(\forall n \geq N)\, \frac{1}{n} \in [-\varepsilon, \varepsilon] \iff (\forall n \geq N)\ -\varepsilon \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

Notemos que la desigualdad $-\varepsilon \leq 1/n$ es evidente, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $-\varepsilon < 0 < 1/n$. Luego, sólo debemos desarrollar $1/n \leq \varepsilon$, para obtener una desigualdad del tipo $n \geq C(\varepsilon)$, donde $C(\varepsilon)$ debería ser una función inversamente proporcional al valor de ε. Multiplicando por n y dividiendo por ε, obtenemos que $1/n \leq \varepsilon \iff 1/\varepsilon \leq n$. Luego, se tiene que:

$$(\forall n \geq N)\ -\varepsilon \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \iff (\forall n \geq N)\ \frac{1}{\varepsilon} \leq n.$$

De lo anterior obtenemos que N debe satisfacer $N \geq 1/\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es un número real arbitrario (la proposición de convergencia se debe satisfacer para todo $\varepsilon > 0$), entonces *definiendo N como el menor número entero que satisface la desigualdad* $N \geq 1/\varepsilon$, obtenemos el resultado ya que:

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tal que } N \geq \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow (\forall n \geq N)\, n \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

De lo anterior se concluye la proposición (1.2).

Nota 1.5. Cuando definimos N como el menor entero que satisface $N \geq 1/\varepsilon$, primero veamos que N está bien definido, al menos intuitivamente. Notemos que $\varepsilon > 0$ puede tomar cualquier valor, por ejemplo, $\varepsilon = 0,001 \Longrightarrow N = 1000$ es el menor entero que satisface la desigualdad; si por ejemplo $\varepsilon = \sqrt{0,001}$ entonces $1/\varepsilon = 31,622776601683796$ y $N = 32$ es el menor entero mayor o igual que $1/\varepsilon$. La justificación de la existencia del menor entero mayor o igual que $1/\varepsilon$ para cualquier valor de ε es una consecuencia del axioma del supremo, que no veremos aquí para no extendernos demasiado.

Nota 1.6. Lo importante de la nota anterior es que N *depende de* ε, lo cual se desprende del orden lógico de la definición de convergencia. En el ejemplo anterior, se observa que N *crece en la medida que* ε *decrece*, es decir, si tomamos $\varepsilon > 0$ cada vez más pequeño, el menor entero N mayor o igual que $1/\varepsilon$ será cada vez más grande. Por ejemplo, en la nota anterior observamos que

$$\varepsilon_1 = 0,001 < \varepsilon_2 = \sqrt{0,001} \quad \text{y} \quad N_1 = 1000 > N_2 = 32.$$

En general, para la sucesión del ejemplo 1.2, se cumple que:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Longrightarrow N_1 > N_2.$$

En cambio, para la sucesión $x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}$ (ejemplo 1.1), no importando que tan pequeño sea $\varepsilon > 0$, la convergencia se cumple para N relativamente pequeño. Esto significa que la iteración que genera esta sucesión es muy eficiente, convergiendo rápidamente a $\sqrt{2}$.

Nota 1.7. Notemos que es imposible probar la convergencia de la sucesión del ejemplo 1.1, definida por (1.1), por medio de la definición informal o formal que veremos a continuación, ya que no se dispone de una fórmula de x_n en función de n, y a priori tampoco se dispone del valor de su límite. Más adelante, veremos un criterio que nos permitirá probar la convergencia de (x_n) o de cualquier sucesión definida por fórmulas del tipo (1.1), denominadas *fórmulas de recurrencia*, que son comunes en procesos iterativos que aproximan soluciones de ecuaciones, ya sea algebraicas o diferenciales, y los cuales se aplican en la resolución de variados problemas de ingeniería y ciencias.

Con el fin de formalizar la "definición informal" anterior, debemos expresar matemáticamente la proposición *"existe N a partir del cual todos los términos de la sucesión están dentro del intervalo"*. Esto se escribe matemáticamente como:

$$(\forall n \geq N)\ x_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Con esta consideración teórica, la definición formal de convergencia es la siguiente:

Definición 1.3. Convergencia de una sucesión (definición formal).
Diremos que una sucesión (x_n) converge al número $\ell \in \mathbb{R}$ si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N)\ x_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Nota 1.8. La proposición $x_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ es equivalente a $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$, ya que usando las propiedades del valor absoluto, tenemos que:

$$x_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \iff \ell - \varepsilon \leq x_n \leq \ell + \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x_n - \ell \leq \varepsilon \iff |x_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Luego, la proposición en la definición formal es equivalente a:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N)\ |x_n - \ell| \leq \varepsilon. \tag{1.3}$$

O sea, la convergencia de la sucesión (x_n) a ℓ significa, en la jerga de los métodos numéricos, que para toda precisión $\varepsilon > 0$ en la aproximación de ℓ mediante la sucesión (x_n), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, la distancia entre x_n y ℓ ($|x_n - \ell|$) es menor o igual que la precisión ε ($|x_n - \ell| \leq \varepsilon$). Esto significa que podemos aproximar el número ℓ con la precisión que deseemos, aunque obviamente si queremos una muy buena precisión en la aproximación (ε muy pequeño), tendríamos que calcular muchos valores de (x_n) (N muy grande) para lograrla; ver nota 1.6. Debido a esto, la convergencia es un concepto clave, ya que nos permite aproximar, por ejemplo, números irracionales; ver la sucesión del ejemplo 1.1 (definida por (1.1)) que converge a $\sqrt{2}$.

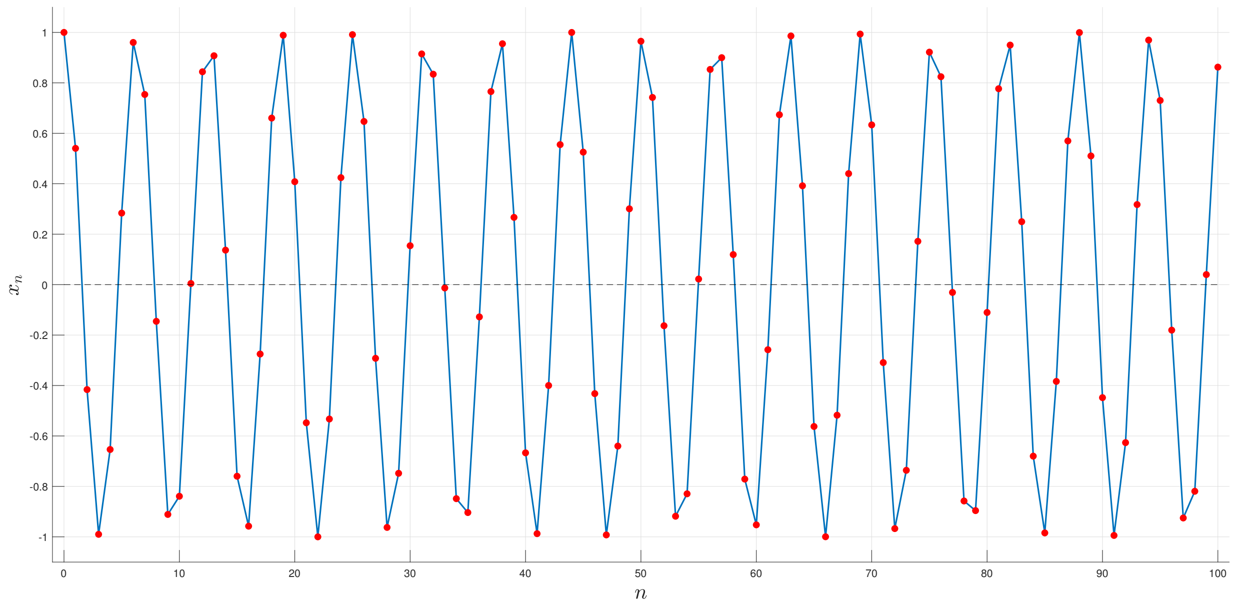


FIGURA 4. Gráfico bidimensional de la sucesión $(\cos n)$

Nota 1.9. Cuando una sucesión no converge a ningún número real, se dice que es una *sucesión divergente.*

Ejemplo 1.6. La sucesión $(\cos n)$ diverge, como se muestra en la Fig. 4, cuyas líneas sirven para visualizar el patrón de la sucesión *sin ser parte de ella.* De acuerdo a la Fig. 4, la sucesión no satisface la definición de convergencia para ningún número real ℓ. Esto porque no existe ningún ℓ tal que los valores de la sucesión queden dentro de una banda de centro ℓ y ancho arbitrariamente pequeño, a partir de cierto término. En este caso, la sucesión tiene un patrón periódico no amortigüado, a diferencia de la sucesión $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$ del ejemplo 1.4.

Ejemplo 1.7. La sucesión de tipo *logístico* (x_n) definida por la recurrencia $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ *no posee ningún patrón* (Fig. 5). De acuerdo a la Fig. 5, la sucesión tiene un comportamiento caótico (ni periódico ni semiperiódico), por lo cual diverge.

Notación 1.2. Cuando una sucesión (x_n) converge a ℓ, ℓ se denomina *límite de la sucesión*, y se anota

$$x_n \longrightarrow \ell \quad \text{o} \quad \text{lím}\, x_n = \ell \quad \text{o bien} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \ell.$$

Ejemplo 1.8. Probar que $\text{lím}\, \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$.

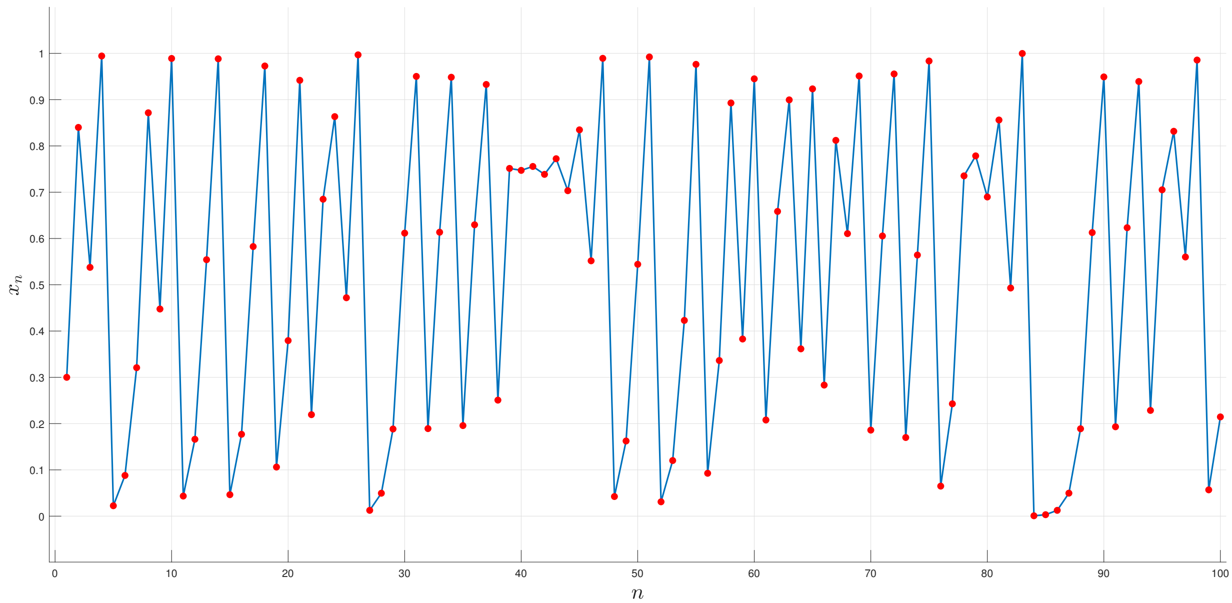


FIGURA 5. Gráfico bidimensional de la sucesión logística $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$

Poniendo $x_n = \frac{n+1}{2n+3}$ y $\ell = 1/2$ en (1.3), debemos probar que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N)\ \left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon. \tag{1.4}$$

Tal como en el ejemplo 1.5, lo primero es desarrollar la *desigualdad central* de la proposición de convergencia, es decir, debemos simplificar al máximo y ojalá eliminando el valor absoluto en $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$:

$$\left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2(n+1) - (2n+3)}{2(2n+3)} \right| = \left| \frac{2n+2-2n-3}{4n+6} \right| = \left| \frac{-1}{4n+6} \right| = \frac{1}{4n+6} \leq \frac{1}{4n}\,. \tag{1.5}$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Ahora procedemos a obtener una desigualdad del tipo $n \geq C(\varepsilon)$, donde $C(\varepsilon)$ es una función inversamente proporcional al valor de ε. Usando la desigualdad anterior, obtenemos que:

$$\frac{1}{4n} \leq \varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \frac{1}{4n} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{4\varepsilon}\,.$$

Entonces, procediendo igual que en el ejemplo 1.5, *definiendo N como el menor número entero que satisface* $N \geq 1/(4\varepsilon)$, obtenemos que

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tal que } N \geq \frac{1}{4\varepsilon} \Longrightarrow (\forall n \geq N)\, n \geq \frac{1}{4\varepsilon}\,. \tag{1.6}$$

De lo anterior se concluye la proposición (1.4). En efecto, del desarrollo anterior tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple la proposición (1.6). Luego,

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N)\; n \geq \frac{1}{4\varepsilon}\,.$$

Pero,

$$n \geq \frac{1}{4\varepsilon} \Longrightarrow \frac{1}{4n} \leq \varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon,$$

de acuerdo a (1.5). De la desigualdad y proposición anteriores, obtenemos (1.4).

Una primera propiedad de la convergencia es que cuando una sucesión converge, su límite es único, lo que se establece en el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Si (x_n) es una sucesión convergente a $\ell_1 \in \mathbb{R}$ y también a $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, necesariamente $\ell_1 = \ell_2$.*

Este resultado tiene importantes aplicaciones en los métodos numéricos. Por ejemplo, si deseamos aproximar un número irracional mediante un proceso iterativo, entonces lograremos este objetivo si la sucesión generada por éste resulta ser convergente. En el ejemplo 1.1, la sucesión (x_n) generada por el proceso iterativo descrito en la introducción (ver (1.1)), resulta ser convergente, razón por la cual este proceso calcula una aproximación de $\sqrt{2}$ (y no de otro número). De hecho, más adelante probaremos que partiendo de un número racional $x_0 > 0$, la fórmula (1.1) genera una sucesión de números racionales, la cual converge a $\sqrt{2}$.
Por último, este resultado tiene importantes consecuencias teóricas, dado que permite probar que toda *sucesión oscilante* diverge, a menos que la oscilación se amortigüe lo suficiente. Entendemos por sucesión oscilante a aquellas que siempre alternan entre al menos dos valores numéricos. Por ejemplo, $(\cos n)$ (Fig. 4),

$$((-1)^n) = 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots; \qquad \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = 1,\ 0,\ -1, 0,\ 1,\ 0,\ -1, 0,\ \cdots$$

son sucesiones oscilantes y por lo tanto divergentes. En cambio la sucesión (Fig. 2)

$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1} \equiv -1,\ 1/2,\ -1/3,\ 1/4,\ -1/5,\ \ldots$$

es oscilante, pero con oscilación amortigüada. Más aún, el amortigüamiento $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge a 0, razón por la cual la sucesión anterior es convergente a 0.

1.3. Álgebra de Sucesiones Convergentes. En esta sección daremos los resultados más importantes para determinar convergencia, y al mismo tiempo para calcular límites de sucesiones. Previamente, veremos una definición y propiedades preliminares.

Definición 1.5. Una sucesión (x_n) con dominio $D \subset \mathbb{N}$ se dice:

- *Acotada* si $(\exists M > 0)(\forall n \in D)\ |x_n| \leq M$.
- *Acotada inferiormente* si $(\exists s \in \mathbb{R})(\forall n \in D)\ x_n \geq s$.
- *Acotada superiormente* si $(\exists S \in \mathbb{R})(\forall n \in D)\ x_n \leq S$.

Ejemplo 1.9. Las sucesiones $(\cos n)$, $((-1)^n)$ y $(\cos(n\pi/2))$ son acotadas. En efecto, es fácil ver que $M = 1$ es una cota superior para el valor absoluto del término general de cada una de ellas. Sin embargo, como vimos, son divergentes.

El próximo resultado asegura que ser acotada es una condición necesaria para la convergencia, aunque a partir del ejemplo anterior, no es suficiente.

Teorema 1.6. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Como consecuencia del resultado anterior, la sucesión $(n) = 0,\ 1,\ 2\ , 3,\ \ldots$ no converge, ya que es no acotada (no existe $M > 0$ que sea cota superior del valor absoluto de n cuando $n \longrightarrow \infty$). Las sucesiones del ejemplo 1.9, si bien son acotadas, no convergen. Por ello decimos que ser acotada es solamente una condición necesaria y no suficiente para la convergencia.
El producto entre una sucesión acotada y una convergente a cero es convergente a cero, es decir:

Proposición 1.7. *Si (x_n) es una sucesión acotada e (y_n) una sucesión convergente a 0, entonces $(x_n \cdot y_n)$ es convergente a 0.*

Ejemplo 1.10. Como vimos previamente, la sucesión $((-1)^n/n)_{n\geq 1}$ es convergente a 0, ya que si bien es oscilante, la sucesión $((-1)^n)_{n\geq 0}$ es acotada y la sucesión $(1/n)_{n\geq 1}$ es convergente a 0, y por lo tanto, el producto entre ambas converge a 0.

Nota 1.10. Observemos que si (x_n) e (y_n) son dos sucesiones cualesquiera, entonces la sucesión producto $(x_n \cdot y_n)$ está bien definida, y su dominio es la intersección de los dominios de (x_n) e (y_n). En el ejemplo anterior, si bien la sucesión $((-1)^n)_{n\geq 0}$ está definida para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(1/n)_{n\geq 1}$ no está definida para $n = 0$, por lo tanto, el producto entre ambas está bien definida sólo para $n \geq 1$.

Proposición 1.8. Álgebra de límites.

Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones convergentes a x e y, respectivamente. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las sucesiones $(x_n \pm y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, y (λx_n) son también convergentes, y sus límites son $x \pm y$, $x \cdot y$, y λx, respectivamente.

Es decir, si $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ entonces:

- $x_n \pm y_n \longrightarrow x \pm y$
- $x_n \cdot y_n \longrightarrow x \cdot y$
- $\lambda x_n \longrightarrow \lambda x$

Nota 1.11. La hipótesis de convergencia de ambas sucesiones en la proposición anterior sobre álgebra de límites es indispensable, pues de lo contrario se puede esperar cualquier resultado. Por ejemplo, la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente (por ser no acotada), mientras que $(1/n)_{n\geq 1}$ es convergente, y su producto es la sucesión constante $1, 1, 1, \ldots$, la cual obviamente converge a 1. Sin embargo, la misma sucesión divergente $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ multiplicada por la sucesión convergente (a cero) $(1/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ produce la sucesión $(\sqrt{n})_{n\geq 1}$, la cual es divergente (es no acotada).

Mediante el álgebra de límites pueden calcularse los límites de sucesiones formadas como sumas, diferencias, producto o ponderación por constante de sucesiones convergentes.

Ejemplo 1.11. La sucesión del ejemplo 1.8 converge a $1/2$, ya que dividiendo por n el numerador y denominador, aplicando el álgebra de límites, y que $1/n$ converge a 0, tenemos que:

$$\lim \frac{n+1}{2n+3} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2+3\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{2+3\cdot 0} = \frac{1}{2}\,.$$

Queda el problema de calcular el límite de una sucesión obtenida como el cuociente de sucesiones convergentes, lo cual requiere un tratamiento especial. Con respecto a este problema se tienen los siguientes resultados.

Proposición 1.9. *Si (x_n) es una sucesión convergente a 0, entonces la sucesión $(1/x_n)$, siempre que esté bien definida, es no acotada, y por lo tanto divergente.*

Demostración. Por contradicción, si la sucesión $(1/x_n)$ fuera acotada, como (x_n) converge a 0, se debería cumplir que el producto entre ambas sucesiones converja a 0, es decir, se debería satisfacer que $(x_n \cdot 1/x_n) \equiv (1) \longrightarrow 0$, lo cual obviamente no se cumple (el producto entre ambas sucesiones produce la sucesión constante $1, 1, 1, \ldots$, la cual converge a 1, y por lo tanto no puede converger a

0, dado que el límite es único). Concluímos entonces que $(1/x_n)$ es no acotada (si lo fuera produce un resultado contradictorio con la teoría). ∎

Como la proposición anterior asegura que el recíproco de una sucesión convergente a 0, produce una sucesión divergente (no acotada), entonces la única forma que el recíproco de una sucesión convergente sea convergente, es que dividamos por una sucesión que *no converja a cero*. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.10. *Sea (x_n) una sucesión convergente a $\ell \neq 0$. Entonces:*

1. *A partir de cierto n, x_n tiene el mismo signo que ℓ, y por lo tanto, a partir de cierto n, x_n es distinta de cero, es decir:*
$$(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N)\ x_n \neq 0.$$
2. *La sucesión $(1/x_n)$ está bien definida a partir del N del ítem anterior, y ella es acotada.*

Como consecuencia de la propiedad anterior, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.11. Cuociente de sucesiones convergentes.
Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones convergentes a x e y, respectivamente. Si $y \neq 0$, entonces (x_n/y_n) está bien definida a partir de cierto N, y ella es convergente a x/y.

Demostración. Hay que probar que la sucesión $(x_n/y_n - x/y)$ converge a 0, de acuerdo al resultado siguiente:

Ejercicio 1. $u_n \longrightarrow u$ si y solamente si $(u_n - u) \longrightarrow 0$.

En efecto,
$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} = \frac{x_n y - x y_n}{y y_n} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y_n}(x_n y - x y_n). \tag{1.7}$$
Como $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$, usando el álgebra de límites tenemos que $yx_n \longrightarrow yx$, $xy_n \longrightarrow xy$, y por lo tanto $x_n y - x y_n \longrightarrow xy - xy = 0$. Además, usando la proposición anterior, tenemos que la sucesión $(1/y_n)$ es acotada, ya que $y_n \longrightarrow y \neq 0$. Luego, el producto entre las sucesiones $(1/y_n)$ y $(x_n y - x y_n)$ es convergente a 0, según la proposición 1.7. Finalmente, por álgebra de límites, la sucesión $(1/y_n) \cdot (x_n y - x y_n)$ multiplicada por la constante $1/y$ es convergente y
$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y_n}(x_n y - x y_n) \longrightarrow \frac{1}{y} \cdot 0 = 0.$$
De acuerdo a (1.7) concluímos que $x_n/y_n - x/y \longrightarrow 0$, que era lo que queríamos probar. ∎

Nota 1.12. Si (y_n) converge a 0, se puede esperar cualquier resultado sobre la convergencia de (x_n/y_n). Algunos ejemplos son:

- Si $x_n = y_n = 1/n$, entonces $x_n/y_n = 1$ para todo n, y por lo tanto $x_n/y_n \longrightarrow 1$.
- Si $x_n = 1/n$ e $y_n = 1/n^2$, entonces $x_n/y_n = n$ la cual diverge por ser no acotada.

  Ejercicio 2. Probar que $1/n^p \longrightarrow 0$, para cualquier número real $p > 0$.

- Si $x_n = 1/n^2$ e $y_n = 1/n$, entonces $x_n/y_n = 1/n$ la cual converge a 0.
- Si $x_n = (-1)^n/n$ e $y_n = 1/n$, entonces $x_n/y_n = (-1)^n$ la cual, si bien es acotada, es divergente.

1.4. Límites importantes. Usando el álgebra de límites se prueban los siguientes resultados:

- Toda sucesión constante $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $a \in \mathbb{R}$, es convergente y $\lim x_n = a$.
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.
- $x_n = n^k$ para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, es no acotada, por lo tanto divergente.
- Si
$$x_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0}$$
  para $p,\ q \in \mathbb{N}$, entonces
  - $p < q \Longrightarrow x_n \longrightarrow 0$
  - $p = q \Longrightarrow x_n \longrightarrow a_p/b_q$
  - $p > q \Longrightarrow (1/x_n) \longrightarrow 0$. Luego, (x_n) es no acotada y por lo tanto divergente.
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.
- $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

1.5. Criterio de Convergencia para Sucesiones Monótonas y Acotadas. En esta sección, veremos el llamado teorema de convergencia monótona para sucesiones. Las hipótesis del teorema constituyen un criterio para demostrar convergencia de sucesiones, particularmente útil en el caso que no conozcamos en forma explícita su término general, tal como aquella del ejemplo 1.1 (ver (1.1)). Para enunciar el criterio de convergencia, requerimos las definiciones siguientes.

Definición 1.12. Sea (x_n) una sucesión de números reales. Diremos que:

- (x_n) es creciente a partir de N si $\forall n \geq N$ se cumple que $x_{n+1} \geq x_n$.
- (x_n) es decreciente a partir de N si $\forall n \geq N$ se cumple que $x_{n+1} \leq x_n$.

Nota 1.13.

- Omitiremos la expresión "a partir de N" diciendo simplemente que la sucesión es creciente o decreciente.
- Si las desigualdades son estrictas, hablaremos de sucesiones estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes, según sea el caso.
- En cualquiera de los casos anteriores, diremos que la sucesión es *monótona.*
- Notemos que no es lo mismo el concepto de función monótona que el de sucesión monótona.

Ejemplo 1.12. Un ejemplo sencillo es la sucesión $(1/n)_{n\geq 1}$, la cual es estrictamente decreciente. En efecto,

$$(\forall n \geq 1)\, n+1 > n \Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\,.$$

Ejemplo 1.13. Un ejemplo no tan sencillo es el de la sucesión (x_n) definida por (1.1):

$$\text{Dado un valor de } x_0,\ \text{ para cada } n \in \mathbb{N},\ \text{ calcular } x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}\,. \tag{1.8}$$

Probemos que (x_n) es decreciente a partir de $N = 1$ bajo la condición que $x_0 > 0$; ver Figura 1. Queremos probar que $(\forall n \geq 1)\, x_{n+1} \leq x_n$. Desarrollemos la desigualdad $x_{n+1} \leq x_n$, reemplazando x_{n+1} mediante la fórmula que permite calcularlo:

$$x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{x_n^2+2}{2x_n} \leq x_n \iff x_n^2+2 \leq 2x_n^2 \iff x_n^2 \geq 2 \iff x_n \geq \sqrt{2}.$$

Notemos que para la segunda equivalencia anterior, usamos que para todo $n \geq 1$, $x_n > 0$, lo cual es fácil de verificar mediante la fórmula (1.8) que define a x_{n+1} bajo la condición que $x_0 > 0$.

Ejercicio 3. Probar que $x_0 > 0$ implica que $\forall n \geq 1$, $x_n > 0$.

Lo anterior implica que se cumple la proposición siguiente:

$$(\forall n \geq 1)\, x_{n+1} \leq x_n \iff (\forall n \geq 1)\, x_n \geq \sqrt{2}.$$

Es decir, (x_n) decreciente equivale a (x_n) acotada inferiormente por $\sqrt{2}$, a partir de $N = 1$. Probemos entonces que (x_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{2}$ a partir de $N = 1$, o equivalentemente que (x_{n+1}) es acotada inferiormente por $\sqrt{2}$, es decir:

$$(\forall n \geq 1) \quad x_n \geq \sqrt{2} \iff (\forall n \geq 0) \quad x_{n+1} \geq \sqrt{2}.$$

Usando la fórmula que define a x_{n+1} y que $x_n > 0$, tenemos que:

$$x_{n+1} \geq \sqrt{2} \iff \frac{x_n^2+2}{2x_n} \geq \sqrt{2} \iff x_n^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}x_n \iff \left(x_n - \sqrt{2}\right)^2 \geq 0.$$

Notando que la última desigualdad es una tautología (verdad absoluta), ya que es un cuadrado perfecto, que obviamente siempre es mayor o igual que cero cualquiera que sea el valor de x_n, obtenemos que la sucesión (x_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{2}$, y por lo tanto, también es decreciente. El siguiente resultado nos permitirá concluir que (x_n) es convergente.

Teorema 1.13. Criterio de convergencia para sucesiones monótonas y acotadas. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente. En particular, se tiene que:*

- *Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.*
- *Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.*

Nota 1.14. El criterio de convergencia anterior se resume en la primera afirmación porque:

- Toda sucesión creciente es acotada inferiormente (por su primer término). Luego, la hipótesis "acotada superiormente" es suficiente.
- Toda sucesión decreciente es acotada superiormente. Luego, la hipótesis "acotada inferiormente" es suficiente.
- Una sucesión creciente y no acotada superiormente, necesariamente diverge a ∞.
- Una sucesión decreciente y no acotada inferiormente, necesariamente diverge a $-\infty$.

Este criterio implica que la sucesión (x_n) definida por (1.8) es convergente, ya que en el ejemplo 1.13 probamos que ella es decreciente y acotada inferiormente. Ahora, corroboremos que $\lim x_n = \sqrt{2}$, para lo cual usaremos el siguiente resultado general:

Proposición 1.14. *Sea (x_n) una sucesión convergente de números reales definida en $D \subset \mathbb{N}$. Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow D$ es una función creciente de números naturales, entonces, la sucesión (y_n) definida por $y_n = x_{f(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ es convergente y $\lim y_n = \lim x_n$.*

Pongamos $f(n) = n + 1$, la cual es una función que transforma un natural en su sucesor, y por lo tanto es creciente. Denotando por ℓ el límite de (x_n), la proposición anterior asegura que $\lim x_{n+1} = \lim x_n = \ell$, donde en este caso $y_n = x_{n+1}$.

Por otro lado, usando el álgebra de límite de sucesiones convergentes, obtenemos que

$$\lim \frac{x_n^2+2}{2x_n} = \frac{\ell^2+2}{2\ell}\ .$$

Notemos que lo anterior es factible ya que $\lim x_n = \ell \neq 0$, pues (x_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{2} > 0$, lo cual implica que su límite $\ell \geq \sqrt{2} > 0$. Pero, tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$ en la fórmula (1.8), obtenemos que:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \Longrightarrow \ell = \frac{\ell^2 + 2}{2\ell}\,.$$

Despejando ℓ de la igualdad anterior, tenemos que $\ell = \pm\sqrt{2}$, y como $\ell \geq \sqrt{2} > 0$, entonces $\ell = \sqrt{2}$.

Nota 1.15.

- Hemos probado que la sucesión (x_n) definida por (1.8) converge a $\sqrt{2}$, bajo la condición que $x_0 > 0$. Por otro lado, siguiendo la misma argumentación que antes, es posible probar que (x_n) converge a $-\sqrt{2}$ siempre que $x_0 < 0$. O sea, la convergencia de una sucesión definida por una fórmula de recurrencia del tipo (1.8), depende de la elección del término inicial x_0.
- De este modo, estamos aproximando el número irracional $\pm\sqrt{2}$ (según si x_0 es mayor o menor que 0), mediante una sucesión de números racionales, bajo la condición que x_0 sea racional. En efecto, partiendo de $x_0 \in \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}$ denota el conjuntos de los números racionales, entonces la fórmula (1.8) produce solamente números racionales, dado que $\mathbb{Q}$ es cerrado para la suma y la multiplicación (y división, que corresponde a multiplicar por el inverso) y entonces $x_n \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x_{n+1} \in \mathbb{Q}$. Esto es importante en el cálculo numérico y en la ingeniería, ya que el cálculo con números racionales es sencillo de realizar por los computadores, lo que permite aproximar en la práctica números irracionales (como $\sqrt{2}$) con mucha precisión.

Ejemplo 1.14. A continuación, estudiaremos un importante ejemplo de aproximación de números irracionales mediante racionales. Se trata de la sucesión $s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que converge al *número de Euler* $e \approx 2{,}718281798347358$. Para probarlo, se deben utilizar las *desigualdades de Bernoulli*. Concretamente, se procede como sigue:

1. Probar la desigualdad de Bernoulli, forma 1:
$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall h > -1) \qquad (1+h)^n \geq 1 + nh} \tag{1.9}$$
2. Probar la desigualdad de Bernoulli, forma 2:
$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\,\forall u \in \left(-1, \tfrac{1}{n}\right) \qquad (1+u)^n \leq \frac{1}{1-nu}}$$
3. Usando la desigualdad de Bernoulli, forma 1, probar que la sucesión (s_n) es creciente.

4. Usando la desigualdad de Bernoulli, forma 2, probar que la sucesión (s_n) es acotada superiormente.

   Indicación: Demostrar que $s_{2n} \leq 4$.

Solución:

1. Notar que para $h \geq 0$, la desigualdad se desprende directamente del teorema del binomio:

$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} h^k = 1 + nh + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq 1 + nh.$$

   Ejercicio 4. Probar la desigualdad para todo $h > -1$ por inducción sobre n.

2. Aplicando la desigualdad de Bernoulli, forma 1, con $h := \frac{1}{1+u} - 1$ (se cumple que $h > -1$ ya que $1 + u > 0$), se obtiene:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh = 1 + n\left(\frac{1}{1+u} - 1\right) = 1 - \frac{nu}{1+u} \geq 1 - nu,$$

   ya que

   Ejercicio 5.

$$-\frac{nu}{1+u} \geq -nu \text{ para } 1 + u > 0.$$

   Reemplazando h en la desigualdad de más arriba, se tiene que

$$\left(\frac{1}{1+u}\right)^n \geq 1 - nu.$$

   Como $1 - nu > 0$, multiplicando cruzado la última desigualdad se mantiene y se llega al resultado.

3. Como $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$ y $1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$, al reemplazar en s_{n+1} y s_n se obtiene:

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

   Pero,

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = \frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1} = 1 - \frac{1}{n^2+2n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

   Reemplazando y usando la desigualdad de Bernoulli para $h = -\frac{1}{(n+1)^2}$, obtenemos que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

o sea, $s_{n+1} \geq s_n$.

4. Como (s_n) es creciente, entonces $s_n \leq s_{2n}$. Probando que $s_{2n} \leq 4$ (según la indicación), se obtiene que $s_n \leq 4$, obteniéndose que (s_n) es acotada superiormente. Probemos entonces la afirmación de la indicación. Usando la desigualdad de Bernoulli, forma 2, para $u = \frac{1}{2n} \in \left(-1, \frac{1}{n}\right)$ obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - n \cdot \frac{1}{2n}} = 2.$$

Elevando al cuadrado, llegamos a que $s_{2n} \leq 4$. Como (s_n) es creciente y acotada superiormente, el criterio de sucesiones monótonas y acotadas (teorema 1.13) implica que (s_n) es convergente a un número e. Además, se tiene que:

$$s_1 = 2 \leq s_{2n} \leq 4 \Longrightarrow 2 \leq e \leq 4.$$

Finalmente, $e \approx s_{10^8} \approx 2{,}718281798347358\cdots$.

1.6. Ejercicios resueltos de sucesiones.

1. Utilizando la definición de convergencia, pruebe que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, donde $p > 0$ es un número real fijo.

Solución: Queremos probar que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tq } (\forall n \geq N) \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| \leq \varepsilon.$$

Desarrollando la desigualdad central para $n = N$ obtenemos que:

$$\frac{1}{N^p} \leq \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} \leq N^p \iff \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p} \leq N.$$

Definamos $N \in \mathbb{N}$ como el menor entero positivo satisfaciendo esta última desigualdad. Como la sucesión $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ es decreciente para $p > 0$, obtenemos que para todo $n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{N^p} \leq \varepsilon.$$

Lo anterior prueba el resultado buscado. ■

2. **P1-C3-2016-1.** Calcule los siguientes límites:

   a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-8n\sqrt{n} + 2\sqrt{n}}{4n^3 + n^2 - 2}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-2}{4n-3}\right)^{4n+3}$

Indicación: Puede serle útil usar que $\lim_{m\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$.

Solución.

a) Dividiendo por n^3, aplicando álgebra de límites y considerando que $\lim 1/n^p = 0$ para cualquier $p > 0$ (fijo), tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-8n\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{4n^3+n^2-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{8}{n^{3/2}}+\dfrac{2}{n^{5/2}}}{4+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-0+0}{4+0-0} = \frac{0}{4} = 0.$$

b) Escribiendo el límite en la forma:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-2}{4n-3}\right)^{4n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n-3}\right)^{4n-3+6}$$

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-2}{4n-3}\right)^{4n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n-3}\right)^{4n-3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n-3}\right)^{6} = e\cdot 1 = e,$$

ya que $\lim_{m\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$, considerando $m = 4n-3$ en el primer límite, y usando álgebra de límites en el segundo límite del lado derecho, respectivamente.

■

3. Estudiar la convergencia de la *sucesión geométrica* de razón r, definida por (r^n), donde $r \in \mathbb{R}$ es un número fijo. Para ello, separar los casos: (a) $|r| < 1$, (b) $|r| > 1$, (c) $r = -1$, y (d) $r = 1$ y use la desigualdad de Bernoulli, forma 1, (1.9).

Solución.

(a) Intuitivamente, dado que $|r| < 1$, al elevarlo a potencias cada vez mayores, $|r|^n$ se hará cada vez más pequeño, es decir, convergerá a 0.

Ejercicio 6. Probar que la sucesión (r^n) es estrictamente decreciente para $0 < r < 1$.

Como $r^n \longrightarrow 0 \iff |r^n| = |r|^n \longrightarrow 0$, basta probar que la sucesión $(|r|^n)$ converge a 0. Usando la desigualdad de Bernoulli, forma 1, (1.9) para $h = \frac{1}{|r|} - 1 > 0$ para $|r| < 1$, obtenemos que

$$(1+h)^n = \frac{1}{|r|^n} \geq 1 + nh \iff 0 \leq |r|^n \leq \frac{1}{1+nh}.$$

Como $\frac{1}{1+nh} \longrightarrow 0$ por álgebra de límites, el Teorema del Sandwich implica el resultado.

Ejercicio 7. Probar el **Teorema del Sandwich:** Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq N$ y $\lim a_n = \lim c_n = \ell$, entonces $\lim b_n = \ell$.

(b) Definiendo $q = 1/r$, tenemos que $0 < |q| = 1/|r| < 1$, ya que $|r| > 1$, y luego:

$$\lim \left(\frac{1}{|r|^n} \right) = \lim \left| \frac{1}{r} \right|^n = \lim |q|^n = 0,$$

en virtud del caso (a). Por lo tanto, por la proposición 1.9 obtenemos que (r^n) es no acotada, ya que su recíproca converge a 0, y por lo tanto diverge (convergente implica acotada, y entonces no acotada implica divergente).

Ejercicio 8. Probar que la sucesión (r^n) es estrictamente creciente para $r > 1$.

Nota 1.16. En el caso en que $r < -1$, la sucesión (r^n) diverge y es oscilatoria, con oscilación que se amplifica cuando n crece.

(c) $(r^n) = ((-1)^n)$ en este caso. Luego, esta sucesión diverge, como vimos anteriormente.

(d) $(r^n) = (1^n) \equiv 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, esta sucesión es constante, por lo tanto convergente y $r^n \longrightarrow 1$.

En resumen, se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |r| < 1, \\ \text{no existe} & \text{si} \quad |r| > 1 \text{ ó } r = -1, \\ 1 & \text{si} \quad r = 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

■

4. Calcule, si es que existen, los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \sqrt{n+3}$.

Solución.

a) Escribimos la sucesión como sigue:

$$\frac{\cos^2 n}{2^n} = (\cos^2 n) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n .$$

Notando que el primer factor es una sucesión acotada, mientras que el segundo es una sucesión convergente a 0, obtenemos que el producto converge a 0. El segundo factor es la sucesión $((1/2)^n)$, la cual converge a 0, usando (1.10) para $r = 1/2$.

b) Desracionalizando (racionalizando al revés) tenemos:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+3} &= \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\sqrt{n+3}\\ &= \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\longrightarrow\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

En el cálculo del límite anterior, hemos aplicado el álgebra de límites, junto al hecho que $\frac{1}{n}\longrightarrow 0$. Además, en la última igualdad antes de calcular el límite, hemos dividido ambos miembros de la fracción por $\sqrt{n}$. Por último, aplicamos la siguiente propiedad.

Ejercicio 9. Si $\lim x_n=\ell$ y f es una función continua en ℓ, entonces $\lim f(x_n)=f(\ell)$.

La propiedad anterior implica, en particular, que $\lim\sqrt{1+3/n}=\sqrt{1+0}=1$, ya que $\lim 1+3/n=1+0=1$ (por álgebra de límites), y dado que la función raíz cuadrada es continua en 1.

■

5. Demuestre usando la definición de convergencia de sucesiones que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2.$$

Solución: Debemos probar que:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})\text{ tal que }(\forall n\geq N)\ \left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|\leq\varepsilon. \tag{1.11}$$

Desarrollando la desigualdad central de convergencia tenemos que:

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|\leq\varepsilon\iff\left|\frac{2n+1-2n-2}{n+1}\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}\leq\varepsilon.$$

Como la sucesión $(1/n)$ converge a 0, entonces por la proposición 1.14 se tiene que la sucesión $(1/(n+1))$ también converge a 0. Luego:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})\text{ tal que }(\forall n\geq N)\ \frac{1}{n+1}=\left|\frac{1}{n+1}-0\right|\leq\varepsilon.$$

Como esta última desigualdad es equivalente a la original, lo anterior prueba (1.11). ■

6. Calcule, si es que existen, los siguientes límites:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{n^2+n}\ ; \quad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+6n+7}-n^2\right)\ ; \quad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\ .$$

Solución.

(a) Dividiendo por n^2 y utilizando el álgebra de límites, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{3+0+0}{1+0} = 3.$$

(b) Desracionalizando, dividiendo por n^2, utilizando el álgebra de límites y la proposición del ejercicio 9, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+6n+7}-n^2\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+6n+7}-n^2\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n^4+6n+7}+n^2\right)}{\left(\sqrt{n^4+6n+7}+n^2\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{n^4+6n+7-n^4}{\sqrt{n^4+6n+7}+n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{6n+7}{\sqrt{n^4+6n+7}+n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{7}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n^3}+\frac{7}{n^4}}+1} = \frac{6+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = 3.
\end{aligned}$$

(c) Como la sucesión $(\sin n)$ es acotada y la sucesión $(1/\sqrt{n})$ converge a 0, entonces el producto entre ambas converge a 0. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0.$$

$\blacksquare$

7. Determine si las siguientes sucesiones son: (i) monótonas, (ii) acotadas, (iii) convergentes.

$$\text{(a)} \ \frac{1+(-1)^n}{n}\ ; \quad \text{(b)} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\ .$$

Solución.

(a) Los primeros términos de la sucesión son: 0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, ... Luego, claramente esta sucesión no es monótona. Además, es claramente acotada puesto que, dado que $1/n \leq 1$ y $1+(-1)^n$ o bien es igual a 0 o a 2, entonces:

$$\frac{1+(-1)^n}{n} \leq 2 \quad \forall n \geq 1.$$

Incluso, siendo más finos, dado que

$$\frac{1+(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ es impar,} \\ \dfrac{2}{n} & \text{si} \quad n \text{ es par,} \end{cases}$$

entonces la sucesión está acotada por 1, ya que cuando n es par, se tiene que $n = 2m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, y así $2/n = 1/m \leq 1$ para todo $m \geq 1$.

Por último, la sucesión es convergente a 0, ya que $2/n$ tiende a 0 (puesto que los términos impares convergen a 0, y los pares también).

(b) Los primeros términos de la sucesión (partiendo desde $n = 0$) son: 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ... Luego, claramente esta sucesión no es monótona. Claramente es acotada, ya que $|\cos x| \leq 1$ para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$. Por último, esta sucesión es divergente, ya que tiene un patrón oscilatorio (se repiten sus valores) y por lo tanto nunca se "estabiliza" en torno a un único valor.

■

8. Demuestre que si (a_n) es una sucesión convergente a $\ell \geq 0$ entonces la sucesión $(\sqrt{a_n})$ converge a $\sqrt{\ell}$. Para ello separe su análisis en dos casos:

a) $\ell = 0$. En este caso, demuestre la propiedad usando la definición de convergencia.

b) $\ell > 0$. En este caso, escriba $\sqrt{a_n} - \sqrt{\ell}$ como $\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{\ell}}\right)(a_n - \ell)$. Pruebe que el primer término es una sucesión acotada, mientras que el segundo converge a 0. Concluya.

¿Por qué era necesario separar estos dos casos?

Solución.

a) $\ell = 0$. En este caso, $a_n \longrightarrow 0$. Queremos probar que $\sqrt{a_n} \longrightarrow 0$ (suponiendo que $a_n > 0$ a partir de cierto N), es decir:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tq } (\forall n \geq N) \sqrt{a_n} \leq \varepsilon. \tag{1.12}$$

Desarrollando la desigualdad $\sqrt{a_n} \leq \varepsilon$, obtenemos que ésta equivale a $a_n \leq \varepsilon^2$. Como $a_n \longrightarrow 0$, entonces (suponiendo que $a_n > 0$):

$$(\forall \varepsilon' > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tq } (\forall n \geq N)\, a_n \leq \varepsilon'.$$

Haciendo el cambio de variables $\varepsilon' = \varepsilon^2$ ($\varepsilon = \sqrt{\varepsilon'}$), obtenemos (1.12). Esto concluye la demostración.

b) $\ell > 0$. En este caso, probaremos que la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{\ell}}\right)$ es acotada. Para ello, basta probar que la sucesión $(\sqrt{a_n} + \sqrt{\ell})$ es acotada por números estrictamente positivos. En efecto, como $a_n \longrightarrow \ell$ tenemos que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tq } (\forall n \geq N) \; |a_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Como $\ell > 0$, escogiendo $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ obtenemos que para dicho valor de ε:

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tq } (\forall n \geq N) \; |a_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2},$$

o equivalentemente (teniendo en cuenta que $|x - a| \leq M \iff a - M \leq x \leq a + M$)

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tq } (\forall n \geq N) \; \frac{\ell}{2} \leq a_n \leq \frac{3\ell}{2}\,.$$

Tomando raíz cuadrada en la desigualdad anterior llegamos a que:

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tq } (\forall n \geq N) \; \sqrt{\frac{\ell}{2}} \leq \sqrt{a_n} \leq \sqrt{\frac{3\ell}{2}}\,.$$

Por último, sumando $\sqrt{\ell}$ en la desigualdad anterior sale que:

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tq } (\forall n \geq N) \; \sqrt{\frac{\ell}{2}} + \sqrt{\ell} \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{\ell} \leq \sqrt{\frac{3\ell}{2}} + \sqrt{\ell}.$$

Lo anterior prueba que la $(\sqrt{a_n} + \sqrt{\ell})$ es acotada por números estrictamente positivos a partir de N (lo cual basta para aplicar las propiedades de convergencia). Así,

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tq } (\forall n \geq N) \; \frac{1}{\sqrt{\frac{3\ell}{2}} + \sqrt{\ell}} \leq \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\ell}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{\ell}{2}} + \sqrt{\ell}}.$$

Finalmente, racionalizando la sucesión $(\sqrt{a_n} - \sqrt{\ell})$, ésta equivale a $\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{\ell}}\right)(a_n - \ell)$. Como vimos, el primer término es una sucesión acotada, mientras que el segundo es una sucesión convergente a 0, entonces el producto de ambas sucesiones es convergente a 0. En conclusión, $\sqrt{a_n} \longrightarrow \sqrt{\ell}$. ■

Nota 1.17. Notemos que era necesario separar los dos casos dado que si $\ell = 0$ la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{\ell}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$ es no acotada, y entonces diverge, pues $a_n \longrightarrow \ell = 0$.

Nota 1.18. Para probar el enunciado del ejercicio anterior, bastaría haber aplicado la proposición del ejercicio 9. Sin embargo, la realización del ejercicio anterior es instructiva para aplicar la noción de convergencia.

9. Calcule el siguiente límite
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n$$
Justifique su respuesta utilizando el álgebra de límites de sucesiones convergentes.

Solución: Desracionalizando tenemos que:
$$\sqrt{n^2+n} - n = \sqrt{n^2+n} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$
Por otro lado, dividiendo la fracción por n arriba y abajo obtenemos:
$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$
Con la igualdad anterior es claro que:
$$\lim \sqrt{n^2+n} - n = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}\,,$$
ya que $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, aplicando el álgebra de límites de sucesiones convergentes y la proposición del ejercicio 9. ■

10. Demuestre que si $\lim n \cdot a_n$ existe entonces $\lim a_n = 0$.

Solución: Supongamos que la sucesión $(n \cdot a_n)$ es convergente y llamemos $\lim n \cdot a_n = \ell$. Luego,
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ \text{tq}\ (\forall n \geq N)\ |n \cdot a_n - \ell| \leq \varepsilon. \tag{1.13}$$
Utilizando que $|a| - |b| \leq \big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$, tenemos que:
$$n|a_n| - |\ell| \leq |n \cdot a_n - \ell|.$$
Utilizando la desigualdad anterior en (1.13) llegamos a que:
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N)\ n|a_n| \leq |\ell| + \varepsilon.$$
Y dividiendo por $n > 0$:
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N)\ |a_n| \leq \frac{|\ell| + \varepsilon}{n}\,. \tag{1.14}$$
Por otro lado, como la sucesión $(1/n)$ converge a 0, tenemos que:
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_1 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N_1)\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

Luego, combinando lo anterior con (1.14), y definiendo $N_2 = \max(N,\ N_1)$, obtenemos que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_2 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N_2)\ |a_n| \leq (|\ell| + \varepsilon)\,\varepsilon\ . \tag{1.15}$$

Lo anterior significa que $|a_n| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, lo cual implica lo pedido. ■

Nota 1.19. Para concluir adecuadamente, en (1.15) hay dos posibilidades (teniendo en cuenta que $|\ell|$ está fijo y que $\varepsilon > 0$ es arbitrario):

- $|\ell| < \varepsilon$: Entonces, de (1.15) llegamos a que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_2 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N_2)\ |a_n| \leq 2\varepsilon^2\ ,$$

  lo cual permite concluir que $|a_n| \longrightarrow 0$.
- $|\ell| \geq \varepsilon$: Entonces, de (1.15) llegamos a que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_2 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N_2)\ |a_n| \leq 2|\ell|\varepsilon\ ,$$

  lo cual también permite concluir que $|a_n| \longrightarrow 0$, ya que como ε es arbitrariamente pequeño, "absorbe" el valor de $2|\ell|$ con su pequeñez.

En cualquiera de los dos casos, se concluye el resultado buscado. ■

11. Si se sabe que para α y β positivos $\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta)\right)$ existe, se pide calcular el valor de α y β, y luego el valor del límite.

Solución: Desracionalizando la expresión dentro del límite tenemos que

$\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta)\right)$

$$\begin{aligned}
&= \lim n \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta)\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n + \beta)\right)}{\left(\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n + \beta)\right)} \\
&= \lim n \frac{n^2+n+1-(\alpha n+\beta)^2}{\left(\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n + \beta)\right)} = \lim n \frac{(1-\alpha^2)n^2 + (1-2\alpha\beta)n + 1 - \beta^2}{\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n + \beta)} \\
&\qquad = \lim \frac{(1-\alpha^2)n^2 + (1-2\alpha\beta)n + 1 - \beta^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \alpha + \frac{\beta}{n}}\ .
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Para obtener la última igualdad, se divide ambos miembros de la fracción por n. Por álgebra de límites, el denominador de la sucesión anterior converge a $1 + \alpha$, cualquiera que sean los valores de α y β; por el contrario el numerador diverge, salvo que los coeficientes que acompañen a n^2 y a n se anulen simultáneamente. Es decir:

$$1-\alpha^2=0 \quad \text{y} \quad 1-2\alpha\beta=0.$$

De lo anterior, tenemos que $\alpha=\pm 1$ y $\beta=\frac{1}{2\alpha}$. Pero, dado que α y β son positivos (por enunciado), entonces $\alpha=1$, y reemplazando este valor en la ecuación anterior de β obtenemos que $\beta=\frac{1}{2}$. Con esto, el valor del límite se obtiene reemplazando los valores de ambos coeficientes y aplicando el álgebra de límites:

$$\text{lím} \frac{(1-\alpha^2)n^2+(1-2\alpha\beta)n+1-\beta^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\alpha+\frac{\beta}{n}}=\frac{1-\beta^2}{1+\alpha}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+1}=\frac{3}{8}\,.$$

Nota 1.20. También podemos utilizar el resultado del ítem 10. Como

$$n\left(\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)\right) \text{ converge,}$$

entonces $\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)\longrightarrow 0$.

Desracionalizando y dividiendo por n como antes (ver (1.16)), tenemos que:

$$\text{lím}\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)=\text{lím}\frac{(1-\alpha^2)n+1-2\alpha\beta+\frac{1-\beta^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\alpha+\frac{\beta}{n}}\,.$$

Al igual que antes, la sucesión anterior converge a $\frac{1-2\alpha\beta}{1+\alpha}$, aplicando el álgebra de límites y siempre que $1-\alpha^2=0$. Además, como el límite anterior es 0, entonces $1-2\alpha\beta=0$. Desde allí, llegamos al mismo resultado que antes. ■

12. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por:

$$a_n=\frac{r^n}{1+r^n}, \quad \text{donde } r>0 \text{ es un número real fijo.}$$

a) Suponga que $r\geq 1$. Pruebe que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Muestre que la sucesión es acotada superiormente. Concluya que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

b) Suponga que $r<1$. Pruebe que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Muestre que la sucesión es acotada inferiormente. Concluya que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Solución.

a) Hay que probar que:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto equivale a:

$$\frac{r^{n+1}}{1+r^{n+1}} \geq \frac{r^n}{1+r^n} \iff (1+r^n)\cdot r^{n+1} \geq r^n \cdot (1+r^{n+1})$$
$$\iff r + r^{n+1} \geq 1 + r^{n+1} \iff r \geq 1.$$

Como $r \geq 1$ se deduce lo que se quería probar. Además, es obvio que (a_n) está acotada superiormente por 1, y luego, por el criterio de convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas(teorema 1.13), se concluye que (a_n) es convergente.

b) Similarmente a la parte anterior se prueba que:

$$a_{n+1} < a_n \iff r < 1.$$

Además, como (a_n) es acotada inferiormente por 0 se concluye que es convergente, aplicando el criterio de convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas (teorema 1.13).

$\blacksquare$

13. Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) (nq^n), $q \in \mathbb{R}$ fijo.

Indicación: Verifique que todo se reduce al caso $|q| < 1$, ¿por qué? En este caso, use la desigualdad de Bernoulli:

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall h > 0) \qquad (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}$$

para $h := \frac{1}{|q|} - 1$.

b) $\left(n^k q^n\right)$, $q \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ fijos.

Indicación: Reducir al caso de la sucesión (nr^n) para algún r fijo.

Solución.

a) Si la sucesión del enunciado converge, el resultado del ítem 10 implica que (q^n) converge. Esto es cierto cuando $|q| < 1$ o $q = 1$; ver (1.10). Sin embargo, descartamos el caso $q = 1$ porque la sucesión (n) diverge por ser no acotada. Luego, la sucesión (nq^n) sólo puede converger cuando $|q| < 1$.

Ahora, usemos la desigualdad de Bernoulli (que se obtiene directamente del teorema del binomio) para $h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ para $|q| < 1$. Con ello, obtenemos que:

$$(1+h)^n = \frac{1}{|q|^n} \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \iff 0 \leq n|q|^n \leq \frac{n}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}.$$

Como h es constante, aplicando el teorema del Sandwich, obtenemos que

$$n|q|^n \longrightarrow 0 \iff nq^n \longrightarrow 0.$$

Ejercicio 10. Verificar que $\lim \frac{n}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2} = 0$.

b) Siguiendo la indicación, observemos que $\left(n^k|q|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se puede escribir en la forma:

$$n^k|q|^n = \left(n|q|^{n/k}\right)^k = (nr^n)^k, \quad \text{donde } r = |q|^{1/k}.$$

Por la parte anterior, la sucesión (nr^n) converge a 0 para $r = |q|^{1/k} < 1$, lo cual se tiene para $|q| < 1$. Como $k \in \mathbb{N}$ es un número fijo, lo anterior más el álgebra de límites implica que:

$$\lim\,(nr^n)^k = 0 \quad \text{si } r < 1.$$

Equivalentemente, reemplazando $r = |q|^{1/k}$:

$$\lim n^k|q|^n = 0 \iff \lim n^k q^n = 0 \qquad \text{si } |q| < 1.$$

■

14. **P2-C3-2016-1.** Sea (u_n) la sucesión definida por la recurrencia:

$$u_2 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{\frac{4+u_n^2}{2}}, \quad n \geq 2$$

a) Pruebe que (u_n) es creciente y acotada superiormente.

Indicación: Usando inducción, pruebe que $u_n < 2$ para todo $n \geq 2$.

b) Concluya que (u_n) es convergente y calcule su límite.

Solución.

a) Primero evaluemos los dos primeros términos de (u_n):

$$u_2 = 1, \quad u_3 = \sqrt{\frac{4+u_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} > 1 = u_2$$

Así $u_3 > u_2$. De manera general, probemos que $u_{n+1} > u_n$. Reemplazando la fórmula de u_{n+1} tenemos que:

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{4+u_n^2}{2}} > u_n \iff \frac{4+u_n^2}{2} > u_n^2 \iff u_n^2 < 4 \iff u_n < 2. \tag{1.17}$$

En la primera equivalencia anterior elevamos al cuadrado, mientras que usamos que $u_n > 0$ para todo n, tanto para en la primera como en la última equivalencia, lo cual es evidente a partir de la fórmula que define a la sucesión. Entonces, probar que (u_n) es creciente es equivalente a probar que $u_n < 2$ para todo n.

Siguiendo la indicación, probaremos ésto por inducción. Para $n = 2$, como $u_2 = 1 < 2$, se satisface la propiedad. Supongamos que $u_n < 2$ y probemos que $u_{n+1} < 2$. Usando la fúrmula de u_{n+1} tenemos que:

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{4+u_n^2}{2}} < 2 \iff \frac{4+u_n^2}{2} < 4 \iff u_n^2 < 4 \iff u_n < 2.$$

Pero la última desigualdad es exactamente la hipótesis de inducción, la cual como es cierta, entonces se tiene que $u_{n+1} < 2$. Esto prueba que (u_n) es una sucesión acotada superiormente. Por otro lado, por (1.17) esto prueba también que la sucesión (u_n) es creciente.

b) Usando el criterio de sucesiones monótonas y acotadas(teorema 1.13), concluimos que (u_n) es convergente. Sea $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Tomando límite en la fórmula de u_{n+1}, usando el álgebra de límites y considerando que $\lim u_{n+1} = u$, tenemos que:

$$u = \sqrt{\frac{4+u^2}{2}} \Rightarrow u^2 = \frac{4+u^2}{2} \Rightarrow 2u^2 = 4 + u^2 \Rightarrow u^2 = 4 \Rightarrow u = \pm 2.$$

La raíz negativa $u = -2$ se descarta ya que al ser (u_n) una sucesión de números reales positivos, entonces su límite tiene que ser mayor o igual que cero, es decir, $u = 2$. ■

15. Un modelo que surge en ecología para simular el crecimiento de una población está dado por la **sucesión logística**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

donde p_n es el tamaño de la población de la $n-$ésima generación de una especie, suponiendo que no está en interacción con el medioambiente. Los valores de (p_n) corresponden a la proporción del tamaño máximo de la población, de modo que $0 \leq p_n \leq 1$.

El objetivo de este problema consiste en analizar el comportamiento de esta especie modelada por esta sucesión. Suponga que $k \in (1,2)$. Se pide:

a) Demuestre que si la proporción de la población inicial está entre 0 y $1-1/k$ entonces la proporción de la $n-$ésima generación también estará entre dichos valores. O sea, pruebe que si $p_0 \in (0, 1-1/k)$, entonces para todo $n \geq 1$ se cumple que $p_n \in (0, 1-1/k)$.
Indicación: Notando que $0 < 1-1/k < 1/2$ para $k \in (1,2)$, grafique la función $f(x) = kx(1-x)$ para $x \in [0,1]$ y pruebe que para todo $x \in (0, 1-1/k)$, se verifica que $f(x) \in (0, 1-1/k)$.

b) Demuestre que la sucesión (p_n) es creciente.

c) Concluya que la sucesión (p_n) es convergente y calcule su límite. Interprete sus resultados en términos de lo que ocurre con la especie.

Solución.

a) Siguiendo la indicación, graficamos la función $f(x) = kx(1-x)$ para $x \in [0,1]$, notando que el punto $\bar{x} = 1-1/k$ queda situado entre 0 y $1/2$ para $k \in (1,2)$, tal como se muestra en la Figura 6. Notando que $f(\bar{x}) = \bar{x}$, a partir de la Figura 6 se observa claramente que para todo $x \in (0, \bar{x})$, $f(x) \in (0, \bar{x})$. Por lo tanto, partiendo de un punto $p_0 \in (0, \bar{x})$, como $p_1 = f(p_0)$ se tendrá que $p_1 \in (0, \bar{x})$, y por el mismo argumento $p_2 = f(p_1) \in (0, \bar{x})$, y así sucesivamente se prueba que para todo $n \geq 1$, $p_n \in (0, \bar{x})$. Esto se podría también probar por inducción, pero basta con hacer este análisis gráfico.

b) (p_n) será creciente sí y solamente si $p_{n+1} > p_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Reemplazando la fórmula de recurrencia ($p_{n+1} = f(p_n)$) tenemos que:

$$\begin{aligned} p_{n+1} > p_n \quad &\iff \quad kp_n(1-p_n) > p_n \iff (k-1)p_n - kp_n^2 > 0 \\ &\iff \quad p_n\,(k-1-kp_n) > 0. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad será cierta si $k-1-kp_n > 0$, ya que p_n es siempre positiva, pues partiendo de $p_0 > 0$, de la fórmula $p_{n+1} = f(p_n)$ se obtienen valores de p_n siempre positivos; esto se observa de la Figura 6 donde claramente $f(x) > 0$ para todo $x \in (0,1)$. Luego, (p_n) será creciente si se cumple que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\; k-1-kp_n > 0 \iff \quad \text{(despejando } p_n) \quad p_n < 1-1/k = \bar{x}.$$

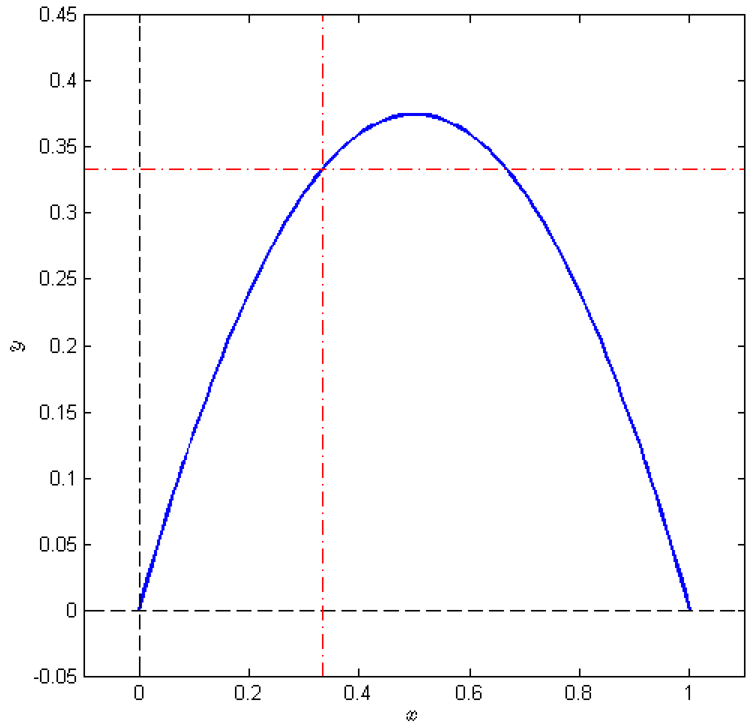


FIGURA 6. Gráfico de la función $f(x) = kx(1-x)$ para $k = 1{,}5$. El valor $\bar{x}$ y $f(\bar{x})$ están representados con la línea punteada roja.

O sea, (p_n) es creciente sí y solamente si (p_n) está acotada superiormente por $\bar{x}$, lo cual fue probado en la parte *a)*.

c) Como la sucesión (p_n) es creciente y acotada superiormente, entonces es convergente. Sea $p = \lim p_n$. Recordando que también $p = \lim p_{n+1}$ y tomando límite en la fórmula de recurrencia obtenemos que:

$$p = kp(1-p).$$

Despejando p, sale que p es solución de la ecuación:

$$kp^2 + (1-k)p = 0 \iff p\left[kp + (1-k)\right] = 0 \iff p = 0 \text{ ó } p = 1 - \frac{1}{k} = \bar{x}.$$

Claramente p no puede ser 0, ya que $p_n \geq p_0 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por ser (p_n) creciente). Por lo tanto, $p = \bar{x}$ y así la sucesión (p_n) converge a $\bar{x}$. Esto significa que, en un tiempo suficientemente grande, la población de la especie llega a un equilibrio, ya que la proporción p_n converge. $\blacksquare$

16. Considere (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales definidas, a partir de a_0 y de b_0, por las relaciones:

$$a_n = \frac{2a_{n-1} + b_{n-1}}{3}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3}, \quad a_0 \text{ y } b_0 \text{ dados, con } a_0 < b_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Compruebe que $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Compruebe que (a_n) es estrictamente creciente y que (b_n) es estrictamente decreciente.

c) Concluya que ambas sucesiones son convergentes y que tienen el mismo límite.

d) Hallar el límite común de (a_n) y de (b_n).

Solución.

a) Probaremos que $b_n - a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es que el signo de $b_n - a_n$ es constante (independiente de n) e igual al signo de $b_0 - a_0$ (el cual es positivo por hipótesis). Usando la definición de (a_n) y (b_n) tenemos que:

$$b_n - a_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3} - \frac{2a_{n-1} + b_{n-1}}{3} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{3}.$$

Luego el signo de $b_n - a_n$ es igual que el signo de $b_{n-1} - a_{n-1}$ y así, inductivamente, el signo de $b_n - a_n$ es constante e igual al signo de $b_0 - a_0$. Como $b_0 - a_0 > 0$ concluimos que $b_n - a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Usando la definición de (a_n) y (b_n) tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3} > 0 \Longrightarrow a_{n+1} > a_n \\ b_{n+1} - b_n &= \frac{a_n + 2b_n}{3} - b_n = \frac{a_n - b_n}{3} < 0 \Longrightarrow b_{n+1} < b_n \end{aligned}$$

Concluimos que (a_n) es estrictamente creciente y que (b_n) es estrictamente decreciente.

c) Verifiquemos que (a_n) es acotada superiormente. En efecto, como $a_n < b_n$ y (b_n) es decreciente, tenemos que:

$$a_n < b_n < b_{n-1} < b_{n-2} < \ldots < b_0$$

O sea que $a_n < b_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo anterior significa que la sucesión (a_n) es acotada superiormente. Similarmente se verifica que (b_n) es acotada inferiormente. En efecto, como $a_n < b_n$ y (a_n) es creciente, tenemos que:

$$b_n > a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > \ldots > a_0$$

O sea que $b_n > a_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo anterior significa que la sucesión (b_n) es acotada inferiormente. Por el criterio de las sucesiones monótonas y acotadas(teorema 1.13), concluimos que ambas sucesiones son convergentes. Por último, denotando por a y b al límite de (a_n) y (b_n) respectivamente, y tomando límite en la definición de (a_n) se tiene que:

$$a = \frac{2a+b}{3} \Rightarrow a = b$$

O sea, los límites de ambas sucesiones son iguales.

d) Las definiciones de (a_n) y (b_n) por sí solas no nos darán el valor del límite. Sin embargo, si sumamos las dos fórmulas, de a_n y b_n, obtenemos que:

$$a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

Es decir que la suma de (a_n) y (b_n) es constante e igual a $a_0 + b_0$. Luego, como ambas sucesiones convergen tenemos que:

$$a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a_0 + b_0 \ .$$

Y como $a = b$ entonces

$$a = b = \frac{a_0 + b_0}{2} \ .$$

■

17. **P1-C3-2021-1.**

a) Sea $s_n = ne^{-\frac{n}{2}}$.

1) Encuentre $\lim s_n$ si existe.
2) Justifique su respuesta usando la definición de convergencia.

Indicación: A partir de la serie de MacLaurin de la exponencial, pruebe que

$$(\forall x \geq 0) \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \ .$$

Use lo anterior para acotar s_n.

b) Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $h_n > 0$ y $\left(\frac{1}{nh_n}\right) \longrightarrow 0$. Pruebe que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.

Indicación: Use la *desigualdad de Bernoulli* $(1+h)^n \geq 1 + nh$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $h > 0$.

Solución:

18. *a*) **Primera forma.**

Haciendo uso de la indicación, a partir de la serie de Maclaurin de la exponencial, tenemos que:

$$(\forall x \geq 0) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{\geq 0} \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \ ,$$

lo que prueba la desigualdad de la indicación. A partir de lo anterior, como $1 + x > 0$ para cada $x \geq 0$, obtenemos que:

$$(\forall x \geq 0) \quad e^x > \frac{x^2}{2} \ . \tag{1.18}$$

1) Evaluando la desigualdad (1.18) en $x = \frac{n}{2}$, obtenemos que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad e^{\frac{n}{2}} > \frac{n^2}{8} \ .$$

Multiplicando la desigualdad anterior por $\frac{8}{n} e^{-\frac{n}{2}}$, obtenemos que:

$$(\forall n \geq 1) \quad 0 < s_n = n e^{-\frac{n}{2}} < \frac{8}{n} \ . \tag{1.19}$$

Como $\lim \frac{8}{n} = 0$. el teorema del Sandwich implica que $\lim s_n = 0$.

Segunda forma: Usando la regla de L'Hôpital, es fácil verificar que $\lim_{x\to\infty} x e^{-\frac{x}{2}} = 0$. Lo anterior implica que $\lim_{n\to\infty} n e^{-\frac{n}{2}} = 0$, i.e., $\lim s_n = 0$.

2) Como $\frac{8}{n} \longrightarrow 0$, tenemos que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N) \quad \left| \frac{8}{n} - 0 \right| = \frac{8}{n} \leq \varepsilon.$$

Luego, usando el acotamiento (1.19), sale directamente que

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N) \quad |s_n - 0| = s_n \leq \varepsilon. \tag{1.20}$$

La proposición anterior equivale a que $\lim s_n = 0$.

b) Usando la desigualdad de Bernoulli dada en la indicación, como $h_n > 0$, tenemos que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad (1 + h_n)^n \geq 1 + n h_n > 0.$$

Multiplicando cruzado en la desigualdad anterior, obtenemos que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < \frac{1}{(1 + h_n)^n} \leq \frac{1}{1 + n h_n} = \frac{\frac{1}{n h_n}}{\frac{1}{n h_n} + 1} \longrightarrow 0$$

porque $\frac{1}{nh_n} \longrightarrow 0$ (por enunciado) y por álgebra de límites. Por lo tanto, el teorema del Sandwich implica que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$. ■

19. **P2-C3-2021-1.** Considere la sucesión definida mediante la recurrencia:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha & \text{donde } \alpha \in (0, \frac{1}{2}) \quad (\alpha \text{ dado}) \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) & \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Encuentre el máximo de la función $g(x) = 2x - 2x^2$ y a partir de esto, use inducción para probar que $0 < u_n < \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Usando la parte anterior, verifique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

c) Deduzca que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y calcule su límite. Justifique claramente su respuesta.

Solución:

a) Como $g(x) = 2x - 2x^2$ es una parábola de orientación negativa, es fácil ver que tiene un único máximo global donde su derivada se anula. Como $g'(x) = 2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$, entonces $g(x)$ alcanza su único máximo global en dicho valor. Como $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ y $g(x)$ es estrictamente creciente/decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)/\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ (ya que $g'(x) = 2 - 4x > 0$ para $x < \frac{1}{2}$ y $g'(x) < 0$ para $x > \frac{1}{2}$), entonces

$$\left(\forall x \neq \frac{1}{2}\right) \quad g(x) < \frac{1}{2}\,. \tag{1.21}$$

A partir de lo anterior, como la sucesión (u_n) se construye mediante la fórmula de recurrencia $u_{n+1} = g(u_n)$, partiendo de $u_0 = \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, se tendrá que para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{2}$. Probemos lo anterior usando inducción, como dice el enunciado. Claramente, la afirmación es verdadera para $n = 0$, porque $0 < u_0 = \alpha < \frac{1}{2}$, por enunciado. Probemos que si la afirmación vale para n, entonces vale para $n + 1$, i.e.,

$$0 < u_n < \frac{1}{2} \Longrightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}\,.$$

Usando la fórmula de recurrencia lo anterior es inmediato, probando que la función $g(x)$ transforma el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ en sí mismo, i.e., $g(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ para todo $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Lo anterior sale directamente de (1.21), ya que $g(x) > 0$ y $g(x) < \frac{1}{2}$ para todo $0 < x < \frac{1}{2}$ ($g(x) = 2x(1-x) > 0$ para todo $0 < x < \frac{1}{2}$ porque cada factor que compone a $g(x)$ es positivo para x en dicho intervalo).

b) Debemos probar que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \geq u_n$. En realidad, probaremos que (u_n) es estrictamente creciente (la desigualdad anterior es estricta). En efecto, usando la fórmula de recurrencia $u_{n+1} = g(u_n)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} u_{n+1} > u_n \iff g(u_n) > u_n \quad &\iff \quad 2u_n - 2u_n^2 - u_n > 0 \\ &\iff \quad u_n(1 - 2u_n) > 0 \\ &\iff \quad (u_n > 0 \wedge 1 - 2u_n > 0) \vee \underbrace{(u_n < 0 \wedge 1 - 2u_n < 0)}_{\text{falso, pues } u_n \not< 0} \\ &\iff \quad \left(u_n > 0 \wedge u_n < \frac{1}{2}\right) \iff 0 < u_n < \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} > u_n \iff (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < \frac{1}{2}\,.$$

Como la última proposición es verdadera, por la parte anterior, entonces (u_n) es estrictamente creciente.

c) Como (u_n) es estrictamente creciente y acotada superiormente (con cota superior $\frac{1}{2}$), el criterio de convergencia para sucesiones monótonas y acotadas implica que (u_n) es convergente. Sea ℓ el límite de (u_n). Entonces, usando un desarrollo similar al visto en clases, por álgebra de límites podemos pasar al límite en la fórmula de recurrencia $u_{n+1} = g(u_n) = 2u_n(1 - u_n)$. Luego,

$$\lim u_{n+1} = \lim 2u_n(1 - u_n) \iff \ell = 2\ell(1 - \ell) \iff \ell(2\ell - 1) = 0 \iff \ell = 0 \vee \ell = \frac{1}{2}\,.$$

Ahora verifiquemos que $\ell = \frac{1}{2}$. Como (u_n) es estrictamente creciente y $u_0 = \alpha > 0$, entonces

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq \alpha \Longrightarrow \lim u_n = \ell \geq \alpha > 0.$$

Luego, $\ell > 0$ y en consecuencia $\ell = \frac{1}{2}$ (porque o bien $\ell = 0$ o bien $\ell = \frac{1}{2}$). ■

20. Considere la sucesión (a_n) definida, a partir de a_0 y a_1, por la recurrencia:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \forall n \geq 0,$$

denominada *sucesión de Fibonacci*, la cual tiene importantes aplicaciones (buscar en internet).

Advertencia: Este ejercicio es difícil y sólo se recomienda leer para aquellos interesados en profundizar.

a) Compruebe que se verifica:

$$a_n^2 = a_{n+1}a_{n-1} + (-1)^n \quad \forall n \geq 1 \tag{1.22}$$

Se define $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ para todo $n \geq 0$.

b) Usando el ítem anterior compruebe que:

$$b_n^2 - b_n - 1 = \frac{(-1)^{n+1}}{a_n^2} \quad \forall n \geq 0 \tag{1.23}$$

c) Compruebe que

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} \quad \forall n \geq 0 \tag{1.24}$$

d) Usando los dos ítemes anteriores pruebe que $(b_{2n})_{n\geq 0}$ es una sucesión estrictamente creciente y acotada superiormente. Concluya que (b_{2n}) es convergente.

e) Procediendo como en el ítem anterior pruebe que $(b_{2n+1})_{n\geq 0}$ es una sucesión estrictamente decreciente y acotada inferiormente. Concluya que (b_{2n+1}) es convergente.

f) Usando (1.24) concluya que los límites de (b_{2n}) y de (b_{2n+1}) son iguales.

g) Concluya que (b_n) es convergente y que su límite es igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Indicación: Utilice que (b_n) es convergente si y solamente si (b_{2n}) y (b_{2n+1}) son convergentes y tienen igual límite. En este caso, el límite de (b_n) es igual al límite común de las sucesiones (b_{2n}) y (b_{2n+1}).

Solución: Los primeros elementos de la sucesión de Fibonacci son:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 8,\ a_6 = 13,\ a_7 = 21, \ldots$$

a) Para $n = 1$ y $n = 2$ la igualdad se verifica, pues $a_1^2 = 1 = a_2a_0 + (-1)^1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ y $a_2^2 = 2^2 = a_3a_1 + (-1)^2 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$. Comprobemos por inducción que (1.22) se verifica $\forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos (1.22) cierta para n, probemos que entonces es cierta para $n + 1$. Usando la definición de la sucesión de Fibonacci se tiene que:

$$a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_{n+1} = a_{n+1}(a_n + a_{n-1}) = a_{n+1}a_n + a_{n+1}a_{n-1}$$

Por otro lado, usando que (1.22) es válida para n, tenemos que

$$a_n^2 = a_{n+1}a_{n-1} + (-1)^n \Longrightarrow a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 - (-1)^n.$$

Reemplazando esto último en la igualdad anterior y usando la definición de la sucesión de Fibonacci obtenemos que:

$$a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_n + a_n^2 - (-1)^n = (a_{n+1} + a_n)a_n + (-1)\cdot(-1)^n = a_{n+2}a_n + (-1)^{n+1}$$

Esto prueba que

$$a_{n+1}^2 = a_{n+2}a_n + (-1)^{n+1} \tag{1.25}$$

que es la igualdad (1.22) escrita para $n+1$ en lugar de n.

b) Dividiendo por a_n^2 la desigualdad (1.22) para $n+1$ (ver (1.25)) tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \frac{a_{n+2}a_n}{a_n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{a_n^2}$$

Usando la definición de (b_n) y de (a_n) esta última igualdad se reescribe como:

$$b_n^2 = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_n} + \frac{(-1)^{n+1}}{a_n^2} = b_n + 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{a_n^2}$$

O sea que:

$$b_n^2 - b_n - 1 = \frac{(-1)^{n+1}}{a_n^2} \quad \forall n \geq 0.$$

c) Usando las definiciones de (b_n) y de (a_n) tenemos que:

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = 1 + \frac{1}{b_n}\ .$$

d) La sucesión $(b_{2n})_{n\geq 0}$ consiste de los términos pares de la sucesión (b_n). Los primeros términos de dicha sucesión son:

$$b_0 = \frac{a_1}{a_0} = 1;\ b_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2} = 1{,}5;\ b_4 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{8}{5} = 1{,}6;\ b_6 = \frac{a_7}{a_6} = \frac{21}{13} \approx 1{,}615.$$

A simple vista se observa que (b_{2n}) es una sucesión estrictamente creciente. Probemos que esto es así, es decir que $b_{2n} < b_{2n+2}$ $\forall n \geq 0$. Aplicando la identidad (1.24) del ítem (c) de manera iterada (dos veces) tenemos que:

$$b_{2n+2} = 1 + \frac{1}{b_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_{2n}}} = 1 + \frac{b_{2n}}{b_{2n} + 1}$$

Usando lo anterior, tenemos que $b_{2n+2} > b_{2n}$ si y solamente si:

$$1 + \frac{b_{2n}}{b_{2n} + 1} > b_{2n}$$

Usando que $b_{2n} > 0$ (esto es obvio a partir de la definición de (b_n) y de (a_n)) y despejando b_{2n}, la desigualdad anterior se reduce a:

$$b_{2n}^2 - b_{2n} - 1 < 0 \tag{1.26}$$

Usando la igualdad (1.23) del ítem (b), con n reemplazado por $2n$, tenemos que:

$$b_{2n}^2 - b_{2n} - 1 = \frac{(-1)^{2n+1}}{a_{2n}^2} = -\frac{1}{a_{2n}^2} < 0 \quad \forall n \geq 0$$

Esto demuestra (1.26), y por lo tanto que la sucesión (b_{2n}) es estrictamente creciente. Por otro lado, resolviendo la inecuación (1.26) tenemos que:

$$b_{2n} \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \tag{1.27}$$

En efecto, la solución de la inecuación $x^2 - x - 1 < 0$ se obtiene resolviendo la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, la cual tiene por raíces $x_1 := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y notando que la cuadrática $x^2 - x - 1$ será negativa si $x \in (x_1, x_2)$. Así obtenemos que $b_{2n} \in (x_1, x_2)$ que corresponde exactamente a (1.27). Pero, como $b_{2n} > 0$ y $x_1 < 0$, lo anterior se reduce a $0 < b_{2n} < x_2$. O sea que la sucesión $(b_{2n})_{n \geq 0}$ es acotada superiormente. Como además es estrictamente creciente, de acuerdo al criterio de las sucesiones monótonas y acotadas(teorema 1.13), concluimos que (b_{2n}) es convergente.

e) Similarmente al ítem anterior, usando la identidad (1.24) del ítem (c) de manera iterada (dos veces) tenemos que $b_{2n+3} < b_{2n+1}$ si y solamente si:

$$b_{2n+3} = 1 + \frac{1}{b_{2n+2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_{2n+1}}} < b_{2n+1}$$

lo cual equivale a:

$$b_{2n+1}^2 - b_{2n+1} - 1 > 0 \tag{1.28}$$

lo cual es cierto, ya que de (1.23) (con n reemplazado por $2n+1$), se tiene que:

$$b_{2n+1}^2 - b_{2n+1} - 1 = \frac{(-1)^{2n+2}}{a_{2n+1}^2} = \frac{1}{a_{2n+1}^2} > 0 \quad \forall n \geq 0$$

Luego, $(b_{2n+1})_{n \geq 0}$ es una sucesión estrictamente decreciente. Por otro lado, resolviendo la inecuación (1.28), se obtiene que:

$$b_{2n+1} \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty),$$

donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. Pero como $b_{2n+1} > 0\ \forall n \geq 0$, y dado que $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, entonces lo anterior se reduce a $b_{2n+1} > x_2$. Así, $(b_{2n+1})_{n\geq 0}$ es una sucesión acotada inferiormente. Como además es estrictamente decreciente, de acuerdo al criterio de las sucesiones monótonas y acotadas (teorema 1.13), concluimos que (b_{2n+1}) es convergente.

f) Usando (1.24) tenemos que:

$$b_{2n+2} = 1 + \frac{1}{b_{2n+1}} \quad \forall n \geq 0$$

Como las sucesiones (b_{2n}) y (b_{2n+1}) son ambas convergentes podemos tomar límite cuando $n \longrightarrow \infty$ en la igualdad anterior. Denotando por b_1 el límite de (b_{2n}) (ó de (b_{2n+2}) que es lo mismo) y por b_2 el límite de (b_{2n+1}), tenemos que:

$$b_1 = 1 + \frac{1}{b_2}$$

Aplicando el mismo argumento para la igualdad $b_{2n+1} = 1 + \frac{1}{b_{2n}}$ obtenemos que:

$$b_2 = 1 + \frac{1}{b_1}$$

De las dos últimas igualdades obtenemos que $b_1 = b_2$ (multiplicar la primera por b_2, la segunda por b_1 e igualar $b_1 b_2$ en ambas igualdades).

g) Usando la indicación y el ítem anterior, obtenemos que la sucesión $(b_n)_{n\geq 0}$ es convergente y que su límite es igual al límite común de (b_{2n}) y (b_{2n+1}). Calculemos este límite (denotado por b). Tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$ en (1.24) obtenemos que:

$$b = 1 + \frac{1}{b}$$

Despejando b tenemos que $b^2 - b - 1 = 0$, es decir ,b es solución de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. O sea, $b = x_1$ ó $b = x_2$, donde

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ahora bien, como (b_{2n}) es una sucesión de términos positivos, entonces su límite $b_1 = b$ debe ser mayor o igual que cero. Como $x_1 < 0$, concluimos que $b = x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

2. Series Numéricas

Con el fin de estudiar series de Potencias, debemos previamente conocer las siguientes nociones asociadas a series numéricas, que tienen importantes aplicaciones.
La convención detrás de la notación decimal es que cualquier número real se puede escribir como una suma infinita o serie. Por ejemplo,

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288\cdots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots$$

donde los puntos suspensivos $(\cdots)$ indican que la suma continúa por siempre y que cuantos más términos agreguemos, estaremos más cerca del valor verdadero de π. En general, tenemos lo siguiente.

Definición 2.1. Serie numérica.
Una serie corresponde a la suma de los términos de una sucesión de números reales. En forma precisa, una *serie numérica*, o simplemente *serie*, es una suma infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \,.$$

Dada una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, se definen sus *sumas parciales* como la sucesión $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2. Convergencia. Si dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge* si la sucesión de sumas parciales (s_n) converge. En este caso, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

s se denomina *suma* de la serie. Además, el *residuo* de una serie es la sucesión

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Cuando la serie converge, entonces

$$r_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \longrightarrow 0.$$

Si la sucesión (s_n) diverge, se dice que la serie diverge.

Ejemplo 2.1. Consideremos la *serie geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

En este caso, $a_n = ar^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (recordar que, por convención, $\mathbb{N}$ es el conjunto de todos los números enteros positivos más el cero). Para determinar la convergencia o divergencia de la serie (2.1), calcularemos sus sumas parciales (s_n) definida por:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Primero analicemos el caso en que $r = 1$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a \longrightarrow \pm\infty.$$

Similarmente, si $r = -1$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a(-1)^k = \begin{cases} a & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases} \Longrightarrow (s_n) \text{ diverge porque oscila entre dos valores.}$$

Ahora, analicemos el caso general $r \notin \{-1, 1\}$. Como

$$\begin{aligned} s_n = {} & a + \; ar + ar^2 + \cdots + ar^n \\ rs_n = {} & \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones y despejando s_n obtenemos

$$s_n - rs_n = a - ar^{n+1} \Longrightarrow s_n = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \; . \tag{2.2}$$

Como $r^{n+1} \longrightarrow 0$ cuando $|r| < 1$ (ver (1.10)), entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \lim s_n = \frac{a}{1-r}.$$

Si $|r| > 1$, (r^{n+1}) diverge (ver (1.10)), luego (s_n) también. Por lo tanto, la serie geométrica diverge en ese caso. En resumen, se tiene que:

La serie geométrica
$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots$$
es convergente si $|r| < 1$ y su suma es
$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1.$$
Si $|r| \geq 1$, la serie geométrica es divergente.

Ejemplo 2.2. Algunos decimales se pueden escribir como una serie geométrica. Por ejemplo, $2{,}3\overline{17} = 2{,}3171717\cdots$ se puede escribir como una razón de enteros:
$$2{,}3171717\cdots = 2{,}3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} = 2{,}3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^3}\frac{1}{10^2} + \frac{17}{10^3}\frac{1}{10^4} + \cdots = 2{,}3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{10^3}\frac{1}{10^{2n}}.$$
Luego,
$$2{,}3\overline{17} = 2{,}3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = 2{,}3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}.$$
A continuación enunciaremos un criterio general de divergencia de series.

Teorema 2.3. *Si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *es convergente, entonces* $\lim a_n = 0$.

Demostración. Como $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n$, entonces $a_n = s_n - s_{n-1}$. Como la serie converge, entonces (s_n) converge a la suma de la serie, denotada por s. Por álgebra de límites, tenemos que:
$$\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$
$\blacksquare$

La contrarrecíproca del teorema anterior provee un criterio de divergencia: si $\lim a_n \neq 0$ (o bien, (a_n) no converge o bien converge pero no a cero), entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. Observemos que la recíproca del teorema anterior no es cierta: si $\lim a_n = 0$, la serie no necesariamente converge.

Ejemplo 2.3. Probar que la serie armónica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$
diverge.

Solución: Basta probar que las sumas parciales son no acotadas superiormente (creciente y no acotada superiormente implica divergente, de acuerdo al teorema 1.13). En este caso, conviene considerar las sumas parciales $s_2,\ s_4,\ s_8,\ s_{16},\cdots,s_{2^n},\cdots$ y probar que "se hacen muy grandes".

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1+\frac{1}{2}\\
s_4 &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{2}{2}\\
s_8 &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2}\\
s_{16} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{4}{2}.
\end{aligned}$$

De manera similar, $s_{32}>1+\frac{5}{2}$, $s_{64}>1+\frac{6}{2}$ y, en general

$$s_{2^n}>1+\frac{n}{2}.$$

Esto muestra que $s_{2^n}\longrightarrow\infty$ cuando $n\to\infty$. Luego, la sucesión de sumas parciales (s_n) diverge. Por lo tanto, la serie armónica diverge. ■

Finalmente, las series convergentes se pueden sumar/restar y multiplicar por una constante y siguen siendo convergentes (la suma/resta y multiplicación por escalar es estable para la convergencia).

2.1. Criterios de convergencia para series de términos positivos. El análisis de convergencia de la serie geométrica se basa en que se conoce una fórmula cerrada para las sumas parciales (s_n en términos sólo de n), lo cual no es posible obtener en general. Por ello, existen criterios de convergencia para decidir si una serie converge o diverge sin basarse en una fórmula cerrada para las sumas parciales. La teoría de series de términos positivos es más sencilla que la teoría general, ya que tales series o bien convergen o bien divergen a ∞, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Una serie de términos $a_n\geq 0$ para cada n converge si y sólo si sus sumas parciales son acotadas superiormente, o diverge a ∞ si ellas no lo son. Estas son las únicas dos posibilidades.*

Demostración. Como $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ y $a_{n+1} \geq 0$, entonces la sucesión (s_n) es creciente. Luego, el criterio de sucesiones monótonas y acotadas (teorema 1.13) y la definición de convergencia 2.2 implican la afirmación del teorema. ■

Si $a_n \geq 0$ para todo n, escribiremos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ cuando la serie converge. Esta convención se basa en el teorema anterior, el cual asegura que la serie diverge sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Esta convención no se aplica a series con infinitos términos negativos, porque tales series pueden diverger por oscilación. Por ejemplo, la serie geométrica (2.1) diverge si $r = -1$ porque oscila entre 0 y a; ver ejemplo 2.1.

Teorema 2.5. Criterio de comparación. *Supongamos que*

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{para cada } n.$$

Entonces

1. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty.$

Demostración. Sean

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad \text{y} \quad B_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n.$$

La hipótesis del teorema implica que

$$A_n \leq B_n \qquad \text{para cada } n. \tag{2.3}$$

Ahora usamos el teorema 2.4. Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, entonces (B_n) es acotada superiormente y (2.3) implica que (A_n) también lo es. Por lo tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Por otro lado, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, entonces (A_n) es no acotada superiormente y (2.3) implica que (B_n) tampoco lo es. Por lo tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$. ■

Ejercicio 11. Mostrar que la afirmación 1 implica directamente la 2.

Ejemplo 2.4. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es convergente o divergente.

Solución: Notar que $\ln n > 1$ para $n \geq 3$ (pues $\ln e = 1$ y $\ln(\cdot)$ es una función creciente). Luego,

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n} \qquad \text{para } n \geq 3.$$

Como la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (ver ejemplo 2.3), entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ también diverge, de acuerdo con el criterio de comparación (teorema 2.5). ■

Ejemplo 2.5. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}$ converge para $0 < r < 1$.

Solución: Como

$$0 \leq \frac{r^n}{n} \leq r^n \qquad \text{para } n \geq 1,$$

y $\sum_{n=0}^{\infty} r^n < \infty$ si $0 < r < 1$ (ver ejemplo 2.1), entonces la serie del enunciado converge para $0 < r < 1$. Si $r > 1$ el criterio no es concluyente. Si $r < 0$, el criterio no se aplica, dado que la serie tendría infinitos términos negativos. ■

El criterio de comparación es útil cuando se dispone de una colección de series de términos positivos con convergencia/divergencia conocida. Para construir tal colección se usa el criterio de la integral.

Teorema 2.6. Criterio de la integral.

Supongamos que f es una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty[$ y sea $a_n = f(n)$. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge si y sólo si } \int_1^{\infty} f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx \text{ converge.}$$

En caso en que la serie converja, se tiene la siguiente estimación para el residuo $r_n = s - s_n$ de la serie, donde $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es la suma de la serie:

$$\boxed{\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq r_n \leq \int_n^{\infty} f(x)dx}$$

Ejemplo 2.6. Probar que la *p-serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$. Además, obtener un valor aproximado de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ usando la suma de los primeros 10 términos y estime el error de esta aproximación.

Solución: Probaremos que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$. Para $p \neq 1$, se tiene que:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(b^{1-p} - 1\right).$$

Por lo tanto, la integral anterior converge $\left(\text{a } \frac{1}{p-1}\right)$ si $p > 1$ y diverge (a ∞) si $p < 1$. Ahora analicemos el caso $p = 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \ln b - \ln 1 = \infty.$$

En resumen, la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$. Por el criterio de la integral (teorema 2.6) se concluye que:

$$\boxed{\text{La } p\text{-serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge si } p > 1 \text{ y diverge si } p \leq 1}$$

Ahora aproximemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ $(p = 3)$ usando la suma de los primeros 10 términos (suma parcial s_{10}):

$$s_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1{,}1975.$$

Además, el residuo r_n está acotado por:

$$r_n = s - s_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_n^b = \frac{1}{2n^2}.$$

Luego, usando los primeros 10 términos de la serie, el error de aproximación, $r_{10} = s - s_{10}$, es menor o igual a $\frac{1}{2\cdot 10^2} = \frac{1}{200} = 0{,}005$ (dos decimales correctos).

Si quisiéramos mayor precisión de aproximación, por ejemplo, con 4 decimales correctos, el error debería ser menor que 10^{-4}:

$$r_n = s - s_n \leq \frac{1}{2n^2} \leq 10^{-4} \Longrightarrow 10^4 \leq 2n^2 \Longrightarrow n \geq \sqrt{\frac{10^4}{2}} = 70{,}71\cdots$$

Luego, para tener 4 decimales correctos en la aproximación de la suma de la serie, se requieren al menos 71 términos. ■

Conociendo la convergencia de las p-series, podemos establecer la convergencia de series similares por comparación.

Ejemplo 2.7. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ converge o diverge.

Solución: Notemos que:

$$2n^2 + 3n \geq 2n^2.$$

Además,

$$\sqrt{5+n^5} \leq \sqrt{5n^5+n^5} = \sqrt{6n^5} = \sqrt{6}n^{5/2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5+n^5}} \geq \frac{1}{\sqrt{6}n^{5/2}}.$$

Usando las dos desigualdades anteriores, obtenemos que

$$\underbrace{\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}}_{a_n} \geq \frac{2n^2}{\sqrt{6}n^{5/2}} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{n^{1/2}}}_{b_n} \geq 0.$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty$$

ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ es una p-serie con $p = \frac{1}{2} < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, de acuerdo con el criterio de comparación (teorema 2.5). ■

Observar que al estudiar la convergencia/divergencia de muchas series encontramos una serie de comparación adecuada, $\sum b_n$, acotando apropiadamente por las potencias más altas de n que aparecen en la serie original, $\sum a_n$, lo cual podría complicar la comparación (debido al manejo de desigualdades).

Por otro lado, para aplicar el criterio de comparación (teorema 2.5), los términos de la serie que estamos probando deben ser menores que los de una serie convergente, o mayores que los de una serie divergente. Si los términos son más grandes que los términos de una serie convergente, o bien, menores que los de una serie divergente, entonces la prueba por comparación no aplica.

Ejemplo 2.8. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge o diverge.

Solución: La desigualdad

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n - 1}$$

es inútil para usar el criterio de comparación (teorema 2.5) porque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge y $0 \leq a_n \leq b_n$ con $b_n = \frac{1}{2^n-1}$. Sin embargo, la serie dada debería converger porque se parece mucho a la serie de los a_n. ■

Para abordar los casos donde es complicada la comparación directa (por el manejo de desigualdades; ejemplo 2.7) o por inaplicabilidad de esta (como en el ejemplo anterior), se puede aplicar el siguiente criterio.

Teorema 2.7. Criterio de comparación del límite.

Supongamos que (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de términos positivos. Si

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = c \qquad 0 < c < \infty$$

entonces ambas series convergen o ambas divergen.

Demostración. Como a_n/b_n converge a $c > 0$, entonces a_n/b_n es acotada con cotas $m > 0$ y $M > 0$ cercanas a c. Concretamente, existe un entero N tal que

$$m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq M \qquad \text{para } n \geq N$$

para cualquier m y M números positivos tales que $m < c < M$. Entonces,

$$mb_n \leq a_n \leq Mb_n \qquad \text{para } n \geq N.$$

Usando el criterio de comparación (teorema 2.5), de la desigualdad anterior se llega al resultado. ■

Ejemplo 2.9. Como

$$\text{lím} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = \text{lím} \frac{2^n}{2^n - 1} = \text{lím} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1 > 0$$

y la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, el criterio de comparación del límite implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge. ■

Cuando en casos como el ejemplo 2.7, resulta complicado aplicar el criterio de comparación (por el manejo de desigualdades), resulta más sencillo comparar el límite.

Ejemplo 2.10. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ converge o diverge.

Solución: Notemos que para $n \gg 1$ (se lee *"n mucho mayor que 1"*), sólo las potencias más altas de n son importantes:

$$\frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \approx \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}.$$

Luego, $a_n := \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ es aproximadamente igual a $b_n := \frac{2}{n^{1/2}}$. Lo anterior sugiere comparar el límite de a_n/b_n:

$$\text{lím} \frac{a_n}{b_n} = \text{lím} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \text{lím} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}} = \text{lím} \frac{2 + \frac{3}{n}}{2\sqrt{\frac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1.$$

Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty$ $\big($es una p-serie con $p = \frac{1}{2} < 1\big)$, la serie dada diverge, de acuerdo con el criterio de comparación del límite (teorema 2.7). ■

Observar que al estudiar la convergencia/divergencia de muchas series encontramos una serie de comparación adecuada, $\sum b_n$, conservando sólo las potencias más altas de n en la serie original, $\sum a_n$.

2.2. Convergencia absoluta y condicional. Una serie general de términos que cambian de signo, puede converger en dos formas bastante distintas.

Definición 2.8. Convergencia absoluta y condicional.
Se dice que una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente* si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.
O sea, una serie converge absolutamente si la serie de los valores absolutos converge.
Una serie se dice *condicionalmente convergente* si es convergente pero no absolutamente.

Teorema 2.9. *Si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces converge.*

Demostración. Observemos que la desigualdad

$$0 \leq b_n := a_n + |a_n| \leq 2\,|a_n| \tag{2.4}$$

es cierta porque $|a_n| = \pm a_n$.
Como $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, por el criterio de comparación (teorema 2.5) tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\,|a_n| = 2\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty.$$

Luego,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} b_n - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

es la diferencia de dos series convergentes y, por tanto, converge (por álgebra de series convergentes).
■

Ejemplo 2.11. La serie geométrica (2.1) es absolutamente convergente para $|r| < 1$.

La recíproca del teorema anterior no es cierta, i.e., convergencia no implica convergencia absoluta, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.12. Como vimos, la serie armónica es divergente. Luego, la *serie alternante* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es condicionalmente convergente (un poco más adelante, veremos que es convergente).

A continuación veremos algunos criterios de convergencia para determinar convergencia absoluta.

Teorema 2.10. Criterio de la razón. *Sea* $\ell := \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. *Se tiene que:*

1. *Si $\ell < 1$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).*
2. *Si $\ell > 1$ o bien $\ell = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es divergente.*

3. *Si* $\ell = 1$*, el criterio de la razón no es concluyente, i.e., no se puede sacar conclusión alguna acerca de la convergencia o divergencia de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*.*

El criterio de la razón es particularmente útil cuando el término general de la serie, a_n, contiene $n!$ (n factorial).

Ejemplo 2.13. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{n^n}$ es absolutamente convergente.

Solución: Aplicamos el criterio de la razón a $a_n := (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ (serie alternante):

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \tfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \tfrac{n^n}{n!} = \lim \frac{(n+1)n!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Luego, la serie es absolutamente convergente y, por tanto, la serie original converge. ■

Ejemplo 2.14. Para ver que el criterio de la razón (teorema 2.10) no es concluyente cuando $\ell = 1$, veamos los siguientes ejemplos:

- La serie armónica diverge y
$$\ell = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge y
$$\ell = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim \frac{n}{n+2} = \lim \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1.$$
  Veamos que la serie converge por medio de las sumas parciales (s_n). Aplicando fracciones parciales, junto a la propiedad telescópica, tenemos que:
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1.$$
  Luego, la serie converge y su suma es 1.

  Ejercicio 12. Alternativamente, usar el criterio de comparación (teorema 2.5) para probar que la serie dada converge (aunque sin obtener su suma).

Teorema 2.11. Criterio de la raíz. *Sea* $\ell := \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$*. Se tiene que:*

1. *Si* $\ell < 1$*, entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).*
2. *Si* $\ell > 1$ *o bien* $\ell = \infty$*, entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *es divergente.*
3. *Si* $\ell = 1$*, el criterio de la raíz no es concluyente.*

El criterio de la raíz (n-ésima) es particularmente útil cuando el término general de la serie contiene a_n^n (potencia n-ésima).

Ejemplo 2.15. Probar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

Solución: Puesto que los términos $a_n := \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ son positivos, podemos prescindir del valor absoluto. Aplicamos el criterio de la raíz (teorema 2.11):

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim (a_n)^{1/n} = \lim \frac{2n+3}{3n+2} = \lim \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Luego, la serie es convergente. ∎

Finalmente, veamos un criterio especial para series alternantes, como $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.

Teorema 2.12. Criterio de la serie alternante.

Si la serie alternante

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + \cdots$$

donde (b_n) es una sucesión de términos positivos, satisface que (b_n) es decreciente y $\lim b_n = 0$, entonces la serie es convergente. Además, el residuo de la serie satisface la estimación

$$\boxed{|r_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1}}$$

Usando el criterio anterior, es fácil verificar que la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ es convergente (aunque no absolutamente, como ya sabemos).

Ejemplo 2.16. Aproxime la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ con tres cifras decimales.

Solución: Primero observamos que la serie converge, pues $b_n := \frac{1}{n!}$ es decreciente:

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n!}$$

Además, por el Teorema del Sandwich, (b_n) converge a 0:

$$0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \frac{1}{n!} \longrightarrow 0.$$

Para ver cuántos términos necesitamos usar en la aproximación para lograr 3 cifras decimales correctas, acotemos el error:

$$|r_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < 10^{-3} \Longrightarrow (n+1)! > 10^3 \Longrightarrow n \geq 6.$$

Luego, se requieren 6 términos de la serie:

$$s \approx s_6 = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 0{,}368.$$

Observemos que $b_7 = \frac{1}{7!} = 0,000198412 < 10^{-3}$. Luego, tenemos que

$$|r_6| = |s - s_6| \leq b_7 < 10^{-3}$$

de modo que $s \approx s_6 \approx 0{,}368$ es una aproximación con tres cifras decimales correctas. ■

Nota 2.1. Posteriormente, veremos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para toda x, de modo que el resultado anterior es una aproximación del número e^{-1}.

2.3. Ejercicios resueltos de series numéricas.

1. **Representación decimal.** El desarrollo quizá más común de las expansiones decimales, es definirlas en términos de series infinitas. En general, todo número real se puede representar de manera única, mediante una expansión decimal infinita: $b_0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots \cdot 10^e$, donde el entero e es el exponente asociado al número real, y (b_k) es una sucesión de números enteros tales que $1 \leq |b_0| \leq 9$, y $0 \leq b_k \leq 9$ para todo $k \geq 1$. Podemos escribir:

$$b_0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots \cdot 10^e = 10^e \cdot \left(b_0 + b_1 \frac{1}{10} + b_2 \frac{1}{10^2} + b_3 \frac{1}{10^3} + b_4 \frac{1}{10^4} + \ldots \right) = 10^e \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{1}{10^k}. \quad (2.5)$$

   a) Utilizando el criterio de comparación, demuestre que la serie dada en (2.5) es convergente.
   b) Encuentre la serie del número $0,999\cdots = 0,\bar{9}$ (0,9 periódico).
   c) Utilizando lo anterior, pruebe el resultado sorprendente $0,\bar{9} = 1$.

   Solución:

   a) La serie dada en (2.5) es convergente, ya que dado que $0 < b_k < 10$ para todo $k \geq 1$, entonces se tiene la siguiente mayoración:

$$0 < b_k \frac{1}{10^k} < 10 \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^{k-1}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}.$$

   Como la serie geométrica $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$ es convergente, entonces la serie (2.5) también, por el criterio de comparación.

   b) La serie de $0,\bar{9} = 9,\bar{9} \cdot 10^{-1}$ es:

$$9,\bar{9} \cdot 10^{-1} = 10^{-1} \cdot \sum_{k \geq 0} 9 \frac{1}{10^k}.$$

c) De lo anterior, tenemos que:

$$0,\bar{9} = 9,\bar{9}\cdot 10^{-1} = 10^{-1}\cdot\sum_{k\geq 0} 9\frac{1}{10^k} = 10^{-1}\cdot\underbrace{\frac{9}{1-\frac{1}{10}}}_{10} = 1.$$

■

2. Si la $n-$ésima suma parcial de una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es $s_n = \frac{n-1}{n+1}$, determine a_n y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Solución: Por definición de suma parcial tenemos que:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}_{s_{n-1}} + a_n = s_{n-1} + a_n \qquad n \geq 1.$$

Despejando a_n y reemplazando la fórmula de s_n, obtenemos que:

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{(n-1)-1}{(n-1)+1} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{n^2-n-(n^2-n-2)}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}\ .$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)} = \lim s_n = \lim\frac{n-1}{n+1} = \lim\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

■

3. **Ejercicio 6(c) - Guía 1 de series (semana 14).**

Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\sqrt{k}\left(1+\sqrt{k}\right)}$.

Solución: Aplicamos el criterio de comparación.

Como $\sqrt{k}\geq 1$, entonces sumando $\sqrt{k}$, obtenemos que $2\sqrt{k}\geq 1+\sqrt{k}$. Luego, multiplicando cruzado obtenemos que:

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \frac{1}{1+\sqrt{k}} \qquad k\geq 1.$$

Dividiendo la desigualdad anterior por $\sqrt{k}>0$, llegamos a:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}\left(1+\sqrt{k}\right)} \qquad k\geq 1.$$

Como la serie armónica $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$ diverge, entonces aplicando el criterio de comparación, obtenemos que la serie $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\sqrt{k}\left(1+\sqrt{k}\right)}$ también diverge. ■

Alternativamente, es más sencilla la comparación del límite:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{k}\left(1+\sqrt{k}\right)}}{\frac{1}{k}} = \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}+1} \longrightarrow 1.$$

Como el límite anterior es positivo y finito, el criterio de comparación del límite implica que la serie dada es divergente porque la serie armónica lo es. ■

4. **Ejercicio 5 - Guía 1 de series (semana 14).**

Sea (a_k) una sucesión de términos positivos. Probar que si $\sum_{k\geq 0} a_k$ converge entonces $\sum_{k\geq 0} a_k^2$ también converge.

Solución: Como la serie $\sum_{k\geq 0} a_k$ converge, entonces su término general debe converger a 0, i.e., $\lim a_k = 0$. Luego, la siguiente proposición es cierta:

$$(\exists K \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall k \geq K)\, 0 < a_k \leq 1. \tag{2.6}$$

Demostremos la proposición anterior. Como $|a_k| = a_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y dado que $a_k \longrightarrow 0$, tenemos que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists K \in \mathbb{N})\, (\forall k \geq K)\, 0 < a_k \leq \varepsilon.$$

Como lo anterior se cumple para todo $\varepsilon > 0$, escogiendo $\varepsilon = 1$ se cumple la proposición (2.6). Multiplicando (2.6) por $a_k > 0$ llegamos a que:

$$(\exists K \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall k \geq K) : 0 < a_k^2 \leq a_k.$$

Por el criterio de comparación, como la serie $\sum_{k\geq 0} a_k$ converge, obtenemos que la serie $\sum_{k\geq 0} a_k^2$ también converge.

Argumentos similares prueban el ejercicio 7 de la guía. ■

5. **P3-C3-2016-1.**

a) Usando el criterio de comparación del límite, estudie la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$$

b) Usando el criterio de la raíz, estudie la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

c) Usando el criterio de la razón, estudie la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

d) Usando el criterio de la integral, estudie la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$$

Solución:

a) Comparamos la serie con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Calculamos entonces:

$$\lim \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \cdot \cos \frac{1}{n}} = \lim \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim \frac{1}{\cos \frac{1}{n}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Lo anterior es cierto por el hecho conocido de que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Como $\lim \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0, \infty)$ y la serie armónica es divergente, concluimos que la serie dada también diverge.

b) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim \left| \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \right|^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{2n+1} = \lim \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} .$$

Como este límite es menor que 1, concluimos que la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio de la razón:

$$\lim \left| \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} \right| = \lim \left| \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{n+1}{3} \right| = \infty.$$

Luego, la serie diverge. ■

Alternativamente, por álgebra de límites, el recíproco del término general, $\frac{3^n}{n!}$, converge a cero; ver límites importantes 1.4. Por lo tanto, $\lim \frac{n!}{3^n} = \infty$ y entonces la serie asociada diverge. ■

d) Aplicamos el criterio de la integral a $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$.

Es claro que $f(x)$ es continua y positiva para $x \in [1, \infty)$. Veamos que es decreciente por el signo de su derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2+3-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2} .$$

Luego, $f'(x) < 0$ si $3 - x^2 < 0$, es decir, si $\sqrt{3} < x$. Luego, $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(\sqrt{3}, \infty)$. En particular, en el intervalo $[2, \infty)$ (ya que $2 > \sqrt{3}$). Entonces, aplicamos el criterio de la integral en el intervalo $[2, \infty)$:

$$\int_2^{\infty} \frac{x}{x^2+3} dx = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \ln(x^2+3)\Big|_2^b = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \ln(b^2+3) - \frac{1}{2}\ln(7) = \infty.$$

Luego, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$ es divergente.

Ejercicio 13. Alternativamente, usando el criterio de comparación, probar que la serie dada se compara con la serie armónica que diverge. Por lo tanto, la serie dada diverge.

■

6. **P1-C4-2017-1.** Determine si las series siguientes convergen. Diga si ellas convergen absolutamente o condicionalmente, o divergen.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$.

   Indicación: Utilice el criterio de comparación.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$.

Solución:

a)

Ejercicio 14. Al aplicar, el criterio de la razón o de la raíz, no es posible concluir. Entonces, es conveniente seguir la indicación. Para ello, escribimos el término general de la serie de la forma siguiente:

$$a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} = \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} < 4 \cdot \frac{1}{n^2} \ ,$$

para todo $n \geq 1$. Esto ya que la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es acotada superiormente por 4; ver desarrollo del ítem 4 sobre la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Luego,

$$0 < a_n < 4 \cdot \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geq 1.$$

El criterio de comparación implica que la serie de los a_n es convergente (absolutamente por ser $a_n > 0$), pues la serie de $\frac{1}{n^2}$ lo es.

Ejercicio 15. Alternativamente, aplicar el criterio de comparación del límite, comparando con la serie de término general $\frac{1}{n^2}$.

b) Analicemos la convergencia absoluta. Aplicando el criterio de la razón:

$$\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{3^n}=\frac{3(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}=\frac{3}{(2n+3)(2n+2)}=\frac{\frac{3}{n}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}\longrightarrow 0.$$

Luego, la serie converge absolutamente.

■

7. **P2-C4-2017-1.**

a) Calcule el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n-3)}\ .$$

b) Utilizando el criterio de la integral, estudie la convergencia de

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{e^x}dx.$$

Solución:

a) Aplicando fracciones parciales:

$$\frac{A}{4n+1}+\frac{B}{4n-3}=\frac{1}{(4n+1)(4n-3)}\ ,$$

obtenemos que $A=-1/4$ y $B=1/4$. Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n-3)}=\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}(a_n-a_{n+1})\qquad a_n:=\frac{1}{4n-3}\ .$$

Por propiedad telescópica obtenemos que:

$$s_n=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=\frac{1}{4}(a_1-a_{n+1})\ .$$

Luego,

$$\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}(a_n-a_{n+1})=\lim s_n=\lim\frac{1}{4}(a_1-a_{n+1})=\lim\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}\ .$$

b) Claramente la función $f(x)=e^{-x}\ln(1+x)$ es continua y positiva por ser producto de funciones continuas y positivas en $[0,\infty)$ (logaritmo natural es positiva para argumentos mayores o iguales que 1). Probemos que $f(x)$ es decreciente por el signo de su derivada:

$$f'(x)=\frac{e^{-x}}{\underbrace{1+x}_{>0}}\left[1-(1+x)\ln(1+x)\right]<0\iff g(x):=1-(1+x)\ln(1+x)<0. \tag{2.7}$$

Ahora encontremos el intervalo donde $g(x) < 0$.

$$g(x) < 0 \iff (1+x)\ln(1+x) > 1.$$

Pero, $(1+x) > 1$ para todo $x > 0$, en cambio $\ln(1+x) \geq 1$ para todo $x \geq e-1$. Esto porque $\ln(\cdot)$ es creciente y $\ln(e) = 1$. Luego,

$$x \geq e-1 \Longrightarrow (1+x)\ln(1+x) \geq e \cdot 1 > 1 \Longrightarrow g(x) < 0.$$

En particular, $g(x) < 0$ para todo $x \geq 2$ (ya que $2 \geq e-1$). Por lo tanto, de acuerdo a (2.7), $f'(x) < 0$ para todo $x \geq 2$ y entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalo $[2, \infty)$. Luego, podemos aplicar el criterio de la integral en dicho intervalo:

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{e^x} dx < \infty \iff \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{e^n} < \infty.$$

Aplicando el criterio de la razón:

$$\frac{\ln(2+n)}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{\ln(1+n)} = \frac{1}{e} \cdot \frac{\ln(2+n)}{\ln(1+n)} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1\ .$$

Luego, la serie converge. Por lo tanto, la integral también converge. Luego,

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{e^x} dx = \int_0^{2} \frac{\ln(1+x)}{e^x} dx + \int_2^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{e^x} dx < \infty,$$

porque la integral entre 2 e ∞ converge y la integral entre 0 y 2 es finita, ya que el intervalo $[0, 2]$ es acotado y el integrando es una función continua en dicho intervalo (toda función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$).

Ejercicio 16. Usando la regla de L'Hôpital, probar que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+x)}{\ln(1+x)} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2+n)}{\ln(1+n)} = 1.$$

$\blacksquare$

3. Series de Potencias

Como veremos en lo que sigue las Series de Taylor son Series de Potencias, de modo que lo primero que hay que definir y estudiar son estas últimas.

Definición 3.1. Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{3.1}$$

donde x_0 es una constante y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, es llamada *Serie de Potencias* en $x - x_0$.

El siguiente resultado provee las propiedades de convergencia de la series de potencias.

Teorema 3.2. *Para la serie de potencias* (3.1) *hay sólo tres posibilidades:*

1. *La serie converge sólo cuando* $x = x_0$.
2. *La serie converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$.
3. *Existe un número positivo* $R > 0$ *tal que la serie converge absolutamente si* $|x - x_0| < R$ *y diverge si* $|x - x_0| > R$.

Nota 3.1.

- El número R se denomina **radio de convergencia** de la serie de potencias. Por convención, $R = 0$ en el caso 1 y $R = \infty$ en el caso 2.
- Se puede calcular R aplicando el criterio de la razón o de la raíz; ver teoremas 2.10 y 2.11. En efecto, aplicando el criterio de la razón 2.10, la serie de potencias (3.1) converge absolutamente si

  $$\lim \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - x_0| < 1 \iff |x - x_0| < \frac{1}{\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

  Luego, el radio de convergencia está dado por

  $$R = \frac{1}{\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

  Similarmente, usando el criterio de la raíz 2.11, podemos calcular el radio de convergencia como

  $$R = \frac{1}{\lim |a_n|^{1/n}}.$$

- El **intervalo de convergencia** de la serie de potencias es el conjunto de todos los x para los cuales la serie converge. Este intervalo contiene a $(x_0 - R, x_0 + R)$, y podría o no contener los extremos $x_0 \pm R$.

Ejemplo 3.1. Para la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \,,$$

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{n}{n+1} = 1.$$

Por lo tanto, $R = 1$ y la serie converge absolutamente para $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$. Para $x = -1$ la serie deviene $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$, la cual ya vimos que converge, mientras que en $x = 1$ la serie deviene $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, la cual diverge. Por tanto, el intervalo de convergencia es $[-1, 1[$.

Ejemplo 3.2. La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{3.2}$$

converge absolutamente para cada $x \in (-1, 1)$, mientras que para $x = \pm 1$ la serie diverge; ver ejemplo 2.1. Por tanto, el intervalo de convergencia de la serie geométrica (3.2) es $]-1, 1[$. ■

Ejemplo 3.3. Para la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,,$$

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

Por lo tanto, $R = \infty$, es decir, la serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$ (intervalo de convergencia es igual a $\mathbb{R}$).

Ejemplo 3.4. Para la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \,,$$

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim n + 1 = \infty.$$

Por lo tanto, $R = 0$ y la serie converge sólo si $x = 0$ (intervalo de convergencia se reduce sólo al punto 0).

Ejemplo 3.5. Para la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n^p} x^{2n} \,,$$

la cual considera solamente los términos pares (potencias de x^2), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n n^p}{4^{n+1}(n+1)^p} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-p} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-p} = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, la serie converge absolutamente si $|x^2| < 4$ (potencias de x^2). Luego, la serie converge absolutamente para $|x| < 2$ y diverge para $|x| > 2$. Para $x = \pm 2$, la serie deviene $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^p$, la cual converge si $p > 0$, por el criterio de la serie alternante (teorema 2.12). Por tanto, el intervalo de convergencia es $[-2, 2]$.

Ejercicio 17. Probar que la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ converge si $p > 0$, usando el criterio de la serie alternante; teorema 2.12. Además, demostrar que la serie diverge si $p \leq 0$, separando los casos $p = 0$ y $p < 0$.

En resumen, tenemos

Ejemplo	**Serie**	**Radio de convergencia**	**Intervalo de convergencia**
Ejemplo 3.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$	$R = 1$	$[-1, 1)$
Serie geométrica	$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Ejemplo 3.3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	$R = \infty$	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
Ejemplo 3.4	$\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Ejemplo 3.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n n^p}x^{2n}$	$R = 2$	$[-2, 2]$

3.1. Propiedades de las Funciones Definidas por Series de Potencias. Se estudiarán a continuación las propiedades de las funciones definidas por las series de potencias. Por lo tanto, consideraremos series de potencias con radios de convergencia positivos, $0 < R < \infty$ o $R = \infty$.

Ejemplo 3.6. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ define la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para cada x en el intervalo $(-1, 1)$. Ver Ejemplo 3.2.

El siguiente teorema provee la forma de calcular la derivada de una función representada por una serie de potencias.

Teorema 3.3. *Una serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con radio de convergencia $R > 0$ es derivable en el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, y su derivada se obtiene derivando término a término la serie, es decir,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1},$$

la cual se puede reescribir como

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n.$$

Esta serie también tiene radio de convergencia R.

El siguiente teorema generaliza el anterior.

Teorema 3.4. *Una serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con radio de convergencia $R > 0$ tiene derivadas de todos los órdenes en el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ las cuales pueden ser obtenidas derivando repetidamente término a término, es decir,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1) a_{n+k} (x - x_0)^n. \tag{3.3}$$

El radio de convergencia de cada una de las series anteriores es R.

Ejemplo 3.7. Como vimos anteriormente, la serie geométrica (3.2) define la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$. Derivando tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \quad |x| < 1.$$

Derivando nuevamente, tenemos que

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n, \quad |x| < 1.$$

Luego,

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n, \quad |x| < 1.$$

En general, tenemos que

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n, \quad |x| < 1.$$

Ejemplo 3.8. Similarmente al Ejemplo 3.3, se puede mostrar que las series

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

convergen para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando obtenemos que:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = C(x)$$

y poniendo $k = n - 1$:

$$C'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = (-1) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -S(x).$$

Más tarde probaremos que

$$S(x) = \sin x \quad \text{y} \quad C(x) = \cos x.$$

El Teorema 3.4 tiene importantes consecuencias.

Corolario 3.5. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $|x - x_0| < R$, entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\ .$$

Demostración. Evaluando en $x = x_0$ la serie (3.3) obtenemos directamente que $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$. ∎

Corolario 3.6. Unicidad de Series de Potencias.

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

para todo x en algún intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, entonces $a_n = b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, donde $f(x)$ es la primera serie de potencias y $g(x)$ es la segunda, entonces derivando y evaluando en $x = x_0$ obtenemos que

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \Rightarrow k! a_k = k! b_k \Rightarrow a_k = b_k, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

∎

Concerniente a la integración de series de potencias, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.7. *Si x_1 y x_2 están en el intervalo de convergencia de la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

entonces

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left[(x_2 - x_0)^{n+1} - (x_1 - x_0)^{n+1} \right] \ ;$$

esto es, una serie de potencias puede integrarse término a término entre cualesquiera par de puntos dentro de su intervalo de convergencia.

3.2. Series de Taylor y de Maclaurin. Hasta ahora hemos respondido para qué valores de x una serie de potencias dada converge, y cuáles son las propiedades de su suma (las series de potencias tienen derivadas de todos los órdenes y son integrables en su intervalo de convergencia). Ahora responderemos una pregunta relacionada: ¿Qué propiedades garantiza que una función dada f pueda ser representada como la suma de una serie de potencias convergente? Una respuesta parcial está dada por el Teorema 3.4, el cual nos dice que f tiene que ser derivable indefinidamente en un intervalo abierto centrado en x_0. Asimismo, el Corolario 3.5 nos dice que la única serie de potencias de $x - x_0$ que podría converger a f en tal intervalo está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \ . \tag{3.4}$$

Esta es la llamada *Serie de Taylor de f en torno a x_0*. Si $x_0 = 0$, se llama *Serie de Maclaurin de f*. La m-ésima suma parcial de (3.4) se denomina *Polinomio de Taylor*

$$T_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \ ,$$

La Serie de Taylor de una función f infinitamente derivable podría converger a una suma diferente de f. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es infinitamente derivable en toda la recta numérica. Además,

Ejercicio 18. Se puede verificar que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego, su Serie de Maclaurin es idénticamente nula. Este ejemplo muestra que no basta el hecho que f sea infinitamente derivable en un intervalo abierto centrado en x_0 para que pueda ser representada como la suma de la Serie de Taylor en torno a x_0.

La respuesta a la pregunta inicial (¿Qué propiedades garantiza que una función dada f pueda ser representada como la suma de una serie de potencias convergente?) está dada por el Teorema de Taylor que enunciamos a continuación.

Teorema 3.8. Teorema de Taylor.
Si f es infinitamente derivable en $I := (a, b)$ y $x,\ x_0 \in I$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad c_n \in [\text{mín}(x, x_0),\ \text{máx}(x, x_0)]. \tag{3.5}$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \textit{para } x \in I$$

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0.$$

■

La condición anterior no es fácil de verificar, ya que la sucesión (c_n) es en general desconocida. Sin embargo, hay una condición útil y general.

Teorema 3.9. *Supongamos que f es infinitamente derivable en un intervalo I y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R^n}{n!} \max_{x \in I} |f^{(n)}(x)| = 0. \tag{3.6}$$

Entonces, si $x_0 \in I$, la serie de Taylor de f **converge uniformemente** *a f en $I_R = I \cap [x_0 - R, x_0 + R]$.*

Demostración. De acuerdo al Teorema de Taylor 3.8, basta probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0 \qquad \forall x \in I_R.$$

En efecto, acotamos el resto de la fórmula de Taylor (3.5):

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \le \max_{x \in I_R} |f^{(n+1)}(x)| \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \le \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)| \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\ .$$

Por hipótesis la cota anterior converge a 0 cuando n tiende a ∞. Luego, se tiene la conclusión con convergencia uniforme (independiente) en x. ■

Como $\lim \frac{R^n}{n!} = 0$ (ver límites importantes 1.4), la hipótesis del teorema anterior es fácilmente verificable cuando $f^{(n)}$ es acotada con una cota independiente de n.

Ejemplo 3.9. Si $f(x) = \sin x$, entonces $|f^{(n)}(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, aplicando el teorema anterior tenemos que $f(x)$ es representada por su Serie de Taylor en torno a cualquier x_0. Eligiendo $x_0 = 0$ (Serie de Maclaurin), tenemos que:

Ejercicio 19.

$$f^{(2m)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Así, aplicando el Teorema 3.9 con $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ y R arbitrario, obtenemos que

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}}$$

Un argumento similar muestra que

Ejercicio 20.

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}}$$

La convergencia de ambas series está garantizada en cada intervalo $[-R, R]$ para $R > 0$ arbitrario.

Ejemplo 3.10. Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(k)}(x) = e^x$ y $|f^{(k)}(t)| \leq e^R$, para todo $t \in [-R, R]$ y $k \in \mathbb{N}$. Luego, aplicando el Teorema 3.9 obtenemos que

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}}$$

con convergencia garantizada en $[-R, R]$ para $R > 0$ arbitrario.

Ejemplo 3.11. Si $f(x) = (1+x)^q$ para $q \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= q(1+x)^{q-1} \\
f''(x) &= q(q-1)(1+x)^{q-2} \\
f'''(x) &= q(q-1)(q-2)(1+x)^{q-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1)(1+x)^{q-n}
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1)}{n!} \tag{3.7}$$

Por tanto, la serie de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^q$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1)}{n!} x^n, \tag{3.8}$$

denominada **serie binomial**. Para valores no enteros de q, la serie es infinita y la notación tradicional para sus coeficientes es

$$\binom{q}{n} = \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1)}{n!} \tag{3.9}$$

denominados **coeficientes binomiales**.

En este caso, no es cierto que $f^{(n+1)}$ sea acotada con cota independiente de n. Sin embargo, podemos aplicar el Teorema 3.9 de igual forma. En efecto, aplicando el criterio de la razón tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{q}{n+1}}{\binom{q}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{q-n}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{q}{n}-1}{1+\frac{1}{n}} \right| = 1.$$

Luego, el radio de convergencia de la serie binomial es 1. Además, notemos que:

$$\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} = \left| \binom{q}{n} \right| |1+x|^{q-n} \leq 2^q \left| \binom{q}{n} \right| \quad \text{para } |x| \leq 1. \tag{3.10}$$

De lo anterior, el resto de Taylor (3.5) (con $x_0 = 0$) se acota por:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq 2^q \left| \binom{q}{n+1} \right| \quad \text{para } |x| \leq 1.$$

La cota anterior converge a 0 cuando n tiende a ∞, ya que $(n+1)!$ crece mucho más rápido que n y que q^n. Esto prueba que si q es cualquier número real

$$\boxed{(1+x)^q = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{q}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1)}{n!} x^n \quad \text{para todo } x \in (-1,1)}$$

Notar que si q es un entero positivo y $n > q$, entonces la expresión para $\binom{q}{n}$ contiene el factor $(q-q)$, de modo que $\binom{q}{n} = 0$ para $n > q$. Luego, la serie termina en $n = q$ y se reduce al teorema del binomio cuando q es un entero positivo. ∎

Las series de Taylor permiten aproximar números irracionales a través de series numéricas. Más generalmente, permiten aproximar las funciones que pueden ser representadas mediante estas series de potencias.

Ejemplo 3.12. Integrando la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad |x| < 1$$

término a término obtenemos que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad |x| < 1 \quad (c \text{ constante de integración}) .$$

Haciendo el cambio de índices $k = n+1$ en la serie anterior, como $k = 1$ para $n = 0$ y $n = k-1$, entonces

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + c \quad |x| < 1.$$

Evaluando en $x = 0 \in (-1, 1)$, que es el intervalo de convergencia, tenemos que:

$$\ln 1 = 0 + c \Longrightarrow c = 0, \text{ ya que } \ln 1 = 0.$$

Como la serie de potencias de $\ln(1+x)$ converge en $x = 1$ (ya que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge), entonces

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} ,$$

obteniendo una serie numérica para aproximar el número irracional $\ln 2$. En general, las series de Taylor permiten aproximar los valores de las funciones que representan, en este caso, $\ln(1+x)$ se puede aproximar por la serie encontrada. ■

La siguiente tabla resume las series de Maclaurin deducidas hasta ahora.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^q = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{q}{n} x^n = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!} x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

Otra razón por la cual las series de Taylor son tan importantes, es que permiten integrar funciones que no se pueden integrar con los métodos tradicionales. En efecto, como hemos mencionado, Newton y Leibnitz integraban a menudo funciones expresándolas primero como series de potencias, e integrando la serie término a término. De hecho, no es posible integrar la función $f(x) = e^{-x^2}$ por medio de técnicas conocidas, porque su antiderivada no es una función elemental (expresable por medio de funciones conocidas).

Ejemplo 3.13.

1. Evalúe $\int e^{-x^2} dx$ como una serie infinita.
2. Evalúe $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con tres cifras decimales correctas.

Solución:

1. Primero encontramos la serie de Maclaurin para $f(x) = e^{-x^2}$. Basta reemplazar x por $-x^2$ en la serie de e^x:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Integrando la serie anterior, tenemos que

$$\int e^{-x^2}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = c + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$
$$= c + \frac{x}{1\cdot 0!} - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots$$

Esta serie es convergente para todo x, porque la serie original converge para todo x.

2. El TFC da

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \left[\frac{x}{1\cdot 0!} - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!}\ .$$

Por el criterio de la serie alternante (teorema 2.12), la serie anterior es convergente y además

$$|r_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1} := \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}\ .$$

Luego, si queremos una aproximación de la integral con tres cifras decimales, el residuo de la serie alternante debe ser menor que 10^{-3}:

$$\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < 10^{-3} \Longrightarrow (2n+3)(n+1)! > 10^3 \Longrightarrow n \geq 4,$$

ya que

$$\frac{1}{11\cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0{,}001.$$

Por tanto, la aproximación deseada necesita 4 términos como mínimo:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} = s \approx s_4 = \frac{1}{1\cdot 0!} - \frac{1}{3\cdot 1!} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!}$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0{,}748.$$

■

3.3. Ejercicios resueltos de Series de Potencias.

1. **Ejercicio 1(c) - guía 2 series (semana 15).**

   Encontrar el radio y el intervalo de convergencia de la Serie de Potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\sqrt{n}}{3^n}$.

   Notación 3.1. Denotaremos, por simplicidad, una Serie de Potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n.$$

Solución: La forma más directa es utilizar el criterio de la razón 2.10:

$$\text{lím}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \text{lím}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{3}\,\text{lím}\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{R}\ .$$

Luego, el radio de convergencia de la Serie de Potencias es $R = 3$, y ésta converge si $|x| < 3$ (diverge si $|x| > 3$ y no permite concluir si $|x| = 3$). Veamos el intervalo de convergencia I. Tenemos que $(-3, 3) \subseteq I \subseteq [-3, 3]$ (los extremos pueden o no estar incluídos en el intervalo).

Estudiemos los extremos $|x| = 3$, en cuyo caso el término general de la serie es $\sqrt{n}$ o $(-1)^n\sqrt{n}$. Como ninguna de estas sucesiones converge, en particular, ninguna converge a 0, la serie diverge; ver Teorema 2.3. Luego, el intervalo de convergencia de la serie de potencias es $(-3, 3)$. ■

2. Deteminar la Serie de Taylor de las funciones seno y coseno en torno a $x_0 = 0$ (Serie de McLaurin).

   Solución: Según lo visto en el apunte, la Serie de Taylor en torno a $x_0 = 0$ (Serie de McLaurin) para una función f infinitamente derivable es:

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

   Para $f(x) = \sin x$, tenemos que $f(0) = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\sin 0 = 0$, $f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1$, $f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$, $f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$, $f^{(6)}(0) = -\sin 0 = 0$, $f^{(7)}(0) = -\cos 0 = -1, \ldots$. La fórmula general para la derivada k-ésima sería:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \text{ es par,} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{si} \quad k \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Luego, el coeficiente k-ésimo de la Serie de Taylor es no nulo solamente para los k impares (lo cual es normal, considerando que la función seno es impar). Haciendo el cambio de variable $k = 2n + 1$ obtenemos la Serie de Taylor del seno en torno a $x_0 = 0$ (Serie de McLaurin):

$$\sin(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\ .$$

   ■

   Análogamente, se prueba que:

Ejercicio 21.

$$\cos(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \ .$$

3. **Ejercicio 2 - guía 2 series (semana 15).**
   a) Determine la función e intervalo de convergencia asociada a la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.
   b) Calcule la derivada de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ para $x \in (-1, 1)$.
   c) Usando lo anterior, pruebe que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ para $x \in (-1, 1)$.
   d) Deduzca una serie para calcular π.

Solución.

a) Primero determinamos la función asociando la Serie de Potencias dada con una serie geométrica de razón $-x^2$ en lugar de x. Esta converge a $\frac{1}{1+x^2}$ para $|x| < 1$; ver ejemplo 3.2.:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \ .$$

b) Analicemos primero la convergencia de la Serie de Potencias. Esto ya que ella será derivable solamente en el interior de su intervalo de convergencia, donde podremos derivarla sin ningún problema.

Notemos que el término general de la serie es $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ con $a_{2n} = 0$ porque la serie sólo contiene las potencias impares de x (x^{2n+1}). Aplicando el criterio de la razón adecuado a este caso, tenemos que:

$$\lim \left| \frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}} \right| = \lim \frac{2n+1}{2n+3} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = 1.$$

Luego, la Serie de Potencias tiene radio de convergencia $R = 1$. Veamos los extremos del intervalo. Para $x = 1$ obtenemos la serie alternante $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$, que es convergente por el criterio de la serie alternante; ver teorema 2.12. Para $x = -1$, obtenemos la misma serie anterior, pero con signo contrario. Luego, el intervalo de convergencia de la Serie de Potencias dada en el enunciado es $[-1, 1]$.

De acuerdo a lo visto en este apunte, las Series de Potencias son derivables en el interior de su intervalo de convergencia y su derivada se calcula derivando la serie término a término:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad |x| < 1,$$

de acuerdo a la parte (a).

c) Integrando la igualdad anterior, obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c.$$

Evaluando la igualdad anterior en $x = 0$, obtenemos que $c = 0$, ya que la serie se anula en $x = 0$ (potencias impares de x) y $\arctan 0 = 0$. Esto prueba lo pedido.

d) Se sabe que $\tan(\pi/4) = 1$ (seno y coseno de $45° = \pi/4$ radianes son iguales). Evaluando la serie de $\arctan x$ en $x = 1$, obtenemos que:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \Longrightarrow \pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} .$$

Notar que usando la estimación del residuo para series alternantes, $|r_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1}$ (teorema 2.12), podemos aproximar π con el número de decimales que queramos. Sin embargo, como $\frac{1}{2n+1}$ decrece lentamente, requeriríamos demasiados términos de la serie para una alta precisión. ■

4. **P3-C4-2017-1.** Dada la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n} .$$

a) Hallar su radio e intervalo de convergencia. Analice los extremos del intervalo.

b) Calcule la serie de $f'(x)$ y verificar que corresponde a una serie geométrica.

c) Usando el ítem anterior, calcule $f(x)$ integrando $f'(x)$. Hallar la constante de integración usando un valor adecuado de $f(x)$.

d) Usando la serie de $f(x)$, encuentre la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n4^n}$.

Solución.

a) Aplicando el criterio de la razón 2.10 con $a_n = \frac{3^n}{n}$:

$$\text{lím} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \text{lím} \frac{3^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n} = \text{lím}\, 3 \frac{n}{n+1} = 3\, \text{lím} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 3.$$

Luego, el radio de convergencia es $R = \frac{1}{3}$. Analicemos ahora los extremos del intervalo $x = \pm\frac{1}{3}$.

En $x = \frac{1}{3}$, se produce la serie armónica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ que es divergente.

En $x = -\frac{1}{3}$, la serie obtenida es $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ la cual converge, por el criterio de la serie alternante; teorema 2.12. Luego, el intervalo de convergencia es $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

b) Calculando la derivada de $f(x)$ para $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, obtenemos que

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{n(3x)^{n-1} \cdot 3}{n} = 3\sum_{n\geq 1}(3x)^{n-1} = 3\sum_{n\geq 0}(3x)^n.$$

Esta última es una serie geométrica con razón $3x$ (en lugar de x). Luego,

$$f'(x) = \frac{3}{1-3x} \quad \forall x \in \left]-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right[.$$

c) Integrando tenemos

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{3}{1-3x}dx = -3 \cdot \frac{1}{3} \ln|1-3x| + c = -\ln(1-3x) + c.$$

Notemos que para pasar hacia la última igualdad, usamos que $|1-3x| = 1-3x > 0$ para $x < \frac{1}{3}$. Evaluando en $x = 0 \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ llegamos a:

$$0 = f(0) = -\ln 1 + c = c \Longrightarrow c = 0.$$

Notemos que $f(0) = 0$, de acuerdo a la definición de f dada en el enunciado. Luego,

$$f(x) = -\ln(1-3x) \quad \forall x \in \left]-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right[.$$

Notar que la igualdad anterior es incluso válida si $x = -\frac{1}{3}$.

d) Evaluando $f(x)$ en $x = -\frac{1}{4} \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$, obtenemos que:

$$f\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\ln\left(1+\tfrac{3}{4}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-3)^n}{n4^n}.$$

Luego,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-3)^n}{n4^n} = -\ln\left(\tfrac{7}{4}\right)$$

es la serie buscada. Notar que esta converge, de acuerdo al criterio de la serie alternante, teorema 2.12, ya que $a_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ es producto de sucesiones decrecientes y convergentes a 0. ∎

5. La función

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \qquad p \in \mathbb{N}.$$

es la *función de Bessel* de orden p.

a) Encuentre el intervalo de convergencia de las funciones de Bessel.

Demuestre que, en el interior de dicho intervalo, se cumple que:

b) $J_0' = -J_1$.

c) $J_p' = \frac{1}{2}(J_{p-1} - J_{p+1})$ para cada $p \geq 1$.

d) $x^2 J_p'' + x J_p' + (x^2 - p^2) J_p = 0$.

Solución: Primero, encontremos el intervalo de convergencia. Notemos que $J_p(x)$ es una serie de potencias pares de x y donde la sucesión que acompaña a las potencias de x dependen de p. Esta dependencia será denotada como un superíndice entre paréntesis:

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^{(p)} x^{2n} \qquad a_{2n}^{(p)} = \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!4^n}.$$

Usando el criterio de la razón 2.10, obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{2n+2}^{(p)}}{a_{2n}^{(p)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+p)!4^n}{(n+1)!(n+1+p)!4^{n+1}} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+1+p)} = 0.$$

Luego, el radio de convergencia es $R = \infty$. Por tanto, la serie $J_p(x)$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) La función de Bessel de orden 0 es:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} .$$

Derivando término a término:

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} .$$

Haciendo $k = n - 1$, tenemos que $n = k + 1$, donde k parte desde 0, dado que n parte desde 1. Luego,

$$J_0'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{[(k+1)!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = (-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = -J_1(x).$$

En el desarrollo anterior se simplificó $(k+1)! = (k+1)k!$ con el $(k+1)$ del numerador y se llegó al resultado comparando la serie de $J_p(x)$ para $p = 1$, es decir, $J_1(x)$.

b) Derivando $J_p(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned} J_p'(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} \qquad (3.11)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}}_{J_{p-1}(x)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}. \end{aligned}$$

Haciendo $k=n-1$ en la última serie, tenemos que $n=k+1$, con $k\geq 0$. Luego,

$$J_p'(x)=\frac{1}{2}J_{p-1}(x)-\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+p+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p+1}}_{J_{p+1}(x)}=\frac{1}{2}\left[J_{p-1}(x)-J_{p+1}(x)\right].$$

c) Usando (3.11), calculamos:

$$\begin{aligned} x^2J_p''(x)+xJ_p'(x)+(x^2-p^2)J_p(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+p)(2n+p-1)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-2}\\ &+\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\\ &+4\left(\frac{x}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\\ &-p^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}. \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Haciendo $k=n+1$ en la tercera serie, tenemos que $n=k-1$, con $k\geq 1$. Luego,

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{x}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} &= -4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!(k+p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left[-4k(k+p)\right]}{k!(k+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}. \end{aligned}$$

Reemplazando en (3.12), tenemos que:

$$x^2J_p''(x)+xJ_p'(x)+(x^2-p^2)J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p},$$

donde la sucesión (b_n) depende de p. Analizando el término $n=0$ en la serie (3.12), se tiene que $b_0 = \frac{p(p-1)+p-p^2}{p!} = 0$. Ahora, analizando el término general $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(2n+p)(2n+p-1)+(2n+p)-4n(n+p)-p^2}{n!(n+p)!} \\ &= \frac{(2n+p)^2-(2n+p)+(2n+p)-4n^2-4np-p^2}{n!(n+p)!} \\ &= \frac{(2n+p)^2-(2n+p)^2}{n!(n+p)!} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x^2 J_p''(x) + xJ_p'(x) + (x^2-p^2)J_p(x) = 0$. ■

6. Sea $a_0 = a_1 = 5$ y $a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}$, $n \geq 1$.
   a) Calcular explícitamente la función $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
   b) Escribir F como la diferencia de dos series geométricas, y encuentre una fórmula explícita para a_n.

Solución:

a) Como $F(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$, entonces $F(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}$. Usando que $a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}$, desarrollemos la última serie:

$$\begin{aligned} F(x) - a_0 - a_1 x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + 6\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+1} \\ &= x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 6x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \\ &= x\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right] + 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= x\left[F(x) - a_0\right] + 6x^2 F(x). \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que

$$F(x) - a_0 - a_1 x = x\left[F(x) - a_0\right] + 6x^2 F(x).$$

Como $a_0 = a_1 = 5$, despejando $F(x)$ de la ecuación anterior, se obtiene que:

$$F(x) = \frac{5}{1-x-6x^2} = \frac{5}{(1-3x)(1+2x)} .$$

b) Haciendo la descomposición en fracciones parciales de $F(x)$:

$$F(x) = \frac{5}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x}$$

se obtiene que $A = 3$ y $B = 2$. Luego,

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{3}{1-3x} + \frac{2}{1+2x} &= 3\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[3^{n+1} - (-2)^{n+1}\right] x^n. \end{aligned}$$

Lo anterior se obtuvo reemplazando x por $3x$ y por $-2x$ en la serie geométrica (3.2), respectivamente. El intervalo de convergencia de la serie de potencias de $F(x)$ está dado por $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, y luego el radio de convergencia es $\frac{1}{3}$. Finalmente, $a_n = 3^{n+1} - (-2)^{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$. ■

7. **P3-C3-2021-1.**

a) Determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}\,, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n\,, \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n \quad (k \in \mathbb{N}).$$

b) 1) Usando la serie geométrica, determine una fórmula cerrada (como función solamente de x) para las series $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ y $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$. ¿Cuál es el radio de convergencia de estas series?

2) Usando las series anteriores, calcule las series numéricas

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n}\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n}{2^n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\,.$$

Solución:

a) 1) Aplicando el criterio de la raíz, tenemos que:

$$\frac{1}{R} = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

En consecuencia, $R = \infty$.

2) Aplicando también el criterio de la raíz, tenemos que $R = 0$, ya que

$$\frac{1}{R} = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim (n^n)^{\frac{1}{n}} = \lim n = \infty, \quad \text{ya que } \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

3) Notemos que si $k = 0$ o 1, la serie del enunciado corresponde a la serie geométrica, cuyo radio de convergencia es 1. Entonces, calcularemos el radio solamente para $k \geq 2$. Además, notemos que la sucesión (a_n) que acompaña a x^n en la serie del enunciado depende de k, razón por la cual será denotada por $\left\{a_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. En consecuencia, el radio

de convergencia también depende de k, y será denotado por R_k para $k \geq 2$. Aplicando el criterio de la razón, tenemos:

$$\frac{1}{R_k} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}^{(k)}}{a_n^{(k)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^k}{[k(n+1)]!} \cdot \frac{(kn)!}{(n!)^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right)^k \cdot \frac{(kn)!}{(kn+k)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1)^k \cdot \frac{(kn)!}{(kn+k)!} \,. \tag{3.13}$$

Simplificando $\frac{(kn)!}{(kn+k)!}$, tenemos que:

$$\frac{(kn)!}{\underbrace{(kn+k)\cdot(kn+k-1)\cdot \ldots \cdot (kn+1)}_{k \text{ términos}} \cdot (kn)!} = \frac{1}{(kn+k)\cdot(kn+k-1)\cdot \ldots \cdot (kn+1)} \,.$$

Reemplazando lo anterior en (3.13) y factorizando por n cada factor del denominador y numerador, tenemos que:

$$\frac{1}{R_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^k}{n\left(k+\frac{k}{n}\right)\cdot n\left(k+\frac{k-1}{n}\right)\cdot \ldots \cdot n\left(k+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{n^k\left(k+\frac{k}{n}\right)\cdot\left(k+\frac{k-1}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(k+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{\left(k+\frac{k}{n}\right)\cdot\left(k+\frac{k-1}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(k+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{k^k} \,.$$

Lo anterior se debe al álgebra de límites, dado que $1+\frac{1}{n} \longrightarrow 1$ y $\frac{j}{n} \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$ para cada $j = 1, \cdots, k$. Por lo tanto, $R_k = k^k$ para $k \geq 2$.

b) 1) Derivamos la serie geométrica dos veces término a término, al interior de su intervalo de convergencia $(-1,1)$, para lo cual debemos tener en cuenta que, al derivar cada vez, el primer término de la serie se anula. Concretamente, derivando ambos lados de la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{válida } \forall x \in (-1,1),$$

obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \,. \tag{3.14}$$

Multiplicando por x el resultado anterior, se llega:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2} \,. \tag{3.15}$$

Derivando a ambos lados de la ecuación (3.14), se llega a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

y multiplicando por x^2, obtenemos que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \ . \tag{3.16}$$

Las fórmulas (3.15)-(3.16) son también válidas para todo $x \in (-1,1)$, ya que las series de potencias se pueden derivar e integrar en el interior de sus intervalos de convergencia y conservan el mismo radio $R = 1$.

2) Evaluando la serie (3.15) en $x = \frac{1}{2}$ (lo cual está permitido porque dicho valor pertenece al intervalo de convergencia), obtenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2 \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ .$$

Similarmente, evaluando la serie (3.16) en $x = \frac{1}{2}$, obtenemos que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n}{2^n} = 4 \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2} \ .$$

■

8. **P4-C3-2021-1.** Suponga que la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ satisface

$$f'(x) = -2xf(x), \quad f(0) = 1.$$

a) Pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = -2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = -2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} \ .$$

Indicación: Para probar la última igualdad, verifique que $a_0 = 1$ y haga un cambio de índices adecuado en la segunda serie.

b) De la parte anterior, muestre que

$$a_1 = 0 \quad \text{y} \quad a_n = -2\frac{a_{n-2}}{n} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

c) De lo anterior, deduzca que

$$a_{2m+1} = -2\frac{a_{2m-1}}{2m+1} \quad \text{y} \quad a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{m} \quad \text{para cada } m \geq 1.$$

d) De lo anterior, pruebe por inducción que

$$a_{2m+1} = 0 \quad \text{y} \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \quad \text{para cada } m \geq 1.$$

e) Usando lo anterior determine explícitamente f (como función sólo de x).

Indicación: Reconozca f a partir de una serie de Maclaurin conocida.

Solución:

a) Derivando la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (para x en el interior de su intervalo de convergencia), tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x) = -2xf(x) = -2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \ ,$$

o sea,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

Lo anterior corresponde a la primera igualdad que había que probar.

Enseguida, haciendo el cambio de índices $k = n+2$, entonces $n = k-2$, $n+1 = k-1$, y $k \geq 2$ para $n \geq 0$. Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = -2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-1} = -2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1}.$$

La última igualdad obedece al hecho de que el índice es mudo (lo único que importa es donde varía). Lo anterior prueba la última igualdad solicitada en el enunciado, i.e.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = -2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} \ . \tag{3.17}$$

b) Expandiendo la igualdad anterior, se tiene que:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots n a_n x^{n-1} + \cdots \quad = -2a_0 x - 2a_1 x^2 - 2a_2 x^3 - \cdots - 2a_n x^{n+1} - \cdots \ .$$

Por unicidad de las series de potencias (si dos series de potencias son iguales, entonces son iguales coeficiente a coeficiente, tal como los polinomios), la igualdad anterior implica que $a_1 = 0$. Luego, reemplazando $a_1 = 0$ en (3.17), se llega a:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = -2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1},$$

de donde sale, nuevamente por unicidad de las series de potencias, que

$$n a_n = -2a_{n-2} \Longrightarrow a_n = -2\frac{a_{n-2}}{n} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

c) Haciendo $n = 2m+1$ y enseguida $n = 2m$ para $m \geq 1$ en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$a_{2m+1} = -2\frac{a_{2m-1}}{2m+1} \qquad \text{y} \qquad a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{m} \quad \text{para cada } m \geq 1. \tag{3.18}$$

d) De la fórmula anterior, como $a_1 = 0$ y $a_0 = f(0) = 1$ (esto último se tiene al evaluar la serie de potencias de $f(x)$ en $x = 0$ y dado que $f(0) = 1$), el resultado solicitado se obtendrá por inducción, como dice el enunciado.

En efecto, se cumple que $a_1 = 0$. Ahora probemos que

$$a_{2m+1} = 0 \Longrightarrow a_{2m+3} = 0.$$

Usando la primera fórmula en (3.18) para a_{2m+3} en lugar de a_{2m+1}, llegamos a:

$$a_{2m+3} = -2\frac{a_{2m+1}}{2m+3} = 0, \text{ ya que } a_{2m+1} = 0 \text{ por hipótesis de inducción.}$$

Luego, $a_{2m+1} = 0$ para todo $m \geq 1$.

Similarmente, se cumple que $a_0 = 1 = \frac{(-1)^0}{0!}$. Ahora probemos que

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \Longrightarrow a_{2m+2} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Usando la fórmula de la derecha en (3.18) para a_{2m+2} en lugar de a_{2m}, junto con

$$(m+1)! = (m+1)m! \qquad \text{y} \qquad -(-1)^m = (-1)^{m+1}$$

llegamos a:

$$a_{2m+2} = -\frac{a_{2m}}{m+1} = -\frac{\frac{(-1)^m}{m!}}{m+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}$$

ya que $a_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!}$por hipótesis de inducción. Luego, $a_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!}$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

e) A partir de lo anterior, se tiene que

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(x^2)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^m}{m!} \ .$$

La serie anterior es la serie de Maclaurin de e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ ,$$

reemplazando x por $-x^2$. Por lo tanto, $f(x) = e^{-x^2}$.

Nota 3.2. Integrando la ecuación $f'(x) = -2xf(x)$ sale que $f(x) = e^{-x^2+c}$ para alguna constante c. Además, evaluando en $x = 0$ y como $f(0) = 1$, se tiene que $c = 0$, i.e., $f(x) = e^{-x^2}$. De modo que se podría haber llegado a la serie de Maclaurin de $f(x)$, sabiendo de antemano la fórmula analítica de esta función.

Referencias

- Apunte de Introducción al Cálculo (2011). Universidad de Chile. Descargado del link.
- Trench, William F. (2013). Introduction to Real Analysis. Descargado del link.
- Stewart, James (2012). Cálculo de una variable. Cengage Learning, séptima edición. Descargado del link.

Email address: pcumsille@ubiobio.cl

Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío Campus Fernando May, Av. Andrés Bello 720, Casilla 447, Chillán, Chile y Centro de Biotecnología y Bioingeniería, Universidad de Chile, Beaucheff 851, Santiago de Chile.