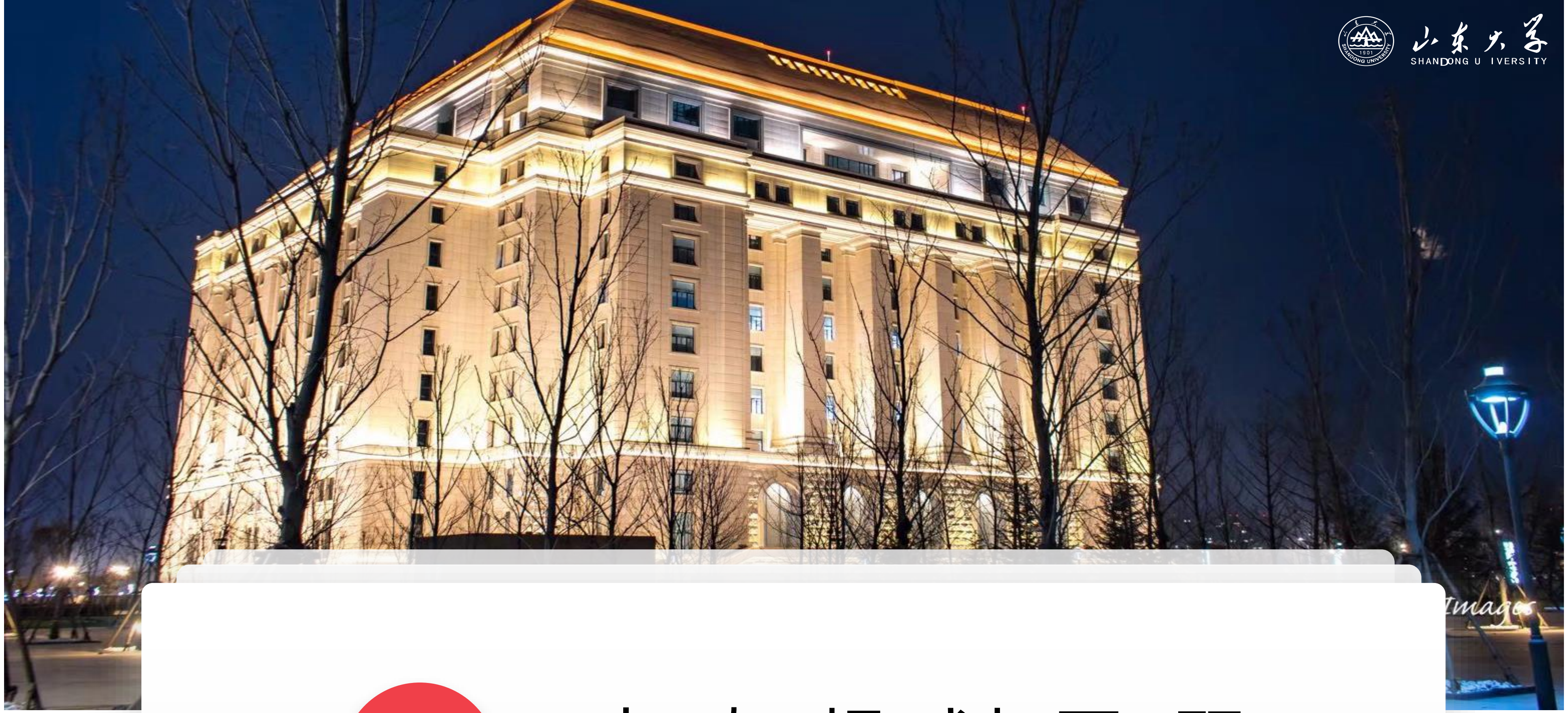
程序设计思维与实践

Thinking and Practice in Programming

动态规划（二） | 内容负责：魏安然/李子晗



0

动 态 规 划 回 顾

Dynamic Programming review

动态规划回顾

- 动态规划解题步骤：
  1. 状态定义
  2. 状态转移方程
  3. 状态初始化
  4. 输出答案

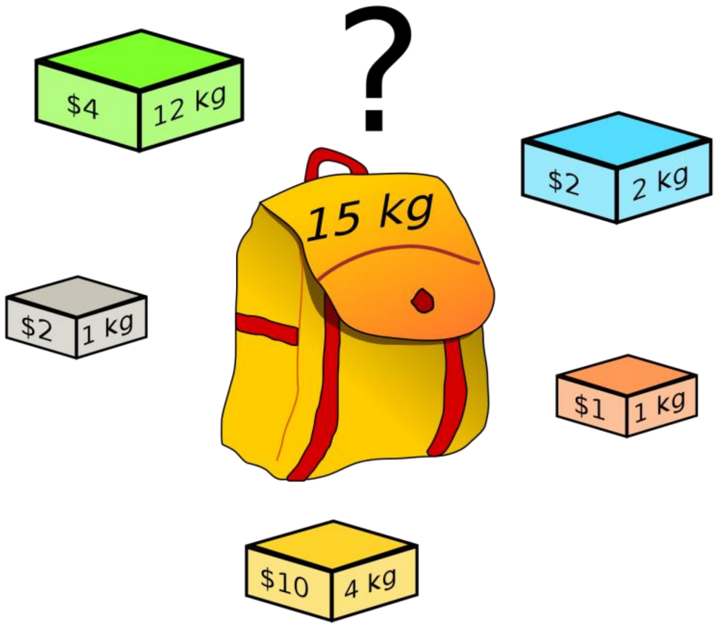
- 走迷宫问题：
  - 定义f[i][j]代表从(1,1)走到(i,j)的方案数
  - f[i][j] = f[i-1][j] + f[i][j-1]
  - f[1][1] = 1

动态规划回顾

- 动态规划常见模型
  - 线性型
  - 坐标型
  - **背包型**
  - 区间型
  - 状态压缩型
  - 树型
  - 矩阵型

动态规划回顾

- 背包问题：一类关于背包的问题
  - 0–1背包
  - 完全背包
  - 多重背包
  - 分组背包
  - ……



- 可以用动态规划完美解决！

1 0-1背包问题

0-1 knapsack problem

0-1背包

- 01 背包-问题描述：
  - 有 N 件物品和一个容量为 V 的背包。 第 i 件物品体积是 W_i，价值是V_i。求解将哪些物品装入背包可使这些物品的体积总和不超过背包容量，且总价值最大 。
  - 特点：每种物品仅有一件，可以选择放或不放 (对应 1 或 0)。
  - 样例

    3 10
    <5,200>
    <4,100>
    <7,300>
    - Ans = 300 （前两个或只选第三个）

0-1背包

- 怎样选择？贪心？

1. 价值大的？

   - 反例

输入样例1：
4 10
4 3 5 7
15 7 20 25
输出样例1：
35

2. 单位价值大的？

   - 反例

输入样例2：
4 20
2 9 10 15
2 9 10 16
输出样例2：
19

0-1背包

- 01背包：
  - 用子问题来定义状态
  - 设计状态：$f_{i,j}$ 表示仅考虑前 i 件物品，放入一个容量为 j 的背包可以获得的最大价值。
  - 状态转移方程

$$f_{i,j} = \max(f_{i-1,j}, \ f_{i-1,j-w_i} + v_i)$$

0-1背包

$$f_{i,j} = \max(f_{i-1,j},\ f_{i-1,j-w_i} + v_i)$$

- 这个方程非常重要！！
  基本上所有与背包相关的问题的方程都是由它衍生出来的。

- 详细解释：
  - “前 i 件物品放入容量为 j 的背包中”这个子问题中，我们现在考虑第 i 件物品的策略（放、不放）
  - 如果选择不放，那么问题转化为“前 i-1件物品放入容量为 j 的背包中”，也就是 f[i-1][j] 所表示的子问题的状态；
  - 如果选择放，那么问题转化成“前 i-1 件物品放入容量为 j-w[i] 的背包中”，此时能获得的最大价值就是 f[i-1][j-w[i]] + v[i]
  - 两种策略，决策为取价值更大的策略

0-1背包

- 答案是什么?
  - f[N][V]

0-1背包

- 复杂度
  - 时间复杂度 —— O(N×V)
  - 空间复杂度 —— O(N×V)
  - 其中时间复杂度基本已经不能再优化了
  - 但是可以优化空间复杂度，将其降到O(V)
- 滚动数组
  - 首先回到刚刚的状态 f[i][j]，其表示 “前 i 件物品，背包容量为 j，背包内物品体积至多为 j” 的最大价值
  - 此时答案是 f[N][V]
  - 观察一下
    - 是否 f[i][j] 只用到了 f[i-1][..] 的信息，但是没用到 f[i][j-1] 的信息

```
for (int i = 1; i <= N; ++i) {
    for (int j = 0; j <= V; ++j) {
        f[i][j] = f[i - 1][j];
        if (j - w[i] >= 0)
            f[i][j] = max(f[i][j], f[i - 1][j - w[i]] + v[i]);
    }
}
```

0-1背包

- 滚动数组
  - 其中第 2 层循环是否可以改为逆序，逆序来枚举背包的容量?

```
for (int i = 1; i <= N; ++i) {
    for (int j = 0; j <= V; ++j) {
        f[i][j] = f[i - 1][j];
        if (j - w[i] >= 0)
            f[i][j] = max(f[i][j], f[i - 1][j - w[i]] + v[i]);
    }
}
```

```
for (int i = 1; i <= N; ++i) {
    for (int j = V; j >= 0; --j) {
        f[i][j] = f[i - 1][j];
        if (j - w[i] >= 0)
            f[i][j] = max(f[i][j], f[i - 1][j - w[i]] + v[i]);
    }
}
```

  - 当然可以!
  - 比如我们枚举到 f[5][5] 的时候，根本没有用到 f[5][0-4] 的任何信息

0-1背包

编号	1	2	3	4
体积	4	3	5	7
价值	15	7	20	25

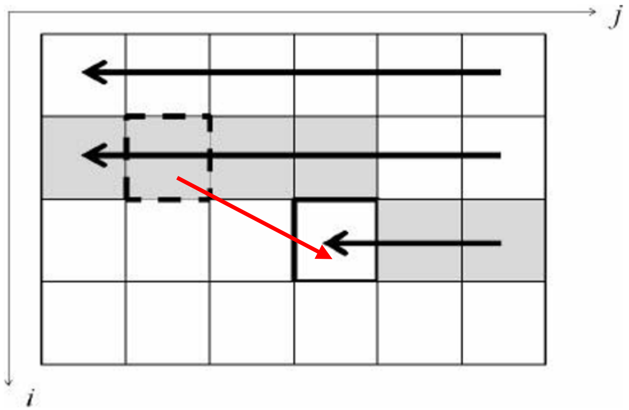
- 滚动数组
  - 更直观地表示一下计算过程：比如一共由 4 件物品，背包容量为 10
  - f 数组中的数据为

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	15	15	15	15	15	15	15
2	0	0	0	7	15	15	15	22	22	22	22
3	0	0	0	7	15	20	20	22	27	35	35
4	0	0	0	7	15	20	20	25	27	35	35

容量

物品

  - 计算顺序：



0-1背包

- 滚动数组
  - 如果只用一个数组 f[V]，能不能保证第 i 次循环结束后 f[j] 中表示的就是我们定义的状态 f[i][j]?
  - f[i][j] 是由 f[i-1][j] 和 f[i-1][j-w[i]] 两个子问题递推过来
  - 只需要保证枚举顺序从 j = V → 0 即可
  - 滚动数组的关键点是：逆序!

    如果是顺序的话则会出现同一件物品选多次的情况。
  - 代码：

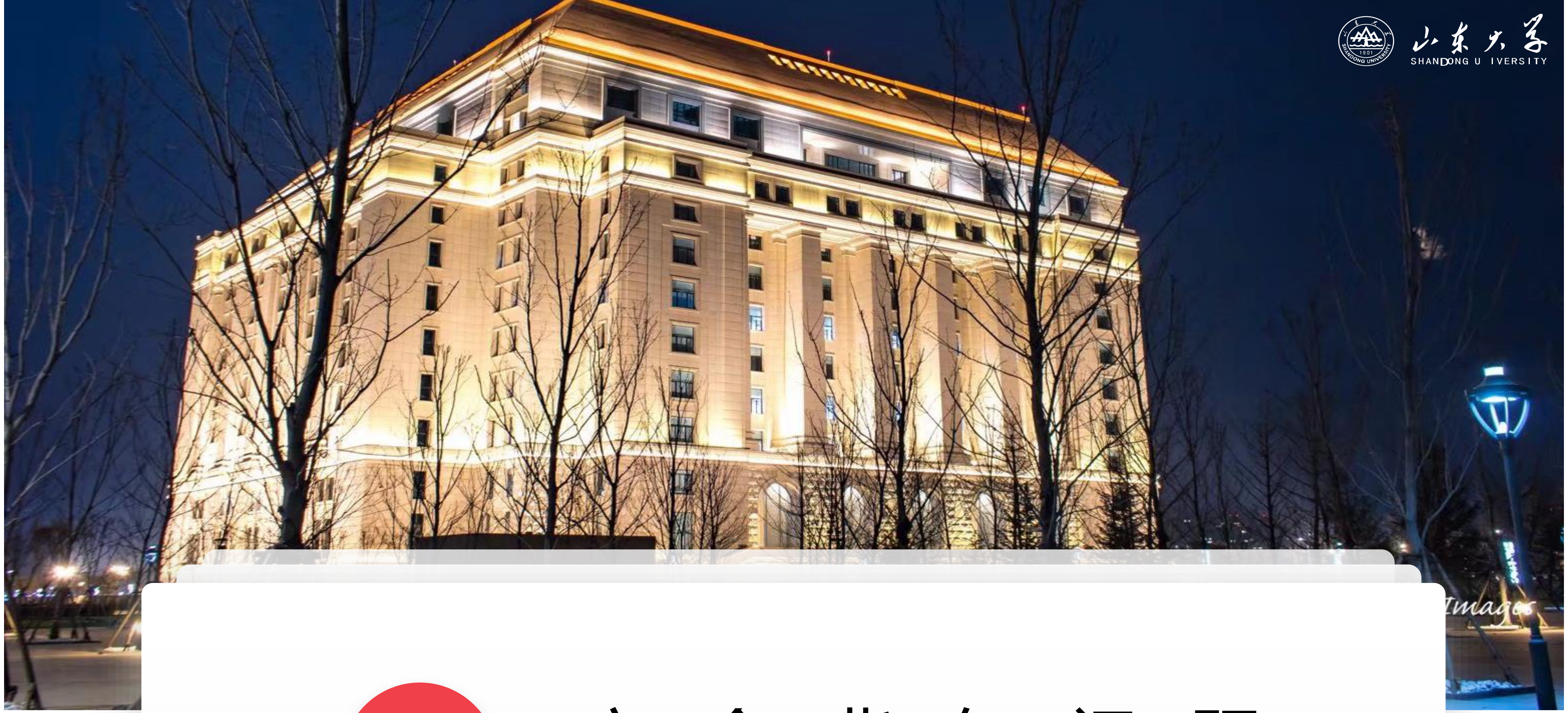
```
for (int i = 1; i <= N; ++i)
    for (int j = V; j >= 0; --j)
        f[j] = max(f[j], f[j - w[i]] + v[i]);
ans = f[V];
```

0-1背包

- 滚动数组
  - 这种对空间的优化通常被称作“滚动数组”
  - 在递推法中，如果计算顺序很特殊，而且计算新状态所用到的原状态不多，可以尝试用滚动数组减少内存开销
  - 一定的弊端：
    - 比如打印方案变得困难
    - 在 dp 过程结束后，只有最后一个阶段的状态值，而没有前面的值

0-1背包

- 小结
  - 0-1 背包问题是最基本的背包问题，它包含了背包问题中设计状态、状态转移方程的最基本思想
  - 并且，别的类型的背包问题往往也可以转换成 0-1 背包问题求解
  - 故一定要仔细体会上面基本思路的得出方法、状态转移方程的意义，以及滚动数组的思想



2 完全背包问题

Complete knapsack problem

完全背包

- 完全背包：
  - 有 N 种物品和一个容量为 V 的背包。 第 i 件物品体积是 W_i，价值是V_i。求解将哪些物品装入背包可使这些物品的体积总和不超过背包容量，且总价值最大 。
  - 特点：每种物品有无数件，可以选择 0 或多件
  - 样例

    3 10
<5,200>
<4,100>
<7,300>

    - Ans = 400 （第一个物品选两个）

完全背包

- 完全背包
  - 无限个物品?
  - 显然不是
  - 因为有容量 V 的限制，每种物品最多 V÷w[i] 个
  - 因此对于每种物品而言，与它相关的策略已经并非取、不取两种策略
  - 而是取 0 件、取 1 件、……、取 V÷w[i]件

完全背包

- 完全背包
  - 设计状态：依旧按照 0-1 背包时的思路，f[i][j] 表示前 i 种物品，放入一个容量为 j 的背包的最大价值
  - 状态转移方程：

$$f_{i,j} = \max\{f_{i-1,j},\ f_{i-1,j-k\times w_i} + k \times v_i \mid k = 0, \cdots, \lfloor \frac{V}{w_i} \rfloor\}$$

  - 时间复杂度?
    - O(N×V)?
    - 虽然也是有 N×V 个状态需要求解，但是求解单个状态 f[i][j] 的时间复杂度已不再是常数，而是变成了 O(V/w[i])
    - 总的复杂度是 —— $O(V \times \sum_{i=1}^{n} \frac{V}{w_i})$

完全背包

- 前面
  - 将 0-1 背包的基本思路进行改进，得到这样一个清晰的方法
  - 说明 0-1 背包问题的方程的确很重要，可以推其他类型的背包问题

  - 但是，当前时间复杂度并不理想，在 w[i] 较小的时候运算量会很大，可以对其进行优化。空间复杂度是 O(N×V)，同样可以进行改进

完全背包

- 一个非常容易想到的优化：
  - 假如现在有两件物品 i,j，满足：$W_i <= W_j$ 且 $V_i >= V_j$
  - “物 美 价 廉”：那就可以将物品 j 去掉

- 如果数据是随机生成的，那么这样优化会很好地减少运算量
- 但是这种优化并不能改善最坏情况下的时间复杂度 O，即面对极端数据的时候并不能更有效地降低计算量

- —— 还需要其他的技巧来进行优化

完全背包

- 回想： “滚动数组”写0-1背包时，关键点是什么？
  - 逆序！！
  - 那 01 背包为什么不能正序？？？

- 简洁高效的完全背包代码：

```
for (int i = 1; i <= N; ++i)
    for (int j = 0; j <= V; ++j)
        f[j] = max(f[j], f[j - w[i]] + v[i]);
ans = f[V];
```

完全背包

```
for (int i = 1; i <= N; ++i)
    for (int j = 0; j <= V; ++j)
        f[j] = max(f[j], f[j - w[i]] + v[i]);
ans = f[V];
```

- 为什么可以这样写?
  - 0-1背包时，因为要保证第 i 次循环中的状态 f[i][j] 是从状态 f[i-1][j-w[i]] 递推而来，为了保证“物品只选一次”而逆序。即“选入第 i 件物品”的策略时，依据的是一个没有选入第 i 件物品的子结果 f[i-1][j-w[i]]
  - 现在完全背包考虑“加选一个物品”时，正需要一个可能已选入第 i 种物品的子结果 f[i][j-w[i]]，所以必需采用正序循环。
- 时间复杂度优化为 $O(N \times V)$
- 空间复杂度优化为 $O(V)$

3 多重背包问题

Multiple knapsack problem

多重背包

- 多重背包：
  - 有 N 件物品和一个容量为 V 的背包。 第 i 件物品体积是 Wi，价值是Vi，有 Ci 件可用，求解将哪些物品装入背包可使这些物品的体积总和不超过背包容量，且总价值最大
  - 特点：每种物品有 有限件
  - 样例

    3 10

    <2,1,200>

    <4,2,160>

    <7,1,300>

    - Ans = 520 （第一个物品选 1 个，第二个物品选 2 个）

多重背包

- 多重背包
  - 思路和完全背包类似
  - 区别在于完全背包的物品有 $V \div W_i$ 个，此处有 C_i 个。
  - 设计状态：f[i][j] 表示前 i 种物品恰放入一个容量为 V 的背包的最大权值
  - 方程几乎完全相同：

$$f_{i,j} = \max\{f_{i-1,j},\ f_{i-1,j-k\times w_i} + k \times v_i \mid k = 0, \cdots, \boxed{C_i}\}$$

  - 复杂度是 $O(V \times \sum_{i=1}^{n} C_i)$

多重背包

- 多重背包
  - 能不能优化?
  - 可以看到，在极端情况下，多重背包的复杂度是与未优化的完全背包一样的
  - 但又有个数的限制，所以不能采用完全背包的优化方式将其优化到 $O(N\times V)$
  - 解决方法是 —— 二进制拆分
- 二进制拆分
  - 采用进制的思想将 C_i 进行二进制拆分，然后转换成 0-1背包问题

多重背包

- 二进制拆分
  - 怎样拆?
  - 我们的目的是什么?
  - 给定 C_i 个物品，可以从中选择 0~C_i 个物品
  - 如果不拆的话，相当于分成了 C_i 组物品，每组物品一个，通过对于每组进行选、不选的决策来确定最终选多少个（对 $\sum C_i$ 组物品做 01 背包）
  - C_i 越大 → 组数过多 → 影响效率
  - 我们的目标是让组数尽可能的少，又能够覆盖所有的决策

多重背包

- 二进制拆分
  - 首先考虑最简单的情况，假定 $C_i = 7 = (111)_2$
  - 那么可以将 7 简单地拆成 $(001)_2, (010)_2, (100)_2$
  - 即十进制的 $1\times v_i$, $2\times v_i$, $4\times v_i$
  - 通过对这 3 组进行选、不选的 0-1 背包的决策，就能涵盖所有 $0\sim C_i$ 中的决策。从而转换成了 0-1 背包问题

  - $7=(111)_2$ 很好拆，但对于 $13=(1101)_2$ 这样的怎么处理?
  - 简单地按照 $(1000)_2, (0100)_2, (0001)_2$ 这样处理?
  - 显然不是！因为这样组合不能够凑出选 $2=(0010)_2$ 个这样的决策来

多重背包

- 二进制拆分 $13=(1101)_2$
  - 我们首先拆出 $7=(111)_2 \rightarrow 1=(001)_2, 2=(010)_2, 4=(100)_2$
  - 这样已经可以表示 0~7 范围内的所有数
  - 剩下的不能表示的数共有 13–7=6 个，所以我们再将 13 拆出一个 6 来
  - 类似于偏移量的思路，通过控制 6 的选、不选，就能够表示所有的决策
  - 也就是（0~7）+ 0×6 或（0~7）+ 1×6
  - 因此 $13=(1101)_2 \rightarrow 1=(001)_2, 2=(010)_2, 4=(100)_2, 6=(110)_2$
- 注意：这里的理解与编码的思想有些许不同，可能同一个数字有不同的表示方式，比如 6 可以表示为 $2=(010)_2 + 4=(100)_2$，也可以表示为 $6(110)_2$，但这并不影响决策（我们只关心数量，而不是具体怎么选）

多重背包

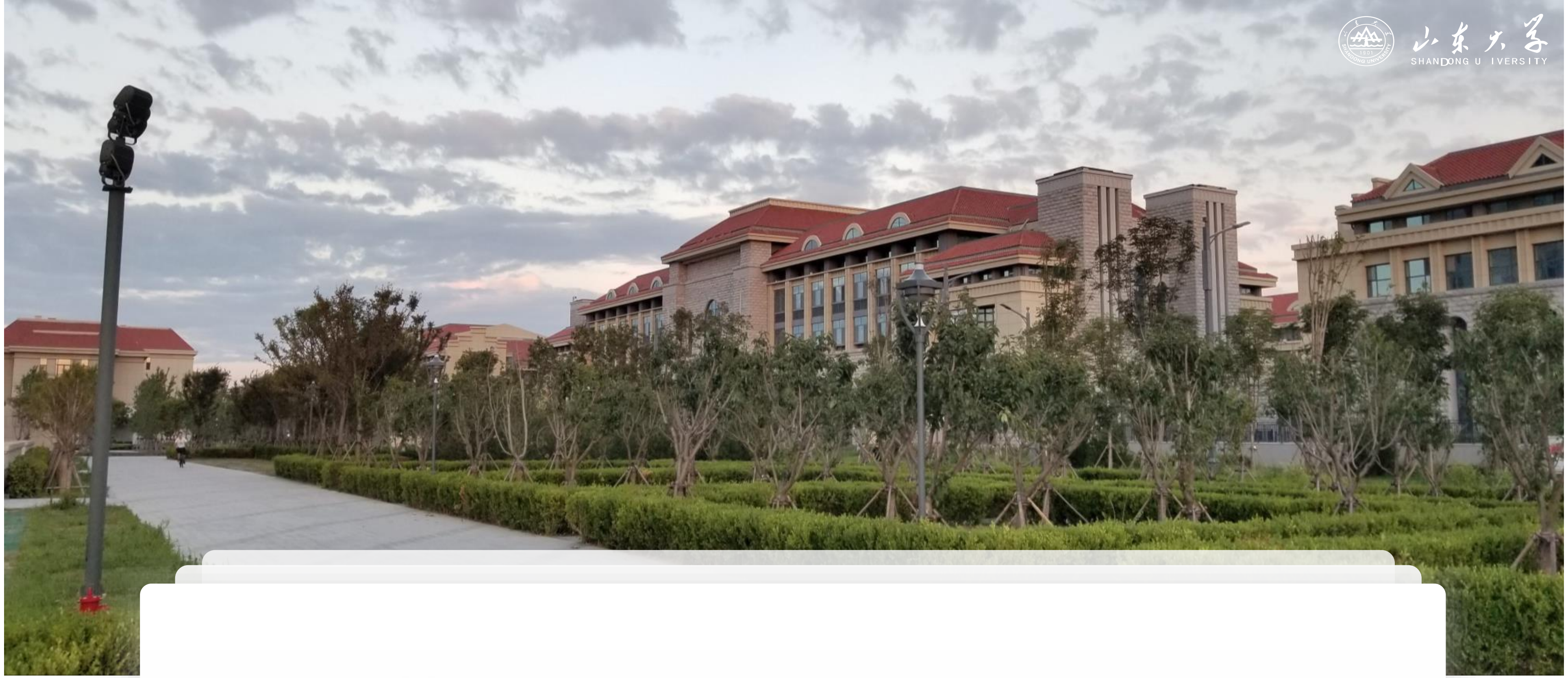
- 二进制拆分
    - 代码

```
int cnt = 0;
for (int i=1; i<=N; ++i)
{
    int t = C[i];
    for (int k=1; k<=t; k<<=1)
    {
        cnt++;
        vv[cnt] = k*v[i];
        ww[cnt] = k*w[i];
        t -= k;
    }
    if (t > 0)
    {
        cnt++;
        vv[cnt] = t*v[i];
        ww[cnt] = t*w[i];
    }
}
```

- 处理后直接对数组 vv 和 ww 进行 0-1 背包。注意 N 变为 cnt

多重背包

- 二进制拆分优化，时间复杂度
  - 这样第 i 种物品我们就分成了 $O(\log C_i)$ 种物品
  - 原问题的时间复杂度降为 $O(V\times\sum\log C_i)$ 的 01 背包问题
  - 已经有了很大的改进



4

分组背包问题

Grouped knapsack problem

分组背包

- 分组背包:
  - 有 N 件物品和一个容量为 V 的背包，第 i 种物品的体积是 W_i，价值 V_i，将所有的物品划分成若干组，每个组里面的物品最多选一件。求解将哪些物品装入背包可使这些物品的费用总和不超过背包容量，且价值总和最大。
  - 特点是：每种物品有 1 件，每组只能选 1 件。
  - 样例

    3 10
    <1,5,200>
    <1,3,100>
    <2,7,300>
    - Ans = 400 （只选第 2、3 个）

分组背包

- 设计状态
  - 首先对于每个组，有若干组决策：不取、取 1 号、……、取 s 号
  - 定义 f[k][j] 表示前 k 组中，容量不超过 j 的最大价值
  - 注意这里的枚举量变成了前 k 组而不是前 i 件

- 状态转移方程：

$$f_{k,j} = \max\{f_{k-1,j},\ f_{k-1,j-w_u} + v_u \mid u = 1, \cdots, s\}$$

分组背包

- 代码：
  - 注意代码中 w[k][u] 和 v[k][u] 分别表示第 k 组的第 u 件物品的属性值

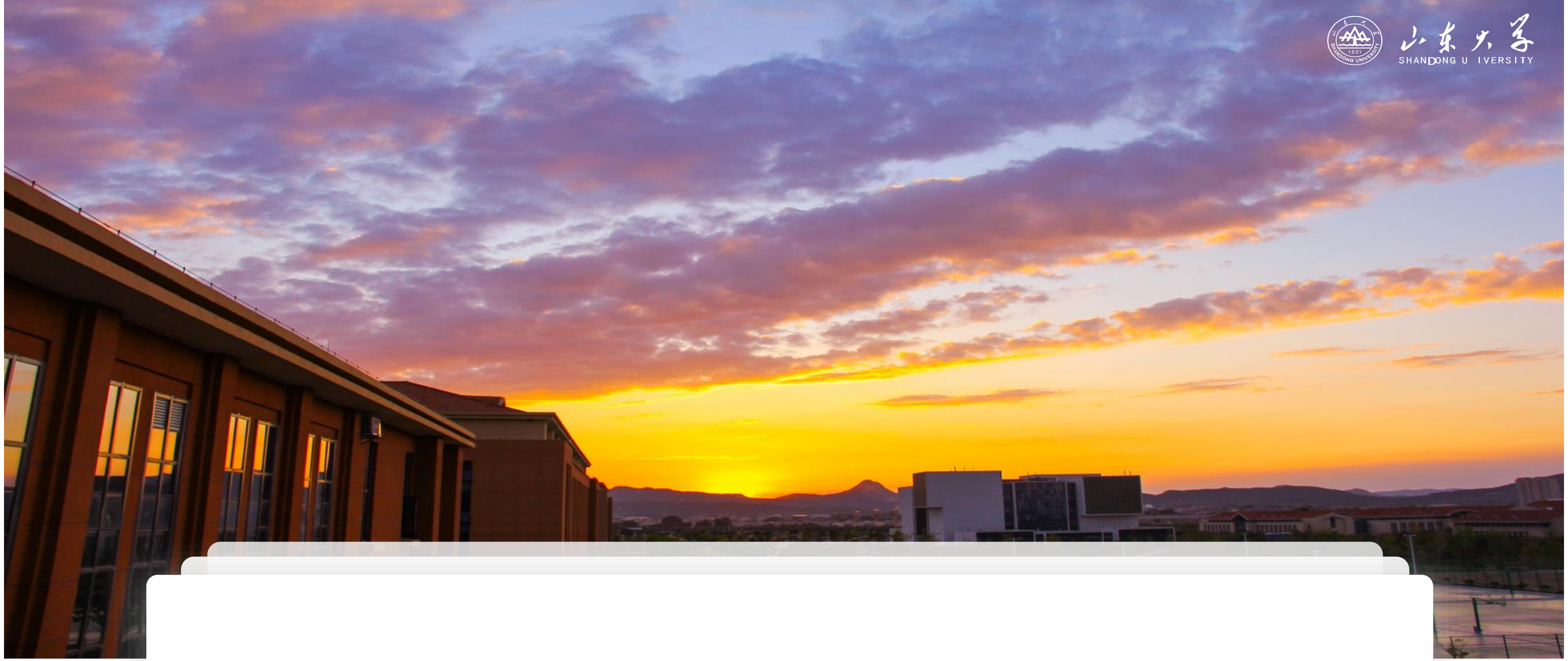
```
for (int k = 1; k ≤ ts; k++)                 // 循环每一组
  for (int i = m; i ≥ 0; i--)                // 循环背包容量
    for (int j = 1; j ≤ cnt[k]; j++)         // 循环该组的每一个物品
      if (i ≥ w[t[k][j]])
        dp[k][i] = max(dp[k][i],
                   dp[k-1][i - w[t[k][j]]] + c[t[k][j]]);  // 像0-1背包一样状态转移
```

分组背包

- 时间复杂度为 O(N×V)。
- 注意，虽然是三重循环，但是 k 和 u 的总枚举量也是N
- 同样也可以采用“滚动数组”的方式，优化空间复杂度

滚动数组：

```
for (int k = 1; k <= ts; k++)              // 循环每一组
  for (int i = m; i >= 0; i--)             // 循环背包容量
    for (int j = 1; j <= cnt[k]; j++)      // 循环该组的每一个物品
      if (i >= w[t[k][j]])
        dp[i] = max(dp[i],
                    dp[i - w[t[k][j]]] + c[t[k][j]]);  // 像0-1背包一样状态转移
```



5 超 大 背 包 问 题

Super knapsack problem

超大背包

- 超大背包：
  - 有 N 件物品和一个容量为 V 的背包。第 i 种物品的体积是 W_i，价值 V_i。求解将哪些物品装入背包可使这些物品的费用总和不超过背包容量，且价值总和最大。
  - 约束：$N <= 40, W_i <= 10^{15}, V_i <= 10^{15}$
  - 特点是：0-1 背包问题变种，体积巨大。与 DP 无关！
  - 样例

    3 10
    <5,200>
    <4,100>
    <7,300>
    - Ans = 300 （前两个或只选第三个）

超大背包

- 超大背包：
  - 要注意此时的 N 很小，但 V 很大
  - 如果依然考虑 0-1 背包的思路的话，无论是时间复杂度 $O(N \times V)$，还是空间复杂度 $O(V)$，都是无法承受的
  - 回归到最朴素的想法：
    - 枚举 N 的所有子集，在所有子集中选取体积合法，价值最大的子集
    - 时间复杂度 $O(2^N)$
    - 显然还需要进一步优化 $(N <= 40)$

超大背包

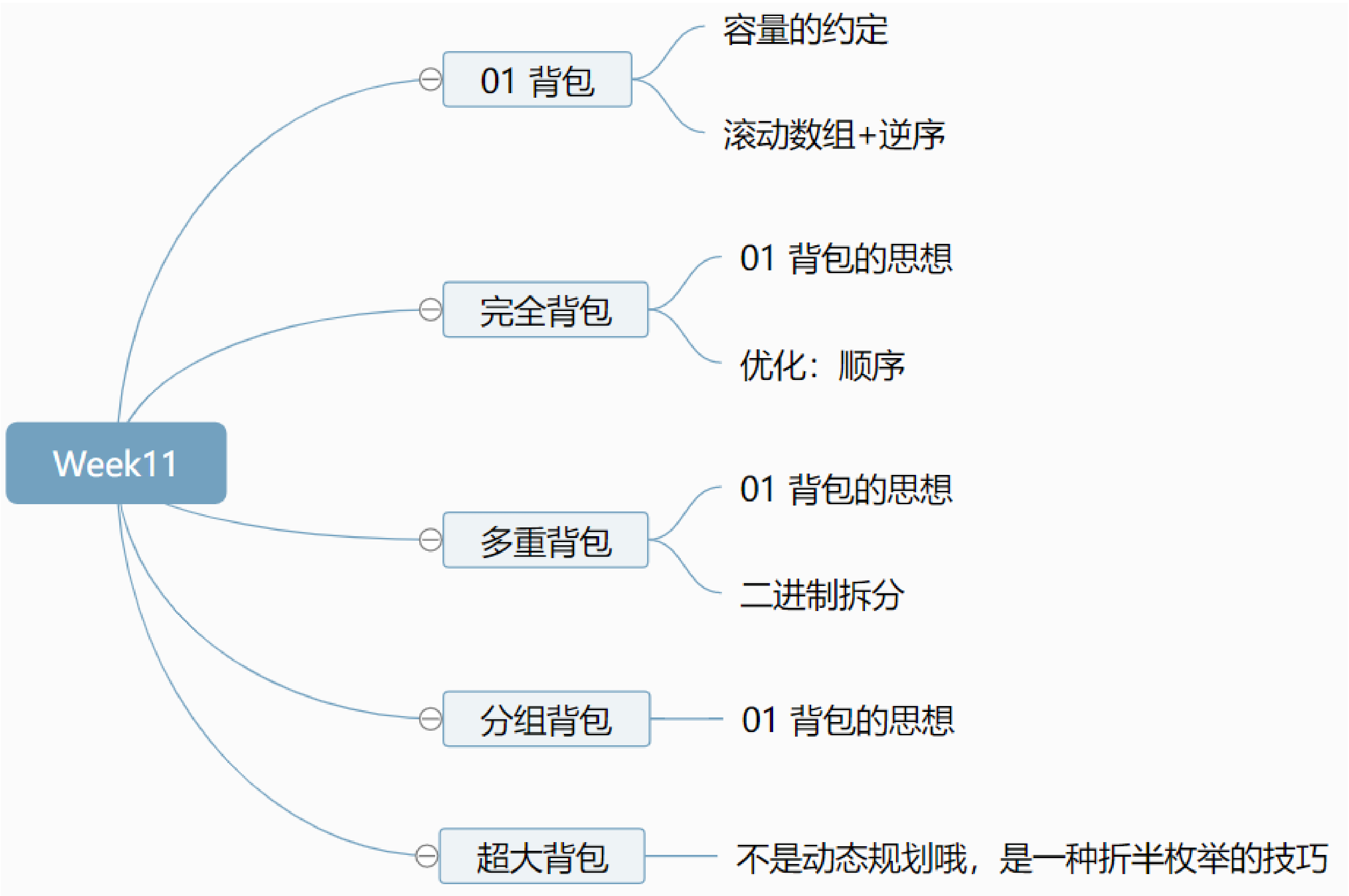
- 一种全新的思路：
  - 首先将物品分成两组，每组 N/2 个物品
  - 对这两组物品分别进行子集枚举，得到一系列的<w1,v1>二元组，代表该集合的总体积，该集合的总价值
  - 考虑单个组：
    - 将所有的二元组排序，按照怎样的顺序排？
    - 如果 a[i].w1 > a[j].w1，且 a[i].v1 < a[j].v1，那么 a[i] 就可以舍去，因为 a[j] 更 “物 美 价 廉”
    - 所以剩下的所有二元组，一定满足 a[i].w1 < a[j].w1 且 a[i].v1 < a[j].v1。这样就可以进行排序了

超大背包

- 一种全新的思路：
  - 对于排好序的两个组，假设分别为组 1 和组 2
  - 枚举组 1 的所有二元组，再于组 2 中进行二分查找，找体积小于 V–w1 所对应的 v1 的最大值，就可以找到最大值

- 计算时间复杂度：
  - 分组+枚举的总量为 $2 \times 2^{(N/2)} \times (N/2) = N \times 2^{(N/2)}$
  - 后续枚举+二分的总量为 $2^{(N/2)} \times \log (2^{(N/2)}) = (N/2)\times 2^{(N/2)}$
  - 因此时间复杂度为 $O(N\times 2^{(N/2)})$

总结


Week11
01 背包
容量的约定
滚动数组+逆序
完全背包
01 背包的思想
优化：顺序
多重背包
01 背包的思想
二进制拆分
分组背包
01 背包的思想
超大背包
不是动态规划哦，是一种折半枚举的技巧

感谢收听

Thank You For Your Listening

参考 2019 年程序设计思维与实践PPT、《背包九讲》