Časovo optimálne riadenie – Slabá verzia

6. prednáška

doc. Ing. Jana Paulusová, PhD.

predmet: **Číslicové riadenie**
(LS 2024/2025)

mail: *jana.paulusova@stuba.sk*

Ústav robotiky a kybernetiky

OBSAH 6. prednášky

- Faktorizácia polynómu.
    - Definícia a príklad faktorizácie polynómu.

- Stabilné časovo optimálne riadenie.
    - Časovo optimálne regulátory — ÚVOD do problematiky.
    - Stabilné časovo optimálne riadenie – **Slabá verzia** (1DoF, 2DoF).

- Overenie stabilného časovo optimálneho riadenia – **Slabej verzie** (1DoF, 2DoF).
- Zhodnotenie výsledkov simulácie.

DEFINÍCIA: Faktorizácia polynómu

Polynóm $A(z)$ je daný pomocou záporných mocnín z. Faktorizáciou polynómu rozumieme nájdenie nesúdelitelných polynómov $A^+(z)$ a $A^-(z)$ k polynómu $A(z)$ tak, že platí

$$A(z) = A^+(z)A^-(z) \tag{1}$$

kde $A^+(z)$ je stabilný polynóm najvyššieho stupňa, ktorý je súčasťou polynómu $A(z)$.

Faktorizácia je daná jednoznačne až na konštantu, lebo pre ľubovoľné číslo $\gamma \neq 0$ platí

$$A(z) = \left(\gamma A^+(z)\right)\left(\frac{1}{\gamma}A^-(z)\right) \tag{2}$$

PRÍKLAD: Faktorizácia polynómu

Faktorizujte polynóm $A(z) = 0{,}3z^{-1} - 1{,}35z^{-2} + 0{,}6z^{-3}$.

Riešenie:

Najprv upravíme polynóm tak, že vyjmeme jeho časť $(0{,}3z^{-1})$ pred zátvorku:
$A(z) = 0{,}3z^{-1}(1 - 4{,}5z^{-1} + 2z^{-2})$,

Potom rozložíme zvyšnú časť v zátvorke $(1 - 4{,}5z^{-1} + 2z^{-2})$ na súčin dvoch polynómov (na základe koreňov polynómu: $z_1 = 4,\ z_2 = 0{,}5$), takže $A(z) = 0{,}3z^{-1}(1 - 4z^{-1})(1 - 0{,}5z^{-1})$.

Na určenie stability jednotlivých častí polynómu $A(z)$ (z_i sú jeho korene) platí:

- pre stabilnú časť $(A^+(z))$ polynómu $A(z)$ platí $|\mathbf{z_i}| < \mathbf{1}$,
  $A^+(z) = 1 - 0{,}5z^{-1}$
- pre nestabilnú časť $(A^-(z))$ polynómu $A(z)$ platí $|\mathbf{z_i}| \geq \mathbf{1}$,
  $A^-(z) = 0{,}3z^{-1}(1 - 4z^{-1}) = 0{,}3z^{-1} - 1{,}2z^{-2}$

Podľa **(2)** potom platí (pričom je zrejmé, že $\gamma = 0.3$)

$$A(z) = \left(0{,}3(1 - 0{,}5z^{-1})\right)\left(\frac{1}{0{,}3}(0{,}3z^{-1} - 1{,}2z^{-2})\right) \tag{3}$$

Stabilné časovo optimálne riadenie

Riadenie, pri ktorom dosiahneme nulovú trvalú regulačnú odchýlku v konečnom čase, ale oproti klasickému prístupu požadujeme naviac minimalizáciu tohto času. Rozlišujeme takéto prístupy.

- Návrh všeobecného diskrétneho regulátora, umožňujúceho dosiahnuť stabilné časovo optimálne riadenie – **SLABÁ VERZIA**. Návrh regulátora vychádza z diskrétneho vyjadrenia spojitého procesu pri danej známej postupnosti referenčnej veličiny $w(k)$. Úlohou je navrhnúť taký regulátor $G_R(z)$, aby uzavretý spätnoväzbový obvod bol stabilný, riadiaci zásah $u(k)$ bol stabilná postupnosť a regulačná odchýlka $e(k)$ bola konečná postupnosť trvale nulová od $k \geq k_{MIN}$.

- Návrh všeobecného diskrétneho regulátora umožňujúceho dosiahnuť stabilné konečné časovo optimálne riadenie – **SILNÁ VERZIA** (viac v 7. predn.). Návrh regulátora vychádza z diskrétneho opisu spojitého procesu, pre danú žiadanú postupnosť referenčnej veličiny $w(k)$. Úlohou je navrhnúť taký regulátor, aby postupnosť riadiaceho zásahu $u(k)$ bola konečná a regulačná odchýlka $e(k)$ bola taktiež konečná postupnosť trvale nulová od $k \geq k_{MIN}$.

Časovo optimálne regulátory (1DoF) – ÚVOD

Simulačná schéma (vytvorená v prostredí *MATLAB-Simulink*) pre diskrétny regulačný obvod je uvedená v 3. prednáške (str. 12), kde $G_R(z)$ je prenosová funkcia diskrétneho regulátora vyjadrená pomocou kladných mocnín z (pre $G_R(z)$ so zápornými mocninami z použijeme blok *Discrete Filter* namiesto bloku *Discrete Transfer Fcn*), $G(s)$ je prenosová funkcia spojitého riadeného systému, do bloku *Transport Delay* zadávame jeho dopravné oneskorenie.

Pre riadenie nelineárneho modelu CSTR využijeme aj znalosti z 1. prednášky – str. 24.

Diskrétny regulačný obvod je (asymptoticky) STABILNÝ, ak **všetky póly** URO sú umiestnené **vo vnútri jednotkovej kružnice** (korene charakteristického polynómu ležia vo vnútri jednotkovej kružnice $|\mathbf{z_i}| < \mathbf{1}$).

Metóda vychádza z vonkajšieho opisu riadeného systému, vyjadreného pomocou diskrétnej prenosovej funkcie. Ak je proces opísaný spojitou prenosovou funkciou $G(s)$, treba ho najskôr prepočítať na diskrétnu prenosovú funkciu $G(z)$ s vhodnou periódou vzorkovania T. Hľadáme teda koeficienty diskrétneho regulátora (obsahujúceho integrátor) na vstupno-výstupný opis systému.

Časovo optimálne regulátory (1DoF) – ÚVOD

Navrhujeme spätnoväzbový regulátor s jedným stupňom voľnosti (1DoF) pre diskrétny regulačný obvod tak, aby bola regulačná odchýlka nulová za konečný počet krokov (minimálny). Na vstupe do URO je referenčný signál, pre ktorý platí:

$$W(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^+(z)f^-(z)}{g(z)}. \tag{4}$$

Predpokladáme referenčný signál rovný skokovej zmene, takže

$$W(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{5}$$

teda $f(z) = 1,\ f^+(z) = 1,\ f^-(z) = 1$ a $g(z) = 1 - z^{-1}$.

Spojitý riadený systém $G(s)$ prepočítame na diskrétnu prenosovú funkciu s tvarovačom 0. rádu (s vhodnou periódou vzorkovania – pomocou príkazu *c2d* v MATLABe).

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}. \tag{6}$$

(Predpokladáme, že polynómy $A(z)$ a $B(z)$ sú nesúdeliteľné, tak isto $\gcd\big(f(z), g(z)\big) = 1$.)

Keďže polynóm $g(z)$ v **(5)** je nestabilný, musíme ho nejakým spôsobom vykompenzovať v URO. Nech $D(z)$ je najväčší spoločný deliteľ polynómov $A(z)$ a $g(z)$, takže:

$$D(z) = \gcd\big(A(z), g(z)\big); \quad A(z) = A_0(z)D(z); \quad g(z) = g_0(z)D(z). \tag{7}$$

Na základe **(7)** zapíšeme prenosovú funkciu **(6)** ako

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A_0^+(z)A_0^-(z)D(z)}. \tag{8}$$

Hľadáme prenosovú funkciu regulátora (so zápornými mocninami z)

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}. \tag{9}$$

Pre charakteristickú rovnicu URO platí:

$$\begin{aligned} A(z)P(z) + B(z)Q(z) &= A_{zel}(z), \\ A^+(z)A^-(z)P(z) + B^+(z)B^-(z)Q(z) &= A_{zel}(z). \end{aligned} \tag{10}$$

kde polynóm $A_{zel}(z)$ je želaný polynóm, ktorý musí byť stabilný.

Rovnica **(10)** je diofantická rovnica, kde hľadáme neznáme polynómy regulátora $P(z)$ a $Q(z)$. Hľadáme minimálne stupne neznámych polynómov, aby sme navrhli čo najjednoduchší typ regulátora.

Na základe znalosti blokovej algebry s využitím vzťahov **(4)** a **(10)** pre regulačnú odchýlku $E(z)$ a akčný zásah $U(z)$ platí:

$$E(z) = \frac{A(z)P(z)f(z)}{A_{zel}(z)g(z)}, \quad U(z) = \frac{A(z)Q(z)f(z)}{A_{zel}(z)g(z)}. \tag{11}$$

Rovnica **(10)** bude na základe **(7)**:

$$\begin{aligned} A_0(z)D(z)P(z) + B(z)Q(z) &= A_{zel}(z), \\ A_0^+(z)A_0^-(z)\frac{g(z)}{g_0(z)}P(z) + B^+(z)B^-(z)Q(z) &= A_{zel}(z). \end{aligned} \tag{12}$$

Polynómy $E(z)$ a $U(z)$ majú byť stabilné, preto chceme, aby bolo $g_0(z)$ stabilné a $D(z)$ by malo obsahovať nestabilné korene, čiže po dosadení **(7)** do **(11)** dostaneme

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{A_0(z)P(z)f(z)}{A_{zel}(z)g_0(z)} = \frac{A_0^+(z)A_0^-(z)P(z)f^+(z)f^-(z)}{A_{zel}(z)g_0(z)}, \\ U(z) &= \frac{A_0(z)Q(z)f(z)}{A_{zel}(z)g_0(z)} = \frac{A_0^+(z)A_0^-(z)Q(z)f^+(z)f^-(z)}{A_{zel}(z)g_0(z)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Počet krokov riadenia je

$$k_{MIN} = \deg(E(z)) + 1 \tag{14}$$

Pri časovo optimálnom riadení je dôležitá voľba želaného polynómu $A_{zel}(z)$.

Voľba želaného polynómu:

$$A_{zel}(z) = A_0^+(z)B^+(z)f^+(z).$$

URO vnútime stabilné póly a stabilné nuly riadeného systému. URO bude stabilný, polynóm $E(z)$ bude konečný a stabilný, polynóm $U(z)$ nebude konečný, ale bude asymptoticky stabilný.
Ide o tzv. **SLABÚ VERZIU časovo optimálneho riadenia** (minimálny počet krokov riadenia).

Ak dosadíme $A_{zel}(z) = A_0^+(z)B^+(z)f^+(z)$ do **(10)**, tak po menšej úprave získame CHRURO (diofantickú rovnicu)

$$A_0^-(z)g(z)\frac{P(z)}{B^+(z)g_0(z)} + B^-(z)\frac{Q(z)}{A_0^+(z)} = f^+(z) \tag{15}$$

Rovnicu **(15)** upravíme

$$A_0^-(z)g(z)P_0(z) + B^-(z)Q_0(z) = f^+(z) \tag{16}$$

kde

$$P(z) = B^+(z)g_0(z)P_0(z); \quad Q(z) = A_0^+(z)Q_0(z). \tag{17}$$

Časovo optimálneho riadenia (1DoF) – SLABÁ VERZIA (2/2)

Rovnicu $A_{zel}(z) = A_0^+(z)B^+(z)f^+(z)$ dosadíme aj do **(13)**, pre polynómy $E(z)$ a $U(z)$ dostaneme:

$$E(z) = A_0^-(z)P_0(z)f^-(z), \quad U(z) = \frac{A_0(z)Q_0(z)f^-(z)}{g_0(z)B^+(z)}. \tag{18}$$

Pre stupeň polynómu $E(z)$ platí:

$$\deg(E(z)) = \deg(A_0^-(z)) + \deg(P_0(z)) + \deg(f^-(z)) \tag{19}$$

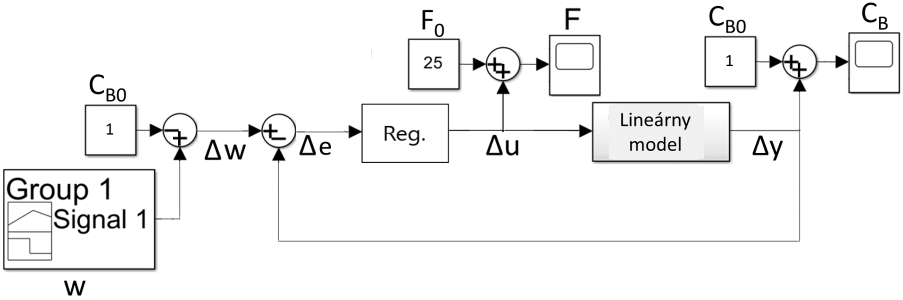
Ak je referenčná veličina rovná skokovej veličine ($f(z) = 1$), pre stupeň polynómu $E(z)$ **(19)** platí:

$$\deg(E(z)) = \deg(A_0^-(z)) + \deg(B^-(z)) - 1. \tag{20}$$

Z porovnania vzťahov **(13)** a **(18)** je zrejmé, že sme zredukovali stupeň polynómu $E(z)$ o počet stabilných núl riadeného systému a pre ľubovoľné $g_0(z)$ bude $E(z)$ konečná postupnosť (*finite time tracking error*). Stupeň polynómu $E(z)$ sme znížili aj napriek tomu, že v tomto prípade nebude polynóm $U(z)$ konečná postupnosť, ale bude stabilná. Slabá verzia garantuje nulovú regulačnú odchýlku za minimálny počet krokov **(14)**, ale iba v diskrétnych okamihoch. Mimo nich je regulačná odchýlka nenulová (obvykle rýchlo konverguje k nule). Polynóm $U(z)$ je pomer dvoch polynómov, v origináli nekonečná postupnosť, ktorá signalizuje neustále generovanie akčných zásahov, teda pokračovanie regulácie i po čase dosiahnutia diskrétneho ustálenia.

Navrhnite časovo optimálne riadenie pre nelineárny model chemického reaktora (1. Predn. – **(3)**), ak je žiadaná hodnota $w = C_{B_{zel}}$ na začiatku rovná $C_{B0} = 1$ [mol l^{-1}] a v čase 0,1 h sa skokovo zmení na hodnotu $w = 1{,}0016$ [mol l^{-1}] $\left(\text{teda } W(z) = \frac{1{,}0016}{1-z^{-1}}\right)$.

Určte postupnosť riadiacich zásahov $U(z)$, regulačnú odchýlku $E(z)$ a výstupnú regulovanú veličinu $Y(z)$ tak, aby trvalá regulačná odchýlka bola nulová v okamihoch vzorkovania pre $k \geq k_{MIN}$ (konečný polynóm) a riadiaca postupnosť bola stabilná. *(SLABÁ VERZIA)*



Použijeme lineárny model chemického reaktora – spojitú prenosovú funkciu (1. Predn. – **(5)**), ktorá opisuje správanie sa riadeného systému v ustálených stavoch.

Zo zadania príkladu vieme, že žiadaná hodnota $w = C_{B_{zel}}$ je na začiatku rovná $C_{B0} = 1$ [mol l^{-1}] a v čase 0,1 h sa skokovo zmení na hodnotu $w = 1{,}0016$ [mol l^{-1}]. Vstupom do regulačného obvodu je veličina $\Delta w = w - C_{B0} = C_{B_{zel}} - 1$, teda Δw je na začiatku rovná 0 [mol l^{-1}] a v čase 0,1 h sa skokovo zmení na hodnotu 0,0016 [mol l^{-1}]. Platí teda:

$$\Delta W(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{0{,}0016}{1 - z^{-1}} \tag{21}$$

Tu môžeme využiť výsledok z PRÍKLADU v prednáške č. 2 – vzťah **(35)**:
polynóm čitateľa $B(z) = -0{,}0006z^{-1} + 0{,}004z^{-2}$ a menovateľa $A(z) = 1 - 1{,}071z^{-1} + 0{,}2865z^{-2}$.

Pre polynómy potom platí:

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 - 1{,}071z^{-1} + 0{,}2865z^{-2} = (1 - 0{,}5353z^{-1})^2 = A^+(z), \quad A^-(z) = 1, \\ B(z) &= -0{,}0006z^{-1} + 0{,}004z^{-2} = -0{,}0006z^{-1}(1 - 6{,}6667z^{-1}) = B^-(z), \quad B^+(z) = 1, \\ g(z) &= 1 - z^{-1}, \quad f(z) = 0{,}0016 = f^+(z), \quad f^-(z) = 1. \end{aligned} \tag{22}$$

$$
\begin{aligned}
D(z) &= \gcd\big(A(z), g(z)\big) = \gcd\big((1-1{,}071z^{-1}+0{,}2865z^{-2}), (1-z^{-1})\big) = 1,\\
A_0(z) &= 1-1{,}071z^{-1}+0{,}2865z^{-2} = (1-0{,}5353z^{-1})^2 = A_0^+(z),\ A_0^-(z) = 1,\\
g_0(z) &= 1-z^{-1}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Polynómy **(22)** a **(23)** dosadíme do charakteristickej rovnice (diofantickej rovnice) **(16)**

$$
(1-z^{-1})P_0(z) + (-0{,}0006z^{-1}+0{,}004z^{-2})Q_0(z) = 0{,}0016,
\tag{24}
$$

kde platia vzťahy **(17)**. Skontrolujeme podmienku riešiteľnosti diofantickej rovnice. Najväčší spoločný deliteľ delí polynóm na pravej strane rovnice ($\gcd\big((1-z^{-1}), (-0{,}0006z^{-1}+0{,}004z^{-2})\big) = 1$). Diofantická rovnica má teda riešenie. Ďalej zistíme minimálne stupne neznámych polynómov $P_0(z)$ a $Q_0(z)$:

$$
\begin{aligned}
&\deg(1-z^{-1}) + \deg(-0{,}0006z^{-1}+0{,}004z^{-2}) = 1+2 = 3 > \deg(0{,}0016) = 0,\\
&\deg(P_0(z)) = \deg(-0{,}0006z^{-1}+0{,}004z^{-2}) - 1 = 1 \quad \Rightarrow P_0(z) = p_{0_0} + p_{0_1}z^{-1},\\
&\deg(Q_0(z)) = \deg(1-z^{-1}) - 1 = 0 \quad \Rightarrow Q_0(z) = q_{0_0}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Po určení stupňov polynómov $P_0(z)$ a $Q_0(z)$ treba vypočítať ich koeficienty. Dosadíme ich teda do diofantickej rovnice a ďalším porovnaním jej pravej a ľavej strany pri rovnakých mocninách z dostaneme sústavu lineárnych algebraických rovníc.

Ich riešením získame koeficienty polynómov $p_{0_0} = 0{,}0016$, $p_{0_1} = 0{,}0018746$, $q_{0_0} = 0{,}463$.
Polynómy $P(z)$ a $Q(z)$ sú

$$\begin{aligned} P(z) &= (0{,}0016 + 0{,}0018746z^{-1})(1 - z^{-1}) = 0{,}0016 + 0{,}0002746z^{-1} - 0{,}001875z^{-2}, \\ Q(z) &= 0{,}463(1 - 1{,}071z^{-1} + 0{,}2865z^{-2}) = 0{,}463 - 0{,}4957z^{-1} + 0{,}1327z^{-2} \end{aligned} \tag{26}$$

Dosadením polynómov **(26)** do **(9)** získame prenosovú funkciu regulátora

$$G_R(z) = \frac{0{,}463 - 0{,}4957z^{-1} + 0{,}1327z^{-2}}{0{,}0016 + 0{,}0002746z^{-1} - 0{,}001875z^{-2}} = \frac{\Delta U(z)}{\Delta E(z)} \tag{27}$$

Pre riadiaci zásah $u = F$ a regulačnú odchýlku podľa **(18)** platí

$$\begin{aligned} U(z) &= \Delta U(z) + (F_0 + F_0 z^{-1} + \ldots) = \\ &= \frac{0{,}463 - 0{,}4957z^{-1} + 0{,}1327z^{-2}}{1 - z^{-1}} + (25 + 25z^{-1} + \ldots) = \\ &= (0{,}463 - 0{,}0326522z^{-1} + 0{,}1z^{-2} + 0{,}1z^{-3} + \ldots) + (25 + 25z^{-1} + \ldots) \\ U(z) &= 25{,}463 + 24{,}9673z^{-1} + 25{,}1z^{-2} + 25{,}1z^{-3} + \ldots, \\ \Delta E(z) &= 0{,}0016 + 0{,}0002746z^{-1} - 0{,}001875z^{-2} = E(z). \end{aligned} \tag{28}$$

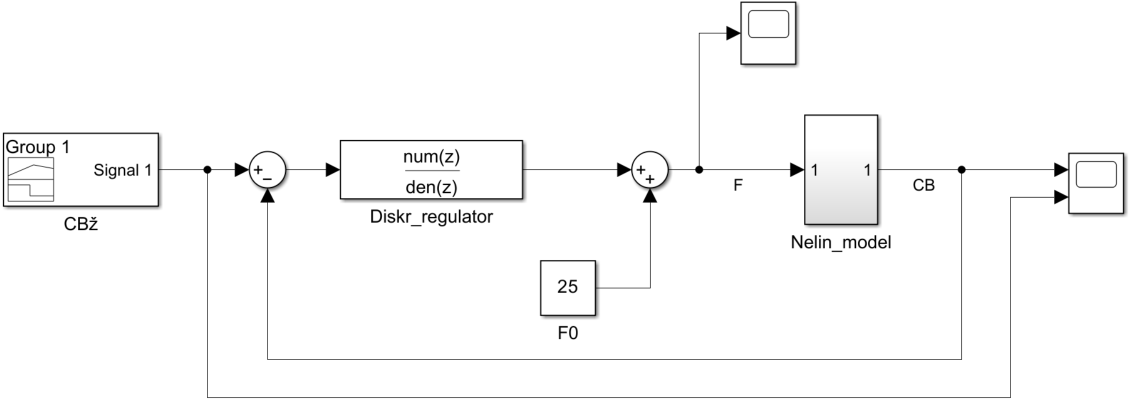
Počet krokov regulácie podľa **(20)** je

$$k_{MIN} = 3 \tag{29}$$

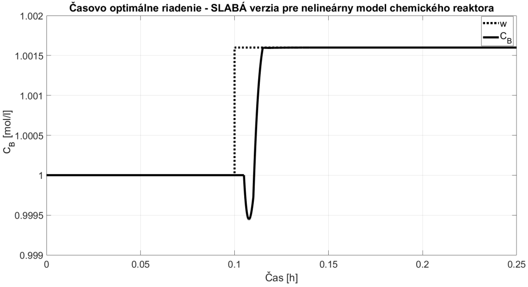
Výstupná regulovaná veličina $y = C_B$:

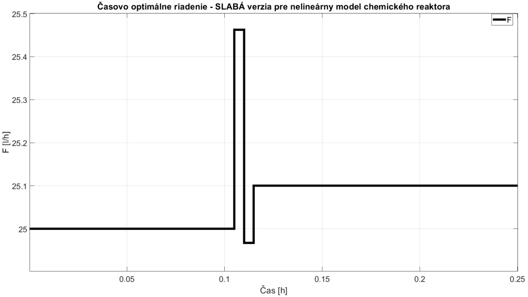
$$\begin{aligned}
\Delta Y(z) &= \Delta W(z) - \Delta E(z) = \frac{0{,}0016}{1 - z^{-1}} - (0{,}0016 + 0{,}0002746 z^{-1} - 0{,}001875 z^{-2}) = \\
&= (0{,}0016 + 0{,}0016 z^{-1} + 0{,}0016 z^{-2} + \ldots) - (0{,}0016 + 0{,}0002746 z^{-1} - 0{,}001875 z^{-2}) \\
\Delta Y(z) &= 0{,}0013254 z^{-1} + 0{,}0035 z^{-2} + 0{,}0016 z^{-3} + 0{,}0016 z^{-4} + \ldots, \\
Y(z) &= \Delta Y(z) + (C_{B0} + C_{B0} z^{-1} + \ldots) = 0{,}0013 z^{-1} + 0{,}003475 z^{-2} + (1 + z^{-1} + \ldots) \\
Y(z) &= 1 + 1{,}0013 z^{-1} + 1{,}003475 z^{-2} + 1{,}0016 z^{-3} + 1{,}0016 z^{-4} + \ldots,
\end{aligned} \tag{30}$$

Výstupná veličina dosiahne žiadanú hodnotu za tri kroky.

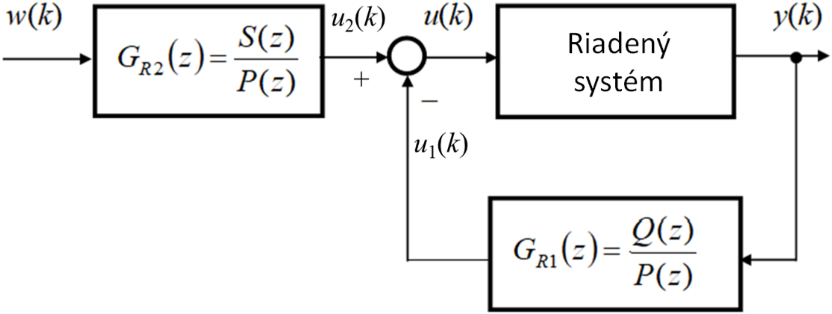

Group 1
Signal 1
CBž
+
_
num(z)
den(z)
Diskr_regulator
+
+
25
F0
F
1
1
Nelin_model
CB

Výsledky simulácie pri návrhu časovo optimálneho riadenia nelineárneho modelu chemického reaktora (1DoF – SLABÁ verzia). Žiadaná hodnota $w = C_{B_{zel}}$ je na začiatku rovná $C_{B0} = 1$ [mol l^{-1}] a v čase 0,1 h sa skokovo zmení na hodnotu $w = 1{,}0016$ [mol l^{-1}].





Pri riadení použijeme takúto schému.



Hľadáme teda dve prenosové funkcie regulátorov:

$$G_{R1}(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad G_{R2}(z) = \frac{S(z)}{P(z)}. \tag{31}$$

Aby sme získali prenosové funkcie regulátorov, riešime teda dve diofantické rovnice (odvodené v 5. predn. vzťah **(25)**):

$$\begin{aligned} A(z)P(z)+B(z)Q(z) &= A_{zel}(z), \\ g(z)O(z)+B(z)S(z) &= A_{zel}(z). \end{aligned} \tag{32}$$

Ak potrebujeme zabezpečiť integračnú činnosť regulátora v spätnej väzbe, riešime upravené diofantické rovnice:

$$\begin{aligned} A(z)(1-z^{-1})P(z)+B(z)Q(z) &= A_{zel}(z), \\ g(z)O(z)+B(z)S(z) &= A_{zel}(z). \end{aligned} \tag{33}$$

Keďže $g(z) = 1-z^{-1}$ (pri skokovej zmene referenčnej veličiny), ak položíme $z = 1$ (získame najjednoduchšiu štruktúru regulátora), z druhej diofantickej rovnice **(26)** dostaneme

$$S(z) = s_0 = \frac{A_{zel}(1)}{B(1)}. \tag{34}$$

Časovo optimálneho riadenia (2DoF) – SLABÁ VERZIA

Voľba želaného polynómu:

$$A_{zel}(z) = A_0^+(z)B^+(z)f^+(z).$$

Dosadíme ho do prvej diofantickej rovnici **(32)**, pričom využijeme postup zo str. 11 a získame regulátor $G_R = \dfrac{Q(z)}{P(z)} = G_{R1}(z)$ (schéma str. 20).

Dosadením želaného polynómu do druhej diofantickej rovnice **(32)** a s využitím vzťahu **(34)** pričom platí:

$$S(z) = s_0 = \frac{A_0^+(1)B^+(1)f^+(1)}{B^+(1)B^-(1)} = \frac{A_0^+(1)f^+(1)}{B^-(1)}. \tag{35}$$

Získame regulátor $G_{R2}(z) = \dfrac{S(z)}{P(z)}$ (schéma str. 20).

Pozn. Môžeme využiť vzťahy z 5. prednášky pre $E(z)$ **(22)** resp. **(24)**.

Navrhnite stabilné časovo optimálne riadenie pri použití dvoch regulátorov (dopredného a spätnoväzbového) pre nelineárny model chemického reaktora, ak je žiadaná hodnota $w = C_{B_{zel}}$ na začiatku rovná $C_{B0} = 1$ [mol l^{-1}] a v čase 0,1 h sa skokovo zmení na hodnotu $w = 1{,}0016$ [mol l^{-1}] $\left(\text{teda } W(z) = \dfrac{1{,}0016}{1 - z^{-1}}\right)$. Určte prenosové funkcie oboch regulátorov.

***Riešenie* (2DoF):**

Je zrejmé, že riešenie sa dá zjednodušiť. Pre prenosovú funkciu spätnoväzbového regulátora využijeme výsledky z PRÍKLADU pre 1DoF:

$$G_R(z) = G_{R1}(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{0{,}463 - 0{,}4957z^{-1} + 0{,}1327z^{-2}}{0{,}0016 + 0{,}0002746z^{-1} - 0{,}001875z^{-2}} = \frac{\Delta U_1(z)}{\Delta Y(z)}$$

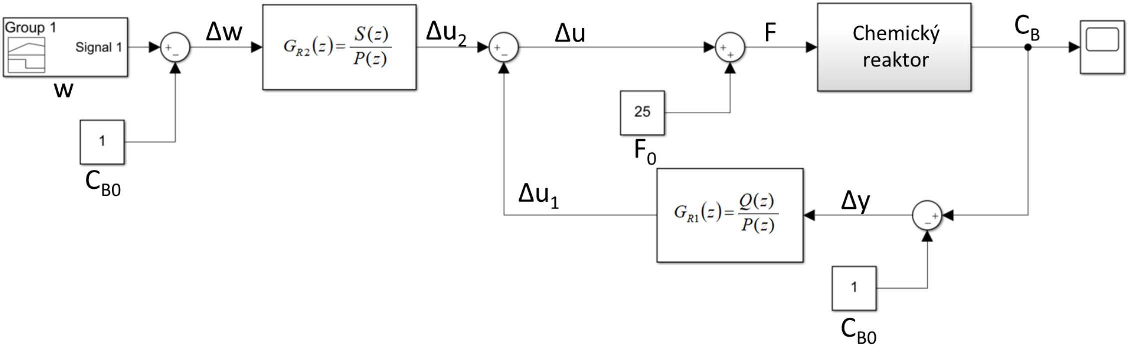
podľa **(27)** a polynóm $S(z)$ vypočítame ako

$$S(z) = \frac{A_{zel}(1)}{B(1)} = \frac{A_0^+(1)f^+(1)}{B^-(1)} = 0{,}1,$$

(kde označenie 1 znamená číselná hodnota polynómu, ak sa dosadí $z = 1$). Potom získame prenosovú funkciu dopredného regulátora

$$G_{R2}(z) = \frac{S(z)}{P(z)} = \frac{0{,}1}{0{,}0016 + 0{,}0002746z^{-1} - 0{,}001875z^{-2}} = \frac{\Delta U_2(z)}{\Delta W(z)}.$$

Pri riadení použijeme takúto schému.



Výsledky simulácie riadenia nelineárneho modelu chemického reaktora navrhnutého metódou PP (2DoF s integrátorom). Žiadaná hodnota $w = C_{B_{zel}}$ je na začiatku rovná $C_{B0} = 1$ [mol l^{-1}] a v čase 0,1 h sa skokovo zmení na hodnotu $w = 1{,}0016$ [mol l^{-1}].