Задача 8. Графы

В рамках данной задачи требуется разработать приложение, которое будет решать задачу на графах / с использованием графов. В связи с этим необходимо организовать пользовательский интерфейс, позволяющий пользователю удобно вводить графы и выводить графы на экран.

Пользовательский интерфейс в этой задаче является логическим продолжением предыдущей. В рамках текущей задачи предполагается разработка интерактивного пользовательского интерфейса, позволяющего задавать граф не только с использованием матриц смежности или языка dot, но и при помощи мыши.

Результат работы отобразить графически (подсветить интересующие узлы/рёбра/пути).

Разработать для своей задачи набор наглядных примеров.

Варианты:

Вариант 1. Почти самый короткий путь.

Задано N городов с номерами от 1 до N и сеть из M дорог с односторонним движением между ними. Каждая дорога задается тройкой (i, j, k), где i - номер города, в котором дорога начинается, j -номер города, в котором дорога заканчивается, а k - ее длина (число k - натуральное). Дороги друг с другом могут пересекаться только в концевых городах. Все пути между двумя указанными городами A и B можно упорядочить в список по неубыванию их длин (если есть несколько путей одинаковой длины, то выбираем один из них). Необходимо найти один из путей, который может быть вторым в списке.

Вывести его длину L и города, через которые он проходит.

Вариант 2. M проводников.

Имеется N точек и M проводков. Проводком можно соединить некоторую пару различных точек, причем пара может быть соединена не более чем одним проводком. Все проводки должны быть использованы.

Пусть D_i - количество проводков, которые будут соединены с точкой с номером i, i=[1..N].

Необходимо соединить N точек с помощью M проводков таким образом, чтобы сумма $S=D_1*D_1 + D_2*D_2 + ... + D_n*D_n$ была максимальной.

Вывести величины D_i в неубывающем порядке и список соединений.

Вариант 3. Место встречи.

Вводится N - количество домов и K - количество дорог. Дома пронумерованы от 1 до N. Каждая дорога определяется тройкой чисел - двумя номерами домов - концов дороги и длиной дороги. В каждом доме живет по одному человеку. Найти точку - место встречи всех людей, от которой суммарное расстояние до всех домов будет минимальным.

Если точка лежит на дороге, то указать номера домов - концов этой дороги и расстояние от первого из этих домов. Если точка совпадает с домом, то указать номер этого дома.

Примечание: длины дорог - положительные целые числа.

Вариант 4. Картинная галерея. На страже картин.

В картинной галерее каждый сторож работает в течение некоторого непрерывного отрезка времени. Расписанием стражи называется множество пар [$T_1(i)$, $T_2(i)$] - моментов начала и конца дежурства i-го сторожа из интервала [0,EndTime].

Для заданного расписания стражи требуется:

(а) проверить, в любой ли момент в галерее находится не менее двух сторожей.
Если условие (а) не выполнено, то:
(б) перечислить все интервалы времени с недостаточной охраной (менее 2 сторожей).
(в) добавить наименьшее число сторожей с заданной, одинаковой для всех длительностью дежурства, чтобы получить правильное расписание (т.е. удовлетворяющее условию (а)).
(г) проверить, можно ли обойтись без добавления новых сторожей, если разрешается сдвигать времена дежурства каждого из сторожей с сохранением длительности дежурства.
(д) Если это возможно, то составить расписание с наименьшим числом сдвигов.

ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ:

(Все моменты времени задаются в целых минутах.)
EndTime - момент окончания стражи, т.е. охраняется отрезок времени [0, EndTime].
N -число сторожей.

T1[i], T2[i], i=1,..N - моменты начала и окончания дежурства i-го сторожа.
Length - длительность дежурства каждого дополнительного сторожа.

ВЫХОДНЫЕ ДАННЫЕ:

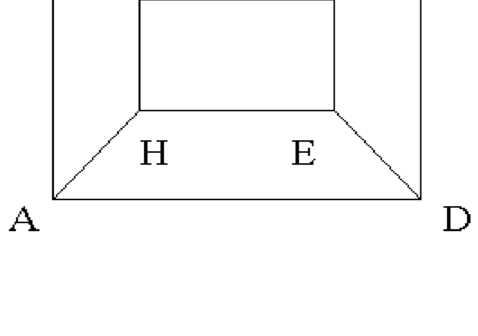
(1) Ответ на пункт (а) в форме да/нет.
(2) При ответе "нет" на п. (а) - список пар (k,l) - начал и концов всех малоохраняемых интервалов с указанием числа сторожей в каждом (0 или 1).
(3) Число дополнительных сторожей и моменты начала и окончания дежурства каждого дополнительного сторожа.
(4) Ответ на пункт (г) в форме да/нет. Если "да", то номера сторожей, смена которых сдвигается, и значения сдвигов.
(5) В ответ на пункт (д): наименьшее число сторожей, смена которых сдвигается, их номера и значения сдвигов.

ПРИМЕЧАНИЕ
Программа должна допускать независимое тестирование пунктов (в), (г), (д).

Вариант 5. Лево-Право.

На плоскости задан граф с N вершинами. Количество ребер, соединенных с каждой вершиной, равно 3.

Пример:



Пусть вершины X,Y и Z являются соседями вершины T. Будем считать, что Y левый, а Z - правый сосед вершины T относительно вершины X, если ориентированный угол XTZ меньше ориентированного угла XTY (положительным будем считать направление против часовой стрелки). Например вершина E является правым соседом вершины H относительно A, а G - левым, поскольку ориентированный угол AHE меньше ориентированного угла AHG. (Ребра считаются отрезками).

Составьте программу, которая:

1. Вводит координаты вершин графа и его ребра и рисует граф на экране компьютера, производя при этом подходящее масштабирование(Ребра выводятся как отрезки).
2. Пусть заданы две начальные соседние вершины X_0 и X_1 и последовательность вида LLRRL... Тогда программа находит путь на графе X_0 X_1 X_2...X_n для вершин которого выполнено:
-первые два являются заданными X0 и X1
-X_{i+1} является левым или правым соседом X_i относительно X_{i-1} в зависимости от заданной последовательности, при том L означает левый, а R -правый.
Пример:
В заданном графе пусть даны начальные вершины A и H и последовательность LRRLLR. Тогда программа должна найти путь AHGFEDCB.
3. Рисует на экране путь, найденный в п.2.
4. Пусть даны начальная и конечная вершина. Программа должна найти путь, проходящий через минимальное число вершин, вывести его на экран и найти 2 первые вершины и управляющую последовательность для этого пути, как определено в п.2.

Вариант 6. Превращение в дерево.

Определить минимальный набор вершин, удалением которых можно свести граф к дереву.

Вариант 7. Станки.

N различных станков один за другим объединены в конвейер. Имеется N рабочих. Задана матрица C[N , N], где C[i,j] производительность i-ого рабочего на j-ом станке. Определить

а) на каком станке должен работать каждый из рабочих, чтобы производительность была максимальной.
б) то же, но станки расположены параллельно и выполняют однородные операции.

Вариант 8. Крестики-нолики. Вероятность.

Для игры в крестики-нолики построить ориентированный граф возможных состояний. Для каждого состояния (узла) вычислить вероятность победы каждого из игроков или ничьих (Предлагается вычислять вероятность, как количество путей, которые приведут к победе одного из игроков или к ничьей). В качестве входных данных пользователь вводит начальное состояние, от которого следует строить граф.

Вариант 9. Крестики-нолики. Победа.

Для игры в крестики-нолики построить ориентированный граф возможных состояний (аналогично предыдущему заданию). Но теперь для каждого состояния (узла) вычислить наиболее выигрышный ход для каждого из игроков (в том числе, для тех состояний, в которые при оптимальной игре хотя бы одного из игроков никто никогда бы не попал).

Вариант 10. Сопротивление цепи.

В виде графа задана электрическая цепь из резисторов (узлы – точки соединения, рёбра – резисторы). При заданных номиналах резисторов (весов рёбер) определить общее сопротивление цепи между двумя указанными узлами (допустимо нулевое сопротивление). Усложнённая версия задачи предусматривает наличие в цепи полупроводников – диодов (направленных рёбер).

Вариант 11. Достижимость за N.

По системе двусторонних дорог определить, есть ли в ней город, из которого можно добраться в любой другой менее чем за N км. Разрешается построить не более K дополнительных дорог (расстояния допустимых для строительства дорог задаются отдельно). Не стоит привязываться к N как к расстоянию. Вместо него могут быть указаны время в пути или же стоимость поездки. В связи с этим веса добавляемых рёбер не зависят от взаимного расположения узлов, но они не могут быть меньше нуля.

Вариант 12. Короткий, дешёвый, быстрый.

Имеется карта грузоперевозок. Для каждой пары городов, между которыми проложена дорога, заданы расстояние, время и стоимость поездки. Вывести на экран стоимость, продолжительность, расстояние и маршрут:

а) самой короткой;
б) самой дешёвой
в) самой быстрой;

поездок из города А в город Б.

Вариант 13. Поможем очистить город.

Имеется сеть дорог района города, представленная в виде графа (узлы – перекрёстки, а рёбра – дороги). Мусорная машина должна пройти по всем дорогам хотя бы один раз, чтобы собрать мусор. Число на каждом ребре показывает время, которое должна потратить мусорная машина, чтобы проехать этот участок. На перекрестках машина должна ждать время, равное числу пересекающихся дорог (даже в случае разворота).

Составьте программу, показывающую как выбрать необходимый путь для сбора мусора в кратчайшее время.

Отдельно рассмотреть вариацию задачи, когда некоторые узлы помечаются как входы, а некоторые – как выходы. Мусорная машина начинает движение в одном из входов и должна закончить в одном из выходов.

Вариант 14. Изоморфность.

Определить, изоморфны ли 2 графа.

Вариант 15. Многоугольник.

Построить такой многоугольник (не обязательно выпуклый) с вершинами в заданном множестве, периметр которого максимален.

Вариант 16. Шестерёнки.

N шестеренок пронумерованы от 1 до N (N<=10). Заданы M (0<=M<=45) соединений пар шестеренок в виде (i,j), 1<=i<j<=N (шестерня с номером i находится в зацеплении с шестерней j). Можно ли повернуть шестерню с номером 1?

Если да, то найти количество шестерен, пришедших в движение.

Если нет, то требуется убрать минимальное число шестерен так, чтобы в оставшейся системе при вращении шестерни 1 во вращение пришло бы максимальное число шестерен. Указать номера убранных шестерен (если такой набор не один, то любой из них) и количество шестерен, пришедших в движение.

Вариант 17. Робот R90 на плоскости.

На плоскости расположено N точек. Имеется робот, который двигается следующим образом. Стартуя с некоторой начальной точки и имея некоторое начальное направление, робот движется до первой встреченной на его пути точки, изменяя в ней свое текущее направление на 90 градусов, т.е. поворачивая налево или направо. После этого он продолжает движение аналогично. Если робот достиг начальной точки, либо не может достичь новой точки (которую он еще не посещал), то он останавливается.

Определить, может ли робот посетить все N точек, если:

1. Определены начальная точка и направление робота.
2. Определена начальная точка, а направление робота можно выбирать.
3. Начальную точку и направление робота можно выбирать.

Координаты точек - целые числа, угол измеряется в радианах относительно оси OX.

Вариант 18. Двудольный граф.

Неориентированный граф называется двудольным, если его можно раскрасить в два цвета так, что концы любого ребра будут разного цвета. Составить алгоритм проверки, является ли заданный граф двудольным (число действий не превосходит N + M).

Указание:

каждую связную компоненту можно раскрашивать отдельно;
выбрав цвет одной вершины и обходя ее связную компоненту, определяется единственно возможный цвет остальных.

Вариант 19. Полный двудольный граф.

Неориентированный граф называется полным двудольным, если его можно раскрасить в два цвета так, что концы любого ребра будут разного цвета и каждая вершина одного цвета будет соединена со всеми вершинами другого цвета. Составить алгоритм проверки, является ли заданный граф полным двудольным.

Вариант 20. Встреча роботов.

Между N пунктами (N<=50) заданы дороги длиной A(i,j), где I,J-номера пунктов. Дороги проложены на разной высоте и пересекаются только в общих пунктах. В начальный момент времени из заданных пунктов начинают двигаться с постоянной скоростью M роботов (M=2 или 3), независимо меняя направление движения только в пунктах. Роботы управляются таким образом, чтобы минимизировать время до встречи всех роботов в одном месте. Скорость I-того робота может быть равна 1 или 2. Остановка роботов запрещена.

Задание:

Написать программу, которая:

1) при заданных N, M и сети дорог единичной длины (все имеющиеся A(i,j)=1) определяет минимальное время, через которое может произойти встреча всех M роботов, при этом начальное положение роботов и скорость их движения известны.
2) Выполнить те же действия, что и в п. 1, но только для различных значений A(i,j).

Примечание: В случае невозможности встречи всех М роботов в одном месте ни в какой момент времени в результате выполнения программы должно быть сформировано соответствующее сообщение. Все входные данные целочесленные.

Вариант 21. Китайский почтальон.

С Эйлеровыми циклами связана задача китайского почтальона, условие которой звучит так: ребрам неориентированного графа приписаны положительные веса. Необходимо найти цикл, проходящий через каждое ребро графа не менее одного раза и такой, чтобы сумма весов с учетом кратности прохождения ребер была бы минимальна.

Вариант 22. Добраться до пункта назначения.

Имеется карта дорог (с указанными расстояниями между остановками), маршруты движения общественного транспорта (замкнутые маршруты с указанием остановочных пунктов и времени стоянки на них) и список транспортных средств, для которых указан определённый маршрут, момент времени начала движения по маршруту (с начала отсчёта), скорость движения и стоимость поездки за одну единицу расстояния. Определить (а) самый короткий и (б) самый дешёвый путь (с выводом стоимости поездки и затраченного времени) из пункта А в пункт Б (момент времени начала путешествия указывается дополнительно). Время изменяется дискретно, посадка и высадка происходит мгновенно. Найденные маршруты отобразить на графе и дополнительно вывести в виде списка действий, описывающих поведение пассажира. Можно использовать класс со следующими полями: Номер маршрута, Номер ТС, Название остановки отправления, Название остановки прибытия, время отправления и время прибытия. Соответственно, ответ на задачу будет списком экземпляров таких классов.

Примечание:

Замкнутый маршрут не обязательно подразумевает кольцевой маршрут. За основу можно взять маршрутную сеть города, причём остановки в разных направлениях движения считаются одной остановкой (кроме некоторых исключительных случаев, например, остановка пл. Ленина в г. Воронеж и некоторые другие).
Каждый маршрут имеет свой уникальный номер, а остановка - название; каждое ТС также имеет свой уникальный номер (гос. номер).

Вариант 23. Сила тока и напряжение в цепи.

В виде графа задана электрическая цепь из резисторов (узлы – точки соединения, рёбра – резисторы). При заданных номиналах резисторов (весов рёбер) и точек подключения источника питания с заданными напряжением, определить силу тока и напряжение на каждом резисторе. Также вывести силу тока, которую должен предоставлять источник (мощность источника питания). Допускаются резисторы с нулевым сопротивлением.

Вариант 24. Все неизоморфные графы.

Построить все неизоморфные ориентированные графы с $N<=6$ вершинами, без петель, каждая вершина которого имеет минимум одну исходящую и одну входящую дугу. Для $N=2$ существует только 1 вариант - (01)(10) - (матрица смежности), для $N=3$ таких графов 5. Если использовать переборный алгоритм, то для $N=6$ потребуется $2^{36}-36$ операций.

Вариант 25. Общественный транспорт. Наибольшее покрытие.

Имеется карта дорог и маршруты движения общественного транспорта (замкнутые маршруты с указанием остановочных пунктов и времени стоянки на них). Для заданного парка транспортных средств (для каждого ТС указана максимальная скорость движения), количество ТС в котором меньше количества маршрутов, определить такое распределение ТС по маршрутам, чтобы покрыть наибольшее количество остановок.

(*) В случае наличия нескольких возможных вариантов распределения выбрать те (именно «те», а не «тот») из них, которые дают меньшее среднее время ожидания ТС на остановке для каждого маршрута.

Примечание:

Замкнутый маршрут не обязательно подразумевает кольцевой маршрут. За основу можно взять маршрутную сеть города, причём остановки в разных направлениях движения считаются одной остановкой (кроме некоторых исключительных случаев, например, остановка пл. Ленина в г. Воронеж и некоторые другие).

Вариант 26. Старая и новая карты.

Есть план местности. На нем отмечены города и ж/д пути между ними. Есть старинная карта той же местности. На ней отмечены торговые пути между городами. Необходимо найти максимальное согласование старых и новых путей.

Даная задача подразумевает несколько уровней сложности:

1) названия городов совпадают, длины дорог совпадают;
2) названия городов совпадают, длины дорог могут различаться;
3) названия городов могут не совпадать, длины дорог совпадают;
4) названия городов и длины дорог могут различаться

Кроме того, стоит учитывать, что некоторые города/дороги могли вообще исчезнуть, а новые города дороги – появиться.

Вариант 27. Общественный транспорт. Меньше ходим.

Имеется карта дорог (транспортная сеть) города, представленная в виде графа. Узлами графа являются контрольные точки. Рёбра – прямые дороги между контрольными точками с указанными расстояниями. Заданы маршруты движения общественного транспорта (замкнутые маршруты с указанием остановочных пунктов, размещённых в контрольных точках, и времени стоянки на них). Допускается наличие контрольных точек без имеющихся на них остановочных пунктов.

Для заданного парка маршрутных транспортных средств (количество ТС меньше количества маршрутов и для каждого ТС указана допустимая скорость его движения) и заданной скорости движения пешехода, определить наиболее удобное для горожан распределение ТС по маршрутам. Удобства достигается путём минимизации суммы показателей неудобства для всех узлов.

(а) Назовём таким показателем неудобства для узла сумму минимального времени достижения каждого из остальных узлов.
(б) *Назовём таким показателем неудобства для узла сумма максимального времени достижения каждого из остальных улов (те же пути, что и в (а), но с учётом максимального времени ожидания ТС на остановке).

Примечание:

Замкнутый маршрут не обязательно подразумевает кольцевой маршрут. За основу можно взять маршрутную сеть города, причём остановки в разных направлениях движения считаются одной остановкой (кроме некоторых исключительных случаев, например, остановка пл. Ленина в г. Воронеж и некоторые другие).

Вариант 28. Общественный транспорт. Меньше ждём.

Имеется карта дорог (с указанными расстояниями между остановками) и маршруты движения общественного транспорта (замкнутые маршруты с указанием остановочных пунктов и времени стоянки на них). Для заданного парка транспортных средств (для каждого ТС указана скорость движения), где количество ТС больше количества маршрутов, определить такое распределение ТС по маршрутам, чтобы минимизировать суммарное время ожидания ТС на остановках.

В ответе для каждого ТС указать маршрут, к которому он будет привязан и время выезда на маршрут относительно какого-то начального момента времени. Предусмотреть возможность отображения на экране положение ТС в заданный момент времени.

Примечание:

Замкнутый маршрут не обязательно подразумевает кольцевой маршрут. За основу можно взять маршрутную сеть города, причём остановки в разных направлениях движения считаются одной остановкой (кроме некоторых исключительных случаев, например, остановка пл. Ленина в г. Воронеж и некоторые другие).

Вариант 29. Объезд.

В заданном графе найти все рёбра для указанного ребра, которые располагаются на параллельных участках пути при движении из А в Б.

Вариант 30. Соединяем города.

По системе двусторонних дорог определить, между какими городами стоит построить дороги, чтобы из любого города можно было бы добраться в любой другой менее чем за N км. Расстояния допустимых для строительства дорог задаются отдельно. Минимизировать количество дополнительных дорог.

Примечание.

В этой задаче не стоит воспринимать расстояние в прямом смысле. Вместо него можно считать, что указывается время или стоимость поездки, а они могут быть не связаны с взаимным расположением городов.

Вариант 31. Уменьшение затрат.

По системе двусторонних дорог определить, между какими городами стоит построить дороги, чтобы из любого города можно было бы добраться в любой другой менее чем за N км. Расстояния и стоимость строительства допустимых для строительства дорог задаются отдельно. Минимизировать затраты на строительство дорог.

Примечание.

В этой задаче не стоит воспринимать расстояние в прямом смысле. Вместо него можно считать, что указывается время или стоимость поездки, а они могут быть не связаны с взаимным расположением городов.

Вариант 32. Платные дороги и грузоперевозка.

Задана система дорог. Для каждого участка (ребра) указаны расстояние, максимально допустимая скорость движения и стоимость проезда (для платных участков). Определить самый дешёвый путь из города А в город Б, который можно преодолеть за время T на транспортном средстве, способном развивать скорость V. Вывести на экран путь, затраченное время и общую стоимость. В случае наличия нескольких путей с одинаковой стоимостью – вывести самый быстрый. Если и таких путей будет несколько, то вывести самый безопасный (с меньшей максимальной скоростью). Если же и таких путей будет несколько, то вывести их все.