*Programtervező informatikus szak I. évfolyam*
*Matematikai alapok 3. zárthelyi*
*2022. december 19.*

$\boxed{\textit{Minden feladathoz kérjük: indoklás, levezetés, a számítások bemutatása.}}$

1. *(7 pont)* Gauss-Jordan-módszerrel határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét (csak a Gauss-Jordan módszerrel való meghatározás fogadható el):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

2. *(10 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

3. Tekintsük az alábbi alteret $\mathbb{R}^4$-ben:

$$W = \left\{(x,\, y,\, z,\, u) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z - u = 0\right\}$$

a) *(7 pont)* Adjunk meg ortogonális bázist a $W$ altérben.

b) *(5 pont)* Bontsuk fel az $x = (4,\, -4,\, 4,\, 0) \in \mathbb{R}^4$ vektort a $W$ altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

4. *(7 pont)* Adott az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú $f$ függvény:

$$f(x) = x^2 + 8x - 9 \qquad (x \in [\,0\,,\, +\infty)\,)$$

Igazoljuk, hogy $f$ invertálható, továbbá adjuk meg a $D_{f^{-1}}$, $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.

(FIGYELEM: itt a ”rajzos” megoldás nem fogadható el.)

5. *(7 pont)* A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x - 4}{2x^3 + 3x + 1} = +\infty$$