ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
6. Nagyságrend-őrző becslések és függvények további becslései
az "Órai feladatok" szakasz 1a., 1b., 1c., 2a., 2b., 2c., 3a. feladatainak megoldása
7. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások I.
az "Órai feladatok" szakasz 3, 5, 6, 7b., 7c. feladatainak megoldása
(Írta: Bóka Dávid)

6.2.1. Órai feladatok / 1a.

Tudjuk, hogy ha $x \geq 0$, akkor $3x^4, 2x^2, 5 \geq 0$, ezért

$$P(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5 = 4x^5 - \underbrace{(3x^4 + 2x^2 + 5)}_{\geq 0} \leq 4x^5.$$

Ennek alapján az $M = 4$ és például $R = 0$ (itt bármilyen egyéb pozitív valós számot lehet választani) jó paraméterei az NRF-becslésnek.

6.2.1. Órai feladatok / 1b.

Tudjuk, hogy $3x^2 \geq 0$ minden valós szám esetén, ezért

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \leq 2x^3 + 6x + 7.$$

Másrészt, ha $x \geq 1$ és $n \geq 0$, akkor $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ esetén $x^i \leq x^n$, ezért

$$2x^3 + 6x + 7 \leq 2x^3 + 6x^3 + 7x^3 = 15x^3.$$

Ennek alapján az $M = 15$ és $R = 1$ jó paraméterei az NRF-becslésnek.

6.2.1. Órai feladatok / 1c.

Teljesen hasonlóan az előző részhez, ha $x \geq 1$ és $n \geq 0$, akkor $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ esetén $x^i \leq x^n$, vagyis

$$P(x) = 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3 \leq 6x^5 + 7x^5 + 10x^5 + x^5 + 2x^5 + 3x^5 = 29x^5.$$

Ennek alapján az $M = 29$ és $R = 1$ jó paraméterei az NRF-becslésnek.

6.2.1. Órai feladatok / 2a.

Tudjuk, hogy ha $x \geq 0$, akkor $7x^4, 10x^3, x^2, 2x, 3 \geq 0$, ezért

$$P(x) = 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3 \geq 6x^5.$$

Ennek alapján az $m = 6$ és például $R = 0$ (itt bármilyen egyéb pozitív valós számot lehet választani) jó paraméterei az NRA-becslésnek.

$\boxed{\text{6.2.1. Órai feladatok / 2b.}}$

Tudjuk, hogy ha $x \geq 0$, akkor $6x, 7 \geq 0$, ezért

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \geq 2x^3 - 3x^2.$$

A jobb oldalon létrejött különbséget ilyen egyszerű módon már nem tudjuk becsülni, ezért a következő ötlethez folyamodunk:

$$2x^3 - 3x^2 = x^3 + x^3 - 3x^2 = x^3 + x^2(x-3) \geq x^3,$$

mivel, ha $x \geq 3$, akkor az $x^2(x-3)$ tag nemnegatív. Ennek alapján a $m = 1$ és $R = 3$ jó paraméterei az NRA-becslésnek.

Megjegyzés: A $2x^3$ felbontásánál természetesen adódott, hogy az $x^3 + x^3$ alakú felbontást válasszuk, de más szétbontás esetén is jó NRA-becslést kapunk, csak más paraméterekkel. Például:

$$2x^3 - 3x^2 = \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = \frac{3}{2}x^3 + x^2\left(\frac{1}{2}x - 3\right) \geq \frac{3}{2}x^3.$$

mivel, ha $x \geq 6$, akkor az $x^2\left(\frac{1}{2}x - 3\right)$ tag nemnegatív. Ebben az esetben az $m = \frac{3}{2}$ és $R = 6$ paraméterű NRA-becslést kapjuk.

$\boxed{\text{6.2.1. Órai feladatok / 2c.}}$

$$P(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5 = 4x^5 - (3x^4 + 2x^2 + 5)$$

Egy különbséget többek között úgy tudunk alulról becsülni, hogy a kivonandót felülről becsüljük, vagyis előállítjuk a $3x^4 + 2x^2 + 5$ NRF-becslését:

$$3x^4 + 2x^2 + 5 \leq 3x^4 + 2x^4 + 5x^4 = 10x^4,$$

ha $x \geq 1$. Ezt felhasználva tudjuk a $P(x)$ polinomot tovább becsülni a következő módon:

$$4x^5 - (3x^4 + 2x^2 + 5) \geq 4x^5 - 10x^4 = 3x^5 + x^5 - 10x^4 = 3x^5 + x^4(x - 10) \geq 3x^5,$$

mivel, ha $x \geq 10$, akkor az $x^4(x-10)$ tag nemnegatív. Ezt felhasználva az $m = 3$ és $R = \max(1, 10) = 10$ jó paraméterei az NRA-becslésnek.

Megjegyzés: Természetesen az előző lépésben itt is lehetett volna más szétbontást választani. Például:

$$4x^5 - (3x^4 + 2x^2 + 5) \geq 4x^5 - 10x^4 = 2x^5 + 2x^5 - 10x^4 = 2x^5 + x^4(2x - 10) \geq 2x^5.$$

Itt az $x^4(2x-10)$ tag akkor nemnegatív, ha $x \geq 5$, vagyis ebben az esetben az $m = 2$ és $R = 5$ paraméterű NRA-becslést kapjuk.

$\boxed{\text{6.2.1. Órai feladatok / 3a.}}$

Ebben a feladatban egy racionális törtfüggvényre kell alsó, illetve felső becslést adnunk. Fontos azt megjegyezni, hogy ha törtet akarunk

- alulról becsülni, akkor a számlálóját alulról és/vagy a nevezőjét felülről kell becsülni.
- felülről becsülni, akkor a számlálóját felülről és/vagy a nevezőjét alulról kell becsülni.

Az említettek alapján $f(x)$ NRA-becsléséhez kell a számlálóban szereplő polinom NRA-becslése:

$$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 \geq 3x^4, \text{ minden } x \geq 0 \text{ esetén.}$$

És a nevezőben szereplő polinom NRF-becslése:

$$5x^2 - 3x - 10 \leq 5x^2, \text{ minden } x \geq 0 \text{ esetén.}$$

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy:

$$f(x) = \frac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{5x^2 - 3x - 10} \geq \frac{3x^4}{5x^2} = \frac{3}{5}x^2.$$

Ennek alapján az $m = \dfrac{3}{5}$ és például $R = 0$ (itt bármilyen egyéb pozitív valós számot lehet választani) jó paraméterei az NRA-becslésnek.

$f(x)$ NRF-becsléséhez kell a számlálóban szereplő polinom NRF-becslése:

$$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 \leq 3x^4 + 2x^4 + 5x^4 + 7x^4 + 6x^4 = 23x^4, \text{ ha } x \geq 1.$$

És a nevezőben szereplő polinom NRA-becslése:

$$5x^2 - 3x - 10 = 5x^2 - (3x + 10) \geq 5x^2 - 13x = 4x^2 + x^2 - 13x = 4x^2 + x(x - 13) \geq 4x^2, \text{ ha } x \geq 13.$$

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy:

$$f(x) = \frac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{5x^2 - 3x - 10} \leq \frac{23x^4}{4x^2} = \frac{23}{4}x^2.$$

Ennek alapján az $M = \dfrac{23}{4}$ és az $R = \max(1, 13) = 13$ jó paraméterei az NRF-becslésnek.

7.2.1. Órai feladatok / 3a.

$x = 0$ és $y = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0$. Igaz, hiszen $0^2 + 0^2 = 0$.
Megfordítva: $x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ és $y = 0$. Igaz, mivel $x^2 + y^2$ nemnegatív és pontosan akkor 0, ha $x = y = 0$.

7.2.1. Órai feladatok / 3b.

$xy = xz \Longrightarrow y = z$. Hamis, mert ha $x = 0, y = 2, z = 3$, akkor $0 \cdot 2 = 0 \cdot 3$, de $2 \neq 3$.
Megfordítva: $y = z \Longrightarrow xy = xz$. Igaz.

7.2.1. Órai feladatok / 3c.

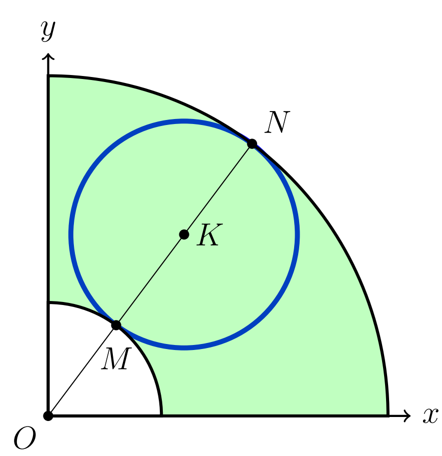
$x > y^2 \Longrightarrow x > 0$. Igaz, mert $x > y^2 \geq 0$.
Megfordítva: $x > 0 \Longrightarrow x > y^2$. Hamis, mert ha $x = 1, y = 2$, akkor $1 > 0$, de $1 \not> 2^2$.

7.2.1. Órai feladatok / 3d.

$x^2 + y^2 = 12x + 16y - 75 \Longrightarrow 25 \leq x^2 + y^2 \leq 225$.
Alakítsuk át az implikáció bal oldalán álló kifejezést:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 12x + 16y - 75 \\ x^2 - 12x + y^2 - 16y + 75 &= 0 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 - 25 &= 0 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

Ez egy $(6, 8)$ középpontú és 5 sugarú körvonalat ír le (az ábrán kékkel jelölve), míg az implikáció jobb oldala egy olyan körcikket, melyet az 5, illetve 15 sugarú körvonalak határolnak (az ábrán zölddel jelölve, csak az első síknegyedben). Ezek alapján az implikáció azt állítja, hogy a kék körvonal pontajainak a zöld területbe kell esniük. Ezt be tudjuk látni úgy, hogy megnézzük, hogy az $x^2 + y^2 = 25$ és $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 25$ egyenletű köröknek hány közös pontja van. A két egyenletből kapott egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy egyetlen megoldás az $x = 3$ és $y = 4$, tehát a két körvonal érinti egymást. Hasonlóan az $x^2 + y^2 = 225$ és $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 25$ egyenletű körök is érintik egymást az $x = 9$ és $y = 12$ pontban. Tehát a kék kör teljes egészében a zöld területbe esik, így az implikáció igaz.



Megfordítva: $25 \le x^2 + y^2 \le 100 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 12x + 16y - 75$, vagyis a zöld terület minden pontja a kék körön van rajta. Ez természetesen hamis, például $x = 10$ és $y = 0$ esetén $25 \le 10^2 + 0^2 \le 225$, $10^2 + 0^2 = 100$ és $12 \cdot 10 + 16 \cdot 0 - 75 = 45$, de $100 \neq 45$.

7.2.1. Órai feladatok / 5a.

$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \dfrac{1}{n} < 0.01$. Ez hamis, például $n = 2$ esetén $\dfrac{1}{2} \not< 0.01$

Tagadása: $\neg \left(\forall n \in \mathbb{N}^+ : \dfrac{1}{n} < 0.01 \right) = \exists n \in \mathbb{N}^+ : \neg \left(\dfrac{1}{n} < 0.01 \right) = \exists n \in \mathbb{N}^+ : \dfrac{1}{n} \ge 0.01$. Ez igaz, mert létezik ilyen természetes szám, például az $n = 2$.

7.2.1. Órai feladatok / 5b.

$\exists n \in \mathbb{N}^+ : \dfrac{1}{n} < 0.01$. Ez igaz, mert létezik ilyen természetes szám például $n = 101$.

Tagadása: $\neg \left(\exists n \in \mathbb{N}^+ : \dfrac{1}{n} < 0.01 \right) = \forall n \in \mathbb{N}^+ : \neg \left(\dfrac{1}{n} < 0.01 \right) = \forall n \in \mathbb{N}^+ : \dfrac{1}{n} \ge 0.01$. Ez hamis, például $n = 101$ esetén $\dfrac{1}{101} \not\ge 0.01$.

7.2.1. Órai feladatok / 5c.

Ez egy nyitott kijelentés, hiszen a N paraméter nincs rögzítve. (pl. $N = 20$ vagy $N = 200$) Az N-re vonatkozó feltételekkel az állításunk lehet igaz is és hamis is.

7.2.1. Órai feladatok / 5d.

$\exists N \in \mathbb{N}^+ : \forall n \ge N : \dfrac{1}{n} < 0.01$. Ez az állítás igaz, mert ha például $N = 1000$, akkor minden 1000-nél nagyobb vagy egyenlő n értékekre az $\dfrac{1}{n} < 0.01$.

Tagadása:

$$\neg \left(\exists N \in \mathbb{N}^+ : \forall n \ge N : \frac{1}{n} < 0.01 \right) = \forall N \in \mathbb{N}^+ : \neg \left(\forall n \ge N : \frac{1}{n} < 0.01 \right) =$$
$$= \forall N \in \mathbb{N}^+ : \exists n \ge N : \neg \left(\frac{1}{n} < 0.01 \right) = \forall N \in \mathbb{N}^+ : \exists n \ge N : \frac{1}{n} \ge 0.01.$$

Ez természetesen hamis, hiszen $N = 1000$ esetén, ha $n \ge 1000$, akkor $\dfrac{1}{n} < 0.01$.

7.2.1. Órai feladatok / 6a.

$\exists n \in \mathbb{N} : \dfrac{n^2}{10n-7} > 100$. Az állítás igaz, mert az NRA-becslés alapján:

$$\frac{n^2}{10n-7} \geq \frac{n^2}{10n} = \frac{n}{10} > 100,$$

amiből kapjuk, hogy $n > 1000$, vagyis az $n = 1001$ egy megfelelő választás.
Tagadása: $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{n^2}{10n-7} \leq 100$. Ez hamis, az előbb kapott $n = 1001$ erre ellenpélda.

7.2.1. Órai feladatok / 6b.

$\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{n^2}{10n-7} > 100$. Az állítás hamis, például $n = 1$ esetén $\dfrac{n^2}{10n-7} = \dfrac{1}{3} \not> 100$.
Tagadása: $\exists n \in \mathbb{N} : \dfrac{n^2}{10n-7} \leq 100$, ami igaz, az $n = 1$ jó példa erre.

7.2.1. Órai feladatok / 6c.

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \dfrac{n^2}{10n-7} > 100$, ami igaz az $a)$ rész alapján, mivel tudjuk, hogy $\dfrac{n^2}{10n-7} \geq \dfrac{n}{10}$, ezért $N = 1001$ választással minden $n \geq N$ esetén igaz lesz az állítás.
Tagadása: $\forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : \dfrac{n^2}{10n-7} \leq 100$. Ez természetesen hamis, az előbb látott $N = 1001$ egy jó ellenpélda.

7.2.1. Órai feladatok / 7b.

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \dfrac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} < 0.05$. Használva az NRF-becslést:

$$\frac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} \leq \frac{2n^3+3n^3}{n^5-3n^4-7n^3-10n} = \frac{5n^3}{n^5-(3n^4+7n^3+10n)} \leq$$
$$\leq \frac{5n^3}{n^5-(3n^4+7n^4+10n^4)} = \frac{5n^3}{n^5-20n^4} = \frac{5n^3}{\frac{1}{2}n^5+n^4\left(\frac{1}{2}n-20\right)} \leq \frac{5n^3}{\frac{1}{2}n^5} = \frac{10}{n^2}, \text{ha } n \geq 40.$$

Vagyis, ha $n \geq 40$, akkor

$$\frac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} \leq \frac{10}{n^2},$$

ezért elég, ha

$$\frac{10}{n^2} < 0.05$$

teljesül, hiszen ebben az esetben a racionális törtfüggvényünk is kisebb lesz, mint 0.05. Ez pedig akkor igaz, ha $n^2 > 200$, vagyis $n \geq \lceil\sqrt{200}\rceil = 15$. Fontos, hogy ugyan az utolsó becslésnél 15-öt kaptunk n-re, viszont nagyon figyelni kell arra, hogy az NRF-becslést csak $n = 40$-től tudjuk garantálni, tehát az $N = \max(15, 40) = 40$ egy jó választás.

Az eredeti állítás tagadása: $\forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : \dfrac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} \geq 0.05.$

7.2.1. Órai feladatok / 7c.

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \dfrac{2n^6-20n^5+3n^4-6n^3+3}{13n^3+100n^2+200} > 230$. Használva az NRA-becslést:

$$\frac{2n^6-20n^5+3n^4-6n^3+3}{13n^3+100n^2+200} \geq \frac{2n^6-20n^5-6n^3}{13n^3+100n^3+200n^3} = \frac{2n^6-(20n^5+6n^3)}{313n^3} \geq$$
$$\geq \frac{2n^6-26n^5}{313n^3} = \frac{n^6+n^6-26n^5}{313n^3} = \frac{n^6+n^5(n-26)}{313n^3} \geq \frac{n^6}{313n^3} = \frac{n^3}{313}, \text{ha } n \geq 26.$$

Vagyis, ha $n \geq 26$, akkor

$$\frac{2n^6-20n^5+3n^4-6n^3+3}{13n^3+100n^2+200} \geq \frac{n^3}{313},$$

ezért elég, ha

$$\frac{n^3}{313} > 230$$

teljesül, hiszen ebben az esetben a racionális törtfüggvényünk is nagyobb lesz, mint 230. Ez pedig akkor igaz, ha $n^3 > 71990$, vagyis $n \geq \lceil\sqrt[3]{71990}\rceil = 42$. Így az $N = \max(26, 42) = 42$ egy jó választás.

Az eredeti állítás tagadása: $\forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : \dfrac{2n^6-20n^5+3n^4-6n^3+3}{13n^3+100n^2+200} \leq 230.$
