

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 3. zárthelyi
2022. december 19.

Minden feladathoz kérjük: indoklás, levezetés, a számítások bemutatása.

1. (7 pont) Gauss-Jordan-módszerrel határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét (csak a Gauss-Jordan módszerrel való meghatározás fogadható el):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

2. (10 pont) Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

3. Tekintsük az alábbi alteret \mathbb{R}^4 -ben:

$$W = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - u = 0\}$$

- a) (7 pont) Adjunk meg ortogonális bázist a W altérben.
b) (5 pont) Bontsuk fel az $x = (4, -4, 4, 0) \in \mathbb{R}^4$ vektort a W altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

4. (7 pont) Adott az alábbi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú f függvény:

$$f(x) = x^2 + 8x - 9 \quad (x \in [0, +\infty))$$

Igazoljuk, hogy f invertálható, továbbá adjuk meg a $D_{f^{-1}}$, $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.

(FIGYELEM: itt a "rajzos" megoldás nem fogadható el.)

5. (7 pont) A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x - 4}{2x^3 + 3x + 1} = +\infty$$

6. (7 pont) Elméleti kérdés. Ez 2022 őszén egy külön Canvas-beírás volt. Most, 2023 őszi félévben itt len az elméleti kérdés a feladatlapon, hasonlóan a ZH2-höz.