1. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 1.

A derivált definíciója

Emlékeztető. ***Definició.*** *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban* **differenciálható** (*vagy* **deriválható**)*, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték. Ezt a határértéket az $\boxed{f'(a)}$ szimbólummal jelöljük, és **az f függvény a pontbeli deriváltjának** (*vagy* **differenciálhányadosának**) *nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $\boxed{f \in D\{a\}}$.

Jegyezzük meg, hogy egy $0/0$ típusú határértékkel (ez, mint tudjuk bármi lehet) értelmeztük a deriválhatóságot.

Az f függvény a pontbeli deriváltja így is számolható:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

1. Feladat. *A definíció alapján lássuk be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsuk ki $f'(a)$-t, ha*

a) $f(x) := x^4 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a := 1,$

b) $f(x) := \sqrt{x} \quad \big(x \in [0, +\infty)\big), \qquad a := 2,$

c) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \qquad a := 3,$

d) $f(x) := x|x| \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a := 0,$

e) $f(x) := \begin{cases} 1 - x & (x < 0) \\ x^2 - x + 1 & (x \geq 0), \end{cases} \qquad a := 0.$

Megoldás. Világos, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ feltétel mindegyik esetben teljesül.

a) $f \in D\{1\}$ és $f'(1) = 4$, hiszen

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^4 - 1^4}{h} = \\ &= \Big(\text{az } a^4 - b^4 = (a - b) \cdot \big(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3\big) \text{ alapján}\Big) = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \big((1 + h)^3 + (1 + h)^2 + (1 + h) + 1\big)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \Big((1 + h)^3 + (1 + h)^2 + (1 + h) + 1\Big) = 4. \end{aligned}$$

b) $f \in D\{2\}$ és $f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, hiszen

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)-2}{h\cdot\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

c) $f \in D\{3\}$ és $f'(3) = -\dfrac{1}{9}$, hiszen

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{3\cdot(3+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{3\cdot(3+h)} = -\frac{1}{9}.$$

d) $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = 0$, hiszen

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)|0+h| - 0\cdot|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0.$$

e) $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = -1$, hiszen a bal és jobb oldali határérték megegyezik:

$$\lim_{h\to 0-0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-0} \frac{1-(0+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0-0} \frac{-h}{h} = -1,$$

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{(0+h)^2-(0+h)+1-1}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{h^2-h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+0} (h-1) = -1.$$

Deriválási szabályok

Emlékeztető. Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolatára a következő állítások érvényesek:

Tétel. *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban. Ekkor*

1. *a szorzó konstansokat ki tudjuk emelni a deriválásból, azaz*

$$cf \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (cf)'(a) = cf'(a) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

2. *tagokból álló függvényeket tagonként deriválhatjuk, azaz*

$$f+g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

3. *egy szorzat deriváltja az az összeg, amelynek tagjai az egyik tényező deriváltja megszorozva a másik tényezővel, azaz*

$$f\cdot g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

4. *ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

`Ebben a táblázatban` megtaláljuk a nevezetes függvények deriváltjait.

2. Feladat. *Adjuk meg a következő függvények deriváltját!*

a) $f(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \qquad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \qquad (x > 0),$

c) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5\,x^5} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big),$

d) $f(x) := x^a + a^x + ax + \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} \qquad (x > 0),\ \ a > 0$ *paraméter.*

Megoldás. Alkalmas átalakításokkal elemi függvények összegeit kapjuk, ezért

a) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f'(x) = \left(4x^3 - 2x^2 + 5x - 3\right)' = 4 \cdot \left(x^3\right)' - 2 \cdot \left(x^2\right)' + 5 \cdot (x)' - 3' =$$
$$= 4 \cdot 3\,x^2 - 2 \cdot 2\,x + 5 \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{12\,x^2 - 4\,x + 5}}.$$

b) A hatványazonosságok felhasználásával először átalakítjuk $f(x)$-et:

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{1/2}}} = \sqrt{x \cdot \left(x^{3/2}\right)^{1/2}} = \left(x \cdot x^{3/4}\right)^{1/2} = \left(x^{7/4}\right)^{1/2} = x^{7/8}.$$

Így

$$f'(x) = \left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = \left(x^{7/8}\right)' = \frac{7}{8} \cdot x^{7/8-1} = \frac{7}{8} \cdot x^{-1/8} = \underline{\underline{\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}}}\,.$$

c) Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor

$$f'(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5\,x^5}\right)' = \left(x^3\right)' + \left(x^{-2}\right)' - \frac{1}{5} \cdot \left(x^{-5}\right)' =$$
$$= 3\,x^2 + (-2) \cdot x^{-3} - \frac{1}{5} \cdot (-5) \cdot x^{-6} = \underline{\underline{3\,x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}}}\,.$$

d) Tetszőleges $a > 0$ paraméter esetén minden $x > 0$ pontban

$$f'(x) = \left(x^a + a^x + ax + \frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)' = (x^a)' + (a^x)' + a \cdot (x)' + \frac{1}{a} \cdot (x)' + a \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$
$$= \underline{\underline{a\,x^{a-1} + a^x \cdot \ln a + a + \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}}}\,.$$

3. Feladat. *Adjuk meg a következő függvények deriváltját!*

a) $f(x) := x^2 \sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) := e^x(\sqrt[3]{x^2} + e^2) \qquad (x > 0)$,

c) $f(x) := \dfrac{x^3 + 2}{x^2 + x + 5} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

d) $f(x) := \dfrac{2^x + 1}{2 + \sin x} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Megoldás. A szorzatra és a hányadosra vonatozó deriválási szabályok szerint járunk el.

a) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f'(x) = \left(x^2 \cdot \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = \underline{\underline{2x \sin x + x^2 \cos x}}\,.$$

b) Ha $x > 0$, akkor

$$f'(x) = \left(e^x \cdot (\sqrt[3]{x^2} + e^2)\right)' = \left(e^x\right)' \cdot (\sqrt[3]{x^2} + e^2) + e^x \cdot \left(x^{2/3} + e^2\right)' =$$

$$= e^x(\sqrt[3]{x^2} + e^2) + e^x\left(\tfrac{2}{3} \cdot x^{-1/3} + 0\right) = \underline{\underline{e^x(\sqrt[3]{x^2} + e^2) + \frac{2e^x}{3\sqrt[3]{x}}}}.$$

c) A nevezőnek nincs valós gyöke ($D = 1^2 - 4 \cdot 5 < 0$), ezért a deriválási szabályok alapján $f \in D(\mathbb{R})$. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 + 2}{x^2 + x + 5}\right)' = \frac{\left(x^3 + 2\right)' \cdot \left(x^2 + x + 5\right) - \left(x^3 + 2\right) \cdot \left(x^2 + x + 5\right)'}{\left(x^2 + x + 5\right)^2} =$$

$$= \frac{3\,x^2 \cdot \left(x^2 + x + 5\right) - \left(x^3 + 2\right) \cdot \left(2\,x + 1\right)}{\left(x^2 + x + 5\right)^2} = \underline{\underline{\frac{x^4 + 2x^3 + 15x^2 - 4x - 2}{\left(x^2 + x + 5\right)^2}}}\,.$$

d) A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ négyzetes összefüggés miatt $|\sin x| \le 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Így a függvény nevezőjének nincs valós gyöke ($2 + \sin x > 0$), ezért a deriválási szabályok alapján $f \in D(\mathbb{R})$. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f'(x) = \left(\frac{2^x + 1}{2 + \sin x}\right)' = \frac{(2^x + 1)' \cdot (2 + \sin x) - (2^x + 1) \cdot (2 + \sin x)'}{(2 + \sin x)^2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot (2 + \sin x) - (2^x + 1) \cdot \cos x}{(2 + \sin x)^2}}}\,.$$

Emlékeztető. Az összetett függvényre vonatkozó szabály azt mondja ki, hogy egy összetett függvény deriváltjához először a külső függvényt deriváljuk, miközben belseje érintetlen marad. Ezt utána még megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és valamilyen* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ *pontban* $g \in D\{a\}$, *továbbá* $f \in D\{g(a)\}$. *Ekkor* $f \circ g \in D\{a\}$, *és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Sokszor többszörösen összetett függvényt kell deriválni. Az ilyen esetekben a fenti tételt többször egymás után „kívülről befele haladva” alkalmazzuk.

4. Feladat. *Adjuk meg a következő függvények deriváltját!*

a) $f(x) := \left(5x^2 + 3x\right)^{2020} \qquad (x \in \mathbb{R})$

b) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} \qquad (x \geq 0)$,

c) $f(x) := \sin \dfrac{x^2 + 1}{x + 3} \qquad (x > -3)$,

d) $f(x) := \sin^2 \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Megoldás. Az összetett függvényre vonatozó deriválási szabály szerint járunk el.

a) Az f függvény a $h(t) := t^{2020}$ $(t \in \mathbb{R})$ külső és a $g(x) := 5x^2 + 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ belső függvény kompozíciója:

$$f(x) = \big(h \circ g\big)(x) = h\big(g(x)\big) = \big(g(x)\big)^{2020} = \left(5x^2 + 3x\right)^{2020} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $\forall x \in \mathbb{R}$ pontban $g \in D\{x\}$ és $g'(x) = 10x + 3$, illetve $h \in D\{g(x)\}$ és $h'(t) = 2020t^{2019}$ $(t \in \mathbb{R})$, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek. Így $f = h \circ g \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = \big(h \circ g\big)'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 2020 \left(g(x)\right)^{2019} \cdot g'(x) =$$

$$= \underline{\underline{2020 \left(5x^2 + 3x\right)^{2019} \cdot \left(10x + 3\right)}}.$$

b) Az f függvény a $h(t) := \sqrt{t}$ $(t \geq 0)$ külső és a $g(x) := x + \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ belső függvény kompozíciója:

$$f(x) = \big(h \circ g\big)(x) = h\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad (x \geq 0).$$

Mivel $\forall x > 0$ pontban $g \in D\{x\}$, $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, és $h \in D\{g(x)\}$, $h'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ $(t > 0)$, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel feltételei ezekben a pontokban teljesülnek. Így $f = h \circ g \in D(0, +\infty)$ és

$$f'(x) = \big(h \circ g\big)'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}}.$$

Az f függvény a 0 pontban nem deriválható.

c) Az f függvény a $h(t) := \sin t$ $(t \in \mathbb{R})$ külső és a $g(x) := \dfrac{x^2+1}{x+3}$ $(x > -3)$ belső függvény kompozíciója. Ezek a függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában deriválhatók, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint $f \in D(-3, +\infty)$, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sin \frac{x^2+1}{x+3}\right)' = \cos \frac{x^2+1}{x+3} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)' = \\
&= \cos \frac{x^2+1}{x+3} \cdot \frac{\left(x^2+1\right)' \cdot (x+3) - \left(x^2+1\right) \cdot \left(x+3\right)'}{(x+3)^2} = \\
&= \cos \frac{x^2+1}{x+3} \cdot \frac{2x \cdot (x+3) - \left(x^2+1\right) \cdot 1}{(x+3)^2} = \underline{\underline{\cos \frac{x^2+1}{x+3} \cdot \frac{x^2+6x-1}{(x+3)^2}}}\,.
\end{aligned}$$

d) Többszörösen összetett függvényről van szó. Az elemi függvények deriváltjait, valamint az összetett függvény deriválására vonatkozó tételt többször egymás után (kívülről befele haladva) alkalmazva azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R})$, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sin^2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)' = \\
&= 2\,\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right) \cdot \left(\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)' = \\
&= 2\,\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right) \cdot \cos\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right) \cdot \left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)' = \\
&= \sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \left(\sqrt{1+\cos^2 x}\right)' = \\
&= \frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot (1+\cos^2 x)' = \\
&= \frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot 2\,\cos x \cdot (-\sin x) = \\
&= \underline{\underline{-\frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{2\,(1+\cos^2 x)} \cdot \sin 2x}}\,.
\end{aligned}$$

A fenti átalakításokban kétszer alkalmaztuk a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ azonosságot.

5. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények differenciálhatók, és számítsuk ki a deriváltfüggvényeiket!*

a) $f(x) := \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1-x} \qquad (x > 0)$,

b) $f(x) := \left(\ln x\right)^{x+1} \qquad (x > 1)$.

Megoldás. Olyan hatványokról van szó, amelyeknél az alap és a kitevő is változik, vagyis az f függvény

$$f(x)=\Big(g(x)\Big)^{h(x)}$$

alakú, ahol a $g(x)$ alap pozitív. Az ilyen esetekben az átalakításhoz célszerű felhasználni a következő ***ötletet***: *írjuk fel a $g(x)$ alapot e hatványaként* az

$$a=e^{\ln a}\qquad (a>0)$$

azonosság felhasználásával. Így azt kapjuk, hogy

$$f(x)=\Big(g(x)\Big)^{h(x)}=\Big(e^{\ln g(x)}\Big)^{h(x)}=e^{h(x)\cdot\ln g(x)}.$$

Az f függvényt összetett függvényként fogjuk fel. Nevezetesen f az exp külső és a $h\cdot\ln\circ g$ belső függvény kompozíciója.

a) Az $a=e^{\ln a}$ $(a>0)$ azonosságot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f(x):=\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{1-x}=\Big(e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\Big)^{1-x}=e^{(1-x)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\underline{\exp\Big((1-x)\cdot\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big)}.$$

Az f függvény tehát az exp külső és az $(1-x)\cdot\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)$ $(x>0)$ belső függvény kompozíciója. Ezek a függvények minden $x>0$ pontban deriválhatók, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint $f\in D(0,+\infty)$, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\exp'\Big((1-x)\cdot\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big)\cdot\Big((1-x)\cdot\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big)'=\\&=\exp\Big((1-x)\cdot\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big)\cdot\\&\quad\cdot\Big((-1)\cdot\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)+(1-x)\cdot\ln'\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\cdot\Big(1+\frac{1}{x}\Big)'\Big)=\\&=\underline{\underline{\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{1-x}\cdot\Big(-\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)-\frac{1-x}{x\,(x+1)}\Big)}}.\end{aligned}$$

b) Mivel minden $x>1$ pontban

$$f(x)=\Big(\ln x\Big)^{x+1}=\Big(e^{\ln(\ln x)}\Big)^{x+1}=e^{(x+1)\cdot\ln(\ln x)}=\underline{\exp\Big((x+1)\cdot\ln(\ln x)\Big)},$$

ezért az elemi függvények deriváltjainak és a deriválási szabályoknak a felhasználásával azt kapjuk, hogy $f\in D(1,+\infty)$, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\exp'\Big((x+1)\cdot\ln(\ln x)\Big)\cdot\Big((x+1)\cdot\ln(\ln x)\Big)'=\\&=\exp\Big((x+1)\cdot\ln(\ln x)\Big)\cdot\Big(1\cdot\ln(\ln x)+(x+1)\cdot\ln'(\ln x)\cdot\ln' x\Big)=\\&=\underline{\underline{\Big(\ln x\Big)^{x+1}\cdot\Big(\ln(\ln x)+\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\Big)}}.\end{aligned}$$