Programozáselmélet - Szükséges matematikai alapok
Készítette: Borsi Zsolt

1. Halmazok

Matematikában gyakran használt halmazok jelölései:

$\mathbb{N}$	– a természetes számok halmaza, a nullát is beleértve
$\mathbb{N}^+$	– a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{Z}$	– az egész számok halmaza
$\mathbb{L}$	– a logikai értékek kételemű halmaza
$\emptyset$	– az üreshalmaz

A halmazokat gyakran vagy az elemeik felsorolásával (például a logikai értékek halmaza:)

$$\mathbb{L} ::= \{igaz, hamis\}$$

vagy egy tulajdonság megfogalmazásával (például a 100-nál nem nagyobb 5-tel osztható egészek halmaza:)

$$\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant 100 \wedge 5|x \}$$

adjuk meg.

Definíció (Intervallum)***:*** Az $[a..b] ::= \{ x \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant x \wedge x \leqslant b \}$ halmazt (ahol a és b egész számok) *intervallumnak* nevezzük. Ami üres, ha $a > b$.

Jelölés: Egy H halmaz számosságát $|H|$ jelöli. Azt, hogy egy H halmaz véges, így is írhatjuk: $|H| < \infty$.

2. Reláció

Definíció: Legyenek A és B tetszőleges nemüres halmazok. Ekkor az $A \times B$ halmaz az A és B *Descartes szorzata*, és

$$A \times B ::= \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

$A \times B$ elemei tehát olyan rendezett párok, ahol a pár első komponense A-ból, a második B-ből van.

Definíció (Reláció)***:*** Legyenek A és B tetszőleges nemüres halmazok. Ekkor az $A \times B$ halmaz minden R részhalmazát (tehát az üreshalmazt is) *relációnak* nevezzük.

Ha $(x, y) \in R$, akkor azt mondjuk hogy az R reláció x-hez hozzárendeli y-t.

Definíció: Legyenek A és B tetszőleges nemüres halmazok és $R \subseteq A \times B$ tetszőleges reláció. Az R reláció értelmezési tartománya:

$$\mathcal{D}_R ::= \{\, a \in A | \exists b \in B : (a, b) \in R \,\}$$

a reláció értékkészlete:

$$\mathcal{R}_R ::= \{\, b \in B | \exists a \in A : (a, b) \in R \,\}$$

a reláció értéke egy a helyen, vagy másképpen az a pont R reláció szerinti képe:

$$R(a) ::= \{\, b \in B | (a, b) \in R \,\}$$

Az $R \subseteq A \times B$ relációt felfoghatjuk egy leképezésnek, megfeleltetésnek is az A és a B halmaz elemei között.

3. Függvény

Speciális reláció a függvény.

Definíció (Függvény)***:*** Legyenek A és B tetszőleges nemüres halmazok és $R \subseteq A \times B$ tetszőleges reláció. Azt mondjuk hogy az R reláció determinisztikus, ha

$$\forall a \in A : |R(a)| \leqslant 1$$

A determinisztikus relációkat másképpen függvényeknek hívjuk. Az $R \subseteq A \times B$ függvénynek, mint speciális relációnak külön jelölést vezetünk be: $R \in A \to B$.

Jelölés: Ha az $f \in A \to B$ függvényre még az is teljesül, hogy értelmezési tartománya megegyezik az A halmazzal, vagyis ha

$$\forall a \in A : |f(a)| = 1$$

akkor a következő jelölést alkalmazzuk: $f \colon A \to B$.

Megjegyzés: Az olyan $f \in A \to B$ függvényeket melyek nem rendelnek minden A-beli elemhez egy B-beli elemet (vagyis nincsenek mindenhol értelmezve az A felett), parciális függvényeknek nevezzük.

Megjegyzés: Legyen $f \colon A \to B$ függvény (tehát tudjuk hogy az f reláció az A halmaz minden eleméhez pontosan egy B-belit rendel) és $a \in A$. Legyen továbbá $f(a) = \{b\}$ ahol $b \in B$ az a-hoz rendelt egyetlen elem. Ebben az esetben az $f(a)$ képet sokszor nem a $\{b\}$ egyelemű képhalmazként hanem egyszerűen csak mint b írjuk.